KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

Dalius Strebeika

Pensijų fondų rizikos matų analizė įvairiems skirstiniams

Baigiamasis magistro darbas

Darbo vadovai:
doc. dr. Kristina Šutienė
doc. dr. Audrius Kabašinskas

Kaunas, 2015

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

Pensijų fondų rizikos matų analizė įvairiems skirstiniams

Baigiamasis magistro darbas

Darbo vadovai:
doc. dr. Kristina Šutienė
2015-05
doc. dr. Audrius Kabašinskas
2015-05

Recenzentas:
lekt. dr. Jurgita Bagdonavičienė
2015-06

Atliko:
MGTMM-3 gr. stud.
Dalius Strebeika
2015-05

Kaunas, 2015

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

Dalius Strebeika

Studijų programa 621G10003

Baigiamojo projekto

„Pensijų fondų rizikos matų analizė įvairiems skirstiniams“

AKADEMINIO SĄŽININGUMO DEKLARACIJA

2015 m. birželio mėn. 5 d.

Kaunas

Patvirtinu, kad mano, **Daliaus Strebeikos,** baigiamasis darbas tema „Pensijų fondų rizikos matų analizė įvairiems skirstiniams“ yra parašytas visiškai savarankiškai, o visi pateikti duomenys ar tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti sąžiningai. Šiame darbe nei viena darbo dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar internetinių šaltinių, visos kitų šaltinių tiesioginės ir netiesioginės citatos nurodytos literatūros nuorodose. Įstatymu nenumatytų piniginių sumų už šį darbą niekam nesu mokėjęs.

Aš suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo faktui, man bus taikomos nuobaudos, remiantis Kauno technologijos universitete galiojančia tvarka.

D. Strebeika's Pension Funds' Risk Measure Analysis for Various Distributions: Master's work in applied mathematics / supervisors dr. assoc. K. Šutienė and dr. assoc. A. Kabašinskas; Department of Applied mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2015. -40p.

SUMMARY

In this paper we analyze risk measures Value at Risk known as VaR and Conditional Value at Risk known as CVaR for various distributions. These two risk measures are most commonly used in statistical analysis since they are most accurate and most helpful for risk management.

Statistical analysts usually use Student's *t* and stable distributions since these two are best while working with empirical data which is skewed and asymmetrical. In this work we push it a step further and work with various mixtures and combinations of the above named distributions aiming for better results.

First step was to find parameter estimations for every distribution and decide on modeling size. Main goal was to determine which distribution could be used for modeling data that would be the most resembling to real given empirical data. Risk measures VaR and CVaR were set as criteria for determining which distribution fits best. Mean absolute percentage error known as MAPE was used to compare modeling and real data risk measures between them.

The end result in this paper is that Student's skew *t* distribution is optimal for modeling given pension funds data. Even though there are some cases where other distributions get better results while working with different length distribution tails, Student's *t* distribution consistently produces close to best results.

Turinys

Paveikslų sąrašas

Lentelių sąrašas

Įvadas

Rizikos valdymas yra plati sąvoka, kurią galima analizuoti pasinaudojant įvairiomis sritimis. Iš matematinės pusės rizikos valdymas yra procedūra padedanti konstruoti nuostolių ar gražų pasiskirstymus. Tarp daugybės naujai sukurtų rizikos matų ir rizikos vertinimo metodų, tiktai keletas yra plačiai naudojami praktikoje. Nors ši mokslo šaka yra plačiai besivystanti (dėl dabartinio didėlio susidomėjimo finansų rinkomis, finansinių procesų modeliavimo ir pns.) ir sukuriama daugybė naujų rizikos vertinimo modelių, tačiau ekspertų labiausiai vertinama yra vertybinių popierių portfelio sąlyginės rizikuojamosios vertės modelis (*Conditional Value-at-Risk*). Šis modelis buvo pristatymas Rockafeller'io ir Uryasev'o naudoti rizikos valdyme. CVaR modelis gerai aproksimuoja vidutinį didžiausios žalos (ar didžiausios grąžos) atvejį, pasirinktu norimu pasikliautinumo lygmeniu.

Tiriant investavimo galimybes ir prognozuojant galimas žalas (grąžas) yra aprašomi tikimybiniai statistiniai modeliai. Geresni modeliai lemia geresnius prognozės rezultatus, todėl yra aktualu, kad modeliai būtų adekvatūs. Kadangi finansiniai duomenys turi didelius nukrypimus, bei asimetriškumus, todėl jiems modeliuoti yra siūlomi Stjudento bei stabilieji skirstiniai.

Didžiausia stabiliųjų skirstinių problema yra ta, kad jie turi charakteristinę funkciją, tačiau neturi analitinės tankio pasiskirstymo ir pasiskirstymo funkcijos formų. Šioms funkcijoms įvertinti yra taikomi įvairūs parametrizavimo metodai, tačiau dažniausiai naudojamas ir labiausiai paplitęs yra Samorodnitsky'io ir Taqqu parametrizavimo metodas, kuriame yra naudojama žinoma stabilaus skirstinio charakteristinė funkcija.

Darbe buvo naudojami ankščiau minėti Stjudento ir stabilieji skirstiniai, taip pat pasitelkiant ir normalųjį (Gauso) skirstinį. Buvo apskaičiuoti 18-os pensijų fondų rizikos matai VaR ir CVaR kiekvienam skirstiniui ir atliekama jų analizė norint rasti geriausiai turimus empirinius duomenis aprašantį skirstinį.

1 Teorinė dalis

1.1 VaR ir CVaR sąvokos

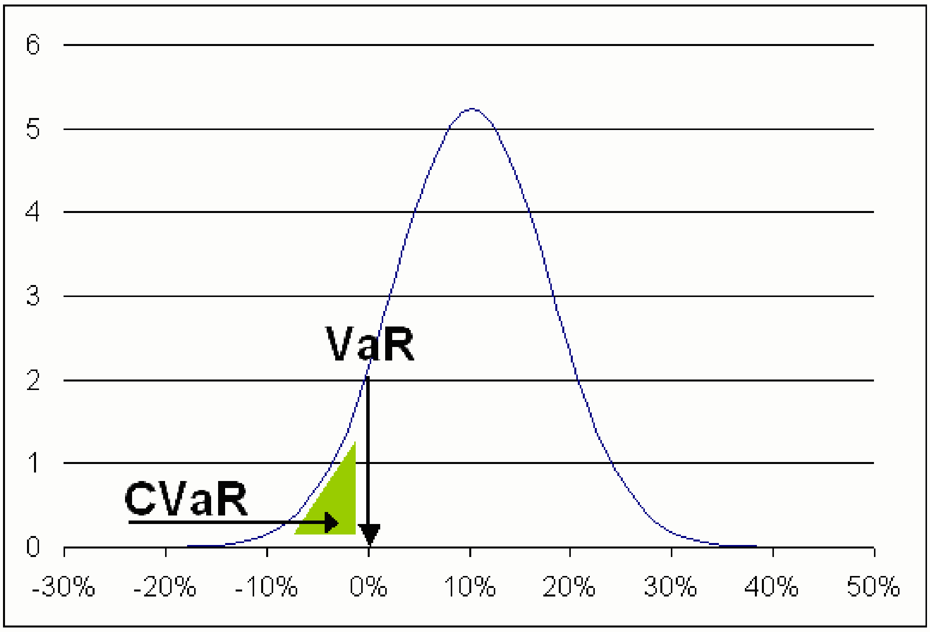
VaR (*angl.* Value at Risk) – vertybinių popierių portfelio rizikuojamosios vertės modelis.

CVaR (*angl.* Conditional Value at Risk) – vertybinių popierių portfelio sąlyginės rizikuojamosios vertės modelis.

CVaR ir VaR [6] yra populiariausios rizikos vertinimo statistikos. Jos pagrinde naudojamos rizikos valdyme, kai bandoma formuoti nuostolių pasiskirstymą. Tarp daugybės rizikos matų, šie yra populiariausi, tačiau būtų galima išskirsti sąlyginę rizikos vertę CVaR kaip populiariausią rizikos matavimo matą. CVaR atitinka vidutinę blogiausio atvejo (didžiausio nuostolio) reikšmę.

Pastebėjimai:

- CVaR turi pranašesnes matematines nuosavybes negu VaR. CVaR yra vadinamas „koherentinis“ rizikos matas, portfelio CVaR yra tolydi funkcija, o VaR gali būti ir diskrečios funkcijos pobūdžio;
- CVaR nuokrypis gali būti lyginamas su standartiniu nuokrypiu;
- Rizikos valdymas naudojant CVaR funkcijas gali būti atliktas efektyviai. CVaR gali būti optimizuotas ir įvairiai apribotas tiesinio programavimo metodais. VaR yra ganėtinai sunku optimizuoti.
- VaR yra rizikos matas neįvertinantis nuostolių, esančių už VaR ribų;
- CVaR įvertina nuostolius, kurie yra už VaR ribų.



1.1 pav. Grafinė VaR ir CVaR reprezentacija

1.1.1 Teorinės VaR ir CVaR išraiškos

Tarkime X atsitiktinis dydis su pasiskirstymo funkcija $F_x(z) = P(X \le z)$.

Apibrėžimas (Value at Risk). Atsitiktinio dydžio X su pasikliautinumo lygmeniu $\alpha \in [0;1]$ rizikos vertę VaR išreiškiame taip:

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) \tag{1.1}$$

Apibrėžimas (*ConditionalValue at Risk*). Atsitiktinio dydžio X su pasikliautinumo lygmeniu $\alpha \in [0;1]$ salyginė rizikos vertė CVaR yra apibendrintas α-uodegos pasiskirstymo vidurkis:

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F_X^{-1}(u)du \tag{1.2}$$

Tuo atveju, kai $F_x(VaR_\alpha(X)) = 1$ (čia $VaR_\alpha(X)$ - didžiausias galimas nuostolis), tada $CVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X)$.

1.1.2 Realios imties VaR ir CVaR įvertinimas

Tarkime, turime duotą diskrečių dydžių imtį $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, čia n - imties dydis. Susidarome turimos imties variacinę eilutę, t.y. $X = (X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$, kur $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n)}$. Tada pasirinkę pasikliautinumo lygmenį $\alpha \in [0;1]$ skaičiuojame VaR:

$$VaR_\alpha(X) = X_{[n\alpha+1]} \tag{1.3}$$

čia $[n\alpha+1]$ suprantamas kaip didžiausias teigiamas sveikas skaičius.

Tarkime, turime duotą diskrečių dydžių imtį $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, čia n - imties dydis. Susidarome turimos imties variacinę eilutę, t.y. $X = (X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$, kur $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n)}$.. Tada pasirinkę pasikliautinumo lygmenį $\alpha \in [0;1]$ skaičiuojame CVaR:

$$CVaR_\alpha(X) = \sum_{X_i \ge VaR_\alpha(X)} X_i \tag{1.4}$$

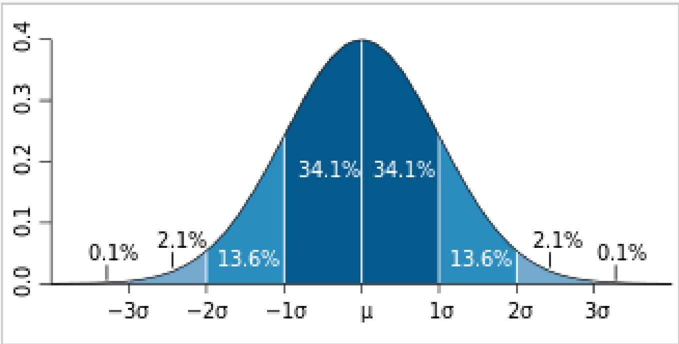
1.2 Normalusis (Gauso) skirstinys

Normalusis (arba Gauso) skirstinys [1] yra turbūt plačiausiai naudojamas skirstinys iš visų kitų. Pagal jį yra pasiskirstę daugybių pasaulyje sutinkamų realių procesų. Labai plačiai normalusis skirstinys yra naudojamas statistikoje, įvertinant nežinomus kintamuosius, kurių pasiskirstymai nėra žinomi.

Atsitiktinio dydžio X pasiskirsčiusio pagal normalųjį skirstinį žymėjimas $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Normaliojo skirstinio tankio pasiskirstymo funkcija su vidurkiu μ ir standartiniu nuokrypiu σ:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \textbf{(1.5)}$$



1.2 pav. Normaliojo skirstinio tankio pasiskirstymo funkcijos grafikas

Normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcija:

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \quad \textbf{(1.6)}$$

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \textbf{(1.7)}$$

Charakteristikos:

$$E(X) = \mu \quad \textbf{(1.8)}$$

$$Var(X) = \sigma^2 \quad \textbf{(1.9)}$$

1.3 Gama funkcija

Gama funkcija (*angl.* gamma function) [12][13] yra dažnai naudojama kaip komponentė, aprašant įvairias pasiskirstymo funkcijas. Todėl ji yra plačiai taikoma tikimybių, statistikos ir kombinatorikos srityse.

Funkcijos išraiška turi kelias formas.

Jeigu *n* yra sveikasis skaičius, tai funkcija įgyja tokią išraišką:

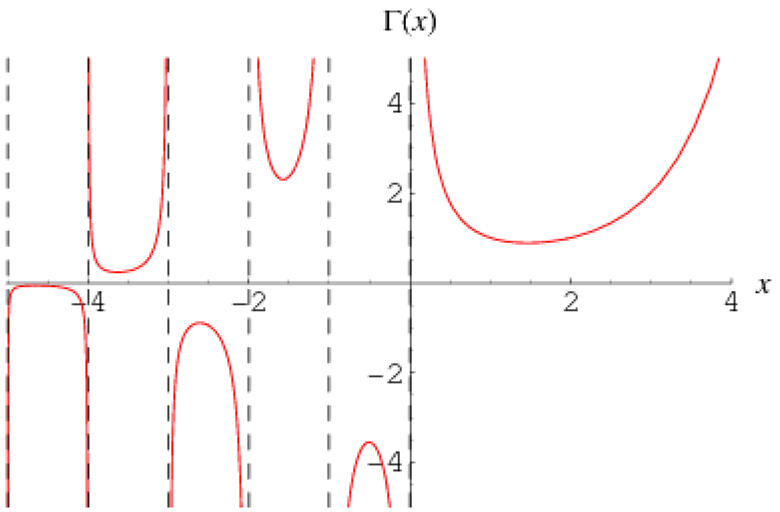
$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{1.10}$$

Gama funkcija yra apibrėžta visiems kompleksiniams skaičiams, išskyrus neigiamiems sveikiems skaičiams ir nuliui.

Jeigu *n* yra kompleksinis skaičius su teigiama realiąja dalimi, tai funkcija įgyja tokią išraišką:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx \tag{1.11}$$

Šis integralas gali būti praplėstas analitinio tęstinumo būdu, kad būtų galima jį taikyti visiems kompleksiniams skaičiams (išskyrus nulį ir neigiamiems sveikiesiems skaičiams kaip buvo minėta aukščiau).



1.3 pav. Gama funkcijos grafikas

Keletas Gama funkcijos įgyjamų reikšmių:

$$\Gamma(-1) = (-2)! = \infty$$

$$\Gamma(0) = (-1)! = \infty$$

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} = -3.5449$$

1.4 Antro tipo modifikuota Baselio funkcija

Antro tipo modifikuota Baselio funkcija (*angl.* modified Bessel function of the second kind) [14][15][16] yra gaunama išsprendus modifikuotą Baselio diferencialinę lygtį:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+\alpha^2)y=0 \tag{1.12}$$

Išsprendus šią lygtį taip pat galimas ir kitas sprendinys $I_\alpha(x)$ - pirmo tipo modifikuota Baselio funkcija:

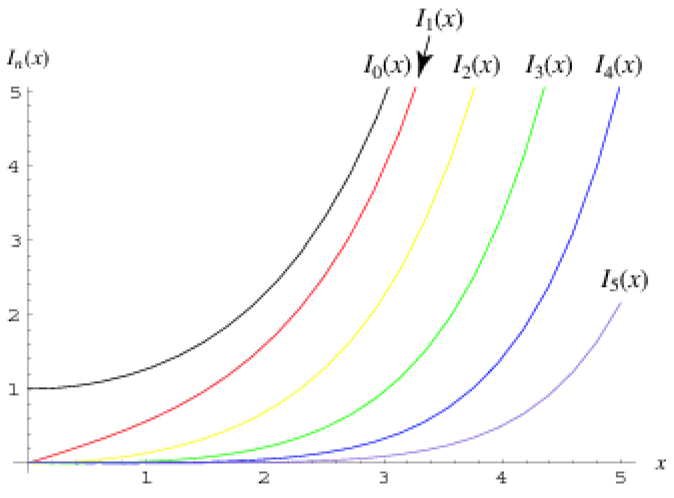
$$I_\alpha(x)=i^{-\alpha}J_\alpha(ix)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha} \tag{1.13}$$

čia $J_\alpha(x)$ - pirmo tipo Baselio funkcija:

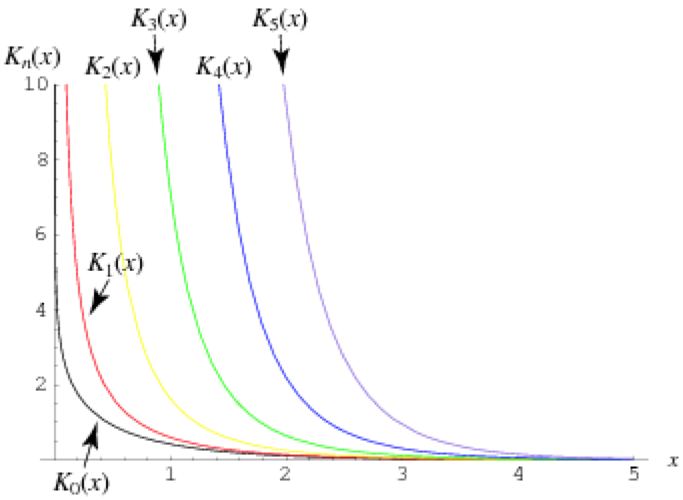
$$J_\alpha(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha} \tag{1.14}$$

Alternatyvus sprendinys, kaip ir buvo minėta aukščiau, yra antro tipo modifikuota Baselio funkcija $K_\alpha(x)$, kurios išraiška atrodo taip:

$$K_\alpha(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\alpha}(x)-I_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)} \tag{1.15}$$



1.4 pav. I_α(x) funkcijos grafikas



1.5 pav. K_α(x) funkcijos grafikas

1.5 Stjudento skirstinys

Stjudento skirstinys (*angl.* Student's t-distribution) [10] yra plačiai naudojamas, kai reikia apskaičiuoti populiacijos, pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį, vidurkį. Turimos populiacijos dydis yra mažas, o standartinis nuokrypis yra nežinomas. Kuo didesnė populiacija, tuo Stjudento skirstinys yra panašesnis į normalųjį skirstinį.

Stjudento skirstinio tankio funkcija:

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \tag{1.16}$$

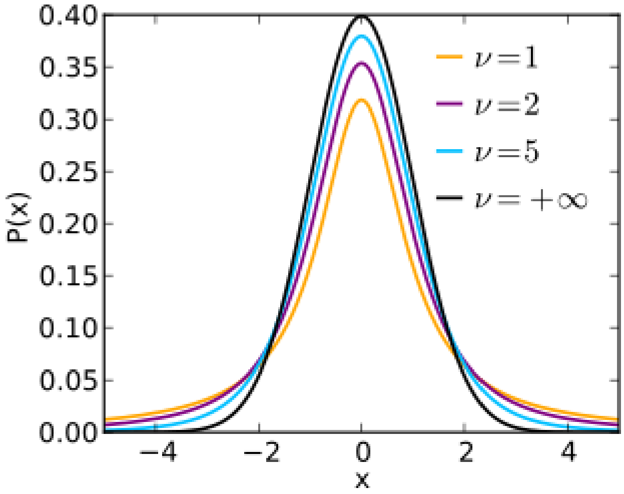
čia ν - laisvės laipsnių skaičius, $\Gamma(\cdot)$ - Gama funkcija.

Galima ir tokia funkcijos išraiška:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \tag{1.17}$$

čia $B(\cdot)$ - Beta funkcija, gaunama iš Gama funkcijų santykio:

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{1.18}$$



1.6 pav. Stjudento skirstinio tankio funkcija

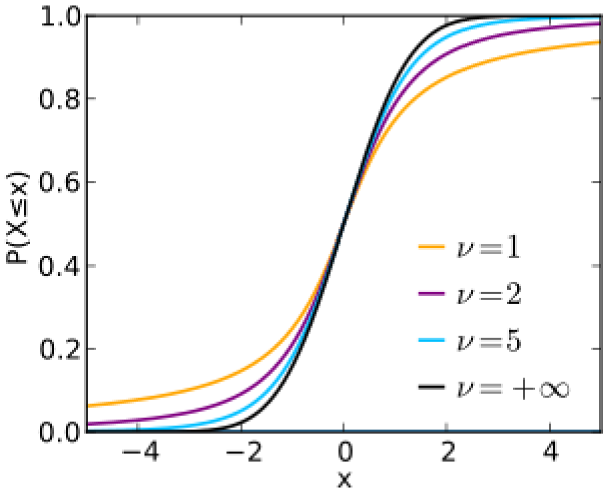
Stjudento skirstinio pasiskirstymo funkcija:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du = \tfrac{1}{2} + t\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu+1)\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\,{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}(\nu+1); \tfrac{3}{2}; -\tfrac{t^2}{\nu}\right) \tag{1.19}$$

čia ${}_2F_1(\cdot)$ - hipergeomtrinės funkcijos specialus atvejis:

$${}_2F_1(q,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{1.20}$$

$$(q)_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ q(q+1)\cdots(q+n-1) & n>0 \end{cases} \tag{1.21}$$



1.7 pav. Stjudento skirstinio pasiskirstymo funkcija

1.6 Paslinktasis Stjudento skirstinys

Yra keli galimi paslinktojo Stjudento skirstinio (*angl.* skew Student's t-distribution) variantai [2][3].

1) **Pirmasis paslinktojo simetrinio Stjudento skirstinio (1998 metų) atvejis.**

Skirstinio tankio funkcija aprašoma taip:

$$f(x) = \frac{2\beta}{1+\beta^2}\left[t_\nu(\beta x)\, I(x<0) + t_\nu\left(\frac{x}{\beta}\right)\, I(x \geq 0)\right] \tag{1.22}$$

čia $I(\cdot)$ - indikatorinė funkcija:

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A, \\ 0 & \text{if } x \notin A. \end{cases}$$

$\beta > 0$ ir $t_\nu(\cdot)$ - Stjudento tankio funkcija su ν laisvės laipsnių. $\beta = 0$ atveju gaunamas paprasto Stjudento skirstinio atvejis su ν laisvės laipsnių.

2) **Antrasis paslinktasis Stjudento skirstinio (2003 metų) atvejis, paremtas tvarkos statistika.**

Skirstinio tankio funkcija aprašoma taip:

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)(\alpha+\beta)^{\frac{1}{2}}2^{\alpha+\beta-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{\alpha+\beta+x^2}}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{\sqrt{\alpha+\beta+x^2}}\right)^{\beta+\frac{1}{2}} \tag{1.23}$$

čia $B(\cdot)$ - Beta funkcija, o α ir $\beta > 0$. Kai $\alpha = \beta$, tai gaunamas paprasto Stjudento skirstinio atvejis su 2α laisvės laipsnių. Jei $\alpha < \beta$, tai gaunamas neigiamo poslinkio atvejis, o jei $\alpha > \beta$ - teigiamo poslinkio atvejis.

3) **Trečiasis paslinktasis Stjudento skirstinio atvejis.**

Skirstinio tankio funkcija aprašoma taip:

$$f_x(x) = t_\nu\,(x)\; 2\, T_{\nu+1}\left(\beta x \sqrt{\frac{\nu+1}{x^2+\nu}}\right) \tag{1.24}$$

čia $t_\nu(\cdot)$ - Stjudento tankio funkcija su ν laisvės laipsnių, o $T_{\nu+1}(\cdot)$ - Stjudento pasiskirstymo funkcija su $\nu+1$ laisvės laipsnių. Kai $\beta = 0$, yra gaunamas paprasto Stjudento skirstinio atvejis su ν laisvės laipsnių.

Visi trys išvardinti paslinktojo Stjudento skirstinio variantai tinka naudojant duomenis, turinčius "sunkias uodegas", tačiau gali sunkiai reaguoti į stiprų paslinkimą, todėl jie nebuvo naudojami vertinant VaR ir CVaR reikšmes.

4) Ketvirtasis paslinktasis Stjudento skirstinio atvejis.

Skirstinio tankio funkcija [5] aprašoma taip:

$$f(x)=\frac{2}{\gamma+\frac{1}{\gamma}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)(\pi\nu)^{1/2}}\cdot\sigma^{-1}\times\left[1+\frac{(x-\beta)^2}{\nu\sigma^2}\left\{\frac{1}{\gamma^2}I_{(0,\infty)}(x-\beta)+\gamma^2 I_{(-\infty,0)}(x-\beta)\right\}\right]^{\frac{-(\nu+1)}{2}} \quad \textbf{(1.25)}$$

čia β - lokacijos parametras, σ - skalės parametras, γ - paslinktumo parametras, ν - formos parametras, $\Gamma(\cdot)$ - Gama funkcija ir $I(\cdot)$ - indikatorinė funkcija, įgyjanti 0 ir 1 reikšmes priklausomai nuo x reikšmės.

Ketvirtas paslinktojo Stjudento skirstinio variantas buvo naudojamas parametrizacijai su realiais duomenimis įvykdyti, bei skaičiuojant VaR ir CVaR reikšmes.

1.7 Apibendrintas hiperbolinis Stjudento paslinktasis skirstinys

1.7.1 Apibendrintas hiperbolinis skirstinys

Vienmačio apibendrinto hiperbolinio skirstinio tankio funkcija [4] gali būti aprašoma įvairiai, tačiau šiame darbe yra naudojama 1999 metais Prause K. aprašyta tankio funkcija:

$$f_x(x)=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^{\lambda/2}K_{\lambda-1/2}\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)\exp\left(\beta(x-\mu)\right)}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda-1/2}\delta^{\lambda}K_{\lambda}\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)\left(\sqrt{\delta^2-(x-\mu)^2}\right)^{1/2-\lambda}} \quad \textbf{(1.26)}$$

čia $K(\cdot)$ - antro tipo modifikuota Beselio funkcija.

Be to, yra tenkinami reikalavimai:

$$\begin{array}{ll}\delta\geq 0, |\beta|<\alpha & \text{if } \lambda>0\\ \delta>0, |\beta|<\alpha & \text{if } \lambda=0\\ \delta>0, |\beta|\leq\alpha & \text{if } \lambda<0\end{array}$$

Apibendrintas hiperbolinis pasiskirstymas gali būti reprezentuojamas, kaip normalus variacijos ir vidurkio mišinys kartu su atvirkštiniu Gauso apsiskirstymu. Tai reiškia, kad apibendrinto hiperbolinio skirstinio kintamasis X gali būti aprašytas taip:

$$X=\mu+\beta Z+\sqrt{Z}\,Y$$

čia $Y \sim N(0,1)$, $Z \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma)$ (apibendrintas atvirkštinis Gauso skirstinys, *angl.* generalized inverse Gaussian) ir $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

Apibendrinto atvirkštinio Gauso skirstinio tankio funkcija:

$$f(z;\lambda,\delta,\gamma) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\lambda} \frac{z^{\lambda-1}}{2\,K_{\lambda}(\gamma\,\delta)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\delta^2 z^{-1} + \gamma^2 z)\right\} \tag{1.27}$$

Skirstinio charakteristikos yra aprašomos taip:

Vidurkis.

$$\mathrm{E}(X) = \mu + \frac{\beta\,\delta}{\gamma}\,\frac{K_{\lambda+1}(\delta\,\gamma)}{K_{\lambda}(\delta\,\gamma)} \tag{1.28}$$

Dispersija.

$$\mathrm{Var}(X) = \delta^2\left(\frac{K_{\lambda+1}(\delta\,\gamma)}{\delta\,\gamma\,K_{\lambda}(\delta\,\gamma)} + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\left(\frac{K_{\lambda+2}(\delta\,\gamma)}{K_{\lambda}(\delta\,\gamma)} - \left(\frac{K_{\lambda+1}(\delta\,\gamma)}{K_{\lambda}(\delta\,\gamma)}\right)^2\right)\right) \tag{1.29}$$

1.7.2 Apibendrintas hiperbolinis Stjudento paslinktasis skirstinys ir jo charakteristikos

Apibendrintas hiperbolinis Stjudento paslinktasis skirstinys (*angl.* generalized hyperbolic skew Student t-distribution, GH skew T) [2][3][4][11] yra atskiras apibendrinto hiperbolinio skirstinio atvejis, kai imama, kad $\lambda = \frac{-\nu}{2}$ ir $\alpha \rightarrow \beta$. Tada gaunamas skirstinio tankis yra:

$$f_x(x) = \frac{2^{\frac{1-\nu}{2}}\,\delta^{\nu}\,|\beta|^{\frac{\nu+1}{2}}\,K_{\frac{\nu+1}{2}}\left(\sqrt{\beta^2\,(\delta^2+(x-\mu)^2)}\right)\exp\left(\beta\,(x-\mu)\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}, \quad \beta \neq 0 \tag{1.30}$$

ir

$$f_x(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\,\delta^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)^{\nu+1}}, \quad \beta = 0. \tag{1.31}$$

čia μ - lokacijos parametras, δ - skalės parametras, β - paslinktumo parametras, ν - formos parametras, $\Gamma(\cdot)$ - Gama funkcija ir $K(\cdot)$ - antro tipo modifikuota Beselio funkcija.

Skirstinio charakteristikos yra aprašomos taip:

Vidurkis.

$$\mathrm{E}(X) = \mu + \frac{\beta\,\delta^2}{\nu - 2} \tag{1.32}$$

Dispersija.

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2\,\beta^2\,\delta^4}{(\nu-2)^2(\nu-4)} + \frac{\delta^2}{\nu-2}. \tag{1.33}$$

Asimetrija.

$$s = \frac{2(\nu-4)^{1/2}\beta\delta}{\left[2\beta^2\delta^2 + (\nu-2)(\nu-4)\right]^{3/2}}\left[3(\nu-2) + \frac{8\beta^2\delta^2}{\nu-6}\right] \tag{1.34}$$

Ekscesas.

$$k = \frac{6}{\left[2\,\beta^2\,\delta^2 + (\nu-2)(\nu-4)\right]^2}\left[(\nu-2)^2(\nu-4) + \frac{16\,\beta^2\delta^2(\nu-2)(\nu-4)}{\nu-6} + \frac{8\,\beta^4\delta^4(5\,\nu-22)}{(\nu-6)(\nu-8)}\right] \tag{1.35}$$

Eksceso koefcientas neegzistuoja, jeigu formos parametras $\nu \leq 8$. Be to, jeigu $\nu \leq 6$, tai neegzistuoja ir asimetrijos koeficientas.

1.7.3 Skirstinio parametrų nustatymas naudojant EM algoritmą

E-žingsnis. Apsibrėžiamas dydis $q(x_i)$:

$$q(x_i) = \sqrt{\delta^2 + (x_i - \mu)^2}$$

Skaičiuojami dydžiai ξ_i , ρ_i ir χ_i:

$$\xi_i = \mathrm{E}(Z_i | X_i = x_i) = \frac{q(x_i)}{|\beta|} \frac{K_{\frac{1-\nu}{2}}\left(|\beta|\, q(x_i)\right)}{K_{\frac{\nu+1}{2}}\left(|\beta|\, q(x_i)\right)}$$

$$\rho_i = \mathrm{E}(Z_i^{-1} | X_i = x_i) = \frac{|\beta|}{q(x_i)} \frac{K_{\frac{\nu+3}{2}}\left(|\beta|\, q(x_i)\right)}{K_{\frac{\nu+1}{2}}\left(|\beta|\, q(x_i)\right)}$$

$$\chi_i = \mathrm{E}(\log Z_i | X_i = x_i) = \log\left(\frac{q(x_i)}{|\beta|}\right) + \frac{1}{K_{\frac{\nu+1}{2}}\left(|\beta|\, q(x_i)\right)} \frac{\partial K_{\frac{\nu+1}{2}}\left(|\beta|\, q(x_i)\right)}{\partial(\frac{\nu+1}{2})}$$

M-žingsnis. Šiame žingsnyje yra skaičiuojami parametrų μ, δ, β ir ν įverčiai maksimizuojant tikėtinumo funkciją

$$f_x(x, z) = f_{x|z}(x|z)\, f_z(z)$$

pasinaudojant pseudo reikšmėmis ξ_i , ρ_i ir χ_i.

Tada k-ojoje iteracijoje gaunami parametrų įverčiai atrodo taip:

$$\begin{aligned} \beta^{(k+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, \rho_i - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} \rho_i}{n - \bar{\xi} \sum_{i=1}^{n} \rho_i} \\ \mu^{(k+1)} &= \bar{x} - \beta^{(k+1)}\, \bar{\xi} \end{aligned}$$

čia

$$\bar{x} = \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \bar{\xi} = \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

ν įvertis gaunamas išspendus lygtį:

$$\log \frac{n}{2} - \log\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_i = \Psi\left(\frac{\nu^{(k+1)}}{2}\right) - \log \nu^{(k+1)}$$

ir tada paskutinio parametro įvertis gaunamas taip:

$$\delta^{(k+1)} = \sqrt{\frac{n\,\nu^{(k+1)}}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i}}$$

Pradinės reikšmės. Tam, kad algoritmas "neįstrigtų" lokaliame maksimume, reikia parinkti tinkamas pradines reikšmes. Tam yra naudojami turimų duomenų momentų įverčiai:

$\bar{m}_1$ - duomenų vidurkis, $\bar{m}_2$ - duomenų standartinis nuokrypis, $\bar{m}_3$ - duomenų asimetrija ir $\bar{m}_4$ - duomenų ekscesas.

Tada:

$$\begin{aligned}
\bar{\mu} &= \bar{m}_1 - \frac{\bar{\beta}\,\bar{\delta}^2}{\bar{\nu}-2} \\
\bar{\beta} &= \operatorname{sign}(\bar{m}_3) \cdot \frac{(\bar{\nu}-2)^{1/2}(\bar{\nu}-4)^{1/2}\left[\bar{m}_2(\bar{\nu}-2) - \bar{\delta}^2\right]^{1/2}}{2^{1/2}\bar{\delta}^2} \\
\bar{\delta}^2 &= \frac{6(\bar{\nu}-2)^2(\bar{\nu}-4)\bar{m}_2}{3\bar{\nu}^2 - 2\bar{\nu} - 32}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{(3\bar{\nu}^2 - 2\bar{\nu} - 32)\left(12(5\bar{\nu}-22) - (\bar{\nu}-6)(\bar{\nu}-8)\bar{m}_4\right)}{216(\bar{\nu}-2)^2(\bar{\nu}-4)}}\right)
\end{aligned}$$

o ν pradinė reikšmė gaunama išsprendus lygtį:

$$[4 - 6(\bar{\nu}+2)(\bar{\nu}-2) * \kappa]\,\sqrt{2}\sqrt{\bar{\nu}-4}\sqrt{1 - 6(\bar{\nu}-2)(\bar{\nu}-4) * \kappa} - \bar{m}_3\,(\bar{\nu}-6) = 0$$

čia κ

$$\kappa = \frac{1}{3\bar{\nu}^2 - 2\bar{\nu} - 32} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(3\bar{\nu}^2 - 2\bar{\nu} - 32)\left(12(5\bar{\nu}-22) - (\bar{\nu}-6)(\bar{\nu}-8)\bar{m}_4\right)}{216(\bar{\nu}-2)^2(\bar{\nu}-4)}}\right)$$

1.8 α-stabilus skirstinys

Stabilus atsitiktinis dydis X yra žymimas $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ [7][8][9]. Čia α yra stabilumo indeksas, esminis charakterizuojantis parametras, $\alpha \in (0;2]$. β apibūdina asimetrija ir $\beta \in [-1;1]$. σ yra mastelio parametras ir $\sigma > 0$. μ yra poslinkis ir $\mu \in \Re$.

Kuo mažesnis skirstinio stabilumo indeksas, tuo stipresnis leptokurtiškumas, t.y. tankio funkcija bus su aukštesniu maksimumu ir sunkesne uodega. Jei asimetriškumo indeksas yra lygus nuliui, tai tada skirstinys yra simetriškas. Jei $\beta > 0$ ($\beta < 0$), skirstinys yra pasviręs i dešinę (kairę). Jei $\beta = 0$ ir $\mu = 0$, tai stabilusis skirstinys yra vadinamas simetrišku α-stabiliuoju ($S\alpha S$). Jei $\beta = 1$, tai dėsnis vadinamas stabiliojo dėsnio subordinatoriumi. Mastelio parametras apibendrina standartinio nuokrypio apibrėžimą.

Atskiri α-stabilaus dėsnio atvejai:

Kai $\alpha = 2$ yra gaunamas normalusis skirstinys $N(\mu, \sigma^2) \sim S_2(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \beta, \mu)$;

Kai $\alpha = 1$, $\beta = 0$ yra gaunamas Koši skirstinys;

Kai $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ ($\beta = 1$) yra gaunamas Levy (atvirkštinis Gauso) skirstinys.

Stabilieji skirstiniai bendru atveju neturi pasiskirstymo ir tikimybinio tankio funkcijų analitinių išraiškų išreikštų elementariosiomis funkcijomis, todėl jie dažniausiai aprašomi charakteringosiomis funkcijomis.

Atsitiktinio α-stabilaus dydžio X charakteringoji funkcija kanoninėje parametrizacijoje yra:

$$\Phi_X(\theta) = \begin{cases} \exp\left\{ -\sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - i\beta sign(\theta) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) + i\mu\theta \right\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{ -\sigma|\theta| \left(1 + \frac{2}{\pi} i\beta sign(\theta) \ln|\theta| \right) + i\mu\theta \right\}, & \alpha = 1 \end{cases} \quad \mathbf{(1.36)}$$

čia $\alpha \in (0;2]$, $\beta \in [-1;1]$, $\sigma > 0$ ir $\mu \in \Re$.

Atskiru atveju atsitiktinis dydis $A \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$, Laplaso transformacija $\mathbf{E}[\exp(-\gamma A)]$, $\gamma > 0$, $\alpha \in (0;2]$, $\sigma > 0$:

$$\mathbf{E}\left[\exp(-\gamma A)\right] = \begin{cases} \exp\left\{ -\frac{\sigma^\alpha}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \gamma^\alpha \right\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{ -\frac{2\sigma}{\pi} \gamma \ln\gamma \right\}, & \alpha = 1 \end{cases} \quad \mathbf{(1.37)}$$

Pritaikius atvirkštinės Laplaso transformacijos formulę gauname stabiliojo skirstinio tikimybių tankio išraišką:

$$f_X(x,\alpha,\beta,\sigma,\mu)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\theta x}\exp\left\{i\mu\theta-\sigma^{\alpha}|\theta|^{\alpha}\left(1-i\beta sign(\theta)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right\}d\theta, & \alpha\neq 1\\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\theta x}\exp\left\{i\mu\theta-\sigma|\theta|\left(1+\frac{2}{\pi}i\beta sign(\theta)\ln|\theta|\right)\right\}d\theta, & \alpha=1\end{cases} \quad \textbf{(1.38)}$$

1.8 pav. α-stabilaus skirstinio tikimybinio tankio funkcijos grafikai [7]

kai α = 1.5, β = (-1, -0.75, -0.5, 0, 0.5, 0.75, 1), σ = 1, μ = 0

Išskiriame atskirus stabiliojo skirstinio tikimybių tankio ir pasiskirstymo funkcijų atvejus, kai $\sigma=1$ ir $\mu=0$.

Apsibrėžiame išraiškas padedančias parametrizuoti tankio pasiskirstymo ir pasiskirstymo funkcijų išraiškas:

$$\begin{aligned}\zeta &= \zeta(\alpha,\beta)=\begin{cases}-\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2} & \alpha\neq 1\\ 0 & \alpha=1,\end{cases}\\ \theta_0 &= \theta_0(\alpha,\beta)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha}\arctan(\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2}) & \alpha\neq 1\\ \frac{\pi}{2} & \alpha=1\end{cases}\\ c_1(\alpha,\beta) &= \begin{cases}\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right) & \alpha<1\\ 0 & \alpha=1\\ 1 & \alpha>1,\end{cases}\\ V(\theta;\alpha,\beta) &= \begin{cases}(\cos\alpha\theta_0)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\alpha(\theta_0+\theta)}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\frac{\cos(\alpha\theta_0+(\alpha-1)\theta)}{\cos\theta} & \alpha\neq 1\\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\beta\theta}{\cos\theta}\right)\exp\left(\frac{1}{\beta}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\theta\right)\tan\theta\right) & \alpha=1,\beta\neq 0.\end{cases}\end{aligned}$$

a) kai $\alpha \neq 1$ ir $x > \zeta$:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\alpha(x-\zeta)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\pi|\alpha-1|} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta;\alpha,\beta) \exp\left(-(x-\zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta;\alpha,\beta)\right) d\theta$$

$$F(x;\alpha,\beta) = c_1(\alpha,\beta) + \frac{\operatorname{sign}(1-\alpha)}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-(x-\zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta;\alpha,\beta)\right) d\theta.$$

b) kai $\alpha \neq 1$ ir $x = \zeta$:

$$f(\zeta;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\cos(\theta_0)}{\pi(1+\zeta^2)^{1/(2\alpha)}}$$

$$F(\zeta;\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right).$$

c) kai $\alpha \neq 1$ ir $x < \zeta$:

$$f(x;\alpha,\beta) = f(-x;\alpha,-\beta)$$

$$F(x;\alpha,\beta) = 1 - F(-x;\alpha,-\beta).$$

d) kai $\alpha = 1$:

$$f(x;1,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{2|\beta|} e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta;1,\beta) \exp\left(-e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} V(\theta;1,\beta)\right) d\theta & \beta \neq 0 \\ \frac{1}{\pi(1+x^2)} & \beta = 0 \end{cases}$$

$$F(x;1,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} V(\theta;1,\beta)\right) d\theta & \beta > 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x & \beta = 0 \\ 1 - F(x;\alpha,-\beta) & \beta < 0. \end{cases}$$

1.8.1 α-stabilaus skirstinio atsitiktinių dydžių sekos generavimas

α-stabilaus skirstinio a.d. generavimo problema išplaukia, nes nėra analitinės pasiskirstymo funkcijos *F(x)* išraiškos.

Generuojamas atsitiktinis dydis $V \sim U\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ir nepriklausomas eksponentinis atsitiktinis dydis $W \sim \mathrm{E}(1)$;

Kai $\alpha \neq 1$:

$$Y = S_{\alpha,\beta}\frac{\sin\left(\alpha(V + B_{\alpha,\beta})\right)}{\cos(V)^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\left[\frac{\cos\left(V - \alpha(V + B_{\alpha,\beta})\right)}{W}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

čia

$$B_{\alpha,\beta} = \frac{\arctan\left(\beta\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha},$$

$$S_{\alpha,\beta} = \left\{1 + \beta^2\tan^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2\alpha}};$$

Kai $\alpha = 1$:

$$Y = \frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{\pi}{2} + \beta V\right)\tan V - \beta\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}W\cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V}\right)\right\},$$

Gaunamas dydis X turintis α-stabilų pasiskirstymą,

$$X = \begin{cases} \sigma Y + \mu, & \alpha \neq 1 \\ \sigma Y + \frac{2}{\pi}\beta\sigma\ln\sigma + \mu, & \alpha = 1 \end{cases}.$$

1.9 Mišrūs skirstiniai

Mišrūs skirstiniai [7] yra naudojami, tam kad būtų išvengiama nulinių grąžų problemos [7], t.y. kai neinformatyvios nulinės grąžos paslenka skirstinį į vieną ar į kitą pusę. Sudarant mišrųjį skirstinį atsiranda papildomas parametras *p*, kuris yra siejamas su nenulinių ir nulinių grąžų santykiu.

$$p = \frac{n-k}{n} \tag{1.39}$$

čia *n* – sekos elementų skaičius, *k* – nulinių grąžų skaičius.

Mišriojo skirstinio tankio funkcija atrodo taip:

$$f(x) = p \cdot \delta(x) + (1-p) \cdot f_X(x,\theta) \tag{1.40}$$

čia $\delta(\cdot)$ - Dirako delta funkcija ir $f_X(\cdot)$ - a.d. *X* tankio funkcija su savo parametrų rinkiniu θ.

Bendru atveju mišriojo skirstinio pasiskirstymo funkcija atrodo taip:

$$F(x) = p \cdot \varepsilon(x) + (1-p) \cdot F_X(x,\theta) \tag{1.41}$$

kur

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{1.42}$$

ir $F_X(\cdot)$ - a.d. *X* pasiskirstymo funkcija su savo parametrų rinkiniu θ.

1.10 Parametrų įverčių nustatymo metodika

1.10.1 MLE

Maksimalaus tikėtinumo metodas (*angl.* maximum-likelihood estimation, MLE) [18][19] yra metodas taikomas norint nustatyti pasirinkto statistinio modelio parametrų įverčius. Šiam modeliui reikia turėti statistinių duomenų rinkinį bei statistinį modelį, kuriam įvertinsime parametrus.

MLE metodo idėja yra surasti tokį statistinio modelio parametrų rinkinį, kuris maksimizuotų tikėtinumo funkciją.

<u>Veikimo principas.</u>

Turima n nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių stebėjimų (duomenų seka) x_1, x_2, ... , x_n, kurie yra pasiskirstę pagal nežinomą pasiskirstymo funkciją $f_0(\cdot)$. Yra žinoma kokiai skirstinių šeimai priklauso $f_0(\cdot)$, t.y. žinoma $\{ f(\cdot|\ \theta),\ \theta \in \Theta\}$, čia θ - skirstinių šeimos parametrų vektorius. Turima $f_0 = f_0(\cdot|\ \theta_0)$, čia θ_0 - optimalus parametrų rinkinys. Metodo tikslas yra rasti įvertį $\widehat{\theta}$, kuris būtų kuo artimesnis optimaliam parametrų rinkiniui θ_0.

Pirmiausia sudaroma visų stebėjimų jungtinė tankio funkcija, t.y.:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n \mid \theta) = f(x_1|\theta) \times f(x_2|\theta) \times \cdots \times f(x_n|\theta) \tag{1.43}$$

Tada į šitą funkciją yra žiūrima iš kitos pusės, t.y. laikoma, kad stebėjimai x_1, x_2, ... , x_n yra fiksuoti parametrai, o θ - funkcijos kintamasis. Sudaroma tikėtinumo funkcija:

$$\mathcal{L}(\theta\,;\,x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \tag{1.44}$$

Paprastai yra patogiau naudoti logaritmuotą tikėtinumo funkciją:

$$\ln \mathcal{L}(\theta\,;\,x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i|\theta) \tag{1.45}$$

arba vidutinę logaritmuotą tikėtinumo funkciją:

$$\hat{\ell} = \frac{1}{n} \ln \mathcal{L} \tag{1.46}$$

MLE metodas randa θ_0 įvertį maksimizuodamas $\hat{l}(\theta; x)$:

$$\{\hat{\theta}_{\mathrm{mle}}\} \subseteq \{\underset{\theta\in\Theta}{\arg\max}\ \hat{\ell}(\theta\,;\,x_1,\ldots,x_n)\} \tag{1.47}$$

Nepriklausomai nuo to, ar naudojama maksimalaus tikėtinumo funkcija yra logaritmuota ar ne, įvertis yra gaunamas toks pats.

Tam, kad metodas gerai veiktų yra suformuotos tokios sąlygos:

- **Identifikacija** (*angl.* identification).

$$\theta \neq \theta_0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\cdot|\theta) \neq f(\cdot|\theta_0)$$

- **Baigtinumas** (*angl.* compactness).

  Tai reiškia, kad parametrų aibė Θ turi būti baigtinė.

- **Tolygumas** (*angl.* continuity).

$$\Pr\left[\ \ln f(x\,|\,\theta)\ \in\ \mathbb{C}^0(\Theta)\ \right] = 1$$

- **Dominavimas** (*angl.* dominance).

$$\left|\ln f(x\,|\,\theta)\right| < D(x) \quad \text{for all } \theta \in \Theta$$

1.10.2 Nelder-Mead

Nelder-Mead metodas [20], arba dar kitaip vadinamas žemutiniu simplekso metodu, yra dažnai naudojama netiesinio optimizavimo metodika. Tai yra euristinis optimizavimo metodas. Šis metodas buvo pristatytas John Nelder ir Roger Mead 1965 metais ir buvo skirtas tikslo funkcijos minimizavimui daugiamatėje erdėje.

Nelder-Mead metodas naudoja simplekso idėją, kai yra naudojamas specialus *n*+1 viršūnės politopas *n*-dimensinėje erdvėje.

Nelder-Mead algoritmas.

1. **Tvarkymas.** Funkcijos išdėstomos jų nemažėjimo tvarka;

$$f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}_2) \leq \cdots \leq f(\mathbf{x}_{n+1})$$

2. $\mathbf{x_0}$. Randamas centroidas x_0 iš visų turimų taškų, išskyrus $\mathbf{x}_{n+1}$-ojo;
3. **Atspindys.** Apskaičiuojamas atspindžio taškas (*angl.* reflection point):

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_o + \alpha(\mathbf{x}_o - \mathbf{x}_{n+1})$$

   Jeigu atspindžio taškas yra geresnis negu antras pagal blogumą taškas, bet negeresnis už geriausią tašką, t.y.:

$$f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}_r) < f(\mathbf{x}_n)$$

tai gaunama nauja simpleksas pakeičiant blogiausią tašką $\mathbf{x}_{n+1}$ su atspindžio tašku $\mathbf{x}_r$ ir kartojamas pirmas žingsnis;

4. **Praplėtimas.** Jeigu atspindžio taškas $\mathbf{x}_r$ kolkas yra geriausias

$$f(\mathbf{x}_r) < f(\mathbf{x}_1)$$

tada skaičiuojamas praplėtimo taškas (*angl.* expansion point):

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_o + \gamma(\mathbf{x}_o - \mathbf{x}_{n+1})$$

- Jeigu praplėtimo taškas yra didesnis už atspindžio tašką:

$$f(\mathbf{x}_e) < f(\mathbf{x}_r)$$

  tai naujas simpleksas yra gaunamas pakeičiant prasčiausią tašką $\mathbf{x}_{n+1}$ su praplėtimo tašku $\mathbf{x}_e$ ir grįžtama į pirmą žingsnį;
- Priešingu atveju, simpleksas yra gaunamas pakeičiant prasčiausią tašką $\mathbf{x}_{n+1}$ su atspindžio tašku $\mathbf{x}_r$ ir grįžtama į pirmą žingsnį;

5. **Sutraukimas.** Šiame žingsnyje jau turima, kad:

$$f(\mathbf{x}_r) \geq f(\mathbf{x}_n)$$

Skaičiuojamas sutraukimo taškas $\mathbf{x}_c$:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_o + \rho(\mathbf{x}_o - \mathbf{x}_{n+1})$$

- Jeigu sutraukimo taškas yra geresnis negu prasčiausias taškas, t.y.:

$$f(\mathbf{x}_c) < f(\mathbf{x}_{n+1})$$

  tai naujas simpleksas yra gaunamas pakeičiant prasčiausią tašką $\mathbf{x}_{n+1}$ su sutraukimo tašku $\mathbf{x}_c$ ir grįžtama į pirmą žingsnį;
- Priešingu atveju, einama į šeštą žingsnį;

6. **Prastinimas.** Visi taškai, išskyrus geriausią, yra pakeičiami pagal taisyklę:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_1 + \sigma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) \text{ for all i } \in \{2, \dots, n+1\}$$

ir einama į pirmą žingsnį.

Pastaba. Paprastai *α, γ, ρ* ir *σ* žymėjimas atitinka atspindžio, praplėtimo, sutraukimo ir prastinimo koeficientų reikšmes.

1.11 Vidutinė absoliuti procentinė paklaida (MAPE)

Vidutinė absoliuti procentinė paklaida [17] (*angl.* mean absolute percentage error), kitaip vadinama MAPE, vertina metodo simuliuojamų dydžių tikslumą tikrų duomenų atžvilgiu, t.y. yra lyginami turimi duomenys su simuliacijos būdu gaunamais duomenimis (dydžiais). Kuo paklaida yra mažesnė, tuo sudarytas prognozavimo modelis yra tikslesnis ir tuo pačiu geresnis.

MAPE skaičiuojama paklaida yra aprašoma taip:

$$\mathrm{M} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{A_t - F_t}{A_t}\right| \tag{1.48}$$

čia A_t - turimų duomenų (tikroji) vertė (*angl.* actual value), F_t - prognozuojamų duomenų vertė (*angl.* forecast value), n - turimų duomenų kiekis.

Kai MAPE paklaida yra nuline, tai reiškiasi prognozuojami duomenys pilnai atitinka turimus duomenis ir pasirinktas modelis yra geras, t.y. prognozuojama ateitis atitinka praeities duomenis.

Viršutinės ribos MAPE paklaida neturi.

Šio metodo silpnoji vieta yra tai, kad jeigu imtyje yra keli dydžiai, kurie tarpusavyje turi labai didelę paklaidą, tai jie iškreipia vidutinę bendrą viso modelio paklaidą. Ši problema gali būti išsprendžiama naudojant sMAPE (*angl.* symmetrial MAPE) metodiką, tačiau šiame darbe ji nebus nagrinėjama.

2 Tiriamoji dalis

2.1 Pensijų fondų duomenys

Skaičiavimams bus naudojami 2007-2013 metų 18-os pensijų fondų duomenys iš:

Lentelė 2.1 Pensijų fondai

Pension funds of conservative investments	
DNB pensija 1	DNBP1
ERGO konservatyvusis	ERGOK
Finasta konservatyvaus investavimo	FKI
Finasta Nuosaikus	FN
SEB pensija 1	SEBP1
Swedbank pensija 1	SWEDP1
Pension funds with a small amount into shares	
DNB pensija 2	DNBP2
Finasta augančio pajamingumo	FAP
Swedbank Pensija 2	SWEDP2
Pension funds with a medium amount into shares	
DNB pensija 3	DNBP3
ERGO balans	ERGOB
Finasta aktyvaus investavimo	FAI
Finasta Subalansuotas	FS
SEB Pensija 2	SEBP2
Swedbank Pensija 3	SWEDP3
Swedbank Pensija 4	SWEDP4
Pension funds with a large amount into shares	
Finasta Racionalios rizikos	FRR
SEB pensija 3	SEBP3

Buvo naudojami kiekvieno pensijų fondo 1753 grąžų dydžiai.

2.2 Darbo metodikos aprašymas

Pirmame etape yra nusistatomi kiekvieno pensijų fondo parametrų įverčiai visiems skirstiniams. Nustatymui naudojami metodai buvo aprašyti 1.10 skyrelyje. Tada yra atliekamas simuliavimas. Pasirinktas simuliacijos dydis yra 10000 imčių, kai kiekvienoje imtyje yra 1753 elementai. Vadinasi kiekvieno skirstinio atveju yra susidaroma trijų dimensijų matrica su dimensijų dydžiais $18 \times 10000 \times 1753$. Tada yra skaičiuojami simuliacijos, bei teoriniai rizikos matų VaR ir CVaR vidurkiniai įverčiai įvairaus ilgio uodegoms. Buvo pasirinktos tokios uodegų ilgio kvantilių ε reikšmės: 0.03, 0.05 ir 0.1. Paskutiniame etape buvo skaičiuojama MAPE paklaida kiekvienam skirstiniui atskirai, pasinaudojant visų pensijų fondų turimais VaR ir CVaR vidurkiniais įverčiais.

Visi skaičiavimai buvo atlikti naudojantis MATLAB ir R Project programomis. Programos tekstas yra pateiktas priede.

2.3 Parametrų nustatymas

Atlikus parametrizacijos procesą gauti tokie visų skirstinių įverčiai:

Lentelė 2.2 Normaliojo skirstinio parametrų įverčiai

	Normal distribution	
	μ	σ
DNB pensija 1	0,000171	0,000866274
ERGO konservatyvusis	0,000132	0,001522857
Finasta konservatyvaus investavimo	0,000237	0,000713383
Finasta Nuosaikus	0,000146	0,000446
SEB pensija 1	0,000112	0,001600985
Swedbank pensija 1	0,000106	0,00069802
DNB pensija 2	0,000159	0,001926137
Finasta augančio pajamingumo	0,000183	0,002950969
Swedbank Pensija 2	0,000091	0,002108226
DNB pensija 3	0,000149	0,00356
ERGO balans	0,000108	0,003937214
Finasta aktyvaus investavimo	0,000051	0,005060672
Finasta Subalansuotas	-0,000043	0,004438828
SEB Pensija 2	0,000077	0,004936526
Swedbank Pensija 3	0,000060	0,003632631
Swedbank Pensija 4	0,000008	0,006341501
Finasta Racionalios rizikos	-0,000253	0,009977288

SEB pensija 3	0,000020	0,009285924

Lentelė 2.3 Paslinktojo Stjudento skirstinio parametrų įverčiai

	skew Student T			
	β	σ	ν	γ
DNB pensija 1	0,000179	0,000755	4,000000	1,000000
ERGO konservatyvusis	0,000155	0,001330	4,000000	1,000000
Finasta konservatyvaus investavimo	0,000215	0,000518	4,000000	1,000000
Finasta Nuosaikus	0,000129	0,000328	4,000000	1,000000
SEB pensija 1	0,000119	0,001500	4,000000	1,000000
Swedbank pensija 1	0,000071	0,000440	4,000000	1,000000
DNB pensija 2	0,000233	0,002054	4,000000	0,999999
Finasta augančio pajamingumo	0,000351	0,002647	4,000000	0,999998
Swedbank Pensija 2	0,000172	0,002052	4,000000	0,999999
DNB pensija 3	0,000304	0,003831	4,000000	0,999997
ERGO balans	0,000347	0,003787	4,000000	0,999996
Finasta aktyvaus investavimo	0,000096	0,005334	2,836737	0,865568
Finasta Subalansuotas	0,000237	0,003477	3,999999	0,999994
SEB Pensija 2	0,000113	0,005151	3,198468	0,886894
Swedbank Pensija 3	0,000214	0,003642	4,000000	0,999998
Swedbank Pensija 4	-0,000018	0,006512	3,569340	0,899704
Finasta Racionalios rizikos	-0,000173	0,010492	2,750250	0,867799
SEB pensija 3	0,000057	0,009731	3,228772	0,894805

Tam, kad būtų galima apskaičiuoti apibendrinto hiperbolinio paslinkto Stjudento skirstinio parametrus reikia rasti pradines jų reikšmes. Šitaip rezultatai bus tikslesni ir "neįklimps" į lokalų minimumą. Naudosime metodiką aprašytą 1.7.3 skyriuje. Gaunami pradiniai skirstinio parametrų rinkiniai:

Lentelė 2.4 Pradiniai apibendrinto hiperbolinio paslinkto Stjudento skirstinio parametrų įverčiai

μ_0	δ_0	β_0	ν_0
0,001081	0,003022	1,340168	6,4
0,002231	0,008938	1,41316	8
0,000977	0,002474	1,345235	6,4
0,00058	0,001449	1,341098	6,3
0,002328	0,009427	1,413102	8
0,000752	0,002164	1,326198	6,3
0,00285	0,011442	1,412865	8
0,003396	0,010497	1,347245	6,4
0,002459	0,008043	1,355476	6,6

0,005146	0,021246	1,411707	8
0,004567	0,015134	1,355638	6,6
0,005569	0,018156	1,337272	6,4
0,004647	0,015127	1,332911	6,3
0,005678	0,019092	1,349435	6,6
0,005163	0,02169	1,411655	8
0,008894	0,03782	1,409749	8
0,010621	0,035938	1,33119	6,4
0,013062	0,055588	1,407647	8

Naudodami viršuje nurodytus pradinius parametrų rinkinius skaičiuosime apibendrinto hiperbolinio paslinkto Stjudento skirstinio optimalius parametrų rinkinius:

Lentelė 2.5 Apibendrinto hiperbolinio paslinkto Stjudento skirstinio parametrų įverčiai

	GH skew Student T			
	μ	δ	β	ν
DNB pensija 1	0,000174	0,000829	6,448220	2,850700
ERGO konservatyvusis	0,000160	0,001144	4,286771	2,172378
Finasta konservatyvaus investavimo	0,000194	0,000337	-0,641762	1,646915
Finasta Nuosaikus	0,000125	0,000283	-0,063318	2,151717
SEB pensija 1	0,000114	0,001772	4,335557	3,131024
Swedbank pensija 1	0,000047	0,000167	6,404000	1,125000
DNB pensija 2	0,000211	0,003626	2,781407	5,574763
Finasta augančio pajamingumo	0,000575	0,003005	-47,320000	2,998000
Swedbank Pensija 2	0,000168	0,002709	1,764779	3,630560
DNB pensija 3	0,000249	0,006962	2,710147	5,828597
ERGO balans	0,000352	0,004509	1,769740	3,161491
Finasta aktyvaus investavimo	0,000820	0,004892	-32,970000	2,930000
Finasta Subalansuotas	0,000228	0,003108	3,168847	2,238974
SEB Pensija 2	0,000806	0,005688	-31,093123	3,299777
Swedbank Pensija 3	0,000191	0,005131	2,649891	3,975166
Swedbank Pensija 4	0,000142	0,008221	4,075186	3,620103
Finasta Racionalios rizikos	0,001089	0,009074	-14,656925	2,820062
SEB pensija 3	0,001230	0,010840	-14,195660	3,303070

Lentelė 2.6 α-stabilaus skirstinio parametrų įverčiai

	α-stable			
	α	β	σ	μ
DNB pensija 1	1,5327707	0,0780032	0,0003955	0,0001937
ERGO konservatyvusis	1,3222785	-0,0796151	0,0006300	0,0000907
Finasta konservatyvaus investavimo	1,1958138	0,2540279	0,0002719	0,0003538
Finasta Nuosaikus	1,4133382	0,1203942	0,0001640	0,0001459
SEB pensija 1	1,5606652	-0,0355564	0,0007939	0,0001053
Swedbank pensija 1	1,0546740	0,1769578	0,0003450	0,0003711
DNB pensija 2	1,7471628	-0,4405679	0,0011706	0,0001114
Finasta augančio pajamingumo	1,5412442	-0,1988833	0,0014024	0,0001865
Swedbank Pensija 2	1,6405242	-0,1728747	0,0011238	0,0000938
DNB pensija 3	1,7546596	-0,4702696	0,0021900	0,0000699
ERGO balans	1,5389775	-0,3029240	0,0020307	0,0000010
Finasta aktyvaus investavimo	1,5505933	-0,3235303	0,0023633	-0,0000316
Finasta Subalansuotas	1,4045041	-0,1046510	0,0017264	0,0000435
SEB Pensija 2	1,5798887	-0,2717543	0,0025145	0,0000093
Swedbank Pensija 3	1,6487311	-0,3294189	0,0020168	-0,0000289
Swedbank Pensija 4	1,5870402	-0,2681710	0,0033790	-0,0001781
Finasta Racionalios rizikos	1,5720818	-0,3208137	0,0045038	-0,0003642
SEB pensija 3	1,5924180	-0,2555193	0,0047866	-0,0001168

Panaudojus 1.9 skyrelyje aprašyta mišraus skirstinio sudarymo metodika, buvo rasti mišrių skirstinių parametrų įverčiai:

Lentelė 2.7 Mišraus normaliojo skirstinio parametrų įverčiai

	Mixed Normal		
	μ	σ	p
DNB pensija 1	0,000171	0,0008663	0,938391
ERGO konservatyvusis	0,000132	0,0015229	0,956075
Finasta konservatyvaus investavimo	0,000237	0,0007134	0,929835
Finasta Nuosaikus	0,000146	0,000446	0,879635
SEB pensija 1	0,000112	0,001601	0,962350
Swedbank pensija 1	0,000106	0,000698	0,791215
DNB pensija 2	0,000159	0,0019261	0,979464
Finasta augančio pajamingumo	0,000183	0,002951	0,990302
Swedbank Pensija 2	0,000091	0,0021082	0,973189
DNB pensija 3	0,000149	0,00356	0,988591
ERGO balans	0,000108	0,0039372	0,989732
Finasta aktyvaus investavimo	0,000051	0,0050607	0,994295
Finasta Subalansuotas	-0,000043	0,0044388	0,973189
SEB Pensija 2	0,000077	0,0049365	0,993725
Swedbank Pensija 3	0,000060	0,0036326	0,989732

Swedbank Pensija 4	0,000008	0,0063415	0,987450
Finasta Racionalios rizikos	-0,000253	0,0099773	0,997148
SEB pensija 3	0,000020	0,0092859	0,994866

Lentelė 2.8 Mišraus paslinktojo Stjudento skirstinio parametrų įverčiai

	Mixed skew Student T				
	β	σ	ν	γ	p
DNB pensija 1	0,000199	0,000793	4,000000	1,000000	0,938391
ERGO konservatyvusis	0,000166	0,001387	4,000000	1,000000	0,956075
Finasta konservatyvaus investavimo	0,000241	0,000543	4,000000	1,000000	0,929835
Finasta Nuosaikus	0,000157	0,000353	4,000000	1,000000	0,879635
SEB pensija 1	0,000126	0,001551	4,000000	1,000000	0,962350
Swedbank pensija 1	0,000109	0,000561	4,000000	1,000000	0,791215
DNB pensija 2	0,000240	0,002090	4,000000	0,999999	0,979464
Finasta augančio pajamingumo	0,000357	0,002669	4,000000	0,999997	0,990302
Swedbank Pensija 2	0,000179	0,002101	4,000000	1,000000	0,973189
DNB pensija 3	0,000310	0,003868	4,000000	0,999997	0,988591
ERGO balans	0,000133	0,003849	3,994494	0,863412	0,989732
Finasta aktyvaus investavimo	0,000092	0,005322	2,861606	0,861629	0,994295
Finasta Subalansuotas	0,000084	0,005563	2,368970	0,925393	0,973189
SEB Pensija 2	0,000124	0,004716	3,993161	0,880785	0,993725
Swedbank Pensija 3	0,000056	0,003691	4,000255	0,884973	0,989732
Swedbank Pensija 4	-0,000024	0,006519	3,665279	0,894216	0,987450
Finasta Racionalios rizikos	-0,000178	0,010479	2,761274	0,865887	0,997148
SEB pensija 3	0,000052	0,009729	3,258805	0,892022	0,994866

Lentelė 2.9 Mišraus apibendrinto hiperbolinio paslinkto Stjudento skirstinio parametrų įverčiai

	Mixed GH skew Student T				
	μ	δ	β	ν	p
DNB pensija 1	0,000198	0,000926	4,089564	3,076559	0,938391
ERGO konservatyvusis	0,000172	0,001286	5,031951	2,353623	0,956075
Finasta konservatyvaus investavimo	0,000225	0,000346	1,445307	1,625091	0,929835
Finasta Nuosaikus	0,000160	0,000289	2,226821	2,049563	0,879635
SEB pensija 1	0,000125	0,001939	1,926839	3,369958	0,962350
Swedbank pensija 1	0,000102	0,000329	3,652257	1,538654	0,791215
DNB pensija 2	0,000217	0,003829	2,441402	5,919638	0,979464
Finasta augančio pajamingumo	0,000596	0,003070	-49,693923	3,049279	0,990302
Swedbank Pensija 2	0,000174	0,002890	2,119959	3,843092	0,973189
DNB pensija 3	0,000252	0,007190	2,527681	6,048023	0,988591
ERGO balans	0,000352	0,004627	2,301304	3,233672	0,989732
Finasta aktyvaus investavimo	0,000343	0,004902	6,296286	2,876606	0,994295
Finasta Subalansuotas	0,000460	0,003419	-26,178109	2,435404	0,973189

SEB Pensija 2	0,000825	0,005770	-31,710457	3,341490	0,993725
Swedbank Pensija 3	0,000632	0,005318	-44,712495	4,184112	0,989732
Swedbank Pensija 4	0,000162	0,008461	3,304915	3,712309	0,987450
Finasta Racionalios rizikos	0,001093	0,009131	-14,808449	2,832939	0,997148
SEB pensija 3	0,001258	0,010969	-14,552575	3,335964	0,994866

Lentelė 2.10 Mišraus α-stabilaus skirstinio parametrų įverčiai

	Mixed α-stable distribution				
	p	α	β	μ	σ
DNB pensija 1	0,938391	1,599641	-0,066781	0,000185	0,000426
ERGO konservatyvusis	0,956075	1,368787	-0,122562	0,000080	0,000677
Finasta konservatyvaus investavimo	0,929835	1,181947	0,152382	0,000335	0,000255
Finasta Nuosaikus	0,879635	1,311847	-0,120141	0,000130	0,000171
SEB pensija 1	0,962350	1,613097	-0,074317	0,000101	0,000836
Swedbank pensija 1	0,791215	1,134997	0,044700	0,000149	0,000235
DNB pensija 2	0,979464	1,763662	-0,515587	0,000106	0,001197
Finasta augančio pajamingumo	0,990302	1,551459	-0,224191	0,000177	0,001422
Swedbank Pensija 2	0,973189	1,676358	-0,235800	0,000086	0,001165
DNB pensija 3	0,988591	1,765177	-0,523431	0,000058	0,002219
ERGO balans	0,989732	1,549724	-0,328912	-0,000013	0,002060
Finasta aktyvaus investavimo	0,994295	1,555092	-0,343101	-0,000049	0,002383
Finasta Subalansuotas	0,973189	1,442672	-0,143477	0,000015	0,001807
SEB Pensija 2	0,993725	1,585763	-0,291526	-0,000007	0,002535
Swedbank Pensija 3	0,989732	1,663965	-0,365301	-0,000040	0,002046
Swedbank Pensija 4	0,987450	1,603762	-0,301913	-0,000207	0,003441
Finasta Racionalios rizikos	0,997148	1,568448	-0,342283	-0,000453	0,004498
SEB pensija 3	0,994866	1,597337	-0,282702	-0,000170	0,004824

2.4 Rizikos matų skaičiavimas

Su rastais parametrais buvo vykdomas sekantis žingsnis, t.y. rizikos matų VaR ir CVaR vidurkinių įverčių skaičiavimas. Sekančiuose puslapiuose pateiktose lentelėse pateikti visų pensijų fondų VaR ir CVaR su visais ε.

ε = 0.1

Lentelė 2.11 Paprastų skirstinių VaR ir CVaR pensijų fondų įverčiai su ε = 0.1

ε = 0,1		Normal distribution				skew T				GH skew T				a-stable distribution				Empirical	
		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR	CVaR
Pension funds of conservative investments		Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Empirical	Empirical
DNB pensija 1	DNBP1	-0,00091588	-0,00091738	-0,00131348	-0,00131287	-0,00063972	-0,00064205	-0,00115402	-0,00115489		-0,00063970		-0,00129314	-0,00058407	-0,00058700	-0,00155039	-0,00163274	-0,00061930	-0,00137939
ERGO konservatyvusis	ERGOK	-0,00178255	-0,00178624	-0,00248734	-0,00248714	-0,00128741	-0,00129210	-0,00219367	-0,00219646		-0,00124660		-0,00274186	-0,00141512	-0,00142165	-0,00466833	-0,00753753	-0,00135743	-0,00269504
Finasta konservatyvaus investavimo	FKI	-0,00066445	-0,00066635	-0,00099125	-0,00099147	-0,00034703	-0,00034888	-0,00070002	-0,00070079		-0,00035384		-0,00135999	-0,00018196	-0,00018472	-0,00167985	-0,00252187	-0,00029108	-0,00102038
Finasta Nuosaikus	FN	-0,00041145	-0,00041268	-0,00061080	-0,00061076	-0,00022695	-0,00022795	-0,00045060	-0,00045082		-0,00022891		-0,00062603	-0,00018238	-0,00018369	-0,00071852	-0,00081558	-0,00019855	-0,00059423
SEB pensija 1	SEBP1	-0,00190524	-0,00190908	-0,00264855	-0,00264834	-0,00150740	-0,00151212	-0,00252941	-0,00253087		-0,00150040		-0,00269234	-0,00151571	-0,00152104	-0,00343952	-0,00364522	-0,00158730	-0,00272190
Swedbank pensija 1	SWEDP1	-0,00071345	-0,00071490	-0,00100799	-0,00100774	-0,00040523	-0,00040666	-0,00070476	-0,00070515		-0,00038112		-0,00181147	-0,00043808	-0,00044339	-0,00352980	-0,00872815	-0,00038150	-0,00103528
Pension funds with a small amount into shares																			
DNB pensija 2	DNBP2	-0,00228770	-0,00229141	-0,00318987	-0,00318814	-0,00199470	-0,00199865	-0,00339455	-0,00339378		-0,00201550		-0,00319452	-0,00234035	-0,00234831	-0,00439052	-0,00447782	-0,00211846	-0,00346886
Finasta augančio pajamingumo	FAP	-0,00358203	-0,00358760	-0,00497177	-0,00496817	-0,00251857	-0,00252489	-0,00432237	-0,00432475		-0,00270799		-0,00584296	-0,00290463	-0,00291594	-0,00692110	-0,00733761	-0,00266802	-0,00551996
Swedbank Pensija 2	SWEDP2	-0,00257649	-0,00258191	-0,00356074	-0,00356087	-0,00205349	-0,00205889	-0,00345190	-0,00345192		-0,00205405		-0,00352777	-0,00223334	-0,00223875	-0,00460199	-0,00476442	-0,00213858	-0,00386554
Pension funds with a medium amount into shares																			
DNB pensija 3	DNBP3	-0,00438950	-0,00439587	-0,00606478	-0,00605846	-0,00384906	-0,00386227	-0,00645941	-0,00646256		-0,00389218		-0,00605228	-0,00452366	-0,00453507	-0,00829518	-0,00846679	-0,00414182	-0,00665839
ERGO balans	ERGOB	-0,00491272	-0,00492099	-0,00676637	-0,00676393	-0,00375846	-0,00377093	-0,00633900	-0,00634433		-0,00372930		-0,00671872	-0,00467818	-0,00469265	-0,01088872	-0,01145640	-0,00419457	-0,00761900
Finasta aktyvaus investavimo	FAI	-0,00641617	-0,00643111	-0,00880423	-0,00880263	-0,00485248	-0,00487374	-0,00943821	-0,00945021		-0,00474991		-0,01049188	-0,00547788	-0,00549502	-0,01253661	-0,01314985	-0,00482614	-0,00966474
Finasta Subalansuotas	FS	-0,00565374	-0,00566643	-0,00772601	-0,00772717	-0,00353262	-0,00354007	-0,00590197	-0,00590345		-0,00346351		-0,00716639	-0,00391316	-0,00392573	-0,01090262	-0,01215192	-0,00375274	-0,00844815
SEB Pensija 2	SEBP2	-0,00622959	-0,00623781	-0,00855839	-0,00855300	-0,00509288	-0,00510852	-0,00933646	-0,00934485		-0,00504456		-0,00999413	-0,00556130	-0,00558358	-0,01223578	-0,01278061	-0,00508025	-0,00945499
Swedbank Pensija 3	SWEDP3	-0,00457164	-0,00457960	-0,00628189	-0,00628038	-0,00373403	-0,00374133	-0,00621524	-0,00621483		-0,00373101		-0,00618620	-0,00439392	-0,00440746	-0,00891724	-0,00921418	-0,00401984	-0,00680347
Swedbank Pensija 4	SWEDP4	-0,00806760	-0,00808437	-0,01105037	-0,01105065	-0,00695311	-0,00697587	-0,01208461	-0,01209584		-0,00646722		-0,01082009	-0,00762063	-0,00764432	-0,01643009	-0,01710824	-0,00716885	-0,01190190
Pension funds with a large amount into shares																			
Finasta Racionalios rizikos	FRR	-0,01301999	-0,01303728	-0,01773588	-0,01772970	-0,00960874	-0,00964083	-0,01862947	-0,01865090		-0,00934416		-0,02047141	-0,01057895	-0,01061750	-0,02314592	-0,02416734	-0,00936214	-0,01903923
SEB pensija 3	SEBP3	-0,01184963	-0,01187522	-0,01623371	-0,01622975	-0,00981751	-0,00985335	-0,01775430	-0,01776488		-0,00969013		-0,01867321	-0,01057716	-0,01060830	-0,02286545	-0,02370613	-0,00967318	-0,01780669
MAPE (teorines su modelio)		0,19572306		0,03159794		0,32968056		0,06668848		∞		∞		0,47837000		18,82353736			
MAPE (empirine su teoriniu)		38,97947884		7,04778417		5,94594476		12,78872771		∞		∞		10,25737404		43,56961081			
MAPE (empirine su modelio)		39,26222949		7,07153335		5,98600054		12,74373240		6,03570989		12,56028353		10,46067175		87,58611135			

Lentelė 2.12 Mišrių skirstinių VaR ir CVaR pensijų fondų įverčiai su ε = 0.1

ε = 0,1		Mixed Normal distribution				Mixed skew T				Mixed GH skew T				Mixed a-stable distribution				Empirical	
		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR	CVaR
Pension funds of conservative investments		Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Empirical	Empirical
DNB pensija 1	DNBP1	-0,00100039	-0,00090966	-0,00143726	-0,00132268	-0,00070466	-0,00063290	-0,00128076	-0,00116756	-0,00100039	-0,00062860	-0,00143726	-0,00126561	-0,00072620	-0,00063256	-0,00175471	-0,00162805	-0,00061930	-0,00137939
ERGO konservatyvusis	ERGOK	-0,00190340	-0,00178373	-0,00265718	-0,00250710	-0,00139941	-0,00130499	-0,00238813	-0,00224236	-0,00190340	-0,00125732	-0,00265718	-0,00265345	-0,00159756	-0,00135713	-0,00484360	-0,00494639	-0,00135743	-0,00269504
Finasta konservatyvaus investavimo	FKI	-0,00072814	-0,00064899	-0,00109122	-0,00098971	-0,00037400	-0,00032594	-0,00077167	-0,00069215	-0,00072814	-0,00031371	-0,00109122	-0,00127094	-0,00023994	-0,00032526	-0,00204022	-0,00323717	-0,00029108	-0,00102038
Finasta Nuosaikus	FN	-0,00048424	-0,00039358	-0,00072434	-0,00060922	-0,00025672	-0,00019984	-0,00053031	-0,00043626	-0,0048424	-0,00018513	-0,00072434	-0,00060961	-0,00033367	-0,00021720	-0,00140040	-0,00127607	-0,00019855	-0,00059423
SEB pensija 1	SEBP1	-0,00201573	-0,00190815	-0,00280301	-0,00266683	-0,00161640	-0,00152383	-0,00271487	-0,00257409	-0,00201573	-0,00151853	-0,00280301	-0,00268596	-0,00165709	-0,00152045	-0,00352211	-0,00343137	-0,00158730	-0,00272190
Swedbank pensija 1	SWEDP1	-0,00099613	-0,00069318	-0,00141362	-0,00103815	-0,00063175	-0,00042259	-0,00111502	-0,00079390	-0,00099613	-0,00037178	-0,00141362	-0,00130082	-0,00056046	-0,00038085	-0,00314220	-0,00504263	-0,00038150	-0,00103528
Pension funds with a small amount into shares																			
DNB pensija 2	DNBP2	-0,00235817	-0,00229180	-0,00328880	-0,00320138	-0,00206750	-0,00200396	-0,00352108	-0,00342205	-0,00235817	-0,00202578	-0,00328880	-0,00319876	-0,00246323	-0,00215278	-0,00455687	-0,00426441	-0,00211846	-0,00346886
Finasta augančio pajamingumo	FAP	-0,00363380	-0,00358879	-0,00504398	-0,00497999	-0,00256118	-0,00252771	-0,00439739	-0,00433859	-0,00363380	-0,00271567	-0,00504398	-0,00585343	-0,00299966	-0,00269320	-0,00704579	-0,00702480	-0,00266802	-0,00551996
Swedbank Pensija 2	SWEDP2	-0,00268235	-0,00258213	-0,00370753	-0,00357938	-0,00215685	-0,00207009	-0,00362815	-0,00349419	-0,0268235	-0,00206516	-0,00370753	-0,00351366	-0,00239347	-0,00214689	-0,00474498	-0,00453824	-0,00213858	-0,00386554
Pension funds with a medium amount into shares																			
DNB pensija 3	DNBP3	-0,00446480	-0,00439572	-0,00616915	-0,00607448	-0,00392852	-0,00387029	-0,00659433	-0,00649650	-0,00446480	-0,00390548	-0,00616915	-0,00605758	-0,00466671	-0,00414916	-0,00848254	-0,00806077	-0,00414182	-0,00665839
ERGO balans	ERGOB	-0,00498879	-0,00492178	-0,00687135	-0,00677957	-0,00421070	-0,00415485	-0,00727301	-0,00716510	-0,0498879	-0,00372795	-0,00687135	-0,00667327	-0,00482286	-0,00418389	-0,01107383	-0,01103084	-0,00419457	-0,00761900
Finasta aktyvaus investavimo	FAI	-0,00647132	-0,00643126	-0,00887995	-0,00881672	-0,00491577	-0,00489020	-0,00953282	-0,00947291	-0,00647132	-0,00428980	-0,00887995	-0,00787739	-0,00559730	-0,00488102	-0,01273240	-0,01257478	-0,00482614	-0,00966474
Finasta Subalansuotas	FS	-0,00588958	-0,00567478	-0,00804806	-0,00777345	-0,00394787	-0,00378020	-0,00825769	-0,00793800	-0,0588958	-0,00380701	-0,00804806	-0,01008753	-0,00422450	-0,00374370	-0,01108708	-0,01134472	-0,00375274	-0,00844815
SEB Pensija 2	SEBP2	-0,00628844	-0,00624125	-0,00863933	-0,00856935	-0,00515888	-0,00512262	-0,00883357	-0,00875280	-0,0628844	-0,00504341	-0,00863933	-0,00993905	-0,00567865	-0,00508437	-0,01253076	-0,01225706	-0,00508025	-0,00945499
Swedbank Pensija 3	SWEDP3	-0,00464265	-0,00458227	-0,00637958	-0,00629416	-0,00409359	-0,00403702	-0,0696741	-0,00686703	-0,0464265	-0,00395872	-0,00637958	-0,00694668	-0,00451974	-0,00402373	-0,00902797	-0,00873365	-0,00401984	-0,00680347
Swedbank Pensija 4	SWEDP4	-0,00822184	-0,00808719	-0,01126165	-0,01108068	-0,00713947	-0,00701778	-0,01232792	-0,01211293	-0,0822184	-0,00650291	-0,01126165	-0,01085225	-0,00789739	-0,00702149	-0,01670945	-0,01626723	-0,00716885	-0,01190190
Pension funds with a large amount into shares																			
Finasta Racionalios rizikos	FRR	-0,01307625	-0,01304336	-0,01781238	-0,01774191	-0,00967173	-0,00965458	-0,01872524	-0,01862763	-0,01307625	-0,0936767	-0,01781238	-0,02052762	-0,01079426	-0,00954173	-0,02366480	-0,02343878	-0,00936214	-0,01903923
SEB pensija 3	SEBP3	-0,01194143	-0,01187256	-0,01635948	-0,01624891	-0,00992819	-0,00987622	-0,01790790	-0,01780028	-0,01194143	-0,00970401	-0,01635948	-0,01862270	-0,01083900	-0,00978287	-0,02321830	-0,02312863	-0,0967318	-0,01780669
MAPE (teorines su modelio)		5,56450804		4,96884495		6,17988015		5,41651010		30,49531675		9,91849534		15,23446728		9,40944008			
MAPE (empirine su teoriniu)		49,53805772		8,70493745		9,53785121		6,30628749		49,53805772		8,70493745		18,35754498		52,95769947			
MAPE (empirine su modelio)		38,02670919		6,64844546		3,63764069		10,04184663		4,51057376		9,70083951		2,09579537		66,23434785			

ε = 0.05

Lentelė 2.13 Paprastų skirstinių VaR ir CVaR pensijų fondų įverčiai su ε = 0.05

ε = 0,05		Normal distribution				skew T				GH skew T				a-stable distribution				Empirical	
		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR	CVaR
Pension funds of conservative investments		Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Empirical	Empirical
DNB pensija 1	DNBP1	-0,00122111	-0,00122553	-0,00157203	-0,00157249	-0,00095923	-0,00096581	-0,00152926	-0,00153199		-0,00100805		-0,00179594	-0,00093196	-0,00094206	-0,00234023	-0,00254102	-0,00099680	-0,00198098
ERGO konservatyvusis	ERGOK	-0,00232361	-0,00233380	-0,00294564	-0,00294714	-0,00185043	-0,00186305	-0,00285490	-0,00286176		-0,00198442		-0,00394301	-0,00237733	-0,00240864	-0,00753001	-0,01332516	-0,00222655	-0,00364236
Finasta konservatyvaus investavimo	FKI	-0,00091533	-0,00092037	-0,00120376	-0,00120480	-0,00056633	-0,00057132	-0,00095757	-0,00095950		-0,00070798		-0,00223225	-0,00056755	-0,00058120	-0,00302412	-0,00472922	-0,00064015	-0,00161208
Finasta Nuosaikus	FN	-0,00056449	-0,00056723	-0,00074044	-0,00074078	-0,00036589	-0,00036875	-0,00061378	-0,00061476		-0,00041659		-0,00094867	-0,00035525	-0,00036113	-0,00117913	-0,00138175	-0,00035492	-0,00091694
SEB pensija 1	SEBP1	-0,00247588	-0,00248531	-0,00313191	-0,00313364	-0,00214233	-0,00215524	-0,00327507	-0,00327997		-0,00220032		-0,00359586	-0,00223680	-0,00225569	-0,00505748	-0,00548366	-0,00218241	-0,00362211
Swedbank pensija 1	SWEDP1	-0,00093956	-0,00094316	-0,00119952	-0,00120014	-0,00059131	-0,00059497	-0,00092330	-0,00092477		-0,00077428		-0,00310327	-0,00120616	-0,00123342	-0,00632177	-0,01680221	-0,00083713	-0,00148561
Pension funds with a small amount into shares																			
DNB pensija 2	DNBP2	-0,00298029	-0,00299105	-0,00377653	-0,00377689	-0,00286437	-0,00288004	-0,00441590	-0,00441959		-0,00281564		-0,00403256	-0,00325842	-0,00328066	-0,00604117	-0,00622764	-0,00296710	-0,00445772
Finasta augančio pajamingumo	FAP	-0,00464893	-0,00466579	-0,00587549	-0,00587386	-0,00363919	-0,00366216	-0,00563844	-0,00564812		-0,00420580		-0,00837644	-0,00437209	-0,00441423	-0,01032015	-0,01118290	-0,00436547	-0,00772776
Swedbank Pensija 2	SWEDP2	-0,00333209	-0,00334693	-0,00420077	-0,00420333	-0,00292226	-0,00293956	-0,00447219	-0,00447640		-0,00296169		-0,00462311	-0,00319190	-0,00321527	-0,00655936	-0,00690244	-0,00299894	-0,00523319
Pension funds with a medium amount into shares																			
DNB pensija 3	DNBP3	-0,00567561	-0,00569155	-0,00715418	-0,00715052	-0,00547076	-0,00550422	-0,00836395	-0,00837565		-0,00536813		-0,00758352	-0,00623373	-0,00627048	-0,01132191	-0,01169121	-0,00573483	-0,00844123
ERGO balans	ERGOB	-0,00633576	-0,00635755	-0,00797176	-0,00797403	-0,00536163	-0,00539461	-0,00822179	-0,00823791		-0,00549332		-0,00898015	-0,00694764	-0,00700786	-0,01616399	-0,01733152	-0,00642862	-0,01019973
Finasta aktyvaus investavimo	FAI	-0,00824948	-0,00827716	-0,01035713	-0,01036062	-0,00735572	-0,00741810	-0,01294664	-0,01298825		-0,00735080		-0,01519775	-0,00808566	-0,00815716	-0,01852793	-0,01978014	-0,00731175	-0,01345181
Finasta Subalansuotas	FS	-0,00724462	-0,00727349	-0,00907356	-0,00907939	-0,00500459	-0,00503299	-0,00763068	-0,00764172		-0,00535805		-0,01011118	-0,00616031	-0,00621751	-0,01696809	-0,01953512	-0,00595048	-0,01217140
SEB Pensija 2	SEBP2	-0,00801741	-0,00804417	-0,01007277	-0,01007283	-0,00752955	-0,00758233	-0,01252406	-0,01256260		-0,00757996		-0,01391473	-0,00810103	-0,00817659	-0,01790256	-0,01896925	-0,00760194	-0,01289469
Swedbank Pensija 3	SWEDP3	-0,00588459	-0,00590771	-0,00739403	-0,00739704	-0,00527550	-0,00530333	-0,00802557	-0,00803402		-0,00528580		-0,00799081	-0,00622364	-0,00627465	-0,01265749	-0,01328245	-0,00596679	-0,00876814
Swedbank Pensija 4	SWEDP4	-0,01035698	-0,01039421	-0,01298896	-0,01299868	-0,01001555	-0,01008139	-0,01588149	-0,01592628		-0,00917879		-0,01404200	-0,01097833	-0,01106436	-0,02381714	-0,02523927	-0,01043025	-0,01529126
Pension funds with a large amount into shares																			
Finasta Racionalios rizikos	FRR	-0,01663959	-0,01670376	-0,02080086	-0,02080723	-0,01445485	-0,01457060	-0,02556842	-0,02565338		-0,01429436		-0,02962902	-0,01532522	-0,01545453	-0,03384433	-0,03584376	-0,01376077	-0,02684050
SEB pensija 3	SEBP3	-0,01521456	-0,01527022	-0,01908304	-0,01908948	-0,01438971	-0,01449126	-0,02370843	-0,02376321		-0,01440781		-0,02573856	-0,01525087	-0,01537520	-0,03299404	-0,03494280	-0,01500516	-0,02398674
MAPE (teorines su modelio)		0,38700451		0,04308096		0,66964351		0,19429620		∞		∞		1,07829365		22,83598906			
MAPE (empirine su teoriniu)		13,30769252		19,84581494		8,47215943		16,13916943		∞		∞		8,20564657		59,60929051			
MAPE (empirine su modelio)		13,59979481		19,81845025		8,12719788		16,00481032		6,73876628		16,29947148		9,01083502		121,98342696			

Lentelė 2.14 Mišrių skirstinių VaR ir CVaR pensijų fondų įverčiai su ε = 0.05

ε = 0,05		Mixed Normal distribution				Mixed skew T				Mixed GH skew T				Mixed a-stable distribution				Empirical	
		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR	CVaR
Pension funds of conservative investments		Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Empirical	Empirical
DNB pensija 1	DNBP1	-0,00133577	-0,00123235	-0,00172135	-0,00159338	-0,00106257	-0,00097222	-0,00170109	-0,00155998	-0,00133577	-0,00100011	-0,00172135	-0,00174962	-0,00111862	-0,00100052	-0,00257298	-0,00247812	-0,00099680	-0,00198098
ERGO konservatyvusis	ERGOK	-0,00248207	-0,00234933	-0,00314735	-0,00298130	-0,00201366	-0,00189871	-0,00310950	-0,00293054	-0,00248207	-0,00198287	-0,00314735	-0,00375739	-0,00260715	-0,00232028	-0,00767614	-0,00818414	-0,00222655	-0,00364236
Finasta konservatyvaus investavimo	FKI	-0,00100687	-0,00091536	-0,00132732	-0,00121298	-0,00062105	-0,00055794	-0,00106181	-0,00096096	-0,00100687	-0,00067065	-0,00132732	-0,00209238	-0,00069828	-0,00073776	-0,00365803	-0,00601909	-0,00064015	-0,00161208
Finasta Nuosaikus	FN	-0,00066857	-0,00056241	-0,00088048	-0,00075041	-0,00042669	-0,00035021	-0,00072993	-0,00060945	-0,00066857	-0,00038287	-0,00088048	-0,00095578	-0,00064788	-0,00047808	-0,00233826	-0,00224134	-0,00035492	-0,00091694
SEB pensija 1	SEBP1	-0,00262012	-0,00250107	-0,00331497	-0,00316419	-0,00229883	-0,00218857	-0,00351633	-0,00334565	-0,00262012	-0,00222164	-0,00331497	-0,00356166	-0,00239385	-0,00223594	-0,00507174	-0,00505888	-0,00218241	-0,00362211
Swedbank pensija 1	SWEDP1	-0,00131664	-0,00096427	-0,00168511	-0,00126340	-0,00093198	-0,00066032	-0,00146761	-0,00106515	-0,00131664	-0,00071416	-0,00168511	-0,00209992	-0,00119009	-0,00080415	-0,00547459	-0,00959063	-0,00083713	-0,00148561
Pension funds with a small amount into shares																			
DNB pensija 2	DNBP2	-0,00307261	-0,00300196	-0,00389397	-0,00379833	-0,00297054	-0,00289915	-0,00458163	-0,00446489	-0,00307261	-0,00282977	-0,00389397	-0,00402865	-0,00341466	-0,00309607	-0,00623573	-0,00599046	-0,00296710	-0,00445772
Finasta augančio pajamingumo	FAP	-0,00471639	-0,00467475	-0,00596100	-0,00589255	-0,00370193	-0,00367305	-0,00573711	-0,00566911	-0,00471639	-0,00422062	-0,00596100	-0,00838574	-0,00449428	-0,00419880	-0,01046226	-0,01077553	-0,00436547	-0,00772776
Swedbank Pensija 2	SWEDP2	-0,00346938	-0,00336079	-0,00437418	-0,00423420	-0,00307090	-0,00296998	-0,00470162	-0,00454098	-0,00346938	-0,00297348	-0,00437418	-0,00458231	-0,00338044	-0,00311870	-0,00667080	-0,00653950	-0,00299894	-0,00523319
Pension funds with a medium amount into shares																			
DNB pensija 3	DNBP3	-0,00577322	-0,00570502	-0,00727745	-0,00717687	-0,00558467	-0,00552878	-0,00853933	-0,00842752	-0,00577322	-0,00538683	-0,00727745	-0,00757738	-0,00641327	-0,00589678	-0,01153686	-0,01125792	-0,00573483	-0,00844123
ERGO balans	ERGOB	-0,00643403	-0,00637063	-0,00809554	-0,00800022	-0,00609755	-0,00604552	-0,00950941	-0,00938591	-0,00643403	-0,00548059	-0,00809554	-0,00889324	-0,00713049	-0,00650263	-0,01638060	-0,01698744	-0,00642862	-0,01019973
Finasta aktyvaus investavimo	FAI	-0,00832042	-0,00829177	-0,01044624	-0,01038197	-0,00744550	-0,00744707	-0,01306069	-0,01301237	-0,00832042	-0,00637707	-0,01044624	-0,01060723	-0,00824519	-0,00756844	-0,01879078	-0,01923311	-0,00731175	-0,01345181
Finasta Subalansuotas	FS	-0,00754664	-0,00731268	-0,00945168	-0,00914999	-0,00609481	-0,00588744	-0,01165339	-0,01124913	-0,00754664	-0,00604386	-0,00945168	-0,01550036	-0,00651829	-0,00599451	-0,01699969	-0,01810584	-0,00595048	-0,01217140
SEB Pensija 2	SEBP2	-0,00809322	-0,00805869	-0,01016807	-0,01009704	-0,00742471	-0,00740168	-0,01151622	-0,01142982	-0,00809322	-0,00757536	-0,01016807	-0,01380778	-0,00825224	-0,00769195	-0,01811455	-0,01841420	-0,00760194	-0,01289469
Swedbank Pensija 3	SWEDP3	-0,00597608	-0,00591943	-0,00750906	-0,00741789	-0,00586680	-0,00581393	-0,00906476	-0,00895309	-0,00597608	-0,00573117	-0,00750906	-0,00919950	-0,00637001	-0,00588443	-0,01274268	-0,01270321	-0,00596679	-0,00876814
Swedbank Pensija 4	SWEDP4	-0,01055500	-0,01042360	-0,01323732	-0,01304543	-0,01026078	-0,01014013	-0,01615455	-0,01590914	-0,01055500	-0,00922622	-0,01323732	-0,01406346	-0,01130687	-0,01044098	-0,02406413	-0,02417482	-0,01043025	-0,01529126
Pension funds with a large amount into shares																			
Finasta Racionalios rizikos	FRR	-0,01671139	-0,01671255	-0,02089052	-0,02082590	-0,01454430	-0,01457981	-0,02568516	-0,02559705	-0,01671139	-0,01432597	-0,02089052	-0,02971637	-0,01563895	-0,01446041	-0,03463050	-0,03543230	-0,01376077	-0,02684050
SEB pensija 3	SEBP3	-0,01533243	-0,01528601	-0,01923090	-0,01912168	-0,01454019	-0,01453924	-0,02388682	-0,02380243	-0,01533243	-0,01442325	-0,01923090	-0,02561901	-0,01559636	-0,01459301	-0,03354785	-0,03459622	-0,01500516	-0,02398674
MAPE (teorines su modelio)		4,67877104		4,61562141		5,03485214		5,00701596		17,95078125		21,53867645		10,29104562		10,34306758			
MAPE (empirine su teoriniu)		20,47597707		16,23371153		5,56610711		9,20276970		20,47597707		16,23371153		16,10574482		67,91758959			
MAPE (empirine su modelio)		13,81195744		19,14026830		5,63203776		12,92106801		6,01079395		12,86405121		5,10033330		92,51614373			

ε = 0.03

Lentelė 2.15 Paprastų skirstinių VaR ir CVaR pensijų fondų įverčiai su ε = 0.03

ε = 0,03		Normal distribution				skew T				GH skew T				a-stable distribution				Empirical	
		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR	CVaR
Pension funds of conservative investments		Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Empirical	Empirical
DNB pensija 1	DNBP1	-0,00141934	-0,00142639	-0,00174457	-0,00174506	-0,00120951	-0,00122090	-0,00183470	-0,00183788		-0,00132186		-0,00223517	-0,00126861	-0,00128990	-0,00319335	-0,00351953	-0,00133049	-0,00252995
ERGO konservatyvusis	ERGOK	-0,00267499	-0,00268888	-0,00325147	-0,00325214	-0,00229145	-0,00231328	-0,00339312	-0,00340145		-0,00266326		-0,00506703	-0,00344304	-0,00351227	-0,01062903	-0,02036692	-0,00275406	-0,00441442
Finasta konservatyvaus investavimo	FKI	-0,00107826	-0,00108514	-0,00134557	-0,00134626	-0,00073811	-0,00074666	-0,00116721	-0,00116932		-0,00107279		-0,00315542	-0,00103112	-0,00106419	-0,00452209	-0,00738916	-0,00103829	-0,00215630
Finasta Nuosaikus	FN	-0,00066389	-0,00066772	-0,00082695	-0,00082712	-0,00047473	-0,00047979	-0,00074661	-0,00074764		-0,00059118		-0,00125672	-0,00053775	-0,00055089	-0,00167301	-0,00201583	-0,00050352	-0,00123340
SEB pensija 1	SEBP1	-0,00284647	-0,00286058	-0,00345447	-0,00345625	-0,00263967	-0,00266098	-0,00388203	-0,00388833		-0,00278031		-0,00436604	-0,00292718	-0,00297214	-0,00674898	-0,00745433	-0,00284630	-0,00440124
Swedbank pensija 1	SWEDP1	-0,00108641	-0,00109206	-0,00132733	-0,00132797	-0,00073707	-0,00074386	-0,00110118	-0,00110300		-0,00125486		-0,00453940	-0,00219684	-0,00227225	-0,00947720	-0,02700025	-0,00112045	-0,00185293
Pension funds with a small amount into shares																			
DNB pensija 2	DNBP2	-0,00343009	-0,00344596	-0,00416802	-0,00416756	-0,00354558	-0,00357470	-0,00524726	-0,00525163		-0,00341260		-0,00467472	-0,00403397	-0,00407764	-0,00763172	-0,00798169	-0,00376038	-0,00516117
Finasta augančio pajamingumo	FAP	-0,00534181	-0,00536522	-0,00647856	-0,00647455	-0,00451697	-0,00455294	-0,00670970	-0,00672286		-0,00553753		-0,01079990	-0,00581411	-0,00590360	-0,01387075	-0,01532046	-0,00551202	-0,00960419
Swedbank Pensija 2	SWEDP2	-0,00382281	-0,00384320	-0,00462788	-0,00462919	-0,00360276	-0,00363070	-0,00530269	-0,00530767		-0,00368858		-0,00552811	-0,00406185	-0,00411194	-0,00854150	-0,00912870	-0,00411667	-0,00633839
Pension funds with a medium amount into shares																			
DNB pensija 3	DNBP3	-0,00651085	-0,00653620	-0,00788116	-0,00787650	-0,00674103	-0,00679814	-0,00991422	-0,00992764		-0,00646086		-0,00874968	-0,00767173	-0,00774630	-0,01432035	-0,01491418	-0,00736692	-0,00976984
ERGO balans	ERGOB	-0,00725993	-0,00729134	-0,00877613	-0,00877909	-0,00661740	-0,00667448	-0,00975435	-0,00977540		-0,00694708		-0,01090302	-0,00918992	-0,00931891	-0,02166148	-0,02362996	-0,00782461	-0,01229297
Finasta aktyvaus investavimo	FAI	-0,00944008	-0,00947960	-0,01139340	-0,01139733	-0,00949090	-0,00960828	-0,01603360	-0,01610179		-0,00970563		-0,01980179	-0,01064544	-0,01080156	-0,02474134	-0,02685822	-0,00940590	-0,01685043
Finasta Subalansuotas	FS	-0,00827778	-0,00831608	-0,00997280	-0,00997798	-0,00615759	-0,00620390	-0,00903782	-0,00905200		-0,00707421		-0,01281756	-0,00854850	-0,00869624	-0,02342612	-0,02781017	-0,00814212	-0,01565353
SEB Pensija 2	SEBP2	-0,00917847	-0,00921711	-0,01108333	-0,01108311	-0,00954418	-0,00964542	-0,01524809	-0,01531251		-0,00977788		-0,01754356	-0,01054028	-0,01070691	-0,02371129	-0,02551920	-0,00975081	-0,01574488
Swedbank Pensija 3	SWEDP3	-0,00673727	-0,00676915	-0,00813617	-0,00813813	-0,00648293	-0,00653157	-0,00949914	-0,00951035		-0,00650906		-0,00945140	-0,00789727	-0,00800021	-0,01640779	-0,01750800	-0,00700650	-0,01035012
Swedbank Pensija 4	SWEDP4	-0,01184377	-0,01190349	-0,01428303	-0,01429361	-0,01248421	-0,01260532	-0,01904814	-0,01912247		-0,01133229		-0,01668230	-0,01418611	-0,01438574	-0,03143158	-0,03384150	-0,01230138	-0,01794042
Pension funds with a large amount into shares																			
Finasta Racionalios rizikos	FRR	-0,01899028	-0,01907922	-0,02284684	-0,02284923	-0,01862237	-0,01883603	-0,03173469	-0,03187812		-0,01881016		-0,03865463	-0,01991970	-0,02019029	-0,04482778	-0,04823331	-0,01868467	-0,03417723
SEB pensija 3	SEBP3	-0,01739985	-0,01748014	-0,02098506	-0,02098954	-0,01815999	-0,01834668	-0,02878956	-0,02887915		-0,01845671		-0,03219249	-0,01969482	-0,01996362	-0,04350751	-0,04681554	-0,01854407	-0,02884584
MAPE (teorines su modelio)		0,48399550		0,03513788		0,93861806		0,22578710		∞		∞		1,70824727		26,70472509			
MAPE (empirine su teoriniu)		6,07807173		28,05517255		11,16272164		18,36670009		∞		∞		13,26985133		77,21147313			
MAPE (empirine su modelio)		6,01972641		28,04088985		10,66046646		18,25566033		6,40644070		20,23929849		14,88304977		160,91915067			

Lentelė 2.16 Mišrių skirstinių VaR ir CVaR pensijų fondų įverčiai su ε = 0.03

ε = 0,03		Mixed Normal distribution				Mixed skew T				Mixed GH skew T				Mixed a-stable distribution				Empirical	
		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR		CVaR		VaR	CVaR
Pension funds of conservative investments		Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Theoretical	Model	Empirical	Empirical
DNB pensija 1	DNBP1	-0,00155358	-0,00144176	-0,00191092	-0,00177294	-0,00134292	-0,00123691	-0,00204324	-0,00187762	-0,00155358	-0,00130806	-0,00191092	-0,00216438	-0,00148338	-0,00134201	-0,00343653	-0,00337572	-0,00133049	-0,00252995
ERGO konservatyvusis	ERGOK	-0,00285788	-0,00271543	-0,00347444	-0,00329566	-0,00249479	-0,00236443	-0,00369669	-0,00348788	-0,00285788	-0,00263025	-0,00347444	-0,00476517	-0,00369927	-0,00337198	-0,01072456	-0,01183814	-0,00275406	-0,00441442
Finasta konservatyvaus investavimo	FKI	-0,00118789	-0,00108769	-0,00148487	-0,00136094	-0,00081457	-0,00073990	-0,00129799	-0,00117873	-0,00118789	-0,00103777	-0,00148487	-0,00294608	-0,00124860	-0,00123928	-0,00544534	-0,00943678	-0,00103829	-0,00215630
Finasta Nuosaikus	FN	-0,00078828	-0,00067174	-0,00098467	-0,00084372	-0,00055983	-0,00046755	-0,00089241	-0,00074936	-0,00078828	-0,00056820	-0,00098467	-0,00128851	-0,00099718	-0,00076912	-0,00335517	-0,00334749	-0,00050352	-0,00123340
SEB pensija 1	SEBP1	-0,00301264	-0,00288508	-0,00365660	-0,00349400	-0,00283338	-0,00271105	-0,00416871	-0,00397093	-0,00301264	-0,00279328	-0,00365660	-0,00429650	-0,00307121	-0,00289606	-0,00665656	-0,00677139	-0,00284630	-0,00440124
Swedbank pensija 1	SWEDP1	-0,00152479	-0,00113804	-0,00186628	-0,00141194	-0,00116715	-0,00084391	-0,00175462	-0,00128354	-0,00152479	-0,00107147	-0,00186628	-0,00293231	-0,00195919	-0,00132214	-0,00809040	-0,01536306	-0,00112045	-0,00185293
Pension funds with a small amount into shares																			
DNB pensija 2	DNBP2	-0,00353660	-0,00346344	-0,00429781	-0,00419427	-0,00367790	-0,00360536	-0,00544489	-0,00531123	-0,00353660	-0,00342127	-0,00429781	-0,00465974	-0,00421103	-0,00389189	-0,00784139	-0,00770874	-0,00376038	-0,00516117
Finasta augančio pajamingumo	FAP	-0,00541946	-0,00537936	-0,00657293	-0,00649822	-0,00459549	-0,00457421	-0,00682761	-0,00674765	-0,00541946	-0,00555125	-0,00657293	-0,01080516	-0,00595471	-0,00568828	-0,01403661	-0,01478380	-0,00551202	-0,00960419
Swedbank Pensija 2	SWEDP2	-0,00398050	-0,00386612	-0,00481904	-0,00466869	-0,00378688	-0,00367743	-0,00557542	-0,00539038	-0,00398050	-0,00369249	-0,00481904	-0,00545385	-0,00425360	-0,00398392	-0,00860287	-0,00859427	-0,00411667	-0,00633839
Pension funds with a medium amount into shares																			
DNB pensija 3	DNBP3	-0,00662295	-0,00655524	-0,00801704	-0,00790938	-0,00688193	-0,00683622	-0,01012253	-0,00999417	-0,00662295	-0,00647645	-0,00801704	-0,00872807	-0,00787401	-0,00737218	-0,01454883	-0,01443979	-0,00736692	-0,00976984
ERGO balans	ERGOB	-0,00737261	-0,00731325	-0,00891246	-0,00881087	-0,00758727	-0,00754352	-0,01134058	-0,01119319	-0,00737261	-0,00692197	-0,00891246	-0,01076917	-0,00939726	-0,00881072	-0,02188485	-0,02339539	-0,00782461	-0,01229297
Finasta aktyvaus investavimo	FAI	-0,00952129	-0,00950352	-0,01149144	-0,01142094	-0,00959877	-0,00964343	-0,01615832	-0,01612141	-0,00952129	-0,00812257	-0,01149144	-0,01294616	-0,01083874	-0,01022616	-0,02505827	-0,02633584	-0,00940590	-0,01685043
Finasta Subalansuotas	FS	-0,00862279	-0,00837642	-0,01038834	-0,01006383	-0,00801727	-0,00778319	-0,01478322	-0,01431237	-0,00862279	-0,00816960	-0,01038834	-0,02125934	-0,00890692	-0,00836400	-0,02333203	-0,02559620	-0,00814212	-0,01565353
SEB Pensija 2	SEBP2	-0,00926529	-0,00923716	-0,01118822	-0,01111105	-0,00921213	-0,00920831	-0,01371183	-0,01360951	-0,00926529	-0,00976851	-0,01118822	-0,01736551	-0,01071671	-0,01021175	-0,02395112	-0,02491935	-0,00975081	-0,01574488
Swedbank Pensija 3	SWEDP3	-0,00684206	-0,00678724	-0,00826279	-0,00816337	-0,00726482	-0,00722128	-0,01078052	-0,01065305	-0,00684206	-0,00717452	-0,00826279	-0,01111194	-0,00804594	-0,00758126	-0,01645530	-0,01680884	-0,00700650	-0,01035012
Swedbank Pensija 4	SWEDP4	-0,01207023	-0,01194246	-0,01455614	-0,01434914	-0,01276364	-0,01266126	-0,01932902	-0,01905346	-0,01207023	-0,01138712	-0,01455614	-0,01668513	-0,01453109	-0,01371575	-0,03160527	-0,03249172	-0,01230138	-0,01794042
Pension funds with a large amount into shares																			
Finasta Racionalios rizikos	FRR	-0,01907216	-0,01909251	-0,02294528	-0,02287246	-0,01873045	-0,01884728	-0,03186392	-0,03177722	-0,01907216	-0,01884490	-0,02294528	-0,03877799	-0,02034390	-0,01928533	-0,04589629	-0,04818794	-0,01868467	-0,03417723
SEB pensija 3	SEBP3	-0,01753466	-0,01750144	-0,02114766	-0,02103226	-0,01833565	-0,01839204	-0,02897874	-0,02891240	-0,01753466	-0,01846394	-0,02114766	-0,03198317	-0,02011123	-0,01921953	-0,04418805	-0,04675312	-0,01854407	-0,02884584
MAPE (teorines su modelio)		4,33397399		4,49346494		4,61704745		4,85249906		9,16528035		39,54705486		8,26137058		12,59235255			
MAPE (empirine su teoriniu)		10,22747462		23,63155623		5,67051786		11,83595538		10,22747462		23,63155623		21,22310344		84,69268786			
MAPE (empirine su modelio)		5,99126253		27,31193231		8,29318956		15,19718775		5,23616302		16,18475864		10,02673313		121,95957985			

2.5 MAPE paklaidos skaičiavimas

Paskutinis tiriamojo darbo žingsnis buvo apskaičiuoti kiekvieno skirstinio MAPE paklaidą aprašytą 1.11 skyrelyje. Buvo gauti tokie rezultatai:

Lentelė 2.17 MAPE paklaida, kai ε = 0.1

		ε = 0,1		
		Theoretical-simulated	*Empirical-theoretical*	*Empirical-simulated*
Normal distribution	*VaR*	0,1957	38,9795	39,2622
	CVaR	0,0316	7,0478	7,0715
Mixed Normal distribution	*VaR*	5,5645	49,5381	38,0267
	CVaR	4,9688	8,7049	6,6484
skew T	*VaR*	0,3297	5,9459	5,9860
	CVaR	0,0667	12,7887	12,7437
Mixed skew T	*VaR*	6,1799	9,5379	3,6376
	CVaR	5,4165	6,3063	10,0418
GH skew T	*VaR*	∞	∞	6,0357
	CVaR	∞	∞	12,5603
Mixed GH skew T	*VaR*	30,4953	49,5381	4,5106
	CVaR	9,9185	8,7049	9,7008
a-stable distribution	*VaR*	0,4784	10,2574	10,4607
	CVaR	18,8235	43,5696	87,5861
Mixed a-stable distribution	*VaR*	15,2345	18,3575	2,0958
	CVaR	9,4094	52,9577	66,2343

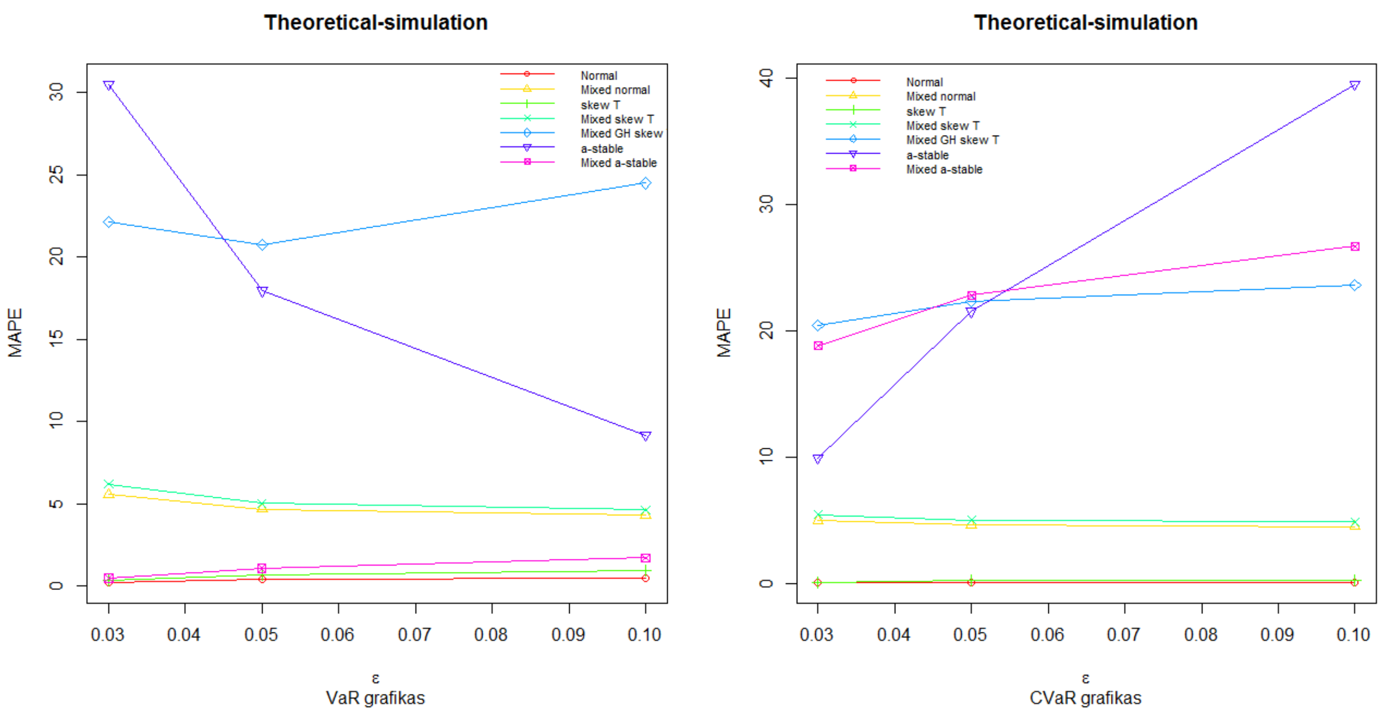
Lentelė 2.18 MAPE paklaida, kai ε = 0.05

		ε = 0,05		
		Theoretical-simulated	*Empirical-theoretical*	*Empirical-simulated*
Normal distribution	*VaR*	0,3870	13,3077	13,5998
	CVaR	0,0431	19,8458	19,8185
Mixed Normal distribution	*VaR*	4,6788	20,4760	13,8120
	CVaR	4,6156	16,2337	19,1403
skew T	*VaR*	0,6696	8,4722	8,1272
	CVaR	0,1943	16,1392	16,0048
Mixed skew T	*VaR*	5,0349	5,5661	5,6320
	CVaR	5,0070	9,2028	12,9211
GH skew T	*VaR*	∞	∞	6,7388
	CVaR	∞	∞	16,2995
Mixed GH skew T	*VaR*	17,9508	20,4760	6,0108
	CVaR	21,5387	16,2337	12,8641
a-stable distribution	*VaR*	1,0783	8,2056	9,0108
	CVaR	22,8360	59,6093	121,9834
Mixed a-stable distribution	*VaR*	10,2910	16,1057	5,1003
	CVaR	10,3431	67,9176	92,5161

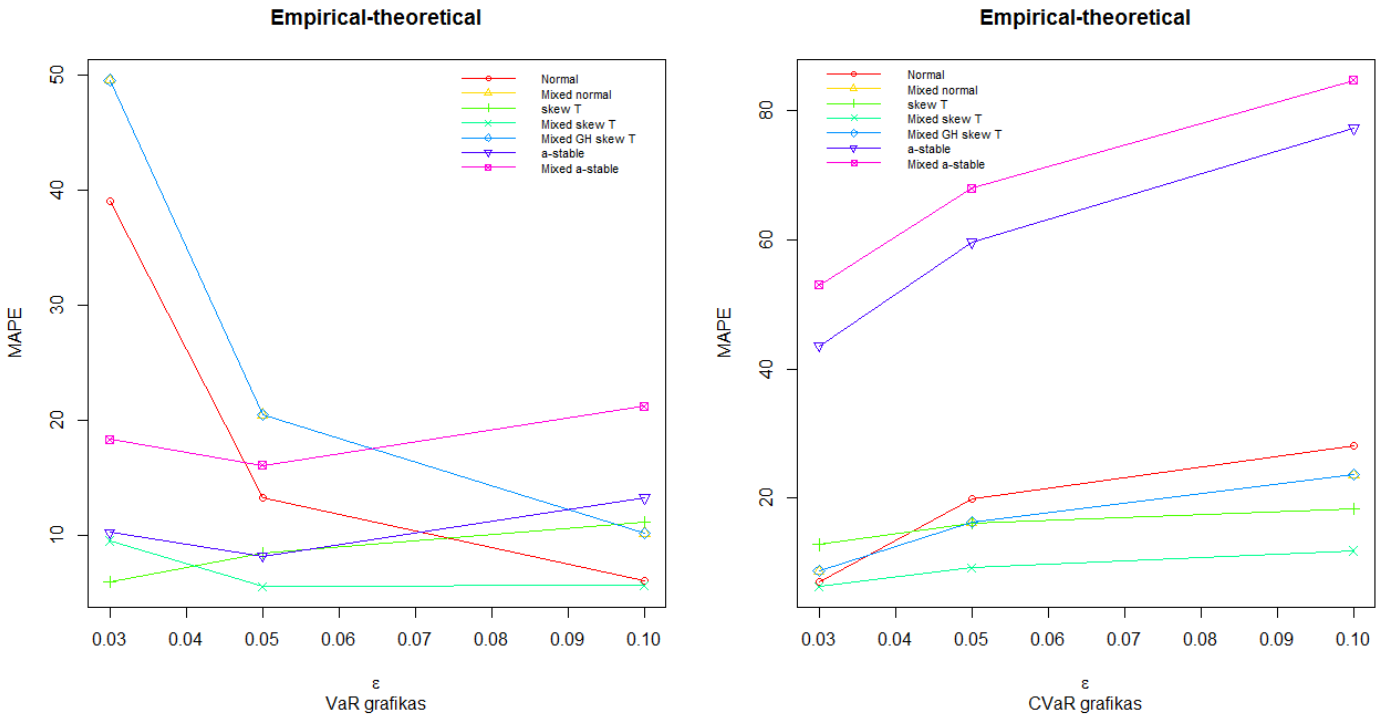
Lentelė 2.19 MAPE paklaida, kai ε = 0.03

		ε = 0,03		
		Theoretical-simulated	*Empirical-theoretical*	*Empirical-simulated*
Normal distribution	*VaR*	0,4840	6,0781	6,0197
	CVaR	0,0351	28,0552	28,0409
Mixed Normal distribution	*VaR*	4,3340	10,2275	5,9913
	CVaR	4,4935	23,6316	27,3119
skew T	*VaR*	0,9386	11,1627	10,6605
	CVaR	0,2258	18,3667	18,2557
Mixed skew T	*VaR*	4,6170	5,6705	8,2932
	CVaR	4,8525	11,8360	15,1972
GH skew T	*VaR*	∞	∞	6,4064
	CVaR	∞	∞	20,2393
Mixed GH skew T	*VaR*	9,1653	10,2275	5,2362
	CVaR	39,5471	23,6316	16,1848
a-stable distribution	*VaR*	1,7082	13,2699	14,8830
	CVaR	26,7047	77,2115	160,9192
Mixed a-stable distribution	*VaR*	8,2614	21,2231	10,0267
	CVaR	12,5924	84,6927	121,9596

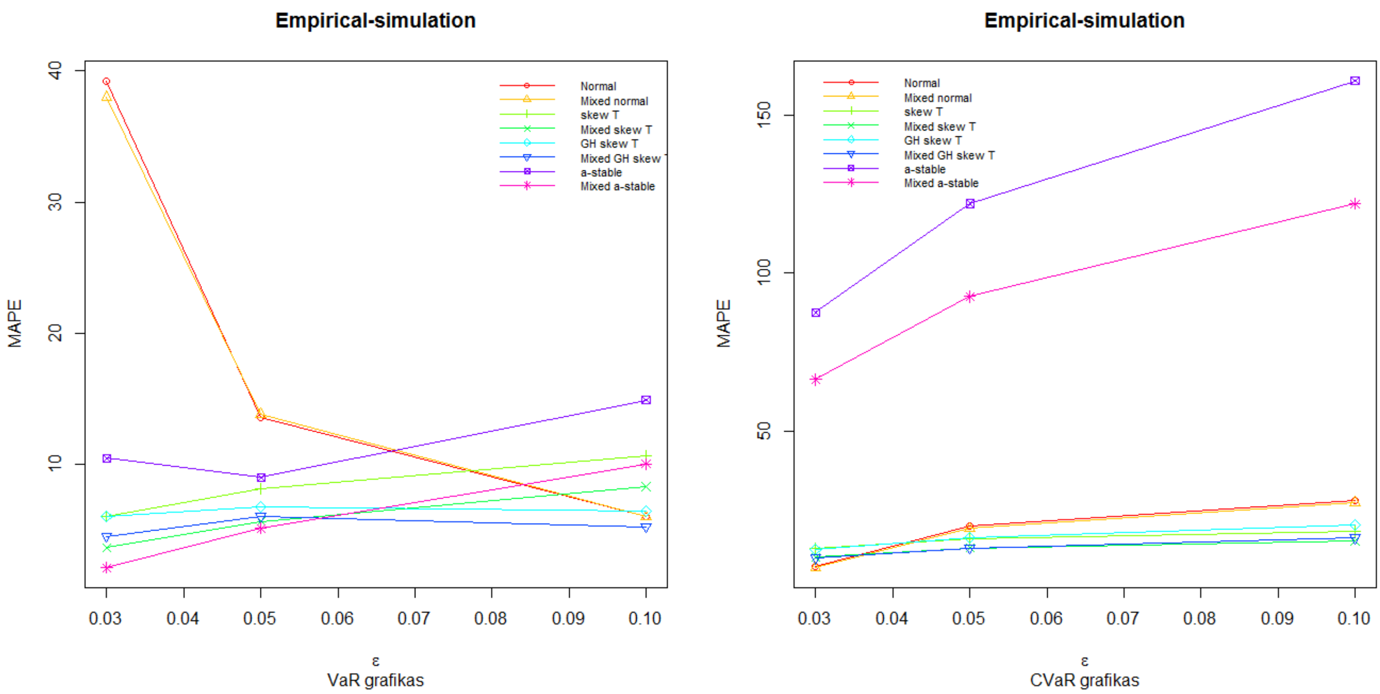
Gautų lentelių grafinė reprezentacija skirtingais MAPE paklaidos atvejais, kai kinta ε, pateikta apačioje.



2.1 pav. Teorinės-simuliacinės MAPE paklaidos kitimas nuo ε



2.2 pav. Empirinės-teorinės MAPE paklaidos kitimas nuo ε



2.3 pav. Empirinės-simuliacinės MAPE paklaidos kitimas nuo ε

Iš grafikų aiškiai matosi, kad stabilūs skirstiniai rizikos mato CVaR įverčio skaičiavimui yra nerekomenduotini.

Diskusija ir rezultatai

Simuliacijos dydis buvo renkamasis iš 10000×1753 ir 1000×17530. Kadangi su 10000×1753 buvo gaunama geresnė MAPE paklaida buvo pasirinktasis pastarasis. Simuliacijos trukmė svyravo nuo 10min. (normalusis skirstinys) iki 2val. (stabilusis skirstinys). Didesnis simuliacijos dydis nebuvo imtas dėl tolygiai augančio laiko simuliacijai atlikti, t.y. padidinus simuliacijos dydį 10 kartų, skaičiavimo laikas taip pat padidėja 10 kartų, o gaunamos MAPE paklaidos skirtumas nesiekia 0.5%.

Apskaičiuoti teorinių VaR ir CVaR reikšmių apibendrintam hiperboliniui paslinktam Stjudento skirstiniui nepavyko, kadangi kai kurių nustatytų parametrų rinkinių atveju skaičiuojami integralai divergavo. Neapskaičiuota MAPE paklaida buvo žymima ∞ (diverguoja).

Galima pastebėti, kad priklausomai nuo tiriamos uodegos ilgio skiriasi ir geriausiai ją aprašantis skirstinys, tačiau bendru atveju paslinktasis Stjudento skirstinys yra optimaliausias.

Matoma tendencija, kad nė vienas skirstinys nėra tinkamas optimaliai skaičiuoti abiem rizikos matams (VaR ir CVaR), t.y. galima pastebėti, kad jeigu skirstinys geriausiai iš visų skaičiuoja VaR reikšmę, tai CVaR rizikos mato jis geriausiai neskaičiuos.

VaR yra skaičiuojamas tiksliau, kadangi užtenka tiktai vieno dydžio suradimo, o norint rasti CVaR reikia rasti visos uodegos vidurkį, dėl ko ir atsiranda didesnė paklaida nuo empirinių rizikos matų.

Pagrindinės didelės MAPE paklaidos priežastys buvo:

- problematiškas pensijų fondą aprašančių parametrų įverčių radimas;
- skirstinio tankio funkcijos savybės.

Simuliacija mišraus skirstinio atveju visada gaudavo geresnius rezultatus, negu paprastas skirstinio atvejis.

Gauti rezultatai buvo pristatyti:

1) „12th International Conference on Computational Management Science 2015“, Praha, 2015 gegužės 27-29d.
2) „28th European Simulation and Modelling Conference - ESM'2014“, FEUP - University of Porto, Porto, Portugal, 2014 Spalio 22-24d.

Išvados

- Bendru atveju paslinktasis Stjudento skirstinys yra geriausias aprašant turimų realių pensijų fondų rizikos matus VaR ir CVaR;
- Dirbant su itin ilga uodegomis, kurių kvantiliai $\varepsilon = 0.1$ ir $\varepsilon = 0.05$, mišrus α-stabilus skirstinys geriausiai iš visų tinka skaičiuojant VaR rizikos matą. Gaunama paklaida yra mažesnė už 5%;
- Dėl savo uodegos ypatybių normalusis ir mišrusis normalusis skirstiniai yra geriausi skaičiuojant VaR, kai uodega yra itin trumpa ($\varepsilon = 0.03$). Gaunama paklaida yra <8%. Taip pat, kai uodega yra ilgesne ($\varepsilon = 0.1$), tai skaičiuojamas CVaR dydis įgyją mažiausią paklaidą lyginant su kitais skirstiniais;
- Turint vidutinį uodegos ilgį ($\varepsilon = 0.05$) apibendrintas hiperbolinis paslinktas Stjudento skirstinys ir paslinktasis Stjudento skirstinys geriausiai skaičiuoja VaR ir CVaR įverčius, kurie geriausiai atitinka empirinių duomenų rizikos matų dydžius;
- Simuliacijai vykdyti geriau naudoti mišrųjį skirstinį, negu paprastą jo atvejį, nes tada gaunami geresni rezultatai;
- Geriausi ir efektyviausi simuliacijos rezultatai yra gaunami imant 10000 imčių, kai kiekvienoje imtyje yra 1753 elementai.

Literatūra

[1] Bryc Wlodzimierz. *The Normal Distribution: Characterizations with Applications*. 1995.

[2] Kjersti Aas, Ingrid Hobæk Haff. *The Generalised Hyperbolic Skew Student's t-distribution.* Norwegian Computing Center, Oslo, Norway, 2006. www.iew.uzh.ch/static/seminars/downloads/GHSkewTAasHaff05.pdf

[3] George Christodoulakis, Enrique Batiz-Zuk, Ser-Huang Poon. *Systemic Basel II credit loss distributions under non-normality*. Manchester Business School, 2009. http://ec.europa.eu/economy_finance/events/2009/20091015/b-christodoulakis.pdf

[4] Kjersti Aas, Ingrid Hobæk Haff. *NIG and Skew Student's t: Two special cases of the Generalised Hyperbolic distribution.* Norwegian Computing Center, Oslo, Norway, 2005. http://www.nr.no/files/samba/bff/SAMBA0105.pdf

[5] Fernandez C., Steel M.F.J. *On Bayesian Modelling of Fat Tails and Skewness*. 2000.

[6] Sergey Sarykalin, Gaia Serraino, Stan Uryasev. *Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization*. 2008.

[7] A. Kabašinskas. *Finansinių rinkų statistinė analizė ir statistinio modeliavimo metodai*. 2007. http://www.mii.lt/files/disert_08_akabasinskas.pdf

[8] G. Samorodnitsky, MS. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes: stochastic models with infinite variance*. CRC Press, 1994.

[9] J. P. Nolan. *Numerical Calculation of Stable Densities and Distribution Funtions*. 1997.

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Student%27s_t-distribution

[11] http://cran.r-project.org/web/packages/SkewHyperbolic/SkewHyperbolic.pdf

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function

[13] http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html

[14] http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function

[15] http://mathworld.wolfram.com/ModifiedBesselFunctionoftheSecondKind.html

[16] http://www.mhtlab.uwaterloo.ca/courses/me755/web_chap4.pdf

[17] http://en.wikipedia.org/wiki/Mean_absolute_percentage_error

[18] http://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_likelihood

[19] http://www.statlect.com/maximum_likelihood_matlab_example.htm

[20] http://en.wikipedia.org/wiki/Nelder%E2%80%93Mead_method

Priedas

MATLAB aplinkos programos tekstas.

EM.m

```
x = xlsread('Skaiciavimai.xlsm', 'duomenys (sorted)');


m1 = mean(x);
m2 = std(x);
m3 = skewness(x);
m4 = kurtosis(x);


v = zeros(10,18);
delta = zeros(10,18);
mu = zeros(10,18);
beta = zeros(10,18);


for i=1:18


    nu = [ 0:0.1:20];


    [n, m] = size(nu);
    ats = zeros(n,m);


    for k=1:m
        K = (1/(3*nu(k).^2 - 2*nu(k) - 32)) * (1 - sqrt(1-(((3*nu(k).^2 - 2*nu(k) - 32)*(12*(5*nu(k)-22) - (nu(k) - 6)*(nu(k)
- 8) * m4(i)))/(216*(nu(k)-2).^2 * (nu(k)-4)))));
        ats(k) = (4-6*(nu(k)+2)*(nu(k)-2)*K)*sqrt(2)*sqrt(nu(k)-4)*sqrt(1-6*(nu(k)-2)*(nu(k)-4)*K) - m3(i)*(nu(k)-6);
    end


    double(ats);
    [reiksme, I] = min(ats);


    v(1,i) = nu(I);


end


for i=1:18


    delta(1,i) = ((6*((v(1,i)-2).^2)*(v(1,i)-4)*m2(i))/(3*v(1,i).^2 - 2*v(1,i) - 32)) * (1 - sqrt(1-(((3*v(1,i).^2 - 2*v(1,i)
- 32)*(12*(5*v(1,i)-22) - (v(1,i) - 6)*(v(1,i) - 8) * m4(i)))/(216*(v(1,i)-2).^2 * (v(1,i)-4)))));
    beta(1,i) = sign(m3(i)) * (((v(1,i)-2).^0.5)*((v(1,i)-4).^0.5)*(m2(i)*(((v(1,i)-2)-
delta(1,i)).^0.5)))/((2.^0.5)*delta(1,i));
    mu(1,i) = m1(i) - ((beta(1,i)*delta(1,i))/(v(1,i)-2)) ;


end
```

MLE.m

```
data = xlsread('Skaiciavimai.xlsm', 'duomenys (sorted)');
x=data(:,1);


x0 = 3;
v0 = [6.40000000000000 8 6.40000000000000 6.30000000000000 8 6.30000000000000 8 6.40000000000000 6.60000000000000 8
6.60000000000000 6.40000000000000 6.30000000000000 6.60000000000000 8 8 6.40000000000000 8];
mu0 = [0.00108116897573530 0.00223123075642275 0.000977021350656833 0.000580225567913241 0.00232789305320370
0.000751653782246672 0.00284967779242297 0.00339552929793853 0.00245888403142880 0.00514620114010627 0.00456701356335008
0.00556891142980538 0.00464708008357058 0.00567776221672975 0.00516289466267805 0.00889438842542247 0.0106210448880959
0.0130615968897324];
beta0 = [1.34016774099782 1.41315978828548 1.34523473941139 1.34109807371045 1.41310215470997 1.32619801252428
1.41286451343140 1.34724501324832 1.35547638929567 1.41170743280332 1.35563844475639 1.33727160797195 1.33291124126549
1.34943546513784 1.41165507905631 1.40974935317679 1.33118971211981 1.40764718643320];
delta0 = [0.00302155346709905 0.00893823831877900 0.00247429092021195 0.00144863610993173 0.00942690106213759
0.00216416986274869 0.0114416000587720 0.0104968500746456 0.00804282456615449 0.0212463725035451 0.0151336459085166
0.0181560923142569 0.0151268402953068 0.0190922459512617 0.0216898133235715 0.0378202836528263 0.0359382409171304
0.0555881955800915];


theta0 = [ v0(1), mu0(1), beta0(1), delta0(1)];


f = @skewT;
```

```
phat = mle(x,'nloglf',f,'start', [ x0, v0(1), mu0(1), beta0(1), delta0(1)]);
```

R programos tekstas.

θ skaičiavimas:

```
load = loadWorkbook("C:/Users/dlx/Desktop/data.xlsx")
data = readWorksheet(load, sheet="Sheet1", header = FALSE)
data = as.matrix(data)

temp = NULL
temp2 = NULL
theta = NULL
temp = NULL
ats1 = NULL
ats2 = NULL
ats3 = NULL
ats4 = NULL

for(k in 1:18) {
   temp2 = data[,k]
   temp2 = temp2[!is.na(temp2)]
   fit = skewhypFit(temp2, startValues = "US", paramStart = theta0[k,], method = "Nelder-Mead")
   temp = fit[1]
   temp = as.numeric(unlist(temp))
   ats1[k] = temp[1]
   ats2[k] = temp[2]
   ats3[k] = temp[3]
   ats4[k] = temp[4]
   }

theta = cbind(ats1, ats2, ats3, ats4)

writeWorksheetToFile("C:/Users/dlx/Desktop/theta GH t.xlsx", theta, sheet = "Sheet1")
```

<u>VaR ir CVaR skaičiavimas:</u>

```
load1 = loadWorkbook("C:/Users/dlx/Desktop/theta GH t.xlsx")
theta = readWorksheet(load1, sheet="Sheet1", header = FALSE)
theta = t(t(theta))

n = 1753
m = 10000
rez_model = NULL
rez_teorinis = NULL
rez_bendras = NULL

for(i in 1:18) {

random <- NULL
random = array(0,dim=c(m,n))
for(j in 1:m) {
random[j,] <- rskewhyp(n, mu = theta[i,1], delta = theta[i,2], beta = theta[i,3], nu = theta[i,4])
}

for(j in 1:m) {
random[j,] = sort(random[j,])
}

VaR005 = array(0, dim = c(m))
VaR003 = array(0, dim = c(m))
VaR01 = array(0, dim = c(m))
CVaR005 = array(0, dim = c(m))
CVaR003 = array(0, dim = c(m))
CVaR01 = array(0, dim = c(m))
n005 = floor(n*0.05)
n003 = floor(n*0.03)
n01 = floor(n*0.1)
```

```
for(j in 1:m) {
VaR005[j] = random[j,n005]
VaR003[j] = random[j,n003]
VaR01[j]  = random[j,n01]
CVaR005[j] = sum(random[j,1:n005])/n005
CVaR003[j] = sum(random[j,1:n003])/n003
CVaR01[j]  = sum(random[j,1:n01])/n01
}

avgVaR005 = 0
avgVaR003 = 0
avgVaR01 = 0
avgCVaR005 = 0
avgCVaR003 = 0
avgCVaR01 = 0

avgVaR005 = mean(VaR005)
avgCVaR005 = mean(CVaR005)
avgVaR003 = mean(VaR003)
avgCVaR003 = mean(CVaR003)
avgVaR01 = mean(VaR01)
avgCVaR01 = mean(CVaR01)

rez = cbind(avgVaR005, avgCVaR005, avgVaR003, avgCVaR003, avgVaR01, avgCVaR01)
rez_model = rbind(rez_model, rez)

q005 = NULL
q003 = NULL
q01 = NULL

q005 = qskewhyp(0.05, mu = theta[i,1], delta = theta[i,2], beta = theta[i,3], nu = theta[i,4])
q003 = qskewhyp(0.03, mu = theta[i,1], delta = theta[i,2], beta = theta[i,3], nu = theta[i,4])
q01 = qskewhyp(0.1, mu = theta[i,1], delta = theta[i,2], beta = theta[i,3], nu = theta[i,4])
```

```
sk = NULL
sk_temp = NULL
tCVaR003 = NULL
tCVaR005 = NULL
tCVaR01 = NULL
par = NULL

    par = theta[i,]
    integrand <- function(x)   { qskewhyp(x,mu = par[1], delta = par[2], beta = par[3], nu = par[4]) }
    sk_temp = integrate(integrand, lower = 0, upper = 0.1)
    sk = as.numeric(sk_temp[1])
    tCVaR01 = sk/0.1



    par = theta[i,]
    integrand <- function(x)   { qskewhyp(x,mu = par[1], delta = par[2], beta = par[3], nu = par[4]) }
    sk_temp = integrate(integrand, lower = 0, upper = 0.05)
    sk = as.numeric(sk_temp[1])
    tCVaR005 = sk/0.05

    par = theta[i,]
    integrand <- function(x)   { qskewhyp(x,mu = par[1], delta = par[2], beta = par[3], nu = par[4]) }
    sk_temp = integrate(integrand, lower = 0, upper = 0.03)
    sk = as.numeric(sk_temp[1])
    tCVaR003 = sk/0.03

rezz = cbind(q005, tCVaR005, q003, tCVaR003, q01, tCVaR01)
rez_teorinis = rbind(rez_teorinis, rezz)

bendras = cbind(q005, avgVaR005, tCVaR005, avgCVaR005, q003, avgVaR003, tCVaR003, avgCVaR003, q01, avgVaR01, tCVaR01, avgCVaR01)
rez_bendras = rbind(rez_bendras, bendras)
```

```
}

writeWorksheetToFile("C:/Users/dlx/Desktop/results.xlsx", rez_model, sheet = "Model")

writeWorksheetToFile("C:/Users/dlx/Desktop/results.xlsx", rez_teorinis, sheet = "Teoriniai")

writeWorksheetToFile("C:/Users/dlx/Desktop/results.xlsx", rez_bendras, sheet = "Bendras")
```