



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS**

Rūta Laurikaitytė

**APTARNAVIMO SISTEMŲ MODELIAVIMAS NAUDOJANT
FAZINIO TIPO SKIRSTINIUS**

Baigiamasis magistro projektas

Vadovas
prof. dr. Eimutis Valakevičius

KAUNAS, 2015

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

**APTARNAVIMO SISTEMŲ MODELIAVIMAS NAUDOJANT
FAZINIO TIPO SKIRSTINIUS**

Baigiamasis magistro projektas
Taikomoji matematika (621G10003)

Vadovas

prof. dr. Eimutis Valakevičius
2015 06 03

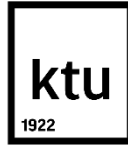
Recenzentas

doc. dr. Vytautas Pilkauskas
2015 06 03

Projektą atliko

Rūta Laurikaitytė
2015 06 03

KAUNAS, 2015



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

Rūta Laurikaitytė

Taikomoji matematika (621G10003)

Baigiamojo projekto „Aptarnavimo sistemų modeliavimas naudojant fazinio tipo skirstinius“

AKADEMINIO SAŽININGUMO DEKLARACIJA

2015 m. birželio mėn. 03 d.

Kaunas

Patvirtinu, kad mano, **Rūtos Laurikaitytės**, baigiamasis darbas tema „Aptarnavimo sistemų modeliavimas naudojant fazinio tipo skirstinius“ yra parašytas visiškai savarankiškai, o visi pateikti duomenys ar tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti sąžiningai. Šiame darbe nei viena darbo dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar internetinių šaltinių, visos kitų šaltinių tiesioginės ir netiesioginės citatos nurodytos literatūros nuorodose. Įstatymu nenumatytų piniginių sumų už šį darbą niekam nesu mokėjęs.

Aš suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo faktui, man bus taikomos nuobaudos, remiantis Kauno technologijos universitete galiojančia tvarka.

(studento vardas ir pavardė, įrašyti ranka)

(parašas)

TURINYS

Santrauka.....	5
Ižanga	6
1. Medžiagos ir tyrimų metodai	7
1.1. Literatūros apžvalga	7
1.2. Tolydūs fazinio tipo skirstiniai.....	7
1.3. Fazinio tipo skirstinių aproksimavimas.....	9
1.3.1. Momentų metodas	9
1.3.1.1. <i>N</i> -fazinis Erlango mišinys	9
1.3.1.2. 2-fazių Kokso skirstinys.....	10
1.3.2. Maksimalaus tikėtinumo metodas.....	11
1.4. Aptarnavimo sistemų modeliavimas ir jo elementai	11
1.4.1. Kendalo notacija.....	12
1.4.2. <i>M/G/I</i> aptarnavimo sistema	13
1.4.2.1. <i>G</i> -Erlango mišinys.....	13
1.4.2.2. <i>G</i> -Kokso skirstinys	14
1.4.3. <i>G/M/I</i> aptarnavimo sistema	15
1.4.3.1. <i>G</i> -Erlango mišinys.....	15
1.4.3.2. <i>G</i> -Kokso skirstinys	17
1.4.4. Prioritetinio aptarnavimo sistemos	18
1.4.4.1. <i>G</i> -Erlango mišinys.....	18
1.4.4.2. <i>G</i> -Kokso skirstinys	21
1.4.5. <i>G/G/I</i> aptarnavimo sistema.....	23
1.4.5.1. <i>G</i> -Kokso skirstinys, <i>G</i> -Erlango mišinys.....	23
1.4.5.2. <i>G</i> -Erlango mišinys, <i>G</i> -Kokso skirstinys.....	25
2. Tyrimų rezultatai ir jų aptarimas	26
2.1. Bendrųjų skirstinių aproksimacija.....	26
2.1.1. Gama skirstinys	26
2.1.2. Atvirkštinis Gauso skirstinys	29
2.1.3. Lognormalusis skirstinys.....	31
2.1.4. Veibulo skirstinys.....	32
2.2. <i>M/G/I</i> ir <i>G/M/I</i> aptarnavimo sistemos modeliavimas	34
2.3. Prioritetinių aptarnavimo sistemų modeliavimas.....	35
2.4. <i>G/G/I</i> aptarnavimo sistemų modeliavimas	38
2.5. Aptarnavimo sistemų imitacinis modeliavimas	39
2.6. Programinė realizacija ir vartotojo instrukcija	40
Išvados.....	43
Padėkos.....	44
Šaltiniai ir literatūra.....	45

Laurikaitytė, R. Aptarnavimo sistemų modeliavimas naudojant fazinio tipo skirstinius. *Taikomosios matematikos magistro* baigiamasis darbas / vadovas prof. dr. Eimutis Valakevičius; Kauno technologijos universitetas, Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas, Matematinio modeliavimo katedra.

Kaunas, 2015. 45 psl.

SANTRAUKA

Frequently we are unable to use Markov processes to describe real stochastic systems because application streams do not have Poisson distribution or the durations of operations do not have exponential distribution. In this study we investigated possibilities of system approximation using mixtures and convolutions of exponential distributions.

Approximations of four common distributions (inverse Gaussian, gamma, lognormal and Weibull) have been researched in this project. They were executed with moments and maximum likelihood methods.

Accuracy of system approximation improves by increasing number of phases and operations, but then we have an issue of rapidly growing Markov chain difficulty which aggravates the system analysis. 2 and 3 moments matching gives sufficiently good results. Maximum likelihood method suffices with 2 phases and 1000 iterations for reliable results.

We applied Erlang mixtures and Coxian distribution for the distribution approximation which we subsequently used to analyse queuing systems M/G/1 and G/M/1. Theoretical calculations and results that were compared to simulation model showed a high approximation precision.

To model queuing systems we have created a universal software in C++ language with a user friendly interface.

IŽANGA

Norint aprašyti aptarnavimo sistemos funkcionalumą Markovo procesu paraiškų srautai turi būti pasiskirstę pagal Puasono dėsnį, o visos operacijų trukmės (perėjimo trukmė iš vienos būsenos į kitą) turi būti pasiskirsčiusios pagal eksponentinį dėsnį. Tačiau praktikoje ši sąlyga dažniausiai nebūna išpildyta, todėl sistemos modeliavimui yra naudojami kiti metodai.

Pagrindinė darbo užduotis:

Naudojant eksponentinių skirstinių mišinius ir sąsūkas išanalizuoti aptarnavimo sistemų aproksimavimą Markovo grandinėmis.

Projekto tikslai:

- Realizuoti aproksimavimo momentų ir maksimalaus tikėtimumo metodais algoritmus;
- Ištirti aptarnavimo sistemų modelius;
- Sukurti aptarnavimo sistemų tyrimui skirtą programinę įrangą.

Jeigu sistemos srautas arba operacijų trukmės yra pasiskirsčiusios pagal bendrąjį dėsnį G , tai šio skirstinio funkciją aproksimuojame fazinio tipo skirstiniu, t.y. būseną keičiama eksponentinių fazių mišiniu.

Projekte ištirtos keturių bendrųjų skirstinių (atvirkštinio Gauso, gama, lognormaliojo ir Veibulo) aproksimavimo, momentų ir maksimalaus tikėtimumo metodais, galimybės. Naudoti fazinio tipo skirstiniai: Erlango mišinys ir Kokso skirstinys.

Sistemos aproksimacijos tikslumas gerėja didinant fazių ir operacijų skaičių, tačiau tuomet atsiranda problema, kad labai išauga Markovo grandinių sudėtingumas, kas apsunkina pačią sistemos analizę. 2 ir 3 momentų sulyginimas duoda pakankamai gerus rezultatus. Maksimalaus tikėtimumo metode pakanka 2 fazių ir 1000 iteracijų patikimiems rezultatams gauti.

Gerėsnė aproksimacija gaunama naudojant iteracinį maksimalaus tikėtimumo algoritmą ir aproksimuojant Kokso skirstiniu. Šis metodas gana universalus ir turi didesnes tyrimo galimybes.

Projekte ištirti $M/G/1$, $G/M/1$ ir $G/G/1$ aptarnavimo sistemų modeliai. Analizė atlikta su vienu ir dviem prioritetiniais, pirmenybinio ir nepirmenybinio aptarnavimo tipo, srautais. Aptarnavimo modelių teisingumas įvertintas imitaciniu modeliu su modeliavimo programa Arena.

Aptarnavimo sistemų modeliavimui sukurta universali programinė įranga C++ programavimo kalboje bei patogi vartotojo sąsaja. Įvedus ir nustačius atitinkamus parametrus, vartotojas gali atlikti išsamų sistemų tyrimą.

Darbo tematika pristatyta mokslinėje konferencijoje „Matematika ir matematikos dėstymas 2015“.

1. MEDŽIAGOS IR TYRIMŲ METODAI

1.1. LITERATŪROS APŽVALGA

Su aptarnavimo sistemomis susiduriame kiekvieną dieną prekybos centruose, vaistinėse, bankuose. Aptarnavimo sistemomis taip pat laikome telekomunikacines, informacinių technologijų, gamybos, logistikos ir daug kitų sistemų.

Markovo procesai yra plačiai išnagrinėta, efektyvi ir labai gerai pritaikoma priemonė dinaminų sistemų savybėms analizuoti ir aprašyti.

Empiriškai nustatyta, kad pirkėjas stoja į eilę prie kasų, jei eilėje ne daugiau kaip trys žmonės. Kitu atveju pasirenka kasą, kurioje yra mažesnis klientų skaičius. Taigi projektuojant įstaigas, kuriose planuojamos eilės, dideli srautai, reikėtų gerai išnagrinėti susikurtą aptarnavimo sistemos modelį. Modelis suteikia galimybes parinkti optimaliausią sistemos darbą eant tam tikram klientų srautui bei aptarnavimo trukmėms: tarkime galime nustatyti optimalų kasų skaičių esant tam tikram klientų srautui, kad eilėse prie kasų būtų ne daugiau kaip trys žmonės.

Paskutiniu metu populiarus metodas modeliuoti bendrąją funkciją $G(x)$ eksponentinių skirstinių kombinacija, kuri vadinama fazinio tipo skirstiniu $F(x)$. Šis skirstinys labai gerai tinka Markovo procesams. [11]

Svarbiausios fazinio tipo skirstinių savybės [3]:

- **Tankis.** Fazinio tipo skirstiniai gali būti aproksimuojami visais tikimybiniais skirstiniais intervale $[0, \infty)$ ir plačiai pritaikomi statistikos srityje. Kiekvienam neneigiamam skirstiniui G egzistuoja fazinio tipo skirstinių seka $F_n \ni F_n \rightarrow G$;
- **Markovo modelis.** Fazinio tipo skirstiniai gaunami iš apibendrinto Erlango skirstinio fazės, kuri yra ypač gerai tinkanti skaitmeniniam skaičiavimui: problemos sprendžiamos darant prielaidą, kad eksponentiniai skirstiniai yra algoritmiškai lengvai apdorojami, kai eksponentinis skirstinys pakeičiamas fazinio tipo skirstiniu;
- **Struktūrinis informatyvumas.** Fazinio tipo skirstiniai yra pakankamai universalūs ir skaičiuojant lengvai apdorojami, taigi jie gali būti naudojami modelio svarbių kokybinių ypatybių atvaizdavimui ir skaitmeninių rezultatų interpretavimui, kas suteikia daug naudingos informacijos apie fizinę elgseną.

1.2. TOLYDŪS FAZINIO TIPO SKIRSTINIAI

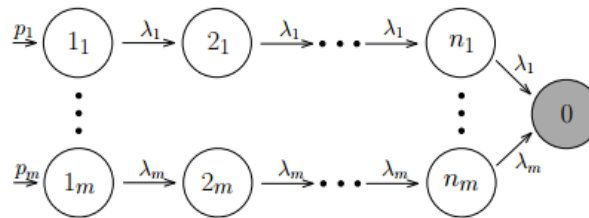
Laiko absorbcijos skirstiniai baigtinėje diskretaus laiko $m + 1$ dydžio Markovo grandinėje, kur viena būseną yra absorbuojanti, o likusios m būsenų yra laikinos, yra vadinami fazinio tipo skirstiniais. Fazinio tipo skirstiniai yra vienareikšmiškai pateikti kaip m matavimo eilutės vektorius α ir $m \times m$ dydžio matrica T . Fazinio tipo skirstinys vaizduojamas (α, T) pora.

Vektorius α gali būti interpretuojamas kaip pirminis tikėtino vektorius iš m laikinų būsenų, o tuo tarpu matrica T gali būti interpretuojama kaip vieno žingsnio perėjimo tikimybių matrica (1.1) išraiškoje iš laikinų būsenų diskrečiuoju atveju ir kaip be galo maža generavimo matrica iš laikinų būsenų tolydžiuoju atveju. Be galo mažas generatorius Q :

$$Q = \begin{bmatrix} T & \mathbf{t} \\ 0, \dots, 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

čia $(p \times p)$ dydžio matrica T yra vadinama fazinio tipo generatoriumi. [3, 6]

Hiper-Erlango skirstinys, Erlango mišinys (*angl. Hyper-Erlang distribution, mixture of Erlang*). 2 (dvi) ar daugiau fazių sekoje, kurios gali būti neidentiškos arba identiškų ir neidentišku fazių mišinys. Hiper-Erlango skirstinys su m šakų apibrėžiamas kaip bendras m nepriklausomų Erlango skirstinių mišinys su pradinėmis tikimybėmis p_1, \dots, p_m . Erlango skirstinio i -oji fazė žymima n_i , o intensyvumas λ_i (žr. 1.1 pav.). Šis skirstinys gali būti aprašytas $3m$ parametrais. [4]



1.1 pav. Erlango mišinio schema

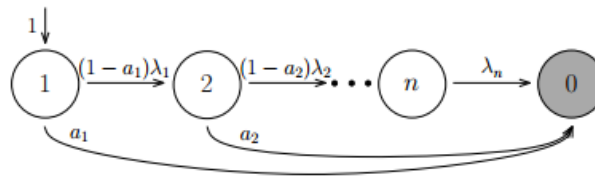
Fazinio tipo skirstinio struktūra

$$\alpha = (p_1 \ 0 \ \dots \ p_2 \ 0 \ \dots \ p_m \ 0 \ \dots \ 0) \text{ ir}$$

$$T = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_m & \lambda_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_m \end{pmatrix}.$$

Kokso skirstinys (*angl. Coxian distribution*). 2 (dvi) ar daugiau (nebūtinai identiškų) fazių sekoje. Kokso skirstinių klasė yra viena labiausiai ištirtų fazinio tipo skirstinių poklasių. 1955 m. Koksas (*angl. Cox*) parodė, kad bet koks pasiskirstymas, turintis racionalią Laplaso-Stiltjeso (*angl. Laplace-Stieltjes, LST*) transformaciją, gali būti atvaizduotas Kokso skirstiniu.

n -fazinis Kokso skirstinys yra n eksponentinių skirstinių su dažniais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ir tikimybėmis a_1, a_2, \dots, a_{n-1} , aplenkiant likusias fazes, seka (žr. 1.2 pav.). Todėl, norint tiksliai nusakyti Kokso skirstinį turime gauti $2n$ parametru. [4, 6]



1.2 pav. Kokso skirstinio schema

Fazinio tipo skirstinio struktūra

$$\alpha = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \text{ ir } T = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & (1-a_1)\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & (1-a_2)\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_n \end{pmatrix}.$$

1.3. FAZINIO TIPO SKIRSTINIŲ APROKSIMAVIMAS

1.3.1. MOMENTŲ METODAS

Variacijos koeficientas randamas iš dispersijos ir vidurkio kvadrato santykio [5]:

$$c^2 = \frac{Var[X]}{E[X]^2} = \frac{m_2 - m_1^2}{m_1^2}, \quad (1.2)$$

kur m_1 – pirmasis momentas, o m_2 – antrasis momentas.

1.1 lentelėje pateikti fazinio tipo skirstinio aproksimacijos parinkimo kriterijai, kurie aprašo tam tikrus konkrečius skaičiavimus reikalingus momentų sulyginimui. Fazinio tipo skirstinio aproksimacijos tipas priklauso nuo variacijos koeficiento c^2 diapazono. [5]

1.1 lentelė

Fazinio tipo skirstinio aproksimacijos parinkimo kriterijai

c^2 diapazonas	Fazinio tipo skirstinio aproksimacija
$0 < c^2 < 0,5$	2, 3 momentai, n -fazių Erlango mišinys
$0,5 \leq c^2 \leq 1$	2 momentai, 2-fazių Kokso skirstinys
$c^2 > 1$	3 momentai, 2-fazių Kokso skirstinys

1.3.1.1. N-FAZINIS ERLANGO MIŠINYS

2 momentų Erlango mišinio tankio funkcija [2]:

$$f(x) = p\mu \frac{(\mu x)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\mu x} + (1-p)\mu \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu x}; \quad x > 0; \mu > 0. \quad (1.3)$$

3 momentų Erlango mišinio tankio funkcija [2]:

$$f(x) = p\mu_1 \frac{(\mu_1 x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu_1 x} + (1-p)\mu_2 \frac{(\mu_2 x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu_2 x}; \quad x > 0; \mu_1, \mu_2 > 0. \quad (1.4)$$

Kai variacijos koeficientas yra intervale $0 < c^2 < 0,5$, skirstinys aproksimuojamas n -faziniu Erlango mišiniu, sulyginant 2 momentus. Parametras n parenkamas taip, kad $\frac{1}{n} \leq c^2 \leq \frac{1}{n-1}$, čia $n = 2, 3, \dots$

Parametrai randami iš formulių [5]:

$$p = \frac{1}{1 + c^2} \left(nc^2 - \sqrt{n(1 + c^2) - n^2 c^2} \right); \mu = \frac{n - p}{m_1}. \quad (1.5)$$

Aproksimacijos Erlango mišiniu, sulyginant 3 momentus parametrai apskaičiuojami pagal formules [5]:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2a}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}; \quad (1.6)$$

$$a = n(n + 2)m_1 \left(m_2 - \frac{n + 1}{n} m_1^2 \right);$$

$$b = -(n \cdot (m_1 m_3 - \frac{n+2}{n+1} m_2^2) + \frac{n(n+2)}{n+1} \cdot (m_2 - \frac{n+1}{n} m_1^2)^2 + (n + 2) \cdot m_1^2 \cdot (m_2 - \frac{n+1}{n} m_1^2));$$

$$c = m_1 \cdot \left(m_1 m_3 - \frac{n + 2}{n + 1} m_2^2 \right);$$

$$p = \left(\frac{m_1}{n} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right). \quad (1.7)$$

1.3.1.2. 2-FAZIŲ KOKSO SKIRSTINYS

2-fazių Kokso skirstinio tankio funkcija [2]:

$$p(x) = \mu_1 e^{-\mu_1 x} + \frac{p_1 \mu_1}{p_1 \mu_2 - \mu_1} (\mu_1 e^{-\mu_1 x} - p_2 \mu_2 e^{-p_2 \mu_2 x}). \quad (1.8)$$

Jeigu variacijos koeficiento diapazonas yra $0,5 \leq c^2 \leq 1$, skirstinys aproksimuojamas 2-fazių Kokso skirstiniu, sulyginant 2 momentus. Parametrai randami iš formulių [5]:

$$\mu_1 = \frac{2}{m_1}; \mu_2 = \frac{1}{m_1 c^2}; p_1 = \frac{1}{2c^2}; p_2 = 1 - p_1, \quad (1.9)$$

čia m_1 – pirmasis momentas.

Jeigu variacijos koeficiento reikšmė yra $c^2 > 1$, tuomet bendrasis skirstinys aproksimuojamas 2-fazių Kokso skirstiniu, sulyginant 3 momentus. Parametrai apskaičiuojami pagal išraiškas [5]:

$$\mu_2 = \frac{g_1 g_2 - g_3 \pm \sqrt{D}}{2(g_2^2 - g_1 g_3)}; \mu_1 = \frac{\mu_2 g_1 - 1}{\mu_2 g_2 - g_1}; p_1 = \frac{\mu_2 (\mu_1 g_1 - 1)}{\mu_1}; p_2 = 1 - p_1, \quad (1.10)$$

kur i -asis pradinis momentas $g_i = \frac{m_i}{i!}$, $i = \overline{1,3}$; D – diskriminantas.

1.3.2. MAKSIMALAUS TIKĖTINUMO METODAS

EM (maksimalaus tikėtinumo) algoritmas yra iteracinis būsenų radimo metodas. Kiekviena iteracija susideda iš dviejų žingsnių: E-žingsnio (tikėtinumo žingsnis) ir M-žingsnio (maksimizavimo žingsnis).

Erlango mišinio matricinė struktūra, kai fazių skaičius lygus 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kokso skirstinio struktūra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tikėtinumo funkcija [7]:

$$L(\pi, T; x) = \prod_{i=1}^n \pi \cdot \exp\{Tx\} \cdot t. \quad (1.11)$$

Tankio funkcijos grafikas braižomas pagal išraišką [7]:

$$f(x) = \pi \cdot \exp(Tx) \cdot t, \quad (1.12)$$

kur $\pi = \pi_1, \dots, \pi_p$ vektorius yra pirmas matricinės struktūros stulpelis, o T yra $(p \times p)$ dydžio matrica struktūros dešinėje pusėje.

Maksimalaus tikėtinumo algoritmo kiekvienoje iteracijoje skaičiuojamas Runge-Kutta žingsnio ilgis $\frac{0,1}{\max[T_{ii}]}$, kur $[T_{ii}]$ yra didžiausias (absoliučia verte) matricos T įstrižainės elementas vėliausiame skaičiavime. Kuo $\max[T_{ii}]$ reikšmė bus didesnė, tuo mažesnis bus žingsnio dydis ir kiekvienos iteracijos apskaičiavimas užtruks ilgesnį laiko tarpą. [2, 7]

1.4. APTARNAVIMO SISTEMŲ MODELIAVIMAS IR JO ELEMENTAI

Tam, kad vienkanalė aptarnavimo sistema būtų aprašyta Markovo procesu, jos paraiškų srautas turi būti pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį, o paraiškų operacijų trukmės pasiskirsčiusios pagal eksponentinį dėsnį. Tačiau realiose aptarnavimo sistemose šie reikalavimai retai išpildomi, todėl panaudojant fazinio tipo skirstinius kuriamas naujas modelis.

Vidutinis paraiškų skaičius eilėje apskaičiuojamas iš formulės [10]:

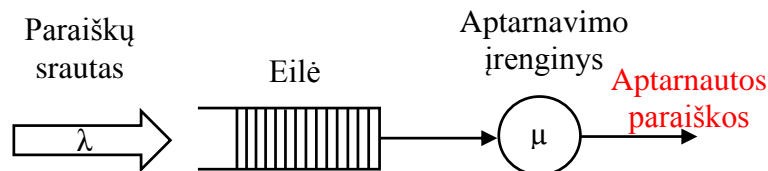
$$L^{(i)} = \sum_{n_i=1}^{l_i} \sum_{n_1, n_2} n_1 \pi(n_1, n_2), \quad (1.13)$$

čia $n_1 \pi(n_1, n_2)$ yra stacionari tikimybė. Vidutinis laukimo laikas [10]:

$$W^{(i)} = \frac{L^{(i)}}{\lambda_i}, i = 1, 2. \quad (1.14)$$

1.4.1. KENDALO NOTACIJA

Anglų statistiko ir matematiko D. G. Kendalo (*angl. D. G. Kendall*) pateiktas sutrumpintas aptarnavimo sistemų žymėjimas buvo įvestas 1953 m. Jis pasiūlė sistemų modelius aprašyti trijų simbolių kombinacija $A/S/c$, kurią vėliau papildžius dar trimis simboliais buvo sudaryta galutinė notacija $A/S/c/K/N/D$. [4] Pagrindinis aptarnavimo sistemos modelis pavaizduotas 1.3 pav., kuris gali būti naudojamas mašinų ar operatorių, atliekančių užsakymus, arba ryšio įrangos, apdorojančios informaciją, modeliavimui. [1]



1.3 pav. Pagrindinis aptarnavimo sistemos modelis

Kendalo notaciją $A/S/c/K/N/D$ sudarančių simbolių charakteristikos [1, 9]:

- **A – paraiškų atvykimo į sistemą procesas.** Šis simbolis nusako laiko intervalų tarp gretimų paraiškų sraute pasiskirstymo dėsnį. Paprastai priimama, kad atvykimo laikai yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę dydžiai. Daugelyje praktinių situacijų paraiškos į sistemą atvyksta pagal Puasono srautą, kurio laiko tarpai tarp ateinančių paraiškų yra pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį. Paraiškos gali ateiti po vieną arba partijomis. *M* raidė reiškia eksponentinį pasiskirstymo dėsnį, *G* – bendrąjį pasiskirstymo dėsnį, o *D* – determinuotą pasiskirstymo dėsnį.
- **S – aptarnavimo laikas.** *S* simbolis nusako paraiškų aptarnavimo trukmės pasiskirstymo dėsnį (*M*, *G* arba *D*). Paprastai priimama, kad paraiškų aptarnavimo laikai yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę dydžiai.
- **c – paraiškas aptarnaujančių įrenginių skaičius.** Gali būti vienas aptarnavimo įrenginys arba jų grupė ($0 < c < \infty, c \in \mathbb{N}$).
- **K – maksimalus galimas paraiškų skaičius sistemoje arba maksimalus laukimo vietų eilėje skaičius.** Kai paraiškų kiekis pasiekia maksimumą, vėliau atvykstančios paraiškos yra nebepriimamos. Jeigu Kendalo notacijoje šio simbolio reikšmė praleista, vadinasi ji lygi begalybei, t.y. leistinas paraiškų skaičius sistemoje yra neribojamas.

- **N – paraiškų srauto (šaltinio) dydis.** Mažas paraiškų skaičius įtakoja efektyvesnį atvykimo dažnį, nes kuo daugiau paraiškų yra eilėje, tuo mažiau lieka laisvų vietų priimti naujai atvykstančias paraiškas į sistemą. Jeigu notacijoje dydis nėra apibrėžtas, tuomet jis nėra ribojamas (t.y. dydis begalinis).
- **D – aptarnavimo tvarka.** Paraiškos gali būti aptarnaujamos po vieną arba partijomis. Egzistuoja tokie aptarnavimo tvarkos tipai: FIFO/FCFS – pirmiau aptarnaujama anksčiau atvykusi paraiška; LIFO/LCFS – pirmiau aptarnaujama vėliau atėjusi paraiška; SIRO – paraiškos aptarnaujamos atsitiktinai, neatsižvelgiant į atvykimo tvarką; PNPN – prioritetinis aptarnavimas (pvz. pirmenybinis ir nepirmenybinis aptarnavimas, pirmiau aptarnaujamos skubios paraiškos); PS – procesoriaus dalijimasis (kompiuteriuose, kurie padalina savo apdorojimo galią visiems sistemos darbams po lygiai).

Aprašant pagrindinį aptarnavimo sistemos modelį, laikoma, kad paraiškos atvyksta po vieną ir nėra ribojamas jų eilės ilgis, o aptarnavimas vykdomas pagal principą „*pirmas atėjo – pirmas išėjo*“ (angl. „*first in first out*“, *FIFO*), t.y. kas pirmiau ateina į eilę, pirmiau iš jos ir išeina.

1.4.2. $M/G/1$ APTARNAVIMO SISTEMA

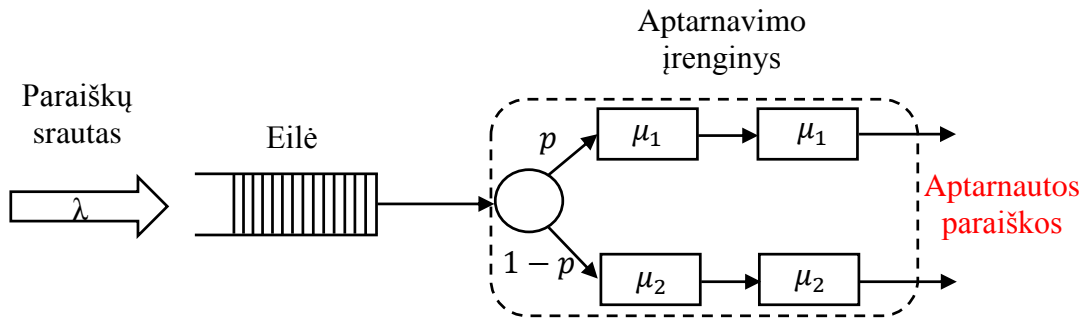
$M/G/1$ yra vieno kanalo sistema su begaline eile. Paraiškų atvykimo srautas pasiskirstęs pagal paprastąjį Puasoninį M paraiškų srautą λ intensyvumu, o paraiškos aptarnaujamos bendruoju G dėsniumi.

1.4.2.1. G -ERLANGO MIŠINYS

Tarkime $M/G/1$ sistemoje bendrojo skirstinio funkcija G aproksimuojama Erlango mišiniu. Įvykių aibė $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ ir sistemos būsenų aibė $N = \{(n_1, n_2)\}$, $n_1 = \overline{0, L}$, $n_2 = \overline{0, 5}$. Praktikoje būtina įvesti tam tikrą eilės apribojimą nusakomą dydžiu L .

- e_1 – paraiška atėjo į aptarnavimo bloką intensyvumu λ ir pateko į pirmąją fazę;
- e_2 – paraiška su tikimybe p perėjo į aptarnavimo bloko antrą fazę;
- e_3 – paraiška su tikimybe $1 - p$ perėjo į aptarnavimo bloko trečią fazę;
- e_4 – paraiška intensyvumu μ_1 perėjo į aptarnavimo bloko ketvirtą fazę;
- e_5 – paraiška intensyvumu μ_2 perėjo į aptarnavimo bloko penktą fazę;
- e_6 – paraiška baigta aptarnauti ketvirtoje fazėje ir intensyvumu μ_1 palieka sistemą;
- e_7 – paraiška baigta aptarnauti penktoje fazėje ir intensyvumu μ_2 palieka sistemą;
- n_1 – paraiškų skaičius sistemoje;
- n_2 – aptarnavimo bloko fazė, kurioje aptarnaujama paraiška.

Aptarnavimo sistemos schema 1.4 pav. [8, 10] :



1.4 pav. $M/G/1$ aptarnavimo sistemos modelis, kai G -Erlango mišinys

Sistemos pseudokodas [10]:

```

e1. if  $n_2 = 0$ 
    then  $n_2 = 1$ ;
    else if  $n_1 < L$ 
        then  $n_1 = n_1 + 1$ ;
        end if
    end if
    Return Intensyvumas =  $\lambda$ 

e2. if  $n_2 = 1$ 
    then  $n_2 = 2$ ;
    end if
    Return Intensyvumas =  $p \cdot 10000$ 

e3. if  $n_2 = 1$ 
    then  $n_2 = 3$ ;
    end if
    Return Intensyvumas =  $(1 - p) \cdot 10000$ 

e4. if  $n_2 = 2$ 
    then  $n_2 = 4$ ;
    end if

    Return Intensyvumas =  $\mu_1$ 

e5. if  $n_2 = 3$ 
    then  $n_2 = 5$ ;
    end if
    Return Intensyvumas =  $\mu_2$ 

e6. if  $n_2 = 4$ 
    if  $n_1 > 0$ 
        then  $n_1 = n_1 - 1; n_2 = 1$ ;
        else  $n_2 = 0$ ;
    end if
    end if
    Return Intensyvumas =  $\mu_1$ 

e7. if  $n_2 = 5$ 
    if  $n_1 > 0$ 
        then  $n_1 = n_1 - 1; n_2 = 1$ ;
        else  $n_2 = 0$ ;
    end if
    end if
    Return Intensyvumas =  $\mu_2$ 

```

1.4.2.2. G-KOKSO SKIRSTINYS

Tarkime $M/G/1$ sistemoje bendrojo skirstinio funkcija G aproksimuojama Kokso skirstiniu. Įvykių aibė $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ir sistemos būsenų aibė $N = \{(n_1, n_2)\}$, $n_1 = \overline{0, L}$, $n_2 = \overline{0, 2}$.

e_1 – paraiška atėjo į aptarnavimo bloką intensyvumu λ ir pateko į pirmąją fazę;

e_2 – paraiška intensyvumu μ_1 perėjo į aptarnavimo bloko antrą fazę su tikimybe p_1 ;

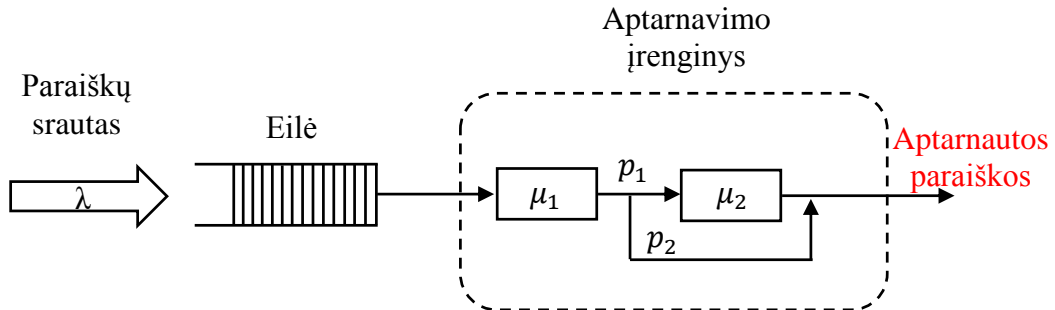
e_3 – paraiška baigta aptarnauti pirmoje fazėje ir intensyvumu μ_1 palieka sistemą su tikimybe p_2 ;

e_4 – paraiška baigta aptarnauti antroje fazėje ir intensyvumu μ_2 palieka sistemą;

n_1 – paraiškų skaičius sistemoje;

n_2 – aptarnavimo bloko fazė, kurioje aptarnaujama paraiška.

Aptarnavimo sistemos schema 1.5 pav. [8, 10]:



1.5 pav. $M/G/1$ aptarnavimo sistemos modelis, kai G -Kokso skirstinys

Sistemos pseudokodas [10]:

```

e1. if  $n_2 = 0$ 
    then  $n_2 = 1$ ;
    else if  $n_1 < L$ 
        then  $n_1 = n_1 + 1$ ;
        end if
    end if
    Return Intensyvumas =  $\lambda$ 

e2. if  $n_2 = 1$ 
    then  $n_2 = 2$ ;
    end if
    Return Intensyvumas =  $p \cdot \mu_1$ 

e3. if  $n_2 = 1$ 
    if  $n_1 > 0$ 
        then  $n_1 = n_1 - 1$ ;
        else  $n_2 = 0$ ;
        end if
    end if
    Return Intensyvumas =  $(1 - p) \cdot \mu_1$ 

e4. if  $n_2 = 2$ 
    if  $n_1 > 0$ 
        then  $n_1 = n_1 - 1; n_2 = 1$ ;
        else  $n_2 = 0$ ;
        end if
    end if
    Return Intensyvumas =  $\mu_2$ 

```

1.4.3. $G/M/1$ APTARNAVIMO SISTEMA

$G/M/1$ yra vieno kanalo sistema su begaline eile. Paraiškų srautas pasiskirstęs pagal bendrąją G dėsnį, o paraiškų aptarnavimo laikas pasiskirstęs pagal eksponentinį M dėsnį.

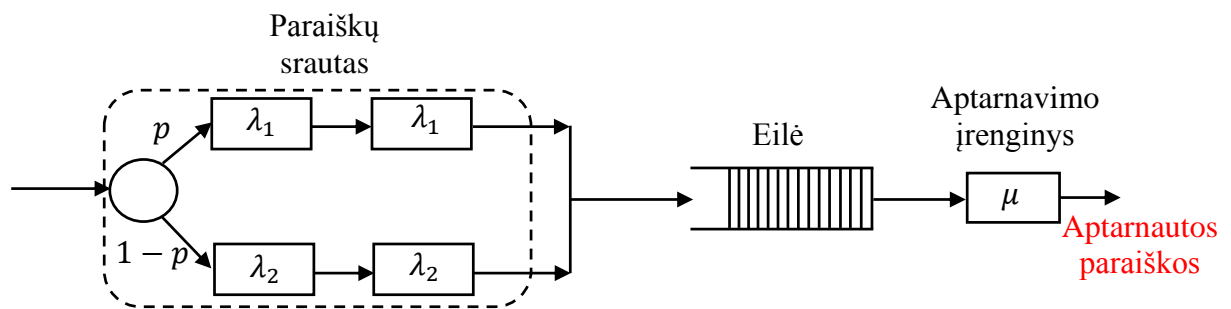
1.4.3.1. G -ERLANGO MIŠINYS

Tarkime $G/M/1$ sistemoje bendrojo skirstinio funkcija G aproksimuojama Erlango mišiniu. Įvykių aibė $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ ir sistemos būsenų aibė $N = \{(n_1, n_2, n_3)\}$, $n_1 = \overline{0, 5}$, $n_2 = \overline{0, L}$, $n_3 = 0, 1$. Praktikoje būtina įvesti tam tikrą eilės apribojimą nusakomą dydžiu L .

e_1 – paraiška atėjo į srauto bloko pirmą būseną;

e_2 – paraiška perėjo į srauto bloko antrą būseną su tikimybe p ;

- e_3 – paraiška perėjo į srauto bloko trečią būseną su tikimybe $1 - p$;
 e_4 – paraiška perėjo į srauto bloko ketvirtą būseną;
 e_5 – paraiška perėjo į srauto bloko penktą būseną;
 e_6 – paraiška iš srauto bloko ketvirtos būsenos atvyko į aptarnavimo įrenginį;
 e_7 – paraiška iš srauto bloko penktos būsenos atvyko į aptarnavimo įrenginį;
 e_8 – paraiška baigta aptarnauti aptarnavimo įrenginyje;
 n_1 – srauto bloko fazė, kurioje yra paraiška;
 n_2 – paraiškų skaičius aptarnavimo sistemoje;
 n_3 – paraiškų skaičius aptarnavimo įrenginyje.
 Aptarnavimo sistemos schema 1.6 pav. [8, 10]:



1.6 pav. $G/M/1$ aptarnavimo sistemos modelis, kai G -Erlango mišinys

Sistemos pseudokodas [10]:

- | | |
|--|---|
| <p>e1. if $n_1 = 0$
 then $n_1 = 1$;
 end if
 Return <i>Intensyvumas</i> = 10000</p> | <p>e5. if $n_1 = 3$
 then $n_1 = 5$;
 end if
 Return <i>Intensyvumas</i> = λ_2</p> |
| <p>e2. if $n_1 = 1$
 then $n_1 = 2$;
 end if
 Return <i>Intensyvumas</i> = $p \cdot 10000$</p> | <p>e6. if $n_1 = 4$
 if $n_3 = 0$; $n_2 < L$
 then $n_2 = n_2 + 1$; $n_1 = 0$;
 $n_3 = 1$
 else if $n_2 < L$
 then $n_2 = n_2 + 1$; $n_1 = 0$;
 end if
 Return <i>Intensyvumas</i> = λ_1</p> |
| <p>e3. if $n_1 = 1$
 then $n_1 = 3$;
 end if
 Return <i>Intensyvumas</i> = $(1 - p) \cdot 10000$</p> | <p>e7. if $n_1 = 5$
 if $n_3 = 0$; $n_2 < L$
 then $n_2 = n_2 + 1$; $n_1 = 0$;
 $n_3 = 1$
 else if $n_2 < L$</p> |
| <p>e4. if $n_1 = 2$
 then $n_1 = 4$;
 end if
 Return <i>Intensyvumas</i> = λ_1</p> | |


```

        then  $n_2 = n_2 + 1; n_1 = 0;$ 
    end if
Return Intensyvumas =  $\lambda_2$ 

    then  $n_2 = n_2 - 1;$ 
    else  $n_2 = 0; n_3 = 0;$ 
    end if
end if
Return Intensyvumas =  $\mu$ 

e8. if  $n_3 = 1$ 
    if  $n_2 > 1$ 

```

1.4.3.2. G-KOKSO SKIRSTINYS

Tarkime $G/M/1$ sistemoje bendrojo skirstinio funkcija G aprosimuojuama Kokso skirstiniu. Įvykių aibė $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ir sistemos būsenų aibė $N = \{(n_1, n_2, n_3)\}$, $n_1 = \overline{0, 2}$, $n_2 = \overline{0, L}$, $n_3 = 0, 1$.

e_1 – paraiška atėjo į srauto bloko pirmą fazę;

e_2 – paraiška intensyvumu λ_1 perėjo į srauto bloko antrą fazę su tikimybe p_1 ;

e_3 – paraiška baigta aptarnauti pirmoje srauto bloko fazėje ir intensyvumu λ_1 ateina į aptarnavimo įrenginį su tikimybe p_2 ;

e_4 – paraiška baigta aptarnauti antroje srauto bloko fazėje ir intensyvumu λ_2 ateina į aptarnavimo įrenginį;

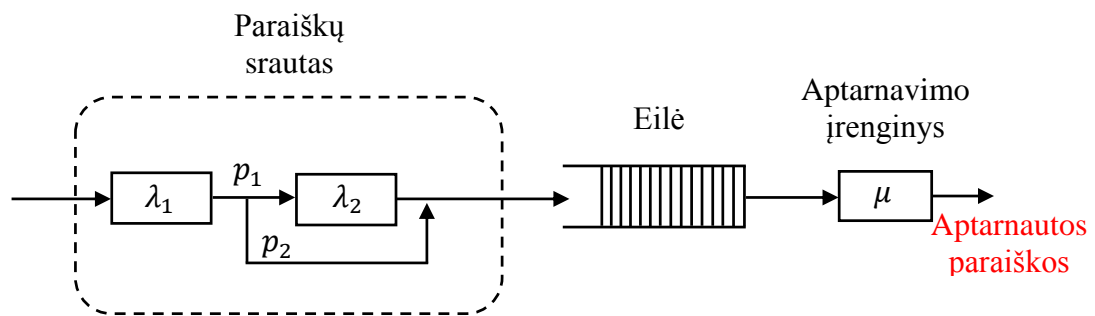
e_5 – paraiška baigta aptarnauti ir intensyvumu μ palieka sistemą;

n_1 – srauto bloko fazė, kurioje yra paraiška;

n_2 – paraiškų skaičius aptarnavimo sistemoje;

n_3 – paraiškų skaičius aptarnavimo įrenginyje.

Aptarnavimo sistemos schema 1.7 pav. [8, 10]:



1.7 pav. $G/M/1$ aptarnavimo sistemos modelis, kai G -Kokso skirstinys

Sistemos pseudokodas [10]:

```

e1.  $n_1 = 0$ 
    then  $n_1 = 1;$ 
    end if
Return Intensyvumas = 10000

e2.  $n_1 = 1$ 
    then  $n_1 = 2;$ 
    end if
Return Intensyvumas =  $p \cdot \lambda_1$ 

e3. if  $n_1 = 1$ 
    if  $n_3 = 0; n_2 < L$ 
        then  $n_2 = n_2 + 1; n_1 = 0;$ 
         $n_3 = 1$ 
    end if
end if

```

```

else if  $n_2 < L$ 
    then  $n_2 = n_2 + 1; n_1 = 0;$ 
end if
Return  $Intensyvumas = (1 - p) \cdot \lambda_1$ 

e4. if  $n_1 = 2$ 
    if  $n_3 = 0; n_2 < L$ 
        then  $n_2 = n_2 + 1; n_1 = 0;$ 
         $n_3 = 1$ 
    else if  $n_2 < L$ 
        then  $n_2 = n_2 + 1; n_1 = 0;$ 
    end if
Return  $Intensyvumas = \lambda_2$ 

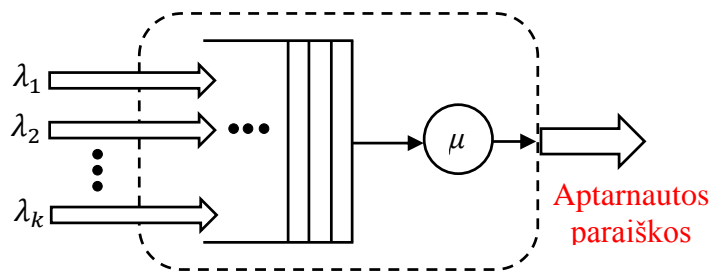
e5. if  $n_3 = 1$ 
    if  $n_2 > 1$ 
        then  $n_2 = n_2 - 1;$ 
        else  $n_2 = 0; n_3 = 0;$ 
    end if
end if
Return  $Intensyvumas = \mu$ 

```

1.4.4. PRIORITETINIO APTARNAVIMO SISTEMOS

Išskiriami du pagrindiniai prioritetinių paraiškų aptarnavimo būdai: pirmenybinis (*angl. preemptive*) ir nepirmenybinis (*angl. non-preemptive*). Pirmuoju atveju, paraiškos su žemesniu prioritetu aptarnavimas yra iš karto nutraukiamas, kai tik į sistemą atvyksta aukštesnio prioriteto paraiška. Kada visos paraiškos su aukštesniu prioritetu aptarnautos, nutrauktas žemesnio prioriteto paraiškos aptarnavimas atnaujinamas. Šis procesas gali būti pratęstas (*angl. resume*) arba vykdomas iš naujo (*angl. repeat*).

Nepirmenybiniu atveju, aukštesnio prioriteto paraiškos atvykimas į sistemą nepertraukia paraiškos su žemesniu prioritetu aptarnavimo proceso. Paraiškos su aukštesniu prioritetu aptarnaujamos tik po to, kai įrenginyje jau esančios žemesnio prioriteto paraiškos aptarnavimas baigtas. 1.8 pav. pateiktas prioritetinio aptarnavimo sistemos modelis. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ žymi skirtingų prioritetų paraiškų, kurios stoja į eilę prieš aptarnavimo įrenginį, srautus. [4]



1.8 pav. Prioritetinio aptarnavimo sistemos modelis

Toliau, kad būtų paprasčiau, aukštesnio prioriteto paraiškas vadinsime pirmos klasės paraiškomis, žemesnio prioriteto – antros klasės paraiškomis.

1.4.4.1. G-ERLANGO MIŠINYS

Tarkime $M/G/1$ sistemoje bendrojo skirstinio funkcija G aproksimuojama Erlango mišiniu. Įvykių aibė $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ ir sistemos būsenų aibė $N = \{(n_1, n_2, n_3, n_4)\}$, $n_1 = \overline{0, l_1}$, $n_2 =$

$\overline{0, l_2}$; čia l_1 – pirmos klasės laukimo pozicija; l_2 – antros klasės laukimo pozicija. Įvedame eilės apribojimą L .

e_1 – atvyko pirmos klasės paraiška intensyvumu λ_1 ;

e_2 – atvyko antros klasės paraiška intensyvumu λ_2 ;

e_3 – paraiška su tikimybe p perėjo į aptarnavimo bloko antrą fazę;

e_4 – paraiška su tikimybe $1 - p$ perėjo į aptarnavimo bloko trečią fazę;

e_5 – paraiška intensyvumu μ_1 perėjo į aptarnavimo bloko ketvirtą fazę;

e_6 – paraiška intensyvumu μ_2 perėjo į aptarnavimo bloko penktą fazę;

e_7 – paraiška baigta aptarnauti ketvirtoje fazėje ir intensyvumu μ_1 palieka sistemą;

e_8 – paraiška baigta aptarnauti penktoje fazėje ir intensyvumu μ_2 palieka sistemą;

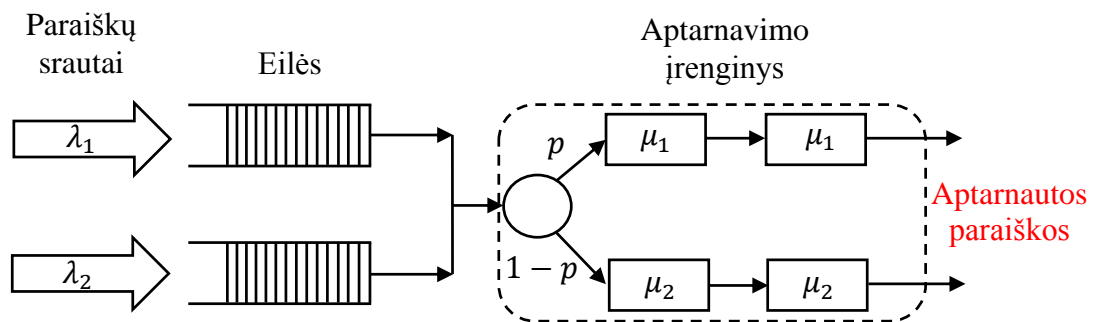
n_1 – pirmos klasės paraiškų skaičius sistemoje;

n_2 – antros klasės paraiškų skaičius sistemoje;

$n_3 = \{0, \text{ sistema yra tuščia}; 1, \text{ aptarnauta paraiška yra iš pirmos klasės}; 2, \text{ aptarnauta paraiška yra iš antros klasės}\}$;

$n_4 = \{0, \text{ sistema yra tuščia}; 1, \text{ paraiška aptarnauta pirmoje fazėje}; 2, \text{ paraiška aptarnauta antroje fazėje}; 3, \text{ paraiška aptarnauta trečioje fazėje}; 4, \text{ paraiška aptarnauta ketvirtoje fazėje}; 5, \text{ paraiška aptarnauta penktoje fazėje}\}$.

Aptarnavimo sistemos schema 1.9 pav. [8, 10]:



1.9 pav. $M/G/1$ aptarnavimo sistemos modelis, kai G -Erlango mišinys, 2 paraiškų srautai

Pirmenybinio aptarnavimo tipo sistemos pseudokodas [10]:

e1. if $n_3 \neq 1$

then $n_1 = n_1 + 1$; $n_3 = 1$; $n_4 = 1$;

else if $n_1 + n_2 < L$; $n_1 < l_1$

then $n_1 = n_1 + 1$;

end if

end if

Return *Intensyvumas* = λ_1

e2. if $n_3 = 0$

then $n_2 = 1$; $n_3 = 2$; $n_4 = 1$;

else if $n_1 + n_2 < L$

then $n_2 = n_2 + 1$;

end if

end if

Return *Intensyvumas* = λ_2

e3. if $n_4 = 1$
 then $n_4 = 2$;
 end if
 Return $Intensyvumas = p \cdot 10000$

e4. if $n_4 = 1$
 then $n_4 = 3$;
 end if
 Return $Intensyvumas = (1 - p) \cdot 10000$

e5. if $n_4 = 2$
 then $n_4 = 4$;
 end if
 Return $Intensyvumas = \mu_1$

e6. if $n_4 = 3$
 then $n_4 = 5$;
 end if
 Return $Intensyvumas = \mu_2$

e7. if $n_4 = 4$
 if $n_3 = 1$
 then $n_1 = n_1 - 1$;
 else $n_2 = n_2 - 1$

 end if
 if $n_1 > 0$
 then $n_3 = 1$; $n_4 = 1$;
 else if $n_2 > 0$
 then $n_3 = 2$; $n_4 = 1$;
 else $n_3 = 0$; $n_4 = 0$;
 end if

 end if
 end if
 Return $Intensyvumas = \mu_1$

e8. if $n_4 = 5$
 if $n_3 = 1$
 then $n_1 = n_1 - 1$;
 else $n_2 = n_2 - 1$
 end if
 if $n_1 > 0$
 then $n_3 = 1$; $n_4 = 1$;
 else if $n_2 > 0$
 then $n_3 = 2$; $n_4 = 1$;
 else $n_3 = 0$; $n_4 = 0$;
 end if

 end if
 end if
 Return $Intensyvumas = \mu_2$

Nepirminybinio aptarnavimo tipo sistemos pseudokodas [10]:

e1. if $n_3 = 0$
 then $n_1 = 1$; $n_3 = 1$; $n_4 = 1$;
 else if $n_1 + n_2 < L$; $n_1 < l_1$
 then $n_1 = n_1 + 1$;
 end if
 end if
 Return $Intensyvumas = \lambda_1$

e2. if $n_3 = 0$
 then $n_2 = 1$; $n_3 = 2$; $n_4 = 1$;
 else if $n_1 + n_2 < L$
 then $n_2 = n_2 + 1$;
 end if
 end if
 Return $Intensyvumas = \lambda_2$

e3. if $n_4 = 1$
 then $n_4 = 2$;
 end if
 Return $Intensyvumas = p \cdot 10000$

e4. if $n_4 = 1$
 then $n_4 = 3$;
 end if
 Return $Intensyvumas = (1 - p) \cdot 10000$

e5. if $n_4 = 2$
 then $n_4 = 4$;
 end if
 Return $Intensyvumas = \mu_1$

```

e6. if  $n_4 = 3$ 
    then  $n_4 = 5$ ;
    end if
Return Intensyvumas =  $\mu_2$ 

e7. if  $n_4 = 4$ 
    if  $n_3 = 1$ 
        then  $n_1 = n_1 - 1$ ;
        else  $n_2 = n_2 - 1$ 
    end if
    if  $n_1 > 0$ 
        then  $n_3 = 1$ ;  $n_4 = 1$ ;
        else if  $n_2 > 0$ 
            then  $n_3 = 2$ ;  $n_4 = 1$ ;
            else  $n_3 = 0$ ;  $n_4 = 0$ ;
        end if
    end if
end if

end if
Return Intensyvumas =  $\mu_1$ 

e8. if  $n_4 = 5$ 
    if  $n_3 = 1$ 
        then  $n_1 = n_1 - 1$ ;
        else  $n_2 = n_2 - 1$ 
    end if
    if  $n_1 > 0$ 
        then  $n_3 = 1$ ;  $n_4 = 1$ ;
        else if  $n_2 > 0$ 
            then  $n_3 = 2$ ;  $n_4 = 1$ ;
            else  $n_3 = 0$ ;  $n_4 = 0$ ;
        end if
    end if
end if
Return Intensyvumas =  $\mu_2$ 

```

1.4.4.2. G-KOKSO SKIRSTINYS

Tarkime $M/G/I$ sistemoje bendrojo skirstinio funkcija G aproksimuojama Kokso skirstiniu. Įvykių aibė $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ir sistemos būsenų aibė $N = \{(n_1, n_2, n_3, n_4)\}$, $n_1 = \overline{0, l_1}$, $n_2 = \overline{0, l_2}$; čia l_1 – pirmos klasės laukimo pozicija; l_2 – antros klasės laukimo pozicija. Įvedame eilės apribojimą L .

e_1 – atvyko pirmos klasės paraiška intensyvumu λ_1 ;

e_2 – atvyko antros klasės paraiška intensyvumu λ_2 ;

e_3 – paraiška aptarnauta pirmoje fazėje su tikimybe p_2 ;

e_4 – paraiška aptarnauta pirmoje fazėje su tikimybe p_1 ;

e_5 – paraiška aptarnauta antroje fazėje;

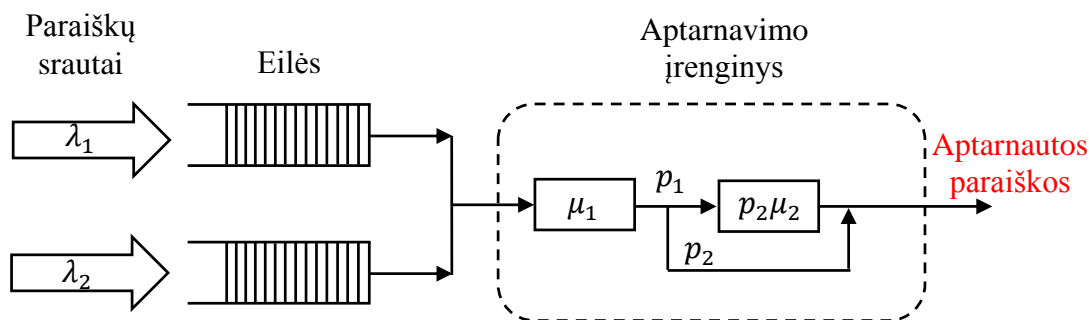
n_1 – pirmos klasės paraiškų skaičius sistemoje;

n_2 – antros klasės paraiškų skaičius sistemoje;

$n_3 = \{0, \text{sistema yra tuščia}; 1, \text{aptarnauta paraiška yra iš pirmos klasės}; 2, \text{aptarnauta paraiška yra iš antros klasės}\}$;

$n_4 = \{0, \text{sistema yra tuščia}; 1, \text{paraiška aptarnauta pirmoje fazėje}; 2, \text{paraiška aptarnauta antroje fazėje}\}$.

Aptarnavimo sistemos schema 1.10 pav. [8, 10]:



1.10 pav. $M/G/1$ aptarnavimo sistemos modelis, kai G -Kokso skirstinys, 2 paraiškų srautai

Pirmenybinio aptarnavimo tipo sistemos pseudokodas [10]:

```

e1. if  $n_3 \neq 1$ 
    then  $n_1 = n_1 + 1; n_3 = 1; n_4 = 1;$ 
    else if  $n_1 + n_2 < L; n_1 < l_1$ 
        then  $n_1 = n_1 + 1;$ 
    end if
end if
Return Intensyvumas =  $\lambda_1$ 

e2. if  $n_3 = 0$ 
    then  $n_2 = 1; n_3 = 2; n_4 = 1;$ 
    else if  $n_1 + n_2 < L$ 
        then  $n_2 = n_2 + 1;$ 
    end if
end if
Return Intensyvumas =  $\lambda_2$ 

e3. if  $n_4 = 1$ 
    if  $n_3 = 1$ 
        then  $n_1 = n_1 - 1;$ 
        else  $n_2 = n_2 - 1$ 
    end if
    if  $n_1 > 0$ 
        then  $n_3 = 1;$ 
        else if  $n_2 > 0$ 
            then  $n_3 = 2;$ 
            else  $n_3 = 0; n_4 = 0;$ 
        end if
    end if
     $n_5 = n_5 - 1$ 
end if

e4. if  $n_4 = 1$ 
    then  $n_4 = 2;$ 
end if
Return Intensyvumas =  $\mu_1 p_1$ 

e5. if  $n_4 = 2$ 
    if  $n_3 = 1$ 
        then  $n_1 = n_1 - 1;$ 
        else  $n_2 = n_2 - 1$ 
    end if
    if  $n_1 > 0$ 
        then  $n_3 = 1; n_4 = 1;$ 
        else if  $n_2 > 0$ 
            then  $n_3 = 2; n_4 = 1;$ 
            else  $n_3 = 0; n_4 = 0;$ 
        end if
    end if
     $n_5 = n_5 - 1$ 
end if
end if
Return Intensyvumas =  $\mu_2 p_2$ 

```

Nepirmenybinio aptarnavimo tipo sistemos pseudokodas [10]:

```

e1. if  $n_3 = 0$ 
    then  $n_1 = 1; n_3 = 1; n_4 = 1;$ 
    else if  $n_1 + n_2 < L; n_1 < l_1$ 
        then  $n_1 = n_1 + 1;$ 
    end if
end if

```

Return $Intensyvumas = \lambda_1$

e2. if $n_3 = 0$

then $n_2 = 1; n_3 = 2; n_4 = 1;$

else if $n_1 + n_2 < L$

then $n_2 = n_2 + 1;$

end if

end if

Return $Intensyvumas = \lambda_2$

e3. if $n_4 = 1$

if $n_3 = 1$

then $n_1 = n_1 - 1;$

else $n_2 = n_2 - 1$

end if

if $n_1 > 0$

then $n_3 = 1;$

else if $n_2 > 0$

then $n_3 = 2;$

else $n_3 = 0; n_4 = 0$

end if

end if

end if

Return $Intensyvumas \leftarrow \mu_1 p_2$

e4. if $n_4 = 1$

then $n_4 = 2;$

end if

Return $Intensyvumas = \mu_1 p_1$

e5. if $n_4 = 2$

if $n_3 = 1$

then $n_1 = n_1 - 1;$

else $n_2 = n_2 - 1$

end if

if $n_1 > 0$

then $n_3 = 1; n_4 = 1;$

else if $n_2 > 0$

then $n_3 = 2; n_4 = 1;$

else $n_3 = 0; n_4 = 0;$

$n_5 = n_5 - 1$

end if

end if

end if

Return $Intensyvumas = \mu_2 p_2$

1.4.5. G/G/I APTARNAVIMO SISTEMA

$G/G/I$ yra vieno kanalo sistema su begaline eile. Paraiškos atvyksta pagal bendrąjį G dėsnį, o paraiškų aptarnavimo trukmė pasiskirsčiusi taip pat pagal bendrąjį G dėsnį, tačiau abu G dėsniai yra skirtingi.

1.4.5.1. G-KOKSO SKIRSTINYS, G-ERLANGO MIŠINYS

Įvykių aibė $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ ir sistemos būsenų aibė $N = \{(n_1, n_2, n_3)\}, n_1 = \overline{0, 2}, n_2 = \overline{0, L}, n_3 = \overline{0, 3}$; čia L – eilės apribojimas.

e_1 – paraiška atėjo į srauto bloko pirmą būseną;

e_2 – paraiška perėjo į srauto bloko antrą būseną intensyvumu λ_1 su tikimybe p_1 ;

e_3 – paraiška perėjo į srauto bloko trečią būseną intensyvumu λ_2 su tikimybe p_2 ;

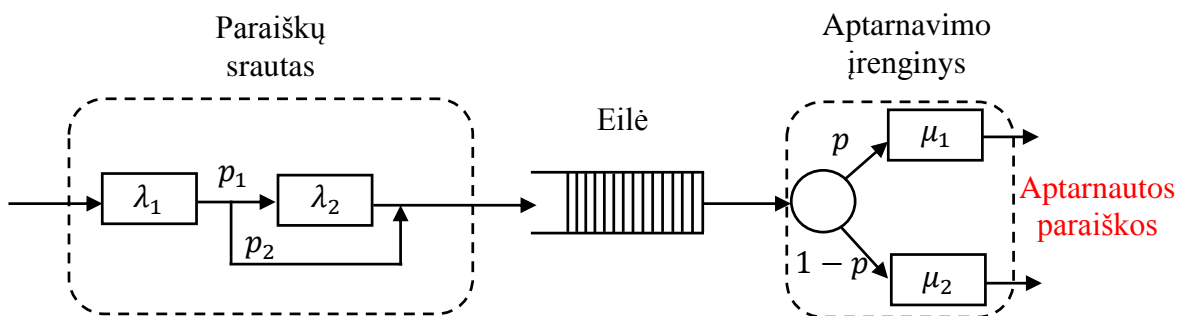
e_4 – paraiška aptarnauta pirmoje fazėje su tikimybe p_1 ;

e_5 – su tikimybe p paraiška perėjo į aptarnavimo bloko antrą fazę;

e_6 – su tikimybe $1 - p$ paraiška perėjo į aptarnavimo bloko trečią fazę;

e_7 – paraiška aptarnauta antroje aptarnavimo bloko fazėje ir palieka sistemą intensyvumu μ_1 ;

e_8 – paraiška aptarnauta trečioje aptarnavimo bloko fazėje ir palieka sistemą intensyvumu μ_2 ;
 n_1 – srauto bloko fazė, kurioje yra paraiška;
 n_2 – paraiškų skaičius aptarnavimo sistemoje;
 n_3 – paraiškų skaičius aptarnavimo įrenginyje.
 Aptarnavimo sistemos schema 1.11 pav. [8, 10]:



1.11 pav. $G/G/1$ aptarnavimo sistema, kai G -Kokso skirstinys, G -Erlango mišinys

Sistemos pseudokodas [10]:

```

e1. if  $n_1 = 0$ 
    then  $n_1 = 1$ ;
    end if
    Return Intensyvumas = 10000
e2. if  $n_1 = 1$ 
    then  $n_1 = 2$ ;
    end if
    Return Intensyvumas =  $p \cdot \lambda_1$ 
e3. if  $n_1 = 1$ 
    if  $n_3 = 0$ ;  $n_2 < L$ 
        then  $n_2 = n_2 + 1$ ;  $n_1 = 0$ ;
         $n_3 = 1$ 
    else if  $n_2 < L$ 
        then  $n_2 = n_2 + 1$ ;  $n_1 = 0$ ;
    end if
    Return Intensyvumas =  $(1 - p) \cdot \lambda_1$ 
e4. if  $n_1 = 2$ 
    if  $n_3 = 0$ ;  $n_2 < L$ 
        then  $n_2 = n_2 + 1$ ;  $n_1 = 0$ ;
         $n_3 = 1$ 
    else if  $n_2 < L$ 
        then  $n_2 = n_2 + 1$ ;  $n_1 = 0$ ;
    end if
    end if
    Return Intensyvumas =  $\lambda_2$ 
e5. if  $n_3 = 1$ 
    then  $n_3 = 2$ ;
    end if
    Return Intensyvumas =  $p \cdot 10000$ 
e6. if  $n_3 = 1$ 
    then  $n_3 = 3$ ;
    end if
    Return Intensyvumas =  $(1 - p) \cdot 10000$ 
e7. if  $n_3 = 2$ 
    then  $n_2 = n_2 - 1$ ;
    if  $n_2 > 0$ 
        then  $n_3 = 1$ ;
    else  $n_3 = 0$ 
    end if
    end if
    Return Intensyvumas =  $\mu_1$ 
e8. if  $n_3 = 3$ 
    then  $n_2 = n_2 - 1$ ;
    if  $n_2 > 0$ 

```



```

then  $n_3 = 1$ ;
else  $n_3 = 0$ 
end if
Return Intensyvumas =  $\mu_2$ 

```

1.4.5.2. G-ERLANGO MIŠINYS, G-KOKSO SKIRSTINYS

Įvykių aibė $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ ir sistemos būsenų aibė $N = \{(n_1, n_2, n_3)\}$, $n_1 = \overline{0,2}$, $n_2 = \overline{0,L}$, $n_3 = \overline{0,3}$; čia L – eilės apribojimas.

e_1 – paraiška atėjo į srauto bloko pirmą būseną;

e_2 – paraiška perėjo į srauto bloko antrą būseną intensyvumu λ_1 su tikimybe p ;

e_3 – paraiška perėjo į srauto bloko trečią būseną intensyvumu λ_2 su tikimybe $1 - p$;

e_4 – paraiška intensyvumu λ_1 ateina į aptarnavimo bloko pirmą fazę;

e_5 – paraiška intensyvumu λ_2 ateina į aptarnavimo bloko pirmą fazę;

e_6 – paraiška intensyvumu μ_1 perėjo į aptarnavimo bloko antrą fazę su tikimybe p_1 ;

e_7 – paraiška baigta aptarnauti pirmoje fazėje ir intensyvumu μ_1 palieka sistemą su tikimybe p_2 ;

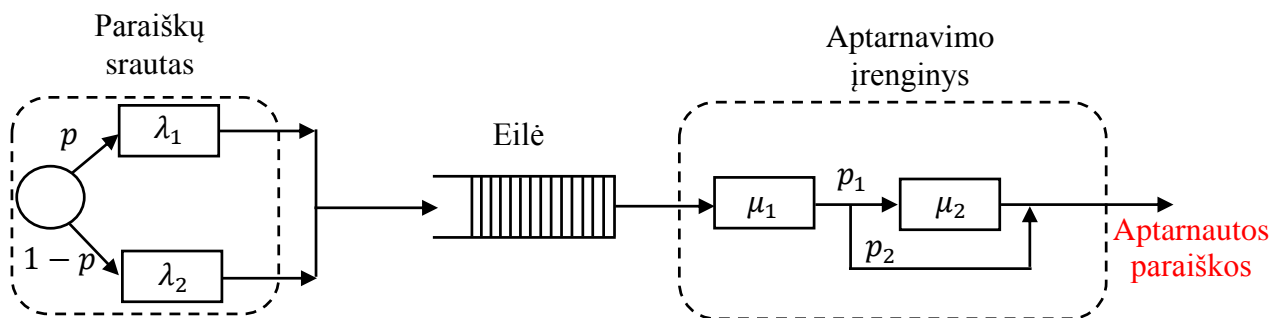
e_8 – paraiška baigta aptarnauti antroje fazėje ir intensyvumu μ_2 palieka sistemą;

n_1 – srauto bloko fazė, kurioje yra paraiška;

n_2 – paraiškų skaičius aptarnavimo sistemoje;

n_3 – paraiškų skaičius aptarnavimo įrenginyje.

Aptarnavimo sistemos schema 1.12 pav. [8, 10]:



1.12 pav. G/G/1 aptarnavimo sistema, kai G-Erlango mišinys, G-Kokso skirstinys

Sistemos pseudokodas [10]:

```

e1. if  $n_1 = 0$ 
    then  $n_1 = 1$ ;
    end if

```

```

Return Intensyvumas = 10000

```

```

e2. if  $n_1 = 1$ 
    then  $n_1 = 2$ ;
    end if

```

```

Return Intensyvumas =  $p \cdot 10000$ 

```

```

e3. if  $n_1 = 1$ 
    then  $n_1 = 3$ ;
    end if

```

```

Return Intensyvumas =  $(1 - p) \cdot 10000$ 

```

```

e4. if  $n_1 = 2$ 

```

```

    if  $n_3 = 0; n_2 < L$ 
        then  $n_2 = n_2 + 1; n_1 = 0;$ 
             $n_3 = 1$ 
    else if  $n_2 < L$ 
        then  $n_2 = n_2 + 1; n_1 = 0;$ 
    end if
Return  $Intensyvumas = \mu_1$ 

e5. if  $n_1 = 3$ 
    if  $n_3 = 0; n_2 < L$ 
        then  $n_2 = n_2 + 1; n_1 = 0;$ 
             $n_3 = 1$ 
    else if  $n_2 < L$ 
        then  $n_2 = n_2 + 1; n_1 = 0;$ 
    end if
Return  $Intensyvumas = \mu_2$ 

e6. if  $n_3 = 1$ 
    then  $n_3 = 2;$ 

end if
Return  $Intensyvumas = p_1 \cdot \lambda_1$ 

e7. if  $n_3 = 1$ 
    then  $n_2 = n_2 - 1;$ 
    if  $n_2 > 0$ 
        then  $n_3 = 1;$ 
        else  $n_3 = 0$ 
    end if
end if
Return  $Intensyvumas = p_2 \cdot \lambda_1$ 

e8. if  $n_3 = 2$ 
    then  $n_2 = n_2 - 1;$ 
    if  $n_2 > 0$ 
        then  $n_3 = 1;$ 
        else  $n_3 = 0$ 
    end if
end if
Return  $Intensyvumas = \lambda_2$ 

```

2. TYRIMŲ REZULTATAI IR JŲ APTARIMAS

2.1. BENDRŲJŲ SKIRSTINIŲ APROKSIMACIJA

Ištirsime keturis bendruosius skirstinius: gama, atvirkštinį Gauso, lognormalųjį ir Veibulo. Fiksavus atitinkamus skirstinių parametrus, aproksimaciją atliekame momentų bei iteraciniu maksimalaus tikėtimumo metodais. Šio tyrimo metu laikysime, kad EM metodo iteracijų skaičius lygus 1000.

2.1.1. GAMA SKIRSTINYS

Nagrinėsime gama skirstinio $\Gamma(k, \theta)$ su parametrais $k = 1,1; \theta = 0,9$ aproksimaciją. Skirstinio tankio funkcija:

$$p(x) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)}; x > 0, k > 0, \theta > 0. \quad (2.1)$$

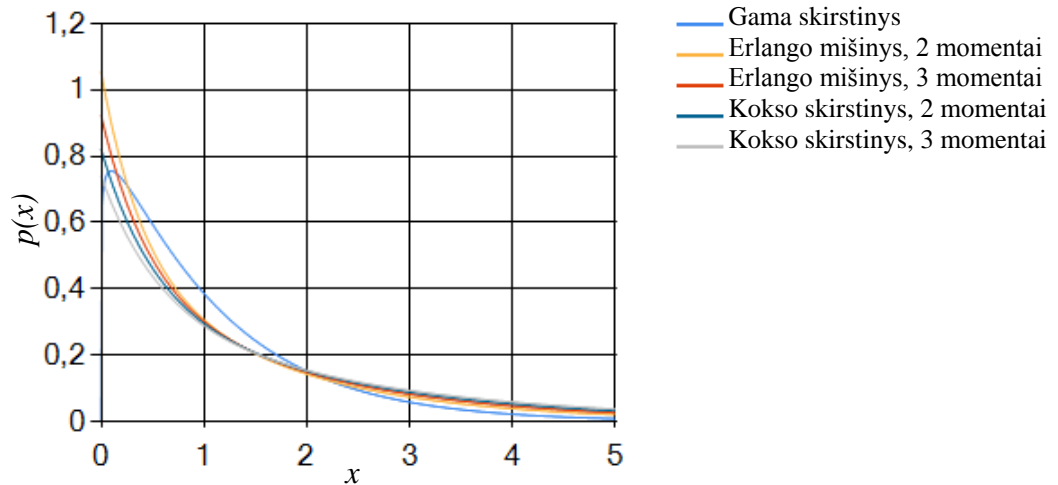
Pradiniai momentai randami iš (2.2) formulės:

$$\mu_r = \frac{\theta^r \Gamma(k+r)}{\Gamma(k)}, r = \overline{1,3}. \quad (2.2)$$

Apskaičiuoti gama skirstinio 3 pradiniai momentai: $m_1 = 0,9898; m_2 = 1,8703; m_3 = 5,2163$.

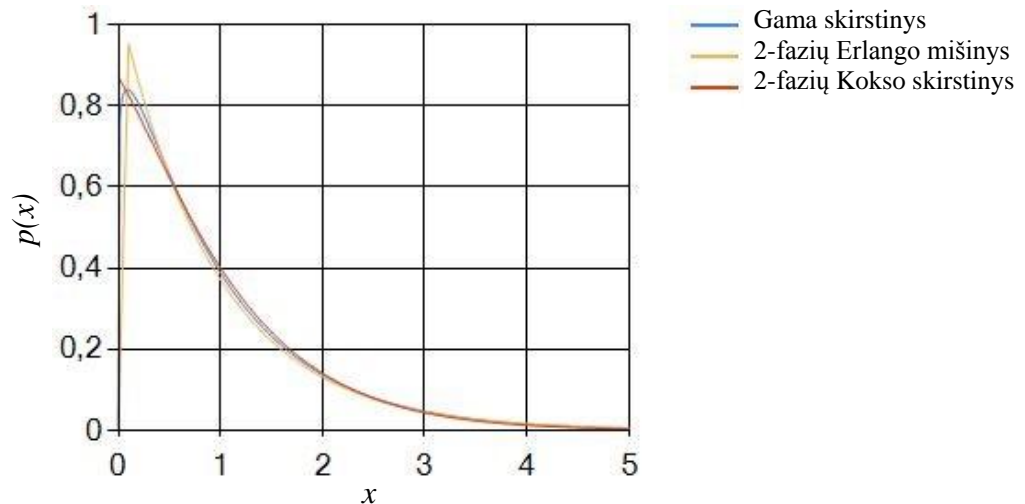
Variacijos koeficiento reikšmė $c^2 = 0,8261; 0,5 \leq c^2 \leq 1$ (žr. 1.1 lentelę), vadinasi, labiausiai tinkama momentų metodo aproksimacija bus taikant Kokso skirstinį, sulyginus 2 momentus.

2.1 pav. pateiktas momentų metodu atliktos gama skirstinio aproksimacijos rezultatų grafinis palyginimas taikant skirtingus fazinio tipo skirstinius. Kaip matyti iš grafiko, skirstinio tankio funkcija labiausiai sutampa su 2-fazių Kokso skirstinio, sulyginus 2 momentus, tankio funkcijos kreive. Gautas rezultatas sutampa su 1.1 lentelės aproksimacijos parinkimo kriterijumi.



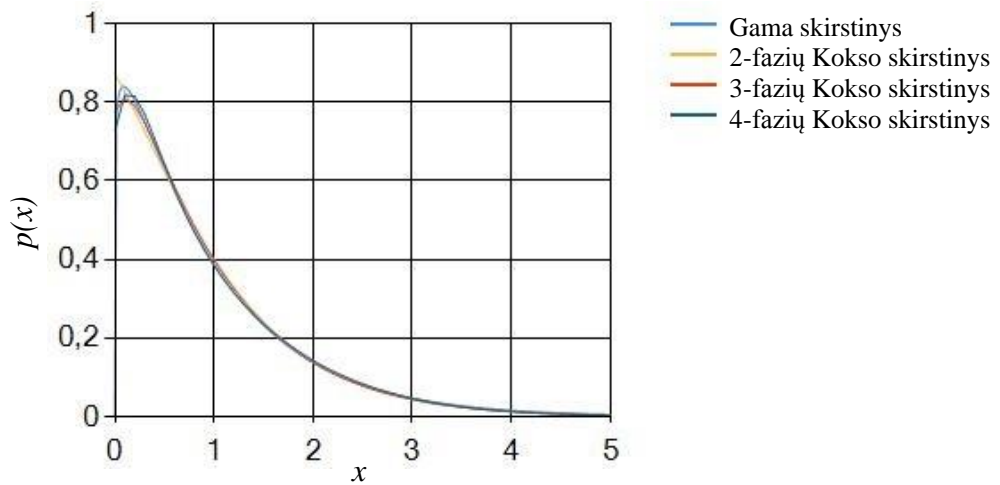
2.1 pav. Momentų metodas, $\Gamma(1,1; 0,9)$ aproksimacijos palyginimas

Maksimalaus tikėtinumo metodu atliktos aproksimacijos rezultatai grafiškai palyginti 2.2 pav., kuriame matyti, jog gama skirstinio tankio funkcija artimesnė Kokso skirstinio funkcijai. Sugretinus abu metodus tikslesnė aproksimacija gauta EM metodu, kadangi šiuo atveju fazinio tipo skirstinių grafikų kreivės panašesnės į $\Gamma(k, \theta)$ skirstinio grafiką.



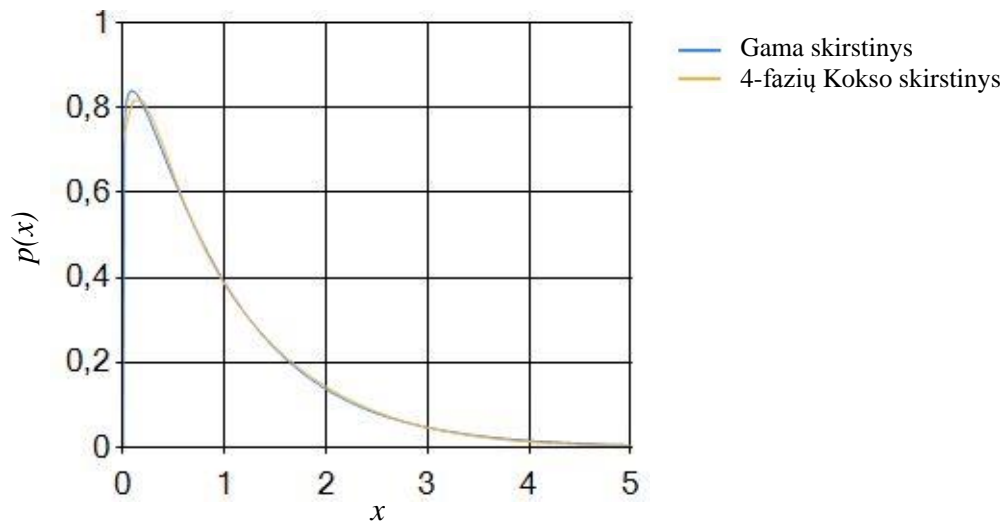
2.2 pav. EM metodas, $\Gamma(1,1; 0,9)$ aproksimacijos palyginimas

EM metode didinant fazių skaičių Kokso skirstiniu atliekamos aproksimacijos tikslumas gerėja, t.y. Kokso skirstinio funkcija artėja prie gama skirstinio. Tačiau iš kitos pusės, kuo bus didesnis fazių skaičius tuo struktūra bus sudėtingesnė, o tai įtakos lėtesnį programos vykdymą. 2.3 pav. pateiktas 2, 3 ir 4-fazių Kokso skirstinio kreivių palyginimas.



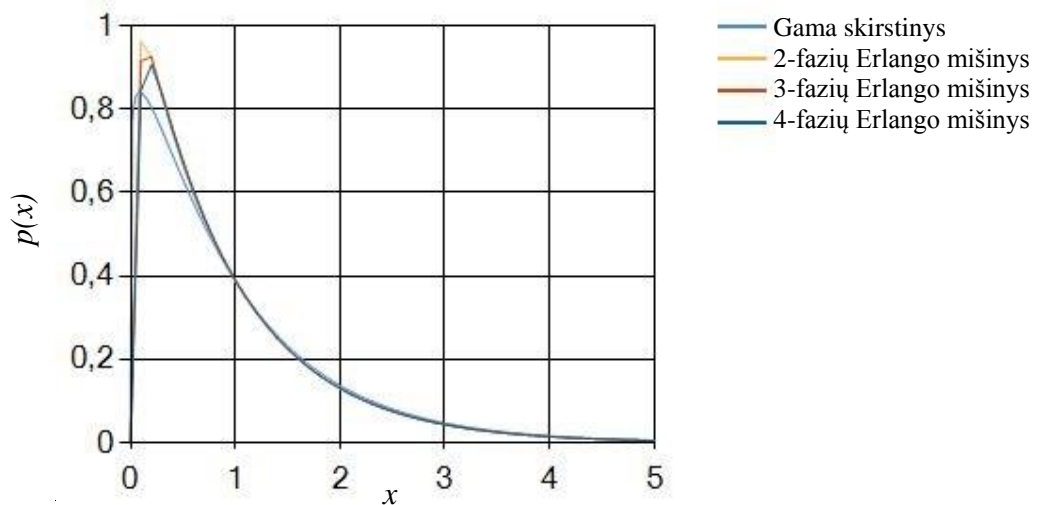
2.3 pav. 2, 3, 4-fazių Kokso skirstinys, $\Gamma(1,1; 0,9)$ aproksimacijos palyginimas

2.4 pav. išskirta 4-fazių Kokso skirstinio funkcija, kuri, iš grafiko matyti, beveik sutampa su gama skirstiniu. Vadinasi, 4-fazių Kokso skirstiniu atliekama aproksimacija yra tikslesnė nei 2 ar 3-fazių.



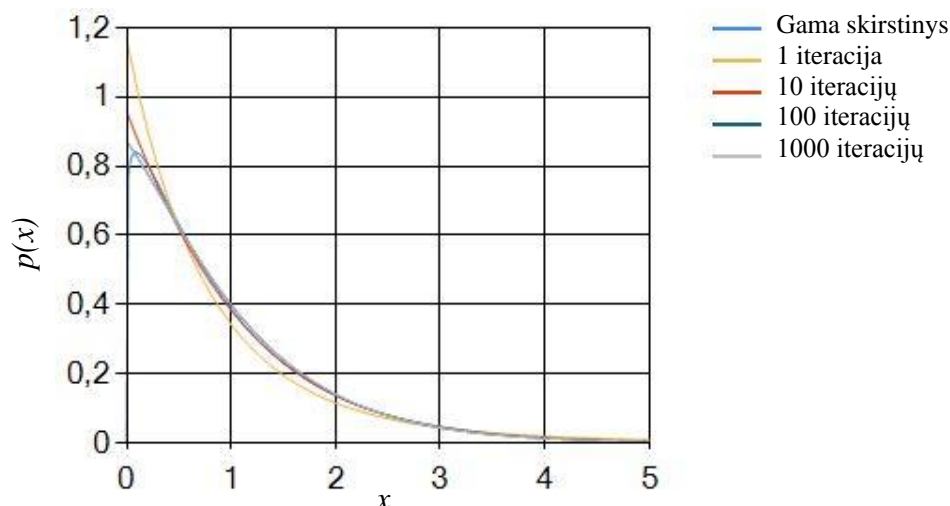
2.4 pav. 4-fazių Kokso skirstinys, $\Gamma(1,1; 0,9)$ aproksimacija

EM metodo aproksimacija tikslesnė imant didesnę fazių skaičių taip pat ir Erlango mišinio atveju. Gama skirstinio aproksimacijos skirtingų fazių Erlango mišiniais rezultatų grafinis palyginimas 2.5 pav.



2.5 pav. 2, 3, 4-fazių Erlango mišinys, $\Gamma(1,1; 0,9)$ aproksimacijos palyginimas

Aproksimacijos tikslumas maksimalaus tikėtinumo metodu priklauso ir nuo iteracijų skaičiaus. Didinant iteracijų skaičių fazinio tipo skirstinys artėja prie aproksimuojamo skirstinio, vadinasi rezultatas gerėja. Tačiau tai sulėtina programos vykdymą, kadangi kuo didesnis fazių skaičius, tuo konvergencija bus lėtesnė. 2.6 pav. matome grafinę aproksimacijos tikslumo priklausomybę nuo iteracijų skaičiaus.



2.6 pav. 2-fazių Kokso skirstinys, $\Gamma(1,1; 0,9)$ aproksimacijos palyginimas

Momentų ir EM metodais apskaičiuotų parametruų reikšmės surašytos 2.1 lentelėje. Parametrai nėra identiški, bet matyti, kad metodai aproksimuoja panašiai.

2.1 lentelė

$\Gamma(1,1; 0,9)$ skirstinio aproksimacijos parametruų reikšmės

Fazinio tipo skirstinio aproksimacija	μ_1	μ_2	p_1	p_2
Erlango mišinys, 2 momentai	2,9774	-	0,2457	0,7543
Erlango mišinys, 3 momentai	1,6671	6,4172	0,0773	0,9227
Kokso skirstinys, 2 momentai	2,0205	1,1115	0,5501	0,4499
Kokso skirstinys, 3 momentai	1,0855	2,9435	0,2021	0,7979
2-fazių Erlango mišinys, EM	1,5619	2,0825	0,0491	0,9509
2-fazių Kokso skirstinys, EM	1,0413	1,9921	0,2544	0,7456

2.1.2. ATVIRKŠTINIS GAUSO SKIRSTINYS

Atvirkštinio Gauso skirstinio $IG(\mu, \lambda)$ su parametrais $\mu = 0,7$; $\lambda = 0,5$ tankio funkcija

$$p(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} e^{\lambda\mu - \frac{1}{2}(\frac{\mu^2}{x} + \lambda^2 x)}; \lambda > 0, \mu > 0, x > 0, \quad (2.3)$$

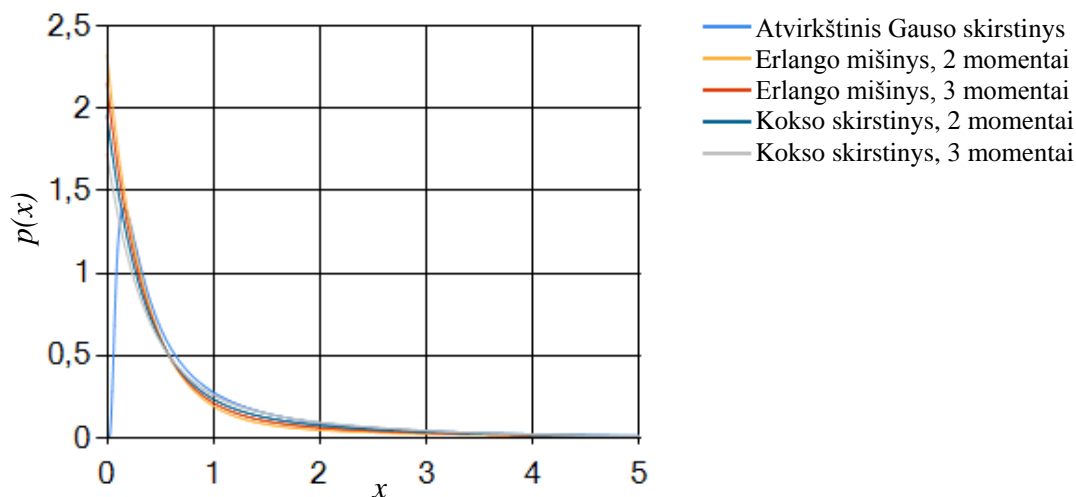
o pradiniai momentai apskaičiuojami pagal formules

$$\mu_1 = \mu; \mu_2 = \frac{\mu^2(\lambda + \mu)}{\lambda}; \mu_3 = \frac{\mu^3(\lambda^2 + 3\lambda\mu + 3\mu^2)}{\lambda^2}. \quad (2.4)$$

Atvirkštinio Gauso skirstinio 3 pradiniai momentai: $m_1 = 0,7$; $m_2 = 1,176$; $m_3 = 3,8004$.

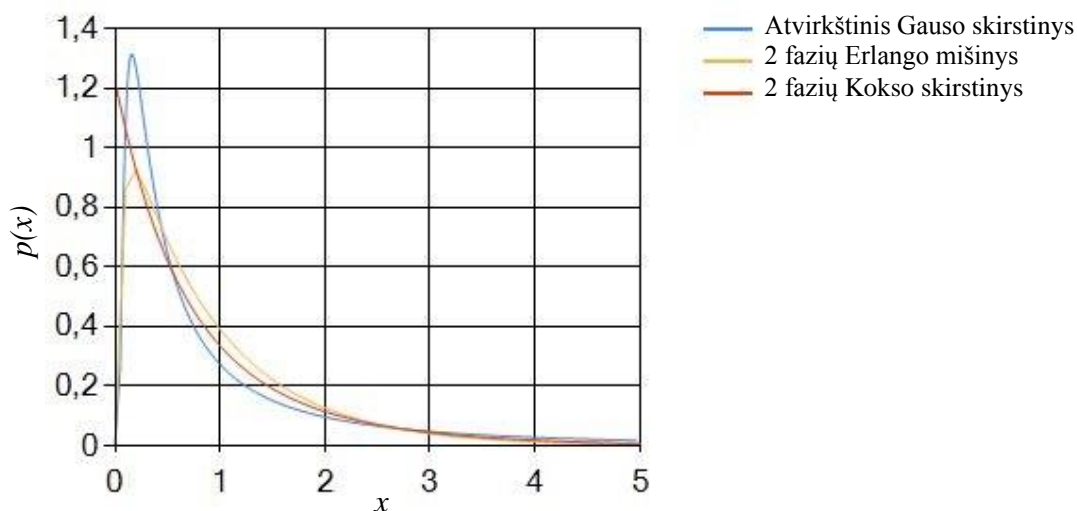
Variacijos koeficientas: $c^2 = 1,96$; $c^2 > 1$ (žr. 1.1 lentelę).

2.7 pav. pateiktas momentų metodu atliktos $IG(\mu, \lambda)$ skirstinio aproksimacijos rezultatų grafinis palyginimas pritaikius skirtingus fazinio tipo skirstinius. Skirstinio tankio funkcija labiausiai sutampa su 2-fazių Kokso skirstinio, sulyginus 3 momentus, tankio funkcijos kreive. Gautas rezultatas sutampa su 1.1 lentelės aproksimacijos parinkimo kriterijumi.



2.7 pav. Momentų metodas, $IG(0,7; 0,5)$ aproksimacijos palyginimas

Maksimalaus tikėtinumo metodu atliktos aproksimacijos rezultatai palyginti 2.8 pav. Atvirkštinio Gauso skirstinio tankio funkcija artimesnė Kokso skirstinio funkcijai. Palyginus abu metodus, matyti, jog geresnė aproksimacija gauta momentų metodu.



2.8 pav. EM metodas, $IG(0,7; 0,5)$ aproksimacijos palyginimas

2.2 lentelėje pateiktos momentų ir EM metodais aproksimuoto atvirkštinio Gauso skirstinio parametrų reikšmės.

2.2 lentelė

$IG(0,7; 0,5)$ skirstinio aproksimacijos parametrų reikšmės

Fazinio tipo skirstinio aproksimacija	μ_1	μ_2	p_1	p_2
Erlango mišinys, 2 momentai	3,0095	-	0,0313	0,9687
Erlango mišinys, 3 momentai	1,2884	6,5319	0,0500	0,9500
Kokso skirstinys, 2 momentai	2,8571	1,0204	0,3571	0,6429
Kokso skirstinys, 3 momentai	1,6710	0,6006	0,0610	0,9390
2-fazių Erlango mišinys, EM	1,5895	2,1193	0,0323	0,9677
2-fazių Kokso skirstinys, EM	2,0273	1,0596	0,2589	0,7411

2.1.3. LOGNORMALUSIS SKIRSTINYS

Lognormaliojo skirstinio $\ln \mathcal{N}(\mu; \sigma)$ su parametrais $\mu = 0,01$; $\sigma = 1$ tankio funkcija:

$$p(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}; x > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0. \quad (2.5)$$

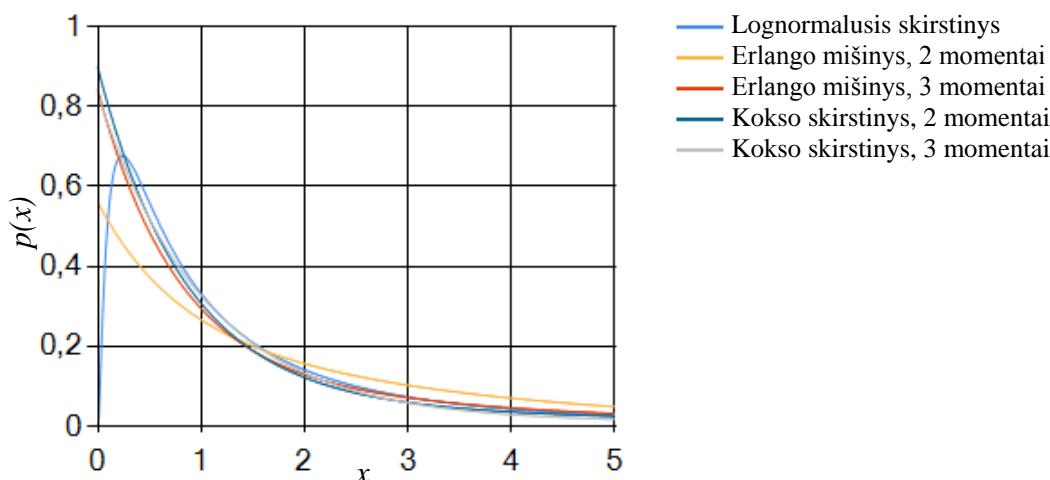
Pradiniai momentai gaunami iš šių formulių:

$$\mu_1 = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}; \mu_2 = e^{2(\mu + \sigma^2)}; \mu_3 = e^{3\mu + 9\frac{\sigma^2}{2}}. \quad (2.6)$$

Lognormaliojo skirstinio 3 pradiniai momentai: $m_1 = 1,6653$; $m_2 = 7,5383$; $m_3 = 92,7586$.

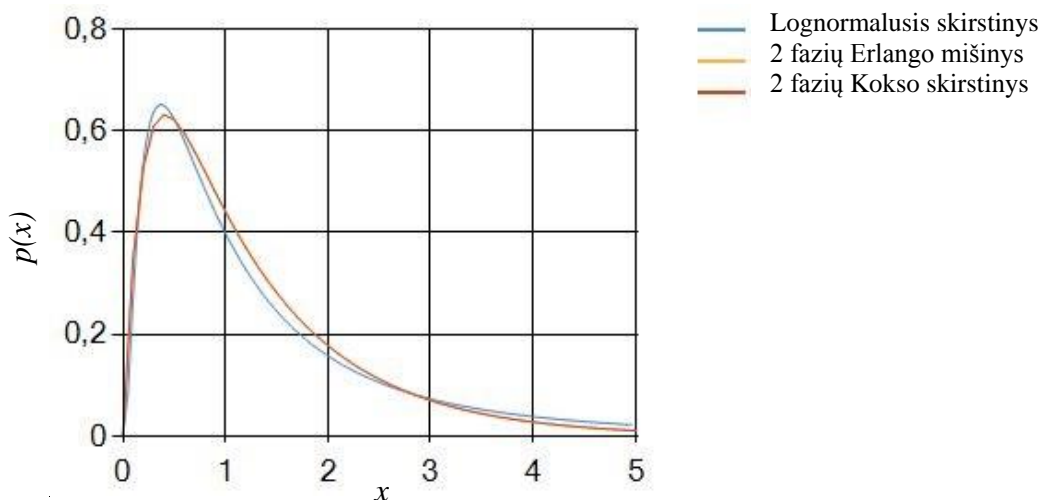
Variacijos koeficientas: $c^2 = 2,9526$; $c^2 > 1$ (žr. 1.1 lentelę).

Lognormaliojo skirstinio aproksimacijos, gautos momentų metodu, grafiškai palygintos 2.9 pav. Geriausia aproksimacija: 2-fazių Kokso skirstinį, sulyginus 3 momentus. Gautas rezultatas sutampa su 1.1 lentelės aproksimacijos parinkimo kriterijumi.



2.9 pav. Momentų metodas, $\ln \mathcal{N}(0,01; 1)$ aproksimacijos palyginimas

EM metodu atliktos aproksimacijos rezultatai palyginti 2.10 pav. Šiuo atveju Erlango mišinio ir Kokso skirstinio grafikai sutampa. Tikslesnė aproksimacija gauta maksimalaus tikėtinumo metodu.



2.10 pav. EM metodas, $\ln \mathcal{N}(0,01; 1)$ aproksimacijos palyginimas

Erlango mišiniu ir Kokso skirstiniu aproksimuoto lognormaliojo skirstinio parametru reikšmės pateiktos 2.3 lentelėje.

2.3 lentelė

$\ln \mathcal{N}(0,01; 1)$ skirstinio aproksimacijos parametru reikšmės

Fazinio tipo skirstinio aproksimacija	μ_1	μ_2	p_1	p_2
Erlango mišinys, 2 momentai	1,0856	-	0,3866	0,6134
Erlango mišinys, 3 momentai	0,3028	2,2801	0,3336	0,6664
Kokso skirstinys, 2 momentai	1,2010	0,3495	0,2910	0,7090
Kokso skirstinys, 3 momentai	0,6663	0,1295	0,0213	0,9787
2-fazių Erlango mišinys, EM	0,4387	1,7546	0,1988	0,8012
2-fazių Kokso skirstinys, EM	1,6785	0,8773	0,2143	0,7857

2.1.4. VEIBULO SKIRSTINYS

Veibulo skirstinio $\mathcal{W}(\lambda; k)$ su parametrais $\lambda = 0,7; k = 0,9$ tankio funkcija lygi

$$p(x) = k\lambda^k x^{k-1} \cdot e^{-(\lambda x)^k}; x \geq 0, \lambda > 0, k > 0. \quad (2.7)$$

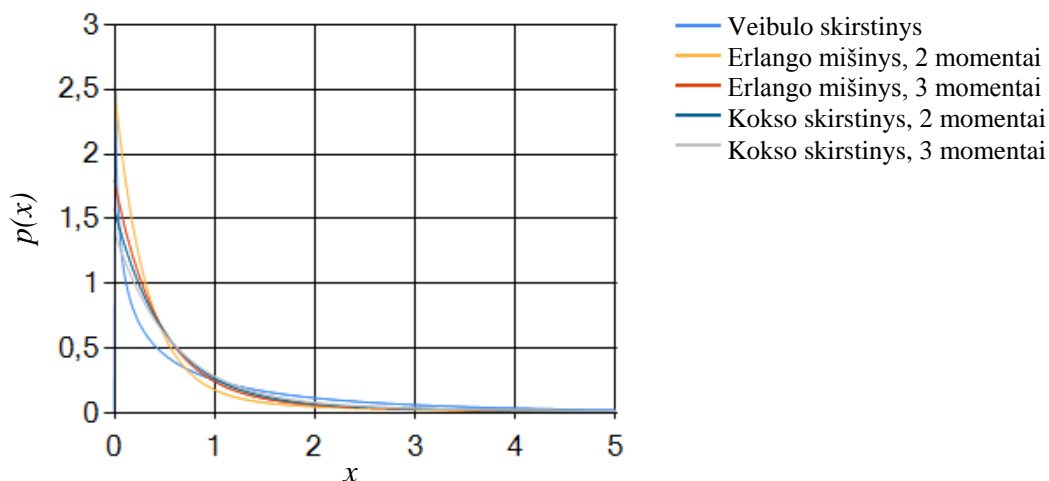
Pradiniai momentai:

$$\mu_r = \lambda^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{k}\right), r = \overline{1,3}. \quad (2.8)$$

Veibulo skirstinio 3 pradiniai momentai yra $m_1 = 1,1389; m_2 = 4,0706; m_3 = 27,1057$.

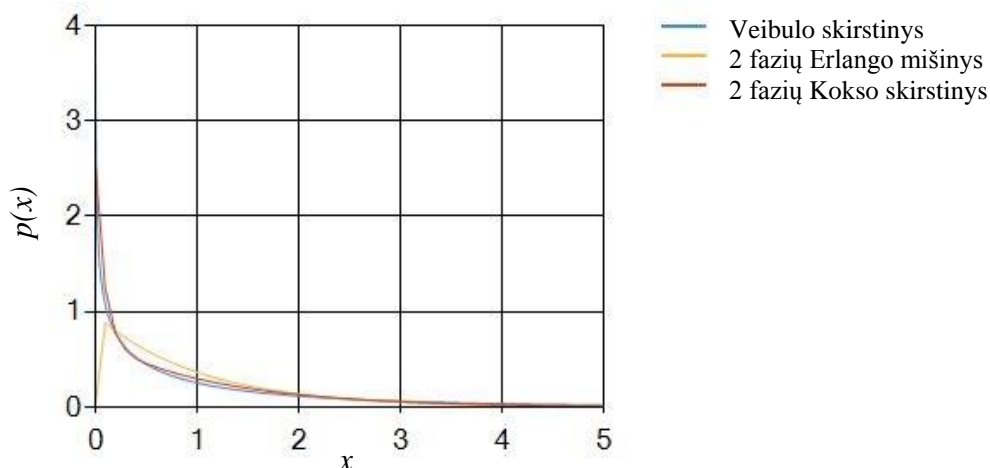
Variacijos koeficientas: $c^2 = 4,5719; c^2 > 1$ (žr. 1.1 lentelę).

$\mathcal{W}(0,7; 0,9)$ skirstinio aproksimacijos momentų metodu rezultatų grafinis palyginimas 2.11 pav. Geriausia aproksimacija (skirstinių grafikai visiškai sutampa) gauta pritaikant 2-fazių Kokso skirstinį, sulyginus 3 momentus. Gautas rezultatas sutampa su 1.1 lentelės aproksimacijos parinkimo kriterijumi.



2.11 pav. Momentų metodas, $\mathcal{W}(0,7; 0,9)$ aproksimacijos palyginimas

2.12 pav. pateikti EM metodu atliktos aproksimacijos rezultatai. Veibulo skirstinio tankio funkcija artimesnė Kokso skirstinio funkcijai. Palyginus abu metodus, matyti, jog geresnė aproksimacija gauta EM metodu.



2.12 pav. EM metodas, $\mathcal{W}(0,7; 0,9)$ aproksimacijos palyginimas

2.4 lentelėje pateiktos momentų ir EM metodais aproksimuoto $\mathcal{W}(0,7; 0,9)$ skirstinio Erlango mišinio ir Kokso skirstinio parametrų reikšmės.

2.4 lentelė

$\mathcal{W}(0,7; 0,9)$ skirstinio aproksimacijos parametrų reikšmės

Fazinio tipo skirstinio aproksimacija	μ_1	μ_2	p_1	p_2
Erlango mišinys, 2 momentai	1,3539	-	0,4674	0,5326
Erlango mišinys, 3 momentai	0,6863	5,0365	0,2279	0,7721
Kokso skirstinys, 2 momentai	1,7561	0,4106	0,2338	0,7662
Kokso skirstinys, 3 momentai	1,7800	0,4136	0,2387	0,7613
2-fazių Erlango mišinys, EM	0,4273	1,8719	0,1453	0,8547
2-fazių Kokso skirstinys, EM	1,7906	0,9359	0,2286	0,7714

2.2. M/G/I IR G/M/I APTARNAVIMO SISTEMOS MODELIAVIMAS

Paraiškų atvykimo srautas pasiskirstęs pagal paprastąjį Puasono dėsnį su intensyvumu $\lambda = 0,8$, aptarnavimo laikas pasiskirstęs pagal bendrąjį G dėsnį. Paraiškos iš eilės aptarnaujamos pagal jų atvykimo tvarką (*FIFO*). Paraiškų eilės ilgį apribojame iki 20. $M/G/I$ aptarnavimo sistemos modeliavimo rezultatai pateikti 2.5 lentelėje. L – vidutinis eilės ilgis, W – vidutinis laukimo laikas, p_i ; $i = \overline{0,3}$ – stacionarios tikimybės.

2.5 lentelė

$M/G/I$ sistemos modeliavimo rezultatų palyginimas

Aprosimacija	L	W	p_0	p_1	p_2	p_3
Gama	3,6670	4,5838	0,0102	0,0081	0,0064	0,0051
Kokso EM	3,6639	4,5798	0,0102	0,0081	0,0062	0,0050
Paklaida	-0,0845%	-0,0873%	0,0000%	0,0000%	-3,125%	-1,9608%
ARENA	3,6530	4,5663	0,0102	0,0081	0,0064	0,0049
Paklaida	-0,3818%	-0,3818%	0,0000%	0,0000%	0,0000%	-3,9216%
Atvirkštinis Gauso	1,4153	1,7691	0,3000	0,1680	0,0941	0,0527
Kokso 3 mom.	1,4229	1,7411	0,3110	0,1680	0,0963	0,0549
Paklaida	+0,5370%	-1,5827%	+3,6667%	0,0000%	+2,3379%	+4,1746%
ARENA	1,3821	1,7230	0,3110	0,1710	0,0933	0,0489
Paklaida	-2,3458%	-2,6058%	0,0000%	+1,7857%	-0,8502%	-7,2106%

Paraiškų atvykimo srautas pasiskirstęs pagal bendrąjį dėsnį G , o aptarnavimo laikas pagal eksponentinį dėsnį M . Paraiškos iš eilės aptarnaujamos pagal jų atvykimo tvarką (*FIFO*). Paraiškų eilės ilgį apribojame iki 20. $G/M/I$ aptarnavimo sistemos modeliavimo rezultatai pateikti 2.6 lentelėje.

2.6 lentelė

G/M/I sistemos modeliavimo rezultatų palyginimas

Aproximacija	L	W	p_0	p_1	p_2	p_3
Lognormalusis	5,9283	7,4104	0,6653	0,1781	0,0477	0,0128
Erlango EM	5,9270	7,2712	0,6596	0,1781	0,0495	0,0132
Paklaida	-0,0219%	-1,8784%	-0,8568%	0,0000%	+3,7736%	+3,1250%
ARENA	5,9280	7,0213	0,6614	0,1573	0,0425	0,0122
Paklaida	-0,0051%	-5,2507%	-0,5862%	-11,679%	-10,9015%	-4,6875%
Veibulo	15,5672	19,4590	0,1389	0,0957	0,0659	0,0454
Kokso EM	15,5396	19,2995	0,1379	0,0961	0,0651	0,0454
Paklaida	-0,2428%	-0,2426%	-0,7199%	+2,2340%	-1,2140%	0,0000%
ARENA	15,5560	19,4451	0,1389	0,0950	0,0651	0,0453
Paklaida	-0,0719%	-0,0714%	0,0000%	-0,7315%	-1,2140%	-0,2203%

Tiek skaitmeninio, tiek imitacinio modeliavimo rezultatai gana panašūs į teorines reikšmes. $M/G/I$ aptarnavimo sistemos modeliavimo rezultatai šiek tiek tikslesni nei $G/M/I$ sistemos.

2.3. PRIORITETINIŲ APTARNAVIMO SISTEMŲ MODELIAVIMAS

Ištirsime dviejų srautų $M/G/I$ prioritetinę aptarnavimo sistemą. Imame, kad pirmo srauto paraiškų atvykimo intensyvumas $\lambda_1 = 0,4$, antro – $\lambda_2 = 0,8$. Apribojame eilės ilgį: pirmo srauto (su aukštesniu prioritetu) iki 10 paraiškų, antro srauto (su žemesniu prioritetu) iki 20 paraiškų. Antro srauto aptarnavimas yra nutraukiamas, kai tik į sistemą atvyksta pirmo srauto paraiška. Antro tipo paraiškų aptarnavimas atnaujinamas (vykdomas iš naujo), kai aptarnautos visos pirmo srauto paraiškos. Pirmenybinio aptarnavimo tipo tyrimo rezultatai pateikti 2.7 lentelėje (viršutinis eilutės skaičius nusako pirmo srauto parametro reikšmę, antras skaičius – antro srauto). $L^{(1)}, L^{(2)}$ – atitinkamai pirmo ir antro srauto vidutinis eilės ilgis, $W^{(1)}, W^{(2)}$ – atitinkamai pirmo ir antro srauto vidutinis laukimo laikas, $p_i; i = \overline{0,3}$ – stacionarios tikimybės.

2.7 lentelė

M/G/I sistema, pirmenybinis aptarnavimo tipas

Aprosimacija	$L^{(1)}, L^{(2)}$	$W^{(1)}, W^{(2)}$	p_0	p_1	p_2	p_3
Gama						
Kokso EM	0,3872	0,9680	0,6979	0,2343	0,0538	0,0112
	9,0207	11,2758	0,0558	0,0605	0,0582	0,0561
ARENA	0,3872	0,9663	0,6979	0,2460	0,0541	0,01231
	9,0207	11,2613	0,0584	0,0605	0,0578	0,0552
Skirtumas	0,0000%	+0,1759%	0,0000%	-4,7561%	-0,5545%	-8,9431%
	0,0000%	+0,1288%	-4,4521%	0,0000%	+0,6920%	+1,6304%
Atvirkštinis Gauso						
Kokso 3 momentai	0,3845	0,9614	0,6999	0,2328	0,0534	0,0111
	8,5750	10,7188	0,0625	0,0670	0,0636	0,0605
ARENA	0,3845	0,9608	0,6991	0,2332	0,0526	0,0111
	8,5745	10,7188	0,0630	0,0670	0,0633	0,0604
Skirtumas	0,0000%	+0,0624%	+0,1144%	-0,1715%	+1,5209%	0,0000%
	+0,0058%	0,0000%	-0,7937%	0,0000%	+0,4739%	+0,1656%
Lognormalusis						
Erlango EM	0,5129	1,2821	0,6588	0,2291	0,0732	0,0253
	11,1716	13,9645	0,0397	0,0357	0,0349	0,0353
ARENA	0,5252	1,3438	0,6572	0,2255	0,0730	0,0253
	10,9419	13,1774	0,0397	0,0348	0,0348	0,0351
Skirtumas	-2,3420%	-4,5915%	+0,2435%	+1,5965%	+0,2740%	0,0000%
	+2,0993%	+5,9731%	0,0000%	+2,5862%	+0,2874%	+0,5698%
Veibulo						
Kokso EM	0,5062	1,2655	0,6657	0,2228	0,0724	0,0253
	9,9808	12,4760	0,0568	0,0490	0,0462	0,0452
ARENA	0,5062	1,2623	0,6674	0,2214	0,0763	0,0252
	9,9805	12,4749	0,0587	0,0511	0,0479	0,0492
Skirtumas	0,0000%	+0,2535%	-0,2547%	+0,6323%	-5,1114%	+0,3968%
	+0,0030%	+0,0088%	-3,2368%	-4,1096%	-3,5491%	-8,1302%

Toliau tiriame nepirmenybinį aptarnavimo tipą. Visos apibrėžtos sistemos sąlygos lieka tos pačios, kurios buvo aprašytos 2.3.1. skyrelyje, tik skirtumas toks, kad aptarnavimas vyksta nepirmenybine tvarka. Pirmo srauto paraiškos atėjimas į sistemą nepertraukia antro srauto paraiškos aptarnavimo

proceso. Pirmo srauto paraiška aptarnaujama iškart, kai antro srauto paraiška palieka aptarnavimo įrenginį. Nepirmenybinio aptarnavimo tipo tyrimo rezultatai pateikti 2.8 lentelėje.

2.8 lentelė

M/G/I sistema, nepirmenybinis aptarnavimo tipas

Aprosimacija	$L^{(1)}, L^{(2)}$	$W^{(1)}, W^{(2)}$	p_0	p_1	p_2	p_3
Gama						
Kokso EM	0,5856	1,4640	0,5839	0,2894	0,0939	0,0251
	5,9640	7,4550	0,1162	0,1162	0,0994	0,0854
ARENA	0,5856	1,4640	0,5835	0,2890	0,0935	0,0251
	5,9640	7,4550	0,1162	0,1157	0,0987	0,0820
Skirtumas	0,0000%	0,0000%	+0,0686%	+0,1384%	+0,5353%	0,0000%
	0,0000%	0,0000%	0,0000%	+0,4322%	+0,7092%	+4,1463%
Atvirkštinis Gauso						
Kokso 3 momentai	0,5781	1,4452	0,5879	0,2876	0,0924	0,0245
	5,6168	7,0210	0,1258	0,1242	0,1047	0,0886
ARENA	0,5779	1,4500	0,5880	0,2878	0,0924	0,0245
	5,6160	7,0210	0,1263	0,1240	0,1043	0,0889
Skirtumas	+0,0346%	0,0000%	-0,0170%	-0,0695%	0,0000%	0,0000%
	+0,0142%	-0,3310%	-0,3959%	+0,1613%	+0,3835%	-0,3375%
Lognormalusis						
Erlango EM	0,8529	2,1323	0,4913	0,2942	0,1319	0,0521
	11,6878	14,6098	0,0328	0,0297	0,0290	0,0290
ARENA	0,8536	2,1334	0,4911	0,2942	0,1318	0,0521
	11,6864	14,6001	0,0321	0,0293	0,0290	0,0293
Skirtumas	-0,0820%	-0,0516%	+0,0407%	0,0000%	+0,0759%	0,0000%
	+0,0120%	+0,0664%	+2,1807%	+1,3652%	0,0000%	-1,0239%
Veibulo						
Kokso EM	0,8424	2,1061	0,4992	0,2869	0,1272	0,0516
	10,6338	13,2922	0,0472	0,0409	0,0385	0,0380
ARENA	0,8424	2,1060	0,4992	0,2890	0,1293	0,0516
	10,6340	13,2810	0,0468	0,0410	0,0374	0,0371
Skirtumas	0,0000%	+0,0047%	0,0000%	-0,7266%	-1,6241%	0,0000%
	-0,0019%	+0,0843%	+0,8547%	-0,2439%	+2,9412%	+2,4259%

Aptarnavimo sistemos modeliavimo rezultatus palyginus su imitacinio modelio rezultatais, matyti, jog gautos paklaidos nėra didelės, taigi modeliavimo metodika yra tinkama. Didžiausia gauta paklaida 8,9431%. Nepirmenybinio aptarnavimo tipo rezultatai šiek tiek tikslesni palyginus su pirmenybiniu tipu.

Pirmenybinio aptarnavimo atveju pirmo srauto vidutinis eilės ilgis, vidutinis laukimo laikas yra mažesni, stacionarios tikimybės yra didesnės nei nepirmenybinio aptarnavimo atveju. Antro srauto vidutinių parametrų reikšmės mažesnės, o stacionarios tikimybės didesnės, esant nepirmenybinei tvarkai, nes darbai nėra pertraukiami.

2.9 lentelėje galime matyti, kaip kinta pagrindiniai aptarnavimo sistemų parametrai didinant aptarnavimo įrenginių skaičių, esant nepirmenybinei aptarnavimo tvarkai. Gama skirstinys $\Gamma(1,1; 0,9)$ aproksimuojamas EM metodo Kokso skirstiniu.

2.9 lentelė

Pagrindinių parametrų priklausomybė nuo įrenginių skaičiaus

	1	2	3
$L^{(1)}, L^{(2)}$	0,5856	0,1140	0,0108
	5,9640	4,8562	2,9373
$W^{(1)}, W^{(2)}$	1,4640	0,2850	0,0270
	7,4550	6,0702	3,6716
p_0	0,5839	0,9062	0,9902
	0,1162	0,1366	0,2869

2.4. G/G/1 APTARNAVIMO SISTEMŲ MODELIAVIMAS

$G/G/1$ aptarnavimo sistemai negalime taikyti analitinių metodų, todėl pasitelksime šiame darbe išnagrinėtą aproksimavimo metodiką. Gautų rezultatų teisingumą patikrinsime juos palygindami su imitacinio modeliavimo rezultatais. Paraiškų eilės ilgį apribojame iki 20.

Tarkime, kad paraiškos į sistemą atvyksta pagal Veibulo dėsnį, kurio parametrai $\lambda = 0,7; k = 0,9$. Srauto laiko tarpai tarp ateinančių paraiškų yra pasiskirstę pagal gama dėsnį su parametrais $k = 1,1; \theta = 0,9$.

Veibulo dėsnio aproksimavimo Kokso skirstiniu, sulyginant 3 momentus, parametrų reikšmės:

$$\mu_1 = 1,7800; \mu_2 = 0,4136; p_1 = 0,2387; p_2 = 0,7613.$$

Gama skirstinio aproksimavimo Erlango mišiniu, lyginant 3 momentus, parametrų reikšmės:

$$\mu_1 = 1,6671; \mu_2 = 6,4172; p_1 = 0,0773; p_2 = 0,9227.$$

Šio modelio rezultatai pateikti 2.10 lentelėje.

2.10 lentelė

***G/G/I* aptarnavimo sistemos modeliavimas, kai *G*-Kokso skirstinys, *G*-Erlango mišinys**

	<i>L</i>	<i>W</i>	<i>p</i> ₀	<i>p</i> ₁	<i>p</i> ₂	<i>p</i> ₃
Koksas+ Erlangas	1,5066	1,8833	0,4889	0,3440	0,2021	0,1281
ARENA	1,5061	1,8820	0,4892	0,3448	0,2130	0,1190
Paklaida	-0,0332%	-0,0690%	+0,0614%	+0,2326%	+5,3934%	-7,1038%

Tarkime, kad paraiškos į sistemą atvyksta pagal gama dėsnį, kurio parametrai $k = 1,1$; $\theta = 0,9$. Srauto laiko tarpai tarp ateinančių paraiškų yra pasiskirstę pagal atvirkštinį Gauso dėsnį su parametrais $\mu = 0,7$; $\lambda = 0,5$.

Gama dėsnio aproksimavimo Erlango mišiniu, lyginant 3 momentus, parametų reikšmės:

$$\mu_1 = 1,6671; \mu_2 = 6,4172; p_1 = 0,0773; p_2 = 0,9227.$$

Atvirkštinio Gauso skirstinio aproksimavimo Kokso skirstiniu, sulyginant 3 momentus, parametų reikšmės:

$$\mu_1 = 1,6710; \mu_2 = 0,6006; p_1 = 0,0610; p_2 = 0,9390.$$

Aptarnavimo modelio rezultatai pateikti 2.11 lentelėje.

2.11 lentelė

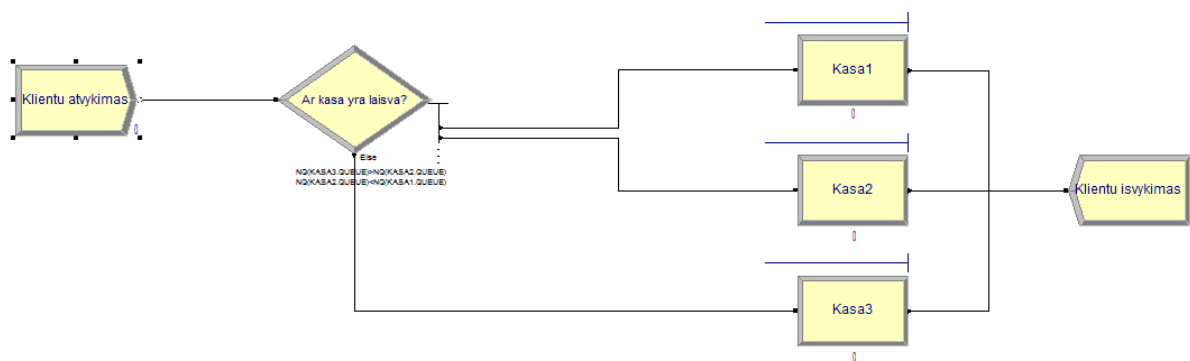
***G/G/I* aptarnavimo sistemos modeliavimas, kai *G*-Erlango mišinys, *G*-Kokso skirstinys**

	<i>L</i>	<i>W</i>	<i>p</i> ₀	<i>p</i> ₁	<i>p</i> ₂	<i>p</i> ₃
Erlangas+ Koksas	2,8767	3,5959	0,5295	0,4341	0,3375	0,2507
ARENA	2,8740	3,4694	0,5516	0,4320	0,3354	0,2510
Paklaida	+0,0939%	+3,6462%	-4,0065%	+0,4861%	+0,6261%	-0,1195%

Palyginus abiejų aptarnavimo sistemų modeliavimo rezultatus su imitacinio modelio rezultatais, matyti, jog gautos paklaidos nėra didelės. Didžiausia gauta paklaida 7,1038%. Taigi, darome išvadą, kad aprašyta aproksimavimo metodika tinka sudėtingos sistemos *G/G/I* modelio kūrimui.

2.5. APTARNAVIMO SISTEMŲ IMITACINIS MODELIAVIMAS

Kai nepavyksta pritaikyti analitinių ir skaitmeninių metodų, tuomet pasitelkiamas eksperimentinės optimizacijos metodas. Siekiant įsitikinti, ar matematinis modelis funkcionuoja teisingai, patikrinimą atliekame modeliavimo aplinkoje ARENA 12.0.



2.13 pav. Nesudėtingas imitacinis modelis ARENA aplinkoje

2.6. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR VARTOTOJO INSTRUKCIJA

Magistriniame darbe sukurta aptarnavimo sistemų modeliavimui skirta universali programinė įranga bei patogi vartotojo sąsaja. Programa parašyta C++ programavimo kalba Microsoft Visual Studio Express 2013 aplinkoje.

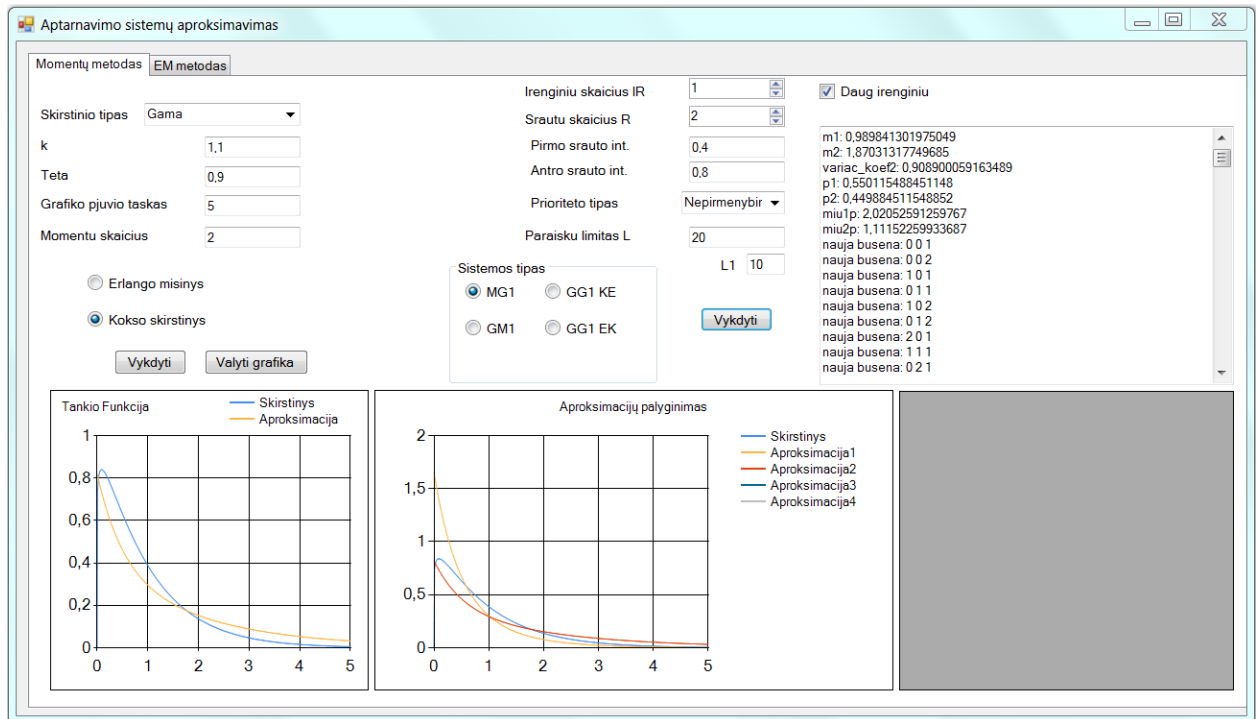
Paleidus programą ekrane matoma vartotojo sąsaja „Aptarnavimo sistemų aproksimavimas“, kurioje įvedus ir nustatčius tinkamus parametrus yra modeliuojamos pasirinktos aptarnavimo sistemos. Kiekvienam aproksimavimo metodui sukurti atskiri programos lango puslapiai: „Momentų metodas“ ir „EM metodas“. Viso tyrimo metu vartotojos gali vaikščioti iš vieno puslapio į kitą, keisti parametrus, kurie išsisaugo perėjus į kitą puslapį. Tai leidžia programos vartotojui lengvai palyginti abiejų aproksimacijų rezultatus.

Kaip atrodo programos lango puslapis „Momentų metodas“ matome 2.14 pav. Pirmiausiai vartotojas pasirenka vieną „Skirstinio tipą“ iš keturių galimų variantų: atvirkštinis Gauso, gama, lognormalusis ir Veibulo. Toliau įvedami du parametrai priklausomai nuo to, koks buvo pasirinktas skirstinio tipas. „Grafiko pjūvio taškas“ laukelyje įvedama reikšmė, kuri yra pjūvio taškas x ašyje. Pasirenkamas Erlango mišinio arba Kokso skirstinio aproksimacijos tipas ir įvedamas „Momentų skaičius“ lygus 2 arba 3. Paspaudus pirmąjį mygtuką „Vykdėti“, apskaičiuojami pradiniai momentai, aproksimavimo parametrų reikšmės bei nubraižomas aproksimuojamo skirstinio ir aproksimacijos tankio grafikas. Kuo kreivės labiau sutampa, tuo aproksimacija yra geresnė. Šalia esančiame grafike palyginimui fiksuojamos visos atliktos aproksimacijos. Mygtukas „Valyti grafiką“ pilnai išvalo dešinėje pusėje esantį grafiką.

Toliau laukelyje „Srautų skaičius R“ pasirenkame kiek norime analizuoti srautų, t.y. vieną arba du. Srautų intensyvumus nurodome apačioje esančiuose laukeliuose „Pirmo srauto int.“, „Antro srauto int.“. Nustatome „Prioriteto tipą“: pirmenybinis ar nepirmenybinis. „Paraiškų limitas L“ laukelyje įvedamas eilės dydžio apribojimas. „L1“ laukelyje nurodome antro srauto eilės apribojimą, jeigu tiriamo du srautus. Galiausiai pasirenkame aptarnavimo sistemos tipą: $M/G/1$, $G/M/1$, $G/G/1$ KE, $G/G/1$ EK; čia

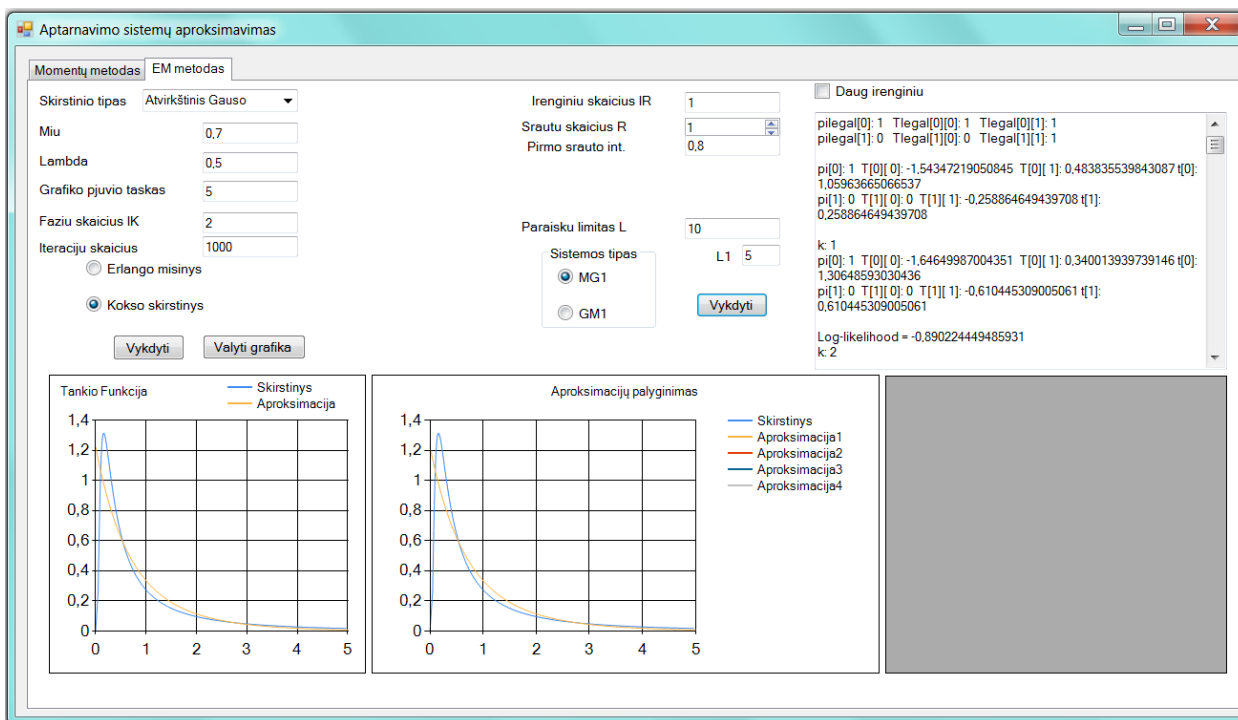
E – Erlango mišinys, K – Kokso skirstinys. Nuspaudus mygtuką „Vykdėti“, programa išveda sistemos būsenas, suskaičiuoja stacionarias tikimybes, vidutinį paraiškų eilės ilgį ir vidutinį laukimo laiką.

Uždėjus varnelę laukelyje „Daug įrenginių“ ir įrašius „Įrenginių skaičių“, vartotojas gali stebėti tokių parametrų, kaip vidutinio eilės ilgio ar laukimo laiko reikšmių, kitimą priklausomai nuo paraiškas aptarnaujančių įrenginių skaičiaus.



2.14 pav. Programos lango puslapis „Momentų metodas“

Puslapio „Momentų metodas“ vaizdas pateiktas 2.15 pav. Šiame lange viskas atliekama labai panašiai, kaip prieš tai aprašytame lango puslapyje. Skiriasi tik tai, kad EM metode įrašome ne lyginamų momentų skaičių, o „Fazių skaičių IK“. Toliau nurodome iteracijų skaičių. Kuo bus didesnis fazių ir iteracijų skaičius, tuo rezultatai bus patikimesni, tačiau programos vykdymo laikas dėl to gali ženkliai pailgėti.



2.15 pav. Programos lango puslapis „EM metodas“

IŠVADOS

1. Tikslesnė aproksimacija gaunama naudojant iteracinį maksimalaus tikėtimumo algoritmą; be to šis metodas lankstesnis, platesnės tyrimo galimybės;
2. Patikimesni aptarnavimo sistemos modeliavimo rezultatai gaunami naudojant daug fazių ir daug iteracijų, tačiau tuomet padidėja Markovo grandinių sudėtingumas, ilgėja aproksimacijos laikas, o analizė tampa labai komplikuota;
3. 2 ir 3 momentų sulyginimas duoda pakankamai gerus rezultatus;
4. Patikimiems rezultatams gauti maksimalaus tikėtimumo metodu užtenka 2 fazių ir 1000 iteracijų.
5. Aptarnavimo sistemų $M/G/1$, $G/M/1$ bei prioritetinių sistemų rezultatai gana tikslūs, gautos nedidelės paklaidos;
6. Neištiriamos analiziniais metodais $G/G/1$ sistemos aproksimavimo rezultatai leidžia daryti prielaidą, kad modelis tinkamas ir sudėtingų sistemų tyrimui;
7. Sukurta universali programinė įranga C++ programavimo kalboje ir patogi vartotojo sąsaja, kurios pagalba galima atlikti platų sistemos tyrimą.

PADĖKOS

Norėčiau išreikšti padėką savo darbo vadovui prof. dr. E. Valakevičiui už pasiūlytą įdomią baigiamojo darbo temą, idėjas, pastabas, naudingus patarimus bei konsultacijoms skirtą laiką.

Taip pat noriu padėkoti draugui Auridui Franckevičiui už visokeriopą palaikymą ir pagalbą programavimo klausimais.

Noriu padėkoti savo šeimai už paramą ir padrąšinimą.

ŠALTINIAI IR LITERATŪRA

1. Adan I., Resing J. Queueing Theory. Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology. Feb 14, 2001
2. Elmanhraby S.E., Benmansour R., Artiba A., Allaoui H. On The Approximation of Arbitrary Distributions by Phase-Type Distributions. 2009
3. Ishay E. Fitting Phase-Type Distributions to Data from a Telephone Call Center. Research Thesis. Oct, 2002
4. Kendalo notacija: http://en.wikipedia.org/wiki/Kendall%27s_notation
5. Kharoufeh J.P., Solo C.J., Ulukus M.Y. Semi-Markov Models for Degradation-Based Reliability. Sep., 2009
6. Komarkova Z. Phase-Type Approximation Techniques. Faculty of Informatics, Masaryk University. Bachelor Thesis. Spring, 2012
7. Nielsen B.F. Lecture notes on phase-type distributions for 02407, Stochastic Processes. Oct, 2012
8. Pranevičius H., Valakevičius E. Numerical Models of Systems Specified by Markovian processes. Technologija, Kaunas, 1996
9. Rindzevičius R. Teletrafiko teorija. Vadovėlis. Technologija, Kaunas, 2004
10. Šnipas M. Stochastinių sistemų aproksimavimas Markovo modeliais. Magistro darbas. KTU, Kaunas, 2008
11. Valakevičius E. Aptarnavimo sistemų moksliniai tyrimai nuo perspektyvų iki problemų. <http://www.fmf.lt/ft/studiju-programos/taikomoji-matematika/S16904/straipsnis/Aptarnavimo-sistemu-moksliniai-tyrimai-nuo-perspektyvu-iki-problemu?p=1>