



**Kauno technologijos universitetas**  
Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

**Ekstremalaus bendrojo ozono kiekio tikimybinis vertinimas**  
Baigiamasis magistro studijų projektas

---

**Vėjūnė Bataitytė**  
Projekto autorė

**prof. dr. Robertas Alzbutas**  
Vadovas

---

**Kaunas, 2021**



**Kauno technologijos universitetas**  
Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

## **Ekstremalaus bendrojo ozono kiekio tikimybinis vertinimas**

Baigiamasis magistro studijų projektas  
Taikomoji matematika (6211AX006)

---

**Vėjūnė Bataitytė**

Projekto autorė

**prof. dr. Robertas Alzbutas**

Vadovas

**doc. dr. Audrius Kabašinskas**

Recenzentas

---

**Kaunas, 2021**



**Kauno technologijos universitetas**  
Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas  
Vėjūnė Bataitytė

## **Ekstremalaus bendrojo ozono kiekio tikimybinis vertinimas**

### Akademinio sąžiningumo deklaracija

Patvirtinu, kad:

1. baigiamąjį projektą parengiau savarankiškai ir sąžiningai, nepažeisdama kitų asmenų autoriaus ar kitų teisių, laikydamasi Lietuvos Respublikos autorių teisių ir gretutinių teisių įstatymo nuostatų, Kauno technologijos universiteto (toliau – Universitetas) intelektinės nuosavybės valdymo ir perdavimo nuostatų bei Universiteto akademinės etikos kodekse nustatytų etikos reikalavimų;
2. baigiamajame projekte visi pateikti duomenys ir tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti teisėtai, nei viena šio projekto dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar elektroninių šaltinių, visos baigiamojo projekto tekste pateiktos citatos ir nuorodos yra nurodytos literatūros sąrašė;
3. įstatymų nenumatytų piniginių sumų už baigiamąjį projektą ar jo dalis niekam nesu mokėjusi;
4. suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo ar kitų asmenų teisių pažeidimo faktui, man bus taikomos akademinės nuobaudos pagal Universitete galiojančią tvarką ir būsiu pašalinta iš Universiteto, o baigiamasis projektas gali būti pateiktas Akademinės etikos ir procedūrų kontrolieriaus tarnybai nagrinėjant galimą akademinės etikos pažeidimą.

Vėjūnė Bataitytė

*Patvirtinta elektroniniu būdu*

Bataitytė, Vėjūnė. Ekstremalaus bendrojo ozono kiekio tikimybinis vertinimas. Magistro studijų baigiamasis projektas / vadovas prof. dr. Robertas Alzbutas; Kauno technologijos universitetas, Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas.

Studijų kryptis ir sritis (studijų krypčių grupė): Taikomoji matematika (Matematikos mokslai).

Reikšminiai žodžiai: ekstremalių reikšmių teorija, bendrasis ozono kiekis, tikimybinis vertinimas.

Kaunas, 2021. 46 p.

### **Santrauka**

Ekstremalių reikšmių teorijos duomenų bloko maksimumo metodas taikomas Kauno meteorologijos stotyje matuojamo bendrojo ozono kiekio tikimybiniam vertinimui. Metiniams bendrojo ozono kiekio ekstremumams modeliuoti taikomi apibendrintas ekstremalių reikšmių skirstinys ir Gumbelio skirstinys, kuris yra atskiras apibendrinto ekstremalių reikšmių skirstinio atvejis. Nustatomas bendrojo ozono kiekio virš Lietuvos prilygstančio ozono skylei tikėtinas pasikartojimo periodas bei pasikartojimo periodai mažiausiai ir didžiausiai per visą stebėjimų laikotarpį Kauno meteorologinėje stotyje išmatuotoms bendrojo ozono kiekio reikšmėms.

Bataitytė, Vėjūnė. Probabilistic assessment of extreme total column ozone. Master's Final Degree Project / supervisor prof. dr. Robertas Alzbutas; Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Kaunas University of Technology.

Study field and area (study field group): Applied Mathematics (Mathematical Sciences).

Keywords: extreme value theory, total column ozone, probabilistic assessment.

Kaunas, 2021. 46 p.

### **Summary**

The block maxima approach in extreme value theory is utilized for probabilistic assessment of total column ozone measured in Kaunas meteorological station. Generalized extreme value distribution and Gumbel distribution, which is a special case of generalized extreme value distribution, are fitted to the samples of total column ozone annual extremes. The return period for the ozone hole level total column ozone is estimated, as well as the return periods for the absolute minimum and maximum total column ozone values measured during the complete observation period in Kaunas meteorological station.

## Turinys

<b>Lentelių sąrašas .....</b>	<b>7</b>
<b>Paveikslų sąrašas .....</b>	<b>8</b>
<b>Santrumpų sąrašas .....</b>	<b>9</b>
<b>Įvadas.....</b>	<b>10</b>
<b>1. Literatūros apžvalga .....</b>	<b>11</b>
1.1. Ekstremalių reikšmių teorija.....	11
1.1.1. Ekstremalių reikšmių teorijos taikymas .....	11
1.1.2. Nestacionarių ekstremalių reikšmių analizė.....	12
1.2. Atmosferos ozono procesai, stebėjimai ir tyrimai.....	12
1.2.1. Ozono atmosferoje susidarymas, pasiskirstymas ir svarba .....	12
1.2.2. Ozono stebėjimų istorija ir prietaisai.....	13
1.2.3. Ozono sluoksnio plonėjimas ir saugojimo priemonės.....	13
1.2.4. Ozono stebėjimai Lietuvoje.....	14
1.2.5. Ekstremalaus bendrojo ozono kiekio apibrėžimas .....	15
1.2.6. Bendrojo ozono kiekio ekstremumų tyrimai .....	15
1.2.7. Ozono tyrimai Lietuvoje.....	16
1.3. Apibendrinimas .....	16
<b>2. Duomenys ir tyrimo metodai.....</b>	<b>17</b>
2.1. Tyrimo objektas.....	17
2.2. Tyrimo schema .....	17
2.3. Ekstremalių reikšmių tikimybinis vertinimas.....	18
2.3.1. Maksimalaus tikėtino parametro įverčių nustatymo metodas .....	19
2.3.2. Pasikliautinis skirstinio intervalas.....	20
2.3.3. Skirstinio atrinkimo metodai .....	20
2.3.4. Ekstremalių reikšmių stacionarumo tyrimai.....	21
2.4. Programinė įranga .....	22
<b>3. Tyrimų rezultatai ir jų aptarimas.....</b>	<b>23</b>
3.1. Bendra duomenų apžvalga .....	23
3.2. Minimalaus metinio bendrojo ozono kiekio tikimybinis vertinimas.....	25
3.2.1. Modelių parametru nustatymas maksimalaus tikėtino metodo .....	25
3.2.2. GEV ir Gumbelio modelių palyginimas.....	25
3.3. Maksimalaus metinio bendrojo ozono kiekio tikimybinis vertinimas .....	29
3.3.1. Modelių parametru nustatymas maksimalaus tikėtino metodo .....	29
3.3.2. GEV ir Gumbelio modelių palyginimas.....	29
3.4. Bendrojo ozono kiekio ekstremumų stacionarumo tyrimas .....	33
<b>Išvados .....</b>	<b>35</b>
<b>Rekomendacijos tolimesniems darbams.....</b>	<b>36</b>
<b>Literatūros sąrašas .....</b>	<b>37</b>
<b>Priedai .....</b>	<b>41</b>
1 priedas. Minimalus vidutinis dienos BOK pagal mėnesį mėnesį skirtingais metais.....	41
2 priedas. Maksimalus vidutinis dienos BOK pagal mėnesį skirtingais metais .....	42
3 priedas. Klasikinių ekstremalių reikšmių skirstinių pasiskirstymo funkcijos .....	43
4 priedas. „R“ programos kodas .....	44

## Lentelių sąrašas

<b>1 lentelė.</b> BOK minimumų GEV ir Gumbelio modelių parametrų įverčiai.....	25
<b>2 lentelė.</b> BOK minimumų modelių tinkamumo lyginimas.....	26
<b>3 lentelė.</b> Tikėtinas minimalus BOK per pasirinktą pasikartojimo periodą.....	28
<b>4 lentelė.</b> Ozono skylės (220 DV) ir mažiausio Lietuvoje užfiksuoto (182 DV) BOK įvykio tikimybė ir pasikartojimo periodas .....	29
<b>5 lentelė.</b> BOK maksimumų GEV ir Gumbelio modelių parametrų įverčiai.....	29
<b>6 lentelė.</b> BOK maksimumų modelių tinkamumo lyginimas.....	30
<b>7 lentelė.</b> Tikėtinas maksimalus BOK per pasirinktą pasikartojimo periodą.....	32
<b>8 lentelė.</b> Didžiausio LT užfiksuoto (529 DV) BOK įvykio tikimybė ir pasikartojimo periodas.....	33
<b>9 lentelė.</b> ADF testo rezultatai.....	33
<b>10 lentelė.</b> KPSS testo rezultatai .....	33
<b>11 lentelė.</b> Minimalaus BOK Mann-Kendall trendo testo rezultatai.....	33

## Paveikslų sąrašas

<b>1 pav.</b> BOK pasiskirstymas virš Šiaurės Pusrutulio 2020 m. lapkričio 19 d. <sup>[16]</sup> .....	13
<b>2 pav.</b> „Brewer“ spektrofotometras ant Kauno MS stogo <sup>[23]</sup> .....	14
<b>3 pav.</b> Tyrimo schema .....	17
<b>4 pav.</b> Minimumai pagal mėnesius.....	23
<b>5 pav.</b> Maksimumai pagal mėnesius .....	23
<b>6 pav.</b> Metiniai BOK minimumai ir maksimumai, tiesinė regresija .....	24
<b>7 pav.</b> Duomenų variacijos koeficientas pagal metus .....	25
<b>8 pav.</b> BOK minimumų GEV modelio grafinis tinkamumo patikrinimas .....	26
<b>9 pav.</b> BOK minimumų Gumbelio modelio grafinis tinkamumo patikrinimas .....	26
<b>10 pav.</b> BOK minimumų GEV teorinė pasiskirstymo funkcija (mėlyna) su 0,9 pasiklivimo lygmens intervalais (raudona) bei empirinė pasiskirstymo funkcija (juoda) .....	27
<b>11 pav.</b> BOK minimumų Gumbelio teorinė pasiskirstymo funkcija (mėlyna) su 0,9 pasiklivimo lygmens intervalais (raudona) bei empirinė pasiskirstymo funkcija (juoda) .....	27
<b>12 pav.</b> BOK minimumų GEV (mėlyna) ir Gumbelio (žalia) teoriniai skirstiniai .....	28
<b>13 pav.</b> BOK maksimumų GEV modelio grafinis tinkamumo patikrinimas.....	30
<b>14 pav.</b> BOK minimumų GEV modelio grafinis tinkamumo patikrinimas .....	30
<b>15 pav.</b> BOK maksimumų GEV teorinė pasiskirstymo funkcija (mėlyna) su 0,9 pasiklivimo lygmens intervalais (raudona) bei empirinė pasiskirstymo funkcija (juoda) .....	31
<b>16 pav.</b> BOK maksimumų Gumbelio teorinė pasiskirstymo funkcija (mėlyna) su 0,9 pasiklivimo lygmens intervalais (raudona) bei empirinė pasiskirstymo funkcija (juoda) .....	31
<b>17 pav.</b> BOK maksimumų GEV (mėlyna) ir Gumbelio (žalia) modelių teorinės pasiskirstymo funkcijos .....	32



## Santrumpų sąrašas

AIC – Akaike informacinis kriterijus;

BIC – Bajeso informacinis kriterijus;

BOK – bendrasis ozono kiekis;

CAMS – Koperniko atmosferos stebėjimo tarnyba (angl. *Copernicus Atmosphere Monitoring Service*);

DV – Dobsono vienetas;

ERT – ekstremalių reikšmių teorija;

GEV – apibendrintas ekstremalių reikšmių skirstinys (angl. *Generalized extreme value distribution*);

GPD – apibendrintas Pareto skirstinys (angl. *Generalized Pareto distribution*);

LHMT – Lietuvos hidrometeorologijos tarnyba;

MS – meteorologijos stotis;

PMO – Pasaulinė meteorologijos organizacija;

WOUDC – Pasaulio ozono ir ultravioletinės saulės spinduliuotės duomenų centras (angl. *World Ozone and Ultraviolet Radiation Data Centre*).

## Įvadas

Ozono sluoksnis – tai Žemės atmosferos dalis 15-40 km aukštyje, kurioje yra susikaupę apie 90 proc. atmosferoje esančių ozono dujų. Ozono sluoksnis yra svarbus dėl gyvai gamtai kenksmingos ultravioletinės spinduliuotės sugėrimo. 1985 m. atradus neįprastą ozono sluoksnio suplonėjimą – ozono skylę virš Antarktidos – buvo pasirašytos tarptautinės sutartys dėl ozono sluoksnį ardančių medžiagų naudojimo reguliavimo, ozono sluoksnio atstatymo strategijos. Vėliau neįprasti ozono sluoksnio suplonėjimai buvo pastebėti ir šiaurės pusrutulyje. Ozono sluoksnio tyrimai yra aktualūs vertinant žmogaus veiklos poveikį sluoksnio plonėjimui, nustatant reguliavimų įtaką sluoksnio atsistatymui, tiriant klimato kaitos dinamiką.

Bendrasis ozono kiekis yra dydis, nurodantis, kiek ozono yra atmosferoje virš tam tikros pasaulio vietos. Bendrasis ozono kiekis yra matuojamas antžeminiiais prietaisais daugiau nei 300 meteorologijos stočių pasaulyje, taip pat bendrojo ozono kiekį matuoja prietaisai palydovuose. Bendrojo ozono kiekio matavimai yra svarbūs ozono sluoksnio būklei bei pokyčiams vertinti. Lietuvoje bendrojo ozono kiekio matavimai pradėti vykdyti 1993 m. Kauno meteorologijos stotyje. Tyrimų, kurie atliktų bendrojo ozono kiekio tikimybinį vertinimą, pavyzdžiui, ozono skylių susidarymo tikimybę, Lietuvoje atlikta nebuvo.

Darbe nagrinėta ekstremalių reikšmių teorija yra dažnai taikoma įvairiems ekstremaliems meteorologiniams įvykiams modeliuoti ir prognozuoti, tačiau mokslinių publikacijų, kuriose būtent bendrojo ozono kiekio modeliavimas atliekamas pasitelkiant ekstremalių reikšmių teoriją, yra nedaug. Ekstremalių įvykių tikimybinis vertinimas apima ekstremalių įvykių dažnio bei ekstremalių įvykių pasikartojimo periodo įvertinimą. Įprasti statistiniai metodai ekstremalioms reikšmėms vertinti ir modeliuoti netinka, nes dažnai yra siekiama vertinti rizikas ir tikimybes tokiems reikiams įvykiams, kurie dar net nėra įvykę per visą stebėjimų istoriją.

Šiame tyrime ekstremalių reikšmių teorija yra taikoma tokiam bendrojo ozono kiekio tikimybiniam vertinimui, kuris vėliau pasitarnautų vertinant atitinkamą ekstremumų riziką. Tyrimui naudojami 1993-2020 m. Kauno meteorologijos stotyje išmatuotų bendrojo ozono kiekio dienos vidurkių duomenys. Iš jų yra sudaromos minimalių ir maksimalių bendrojo ozono kiekio imtys, kurios yra toliau naudojamos tikimybinio vertinimo modeliams sudaryti.

Stebėtų minimumų ir maksimumų atvejams yra nustatomi ekstremalių reikšmių skirstinių – apibendrinto ekstremalių reikšmių skirstinio (GEV) ir Gumbelio – parametrų įverčiai, vertinamas skirstinių atitikimas nagrinėjamiems duomenims. Iš vertinimui tinkamų skirstinių skaičiuojamos maksimalaus ir minimalaus bendrojo ozono kiekio tikimybinės charakteristikos: pasikartojimo periodas pasirinktai reikšmei, tikėtina didžiausia (mažiausia) reikšmė per pasirinktą periodą.

Šio darbo tikslas – ekstremalaus bendrojo ozono kiekio Lietuvoje tikimybinis vertinimas.

Uždaviniai:

1. tikimybiškai įvertinti ir prognozuoti minimalaus metinio bendrojo ozono kiekio atvejus;
2. tikimybiškai įvertinti ir prognozuoti maksimalaus metinio bendrojo ozono kiekio atvejus;
3. tikimybiškai įvertinti žemesnio nei 220 DV bendrojo ozono kiekio, atitinkančio ozono skylės lygį, metinio minimumo virš Lietuvos tikimybę ir pasikartojimo periodą.

## 1. Literatūros apžvalga

### 1.1. Ekstremalių reikšmių teorija

Ekstremalių reikšmių teorija (ERT) yra statistikos sritis nagrinėjanti retus, ekstremalius įvykius. Ekstremalios reikšmės – tai yra didžiausios (mažiausios) atsitiktinio kintamojo reikšmės, jų įvykimo tikimybė yra nedidelė. ERT yra plačiai taikoma meteorologijos, aplinkosaugos, geologijos, finansų, draudimo ir kitose srityse, kuriose ekstremalūs įvykiai yra pavojingi žmonių gyvybėms ar yra finansiškai nuostolingi. Ekstremalių įvykių tikimybinis vertinimas siekia įvertinti ekstremalių įvykių dažnį bei ekstremalių įvykių pasikartojimo periodą, pasikliautinuosius intervalus. Įprasti statistiniai metodai ekstremalioms reikšmėms vertinti ir modeliuoti dažnai netinka, nes yra siekiama vertinti tikimybes tokiems retiems įvykiams, kurie kartais nėra įvykę ir per visą stebėjimų istoriją<sup>[1]</sup>.

ERT pradininkais yra laikomi R. A. Fisher'is ir L. H. C. Tippett'as. ERT turi du metodus, pagal kuriuos yra tiriamos ekstremalios reikšmės. Pirmasis – duomenų bloko maksimumo metodas. Naudojant šį metodą turima duomenų imtis yra suskirstoma į duomenų blokus, kiekviename duomenų bloke išrenkama ekstremali reikšmė, toliau yra tiriami šie ekstremalių duomenų imtis. Šio metodo teorinis pagrindas yra toks, kad bet kokio nepriklausomo ir vienodai pasiskirsčiusio skirstinio uodegos funkcija didėjant imčiai asimptotiškai artėja į vieną iš trijų tipų ekstremalių skirstinių šeimų – Gumbelio, Veibulo arba Frechet. Visus tris ekstremalius skirstinių tipus apibendrina apibendrintas ekstremalių (GEV) skirstinys. GEV skirstinys turi tris parametrus: vietos parametras  $\mu$ , mastelio parametras  $\sigma$  ir formos parametras  $\xi$ . Kitas ERT principas – reikšmių virš slenkščio. Naudojant šį metodą yra pasirenkamas slenkstis ir yra suskaičiuojama, kiek reikšmių viršija šį slenkstį per tam tikrą periodą. Šio metodo teorinis pagrindas – didėjant imčiai atsitiktinio kintamojo reikšmių, viršijančių tam tikrą slenkstį, skaičius asimptotiškai artėja į apibendrintą Pareto (GPD) skirstinį<sup>[1]</sup>.

Nustatyti skirstinio, kuris geriausiai apibūdina nagrinėjamą duomenų imtį, parametrų įverčius naudojami keli skirstinių parametrų įverčių metodai: maksimalaus tikėtino, momentų, Bajeso<sup>[1]</sup>. Įvertinti, kuris teorinis skirstinys pakankamai gerai atitinka nagrinėjamus duomenis, taikomi grafiniai skirstinių palyginimo metodai, suderinamumo bei informaciniai kriterijai<sup>[2]</sup>.

ERT yra plačiai naudojama meteorologinių reiškinių, tokių kaip temperatūros, krituliai, vėjai, tyrimų srityje. Šie tyrimai yra aktualūs dėl potencialios žalos, kurią sukeltų šių reiškinių ekstremalūs įvykiai. Pavyzdžiui, itin didelė liūtis gali sukelti užtvankos griūtį.

Lietuviškuose straipsniuose ir baigiamuosiuose darbuose dažniausiai aprašomas ekstremalių meteorologinių reiškinių tikimybinis vertinimas: temperatūrų<sup>[3,4]</sup>, vėjų<sup>[5]</sup>, kritulių<sup>[6,7]</sup>, viesulų<sup>[8]</sup>. Kitos sritys kuriose atliktas ekstremalių tikimybinis vertinimas yra sistemų gedimai<sup>[9]</sup>, lėktuvų avarijos<sup>[10]</sup>, saulės magnetinės audros<sup>[11]</sup>.

#### 1.1.1. Ekstremalių reikšmių teorijos taikymas

Duomenų bloko maksimumo ERT metodas leidžia atlikti reiškinio tikimybinį vertinimą. Svarbi tikimybinė charakteristika yra pasikartojimo periodas tam tikrai ekstremaliai reikšmei: vidutiniškai kas kiek periodų bus viršyta pasirinkta reikšmė. Dažnai naudojamas duomenų bloko ilgis yra vieneri metai, nes daug meteorologinių reiškinių yra sezoniški.

## 1.1.2. Nestacionarių ekstremalių reikšmių analizė

Klimato reiškiniuose gali būti pastebimas ekstremalių reikšmių imties nestacionarumas – klimato kaita gali lemti dažnesnius bei intensyvesnius ekstremalius įvykius. Tradiciniai ERT metodai yra tinkami su prielaida, jog ekstremumai yra stacionarūs. Jeigu ekstremalių reikšmių imtis yra nestacionari, tuomet yra taikomi metodai, kurie leistų įprastai charakteristikas skaičiuoti priklausomai nuo laiko ar kitų nepriklausomų kintamųjų. Paprasčiausias nestacionarumas gali pasireikšti keliais būdais: laikui bėgant gali kisti vidurkis ir/ar variacija<sup>[12,13]</sup>. Sudėtingesniais nestacionarumo atvejais gali kisti skirstinio asimetrija, ar pačio skirstinio forma. Jeigu bėgant laikui kinta skirstinio parametrai, GEV skirstinyje jie gali būti pakeisti nuo laiko priklausančiomis funkcijomis. Dažniausiai taip keičiami vietos ( $\mu = \mu(t)$ ) bei mastelio ( $\sigma = \sigma(t)$ ) parametrai, formos parametras  $\xi$  modeliuoti tokiu būdu yra sudėtinga.

## 1.2. Atmosferos ozono procesai, stebėjimai ir tyrimai

### 1.2.1. Ozono atmosferoje susidarymas, pasiskirstymas ir svarba

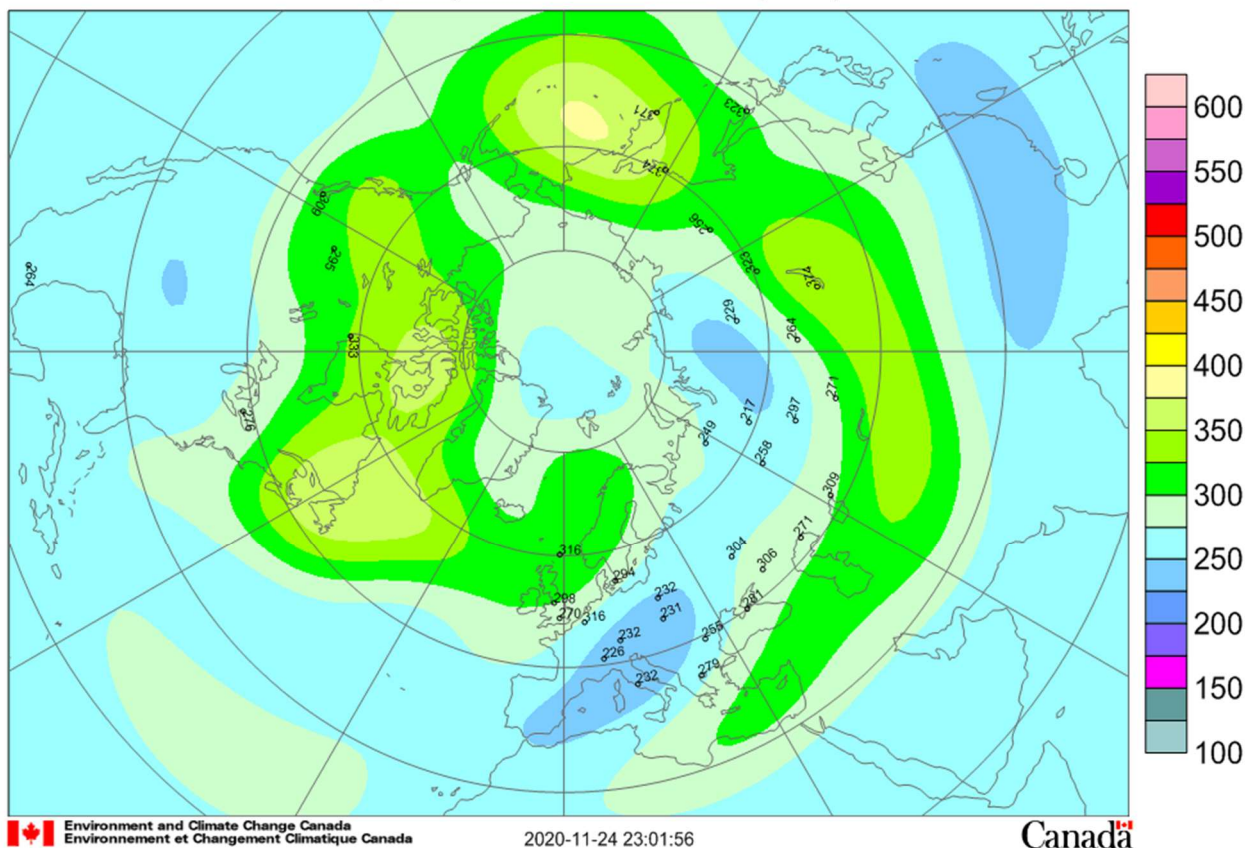
Ozonas yra aktyvios dujos, sudarytos iš trijų deguonies atomų. Ozonas sudaro nedidelę dalį Žemės atmosferos, tačiau yra svarbus dėl kelių aspektų. Ozono sluoksnio būklė yra susijusi su klimato kaita: klimato kaita turi įtakos stratosferos temperatūroms ir oro masių cirkuliacijai, dėl kurios keičiasi fiziniai ir cheminiai procesai, lemiantys ozono sluoksnio būseną, o ozono sluoksnio irimas turi įtakos troposferos klimatui. Ozono sluoksnį ardantys chlorofluorangliavandeniliai galimai yra ir šiltnamio dujos, prisidedančios prie klimato šiltėjimo, todėl jų ribojimas saugant ozono sluoksnį prisidėjo ir prie klimato atšilimo mažinimo. Taip pat ozonas saugo žmones ir gyvąją gamtą nuo žalingų ultravioletinių saulės spindulių<sup>[14]</sup>.

BOK yra matuojamas Dobsono vienetais (DV). 100 DV atitiktų 1 mm storio ozono dujų sluoksnį 0 °C temperatūroje ir 1013 hPa atmosferos slėgio sąlygomis.

Atmosferoje vertikaliai ozonas pasiskirstęs netolygiai: didžioji ozono dalis (apie 90 proc.) yra stratosferoje, 15-40 km aukštyje, apie 10 proc. – troposferoje, iki 15 km aukščio. Stratosferoje horizontaliai ozonas taip pat yra pasiskirstęs netolygiai ir nuolat kinta, skirtingą ozono pasiskirstymą platumose lemia trys pagrindiniai procesai: fotocheminė ozono gamyba, fotocheminis ozono nykimas ir pernešimo procesai<sup>[14]</sup>. Daugiausia ozono susidaro tropinėse platumose dėl intensyvios ultravioletinės spinduliuotės, o Dobson'o-Brewer'io cirkuliacijos metu ozonas yra pernešamas link ašigalių. Lietuva yra vidutinėse platumose, čia ozono kiekį lemia ozono atnešamo iš tropinių platumų pokyčiai, iš poliarinių regionų atnešamo ozono pokyčiai bei ozono sluoksnio nykimo procesai<sup>[14]</sup>. Ozono kiekiui įtakos turi ir nepastovaus periodo orų, vėjų, vandenyno srovių osciliaciniai reiškiniai, pavyzdžiui El Ninjo-Pietų osciliacija, Šiaurės Atlanto osciliacija.

1 paveiksle pavaizduota BOK pasiskirstymas virš Šiaurės pusrutulio 2020 m. lapkričio 19 d., paveiksle galima matyti sritis pagal BOK koncentraciją. Dėl šią dieną Lietuvoje užfiksuoto BOK (238 DV) Lietuvos hidrometeorologijos tarnyba (LHMT) pranešė, kad jog buvo nustatytas 20 proc. sumažėjimas nuo daugiamečio vidurkio<sup>[15]</sup>.

## Total ozone (DU) / Ozone total (UD), 2020/11/19



1 pav. BOK pasiskirstymas virš Šiaurės Pusrutulio 2020 m. lapkričio 19 d.<sup>[16]</sup>

### 1.2.2. Ozono stebėjimų istorija ir prietaisai

Pastovūs BOK matavimai pradėti vykdyti 1924 m. G. M. B. Dobson'o sukonstruotu spektrografu. 1927 m. šio mokslininko iniciatyva buvo sukurtas pasaulinis ozono stebėjimo stočių tinklas. 1959 m. Sovietų sąjungoje sukurtas „M-83“ ozonometras, kuris daugiausia buvo naudojamas Sovietų Sąjungos ozono stebėjimo stočių tinkle. 1984 m. buvo nustatytas kiekvieną antarktinį pavasarį pasikartojantis BOK sumažėjimas virš Antarktidos. Ši sritis, kurioje BOK yra mažesnis nei 220 DV, buvo pavadinta ozono skylė<sup>[14]</sup>.

Šiais laikais BOK stebėjimai yra vykdomi skirtingais metodais ir prietaisais, kurių suteikiama informacija leidžia įvairiapusiškiau vertinti ozono sluoksnio būklę. BOK matavimo prietaisai gali būti skirstomi pagal prietaisų lokaciją. Antžeminiai prietaisai yra naudojami meteorologinėse stotyse (MS) matuoti BOK lokaliai virš prietaiso. Zondai su BOK matavimo įranga yra naudojami matuoti, kaip ozonas yra pasiskirstęs vertikaliai. Palydoviniai BOK matavimo prietaisai ir matematiniai modeliai leidžia nustatyti erdvinę ozono pasiskirstymo informaciją virš bet kurios pasaulio vietos<sup>[14]</sup>.

### 1.2.3. Ozono sluoksnio plonėjimas ir saugojimo priemonės

Be gamtinių reiškinių, lemiančių ozono kitimą atmosferoje, buvo nustatyta, jog ir žmogaus veikla turi įtakos ozono sluoksniui. Paaiškėjo, jog pramonėje naudojami inertiški chloro junginiai reaguodami su ultravioletine spinduliuote skyla, susidaręs aktyvus chloras dalyvauja ozono skilimo reakcijose. Atradus ozono skylę virš Antarktidos ir siekiant sumažinti žmogaus įtaką ozono sluoksnio būklei 1985 m. Vienoje 44 valstybių atstovų buvo priimta „Ozono sluoksnio apsaugos konvencija“, o 1987

m. pasirašytas Monrealio protokolas dėl ozono sluoksnį ardančių medžiagų reguliavimo. Lietuvos Respublika prie Vienos konvencijos ir Monrealio protokolo prisijungė 1994 m.<sup>[17]</sup> Priėmus šias priemones ozoną ardančių medžiagų naudojimas reikšmingai sumažėjo<sup>[14]</sup>.

Pasaulyje veikia ne viena organizacija, kuri atlieka ozono tyrimus. Pasaulinė meteorologijos organizacija (PMO) vykdo Pasaulinę atmosferos stebėjimo programą (GAW), kurios tikslas yra visapusiškai suprasti atmosferos sandarą, pasikeitimus, sąveiką su vandenynais ir biosfera. GAW atlieka atmosferos, tarp jų ir ozono, tyrimus, teikia mokslinę informaciją sprendimų priėmėjams. GAW programai priklauso apie 100 valstybių<sup>[18]</sup>. Pasaulio ozono ir ultravioletinės saulės spinduliuotės duomenų centras (WOUDC) Kanadoje, priklausantis GAW programai, renka duomenis iš daugiau nei 500 antžeminių MS, WOUDC duomenys yra viešai prieinami<sup>[19]</sup>. NASA nuo 1979 m. stebi BOK palydoviniais instrumentais, sudaro BOK pasiskirstymo erdvinius žemėlapius, BOK prognozes<sup>[20]</sup>. Europos Sąjungos iniciatyva veikia Koperniko atmosferos stebėjimo tarnyba (CAMS), kuri naudoja prieinamus BOK matavimus ir taiko matematinius metodus tam, kad teiktų kokybišką informaciją apie ozono sluoksnio būklę<sup>[21]</sup>.

PMO kas ketverius metus ruošia ozono sluoksnio plonėjimo vertinimo ataskaitą, naujausia ataskaita pristatyta 2018 m.<sup>[22]</sup>. Ataskaitoje rašoma, jog yra tikimasi, kad šiaurės pusrutulio vidutinių platumų BOK lygis grįš į 1980 m. lygį XX a. 4-ajame deš., o 2100 m. tikimasi viršyti 1960-1980 m. vidutinį BOK.

#### 1.2.4. Ozono stebėjimai Lietuvoje

Reguliarūs BOK matavimai Lietuvoje pradėti vykdyti 1993 m. filtriniu ozonometru „M83“ Kauno MS. 2015 m. LHMT įsigijo „Brewer“ spektrofotometrą, nuo 2018 m. jis naudojamas reguliariai. LHMT BOK stebėjimų duomenis teikia WOUDC. „Brewer“ spektrofotometru (žr. 2 pav.) atliekami matavimai yra tikslesni, matavimai atliekami nuolat, automatiškai, o anksčiau naudoto filtrinio ozonometro matavimai buvo atliekami rankiniu būdu, kelis kartus per dieną, tinkamomis oro sąlygomis.



2 pav. „Brewer“ spektrofotometras ant Kauno MS stogo<sup>[23]</sup>

### 1.2.5. Ekstremalaus bendrojo ozono kiekio apibrėžimas

Dėl BOK dinamikos nėra vienareikšmiško apibrėžimo, koks BOK yra laikomas ekstremaliu. Fiksuota 220 DV BOK reikšmė yra dažnai naudojama ozono sluoksnio skylėms identifikuoti<sup>[24]</sup>. BOK ekstremumų tyrimuose naudojami įvairūs kriterijai ekstremaliam BOK nustatyti: fiksuotas 70 DV nuokrypis nuo daugiamečio vidurkio<sup>[25]</sup>, kintantys 20 proc.<sup>[26]</sup>, vieno<sup>[27]</sup> arba dviejų<sup>[28]</sup> standartinių nuokrypių nuo daugiamečio vidurkio apibrėžimas ekstremaliai žemam bei ekstremaliai aukštam BOK nustatyti.

### 1.2.6. Bendrojo ozono kiekio ekstremumų tyrimai

Literatūroje nebuvo rasta pavyzdžių, kur ERT būtų taikoma BOK ekstremumų tikimybiniam vertinimui. Rasta tyrimų, kur ERT reikšmių virš slenksčio metodika taikyta siekiant susieti ekstremalių BOK atvejų dažnį su dinaminiais atmosferos ir cheminiais procesais, tirti jų įtaką BOK kintamumui. Šiuose tyrimuose taikomas reikšmių virš slenksčio metodas: pagal pasirinktą pastovų ar kintantį BOK slenkstį yra identifikuojami ekstremaliai aukšto ir ekstremaliai žemo BOK atvejai, nustatomi istoriniai metiniai dažniai, tuomet ekstremalių įvykių dažnių imčiai yra taikomas GPD skirstinys. Tyrimuose yra atliekami ekstremumų dažnio įtakos metiniam BOK kintamumui tyrimai, siekiama įvertinti dinaminių klimato ir cheminių reiškinių įtaką BOK tendencijoms ir BOK ekstremalioms reikšmėms.

Šią metodiką pasiūlė H. E. Rieder ir kt.<sup>[29]</sup>, autoriai teigia pirmieji naudojantys ERT BOK ekstremumų tyrimų srityje. Autoriai atliko BOK virš Arosos miesto Šveicarijoje tyrimą 1927-2008 m. laikotarpiu. Atliktas ekstremalių BOK reikšmių dažnio tyrimas parodė, kad pastaraisiais dešimtmečiais didėjo ekstremaliai žemo BOK atvejų dažnis, mažėjo ekstremaliai aukšto BOK atvejų dažnis. ERT taikymas suteikė naujų įžvalgų apie BOK laiko eilutės savybes: El Ninjo-Pietų osciliacijos, Šiaurės Atlanto osciliacijos, ugnikalnių išsiveržimo įtaką BOK. Taip pat autoriai GPD skirstinį naudoja pačioms ekstremumų reikšmėms, o ne dažniams, modeliuoti. Autoriai parodo, jog GPD skirstinys BOK ekstremumams modeliuoti tinka geriau nei ankstesniuose tyrimuose naudotas Gauso skirstinys, dėl didelio ekstremaliai aukštų ir ekstremaliai žemų BOK įvykių dažnio – sunkių „uodegų“.

Antroje tyrimo dalyje<sup>[30]</sup> Rieder ir kt. toliau tiria dinaminių ir cheminių faktorių įtaką ekstremalių BOK atvejų dažniui, teigia, jog ERT taikymas leidžia identifikuoti daugiau tokių faktorių, negu tradiciniai laiko eilučių tyrimų metodai, grįsti vidurkiais.

Kitame tyrime H. E. Rieder ir kt.<sup>[31]</sup> tą patį tyrimo principą taiko 5 Europos MS BOK duomenims. Autoriai dar kartą parodo El Ninjo-Pietų osciliacijos, Šiaurės Atlanto osciliacijos reikšmingą įtaką BOK kintamumui, teigia, jog ugnikalnių išsiveržimai turi įtakos ir aukšto, ir žemo BOK atvejų dažniui. Autoriai akcentuoja, jog dinaminių ir cheminių reiškinių įtaką BOK pasikeitimams gali būti sunku atskirti, nes šie procesai gali vykti vienu metu. Šiuo tyrimu autoriai dar kartą parodo jog, ERT yra naudingas įrankis BOK laiko eilutėms tirti, nes gali suteikti gilesnį požiūrį BOK duomenų savybėms nei naudojant standartinius metodus.

Rieder ir kt. pasiūlyta metodika remiasi ir daugiau tyrimų, kurių rezultatai panašūs<sup>[32,33]</sup>: parodo El Ninjo-Pietų osciliacijos, Šiaurės Atlanto osciliacijos, ugnikalnių išsiveržimų įtaką BOK Šiaurės Amerikoje ir Graikijoje.

### **1.2.7. Ozono tyrimai Lietuvoje**

S. Tretjekovas 2012 m. apgynė daktaro disertaciją<sup>[34]</sup> tema „Bendro ozono kiekio tyrimai ir matavimo metodų tobulinimas“. Disertacijoje autorius pristato kompleksinį BOK stebėjimų sistemos modelį, apimančią BOK matavimo įrenginių tobulinimą, matematinių modelių, leidžiančių tiksliau matuoti BOK, naudojimą. Taip pat autorius parodo, jog Lietuvos ir kaimyninių šalių BOK pokyčiai yra stipriai koreliuoti, siūlo, jog Lietuvoje trūkstant BOK duomenų, juos galima interpoliuoti iš kaimyninių šalių BOK duomenų. Autorius įvardina, jog sudarytas kompleksinis BOK stebėjimo sistemos modelis galėtų būti naudojamas tiksliau matuoti BOK pokyčius realiame laike ir ozono skylės atsiradimo momentus, prognozuoti potencialią ultravioletinės spinduliuotės įtaką aplinkai.

### **1.3. Apibendrinimas**

Įvairių meteorologinių bei klimato reiškinių ekstremalių reikšmių modeliavimas ekstremalių reikšmių skirstiniais leidžia atlikti reiškinio ekstremalių įvykių tikimybinį vertinimą. Iki šiol BOK tyrimų srityje ERT metodų taikymas yra ribotas. ERT duomenų bloko maksimumo metodo naudojimas Lietuvoje stebimo BOK duomenims leis įvertinti svarbias BOK ekstremumų charakteristikas, tokias kaip ozono skylės pasikartojimo periodas metais, tikimybę ozono skylei atsirasti virš Lietuvos per vienerius metus. Šio tyrimo naujumas – GEV skirstinio taikymas BOK metinių minimumų ir maksimumų tikėtinumui vertinti, iki šiol tokių tyrimų atlikta nebuvo.



## 2. Duomenys ir tyrimo metodai

### 2.1. Tyrimo objektas

Tyrimo objektas yra Kauno MS matuojamo metinės minimalios ir maksimalios BOK reikšmės.

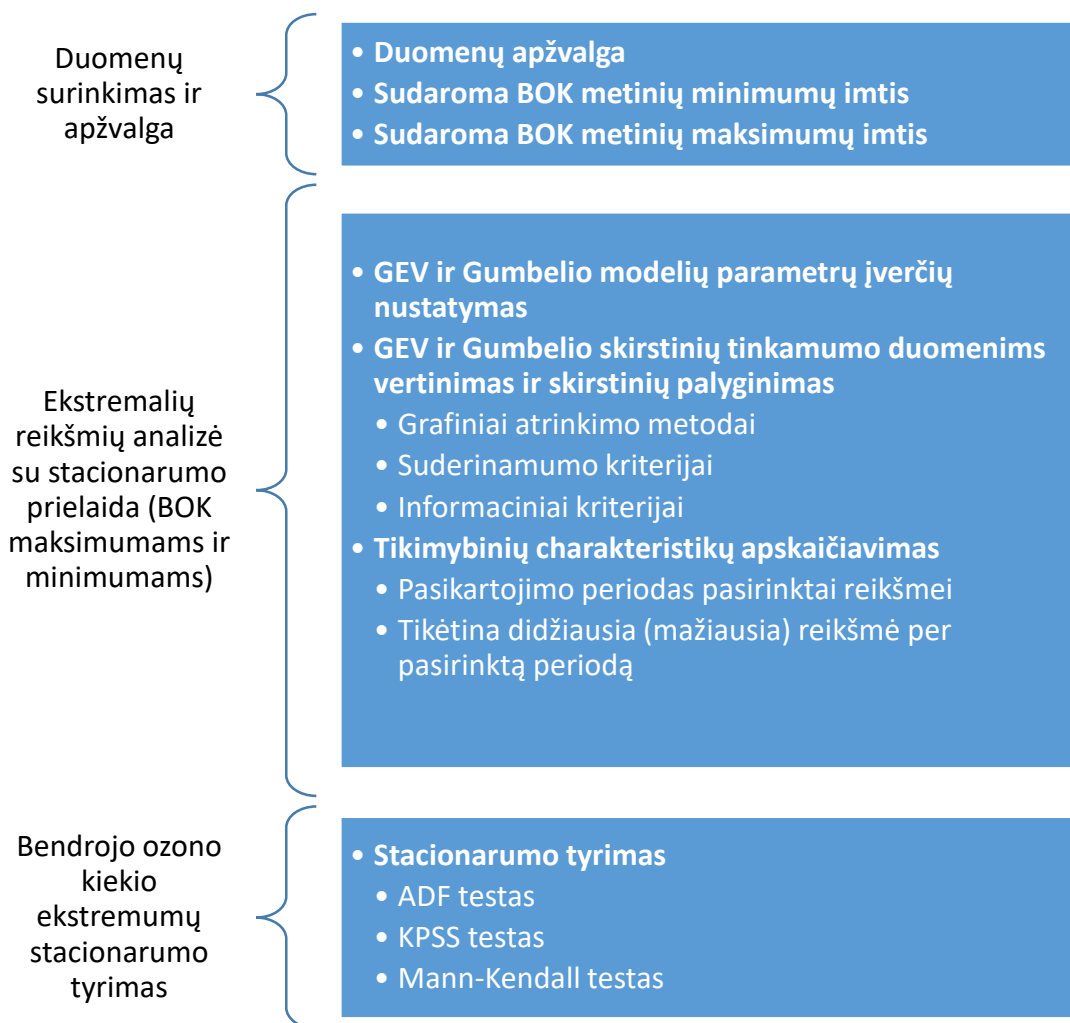
BOK duomenys yra gauti iš WOUDC svetainės<sup>[35]</sup>, svetainėje yra prieinamos vidutinės dienos BOK reikšmės. Tyrime naudotų BOK duomenų iš Kauno MS laikotarpis yra 1993 sausis – 2020 gruodis.

Tikrinant ir vertinant, ar duomenys yra pilni visam laikotarpiui, paaiškėjo:

- 16 mėnesių neturi duomenų nei vienai dienai, t. y. tie duomenys nepateikiami, nes galimai nebuvo užfiksuoti;
- 1999 m. neturi 4 mėnesių iš eilės, dėl to 1999 m. duomenys tyrime nenaudojami;
- kitais mėnesiais yra bent 20 dienų duomenų.

### 2.2. Tyrimo schema

Tyrimo schema pavaizduota 1 pav.



3 pav. Tyrimo schema

### 2.3. Ekstremalių reikšmių tikimybinis vertinimas

Šioje dalyje apžvelgiama duomenų bloko maksimumo metodologija skirta ekstremalių įvykių tikimybiniam vertinimui.

Tarkime,  $Y_1, \dots, Y_n$  yra nepriklausomai ir vienodai pasiskirsčiusio kintamojo imtis. Ši imtis, turinti  $n = km$  elementų, yra padalijama į  $k$  duomenų blokų, kiekviename duomenų bloke yra po  $m$  reikšmių. Tuomet kiekvieno duomenų bloko maksimumas  $X_i$  apibrėžiamas:

$$X_i = \max_{(i-1)m < j < im} Y_j, \quad (1)$$

čia  $i = 1, \dots, k$ .

Taip sudaroma maksimalių reikšmių seka  $X_1, \dots, X_n$ . Praktikoje dažnai duomenų blokai yra pagrįsti laiko vienetais ir yra sudaromos dienos, mėnesio, metų ar pan. maksimalių reikšmių sekos. Čia ir toliau metodologijoje yra kalbama apie maksimalias reikšmes, tačiau šie metodai gali būti pritaikomi ir minimalioms reikšmėms. Norint šią teoriją taikyti minimumams, vienas iš naudojamų būdų yra transformuoti duomenis juos paneigiant (kai reikšmės ženklas pakeičiamas į priešingą, pvz. iš teigiamo pakeičiant į neigiamą); tuomet dėl galiojančios lygybės

$$\min(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\max(-X_1, -X_2, \dots, -X_n) \quad (2)$$

maksimalioms reikšmėms taikomi metodai gali būti naudojami minimalioms reikšmėms tirti.

Ekstremalių įvykių tikimybinis vertinimas leidžia prognozuoti ekstremalius įvykius ar jų pasikartojimo dažnius (bei periodus).

ERT duomenų bloko maksimumo principas yra pagrįstas Fisher-Tippett-Gnedenko teorema, kuri rodo, jog jei normalizuotų duomenų bloko maksimumų skirstinys konverguoja, ribinis skirstinys priklauso vienai iš trijų – Gumbelio, Veibulo arba Frechet – skirstinių šeimų. Šias 3 skirstinių šeimas apibendrina vienas trijų parametrų modelis – apibendrintas ekstremalių reikšmių (GEV) skirstinys<sup>[1]</sup>. Klasikinių ekstremalių reikšmių skirstinių išraiškos yra pateikiamos 3 priede.

GEV skirstinio tankio funkcija:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{z - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} e^{-\left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right]}, & 1 + \xi \frac{z - \mu}{\sigma} > 0, \quad \text{kai } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} e^{-\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right) - e^{\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)}}, & \text{kai } \xi = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

čia  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $\sigma > 0$ ,  $-\infty < \xi < \infty$ .

GEV pasiskirstymo funkcija:

$$F(z) = P(X \leq z) = \begin{cases} e^{-\left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right]}, & 1 + \xi \frac{z - \mu}{\sigma} > 0, \quad \text{kai } \xi \neq 0 \\ e^{-e^{\left[-\frac{z - \mu}{\sigma}\right]}}, & \text{kai } \xi = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

čia  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $\sigma > 0$ ,  $-\infty < \xi < \infty$ .

GEV skirstinį nusako trys parametrai:

- vietos parametras  $\mu \in \mathbb{R}$ , nurodantis skirstinio centrą;
- mastelio parametras  $\sigma > 0$ , nurodantis nukrypimą nuo parametro  $\mu$ ;
- formos parametras  $\xi \in \mathbb{R}$ , nusakantis skirstinio uodegos elgesį.

Formos parametras  $\xi$  nusako, kurį iš trijų skirstinių apibendrina GEV. Nuo to priklauso ir atsitiktinio kintamojo apibrėžimo sritis:

- $\xi = 0$  – I tipo (Gumbelio) skirstinys, turintis sunkią uodegą. Kintamojo apibrėžimo sritis  $z \in \mathbb{R}$ ;
- $\xi > 0$  – II tipo (Frechet) skirstinys, turintis eksponentinę uodegą. Kintamojo apibrėžimo sritis  $z \geq \mu + \frac{\sigma}{\xi}$ ;
- $\xi < 0$  – III tipo (Veibulo) skirstinys, turintis lengvą uodegą. Kintamojo apibrėžimo sritis  $z \leq \mu - \frac{\sigma}{\xi}$ .

Tikimybę, kad kintamasis  $X$  per vieną periodą bus didesnis už dydį  $z$ , nurodo garantijų (tikėtinumo) funkcija  $G(z)$ :

$$G(z) = P(X > z) = 1 - F(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right]}, & \text{kai } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-e^{-\left[\frac{z - \mu}{\sigma}\right]}}, & \text{kai } \xi = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Kvantilis  $z_p$  yra vertė, kuri tikėtina bus viršyta per  $1/p$  periodų:

$$z_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - \{-\ln(1 - p)\}^{-\xi}], & \text{kai } \xi \neq 0 \\ \mu - \sigma \ln\{-\ln(1 - p)\}, & \text{kai } \xi = 0 \end{cases}, \quad (6)$$

čia  $p$  yra tikimybė, kad ekstremalus įvykis įvyks per vieną periodą,  $0 < p < 1$ .

Pasikartojimo periodas  $T$  vertina kas kiek metų maksimali reikšmė bus didesnė už  $z_p$ :

$$T = \frac{1}{G(z_p)} \quad (7)$$

### 2.3.1. Maksimalaus tikėtinumo parametrų įverčių nustatymo metodas

Vienas iš naudojamų metodų nustatyti skirstinio parametrų įverčiams yra maksimalaus tikėtinumo metodas.

Stebimas atsitiktinis dydis  $X = (x_1, \dots, x_n)$  su žinoma tankio funkcija  $p(x)$ , tačiau nežinomais parametrais  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ . Sudaroma tikėtinumo funkcija  $L(\theta) = p_\theta(x_1) \dots p_\theta(x_n)$ , tuomet ieškomas toks parametrų įverčių rinkinys  $\theta$ , kuris maksimizuoję funkciją  $L(\theta)$ .

Maksimalaus tikėtinumo įverčiai GEV skirstiniui skaičiuojami maksimizuojant log-tikėtinumo funkcijos išraišką:

$$\ell(\mu, \sigma, \xi; x) = -m \ln \sigma - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^m \ln \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right] - \sum_{i=1}^m \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}, \quad (8)$$

čia  $m$  – imties dydis (duomenų bloko maksimumų skaičius),  $\left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right] > 0$  su visais  $x_i$ .

Maksimalaus tikėtinumo įverčiai Gumbelio skirstiniui randami maksimizuojant:

$$\ell(\mu, \sigma; x) = -m \ln \sigma - \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^m e^{-\frac{x_i - \mu}{\sigma}}. \quad (9)$$

Jeigu kuris nors nežinomas parametras yra funkcija, parametras log-tikėtinumo funkcijoje pakeičiama parametro funkcija.

### 2.3.2. Pasikliautinis skirstinio intervalas

Ekstremalių reikšmių tikimybinių skirstinių pasikliautinieji intervalai gali būti randami pasinaudojant binominio skirstinio standartiniu nuokrypiu  $S_d$ <sup>[3,36]</sup>:

$$S_d = \sqrt{\frac{F(x) \cdot (1 - F(x))}{N}}, \quad (10)$$

čia  $F(x)$  yra teorinė ekstremalių reikšmių pasiskirstymo funkcija ( $0 < F(x) < 1$ ), o  $m$  – imties duomenų skaičius.

Norint nustatyti pasiskirstymo funkcijos  $F(x)$  pasikliautinąjį intervalą yra naudojama Stjudento skirstinio  $t$  statistika. 90% pasikliautinąjo intervalo  $t$  statistika, kai  $m > 10$  apytiksliai yra lygi 1.7. Žinoma, kad binominis skirstinys yra simetrinis, kai  $F(x) = 0.5$ , tačiau skirstinys tampa asimetriškas, kai  $F(x)$  artėja prie 0 ar 1, todėl skaičiuojant apatinę ( $L$ ) ir viršutinę ( $U$ ) pasikliautinąjo intervalo ribas, funkcija  $F(x)$  yra naudojamas kaip svoris standartiniam nuokrypiui  $S_d$ . Tada pasikliautinąjo intervalo apatinė riba  $L$  ir viršutinė riba  $U$  yra apskaičiuojamos pagal formules:

$$L = F(x) - 2 \cdot 1.7 \cdot F(x) \cdot S_d, \quad (11)$$

$$U = F(x) + 2 \cdot 1.7 \cdot (1 - F(x)) \cdot S_d. \quad (12)$$

### 2.3.3. Skirstinio atrinkimo metodai

Norint patikrinti, kaip gerai pasirinkta teorinė pasiskirstymo funkcija atitinka empirinę pasiskirstymo funkciją naudojami įvairūs metodai: grafiniai, suderinamumo kriterijai, informaciniai kriterijai.

Dažnai naudojami grafiniai metodai yra P-P (tikimybės-tikimybės) ir Q-Q (kvantilio-kvantilio) grafikai. P-P (tikimybės-tikimybės) grafikas naudojamas palyginti empirinės  $F_n(x)$  ir teorinės  $F(x)$  skirstinio funkcijų sutapimą. P-P grafike vaizduojamos poros  $(F_n(x), F(x))$  pasirinktoms  $x$  reikšmėms, dažniausiai imties elementams  $X_i$ . Kuo arčiau  $45^\circ$  tiesės taškai susidėlioja, tuo geriau teorinė skirstinio funkcija atitinka empirinę.

Q-Q (kvantilio-kvantilio) grafikas naudojamas palyginti empirinės  $F_n(x)$  ir teorinės  $F(x)$  skirstinio funkcijų kvantilius. Q-Q grafike vaizduojamos poros

$$\left( x_i, F^{-1} \left( F_n(x_i) - \frac{0.5}{n} \right) \right), \quad (13)$$

čia  $F^{-1}$  – atvirkštinė pasiskirstymo funkcija,  $n$  – imties dydis.

Empirinė pasiskirstymo funkcija  $F_n(x)$  apibrėžiama:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} n_x, \quad (14)$$

čia  $n_x$  – imties reikšmių  $x_i$ , nedidesnių už  $x$  skaičius.

Kitas būdas palyginti modelių tinkamumą nagrinėjamiems duomenims yra informaciniai kriterijai – geresnių modelių informacinio kriterijaus reikšmė yra mažesnė. Dažnai naudojami informaciniai kriterijai yra Akaike (AIC) ir Bajeso (BIC):

$$AIC = -2l + 2k, \quad (15)$$

$$BIC = k \ln(n) - 2 \ln(l), \quad (16)$$

čia  $l$  – log-tikėtinumo funkcijos įvertis,  $k$  – nežinomų modelio parametru skaičius,  $n$  – imties dydis.

Geresniu modeliu yra laikomas tas, kurio informacinių kriterijų reikšmės yra mažesnės.

Andersono-Darlingo ir Kramerio<sup>[37]</sup> suderinamumo kriterijai tikrina nulinę hipotezę  $H_0$ : imtis  $X_1, \dots, X_n$  yra pasiskirsčiusi pagal pasiskirstymo funkciją  $F(x; \theta)$  su parametru rinkiniu  $\theta$ .

Kramerio testo statistika  $W^2$ :

$$W^2 = \sum_{i=1}^n \left( F(X_i; \theta) - \frac{(2i-1)}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n}. \quad (17)$$

Andersono-Darlingo testo statistika  $A^2$ :

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( (2i-1) \ln(F(X_i; \theta)) + (2n+1-2i) \ln(1-F(X_i; \theta)) \right) \quad (18)$$

### 2.3.4. Ekstremalių reikšmių stacionarumo tyrimai

Laiko eilutė yra vadinama stacionaria, kai imtis turi pastovų vidurkį ir dispersiją, kurie nekinta bėgant laikui. Jeigu tiriama ekstremumų imtis yra nestacionari, yra taikomi įvairūs nestacionarių ekstremalių reikšmių analizės metodai.

Įvairūs statistiniai testai gali būti naudojami stacionarumo prielaidoms tikrinti. ADF, KPSS ir Mann-Kendall yra dažnai naudojami testai skirtingoms stacionarumo hipotezėms tikrinti<sup>[38]</sup>.

ADF (išplėstinis Dickey-Fuller) testas tikrina hipotezę, ar procesas turi vienetinę šaknį – t. y. ar atsitiktinis kintamasis turi stochastinį trendą. Duomenims yra taikomas autoregresinis modelis, modelio koeficientai nustatomi mažiausių kvadratų metodu. Testo hipotezės:

- nulinė hipotezė  $H_0$ : procesas turi vienetinę šaknį;
- alternatyvi hipotezė  $H_1$ : pagal testo variantą, procesas yra stacionarus arba turi deterministinį trendą.

KPSS (Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin) testas turi du variantus ir tikrina prielaidą, ar procesas yra stacionarus arba turi deterministinį trendą<sup>[38]</sup>. Testo hipotezės:

- nulinė hipotezė  $H_0$ : pagal testo variantą, procesas yra stacionarus arba turi deterministinį trendą);
- alternatyvi hipotezė  $H_1$ : procesas turi vienetinę šaknį.

Mann-Kendall testas yra statistinis metodas naudojamas tikrinti prielaidai, ar proceso mediana kinta laikui bėgant<sup>[38]</sup>. Testo hipotezės:

- nulinė hipotezė  $H_0$ : procesas neturi monotoniškai didėjančio arba mažėjančio trendo;
- alternatyvi hipotezė  $H_1$ : procesas turi monotonišką trendą.

## 2.4. Programinė įranga

Tyrimas atliktas „R“ statistiniu programavimo paketu „RStudio“ aplinkoje. Pasirinkta tyrimą atlikti su „R“ dėl prieinamų ekstremalių reikšmių analizės paketų, naudojamų ir straipsniuose aprašomuose tyrimuose, skaičiavimų ir grafinio vaizdavimo lankstumo bei turimų programavimo įgūdžių.

Be bazinio „R“ funkcionalumo tyrimui buvo naudojami paketai:

- „eXtremes“<sup>[39]</sup> – ekstremalių reikšmių skirstinių parametrų įverčiams nustatyti, tikimybinėms charakteristikoms apskaičiuoti;
- „gnFit“ – suderinamumo testams atlikti;
- „tseries“ – stacionarumo testams atlikti.

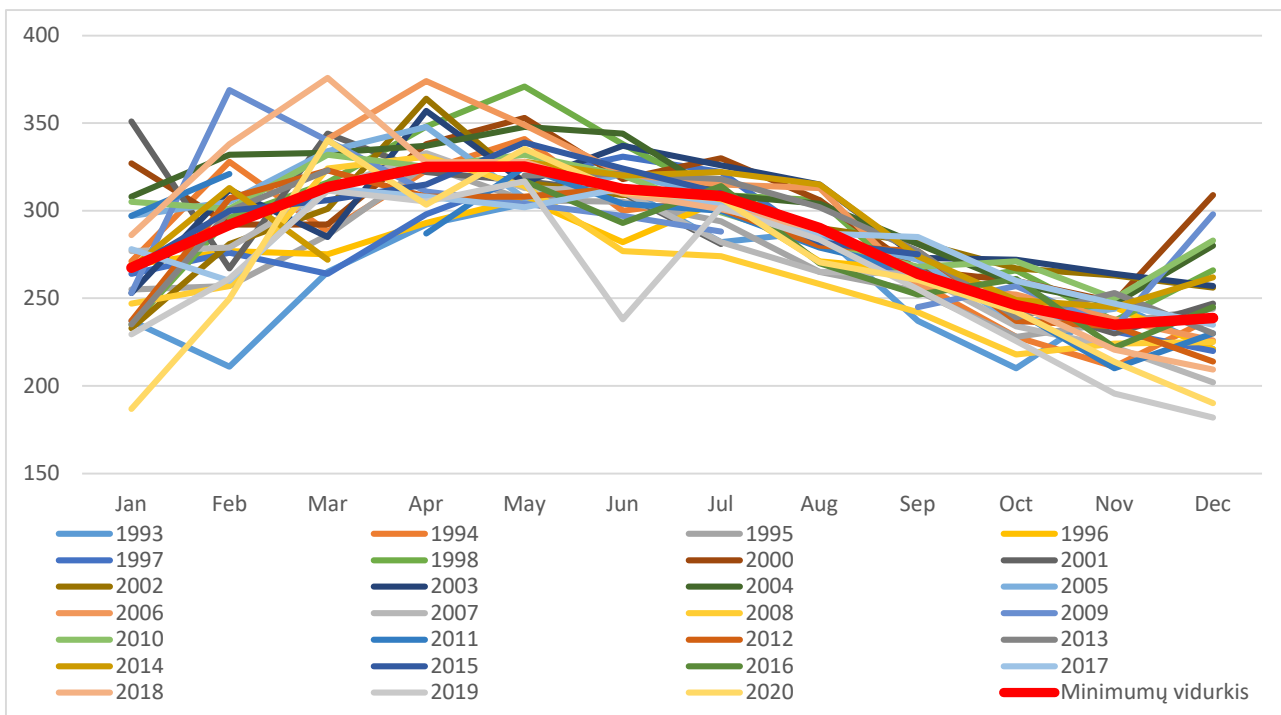
Ekstremalių reikšmių analizei yra sukurta ir dedikuotos programinės įrangos, pavyzdžiui, „CumFreq“<sup>[40]</sup>. Programa yra valdoma per grafinę vartotojo sąsają, naudojantis šia programa būtų galima be programavimo žinių atlikti ekstremalių reikšmių tyrimą: nustatyti tiriamų ekstremalių duomenų imčiai tinkantį ekstremalų skirstinį ir parametrų įverčius, skirstinio pasikliautinąjį intervalą, pasikartojimo periodą ir kitas reikalingas charakteristikas tikimybiniam vertinimui.

Tyrime naudota skirstinio pasikliautinųjų intervalų skaičiavimo metodika, aprašyta 2.3.2 skyrelyje, „R“ buvo įgyvendinta savarankiškai, remiantis „CumFreq“ programos veikimu.

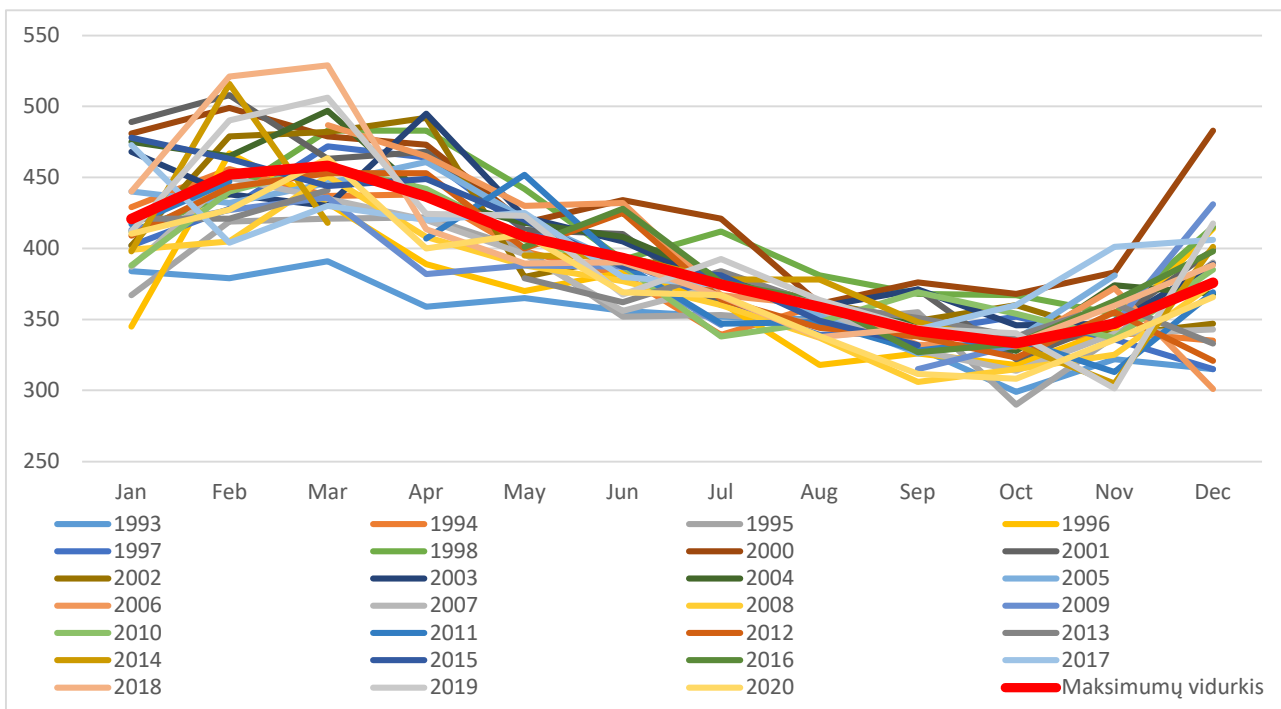
### 3. Tyrimų rezultatai ir jų aptarimas

#### 3.1. Bendra duomenų apžvalga

Šiame poskyryje yra apžvelgiami tyrimuose nagrinėti bendrojo ozono kiekio (BOK) duomenys. Visų pirma susidaromos mėnesinių BOK minimumų ir maksimumų imtys. Šie mėnesiniai ekstremumai skirtingiems metams pavaizduoti 4 ir 5 paveiksluose (duomenų lentelės pateikiamos 1 ir 2 prieduose).



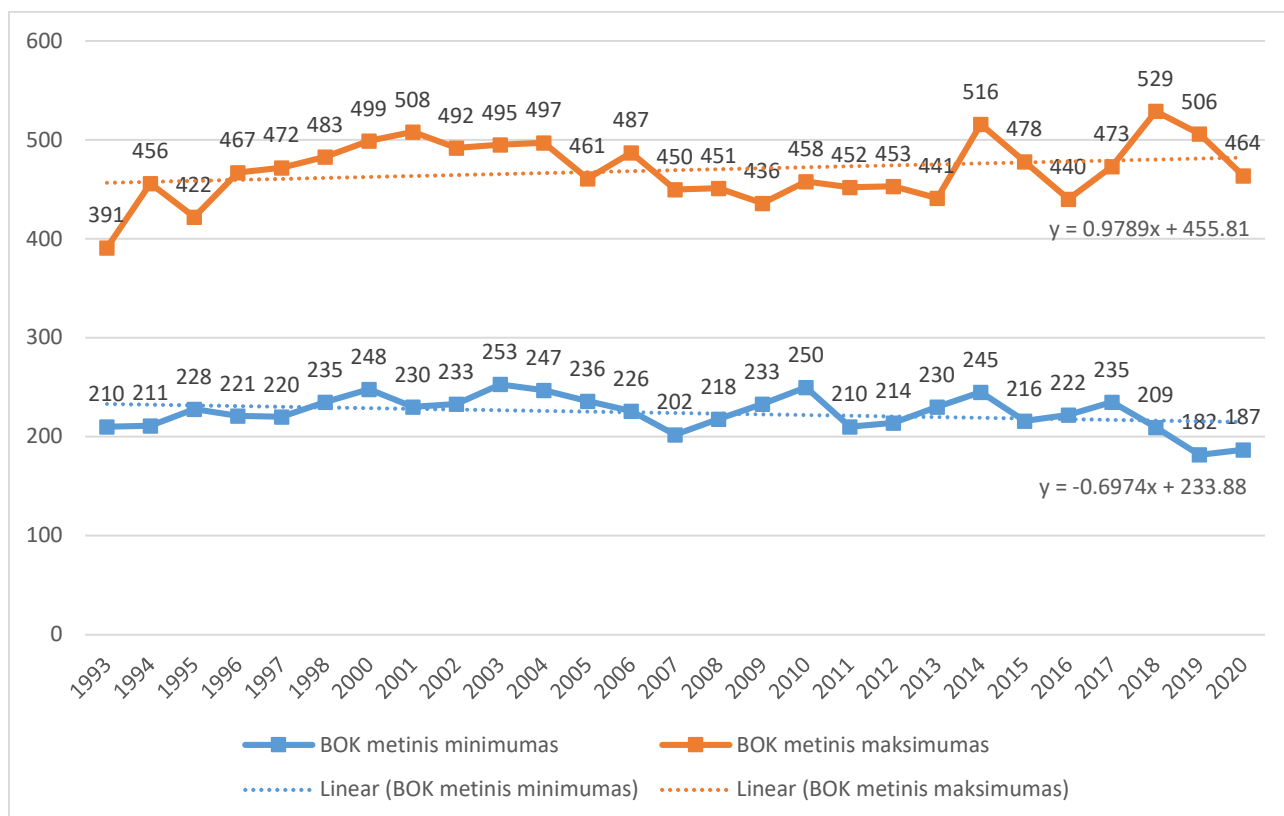
4 pav. Minimumai pagal mėnesius



5 pav. Maksimumai pagal mėnesius

Nustatyta, jog minimalus BOK būna spalio-sausio mėnesiais, todėl BOK minimumų tyrime, kad gretimuose metuose nebūtų susijusių minimumų, metinių BOK minimumų imčiai sudaryti vietoje kalendorinių metų naudojami paslinkti metai – nuo vasario iki sausio. Panašiai imtis sudaroma ir kai BOK maksimumai pastebimi sausio-gegužės mėnesiais.

Grafiškai vertinant metinių BOK ekstremumų kitimą (žr. 6 pav.), aiškaus periodiškumo ar ženklių ilgalaikių tendencijų nepastebima. Metiniams BOK minimumams ir maksimumams pritaikius tiesinės regresijos modelius minimumams pastebima nedidelė mažėjimo tendencija, o maksimumams – didėjimo. Papildomas kitimo panagrinėjimas pateiktas tyrimo pabaigoje.

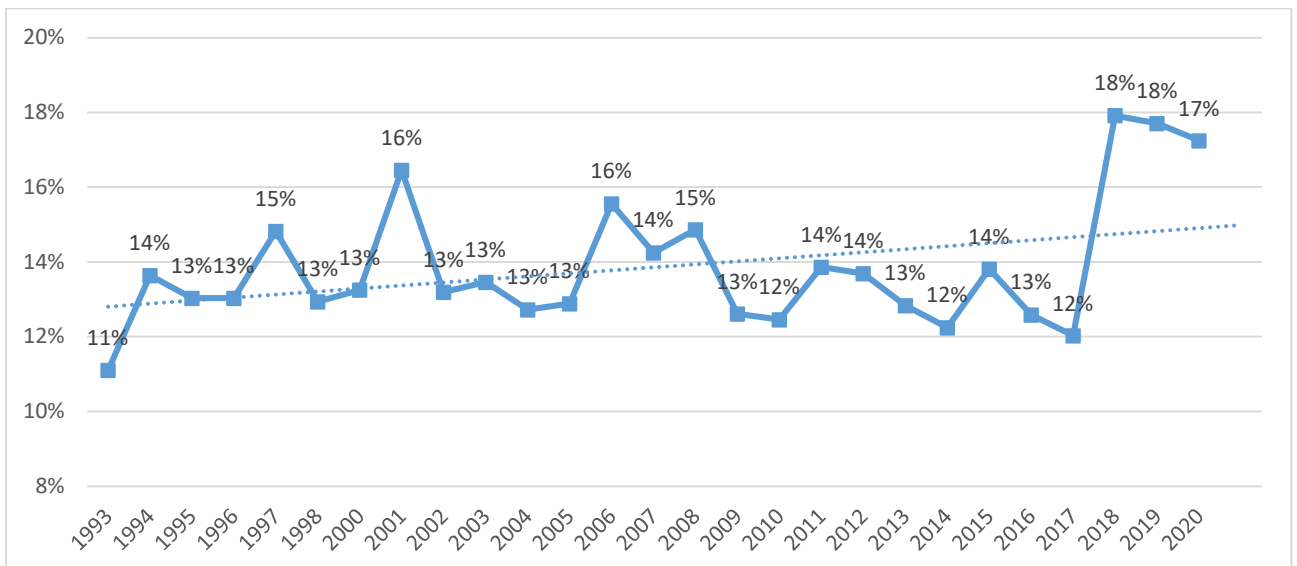


**6 pav.** Metiniai BOK minimumai ir maksimumai, tiesinė regresija

Dienos BOK duomenų pasinagrinėjimas ir variacijos koeficientas pagal metus (žr. 7 pav.) rodo, kad paskutiniiais 2018-2020 m. BOK variacija padidėjo. Tai gali būti susiję su Kauno MS naudojamu BOK matavimo įrenginio pakeitimu: iki 2017 m. pabaigos filtriniu ozonometru matavimai buvo atliekami kelis kartus per dieną rankiniu būdu ir tik tam tinkamomis oro sąlygomis, o nuo 2018 m. „Brewer“ spektrofotometras automatiškai nuolat matuoja BOK, tad gaunamas tikslesnis dienos vidurkis.

Galima pažymėti, kad 2019 m. gruodžio 4 d. BOK buvo mažiausiais per visą Kauno MS stebėjimų laikotarpį – šios dienos BOK vidurkis yra 182 DV; o 2018 m. kovo 3 d. BOK dienos vidurkis buvo didžiausias – 529 DV.





7 pav. Duomenų variacijos koeficientas pagal metus

Kadangi atliekant literatūros analizę tyrimų apie BOK metinių minimumų ir maksimumų tikėtinumo vertinimą, kuomet nagrinėjamas BOK kitimas, nerasta, o tiriama metinių duomenų imtis yra maža (27 ekstremumai), toliau 3.2 – 3.3 poskyriuose atliekamas tyrimas darant prielaidą, jog BOK ekstremumų imtys yra stacionarios. Klimato kaitos, o tuo pačiu BOK kaitos tyrimai yra laikomi atskiru uždaviniu, kurie šiame darbe nebuvo akcentuojami.

### 3.2. Minimalaus metinio bendrojo ozono kiekio tikimybinis vertinimas

Atsižvelgiant į literatūros analizę ir meteorologijoje dažniausiai taikomą praktiką, darbe ir BOK ekstremalius duomenis pasirinkta modeliuoti GEV ir Gumbelio skirstiniais. Nustatytas GEV skirstinio formos parametro  $\xi$  įvertis parodys, ar tiriamas ekstremumų skirstinys priklauso Veibulo ( $\xi < 0$ ) ar Frechet ( $\xi > 0$ ) šeimai, tačiau  $\xi$  įvertis niekada nebus lygus 0, todėl tiriamiesiems duomenims nebūtų tikrinama, ar tinka Gumbelio modelis. Dėl to Gumbelio modelis tiriamas atskirai.

#### 3.2.1. Modelių parametru nustatymas maksimalaus tikėtinumo metodu

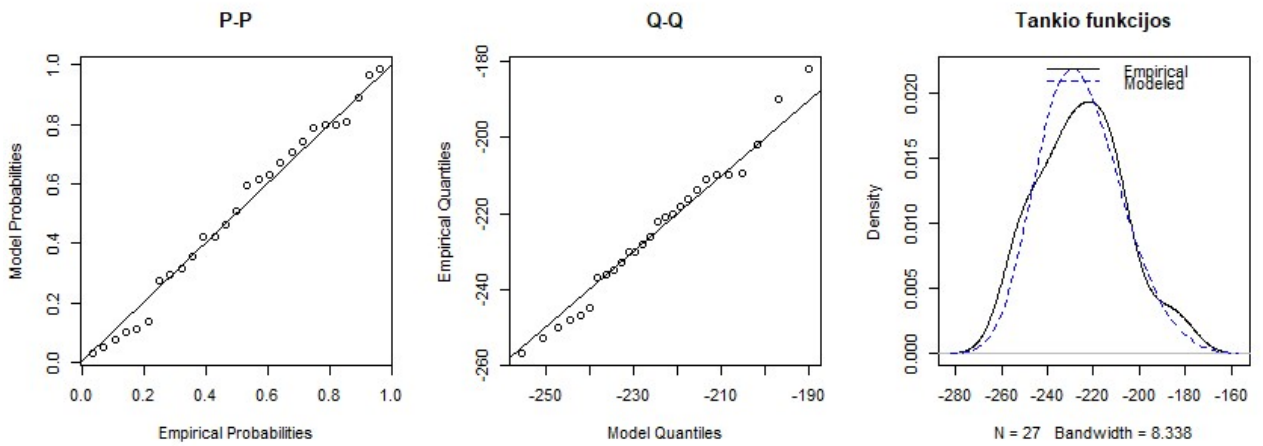
Maksimalaus tikėtinumo metodu nustatomi GEV ir Gumbelio skirstinių parametru įverčiai BOK metinių minimumų imčiai (žr. 1 lent.). Nustatytas GEV skirstinio formos parametro įvertis yra  $\xi = -0.1857 < 0$ , todėl modelis priklauso Veibulo ekstremalių skirstinių šeimai.

1 lentelė. BOK minimumų GEV ir Gumbelio modelių parametru įverčiai.

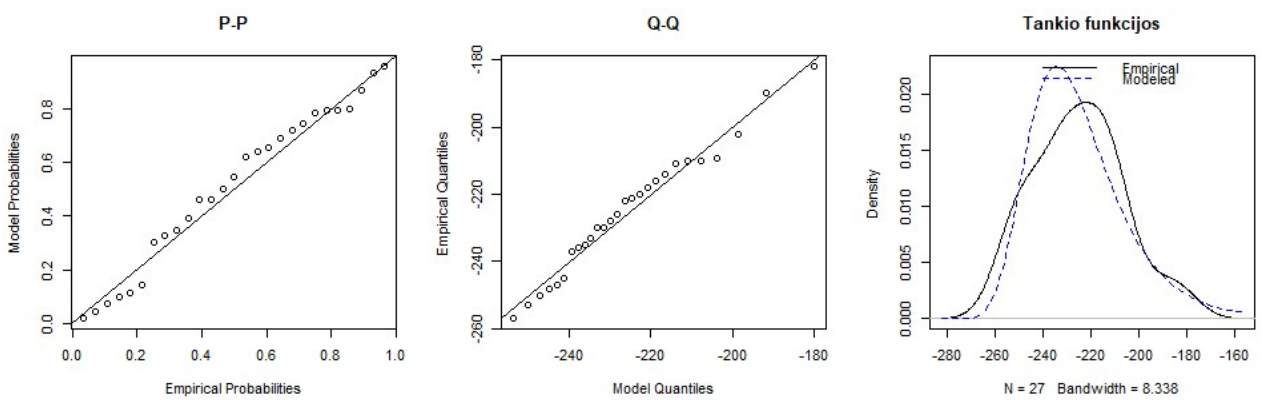
Parametras	GEV skirstinio parametru įverčiai	Gumbelio skirstinio parametru įverčiai
$\mu$	-232.4657	-234.1495
$\sigma$	17.1577	16.3169
$\xi$	-0.1857	-

#### 3.2.2. GEV ir Gumbelio modelių palyginimas

Pagal P-P, Q-Q bei empirinės ir teorinės tankio funkcijų palyginimo grafikus nustatytiems GEV (žr. 8 pav.) ir Gumbelio (žr. 9 pav.) modeliams galima pastebėti, jog abu skirstiniai panašiai tinka BOK minimumų duomenims.



8 pav. BOK minimumų GEV modelio grafinis tinkamumo patikrinimas



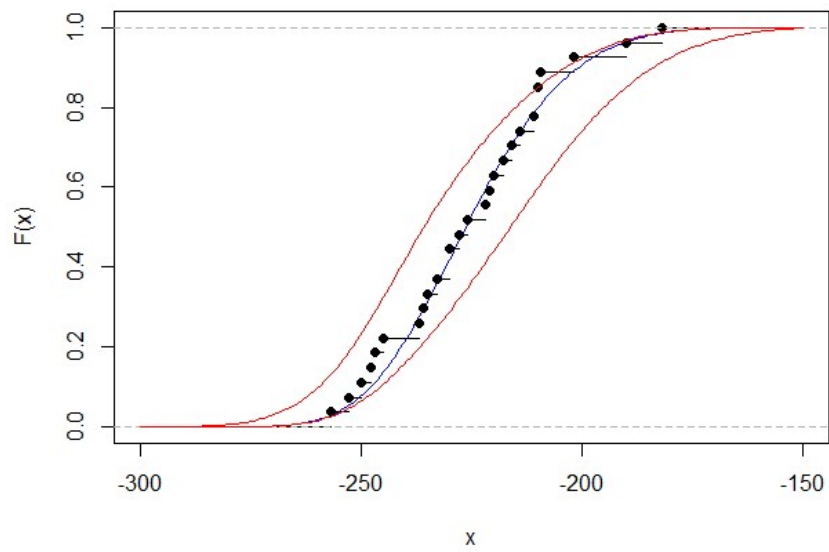
9 pav. BOK minimumų Gumbelio modelio grafinis tinkamumo patikrinimas

Pagal suderinamumo testų rezultatus ir informacinių kriterijų reikšmes (žr. 2 lent.) taip pat negalima vienareikšmiškai nustatyti, kuris skirstinys BOK metinių minimumų duomenis atitinka geriau: didesnės GEV skirstinio Andersono-Darlingo ir Kramerio testų p-reikšmės bei mažesnė neigiama log-tikėtimumo reikšmė rodo, jog BOK metinių minimumų reikšmes geriau atitinka GEV skirstinys (iš Veibulo šeimos), tačiau mažesnės AIC ir BIC informacinių kriterijų reikšmės rodo, kad tinkamesnis galėtų būti Gumbelio skirstinys.

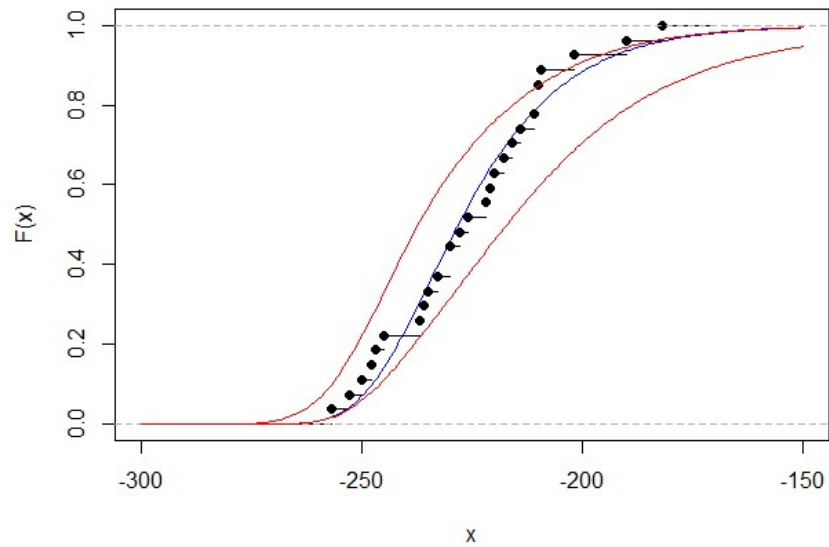
2 lentelė. BOK minimumų modelių tinkamumo lyginimas

Skirstinys	Neigiamas log-tikėtimumas	AIC	BIC	Andersono-Darlingo testas		Kramerio testas	
				Statistika	p-reikšmė	Statistika	p-reikšmė
GEV	116,5679	240,18	243,02	0,2026	<b>0,8785</b>	0,0262	<b>0,8940</b>
Gumbelio	117,1944	<b>238,89</b>	<b>240,98</b>	0,3748	0,4148	0,0595	0,3841

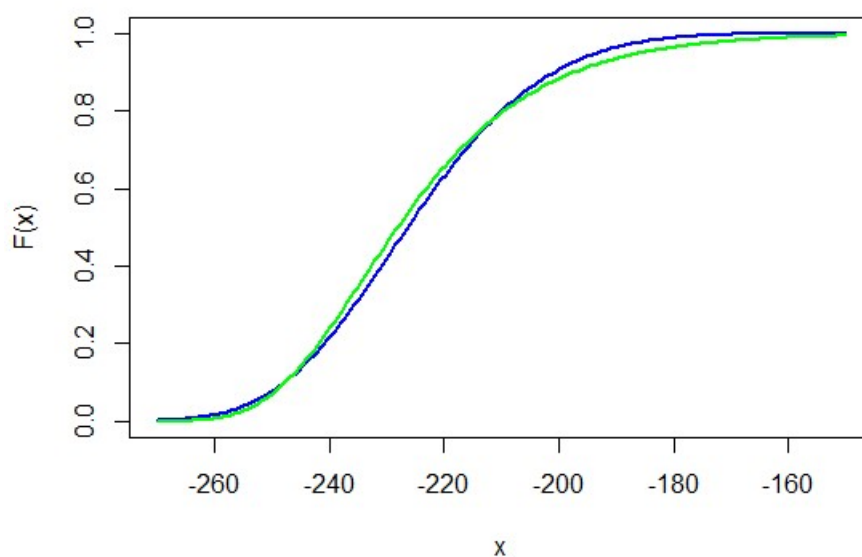
10 ir 11 paveiksluose pavaizduota BOK metinių minimumų GEV teorinė pasiskirstymo funkcija su 90 proc. (0,9 pasiklivimo lygmens) pasikliautiniu intervalu bei empirinė pasiskirstymo funkcija. Iš šių grafikų taip pat negalima spręsti apie vieno skirstinio pranašumą prieš kitą. 12 pav. vaizduojami teorinių GEV ir Gumbelio pasiskirstymo funkcijų grafikai, iš kurių galima matyti, jog labiausiai pasiskirstymo funkcijos skiriasi skirstinių „uodegoje“ su didžiausiomis reikšmėmis (kurios dar net nebuvo stebėtos).



**10 pav.** BOK minimumų GEV teorinė pasiskirstymo funkcija (mėlyna) su 0,9 pasikliovimo lygmens intervalais (raudona) bei empirinė pasiskirstymo funkcija (juoda)



**11 pav.** BOK minimumų Gumbelio teorinė pasiskirstymo funkcija (mėlyna) su 0,9 pasikliovimo lygmens intervalais (raudona) bei empirinė pasiskirstymo funkcija (juoda)



**12 pav.** BOK minimumų GEV (mėlyna) ir Gumbelio (žalia) teoriniai skirstiniai

3 lentelėje nurodytas apskaičiuotas tikėtinas minimalus BOK per atitinkamą pasikartojimo periodą. Nors lyginant skirstinius vieno ar kito skirstinio pranašumas BOK minimumų duomenims nebuvo nustatytas, ilgam pasikartojimo periodui skirtumai akivaizdūs. Didėjant pasikartojimo periodui, taikant GEV ir Gumbelio skirstinius didėja skirtumai tarp minimalių tikėtinų BOK reikšmių. Taip yra dėl skirtingo „uodegų“ elgesio – šiuo atveju, kai GEV atitinka Veibulo skirstinį (neigiamas formos parametras  $\xi$ ), transformuota (paneigta) BOK reikšmė siekia viršutinę ribą (-140,07), nusakomą skirstinio parametrų įverčių išraiškos  $(\mu - \frac{\sigma}{\xi})$ , todėl pasikartojimo periodui didėjant, tikėtinas minimalus BOK mažėja lėčiau. Viena iš priežasčių, kodėl ekstrapolijuojami rezultatai yra nevienareikšmiški, gali būti maža duomenų imtis, kurioje nebuvo užfiksuotų ypač ekstremalių verčių.

**3 lentelė.** Tikėtinas minimalus BOK per pasirinktą pasikartojimo periodą

Pasikartojimo periodas [metai]	Tikėtinas minimalus BOK per pasikartojimo periodą [DV]	
	GEV	Gumbelio
2	226	228
5	210	210
10	201	197
20	193	186
50	185	170
100	179	159
1000	166	121
10000	157	84

4 lentelėje yra nurodytos apskaičiuotos tikimybės ir pasikartojimo periodai mažiausiai Lietuvoje užfiksuotai BOK reikšmei (182 DV) ir ozono skylės lygį atitinkančio BOK (220 DV) reikšmei.

**4 lentelė.** Ozono skylės (220 DV) ir mažiausio Lietuvoje užfiksuoto (182 DV) BOK įvykio tikimybė ir pasikartojimo periodas

BOK [DV]	GEV		Gumbelio	
	Tikimybė per metus	Pasikartojimo periodas [metai]	Tikimybė per metus	Pasikartojimo periodas [metai]
182	0,0141	70,96	0,0401	24,94
220	0,3676	2,72	0,3430	2,91

Tikimybė, kad per metus bus užfiksuota mažesnė nei 182 DV BOK reikšmė yra atitinkamai 0,0141 (GEV skirstinio atveju) ir 0,0401 (Gumbelio atveju). Teoriniai pasikartojimo periodai yra 70,96 (GEV atveju) ir 24,94 (Gumbelio atveju) metų.

Tikimybė, kad per metus bus užfiksuota mažesnė nei 220 DV BOK reikšmė yra atitinkamai 0,3676 (GEV skirstinio atveju) ir 0,3430 (Gumbelio atveju). Teoriniai pasikartojimo periodai yra 2,72 (GEV atveju) ir 2,91 (Gumbelio atveju) metų.

Kadangi 220 DV BOK apskaičiuoti teoriniai pasikartojimo periodai yra nedideli (įvykių dažniai santykinai yra dideli), todėl galima yra aktualu palyginti, kaip mažesnio nei 220 DV BOK empirinio pasikartojimo periodo įvertis, gautas iš turimų duomenų, atitinka teoriškai įvertintus įvykių pasikartojimo periodus. Iš turimų 27 BOK metinių minimumų 10 yra mažesni už 220 DV, taigi iš empirinio skirstinio apskaičiuotas pasikartojimo periodas yra  $T = \frac{1}{P(X < 220)} = \frac{1}{\frac{10}{27}} = 2,7$  metų. Taip apskaičiuotas pasikartojimo periodas beveik sutampa su teoriškai įvertintu GEV modelio pasikartojimo periodu (2,72 metų). Be to, taip patikrintas GEV modelis gali būti taikomas ir tuo atveju, kai minėto empirinio skaičiavimo negalėtume atlikti, nesant dar ekstremalesnių stebėjimų.

### 3.3. Maksimalaus metinio bendrojo ozono kiekio tikimybinis vertinimas

#### 3.3.1. Modelių parametrų nustatymas maksimalaus tikėtimumo metodu

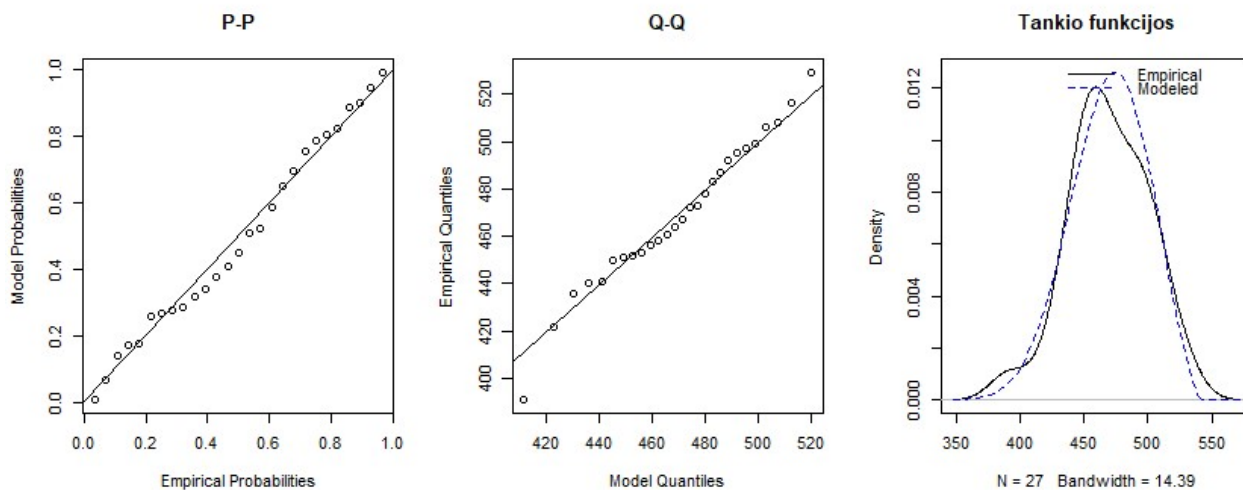
Ir šiuo atveju, pradžioje maksimalaus tikėtimumo metodu nustatomi GEV ir Gumbelio skirstinių parametrų įverčiai BOK maksimumų imčiai (žr. 5 lent.). Nustatytas GEV skirstinio formos parametro įvertis  $\xi = -0,3842 < 0$ , todėl modelis priklauso Veibulo ekstremalių skirstinių šeimai.

**5 lentelė.** BOK maksimumų GEV ir Gumbelio modelių parametrų įverčiai

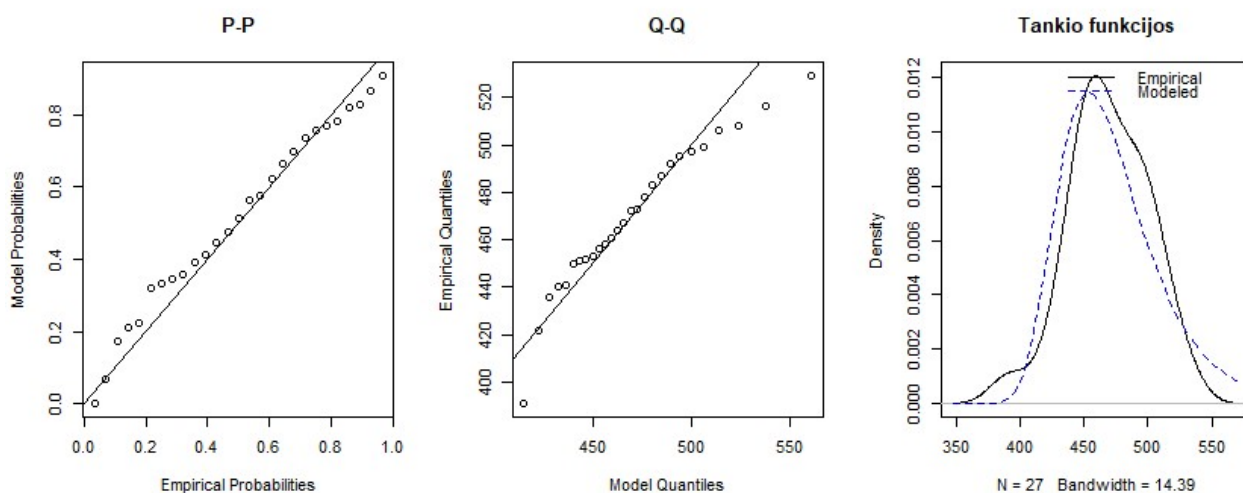
Parametras	GEV skirstinio parametrų įverčiai	Gumbelio skirstinio parametrų įverčiai
$\mu$	460,3005	454,0118
$\sigma$	31,8156	32,2066
$\xi$	-0,3842	-

#### 3.3.2. GEV ir Gumbelio modelių palyginimas

Šiuo atveju, pagal P-P, Q-Q bei empirinės ir teorinės tankio funkcijų palyginimo grafikus nustatytiems GEV (žr. 13 pav.) ir Gumbelio (žr. 14 pav.) modeliams, galima pastebėti, jog GEV skirstinys geriau tinka BOK maksimumų duomenims.



13 pav. BOK maksimumų GEV modelio grafinis tinkamumo patikrinimas.



14 pav. BOK minimumų GEV modelio grafinis tinkamumo patikrinimas

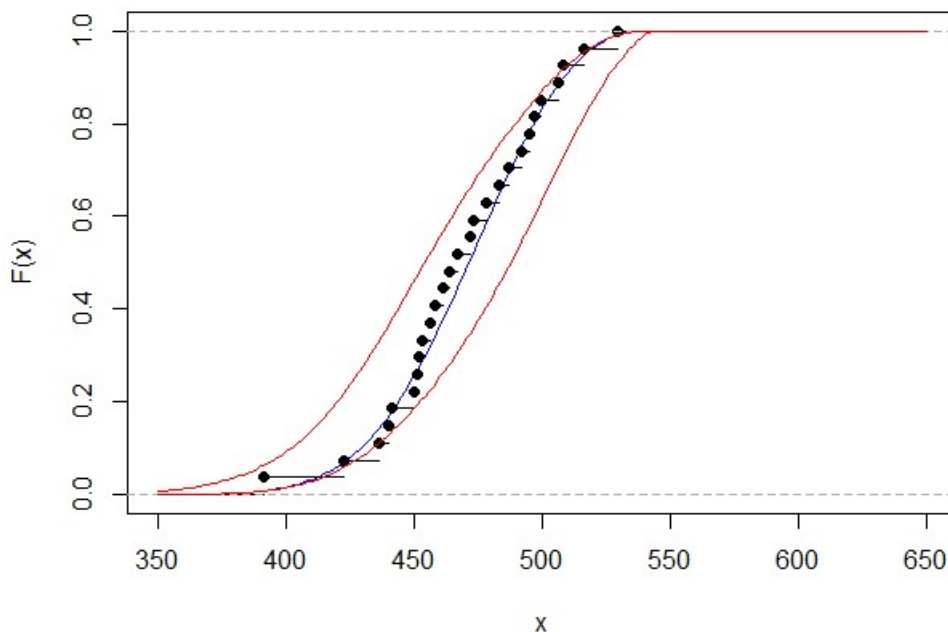
Taip pat ir visi suderinamumo testų rezultatai ir informacinių kriterijų reikšmės (žr. 6 lent.) rodo, jog GEV skirstinys BOK metinių maksimumų duomenims tinka geriau nei Gumbelio skirstinys.

6 lentelė. BOK maksimumų modelių tinkamumo lyginimas

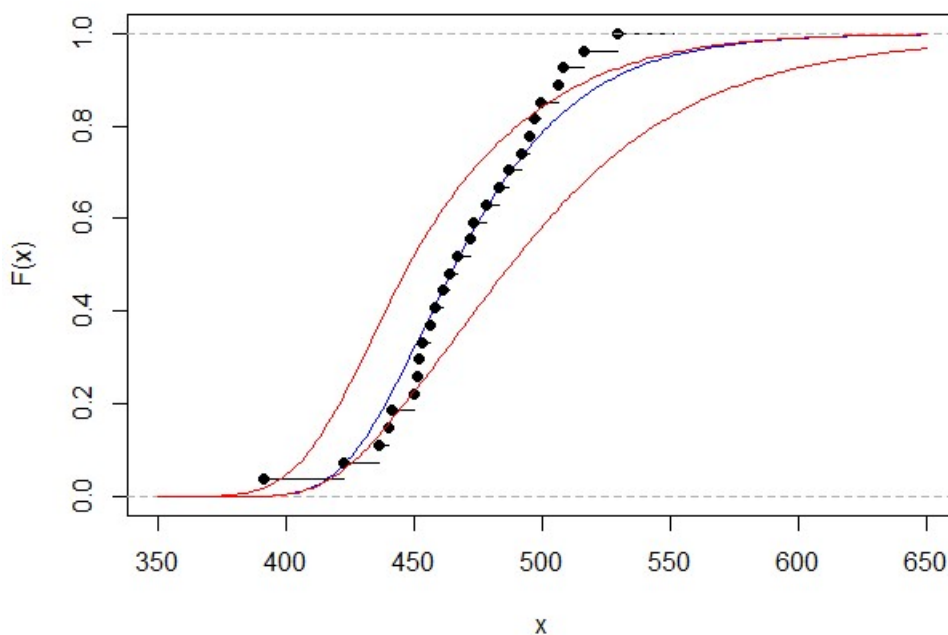
Skirstinys	Neigiamas log-tikėtinumumas	AIC	BIC	Andersono-Darlingo testas		Kramerio testas	
				Statistika	p-reikšmė	Statistika	p-reikšmė
<b>GEV</b>	<b>130,0913</b>	<b>267</b>	<b>270</b>	0,2046	<b>0,8739</b>	0,0306	<b>0,8392</b>
<b>Gumbelio</b>	133,7714	272	274	0,5943	0,1209	0,0679	0,2980

15 ir 16 paveiksluose pavaizduota BOK maksimumų GEV teorinė pasiskirstymo funkcija su 90 proc. (0,9 pasiklovimo lygmens) pasikliautinoju intervalu bei empirinė pasiskirstymo funkcija. Galima pastebėti, jog ir čia GEV modelis BOK maksimumų duomenis atitinka geriau: empirinė pasiskirstymo funkcija yra arti teorinės pasiskirstymo funkcijos. Tuo tarpu Gumbelio modelis empirinę pasiskirstymo funkciją atitinka prasčiau, didesnė dalis empirinio skirstinio nepatenka į

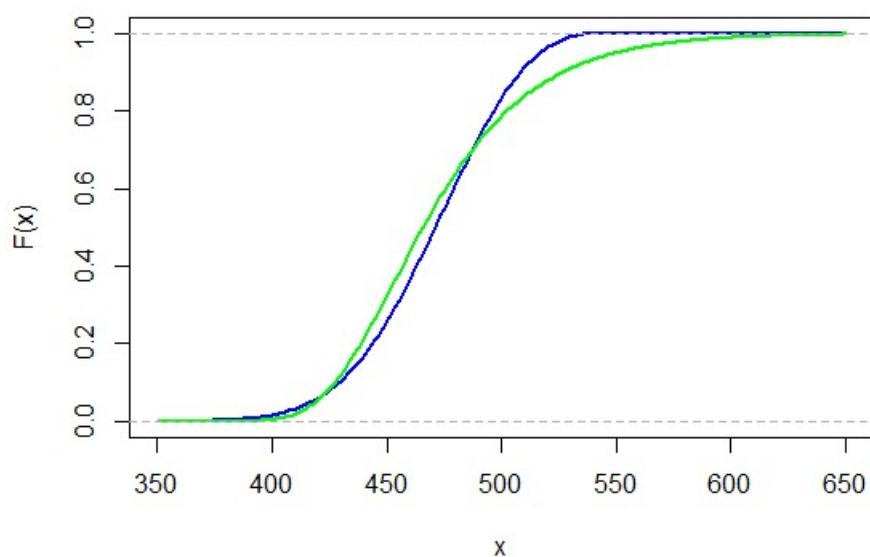
pasikliautinąjį intervalą. 17 paveiksle vaizduojamos teorinės GEV ir Gumbelio pasiskirstymo funkcijos, Be to, galima pastebėti, jog itin skiriasi skirstinių „uodegos“.



**15 pav.** BOK maksimumų GEV teorinė pasiskirstymo funkcija (mėlyna) su 0,9 pasiklovimo lygmens intervalais (raudona) bei empirinė pasiskirstymo funkcija (juoda)



**16 pav.** BOK maksimumų Gumbelio teorinė pasiskirstymo funkcija (mėlyna) su 0,9 pasiklovimo lygmens intervalais (raudona) bei empirinė pasiskirstymo funkcija (juoda)



**17 pav.** BOK maksimumų GEV (mėlyna) ir Gumbelio (žalia) modelių teorinės pasiskirstymo funkcijos

7 lentelėje nurodytas apskaičiuotas tikėtinas maksimalus BOK per atitinkamą pasikartojimo periodą. Nors nustatyta, jog GEV skirstinys yra tinkamesnis, Gumbelio charakteristikų rezultatai yra įtraukti palyginimui.

**7 lentelė.** Tikėtinas maksimalus BOK per pasirinktą pasikartojimo periodą

Pasikartojimo periodas [metai]	Tikėtinas maksimalus BOK per pasikartojimo periodą [DV]	
	GEV	Gumbelio
2	471	466
5	497	502
10	508	526
20	517	550
50	525	580
100	529	602
1000	537	676
10000	541	751

8 lentelėje nurodyti apskaičiuota tikimybė ir pasikartojimo periodas didžiausiai Lietuvoje išmatuotai BOK reikšmei (529 DV). Tikimybė, kad per metus bus užfiksuota didesnė nei 529 DV BOK reikšmė, yra 0,0099 (GEV skirstinio atveju), tokio įvykio pasikartojimo periodas yra 100,58 metų.



**8 lentelė.** Didžiausio LT užfiksuoto (529 DV) BOK įvykio tikimybė ir pasikartojimo periodas.

BOK [DV]	GEV		Gumbelio	
	Tikimybė per metus	Pasikartojimo periodas [metai]	Tikimybė per metus	Pasikartojimo periodas [metai]
529	0,0099	100,58	0,0928	10,77

### 3.4. Bendrojo ozono kiekio ekstremumų stacionarumo tyrimas

3.2 – 3.3 poskyriuose aprašytas tyrimas atliktas su prielaida, jog BOK metinių minimumų ir maksimumų imtys yra stacionarios. Šiame poskyryje aprašomas papildomai atliktas BOK ekstremumų stacionarumo tyrimas.

BOK minimumų ir maksimumų imtims buvo atlikti testai stacionarumo prielaidoms patikrinti. ADF testo rezultatai rodo, jog tiek metinių minimumų, tiek metinių maksimumų imtims su reikšmingumo lygmeniu  $\alpha = 0,05$  neatmetama nulinė hipotezė  $H_0$ , kad procesas turi vienetinę šaknį, prieš alternatyvią hipotezę  $H_1$ , kad procesas yra stacionarus (žr. 9 lent.).

**9 lentelė.** ADF testo rezultatai

Imtis	Dickey-Fuller statistika	p-reikšmė
Minimalūs metiniai BOK	-1,7632	0,6629
Maksimalūs metiniai BOK	-2,6874	0,3100

Toliau atliekamas KPSS stacionarumo testas (žr. 10 lent.). Testo rezultatai rodo, jog su reikšmingumo lygmeniu  $\alpha = 0,05$  neatmetama nulinė hipotezė  $H_0$ , kad procesas yra stacionarus, prieš alternatyvią hipotezę  $H_1$ , jog procesas turi vienetinę šaknį.

**10 lentelė.** KPSS testo rezultatai

Imtis	KPSS statistika	p-reikšmė
Minimalūs metiniai BOK	0,2879	>0,1000
Maksimalūs metiniai BOK	0,1595	>0,1000

Toliau atliekamas Mann-Kendall trendo testas (žr. 11 lent.). Testo rezultatai rodo, jog su  $\alpha = 0,05$  reikšmingumo lygmeniu neatmetama nulinė hipotezė  $H_0$ , jog procesas neturi monotoniškai didėjančio arba mažėjančio trendo, prieš alternatyvią hipotezę  $H_1$ , jog procesas turi monotonišką trendą.

**11 lentelė.** Minimalaus BOK Mann-Kendall trendo testo rezultatai

Imtis	Statistika	p-reikšmė
Minimalūs metų BOK	0,1740	0,2108
Maksimalūs metų BOK	0,0997	0,4785

Taigi, atlikus stacionarumo tyrimo ADF, KPSS ir Mann-Kendall testus nepakanka informacijos vienareikšmiškai nustatyti ir atmesti tiek stacionarumo (KPSS testas neatmeta), tiek nestacionarumo (ADF testas neatmeta) hipotezių. Atsižvelgus į apžvelgtus BOK tyrimus, kurie rodo ekstremalių BOK reikšmių nepastovumą ir priklausomybę nuo kitų reiškinių, ateityje pagrįstai galima būtų taikyti prielaidą jog BOK laiko eilutė yra nestacionari. Tokiu būdu klimato kaitą taip pat galima būtų sieti su BOK kaitos tyrimais.

Visgi, kaip buvo aptarta analizuojant literatūrą, BOK lemia labai įvairūs klimato reiškiniai, todėl BOK ekstremumus modeliuoti be papildomų klimato kintamųjų ar eksperimentinių duomenų gali būti sudėtinga ar net neįmanoma.

## Išvados

1. Metiniams bendrojo ozono kiekio minimumams pritaikius GEV ir Gumbelio skirstinius, pagal pasirinktus kriterijus skirstinių tinkamumas tikimybiniam vertinimui yra panašus, visgi prognozuojamas žemiausio Lietuvoje užfiksuoto 182 DV bendrojo ozono kiekio pasikartojimo periodas yra pakankamai skirtingas, tai yra, atitinkamai 71,0 metų (GEV atveju) ir 24,9 metų (Gumbelio atveju). Viena iš priežasčių, kodėl šie su rekordu susiję rezultatai yra nevienareikšmiški, gali būti santykinai maža stebėtų ekstremumų imtis, kurioje kol kas dar nebuvo užfiksuotų daug rekordui artimų ekstremalių verčių.
2. Metiniams bendrojo ozono kiekio maksimumams pritaikius GEV ir Gumbelio skirstinius, pagal pasirinktus kriterijus geriau maksimumus apibūdina GEV skirstinys, jam nustatytas ženkliai mažesnis pasikliautinis intervalas. Aukščiausio Lietuvoje užfiksuoto 529 DV bendrojo ozono kiekio pasikartojimo periodas yra 100,58 metų (GEV atveju).
3. Ozono skylę indikuojančio žemesnio nei 220 Dobsono vienetų bendrojo ozono kiekio pasikartojimo periodas yra 2,7 metų (GEV atveju) ir 2,9 metų (Gumbelio atveju). Tikimybės, kad bent kartą per metus bendrasis ozono kiekis Lietuvoje (Kaune) nukris žemiau 220 DV atitinkamai yra 0,37 (GEV atveju) ir 0,34 (Gumbelio atveju). Gauti pasikartojimo periodai gerai atitinka empirinį tokio minimalaus bendrojo ozono kiekio pasikartojimo periodą – 2,7 metų.
4. Papildomi bendrojo ozono kiekio metinių ekstremalių reikšmių stacionarumo tyrimo rezultatai rodo, jog bendrojo ozono kiekio ekstremumai gali būti nestacionarūs, todėl ateityje darbą plėtojant tikimybiniam vertinimui reikėtų atlikti platesnius stacionarumo tyrimus ir nestacionarumo prielaidai pasitvirtinus taikyti nestacionarių ekstremalių reikšmių metodus.

### **Rekomendacijos tolimesniems darbams**

Šiame darbe bendrojo ozono kiekio tikėtinumo vertinimui naudojamas duomenų bloko maksimumo ekstremalių reikšmių analizės principas. Šio metodo naudojimo trūkumas – naudojama maža dalis prieinamų duomenų – šiuo atveju viena ekstremali reikšmė per metus. Tolimesniuose tyrimuose ekstremalių bendrojo ozono kiekio atvejų tikėtinumui vertinti būtų galima pritaikyti virš slenksčio esančių reikšmių ar cenzūruotų duomenų tyrimo metodiką ir darbą išplėtoti susietai su klimato kaita bei mažo ir didelio BOK poveikio tyrimu.

## Literatūros sąrašas

1. JACOB, M. ir kt. Extreme Value Theory. Iš: JACOB, M. ir kt. *Sud. Forecasting and Assessing Risk of Individual Electricity Peaks* [interaktyvus]. Cham: Springer International Publishing, 2020. p. 39–60 [žiūrėta 2021-05-20]. ISBN 978-3-030-28669-9. Prieiga per: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-28669-9\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-28669-9_3).
2. BELLA, N. ir kt. Statistical modeling of annual maximum precipitation in Oued El Gourzi Watershed, Algeria. Iš: *Applied Water Science* [interaktyvus]. 2020. Vol. 10, no. 4, p. 94 [žiūrėta 2021-05-19]. Prieiga per: <https://doi.org/10.1007/s13201-020-1175-6>.
3. ŠEPUTYTĖ, I., ALZBUTAS, R. Tikimybinis ekstremalių temperatūrų dinamikos vertinimas. Iš: *Lietuvos matematikos rinkinys* [interaktyvus]. 2015. Vol. 56, no. B, p. 35–40 [žiūrėta 2021-05-19]. Prieiga per: <https://www.journals.vu.lt/LMR/article/view/17705>.
4. POCIENĖ, J. *Ekstremalių meteorologinių įvykių tikimybinis vertinimas: magistro darbas*. Kaunas: Kauno technologijos universitetas. 2014. Prieiga per: eLABa – nacionalinė Lietuvos akademinė elektroninė biblioteka.
5. ALZBUTAS, R. Atominės elektrinės saugą veikiančių ekstremalių vėjų tikimybinis vertinimas. Iš: *Energetika = Power engineering* [interaktyvus]. 2009. Vol. 55, no. 1, p. 20–26 [žiūrėta 2021-05-19]. Prieiga per: <http://mokslozurnalai.lmaleidykla.lt/energetika/2009/1/5298>.
6. BOGDANOWICZ, A.W. *Ekstremalių kritulių tikimybinis vertinimas: magistro darbas*. Kaunas: Kauno technologijos universitetas. 2017. Prieiga per: eLABa – nacionalinė Lietuvos akademinė elektroninė biblioteka.
7. ČESNULYTĖ, V. *Extreme precipitation probabilistic assessment and uncertainty analysis: magistro darbas*. 2011. Kaunas: Kauno technologijos universitetas. Prieiga per: eLABa – nacionalinė Lietuvos akademinė elektroninė biblioteka.
8. KITAVIČIŪTĖ, D. *Bajeso metodo ir neapibrėžtumo analizės taikymas viesulo matematiniam modeliavimui: magistro darbas*. 2014. Kaunas: Kauno technologijos universitetas. Prieiga per: eLABa – nacionalinė Lietuvos akademinė elektroninė biblioteka.
9. NAUJOKAITIS, D. *Sistemas gedimo modeliavimas ir tikimybinis vertinimas: magistro darbas*. 2010. Kaunas: Kauno technologijos universitetas. Prieiga per: eLABa – nacionalinė Lietuvos akademinė elektroninė biblioteka.
10. BEINARAUSKAITĖ, V. *Ekstremalaus įvykio tikimybės vertinimas atsižvelgiant į duomenų neapibrėžtumą: magistro darbas*. 2009. Kaunas: Kauno technologijos universitetas. Prieiga per: eLABa – nacionalinė Lietuvos akademinė elektroninė biblioteka.
11. KOMOLOVAITĖ, D. *Ekstremalių magnetinių audrų tikimybinis vertinimas: bakalauro darbas*. 2019. Kaunas: Kauno technologijos universitetas. Prieiga per: eLABa – nacionalinė Lietuvos akademinė elektroninė biblioteka.
12. LEMMEN, D.S. ir kt. Impacts to Adaptation: Canada in a Changing Climate [interaktyvus]. 2008 [žiūrėta 2021-05-01]. Prieiga per: <https://doi.org/10.4095/226455>.

13. MAILHOT, A., DUCHESNE, S. Design Criteria of Urban Drainage Infrastructures under Climate Change. Iš: *Journal of Water Resources Planning and Management* [interaktyvus]. 2010. Vol. 136, no. 2, p. 201–208 [žiūrėta 2021-05-25]. Prieiga per: <http://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29WR.1943-5452.0000023>.
14. MULLER, R. ir kt. *Stratospheric Ozone Depletion and Climate Change* [interaktyvus]. Cambridge, UNITED KINGDOM: Royal Society of Chemistry, 2011. ISBN 978-1-84973-318-2.
15. LHMT - Lietuvos hidrometeorologijos tarnyba - Meteo.lt [interaktyvus]. [žiūrėta 2021-05-15]. Prieiga per: <http://www.meteo.lt/lt>
16. GOVERNMENT OF CANADA, E. and C.C.C. WOUDC - Data - Data Products [interaktyvus]. [žiūrėta 2021-05-31]. Prieiga per: <https://woudc.org/data/products/>.
17. LIETUVOS RESPUBLIKOS VYRIAUSYBĖ. Dėl prisijungimo prie 1985 metų Vienos konvencijos dėl ozono sluoksnio apsaugos, 1987 metų Monrea... [interaktyvus]. TAR, 1994-12-19, Nr. 1279 [žiūrėta 2021-05-19]. Prieiga per: <https://www.e-tar.lt/>.
18. Global Atmosphere Watch Programme (GAW) | World Meteorological Organization [interaktyvus] [žiūrėta 2021-05-25]. Prieiga per: <https://community.wmo.int/activity-areas/gaw>.
19. GOVERNMENT OF CANADA, E. and C.C.C. WOUDC - About - About WOUDC [interaktyvus] [žiūrėta 2021-05-25]. Prieiga per: <https://woudc.org/about/index.php>.
20. NASA Ozone Watch: 2021 Antarctic OMPS and MERRA-2 Ozone [interaktyvus] [žiūrėta 2021-05-25]. Prieiga per: <https://ozonewatch.gsfc.nasa.gov/meteorology/SH.html>.
21. Monitoring of the ozone layer | Copernicus [interaktyvus] [žiūrėta 2021-05-25]. Prieiga per: <https://atmosphere.copernicus.eu/ozone-monitoring>.
22. LABORATORY (CSL), N.C.S. Scientific Assessment of Ozone Depletion 2018: Downloads [interaktyvus] [žiūrėta 2021-04-25]. Prieiga per: <https://csl.noaa.gov/assessments/ozone/2018/downloads>.
23. 2018-12-14 | Bendrojo ozono kiekio matavimai Lietuvoje 2018 metais - Naujienos - Meteo.lt [interaktyvus] [žiūrėta 2021-05-31]. Prieiga per internetą: <http://www.meteo.lt/lt>.
24. BOJKOV, R.D. - BALIS, D.S. Characteristics of episodes with extremely low ozone values in the northern middle latitudes 1957-2000. Iš: *Annales Geophysicae* [interaktyvus]. 2001. Vol. 19, p. 797–807 [žiūrėta 2021-05-19]. Prieiga per: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2001AnGeo..19..797B>.
25. JAMES, P.M. A climatology of ozone mini-holes over the northern hemisphere. Iš: *International Journal of Climatology* [interaktyvus]. 1998. Vol. 18, no. 12, p. 1287–1303 [žiūrėta 2021-05-19]. Prieiga per: [https://doi-org.ezproxy.ktu.edu/10.1002/\(SICI\)1097-0088\(1998100\)18:12<1287::AID-JOC315>3.0.CO;2-4](https://doi-org.ezproxy.ktu.edu/10.1002/(SICI)1097-0088(1998100)18:12<1287::AID-JOC315>3.0.CO;2-4)
26. KRZYŚCIN, J.W. Long-term changes in ozone mini-hole event frequency over the Northern Hemisphere derived from ground-based measurements. Iš: *International Journal of Climatology*

- [interaktyvus]. 2002. Vol. 22, no. 12, p. 1425–1439 [žiūrėta 2021-05-19]. Prieiga per: <http://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/joc.812>.
27. KOCH, G. ir kt. A composite study on the structure and formation of ozone miniholes and minihighs over central Europe. Iš: *Geophysical Research Letters* [interaktyvus]. 2005. Vol. 32, no. 12. [žiūrėta 2021-05-19]. Prieiga per: <https://doi-org.ezproxy.ktu.edu/10.1029/2004GL022062>.
28. ANTÓN, M. ir kt. Total ozone and solar erythemal irradiance in southwestern Spain: Day-to-day variability and extreme episodes. Iš: *Geophysical Research Letters* [interaktyvus]. 2008. Vol. 35, no. 20 [žiūrėta 2021-05-19]. Prieiga per: <https://doi-org.ezproxy.ktu.edu/10.1029/2008GL035290>
29. RIEDER, H.E. ir kt. Extreme events in total ozone over Arosa – Part 1: Application of extreme value theory. In *Atmospheric Chemistry and Physics* [interaktyvus]. 2010. Vol. 10, no. 20, p. 10021–10031 [žiūrėta 2021-05-19]. Prieiga per: <https://doi.org/10.5194/acp-10-10021-2010>.
30. RIEDER, H.E. ir kt. Extreme events in total ozone over Arosa – Part 2: Fingerprints of atmospheric dynamics and chemistry and effects on mean values and long-term changes. Iš: *Atmospheric Chemistry and Physics* [interaktyvus]. 2010. Vol. 10, no. 20, p. 10033–10045 [žiūrėta 2021-03-22]. Prieiga per internetą: <https://doi.org/10.5194/acp-10-10033-2010>
31. RIEDER, H.E. ir kt. Extreme events in total ozone over the Northern mid-latitudes: an analysis based on long-term data sets from five European ground-based stations. Iš *Tellus B: Chemical and Physical Meteorology* [interaktyvus]. 2011. Vol. 63, no. 5, p. 860–874 [žiūrėta 2021-03-22]. . Prieiga per: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1111/j.1600-0889.2011.00575.x>.
32. PETROPAVLOVSKIKH, I. ir kt. The influence of the North Atlantic Oscillation and El Niño–Southern Oscillation on mean and extreme values of column ozone over the United States. Iš: *Atmospheric Chemistry and Physics* [interaktyvus]. 2015. Vol. 15, no. 3, p. 1585–1598 [žiūrėta 2021-03-30]. Prieiga per: <https://acp.copernicus.org/articles/15/1585/2015/>.
33. FRAGKOS, K. ir kt. Extreme total column ozone events and effects on UV solar radiation at Thessaloniki, Greece. In *Theoretical and Applied Climatology* [interaktyvus]. 2016. Vol. 126, no. 3–4, p. 505–517 [žiūrėta 2021-03-29]. Prieiga per: <http://link.springer.com/10.1007/s00704-015-1562-3>.
34. TRETJAKOVAS, S. *Bendro ozono kiekio tyrimai ir matavimo metodų tobulinimas* [interaktyvus]. [s.l.]: VGTU leidykla „TECHNIKA“, 2012 [žiūrėta 2021-05-20]. Prieiga per: <http://dspace.vgtu.lt/handle/1/1541>.
35. GOVERNMENT OF CANADA, E. and C.C.C. WOUDC - Data - Data Search / Download [interaktyvus] [žiūrėta 2021-05-19]. Prieiga per: <https://woudc.org/data/explore.php?lang=en>.
36. RITZEMA, H.P.Sud. *Drainage principles and applications*. 2. ed. (completely rev.). Ed. Wageningen: ILRI, 1994. 1125 p. ISBN 978-90-70754-33-4.
37. LAIO, F. Cramer–von Mises and Anderson–Darling goodness of fit tests for extreme value distributions with unknown parameters. Iš: *Water Resources Research* [interaktyvus]. 2004. Vol. 40, no. 9 [žiūrėta 2021-05-27]. Prieiga per: <https://doi-org.ezproxy.ktu.edu/10.1029/2004WR003204>.

38. RAZMI, A. ir kt. Non-Stationary Frequency Analysis of Extreme Water Level: Application of Annual Maximum Series and Peak-over Threshold Approaches. In *Water Resources Management* [interaktyvus]. 2017. Vol. 31, no. 7, p. 2065–2083. [žiūrėta 2021-05-26]. Prieiga per: <https://doi-org.ezproxy.ktu.edu/10.1007/s11269-017-1619-4>
39. ERIC GILLELAND - RICHARD W KATZ extRemes 2.0: An Extreme Value Analysis Package in R. In *Journal of statistical software* . 2016. Vol. 72, no. 1, p. 1–39.
40. CumFreq, distribution fitting of probability, free software [interaktyvus] [žiūrėta 2021-05-31]. Prieiga per: <https://www.waterlog.info/cumfreq.htm>.



## Priedai

### 1 priedas. Minimalus vidutinis dienos BOK pagal mėnesį mėnesį skirtingais metais

	Mėnuo											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>1993</b>	237	211	265	292	304	313	282	288	237	210	247	221
<b>1994</b>	271	328	288	323	341	300	307	290	259	228	211	239
<b>1995</b>	255	257	286	326	306	305	294	265	254	228	236	244
<b>1996</b>	269	277	275	293	307	282	306	271	266	244	245	221
<b>1997</b>	264	276	264	298	319	331	322	282	260	246	231	220
<b>1998</b>	235	296	316	348	371	338	309	306	256	266	237	266
<b>1999</b>	279	335	353	352	369	369	414	363	-	-	-	-
<b>2000</b>	327	292	292	338	353	318	330	306	266	260	248	309
<b>2001</b>	351	267	344	322	317	310	281	-	261	247	230	247
<b>2002</b>	233	281	301	364	316	309	311	290	282	267	263	256
<b>2003</b>	253	312	285	357	316	337	326	315	273	272	264	257
<b>2004</b>	308	332	333	337	348	344	309	304	281	258	247	280
<b>2005</b>	297	305	334	348	307	321	308	285	272	236	244	
<b>2006</b>	274	-	341	374	349	321	315	313	257	252	238	226
<b>2007</b>	277	279	312	333	313	311	282	265	264	234	222	202
<b>2008</b>	247	257	324	331	314	277	274	258	242	218	224	225
<b>2009</b>	253	369	340	311	304	297	288	-	245	257	233	298
<b>2010</b>	305	301	332	325	332	320	299	282	268	271	250	283
<b>2011</b>	297	321	-	287	325	304	300	279	266	243	210	230
<b>2012</b>	237	307	323	308	308	313	301	280	277	237	234	214
<b>2013</b>	235	300	323	-	320	321	318	302	277	239	253	230
<b>2014</b>	267	313	272	-	328	320	322	315	274	249	245	262
<b>2015</b>	267	300	306	315	339	324	310	282	275	-	-	216
<b>2016</b>	-	259	-	-	317	293	314	270	252	261	222	245
<b>2017</b>	278	260	313	308	302	313	303	287	285	260	247	235
<b>2018</b>	286	338	376	328	328	310	301	289	263	247	221	209
<b>2019</b>	229	261	312	305	317	238	302	284	255	226	196	182
<b>2020</b>	187	250	340	303	335	311	307	271	260	242	214	190

## 2 priedas. Maksimalus vidutinis dienos BOK pagal mėnesį skirtingais metais

	Mėnuo											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1993	384	379	391	359	365	356	352	350	330	299	322	315
1994	429	456	437	438	398	381	339	360	349	332	341	335
1995	367	419	421	422	399	352	353	348	355	290	338	390
1996	345	467	432	389	370	383	362	318	326	318	343	414
1997	402	428	472	464	413	391	363	339	341	352	336	315
1998	412	438	483	483	442	392	412	381	368	367	354	415
1999	445	504	527	450	470	480	500	495	-	-	-	-
2000	481	499	479	473	418	434	421	361	376	368	383	483
2001	489	508	463	468	413	410	360	-	371	322	349	399
2002	402	479	482	492	380	394	380	362	349	360	339	347
2003	468	438	430	495	422	405	374	359	371	346	347	389
2004	475	465	497	436	418	408	379	357	348	328	374	368
2005	440	432	446	461	421	389	376	353	326	336	381	-
2006	376	-	487	465	430	432	367	360	332	331	372	301
2007	387	450	435	420	396	356	374	357	328	314	340	343
2008	399	405	451	408	388	377	360	337	306	315	325	375
2009	413	427	436	382	388	387	346	-	315	332	346	431
2010	388	440	458	442	406	388	338	348	369	354	337	385
2011	417	447	-	407	452	389	347	348	328	336	313	369
2012	409	443	453	453	400	425	364	344	338	323	355	321
2013	421	421	441	-	379	362	384	360	351	338	361	333
2014	398	516	418	-	395	394	378	378	348	332	305	401
2015	478	463	444	449	420	387	381	349	332	-	-	369
2016	-	440	-	-	401	428	376	363	327	333	363	398
2017	473	404	430	420	425	380	374	361	343	360	401	406
2018	440	521	529	413	389	390	366	338	344	333	360	388
2019	412	490	506	424	423	368	393	364	343	340	302	418
2020	410	427	464	400	410	369	367	338	312	308	336	366

### 3 priedas. Klasikinių ekstremalių reikšmių skirstinių pasiskirstymo funkcijos

Skirstinys	Pasiskirstymo funkcija	$\alpha$
Veibulo	$F(u) = \begin{cases} \alpha(-u)^{\alpha-1}e^{-(u)^{\alpha}}, & \text{kai } u < 0 \\ 0, & \text{kai } u \geq 0 \end{cases}$	$\alpha > 0$
Frechet	$F(u) = \begin{cases} 0, & \text{kai } u < 0 \\ \alpha u^{\alpha-1}e^{-u^{-\alpha}}, & \text{kai } u \geq 0 \end{cases}$	$\alpha > 0$
Gumbelio	$F(u) = e^{-u-e^{-u}}$	-

#### 4 priedas. „R“ programos kodas

```
library(readxl)
library(reshape2)
library(zoo)
library(lubridate)
library(eXtremes)
library(tseries)
library(gnFit)
library(Kendall)

#Duomenų nuskaitymas iš failu, kuriuose 2 stulpeliai: mėnesio pirmos dienos data ir
minimalus/maksimalus BOK
mthMin <- read_excel("C:/Users/vejux/OneDrive - Kaunas University of Technology/MBD/BOK duomenys -
daily.xlsx",
                    col_types = c("date", "numeric"))
colnames(mthMin) <- c("Periodas", "BOK")
mthMax <- read_excel("C:/Users/vejux/OneDrive - Kaunas University of Technology/MBD/BOK duomenys -
daily.xlsx",
                    sheet = "Monthly maxima only", col_types = c("date", "numeric"))
colnames(mthMax) <- c("Periodas", "BOK")

monthly.min <- as.xts(-mthMin$BOK, order.by = mthMin$Periodas)
monthly.max <- as.xts(mthMax$BOK, order.by = mthMin$Periodas)
#-----
#Metinių ekstremumų imtciu yearly.min.adj ir yearly.max sudarymas
yearly.min <- apply.yearly(monthly.min, max, na.rm=TRUE)
yearly.min <- yearly.min [c("1993/1998", "2000/2020")]
yearly.min.adj <- monthly.min
index(yearly.min.adj) <- index(yearly.min.adj) %m+% months(-1)
yearly.min.adj <- apply.yearly(yearly.min.adj, max, na.rm=TRUE)
yearly.min.adj <- yearly.min.adj [c("1993/1998", "2000/2020")]

yearly.max <- apply.yearly(monthly.max, max, na.rm=TRUE)
yearly.max <- yearly.max [c("1993/1998", "2000/2020")]

#-----
#GEV ir Gumbelio skirstinių minimumu ir maksimumu duomenims parametru nustatymas
#maksimalaus tiketinumų metodo
fit_mle.min.gev.adj <- fevd(as.vector(yearly.min.adj), method = "MLE",
                          type="GEV", period.basis="year")
fit_mle.min.gumbel.adj <- fevd(as.vector(yearly.min.adj), method = "MLE",
                              type="Gumbel", period.basis="year")

fit_mle.max.gev <- fevd(as.vector(yearly.max), method = "MLE",
                       type="GEV", period.basis="year")
fit_mle.max.gumbel <- fevd(as.vector(yearly.max), method = "MLE",
                          type="Gumbel", period.basis="year")

#Pritaikytu skirstinių sarasas
fits <- list(fit_mle.min.gev.adj, fit_mle.min.gumbel.adj, fit_mle.max.gev, fit_mle.max.gumbel)

#-----
#Skirstinių grafikai
dev.off()
x <- seq(-300,-150,,200)
param1 <- strip(fit_mle.min.gev.adj)
param2 <- strip(fit_mle.min.gumbel.adj)
param3 <- strip(fit_mle.max.gev)
param4 <- strip(fit_mle.max.gumbel)

#min GEV
x <- seq(-300,-150,,200)
aaa <- extRemes::pevd(x, param1[1], param1[2], param1[3])
plot(x,aaa, type="l", col="blue", lwd=1.5, ylab="F(x)", ylim=c(0, 1))
lines(ecdf(as.vector(yearly.min.adj)))
lines(x, aaa+2*1.635*(1-aaa)*sqrt(aaa*(1-aaa)/27), col= "red")
lines(x, aaa-2*1.635*(aaa)*sqrt(aaa*(1-aaa)/27), col= "red")
```

```

#min Gumbelio
x <- seq(-300,-150,,200)
aaa <- #ecdf(as.vector(yearly.min.adj))
  extRemes::pevd(x, param2[1], param2[2], 0)
plot(x,aaa, type="l", col="blue", lwd=1.5, ylab="F(x)", ylim=c(0, 1))
lines(ecdf(as.vector(yearly.min.adj)))
lines(x, aaa+2*1.635*(1-aaa)*sqrt(aaa*(1-aaa)/27), col= "red")
lines(x, aaa-2*1.635*(aaa)*sqrt(aaa*(1-aaa)/27), col= "red")

#min GEV vs min Gumbel
x <- seq(-270,-150,,200)
plot(x,extRemes::pevd(x, param1[1], param1[2], param1[3]), type="l", col="blue", lwd=2,
ylab="F(x)", ylim=c(0, 1))
lines(x,extRemes::pevd(x, param2[1], param2[2], 0), type="l", col="green", lwd=2)
lines(ecdf(as.vector(yearly.min.adj)))

#max GEV
x <- seq(350,650,,200)
aaa <- #ecdf(as.vector(yearly.min.adj))
  extRemes::pevd(x, param3[1], param3[2], param3[3])
plot(x,aaa, type="l", col="blue", lwd=1.5, ylab="F(x)", ylim=c(0, 1))
lines(ecdf(as.vector(yearly.max)))
lines(x, aaa+2*1.635*(1-aaa)*sqrt(aaa*(1-aaa)/27), col= "red")
lines(x, aaa-2*1.635*(aaa)*sqrt(aaa*(1-aaa)/27), col= "red")

#max Gumbelio
x <- seq(350,650,,200)
aaa <- #ecdf(as.vector(yearly.min.adj))
  extRemes::pevd(x, param4[1], param4[2], 0)
plot(x,aaa, type="l", col="blue", lwd=1.5, ylab="F(x)", ylim=c(0, 1))
lines(ecdf(as.vector(yearly.max)))
lines(x, aaa+2*1.635*(1-aaa)*sqrt(aaa*(1-aaa)/27), col= "red")
lines(x, aaa-2*1.635*(aaa)*sqrt(aaa*(1-aaa)/27), col= "red")

#max GEV vs max Gumbel
x <- seq(350,650,,200)
plot(x,extRemes::pevd(x, param3[1], param3[2], param3[3]), type="l", col="blue", lwd=2,
ylab="F(x)", ylim=c(0, 1))
lines(x,extRemes::pevd(x, param4[1], param4[2], 0), type="l", col="green", lwd=2)
lines(ecdf(as.vector(yearly.min.adj)))
#-----
#Suderinamumo testai ir grafikai
#Anderson-Darling, Kramerio suderinamumo testai
gnfit(yearly.min.adj, "gev", pr = param1)
gnfit(yearly.min.adj, "gum", pr = param2)

gnfit(yearly.max, "gev", pr = param3)
gnfit(yearly.max, "gum", pr = param4)

#Q-Q, P-P, skirstinio tankio funkcijų grafikai
par(mfrow=c(1,3))
selected.model = fevd.minmin.gumbel.mu
plot(selected.model, type = c("probprob"), main="P-P")
plot(selected.model, type = c("qq"), main="Q-Q")
plot(selected.model, type = c("density"), main="Tankio funkcijos", ylim=c(0, 0.5))
#"Zplot", "primary", "probprob", "qq", "qq2", "hist", "density", "rl", "trace"

#-----
#Charakteristiku skaiciavimas
#pasikartojimo periodai pasirinktoms reikšmėms
1-extRemes::pevd(c(-300,-220,-182,-100), param1[1], param1[2], param1[3])
1/(1-extRemes::pevd(c(-300,-220,-182,-100), param1[1], param1[2], param1[3]))

1-extRemes::pevd(c(-300,-220,-182,-100), param2[1], param2[2], 0)
1/(1-extRemes::pevd(c(-300,-220,-182,-100), param2[1], param2[2], 0))

1-extRemes::pevd(c(529), param3[1], param3[2], param3[3])
1/(1-extRemes::pevd(c(529), param3[1], param3[2], param3[3]))

```

```

1-extRemes::pevd(c(529), param4[1], param4[2], 0)
1/(1-extRemes::pevd(c(529), param4[1], param4[2], 0))

#reiksmes pasikartojimo periodams
pasikartojimo.periodai <- c(2, 5,10, 20, 50, 100,1000, 10000)
r1 <- -return.level(fits[[1]], return.period = pasikartojimo.periodai, do.ci=FALSE)
r2 <- -return.level(fits[[2]], return.period = pasikartojimo.periodai, do.ci=FALSE)
r3 <- return.level(fits[[3]], return.period = pasikartojimo.periodai, do.ci=FALSE)
r4 <- return.level(fits[[4]], return.period = pasikartojimo.periodai, do.ci=FALSE)

#-----
#Stacionarumo testai
Kendall::MannKendall(yearly.min.adj)
tseries::kpss.test(yearly.min.adj, "Level")
tseries::kpss.test(yearly.min.adj, "Trend")
tseries::adf.test(yearly.min.adj, "Stationary")

```