

**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS**

**Aušra Gadeikytė**

**SLĖGIO IMPULSO SKLIDIMO KRAUJAGYSLĖSE BAIGTINIŲ  
ELEMENTŲ MODELIS**

Baigiamasis magistro projektas

**Vadovas**

Prof. habil. dr. R. Barauskas

**KAUNAS, 2015**

**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS**

**SLĖGIO IMPULSO SKLIDIMO KRAUJAGYSLĖSE BAIGTINIŲ  
ELEMENTŲ MODELIS**

Baigiamasis magistro projektas  
Taikomoji matematika (kodas 612G10003)

**Vadovas**

(parašas) Prof. habil. dr. R. Barauskas

(2015-06-05)

**Recenzentas**

(parašas) Prof. habil. dr. M. K. Ragulskis

(2015-06-05)

**Projektą atliko**

(parašas) Aušra Gadeikytė

(2015-06-05)

**KAUNAS, 2015**



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS  
MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

Aušra Gadeikytė

Taikomoji matematika (kodas 612G10003)

Baigiamojo projekto

„SLĖGIO IMPULSO SKLIDIMO KRAUJAGYSLĖSE BAIGTINIŲ  
ELEMENTŲ MODELIS“

**AKADEMINIO SAŽININGUMO DEKLARACIJA**

2015 m. birželio mėn. 05 d.

Kaunas

Patvirtinu, kad mano, **Aušra Gadeikytė**, baigiamasis darbas tema „Slėgio impulso sklidimo kraujagyslėse baigtinių elementų modelis“ yra parašytas visiškai savarankiškai, o visi pateikti duomenys ar tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti sąžiningai. Šiame darbe nei viena darbo dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar internetinių šaltinių, visos kitų šaltinių tiesioginės ir netiesioginės citatos nurodytos literatūros nuorodose. Įstatymu nenumatytų piniginių sumų už šį darbą niekam nesu mokėjusi.

Aš suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo faktui, man bus taikomos nuobaudos, remiantis Kauno technologijos universitete galiojančia tvarka.

---

(studento vardas ir pavardė, įrašyti ranka)

---

(parašas)

# TURINYS

SANTRUMPOS.....	7
ĮŽANGA.....	8
1. BENDROJI DALIS.....	9
1.1. SKYŠČIŲ MECHANIKOS SAMPRATA.....	9
1.2. ŠIRDIES IR KRAUJAGYSLIŲ SISTEMA.....	11
1.3. LITERATŪROS APŽVALGA.....	13
1.4. DARBE SPRENDŽIAMŲ UŽDAVINIAI .....	15
1.5. PROGRAMINĖ ĮRANGA.....	15
2. TEORINĖ DALIS .....	15
2.1. STACIONARIOS TĖKMĖS APSKAIČIAVIMO MODELIS.....	15
2.2. TĖKMĖS LYGČIŲ IŠVEDIMO PRINCIPAI .....	17
2.2.1. KONSERVATYVUSIS PRIĖJIMAS .....	18
2.2.2. NEKONSERVATYVUSIS PRIĖJIMAS .....	18
2.3. TAMPRIAI SPŪDŽIOS TĖKMĖS MATEMATINIS MODELIS.....	19
3. MAŽAI SPŪDŽIOS TAMPRIOSIOS TĖKMĖS BE MODELIS .....	20
3.1. TEILORO SKIRTUMINĖ FORMULĖ .....	20
3.2. BAIGTINIŲ ELEMENTŲ MODELIO SUDARYMAS .....	21
3.3. KONSTRUKCIJOS LYGČIŲ SURINKIMO YPATUMAI.....	23
4. TIRIAMOJI DALIS .....	23
4.1. BAIGTINIŲ ELEMENTŲ MODELIS NEŠAKOTAI STRUKTŪRAI.....	24
4.2. MODELIO LYGINAMOJI ANALIZĖ.....	30
4.3. BAIGTINIŲ ELEMENTŲ MODELIS ŠAKOTAI STRUKTŪRAI.....	32
IŠVADOS .....	35
LITERATŪRA .....	36

**Gadeikytė A. Finite element model of pressure pulse propagation in blood vessels: Master's work in applied mathematics / supervisor Prof. habil. dr. R. Barauskas; Department of Applied Informatics, Faculty of Informatics, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2015. – 37 p.**

## **SUMMARY**

Computational fluid dynamics simulation can be helpful for understanding the heart and blood vessels diseases, fixing changes of blood pressure and flow rate. Nevertheless the computational mechanics applications are highly developed in most areas of engineering, the applications in biomedicine are still challenging due to very complex material properties and multi-physical interactions.

During this research, the methods to realize the transient flow processes in blood vessels systems were overviewed, also mathematical model of the flow and 1D finite element implementation for pressure wave propagation were set up. The flow has been analyzed in the cases the vessel was horizontal, tilted up or tilted down. Model was extended for the branched blood vessels structure.

In a rough mesh of the sample structure (grid sizes 25, 50 and 100) the solution was imprecise, however, convergence was achieved by using more elements. The level of “numerical noise” was in acceptable limits. The longitudinal wave velocity was compared with the theoretical value, however, exact comparison is hardly possible as the theoretical evaluation fails to account for the damping effects. At small damping values the coincidence of the results was good.

MATLAB software was used during this research.

## KONFERENCIJOS IR PUBLIKACIJOS:

1. Gadeikytė A., Barauskas R.. Baigtinių elementų matematinis modelis slėgio bangai tampriame skysčio kanale apskaičiuoti. Matematika ir matematikos dėstymas – 2015. Kaunas, 2015 balandžio 10 d..
2. Gadeikytė A., Šimatonis L., Tamulevičius T., Ulčinas O., Abakevičienė B., Tamulevičius S.. Lazerinės spinduliuotės įtakos poliimidinės plėvelės mechaninėms savybėms tyrimas. Matematika ir gamtos mokslai: teorija ir taikymai. XIII studentų konferencijos pranešimų medžiaga. Kaunas, 2015, p. 49-50. ISBN 978-609-02-1134-2.
3. Šimatonis L., Gadeikytė A., Tamulevičius T., Ulčinas O., Abakevičienė B., Tamulevičius S.. Evaluation using finite element method of micronic scaled polyimide scaffolds fabricated with femtosecond laser // 58<sup>th</sup> Scientific conference for students of physics and natural sciences. Open readings 2015. Vilnius, Lithuania, March 24-27, 2015, p. 140. ISSN 2029-4425.
4. Gadeikytė A., Misiulis E., Džiugys A.. Kraujo nestacionaraus tekėjimo tamprioje akies arterijoje skaitinis modeliavimas. Studentų mokslinės praktikos konferencija, Vilnius, 2014, p.105-106.
5. Tamulevičius T., Gadeikytė A., Augulis L., Tamulevičienė A., Fataraitė E., Tamulevičius S.. Micro structuring and mechanical testing of biocompatible polymers for biological applications //5<sup>th</sup> International conference. Radiation interaction with materials and applications 2014. Kaunas, Lithuania, May 12-15, 2014, p. 187-189. ISSN 2351-583X.
6. Šimatonis L., Gadeikytė A., Tamulevičius T., Ulčinas O., Abakevičienė B., Tamulevičius S.. Poliimidinėse plėvelėse femtosekundiniu lazeriu suformuotų mikrostruktūrų įtakos mechaninėms savybėms tyrimai. 41-oji Lietuvos nacionalinė fizikų konferencija. Vilnius, 2015 birželio 17-19 d..

## SANTRUMPOS

$A$  – vamzdžio skerspjūvio plotas;

$BEM$  – baigtinių elementų metodas;

$BE$  – baigtinis elementas;

$D$  – vamzdžio skersmuo;

$ds$  – baigtinio elemento ilgis;

$E$  – vamzdžio jungo modulis;

$f$  – Darcy trinties koeficientas;

$g$  – laisvojo kritimo pagreitis;

$h$  – kraujagyslės sienelės storis;

$p$  – slėgis;

$\rho$  – tankis;

$u$  – skysčio tėkmės greitis;

$w$  – skysčio tėkmės debitas;

$Re$  – Reinoldso skaičius;

$\mu$  – skysčio dinaminis klampumo koeficientas;

$K$  – skysčio tūrinis standumo modulis;

## IŽANGA

Kraujotakos sistema matematiškai galima pavaizduoti kaip uždara tamprų vamzdelių sistemą. Taikomas spūdzios tėkmės modelis, apibendrintai įvertinantis susietą kraujo ir kraujagyslių sienelių spūdumą. Pradinį slėgį kraujagyslė pati reguliuoja išsiplėsdama ir susitraukdama. Tai sudėtingas vidinis valdymo mechanizmas. Padidėjusio slėgio banga gali sukelti kraujagyslių sienelių išsiplėtimą. Periodiškas slėgio trikdymas turi reikšmingą poveikį gyvam organizmui.

Skaičiuojamosios skysčių dinamikos (*angl. Computational Fluid Dynamics, CFD*) modeliavimas padeda lengviau suprasti širdies ir kraujagyslių ligas, nustatant slėgio ir greičio pokyčius. Nors tai galingas įrankis, tačiau biomedicinoje nėra pakankamai išvystytas. Modeliai neišvengiamai yra suprastinami dėl visuminio bio-mechaninės sistemos sudėtingumo bei ne pilnai žinomų vidinių reguliuojančių ryšių. Tad svarbu priimti teisingas prielaidas apie kraujo savybes, kraujo tėkmės pobūdį ir kraujagyslės sienelių savybes.

Baigtinių elementų metodas (*angl. Finite element method, FEM*) yra vienas plačiausiai taikomų metodų, skirtų tėkmės sistemų uždaviniams spręsti bei dinaminių procesų modeliavimui. Šio darbo tikslas – baigtinių elementų metodu sudaryti skaitinį modelį ir skaičiavimo algoritmą slėgio impulso sklidimo kraujagyslėse apskaičiavimui. Darbe sprendžiami uždaviniai:

- Atlikti skysčių mechanikos lygčių ir jų kraštinių sąlygų analizę;
- Sudaryti pilną stacionarios tėkmės kraujagyslių tinkle modelį ir skaičiavimo algoritmą;
- Sudaryti skysčių dinamikos lygčių vienmatėje (1D) terpėje skaitinio sprendimo Teiloro – Galiorkino metodu analizę ir algoritmą;
- Vienmatį (1D) tėkmės modelį išplėsti šakotai 1D struktūrai;

Darbui pasirinkta programa MATLAB.



## 1. BENDROJI DALIS

Fizikos šaka nagrinėjanti jėgų poveikius skysčiams vadinama skysčių mechanika. Ji skirstoma į skysčių statiką ir skysčių dinamiką. Skysčių mechanika, ypač skysčių dinamika, yra labai plati sritis, apimanti įvairias problemas, kurios yra dalinai arba visiškai neišspręstos [1]. Skysčių mechanikos uždaviniai sprendžiami tiek gamtos, tiek technologijų mokslų srityse. Gamtos mokslų srityje kaip: meteorologijoje tyrinėjama klimato kaita, viesulų ar uraganų susidarymai; okeanografijoje, kuriami vandens cirkuliavimo, taršos poveikio gyviems organizmams modeliai; geofizikoje tyrinėjami žemės drebėjimai, ugnikalnių išsiveržimai (remiantis konvekcija žemės mantijoje); biologijos moksluose sprendžiami kraujotakos, kvėpavimo sistemos uždaviniai. Technologijos mokslų srityje tyrinėjami: vidaus degimo varikliai, erdvėlaivių varomosios sistemos; atliekų šalinimo procesai (cheminis apdorojimas, nuotekų transportavimas); garo, dujų, vėjo turbinos; vamzdiniai (drėkinimo įranga, vandentiekis, šildymo sistemos); šildymo, vėdinimo, oro kondicionavimo sistemos; aušinimo sistemos; hidraulinių prietaisų veikimas bei kiti gamybiniai procesai [2].

Tyrinėjimai skysčių elgsenos siekia mažiausiai 500 metų (Leonardo Da Vinči darbai). Nors praktinis suvokimas, apie skysčių elgseną, prasidėjo kur kas seniau. Romos imperijoje buvo tiesiami akvedukai, kurie vis dar laikomi vienais iš sudėtingiausių statinių. Šiuolaikiškesnis skysčio judesio suvokimas prasidėjo prieš kelis šimtmečius L. Oilerio ir Bernulio (tėvo ir sūnaus) darbuose. Gauta viena pagrindinių hidrodinamikos lyčių (Bernulio lygtis). A. Navje ir Stokso darbai 19 a. viduryje. Išvestos Navje – Stokso lygtys, kurios yra labai svarbios skysčių dinamikoje. Tai diferencialinės lygtys, kuriomis aprašomas skysčių substancijos judėjimas. 19 ir 20 a. išskiriami du požiūriai į skysčio judesį: teorinis ir eksperimentinis. Iš eksperimentinių metodų skirtų vaizduoti ir analizuoti skysčių tėkmę tinka dalelių vaizdų velosimetrija (*angl. Particle image velocimetry*) [1],[2].

Tokio pobūdžio uždaviniai matematiškai sudėtingi, todėl sprendžiami skaitiniais metodais. Buvo atlikta nemažai darbų, kurie apjungia teorinius ir eksperimentinius skaičiavimus. Dabar, kai yra galingi kompiuteriai, galime išskirti ir trečią požiūrį t. y. skaičiuojamoji skysčių dinamika (*angl. Computational Fluid Dynamics, CFD*).

### 1.1. SKYSČIŲ MECHANIKOS SAMPRATA

Skystis, kaip ir kietasis kūnas, geba išlaikyti savo tūrį, tačiau nesugeba išlaikyti pavidalo. Skysčio formai pakeisti pakanka mažos jėgos, tačiau keičiant skysčio formą staigiai, jis priešinasi. Skysčio savybė priešintis formos kitimui vadinama **skysčio klampa**  $\mu$ . Skysčio klampa – vienas iš svarbiausių judantį skystį apibūdinančių parametrų. Didelės įtakos turi: tėkmės pobūdžiui,

greičių pasiskirstymui tėkmės skerspjūvyje. Kuo klampesnis skystis, tuo jis panašesnis į kietąjį kūną. **Skysčio tankiu**  $\rho$  vadinama skysčio tūrio vieneto masė. Skysčio tankis priklauso nuo: skysčio rūšies, skysčio temperatūros, slėgio. Didėjant slėgiui – skysčio tankis didėja. Kintant skysčio temperatūrai arba jo slėgiui, arba abiem kartu kinta skysčio tankis. Ši savybė vadinama **tamprumu**. Skystis vad. nespūdžiu skysčiu, kai jo tankis yra pastovus. Nagrinėjant esantį pusiausvyros būsenos ar judantį skystį, dažniausiai skystis laikomas ištisine terpe, tolygiai pasiskirsčiusia jo užimtos erdvės srityje, nesigilinant į skysčio molekulinę struktūrą ir į tarp molekulinės sąveikos jėgas. Skysčio, kaip visumos, judėjimą vadiname tekėjimu. Skysčio dalele vadinamas mažas skysčio tūrio elementas, kuriame vis dėlto yra labai daug molekulių. Pagal skysčio tekėjimo pobūdį, skysčio tėkmė laminarinė arba turbulentinė. **Debitu**  $w$  vadinamas skysčio kiekis pratekantis vamzdžio skerspjūviu per laiko vienetą [3].

Skysčių tekėjimo pobūdį nagrinėjo O. Reynoldsas. Jis eksperimentiškai nustatė laminarinio tekėjimo virtimo turbulentiu kriterijų. Vamzdžiu tekant mažam skysčio debitui ir esant nedideliam greičiui, skystis teka nesimaišydamas taisyklingomis, lygiagrečiomis, tarpusavyje nesimaišančiomis čiurkšlėmis. Toks tekėjimas vadinamas **laminariu**. Jis vyksta tol, kol tekėjimo greitis vamzdyje pasiekia tam tikrą dydį  $u_k$ , vadinamą žemutiniu kritiškoju greičiu. Esant pakankamai dideliame tekėjimo greičiui, skysčio dalelės juda sudėtingomis trajektorijomis, nuolatos keisdamos tekėjimo kryptį. Toks tekėjimas vadinamas **turbulentiu**. Iš laminarinio į turbulentinį tekėjimas pereina tada, kai tekėjimo greitis pasiekia ribą  $u_k^1$ , vadinamą aukštutiniu kritiškoju greičiu. Kai tekėjimo greitis yra tarp žemutinės ir aukštutinės kritiškojo greičio ribos ( $u_k < u < u_k^1$ ), tekėjimas vadinamas neapibrėžtuoju (nepastoviu), jis šioje zonoje gali būti ir laminarinis, ir turbulentinis [4].

O. Reynoldsas pasiūlė tokią formulę kritiškajam greičiui  $u_k$  suskaičiuoti:

$$u_k = \frac{\mu Re_k}{\rho D},$$

čia  $Re_k$  – bedimensinis dydis, vadinamas kritiškoju Reinoldso skaičiumi;  $\mu$  dinaminė skysčio klampa;  $\rho$  – skysčio tankis;  $D$  – vamzdžio skersmuo. Žinant, kad skysčio kinematinė klampa :

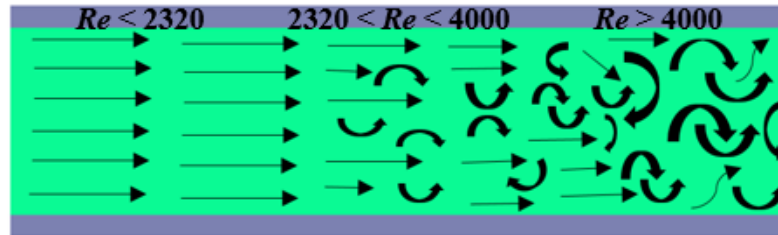
$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

$$Re = \frac{uD}{\nu} = \frac{u|\rho D}{\mu}. \quad (1.1)$$

Pagal Reinoldso skaičių galime nustatyti skysčio tekėjimo režimą:

- $Re < 2320$  – tekėjimas laminarinis;
- $2320 < Re < 4000$  – tekėjimas nepastovus (laminarinis arba turbulentinis);

- $Re > 4000$  – tekėjimas turbulentinis [4].

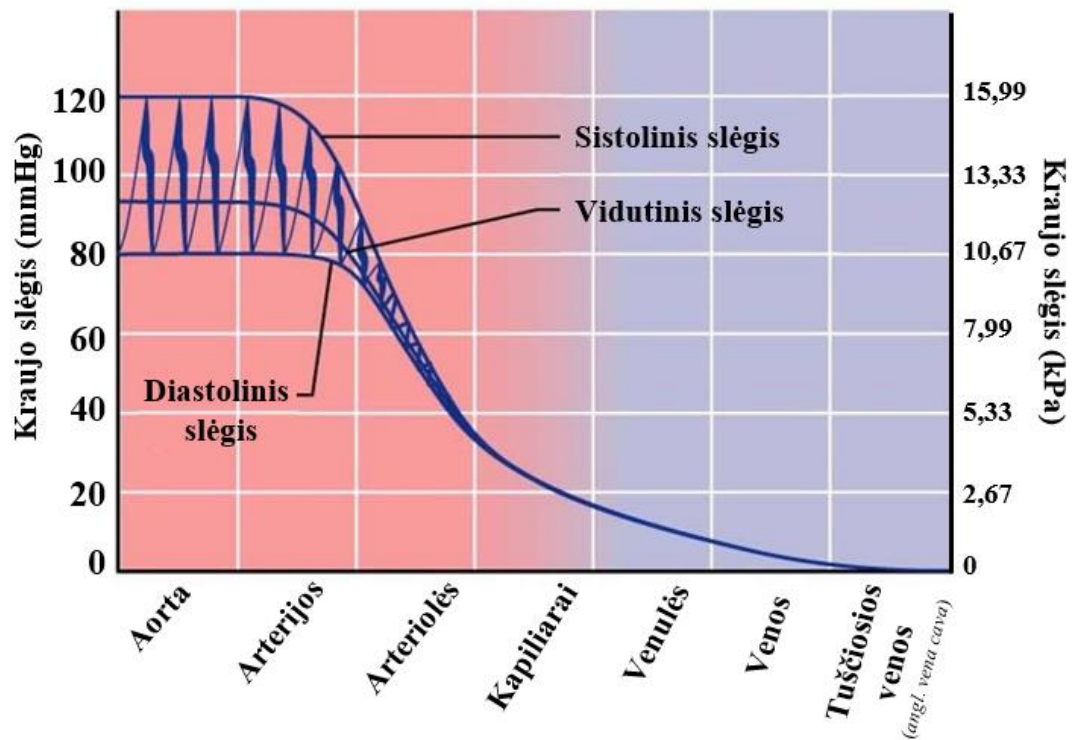


**1.1 pav.** Laminarinio tekėjimo perėjimas į turbulentinį tekėjimą [21]

## 1.2. ŠIRDIES IR KRAUJAGYSLIŲ SISTEMA

Iš širdies ir kraujagyslių sudaryta širdies ir kraujagyslių sistema, kurios pagrindinė funkcija – užtikrinti nepertraukiamą kraujo tekėjimą kraujagyslių sistemoje. Tokios kraujotakos fizikinį modelį matematiškai galima įsivaizduoti kaip uždara, užpildytą skysčiu (krauju) vamzdelių sistemą. Vamzdeliai yra išsišakoję, turintys tamprias sienes. Prie kraujagyslės sienelių kraujo greitis yra lygus nuliui [5].

Slėgis užtikrinantis kraujo tekėjimą kraujagyslių sistema, atsiranda dirbant širdžiai. Širdies susitraukimo metu atsiranda sistolinio (padidėjusio) slėgio banga, kuri sukelia kraujagyslių sienelių išsiplėtimą, sklindančios bangos pavidalu išilgai stambiųjų arterijų. Širdies atsipalaidavimo metu (vadinamo diastole) slėgio banga sumažėja. Bangų greitis priklauso ne tik nuo kraujo spūdumo, bet ir nuo kraujagyslių sienelių tamprumo [5]. Sistolinės ir diastolinės bangų skirtumas yra vadinamas pulso banga. Vidutinis arterinis slėgis yra randamas, sudėjus trečdalį pulso bangos su diastoliniu slėgiu. Žemiausias kraujo slėgis (spaudimas) yra kapiliaruose, jis siekia nuo 40-20 mmHg (5333 – 2666 Pa). Toks slėgis apsaugo kapiliarus nuo plyšimo [6]. Normaliomis sąlygomis kraujo tekėjimas yra laminarinis. Staigiai sumažėjus kraujagyslių spindžiui, nepilnai atsidarant arba, atvirkščiai, nepilnai užsidarant širdies arba aortos vožtuvams, kraujo tekėjimas tampa turbulentiniu [5]. Slėgį kraujagyslėse galima išmatuoti: tiesioginiu (invaziniu) ir netiesioginiu (neinvaziniu) būdais. Kuriant bei tobulinant neinvazinius slėgio matavimo aparatus kuriami kraujagyslių matematiniai ir skaitiniai modeliai.



1.2 pav. Kraujo slėgis kraujagyslėse [6]

Modeliavimui reikalinga teisinga informacija apie turimos struktūros mechanines savybes. Žemiau pateikta 1.1 lentelė, kurioje yra pagrindinių kraujagyslių vidinio skersmens ir sienelės storis. 1.2 lentelėje pateikta kraujo charakteristikos, kurios naudotos tiriamojoje dalyje.

1.1 lentelė. Kraujagyslės diametras ir kraujagyslės sienelės storis [6]

Kraujagyslė	Vidinis skersmuo $D$ , mm	Sienelės storis $h$ , mm
Elastinė arterija ( <i>angl. Elastic artery</i> )	15	1
Raumeninė arterija ( <i>angl. Muscular artery</i> )	6	1
Arteriolė ( <i>angl. Arteriole</i> )	0,037	0,006
Kapiliaras ( <i>angl. Capillary</i> )	0,009	0,0005
Venulė ( <i>angl. Venule</i> )	0,020	0,001
Vena ( <i>angl. Vein</i> )	5	0,5

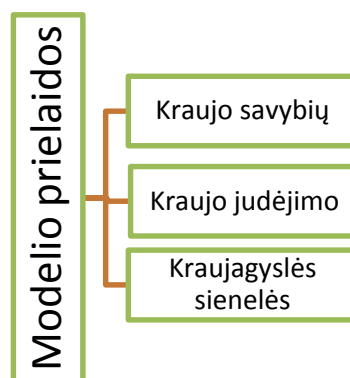
1.2 lentelė. Kraujo savybės [19]

Kraujo tankis	$1060 \text{ kg/m}^3$
Dinaminė klampa	$0,005 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$

### 1.3. LITERATŪROS APŽVALGA

Skaičiuojamosios skysčių dinamikos (*angl. Computational Fluid Dynamics, CFD*) modeliavimas padeda lengviau suprasti širdies ir kraujagyslių ligas (pvz.: aterosklerozę ir trombu susidarymą). Nors tai galingas įrankis, tačiau biomedicinoje nėra pakankamai išvystytas. Buvo įrodyta, kad kraujagyslėse tėkmės (srauto) elgesys priklauso nuo pačios geometrijos t. y. kaip kraujagyslė šakojasi, lankstosi ar siaurėja. Paprasti kraujotakos modeliai apima nusistovėjusį (*angl. steady*) tekėjimą. Tačiau pati kraujo apytakos sistema yra pulsuojanči, nepastovios (*angl. unsteady*) tėkmės. Tai reiškia periodišką slėgio trikdymą, kuris turi reikšmingą poveikį: tėkmės greičiui, įtempių pasiskirstymui [7].

Per pastaruosius dešimtmečius, atlikti tyrimai (Ku, 1985; Glagov, 1988) parodė kraujagyslių geometrijos ir hemodinamikos jėgų įtaką kraujagyslių patologijai. Manoma, kad kraujagyslės sienelių šlyties įtempiai svarbūs reguliuojant arterijos struktūrą (Caro, 1971; Giddens, 1993; Gnaso, 1997; Malek, 1999). Alternatyvus metodas, skaičiuoti kraujagyslių sienelių šlyties įtempiams, yra gautus magnetinio rezonanso vaizdų struktūros duomenis ir greičio matavimus naudoti kaip kraštines sąlygas Navje – Stokso lygtyse (Long, 2000; Steinman, 2002). Tokios lygtys sprendžiamos CFD programinių paketų pagalba [8]. CFD padeda priartinti individualios kraujagyslės mechaninius parametrus prie dirbtinai sukurtų. Kraujagyslių modeliai kuriami atsižvelgiant į slėgio, tėkmės greičio priklausomybę nuo mechaninių parametrų (t. y. sienelių storio, lankstumo, diametro) [8], [9]. Paprastai kraujagyslių modeliai tampa sudėtingi, kai norima įvertinti vyraujančius fizikinius reiškinius. Todėl modelyje daromos tam tikros prielaidos, kurios leidžia supaprastinti uždavinį (žr. 1.3 pav.).



1.3 pav. Modelio prielaidų grupės [9]

Prielaidos apie kraujo savybes: niutoninis ar neniutoninis skystis, spūdas ar nespūdas, klampus ar ne klampus. Prielaida apie kraujo judėjimą – laminarinis ar turbulentinis srautas, kraujagyslė simetriška ar nesimetriška. Kraujagyslės sienelės prielaida įvertina: ar pastovus skerspjūvis, ar plona (ar stora) kraujagyslė, ar įlinkusi, ar įtvirtinta, ar yra pradiniai įtempimai, ar nespaudžiama [9].

Yra nemažai sukurta kraujagyslių modelių, kurie sprendžia Navje – Stokso lygtis. Paprastesnį kraujagyslės slėgio – tėkmės priklausomybės modelį yra sukūrę O. Barnea ir G. Gillion. Modelyje naudojami slėgio ir tėkmės parametrai, įvertinant kaip laike kinta trinties ir tamprumo koeficientai. Slėgio ir tėkmės ryšys svarbus norint nustatyti ar kraujagyslės segmento varža yra normali ar padidėjusi [10].

Sudėtingesni kraujagyslių CFD modeliai paremti skaitinėmis schemomis. G. Pontrelli sukūrė nepastovios kraujo tėkmės modelį vamzdyje. Jis palygino tris modelius kraujui: apibendrintą niutoninio skysčio (*angl. Generalized newtonian model (GN)*), Oldroyd–B (*angl. Oldroyd–B model (OB)*) bei apibendrintą Oldroyd–B (*angl. Generalized Oldroyd–B (GOB)*). Skaitiniai rezultatai gaunami naudojant neišreikštinę baigtinių skirtumų metodo (*angl. implicit finite difference method*) schemą [11]. Yra sprendžiamos nespūdžios Navje – Stokso lygtys naudojant baigtinių tūrių metodą (*angl. finite volume method*) su išreikštine MacCormack schema [12]. X. Y. Luo ir T. J. Pedley tyrinėjo skysčio tėkmę suspaustame tampriame vamzdyje. Dvimačiame modelyje analizuojamas pastovios tėkmės sprendinys (Luo ir Pedley, 1995). Taip pat yra sukūrę suspausto vamzdžio modelį, kuriame tėkmė nepastovi. Tai atliko naudodami baigtinių elementų algoritmą (*angl. finite element algorithm*). Poslinkių, slėgių reikšmės randamos pritaikius Galiorkino aproksimaciją [13].

Baigtinių elementų metodas (BEM) yra plačiausiai taikomų metodų, skirtų mechaninių, hidraulinių, šiluminių ir kitokių fizikinių sistemų uždaviniams spręsti bei dinaminiam procesams modeliuoti. Metodo algoritmas tinka spręsti įvairių sistemų uždaviniams, kurie fizikiniu požiūriu yra skirtingi. Todėl nebereikia gilintis į daugelį tradicinių analizinių lygčių sprendimo metodus. Dėl šios priežasties jis paplito skysčių mechanikoje. Skaičiavimai baigtinių elementų metodu atliekami tokiais etapais [14]:

- geometrinės formos sritis pavaizduojama baigtiniu nesudėtingos formos elementų skaičiumi;
- kiekvieno elemento srityje diferencialinė lygtis dalinėmis išvestinėmis apytiksliai pakeičiama algebrinių lygčių sistema;
- elementų algebrinės lygtys jungiamos į bendrą vienareikšmiškai išsprendžiamą algebrinių lygčių sistemą.

BEM tinkamo sudarymą, elementų diskretizavimą laike (išreikštines ir neišreikštines schemas) yra aprašęs R. Löhner (2008) [15]. O. C. Zienkiewich ir kt. (2005) aptarė lygtis skysčių dinamikoje, baigtinių elementų aproksimaciją [16]. Darbe pasirinktas BEM, aprašytas O. C. Zienkiewich knygoje.

## 1.4. DARBE SPRENDŽIAMU UŽDAVINIAI

Darbo tikslas – baigtinių elementų metodu sukurti skaitinį modelį ir skaičiavimo algoritimą slėgio impulso sklidimo kraujagyslėse apskaičiavimui.

Darbo uždaviniai:

- Atlikti skysčių mechanikos lygčių ir jų kraštinių sąlygų analizę.
- Sudaryti pilną stacionarios tėkmės kraujagyslių tinkle modelį ir skaičiavimo algoritimą.
- Sudaryti skysčių dinamikos lygčių 1D terpėje skaitinio sprendimo Teiloro – Galiorkino metodu analizę ir algoritimą;
- 1D tėkmės lygčių išplėtimas šakotai 1D struktūrai;

## 1.5. PROGRAMINĖ ĮRANGA

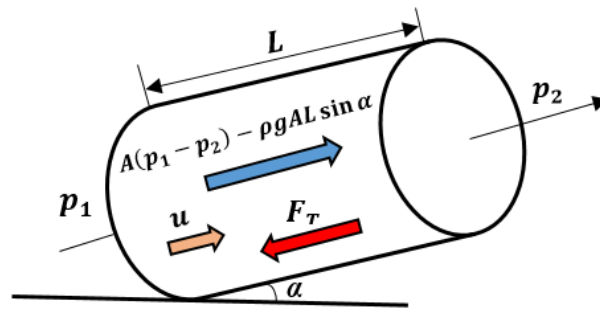
Daugumos baigtinių elementų metodo (BEM) pagrindu sukurtų programų (ANSYS, MSC, ALGOR, ABAQUS ir kt..) vartotojo sąsajos orientuotos vartotojui – inžinieriui. Jose dominuoja inžinerinis mąstymo pradai, kuris gan „laisvai leidžia“ interpretuoti pagrindines matematinės lygtis ir priklausomybes, kurių pagrindu buvo gauti tiriami modeliai (praktikoje dažniausiai pasitaikančiomis situacijomis). Toks BEM suvokimas, kai kuriose situacijose virsta trūkumu. Įvedus į tiriamąją sistemą anksčiau nenumatytą narį ar situaciją, gali kilti sunkumų ją pavaizduoti modelyje [14]. Supratimui matematinės ir loginės BEM veiksmų sekos pasirinkta programa MATLAB.

MATLAB – tai viena seniausių ir galingiausių specialios paskirties kompiuterinių programų. MATLAB galima dirbti: dialoginiu režimu arba programiniu, kai uždavinio sprendimo algoritmas užrašomas MATLAB programavimo kalba ir saugomas M – faile. M – failai vykdomi tik juos sukompilavus arba padarius tiesioginį kreipimąsi iš darbinio lango arba kitos programos.

## 2. TEORINĖ DALIS

### 2.1. STACIONARIOS TĖKMĖS APSKAIČIAVIMO MODELIS

Pateiksime vienmatį (1D) stacionarios tėkmės baigtinių elementų modelį. Laikome, kad nagrinėjamas skystis nespūdas t. y. jo debitas  $w$  kiekviename vamzdžio elemento taške yra vienodas.



**2.1 pav.** Vamzdžio diskretus elementas

Tėkmę skatinančių ir jai besipriešinančių jėgų pusiausvyros lygtis:

$$A(p_1 - p_2) - \rho g A L \sin \alpha - F_T = 0. \quad (2.1)$$

Čia  $A$  – skerspjūvio plotas,  $p_1$  – „įeinančio“ slėgio reikšmė,  $p_2$  – „išeinančio“ slėgio reikšmė,  $\rho$  – tankis,  $g$  – laisvojo kritimo pagreitis,  $L$  – diskretaus elemento ilgis,  $F_T$  – pasipriešinimo (trinties) jėga.

Jėgų pusiausvyrų lygtis (2.1) tokia pat, tiek laminarinės, tiek turbulentinės tėkmės atveju. Norint nustatyti, kokia tėkmė vyrauja vamzdžio elemente, skaičiuojamas Reinoldso skaičius  $Re$  (1.1). Geriausiai skysčio pasipriešinimą tėkmei aprašo *Darcy–Weishbach* empirinė išraiška (2.2) [17]:

$$\Delta p = f \frac{L}{D} \frac{\rho u |u|}{2}, \quad (2.2)$$

čia  $\Delta p$  – slėgių skirtumas,  $D$  – vamzdžio skersmuo,  $u$  – vidutinis tėkmės greitis,  $f$  – *Darcy* trinties koeficientas, kuris priklauso nuo tėkmės pobūdžio (2.3). Abiem tėkmės atvejais pasipriešinimo jėgos išraiška  $F_T$ , yra tokia pati, kai panaudojamas *Darcy* trinties koeficientas.

$$f = \begin{cases} \frac{64}{Re}, & \text{tėkmė laminarinė.} \\ \frac{0,316}{(Re)^{0,25}}, & \text{tėkmė turbulentinė.} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$u = \frac{w}{\rho A}. \quad (2.4)$$

Sprendžiant (2.1) lygtį greičiai keičiami (2.4) debitais  $w$ , kadangi konstrukcijos mazguose turės būti tenkinama debitų pusiausvyros sąlyga. Toliau sudarysime nusistovėjusios tėkmės BE lygtį:

$$A(p_1 - p_2) - \rho g L^e \sin \alpha - A f \frac{\rho L^e}{2D} u |u| = 0.$$

$$(p_1 - p_2) - \rho g L^e \sin \alpha - f |u| \frac{\rho L^e}{2D} \frac{w}{\rho A} = 0.$$

$$\frac{1}{f |u|} \frac{2DA}{L} (p_1 - p_2) - \frac{1}{f |u|} \frac{2DA}{L} \rho g L^e \sin \alpha = w.$$



Kairiame gale debitas įeinantis (teigiamas), o dešiniame išeinantis (neigiamas). Todėl ta pati lygtis užrašoma su priešingais ženklais abiejuose elemento galuose. Gaunama (2.5) elemento lygtis.

$$\frac{1}{f|u^e|} \frac{2DA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{f|u^e|} \frac{2DA}{L^e} \rho g L \sin \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.5)$$

$$[K^e]\{P^e\} = \{S^e\} + \{W^e\}.$$

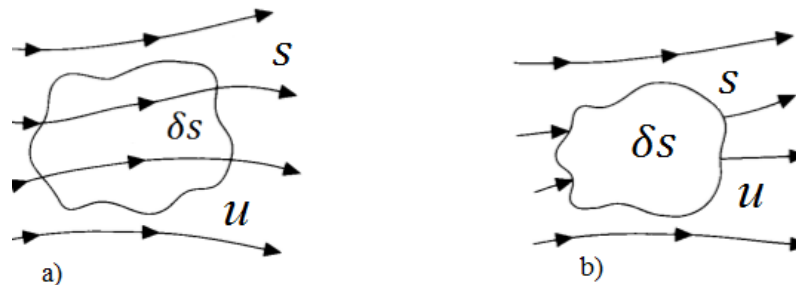
Čia  $[K^e]$  – hidraulinio laidumo matrica,  $\{P^e\}$  – mazgų slėgių vektorius,  $\{S^e\}$  – aukščių skirtumo sąlygotas debitų vektorius,  $\{W^e\}$  – vektorius pažymi nežinomus debitus, patenkančius iš kaimyninių elementų. Toliau surenkama konstrukcijos lygtis (2.6).

$$[K]\{P\} = \{S\} + \{W\}. \quad (2.6)$$

## 2.2. TĖKMĖS LYGČIŲ IŠVEDIMO PRINCIPAI

Turime uždara atskaitos tūrį (diferencialinį skysčio elementą)  $\delta s$  sudarytą baigtinio srauto regione, atskaitos paviršių  $S$ , kuris apibrėžiamas kaip uždaras paviršiaus ribojantis tūrį.

Atskaitos tūris  $\delta s$  gali būti fiksuotas erdvėje t. y. skystis prateka pro jį (žr. 2.2 pav. a) dalis). Atskaitos tūris fiksuotas erdvėje laikui bėgant nekinta. Skirtingais laiko momentais jame yra vis kitos skysčio dalelės. Toks priėjimas prie tėkmės lygčių vadinamas konservatyviuoju priėjimu. Lygtys iškart gaunamos susietos su nejudančiomis koordinatinių sistemos ašimis [14].



**2.2 pav.** Tėkmės lygčių išvedimo principai: a) atskaitos tūris fiksuotas b) atskaitos tūris juda kartu su tėkme [18]

Esant nefiksuotam atskaitos tūriui erdvėje, jis susietas su tekančio skysčio dalelėmis. Tai nekonservatyvusis priėjimas. Užrašant fizikos dėsnių priklausomybes, jos galioja su atskaitos tūriu judančioms skysčio dalelėms, t. y. nėra tiesiogiai susietos su nejudančios atskaitos koordinatinių sistemos ašimis. Sąsaja su nejudančios atskaitos koordinatinių sistemos ašimis gaunama, taikant pilnąją išvestinę pagal laiką:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (2.7)$$

### 2.2.1. KONSERVATYVUSIS PRIĖJIMAS

Masės prieaugis per laiką  $dt$  skaičiuojamas nagrinėjame fiksuotame tūryje, imama dalinė išvestinė:

$$A\rho u dt - A \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial s} \delta s \right) dt = A\delta s \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \quad /: A\delta s dt$$

Gaunama ne trūkumo lygtis:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial s} = 0$ .

Kai skystis nespūdas tankis  $\rho$  yra pastovus t. y.  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial s} = 0\right)$ .

Judesio kiekio diferencialinė lygtis:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u u)}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{f}{2D} \rho u |u| - \rho g s_z.$$

Čia  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}$  – inercijos narys,  $\frac{\partial(\rho u u)}{\partial s}$  – konvekcijos narys,  $\frac{\partial p}{\partial s}$  – tėkmę skatinantis narys,  $\frac{f}{2D} \rho u |u|$  – klamos narys, tūriniai poveikiai dėl gravitacijos.

$$\text{žym. } U \equiv \rho u.$$

Dydžius  $u$  ir  $U$  patogiu naudoti, kai skystis spūdas, t. y. kai jo tankis kinta. Gauname vienmatės tėkmės lygtis:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(Uu)}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{f}{2D} U|u| + \rho g s_z = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \end{cases}. \quad (2.8)$$

### 2.2.2. NEKONSERVATYVUSIS PRIĖJIMAS

Skysčio diferencialinis 1D elementas juda drauge su tėkme. Kadangi visą laiką nagrinėjamas tos pačios skysčio dalelės, bendra jų masė laikui bėgant nekinta. Imama pilnoji išvestinė, skerspjūvio plotas  $A$  pastovus.

$$\frac{D(A\rho\delta s)}{Dt} = 0 /: A\delta s$$

$$\frac{1}{\delta s} \left( \delta s \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D(\delta s)}{Dt} \right) = 0.$$

$$\text{žym. } \frac{1}{\delta s} \frac{D(\delta s)}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Gaunama ne trūkumo lygtis:  $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial s} = 0$ .

Judesio kiekio diferencialinė lygtis:  $-A dp - A\delta s \rho g s_z - F_T = A\delta s \rho \frac{Du}{Dt}$ .

Čia  $\frac{Du}{Dt}$  – pilnoji greičio išvestinė,  $A\delta s \rho$  – skysčio masė (pastovi, pagal masės tvermės dėsnį),

$$F_T = Af \frac{L}{2D} \rho u |u|.$$

$$\begin{aligned}
-Adp - A\rho g s_z ds - Af \frac{ds}{2D} \rho u |u| &= Ads \left( \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial s} \right). \\
-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g s_z - \frac{f}{2D} \rho u |u| &= \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial s} + \rho u \frac{\partial u}{\partial s}. \\
\frac{D(\rho u)}{Dt} &= -\rho u \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{f}{2D} \rho u |u| - \rho g s_z.
\end{aligned}$$

Gaunamos vienmatės (1D) tėkmės lygtys:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{DU}{Dt} &= -U \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{f}{2D} U |u| - \rho g s_z \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial s} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

### 2.3. TAMPRIAI SPŪDŽIOS TĖKMĖS MATEMATINIS MODELIS

Nenusistovėjusiai tėkmei aprašyti naudosime (2.9) lygtis.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{DU}{Dt} &= -U \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{f}{2D} U |u| - \rho g s_z \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial s} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Tėkmės tamprumas reiškia, kad santykinis tankio  $\rho$  padidėjimas tiesiogiai proporcingas slėgio padidėjimui (2.10).

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\hat{K}} dp. \quad (2.10)$$

$$\hat{K} = K \left( 1 + \frac{KD}{hE} \right)^{-1}. \quad (2.11)$$

Čia  $\hat{K}$  – ekvivalentinis skysčio tūrinis standumo modulis,  $K$  – skysčio tūrinis standumo modulis,  $h$  – vamzdžio sienelės storis,  $E$  – vamzdžio Jungo modulis,  $c$  – išilginės bangos greitis.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{\hat{K}} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (2.12)$$

$$c = \sqrt{\frac{\hat{K}}{\rho}}.$$

Gauname:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{DU}{Dt} &= -U \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{f}{2D} U |u| - \rho g s_z \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial s} \end{aligned} \right. \quad (2.13)$$

Esant mažai spūdziai tampriajai tėkmei gaunama (2.14) lygtys:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{DU}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{f}{2D} U |u| - \rho g s_z \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial s} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (2.14)$$

### 3. MAŽAI SPŪDŽIOS TAMPRIOSIOS TĖKMĖS BE MODELIS

Sprendžiama diferencialinių lygčių sistema (2.14):

$$\begin{cases} \frac{DU}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{f}{2D} U|u| - \rho g s_z \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \end{cases}.$$

Priimamos prielaidos esant tiesiškai tampriam spūdumui:

- Tampraus spūdumo:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}$ ;
- Tankis laikomas pastoviu dydžiu:  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t}$ ;

#### 3.1. TEILORO SKIRTUMINĖ FORMULĖ

Sprendžiame uždavinį, kuris priklauso nuo laiko.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = f(t, \phi(t)).$$

Integruodami per laiko žingsnį  $\Delta t$  gauname:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \int_t^{t+\Delta t} f(t, \phi(t)) dt,$$

kur viršuje esantis  $n$  žymi dydį, įvertintą laiko momentu  $t$ ,  $n + 1$  – dydį, įvertintą laiko momentu  $t + \Delta t$ . Jeigu mes aproksimuosime integralą  $\phi$  Teiloro eilute pradinio laike  $t$  gausime išreikštinę schemą [16]:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \frac{\partial \phi^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3).$$

Taikome Teiloro skirtuminę formulę  $\phi^{n+1} - \phi^n$  pilnajai išvestinei (t. y. kai kintant laikui, kinta ir poslinkis  $s$ ):  $\frac{DU}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{f}{2D} U|u| - \rho g s_z$ . Apytikslis sprendinys yra (3.1):

$$\frac{U_s^{t+\Delta t} - U_s^t}{\Delta t} \approx -\frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{s-\Delta s}^t - \frac{f}{2D} U|u| \Big|_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \rho g s_z \Big|_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}}. \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} \Big|_{s-\Delta s}^t \approx \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_s^t - \Delta s \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \Big|_s^t.$$

$$\frac{f}{2D} U|u| \Big|_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \approx \frac{f}{2D} U|u| \Big|_s^t - \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{f}{2D} U|u| \right) \Big|_s^t \cdot \frac{\Delta s}{2}.$$

$$\rho g s_z \Big|_{s-\frac{\Delta s}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \approx \rho g s_z \Big|_s^t - \rho g \frac{\partial s_z}{\partial s} \Big|_s^t \frac{\Delta s}{2}.$$

Nuo to kuriuo laiko momentu ir kuriame erdvės taške žingsnio bėgyje insime greičio reikšmę, priklauso skaitinės schemos savybės. Pasirenkame:  $\Delta s \approx u|_s^t \Delta t$ .

$$U_{s-\Delta s}^t = U_s^t - \frac{\partial U}{\partial s} \Big|_s^t \cdot \Delta s + \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \Big|_s^t \frac{\Delta s^2}{2}.$$

$$\frac{U_s^{t+\Delta t} - U_{s-\Delta s}^t}{\Delta t} = \frac{U_s^{t+\Delta t} - U_s^t + \frac{\partial U}{\partial s} \Big|_s^t \cdot \Delta s - \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \Big|_s^t \frac{\Delta s^2}{2}}{\Delta t} = \frac{U_s^{t+\Delta t} - U_s^t}{\Delta t} + u \frac{\partial U}{\partial s} \Big|_s^t - \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \Big|_s^t \frac{\Delta t \cdot u^2}{2}.$$

$$U_s^{t+\Delta t} \approx U_s^t - \Delta t \left( u \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_s^t + \frac{f}{2D} U|u| \Big|_s^t + \rho g s_z \Big|_s^t \right) + \frac{\Delta t^2}{2} u \frac{\partial}{\partial s} \left( u \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_s^t + \frac{f}{2D} U|u| \Big|_s^t + \rho g s_z \Big|_s^t \right) + \Delta t^2 u \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \Big|_s^t - \Delta t \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_s^t. \quad (3.2)$$

Iš antros lygties:

$$\Delta \rho = \frac{1}{c^2} \Delta p = -\Delta t \frac{\partial U_s^t}{\partial s}. \quad (3.3)$$

Toliau pateiksime formules, skirtas apskaičiuoti prieaugius žingsnio metu. Pažymėkime:

$$\Delta U^* = -\Delta t \left( u \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_s^t + \frac{f}{2D} U|u| \Big|_s^t + \rho g s_z \Big|_s^t \right) + \frac{\Delta t^2}{2} u \frac{\partial}{\partial s} \left( u \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_s^t + \frac{f}{2D} U|u| \Big|_s^t + \rho g s_z \Big|_s^t \right), \quad \Delta U^{**} = \Delta t^2 u \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \Big|_s^t - \Delta t \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_s^t.$$

$$U_s^{t+\Delta t} = U_s^t + \Delta U^* + \Delta U^{**}. \quad (3.4)$$

Pirmiausia randame  $\Delta U^*$ . Tada atnaujiname slėgio reikšmes (3.3). Trečiuoju žingsniu skaičiuojame  $\Delta U^{**}$ . Galiausiai pritaikome (3.4) formulę.

### 3.2. BAIGTINIŲ ELEMENTŲ MODELIO SUDARYMAS

$L$  ilgio sritis sudalinama į baigtinius elementus. Elementai tarpusavyje jungiasi mazgais. Baigtinio elemento lygtis gaunama pritaikius Galiorkino aproksimaciją.

$$\left( A^e \int_0^L N_u^T N_u ds \right) \Delta U^e = A^e \int_0^L N_u^T \left( -\Delta t \left( u \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_s^t + \frac{f}{2D} U|u| \Big|_s^t + \rho g s_z \Big|_s^t \right) + \frac{\Delta t^2}{2} u \frac{\partial}{\partial s} \left( u \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_s^t + \frac{f}{2D} U|u| \Big|_s^t + \rho g s_z \Big|_s^t \right) + \Delta t^2 u \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \Big|_s^t - \Delta t \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_s^t \right) ds.$$

$$\text{Čia } U = N_u U^e = \left[ 1 - \frac{s}{L} \quad \frac{s}{L} \right] \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \end{Bmatrix}, \quad u = N_u u^e = \left[ 1 - \frac{s}{L} \quad \frac{s}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}, \quad p = N_p P^e = \left[ 1 - \frac{s}{L} \quad \frac{s}{L} \right] \begin{Bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{Bmatrix}. \quad N_u -$$

formos funkcijos matrica, kuri naudojama interpoliavimui mazguose. Toliau pateiksime BE matricas:

$$M^e = A^e \int_0^L N_u^T N_u ds = \frac{A^e L}{3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix};$$

$$\frac{u\partial U}{\partial s} : \int_0^L N_u^T u^{eT} \frac{\partial(N_u^T N_u)}{\partial s} ds U^e = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -u_1^e - \frac{1}{2}u_2^e & \frac{1}{3}u_2^e + u_1^e \\ -u_2^e - \frac{1}{2}u_1^e & \frac{1}{2}u_1^e + u_2^e \end{bmatrix} U^e = C^e U^e;$$

$$\frac{f}{2D} U|u| : |u_{av}^e| \frac{f}{2D} \int_0^L N_u^T N_u ds U^e = |u_{av}^e| \frac{f}{6D} LA^e \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} U^e = K^e U^e;$$

$$\rho g s_z A^e : g A^e s_z^e \int_0^L N_u^T N_p ds \rho^e = \frac{g A^e L s_z^e}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \rho^e = F^e \rho^e;$$

$$\frac{u\partial}{\partial s} \left( \frac{u\partial U}{\partial s} \right) : \int_0^L N_u^T u \frac{\partial}{\partial s} \left( u \frac{\partial U}{\partial s} \right) ds = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -u_2^2 & u_2^2 \end{bmatrix} U^e + \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -u_1^2 & u_1^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^e -$$

$$\frac{1}{3L} \begin{bmatrix} 2u_1^2 - u_1 u_2 - u_2^2 & -\frac{(u_1 - u_2)^2}{2} \\ -\frac{(u_1 - u_2)^2}{2} & 2u_2^2 - u_1 u_2 - u_1^2 \end{bmatrix} U^e = -K_u^e U^e;$$

$$\frac{f}{2D} u \frac{\partial}{\partial s} (U|u|) : \frac{f}{2D} \int_0^L N_u^T u \frac{\partial}{\partial s} (U|u|) ds = |u_{av}^e| \frac{f}{2D} \int_0^L N_u^T N_u u^e \frac{\partial N_u}{\partial s} dx U^e =$$

$$= |u_{av}^e| \frac{f}{6D} \begin{bmatrix} -u_1 - \frac{1}{2}u_2 & u_1 + \frac{1}{2}u_2 \\ -\frac{1}{2}u_1 - u_2 & \frac{1}{2}u_1 + u_2 \end{bmatrix} U^e = K_\tau^e U^e;$$

$$u \frac{\partial}{\partial s} (\rho g s_z) A^e : g A^e s_z^e \int_0^L N_u^T N_u u^e \frac{\partial N_p}{\partial s} dx \rho^e = g A^e s_z^e \begin{bmatrix} -u_1 - \frac{1}{2}u_2 & u_1 + \frac{1}{2}u_2 \\ -\frac{1}{2}u_1 - u_2 & \frac{1}{2}u_1 + u_2 \end{bmatrix} \rho^e = F_s^e \rho^e;$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} : A^e \int_0^L N_p^T \frac{\partial N_p}{\partial s} ds P^e = \frac{A^e}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} P^e = C_p^e P^e;$$

$$u \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} : A^e \int_0^L N_p^T u \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} ds = \frac{A^e}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -u_2 & u_2 \end{bmatrix} P^e + \frac{A^e}{L} \begin{bmatrix} u_1 & -u_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^e - \frac{A^e}{L} \begin{bmatrix} u_1 & -u_1 \\ -u_2 & u_2 \end{bmatrix} P^e = -K_{i\varphi}^e P^e;$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} : A^e \int_0^L N_p^T \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} ds = A^e N_p^T \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_0^L;$$

$$-A^e \int_0^L \frac{\partial N_p^T}{\partial s} \frac{\partial p}{\partial s} ds = \frac{A^e}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} P^e + \frac{A^e}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^e - \frac{A^e}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} P^e = -K_p^e P^e;$$

Gauname baigtinių elementų lygtį (3.4) formulei :

$$M_u^e \Delta U^* = -\Delta t (C^e U^e + K^e U^e + F^e \rho^e) + \frac{\Delta t^2}{2} (-K_u^e U^e + K_\tau^e U^e + F_s^e \rho^e).$$

Slėgių atnaujinimui:  $\frac{1}{c^2} M_p^e \Delta P = -\frac{\Delta t}{A^e} C_p^e U_s^t.$

$$M_u^e \Delta U^{**} = -\Delta t C_p^e P^e - \Delta t^2 K_{i\varphi}^e P^e.$$

### 3.3. KONSTRUKCIJOS LYGČIŲ SURINKIMO YPATUMAI

3.2 aprašytame BE surinkimą galime taikyti tada, kai konstrukcija yra vienas vamzdis t. y. elementai jungiami nuosekliai. Esant šakotai konstrukcijai taip rinkti lygčių negalėsime. Debitų reikšmių mazge suderinimui jungiant nuosekliai 2 elementus, imamas jungimo mazgui atitinkančių elementuose gautų reikšmių aritmetinis vidurkis (toks pats rezultatas gaunamas, surenkant konstrukcijos matricas). Esant šakotam jungimui reikia pakoreguoti jungiamam mazgui atitinkančias debitų prieaugių reikšmes taip, kad mazge būtų tenkinama debitų pusiausvyros sąlyga [14]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_i)^2 \\ \Delta U_2^1 + \varepsilon_1 - \Delta U_1^2 - \varepsilon_2 - \Delta U_1^3 - \varepsilon_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\varepsilon} \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon \\ Q\varepsilon = -Q\Delta U \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon + (\varepsilon^T Q^T + Q^T \Delta U) \lambda \\ Q\varepsilon + Q\Delta U = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I\varepsilon + Q^T \lambda = 0 \\ Q\varepsilon + Q\Delta U = 0 \end{array} \right.$$

$$\varepsilon = -Q^T \lambda; -QQ^T \lambda + Q\Delta U = 0; \lambda = (QQ^T)^{-1} Q\Delta U;$$

$$\varepsilon = -Q^T (QQ^T)^{-1} Q\Delta U$$

Pakoreguotas prieaugis  $\Delta \tilde{U}$ ,  $\lambda$  – lagranžo daugiklis.

$$\Delta \tilde{U} = (I - Q^T (QQ^T)^{-1} Q) \Delta U$$

$$Q = [1 \quad -1 \quad -1]$$

$$\Delta \tilde{U} = \Delta U + \varepsilon$$

## 4. TIRIAMOJI DALIS

Sprendžiama mažai spūdzios tamprios tėkmės lygčių sistema BE metodu aprašyta 3 skyrelyje:

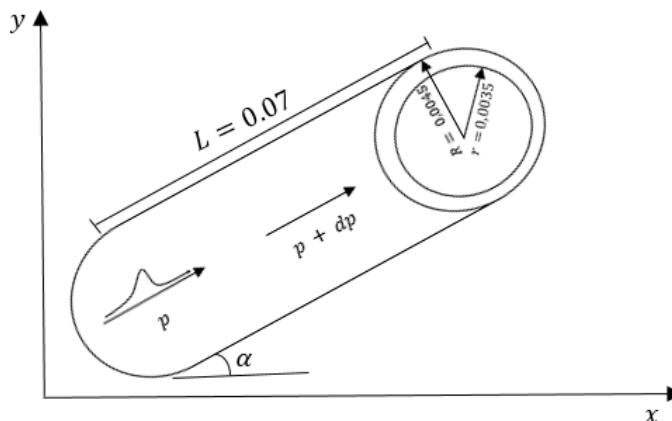
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{DU}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{f}{2D} U|u| - \rho g s_z \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0 \end{array} \right. .$$

Analizuojamos kraujagyslės parametrai pateikti 4.1 lentelėje, kraujo parametrai parinkti iš 1.2 lentelės.

**4.1 lentelė.** Modeliuojamos kraujagyslės parametrai

Kraujagyslės ilgis	0,07 m
Išorinis spindulys	0,0045 m
Vidinis spindulys	0,0035 m
Kraujagyslės sienelės storis	0,001 m
Tėkmės spindžio diametras	0,008 m
Kraujagyslės jungo modulis	10000000 Pa
Kraujo tūrinis standumo modulis	2200000000 Pa
Pradinis slėgis	3990 Pa
Slėgio impulso banga	$9975 \cdot \sin(10\pi t)$ Pa

Slėgio impulsas skaičiuojamas atžvilgiu pradinio nominalaus slėgio ( žr. 1.2 pav, 1.1 lentelė). Sužadinamos slėgio bangos amplitudė yra 9975 Pa ( 75 mmHg). Darbe kraujo tūrinis standumo modulis  $K$  yra artimas vandens ( $20^\circ$ ) tūrinio standumo moduliui [20]. Pats kraujo tamprumas yra žymiai mažesnis nei kraujagyslės sienelės sudaromas standumas, todėl kraujo tamprumas mažai įtakoja slėgio bangos sklidimą. 4.1 pav. pateikta kraujagyslės scheminis modelis. Pavaizduota kraujagyslė analizuojama, kai su horizontu sudaro kampus:  $\alpha = 0^\circ, \alpha = 60^\circ, \alpha = -60^\circ$ . Skaičiuojamas poslinkis išilgai kraujagyslės.

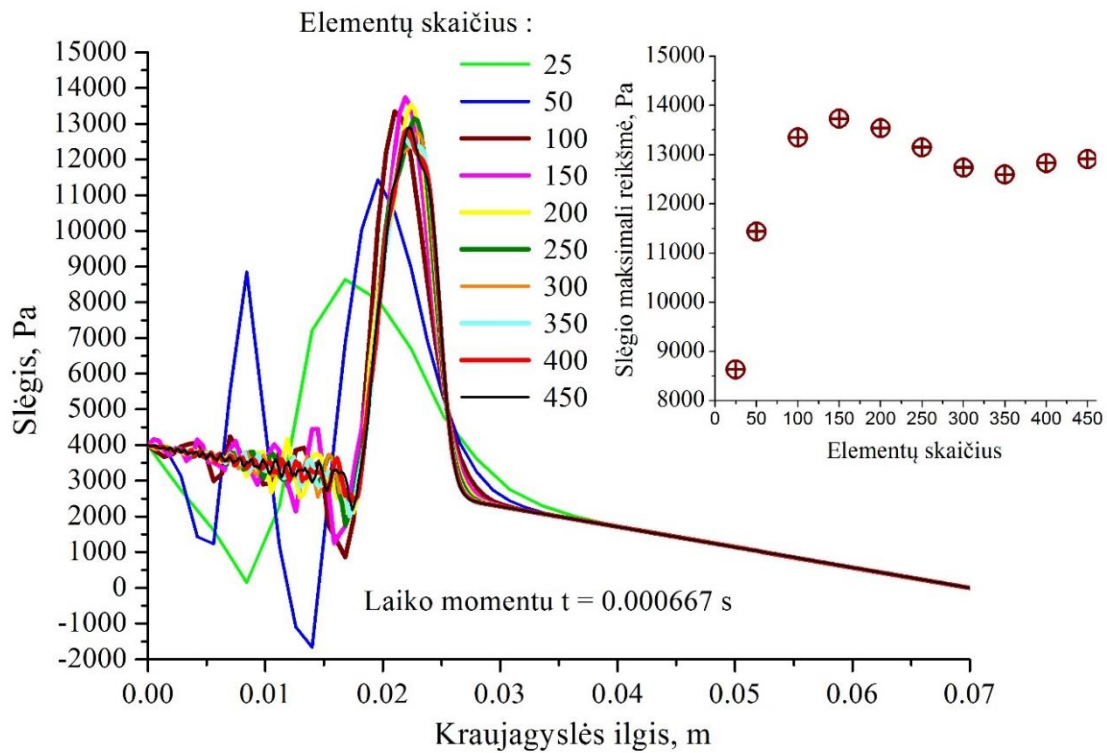
**4.1 pav.** Analizuojama kraujagyslė

#### 4.1. BAIGTINIŲ ELEMENTŲ MODELIS NEŠAKOTAI STRUKTŪRAI

Baigtinių elementų metodu sprendžiamos lygčių sistemos sprendinys susietas su tinkleliu. Tad svarbu nusistatyti tinkamą tinklelio dydį. Vienas iš būdų yra sekti slėgio bangos piko judėjimą. 4.2 pav. pateikta slėgio piko (maksimalios reikšmės) priklausomybė nuo tinklelio smulkumo, kai kraujagyslė yra horizontali (nepakreipta). Slėgio impulso bangą seka skaitinis triukšmas. Matome, kad esant stambiam 25 ir 50 elementų skaičiui, slėgio pikų reikšmės yra ženkliai mažesnės. Didinant elementų skaičių slėgio pikų reikšmės konverguoja, skaitinis triukšmas mažėja. Esant

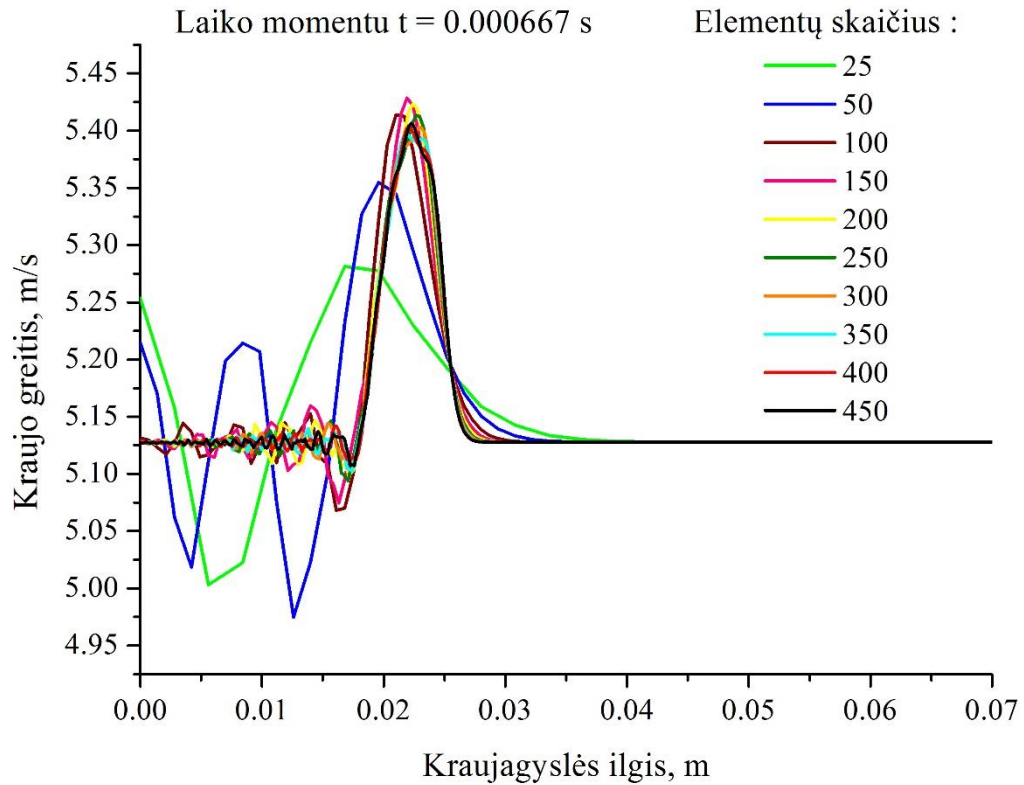


elementų skaičiui nuo 100 iki 450, slėgio pikai svyruoja nuo 12596 iki 13730 Pa, standartinis nuokrypis 378 Pa. Tokie nuokrypiai laikomi inžineriškai priimtini ( $< 5\%$ ).

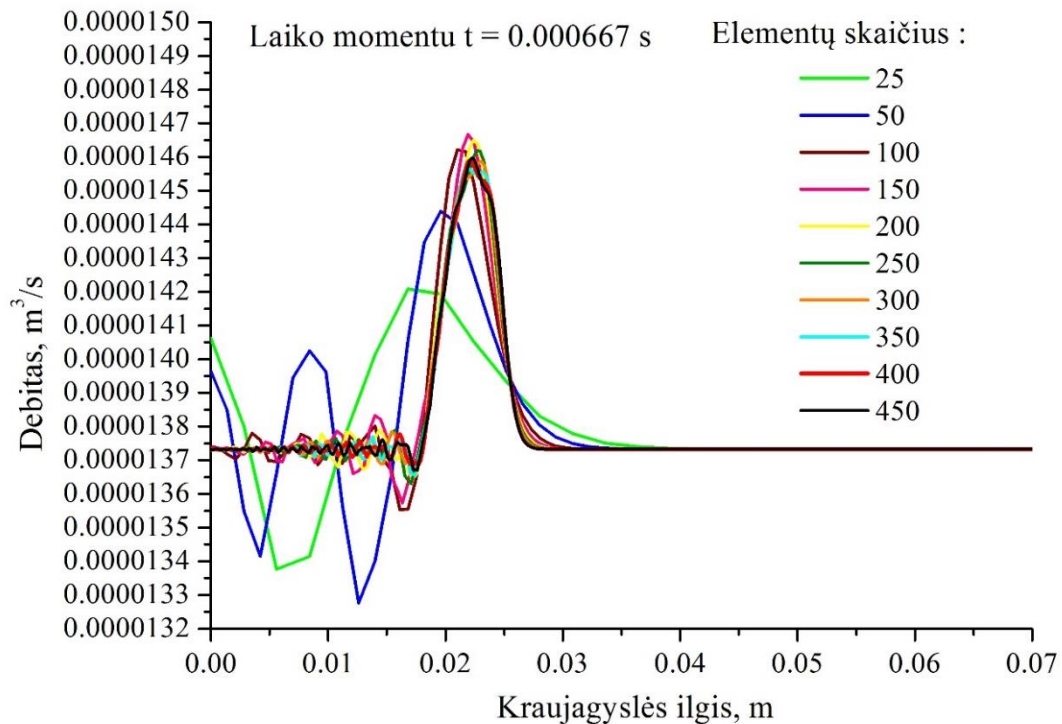


**4.2 pav.** Slėgio impulso sklidimas kraujagyslėje, laiko momentu  $t = 0,000667$ s,  $\alpha = 0^\circ$

4.3 pav. pavaizduotos įgyjamos greičio vertės kraujagyslės ilgyje. Greitis kraujagyslėje 5,125 m/s, kai nėra slėgio impulso bangos. Ties slėgio impulsu kraujagyslėje greitis padidėja iki 5,41 m/s (esant 250 elementų tinkleliui).



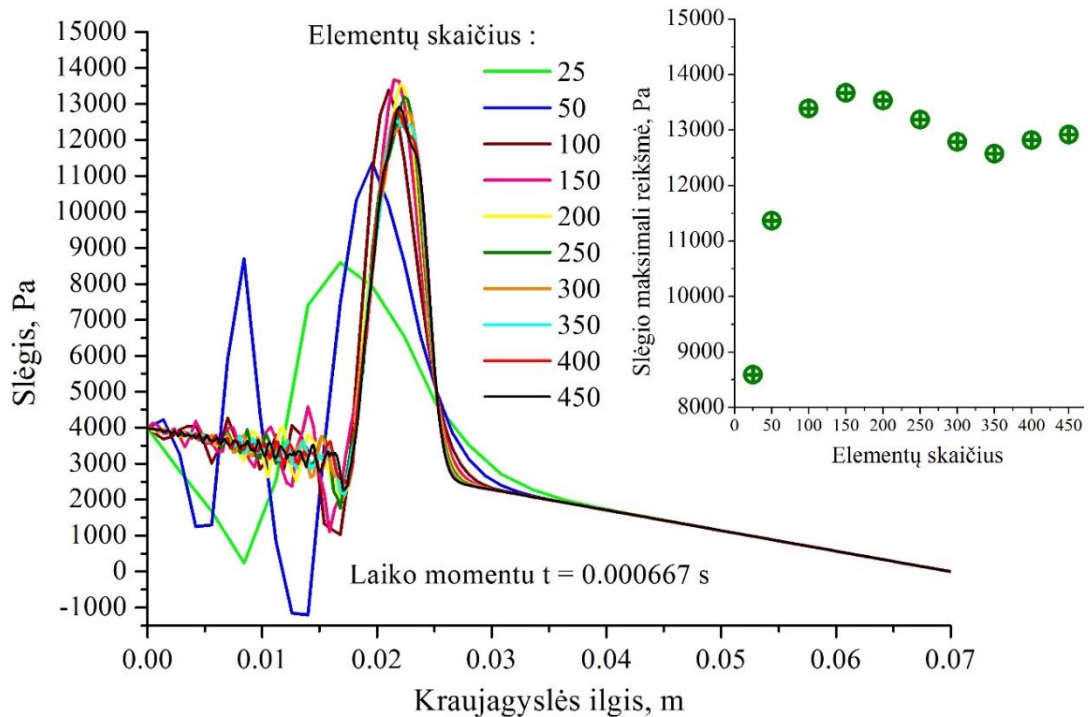
**4.3 pav.** Kraujo greitis kraujagyslėje laiko momentu  $t = 0,000667s$ ,  $\alpha = 0^\circ$



**4.4 pav.** Debitai kraujagyslėje, laiko momentu  $t = 0,000667s$ ,  $\alpha = 0^\circ$

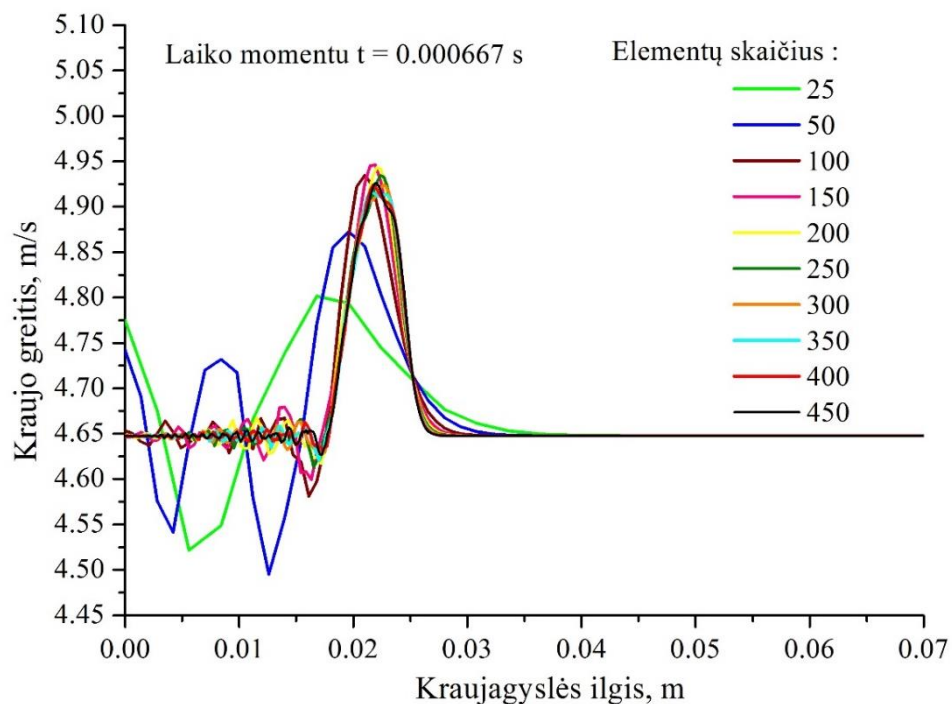
Modeliuotos kraujagyslės skerspjūvio plotas yra pastovus t. y. kraujagyslė nesiaurėjanti. Skerspjūvio plotas yra  $5,0265 \cdot 10^{-5} m^2$ . Esant pastoviai tėkmei debitas yra  $1,373 \cdot 10^{-5} m^3/s$ . Maksimalus debitas esant 250 elementų tinkleliui yra  $1,462 \cdot 10^{-5} m^3/s$ .

Toliau pateiksime rezultatus, kai kraujagyslė yra kampu į horizontą  $\alpha = 60^\circ$  (tėkmė kampu aukštyn).



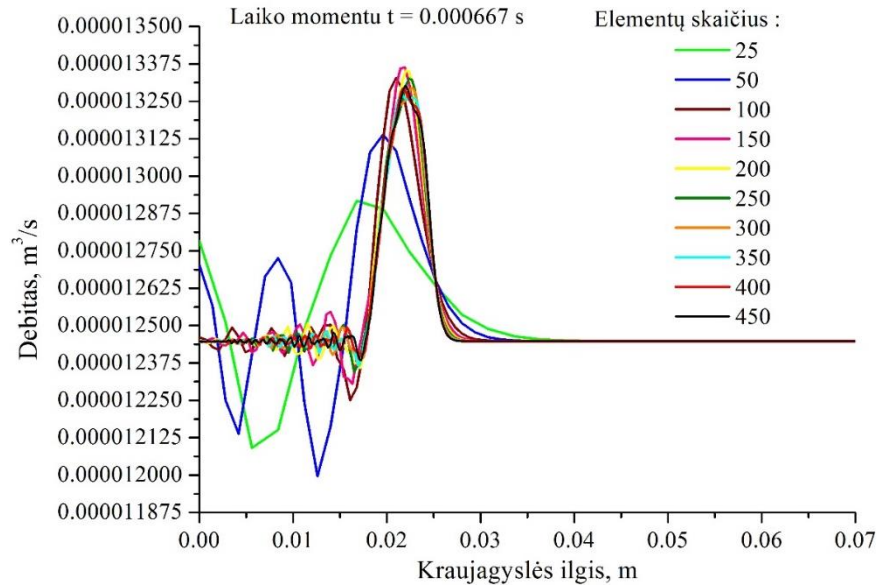
**4.5 pav.** Slėgio impulso sklaidimas kraujagyslėje, laiko momentu  $t = 0,000667$ s,  $\alpha = 60^\circ$

Esant stambiam tinkleliui sudarytam iš 25 ir 50 elementų slėgio maksimalios reikšmės yra 8592 Pa ir 11364 Pa. Kai tinklelis sudarytas nuo 100 iki 450 elementų slėgio pikų reikšmės yra nuo 12578 iki 13668, standartinis nuokrypis 368 Pa. Tokie nuokrypiai laikomi inžineriškai priimtinais ( $< 5\%$ ).



**4.6 pav.** Kraujo greitis kraujagyslėje laiko momentu  $t = 0,000667s$ ,  $\alpha = 60^\circ$

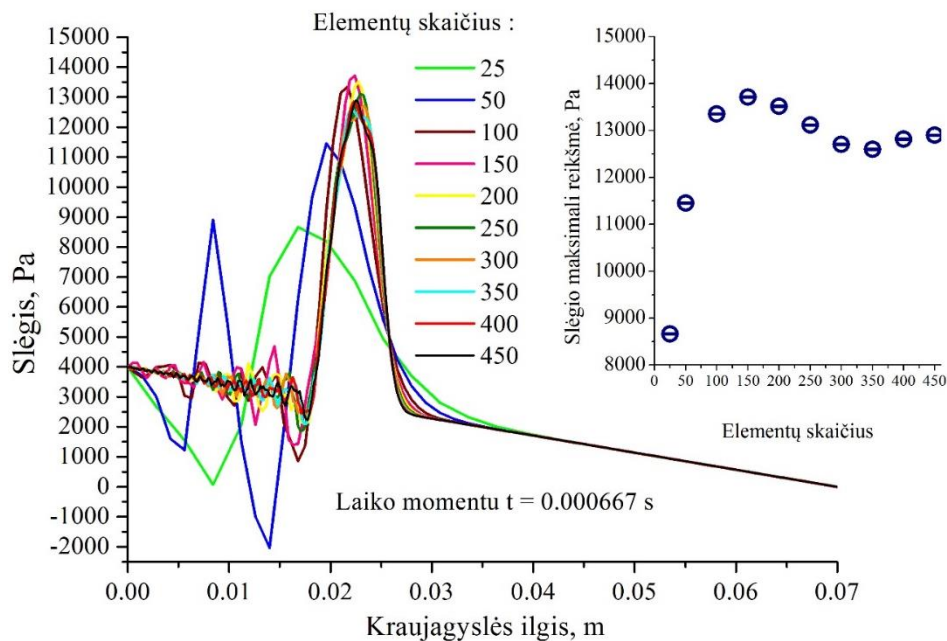
4.6 pav. pateiktas kraujo greitis kraujagyslėje laiko momentu  $t = 0,000667s$ . Esant nusistovėjusiai tėkmei greitis kraujagyslėje yra 4,648 m/s. Jis yra mažesnis nei horizontalioje kraujagyslėje (žr. 4.3 pav.). Tam įtakos turi pirmoje lygtyje esantis  $\rho g s_z$  narys. Maksimalus greitis kraujagyslėje esant 250 elementų tinkeliui yra 4,934 m/s.



**4.7 pav.** Debitai kraujagyslėje, laiko momentu  $t = 0,000667s$ ,  $\alpha = 60^\circ$

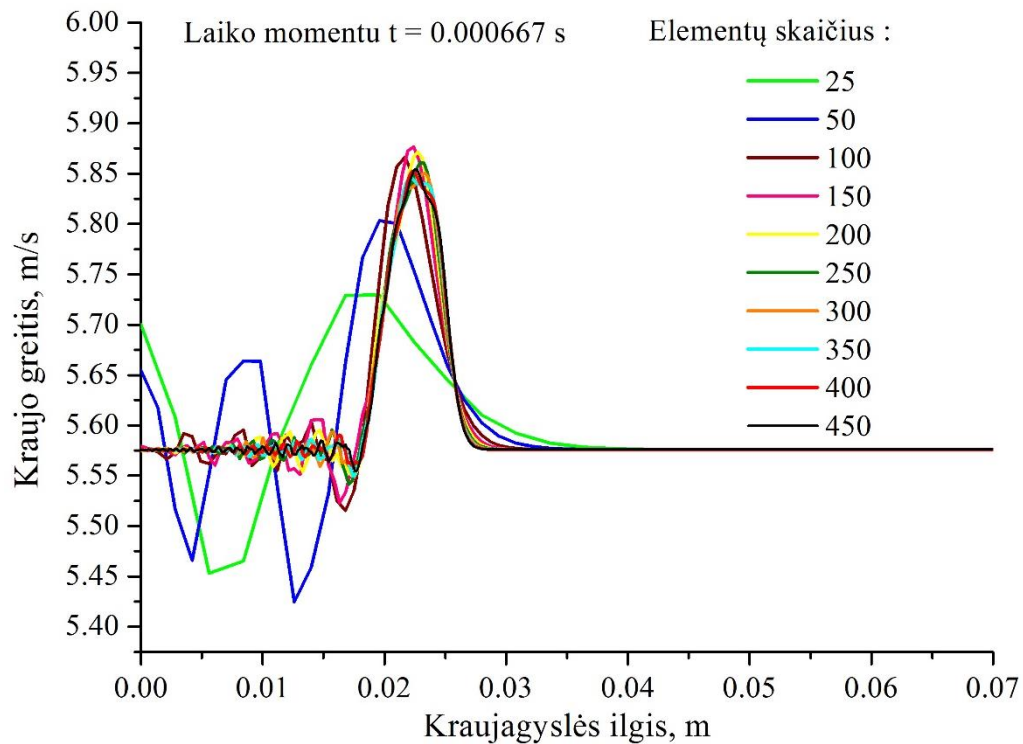
Esant pastoviai tėkmei debitas yra  $1,244 \cdot 10^{-5} m^3/s$ . Maksimalus debitas esant 250 elementų tinkeliui yra  $1,333 \cdot 10^{-5} m^3/s$  (žr. 4.7 pav.).

Toliau analizuojama 4.8 pav., 4.9 pav, 4.10 pav. pateikta kraujagyslė kampu į horizontą (tėkmė kampu žemyn)  $\alpha = -60^\circ$ .



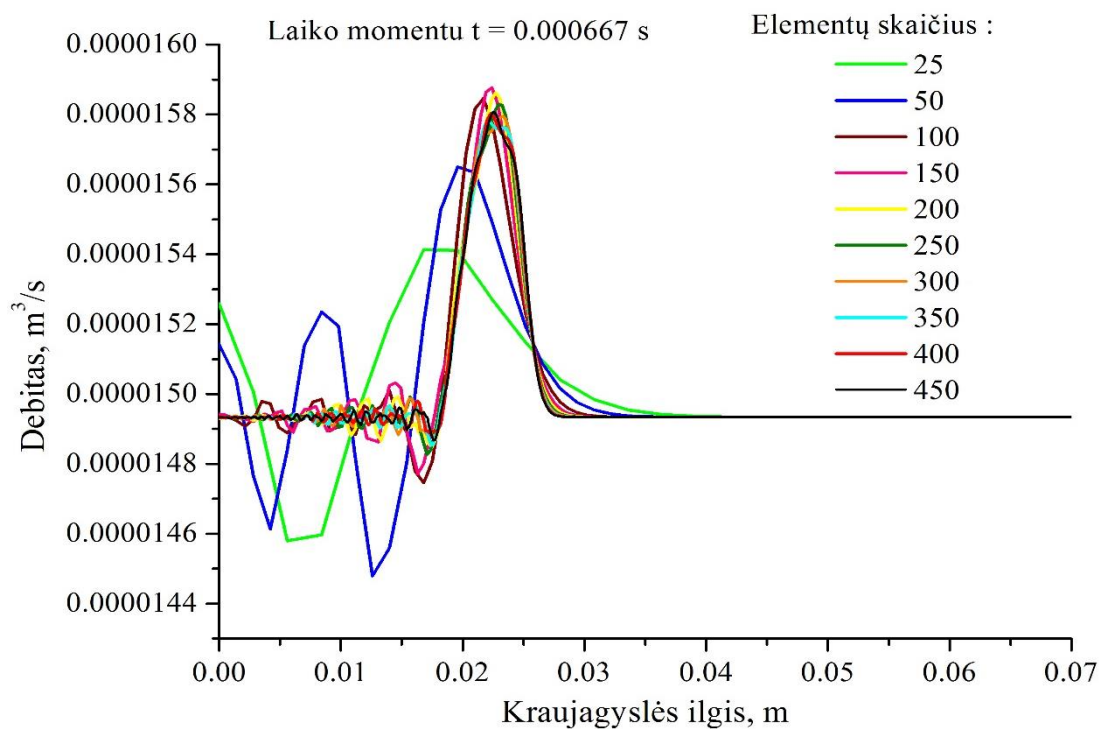
**4.8 pav.** Slėgio impulso sklidimas kraujagyslėje, laiko momentu  $t = 0,000667s$ ,  $\alpha = -60^\circ$

4.8 pav. Slėgio impulso bangos sklidimas kraujagyslėje, laiko momentu  $t = 0,000667s$ . Pateiktos slėgio bangos pikų reikšmės prie skirtingo tinklelio dydžio. Esant tinkleliui nuo 100 iki 450 elementų slėgio pikų reikšmės yra nuo 12600 Pa iki 13713 Pa, standartinis nuokrypis 377 Pa.



**4.9 pav.** Kraujo greitis kraujagyslėje laiko momentu  $t = 0,000667s$ ,  $\alpha = -60^\circ$

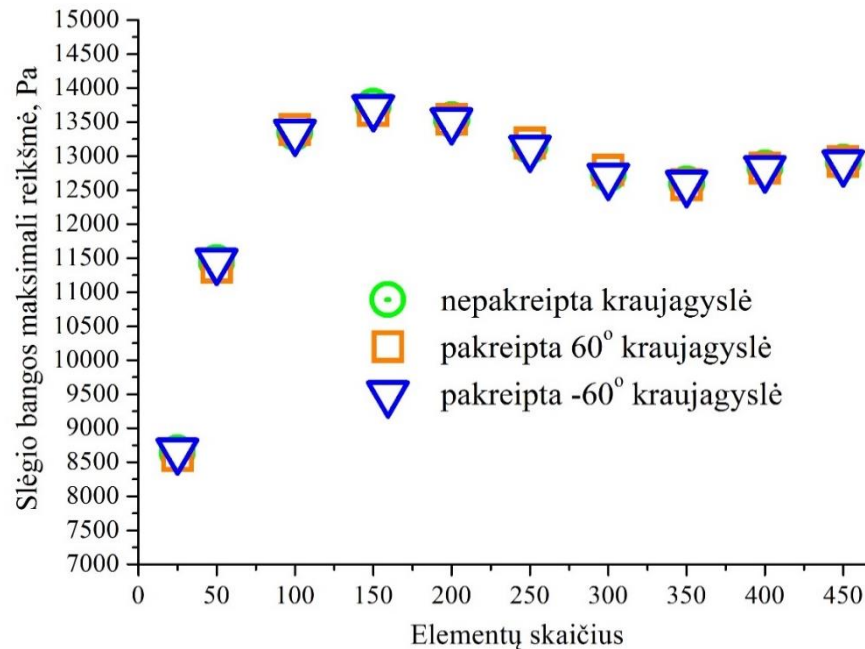
4.9 pav. Kraujo greitis kraujagyslėje esant nusistovėjusiai tėkmei yra  $5,576 m/s$ . Maksimalus greitis kraujagyslėje esant 250 elementų tinkleliui yra  $5,861 m/s$ .



**4.10 pav.** Debitai per kraujagyslės ilgį, laiko momentu  $t = 0,000667s$ ,  $\alpha = -60^\circ$

Esant pastoviai tėkmei debitas yra  $1,493 \cdot 10^{-5} m^3/s$ . Maksimalus debitas esant 250 elementų tinkleliui yra  $1,583 \cdot 10^{-5} m^3/s$  (žr. 410 pav.).

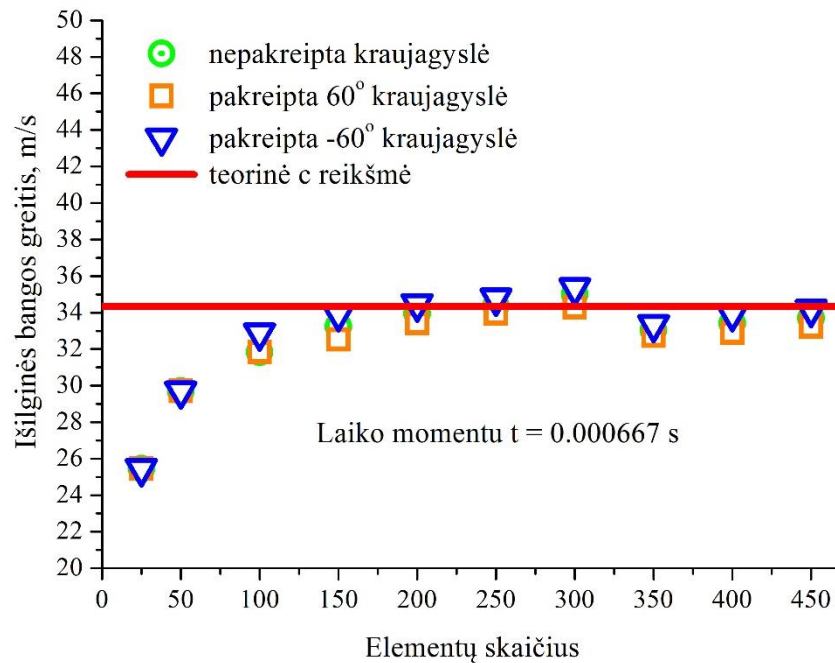
## 4.2. MODELIO LYGINAMOJI ANALIZĖ



**4.11 pav.** Slėgio pikų priklausomybė nuo elementų skaičiaus

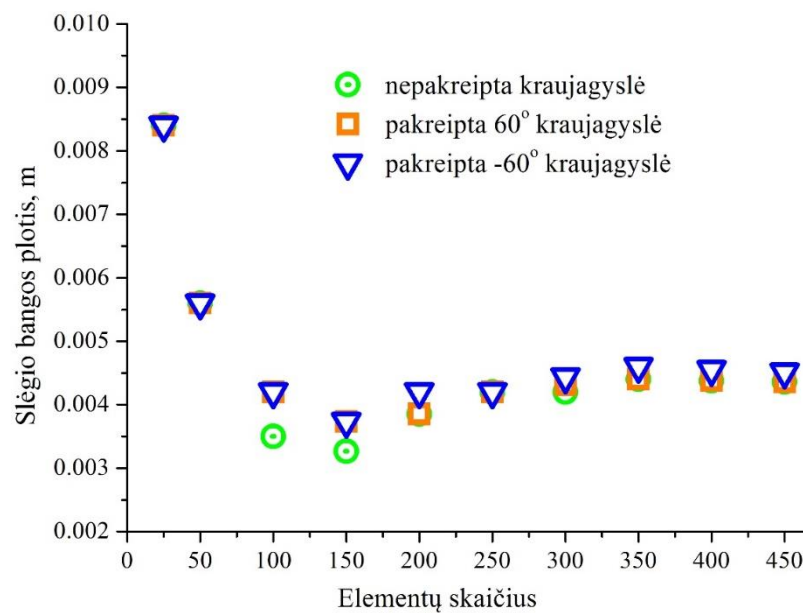
4.11 pav. Pateikta slėgio bangos maksimali reikšmė esant skirtingam elementų skaičiui. Analizuojama kraujagyslė, kai horizontali (nepakreipta)  $\alpha = 0^\circ$ , kampu į horizontą (pakreipta)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\alpha = -60^\circ$ . Matyti, kad slėgio piko reikšmė nepriklauso nuo kampo su horizontu.

4.12 pav. Pateikta išilginės bangos greičio  $c$  priklausomybė nuo elementų skaičiaus. Teorinė  $c$  reikšmė randama begaliniame skysčio tūryje naudojant 2.12 formulę. Esant mažam spūdumui tankis laikomas pastovus. Kai kraujagyslė yra horizontali teorinė  $c$  reikšmė turi būti artima sumodeliuotai. Klasikinė formulė neįvertina tėkmės klamos. Skaičiuojant teorinius įverčius naudojama 2.11 formulė, kuri įvertina kombinuotą kraujo ir kraujagyslės standumą. Esant stambiam tinkleliui sudarytam iš 25, 100, 150 elementų išilginės bangos („garso“) greitis yra mažesnis už teorinį greitį kraujagyslių pakreiptų horizonto atžvilgiu. Didinant elementų skaičių tinklelyje greičių reikšmės yra artimos teorinei  $c = 34,33$  m/s reikšmei. Esant 250 elementų tinkleliui išilginės bangos greitis yra: 34,36 m/s (nepakreiptos kraujagyslės), kampu į horizontą kraujagyslės  $\alpha = 60^\circ$  mažesnis 33,94 m/s, kampu į horizontą  $\alpha = -60^\circ$  didesnis 34,79 m/s. Analizuojant horizontalios kraujagyslės išilginės bangos greičius esant tinkleliui nuo 200 iki 450 elementų, greitis svyruoja nuo 33,03 m/s iki 35 m/s, standartinis nuokrypis 0,64 m/s.



**4.12 pav.** Slėgio bangų palyginimas skirtingose kraujagyslėse

Pati slėgio banga nėra visiškai simetriška, todėl atliekamas papildomas vertinimas analizuojant slėgio bangos plotį. Imamos reikšmės yra 70% maksimalios slėgio reikšmės.

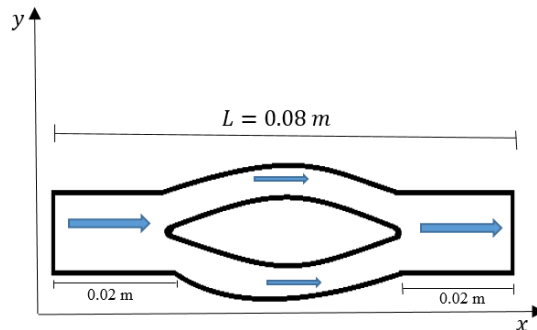


**4.13 pav.** Slėgio bangos pločio priklausomybė nuo elementų skaičiaus

Esant stambiam tinkleliui sudarytam iš 25, 50 slėgio impulso banga yra platesnė siekia 0,0084 m ir 0,0056 m. Didinant elementų skaičių slėgio bangos plotis mažėja tiek horizontalios, tiek kampu į horizontą kraujagyslių.

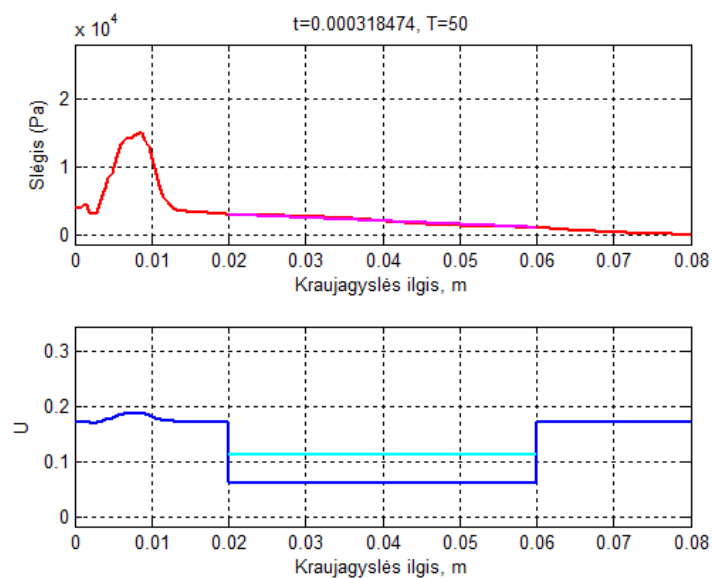
### 4.3. BAIGTINIŲ ELEMENTŲ MODELIS ŠAKOTAI STRUKTŪRAI

Šakotai kraujagyslės struktūrai naudoti iš 1.2 lentelės kraujo parametrai, kraujagyslės parametrai iš 4.1 lentelės. Šakotos kraujagyslės ilgis horizonte  $L = 0.08$  m (žiūrėti 4.14 pav.). Naudotas 300 elementų tinklelis.



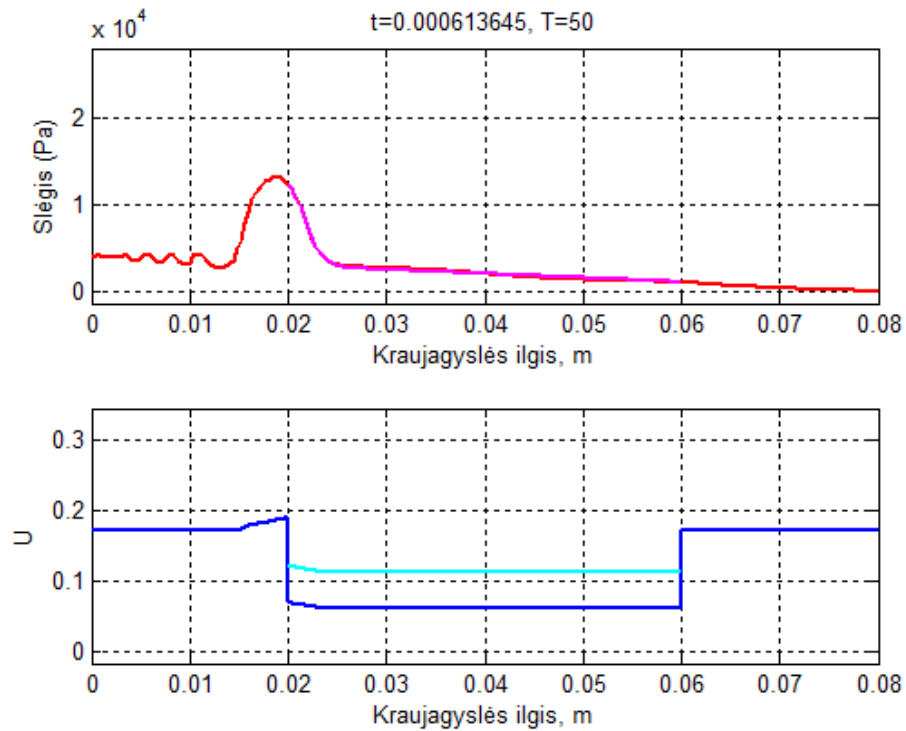
4.14 pav. Šakotos struktūros scheminis modelis

Žemiau pateikta slėgio impulso bangos sklidimas laike esant šakotai struktūrai.

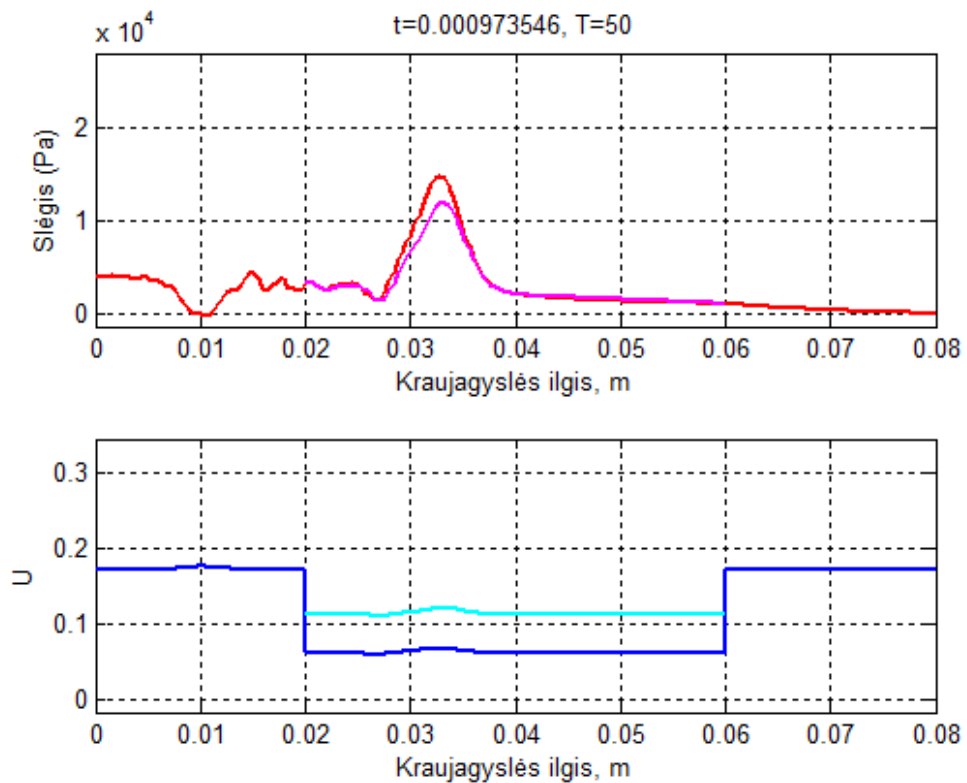


4.15 pav. Slėgio impulso bangos sklidimas (laiko momentu  $t = 0.0003$  s)

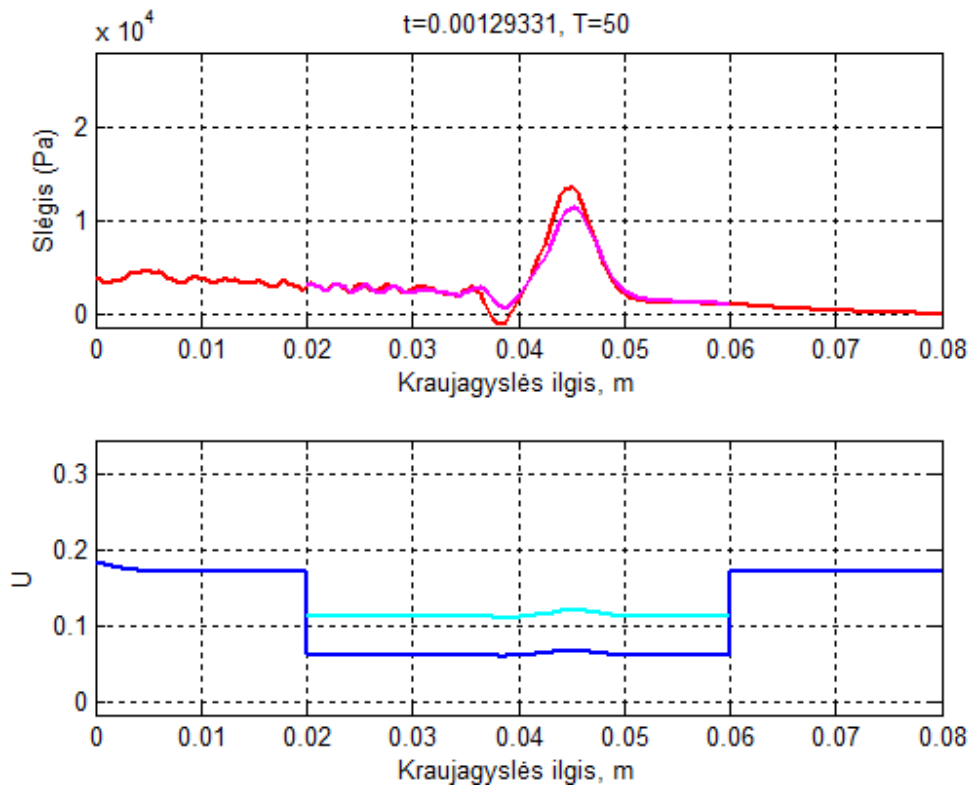




**4.16 pav.** Slēģio impulso bangos sklīdīmas (laiko momentu  $t = 0.0006$  s)



**4.17 pav.** Slēģio impulso bangos sklīdīmas (laiko momentu  $t = 0.0009$  s)



**4.18 pav.** Slėgio impulso bangos sklidimas (laiko momentu  $t = 0.0013$  s)

## IŠVADOS

Sukurtas baigtinių elementų modelis slėgio impulso sklidimo kraujagyslėse apskaičiavimui, kai kraujagyslė yra horizontali  $\alpha = 0^\circ$ , kampų į horizontą  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\alpha = -60^\circ$ . Priimtos prielaidos, kad tėkmė mažai spūdi, įvertinant kombinuotą kraujo ir kraujagyslės tamprumą. Modelis praplėstas siekiant išspręsti šakotos kraujagyslės problemą, taikant debitų darnos principą.

Esant stambiam tinkleliui t. y. kai elementų skaičius 25, 50, 100 elementų, sprendinys yra netikslus, tačiau imant daugiau elementų, jis konverguoja, mažėja skaitinis triukšmas“. Sprendinys gaunamas inžineriškai priimtinių paklaidų ribose. Atlikus modelio patikimumo analizę gauta, kad išilginės bangos greitis artimas teorinei reikšmei  $c = 34,33$  m/s. Nežymių skirtumų priežastimi galėtų būti, tai kad klasikinė formulė neįvertina tėkmės klampos. Slėgio impulso banga kraujagyslėje juda lėčiau, kai jos esant kampas su horizontu  $\alpha = 60^\circ$ , ir pagreiteja esant kampui su horizontu  $\alpha = -60^\circ$ .

## PADĖKA

Dėkoju magistro baigiamojo projekto vadovui, prof. habil. dr. R. Barauskui už pagalbą ir vertingus patarimus atliekant baigiamąjį projektą.

## LITERATŪRA

1. G. K. Batchelor. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 1967. ISBN 0-521-66396-2.
2. J. M. McDonough. Lectures in elementary fluid dynamics: physics, mathematics and applications. Departments of mechanical engineering and mathematics university of Kentucky, Lexington, KY 40506-0503, 2009, p. 2-4. Žiūrėta [2015-04-10].  
Prieiga internetu: <http://www.engr.uky.edu/~acfd/me330-lctrs.pdf>.
3. Ždankus N. T., Ždankus T.. Mokomoji knyga: Skysčių mechanika. Kaunas, 2011, p. 9-14. ISBN 978-9955-20-706-1.
4. Šaulys V.. Skysčių mechanika. Namų ir laboratorinių darbų metodikos nurodymai. Vilnius, VGTU leidykla „Technika“ 2011, p. 102. ISBN 978-9955-28-876-3.
5. Fizikos bendroji mokomoji laboratorija. Vilniaus universitetas. Fizikos katedra. Arterinio kraujo slėgio nustatymas akustinės indikacijos ir kompiuteriniu oscilometriniu metodu. Prieiga internetu: [http://www.fbml.ff.vu.lt/sites/default/files/5.2\\_0.pdf](http://www.fbml.ff.vu.lt/sites/default/files/5.2_0.pdf) [žiūrėta 2015-05-16].
6. Interaktyvus. The Cardiovascular System: Blood Vessels. Overview of Blood Vessel Structure and Function. 2013, Pearson Education, Inc. Prieiga internetu: <http://classes.midlandstech.edu/carterp/Courses/bio211/chap19/chap19.html> [žiūrėta 2015-05-09].
7. M. Sinnott, P. W. Cleary, M. Prakash. An investigation of pulsatile blood flow in a bifurcation artery using a grid-free method. Fifth international conference on CFD in the process industries CSIRO, Melbourne, Australia 13-15 December, 2006 [žiūrėta 2015 - 04 - 06]. Prieiga per internetą: [http://www.cfd.com.au/cfd\\_conf06/PDFs/119Sin.pdf](http://www.cfd.com.au/cfd_conf06/PDFs/119Sin.pdf).
8. I. Marshall, S. Zhao, P. Papathanasopoulou, P. Hoskins, X Yun Xu. MRI and CFD studies of pulsatile flow in healthy and stenosed carotid bifurcation models. Journal of Biomechanics 37, 2004, 679–687.
9. Uzdilaitė, G. Patologijų įtakos kraujo slėgiui ir greičiui kraujagyslėse tyrimas: daktaro disertacija: technologijos mokslai, mechanikos inžinerija (09 T) [interaktyvus]/ Giedrė Uzdilaitė: Vilniaus Gedimino technikos universitetas. Vilnius, 2006. 30-34 p. [žiūrėta 2015 - 04 - 06] Prieiga per internetą: [http://vddb.library.lt/fedora/get/LT-eLABa-0001:E.02~2007~D\\_20070130\\_111915-79080/DS.005.0.01.ETD](http://vddb.library.lt/fedora/get/LT-eLABa-0001:E.02~2007~D_20070130_111915-79080/DS.005.0.01.ETD)
10. O. Barnea, G. Gillion. Model-based estimation of male urethral resistance and elasticity using pressure-flow data. Computers in Biology and Medicine 31 (2001) 27-40.
11. G. Pontrelli. Pulsatile blood flow in a pipe. Computers & Fluids Vol. 27, No. 3, pp. 367-380, 1998.

12. L. Pirkl, T. Bodnar. Numerical simulation of blood flow using generalized Oldroyd-B model. V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010.
13. X. Y. Luo, T. J. Pedley. A numerical simulation of unsteady flow in a two-dimensional collapsible channel. J. Fluid Mech. (1996), vol. 314, pp. 191-225.
14. Barauskas R.. Baigtinių elementų metodas su MATLAB ir COMSOL Multiphysics. Kaunas, 2009 [žiūrėta 2015-05-04]. Prieiga internetu: <http://prof.if.ktu.lt/rimantas.barauskas/books>.
15. R. Löhner. Applied computational fluid dynamics techniques. An introduction based on finite element methods. Second edition, USA, Virginia, 2008. ISBN 978-0-470-51907-3.
16. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, P. Nithiarasu. The finite element method for fluid dynamics. Sixth edition, 2005 ISBN 0 7506 6322 7.
17. G. Brown. Henry Darcy and His Law [interaktyvus]. The Darcy – Weishbach Equation. Prieiga per internetą: <http://biosystems.okstate.edu/darcy/DarcyWeisbach/Darcy-WeisbachEq.htm> [žiūrėta 2015 - 05 - 06].
18. G. Visavale. Reviewing Governing Equations of Fluid Dynamics. Prieiga internetu: <https://www.learncax.com/knowledge-base/blog/by-category/cfd/reviewing-governing-equations-of-fluid-dynamics> [žiūrėta 2015-05-06].
19. COMSOL Multiphysics 4.4. Fluid-Structure Interaction in a Network of Blood Vessels. Prieiga internetu: <http://www.comsol.com/model/fluid-structure-interaction-in-a-network-of-blood-vessels-660>.
20. V. Kanyanta, A. Ivankovic, A. Karac. Accurate prediction of blood flow transients : a fluid-structure interaction approach. Computational & Mathematical Biomedical Engineering (CMBE) 2009. Prieiga internetu: <http://researchrepository.ucd.ie/handle/10197/4716>.
21. Interaktyvus. Žiūrėta [2015-06-01]. Prieiga internetu: <http://www.flowcontrolnetwork.com/articles/innovations-in-fluid-flow>