



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS**

Eglė Butkevičiūtė

**KATASTROFOS NETIESINĖSE SISTEMOSE IR ŽMONIŲ
DARBO GRUPĖSE**

Baigiamasis magistro projektas

Vadovas
asist. Mantas Landauskas

KAUNAS, 2015

**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS**

**KATASTROFOS NETIESINĖSE SISTEMOSE IR ŽMONIŲ
DARBO GRUPĖSE**

Baigiamasis magistro projektas
Taikomoji matematika (kodas 612G10003)

Vadovas

(parašas) Asist. Mantas Landauskas
(data)

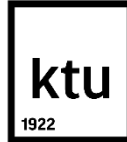
Recenzentas

(parašas) Dr. Liepa Bikulčienė
(data)

Projektą atliko

(parašas) Eglė Butkevičiūtė
(data)

KAUNAS, 2015



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

Eglė Butkevičiūtė
Taikomoji matematika (612G10003)

Baigiamojo projekto „Katastrofos netiesinėse sistemose ir žmonių darbo grupėse“

AKADEMINIO SAŽININGUMO DEKLARACIJA

2015 m. gegužės mėn. 22 d.

Kaunas

Patvirtinu, kad mano, **Eglės Butkevičiūtės**, baigiamasis darbas tema „Katastrofos netiesinėse sistemose ir žmonių darbo grupėse“ yra parašytas visiškai savarankiškai, o visi pateikti duomenys ar tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti sąžiningai. Šiame darbe nei viena darbo dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar internetinių šaltinių, visos kitų šaltinių tiesioginės ir netiesioginės citatos nurodytos literatūros nuorodose. Įstatymu nenumatytų piniginių sumų už šį darbą niekam nesu mokėjęs.

Aš suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo faktui, man bus taikomos nuobaudos, remiantis Kauno technologijos universitete galiojančia tvarka.

(studento vardas ir pavardė, įrašyti ranka)

(parašas)

Butkeviciute E. Catastrophe models in nonlinear dynamical systems and working groups : Master's work in applied mathematics / supervisor assist. Mantas Landauskas; Department of Mathematical Modeling, Faculty of mathematics and natural sciences.

Kaunas, 2015. 87 p.

SUMMARY

Catastrophe theory analyses the behavior of a dynamical system depending on one or two parameters at the same time. The catastrophe itself is an instant qualitative change in a dynamical system caused by dwindling changes in one of the parameters value. The main purpose of this work is to investigate the dynamics of the swallowtail catastrophe depending on the values of parameters. This catastrophe could be used as a model of leadership emergence in working groups. The sixth and tenth grade schoolchildren of the KTU engineering lyceum were asked to participate in a team session. Children had to fill a form concerning the character traits of their team members. During the process of the teamwork the data collected was analyzed using statistical methods such as analysis of variance, correlation analysis and hypothesis verification for the equality of probability distributions. The investigation has shown that the analyzed data could be described best by a sum of the Rayleigh probability density function and the swallowtail catastrophe function.

The questionnaire schoolchildren were asked to fill in the questionnaire which was used in additional research. All the questions of the fillable form were divided into three groups in respect of the character features. Analysis has shown the features which could be the reason of the leadership emergence in the children working group. The best model of analyzed data has been found by using the particle swarm optimization (PSO) algorithm. In this work a set of all analyzed parameters is called a particle. The dimension of a particle depends on the number of parameters. Also, the image processing toolbox features of MATLAB program were used to create animations which have helped to analyze the dynamical system and its dynamics in time.

TURINYS

Įvadas	9
1. Teorinė dalis	12
1.1. Sąvokos ir apibrėžimai	12
1.2. Katastrofų teorija	13
1.2.1. Perlinkio katastrofa	15
1.2.2. Klostės katastrofa	17
1.2.3. Kregždės uodegos katastrofa	19
1.3. Katastrofos žmonių darbo grupėse	20
1.3.1. Lyderystės samprata	21
1.3.2. Katastrofos darbo grupių lyderystės atsiradimo procese	22
1.4. Dalelių spiečiaus (PSO) algoritmas	23
1.5. Kiti teoriniai aspektai	27
1.5.1. Normalusis pasiskirstymas	27
1.5.2. Rayleigh pasiskirstymas	27
1.5.3. Doanes formulė optimaliam histogramos intervalų skaičiui	28
1.5.4. Dispersinė analizė (ANOVA)	29
1.5.5. Kruskal – Wallis vienmatė dispersinė analizė	30
1.5.6. Pearsono koreliacijos koeficientas	31
1.5.7. Chi kvadrato suderinamumo testas	32
1.5.8. Shapiro – wilk suderinamumo testas	32
2. Tiriamoji dalis ir rezultatai	34
2.1. Kregždės uodegos katastrofos tyrimas	34
2.1.1. Dinaminės sistemos elgsenos priklausomybės nuo parametro u tyrimas	34
2.1.2. Kregždės uodegos katastrofos parametrų erdvės tyrimas	39
2.2. Kregždės uodegos katastrofos mokinių darbo grupėse atsiradimo tyrimas	43
2.2.1. Mokinių darbo grupių statistinių duomenų surinkimas ir analizė	43
2.2.2. Geriausiai atitinkančio apklausos duomenų modelio paieška	46
2.2.3. PSO algoritmų rezultatų su skirtingomis tikslo funkcijomis palyginimas	52
2.2.4. Apklausoje pateiktų klausimų analizė ir išskaidymas į grupes	55
2.2.5. Klausimų grupių dispersinė analizė	57
2.2.6. Klausimų grupių sąryšių su kregždės uodegos katastrofos parametrais u, v, w analizė	59
3. Programinė realizacija	62
4. Diskusija	64

5. Išvados.....	66
6. Rekomendacijos	67
7. Padėkos.....	68
8. Literatūra	69
1 priedas. Kregždės uodegos katastrofos elgsenos paviršius	71
2 priedas. Kregždės uodegos parametrų erdvė ir diferencialo funkcijos grafikas	73
3 priedas. Anketos forma moksleiviams	76
4 Priedas. Apklausos duomenų rezultatų skaičiavimo pavyzdys	77
5 priedas. PSO algoritmo tyrimas, stebint dalelių judėjimą	77
6 priedas. PSO algoritmo tyrimas, stebint modelio grafiko pavidalą.....	80
7 priedas. PSO algoritmo tyrimas, stebint dalelių judėjimą	82
8 priedas. PSO algoritmo tyrimas, stebint modelio grafiko pavidalą.....	84
9 priedas. Koreliacijos koeficientai tarp anketos klausimų.....	87
10 priedas. Reikšmingumo lygmenys, kai tikrinama hipotezė apie koeficientų lygybę nuliui.....	88
11 Priedas. Projekto tikslų ir uždavinių schema	89

Paveikslų sąrašas

1.1 pav. Perlinkio katastrofa.....	16
1.2 Pav. Klostės katastrofos bifurkacijų grafikai esant fiksuotoms parametro h reikšmėms.....	17
1.3 Pav. Klostės katastrofos bifurkacijų grafikai esant fiksuotoms parametro r reikšmėms.....	18
1.4 Pav. Klostės katastrofa	18
1.5 pav. Kregždės uodegos katastrofa.....	20
1.6 pav. PSO algoritmo schema	26
1.7 pav. Rayleigh dėsnio (a) tankio funkcijos ir (b) pasiskirstymo funkcijos priklausomybė nuo parametro σ	28
1.8 pav. Suderinamumo hipotezės tikrinimo grafinė iliustracija.....	32
2.1 pav. Kregždės uodegos sistemos dinamikos vizualizacija, kai $u > 0$	36
2.2 pav. Kregždės uodegos sistemos dinamikos vizualizacija, kai $u = 0$	37
2.3 pav. Kregždės uodegos katastrofa, kai $u < 0$	37
2.4 pav. Kregždės uodegos katastrofa, kai $u < 0$	38
2.5 pav. Kregždės uodegos katastrofos parametrų erdvė.	39
2.6 pav. Kregždės uodegos katastrofos parametrų erdvė (a) ir išvestinės grafikas (b), kai $u = -1,5, v = 0, w = -1,3$	40
2.7 Pav. Kregždės uodegos katastrofos parametrų erdvė (a) ir išvestinės grafikas (b), kai $u = -1,5, v = 0, w = 0,4$	41
2.8 Pav. Kregždės uodegos katastrofos parametrų erdvė (a) ir išvestinės grafikas (b), kai $u = -1.5, v = 0, w = 2.5$	41
2.9 Pav. Kregždės uodegos katastrofos parametrų erdvė (a) ir išvestinės grafikas (b), kai $u = 0.4, v = 6.08, w = 6.912$	42
2.10 pav. Šeštokų ir dešimtokų balų stačiakampės diagramos.	44
2.11 Pav. Apklaustos duomenų rezultatų histograma.	45
2.12 pav. Dalelių judėjimas pagal PSO algoritmą parametrų u, v, w erdvėje.....	49
2.13 pav. Kregždės uodegos katastrofos parametrų erdvė ir funkcijos $g(x)$ grafikas prie tam tikrų parametrų reikšmių:.....	50
2.14 pav. Vidutinių kvadratinių paklaidų kritimas kiekvienoje iteracijoje.	51
2.15 pav. Vidutinių kvadratinių paklaidų minimizavimo tikslo funkcijos geriausi gauti rezultatai.	53
2.16 pav. Hipotezių tikrinimo chi-kvadrato metodu tikslo funkcijos geriausi gauti rezultatai.	54
2.17 pav. Klausimų grupių histogramos.....	57
2.18 pav. Klausimų grupių stačiakampės diagramos	58
2.19 pav. Funkcijos $g(x)$ grafikai prie patikslintų parametrų u, v, w reikšmių klausimų grupių duomenims.	60
3.1 pav. Animacijos vaizdavimo su programa MATLAB pavyzdys	63
3.2 pav. Mathematica programos pavyzdys.	63

Lentelių sąrašas

1.1 lentelė. Elementariosios katastrofos	15
1.2 lentelė. PSO algoritmo dalelių duomenų apsibrėžimas	24
1.3 lentelė. PSO algoritmo aprašymas	25
1.4 lentelė. Dispersinės analizės apibendrinimas	30
2.1 lentelė. Shapiro Wilk statistikos rezultatai šeštos ir dešimtos klasių moksleiviams.	44
2.2 lentelė. Tiriamų pasiskirstymo tankio funkcijų sąrašas	47
2.3 lentelė. Tikslų funkcijų gautų parametrų palyginimas	53
2.4 lentelė. Tikslų funkcijų optimalumo palyginimai	54
2.5 lentelė. Apklausos klausimai	55
2.6 lentelė. Tarpusavyje priklausančių klausimų sąrašas	56
2.7 lentelė. Klausimų grupių ir parametrų u, v, w analizės duomenys	59

Konferencijos ir publikacijos:

1. **Butkevičiūtė E. ir Landauskas M.** Exploring Forced Damped Pendulum with Dynamics. Nacionalinė konferencija: Matematika ir matematikos dėstymas. Publikacijos ir konferencijos pranešimo medžiaga. KTU, 2014.
2. **Butkevičiūtė E. ir Landauskas M.** Katastrofų dinaminėse sistemose vizualizavimas su Dynamics. Lietuvos matematikų draugijos konferencija. Konferencijos pranešimo medžiaga. MRU, Vilnius, 2014.
3. **Butkevičiūtė E. ir Landauskas M.** Kregždės uodegos katastrofos tyrimas. Taikomoji matematika. XIII studentų konferencijos pranešimo medžiaga, 2015.
4. **Butkevičiūtė E. ir Landauskas M.** Katastrofos netiesinėse sistemose ir žmonių darbo grupėse. Parengta publikacija Lietuvos matematikų draugijos konferencijai. KTU, Kaunas, 2015.

IVADAS

Dinaminė sistema yra tokia matematinė sistema, kuri aprašo taško koordinatų priklausomybę nuo laiko geometrinėje erdvėje. Bet kokiame laiko momentu dinaminė sistema turi būseną, kurią lemia realių skaičių rinkinys – vektorius, kuris gali būti išreikštas tašku būsenų erdvėje.

Dinaminės sistemos neretai būna sudėtingos ir jas nagrinėti spręstais metodais gali būti per sunku. Viena šio mokslo šakų yra katastrofų teorija. Ji nagrinėja, kaip dinaminė sistema elgiasi priklausomai ne nuo vieno, o nuo kelių parametrų vienu metu. Pati katastrofa, taip pat kaip ir bifurkacija, yra staigus dinaminės sistemos kokybinis pasikeitimas parametrų reikšmėms pakitus per nykstantį dydį. Pirmoji informacija apie katastrofų teoriją atsirado 1960 metais [31]. Buvo teigiama, kad naujas mokslas – katastrofų teorija yra kur kas vertingesnis nei mechaninė analizė. Jos dėka atsirado nauji universalūs metodai apie perėjimus šuoliais, nevientisumus ir staigius kokybinius pokyčius. Katastrofų teorija buvo pradėta taikyti daugelyje sričių, tokiuose kaip širdies plakimo, geometriniai ir fizikinės optikos, lingvistikos, eksperimentinės psichologijos, ekonomikos, hidrodinamikos, geologijos modeliuose ir daugelyje kitų sričių. 1970 metais katastrofų teorija tapo populiari ir plačiai žinoma mokslo šaka [31].

Yra žinomos septynios elementarios katastrofos: perlinkio, klostės, kregždės uodegos, drugelio, hiperbolinė, elipsinė ir parabolinė. Jos tarpusavyje skiriasi savo topologija, parametrų skaičiumi bei katastrofą aprašančio daugianario forma. Šiame darbe bus tiriama kregždės uodegos katastrofa. Jos dinamika pasižymi keturiomis stabilumo sritimis: dvi stabilios ir dvi nestabilios. Perėjimai iš vienos stabilumo srities į kitą padaro kokybinius dinaminės sistemos pokyčius.

Tarp įmonių grupių vis populiarėja lyderystės problema. Šiuo atveju, daugiau nei vienas žmogus duoda instrukcijas visai grupei. Kai kurios organizacijos tokiu būdu tikisi pagerinti kūrybingumą, sumažinti išlaidas. Kiti tradicinį vieno vadovo modelį grupėje laiko per brangiu. Kartais, sprendžiant tam tikrą problemą kai kurie grupės nariai gali tapti laikiniais lyderiais. Be to, tokiu atveju kiekvienas narys gali eksperimentuoti įvairias situacijas. Vis tobulėjant technologijoms, plečiantis verslui vis daugiau įmonių plečia savo požiūrį į įmonės valdymą. Lyderystės problema tampa ypač aktuali. Yra kuriami įvairūs psichologiniai, socialiniai ir matematiniai modeliai tam, kad komandinis darbas būtų kiek įmanoma efektyvesnis. Vienas iš anksto paskirtas lyderis gali nesugebėti tinkamai išnaudoti komandos galimybių tam tikroje veiklos srityje. Turint siektiną tikslą ir norint, kad komanda dirbtų kiek įmanoma efektyviau, galima sudaryti kokį nors socialinį modelį, tačiau vis dažniau į šią sritį yra įtraukiami matematiniai modeliai.

Stephan J. Guastello teigimu kregždės uodegos katastrofa geriausiai aprašo lyderystės atsiradimą žmonių darbo grupėse [5]. Manoma, kad grupės nariai gali būti išskaidomi į tris dalis: nesantys lyderiais, pirmo tipo lyderiai ir antro tipo lyderiai [18]. Visi lyderiai pasižymi tam tikromis charakterio savybėmis,

reikalingomis atlikti pateiktą užduotį. Priklausomai nuo užduoties specifiškumo, dalį šių savybių galime nuspėti iš anksto, o dalį sužinome tik tyrimo metu. Kyla klausimas, ar turint grupių lyderio atsiradimo modelį ir žinodami, kokiomis charakterio savybėmis pasižymi bei kiek žinių turi kiekvienas komandos narys, yra galima suformuoti tokią grupę žmonių, kurie tikslą pasiektų efektyviausiu keliu. O gal geriausią rezultatą pavyktų gauti apmokius kai kuriuos arba visus žmones. Akivaizdu, kad tokie klausimai yra itin svarbūs ne tik įmonių valdymo modelyje, bet ir moksleivių mokymosi grupėse bei kitoje komandinėje veikloje.

Pagrindiniai darbo tikslai ir uždaviniai:

- Ištirti kregždės uodegos katastrofos dinamiką priklausomai nuo parametrų u, v, w .
- Ištirti parametrų erdvės ir kregždės uodegos diferencialo funkcijos priklausomybę.
- Parengti užduotis komandiniam darbui, mokinius suskirstyti į grupes, o po komandinių užduočių atlikimo mokiniams pateikti anketas su klausimais apie grupės narių charakterio savybes.
- Rasti tikimybinio skirstinio funkcijos ir kregždės uodegos katastrofos jungtinį modelį, kuris geriausiai aprašo suriktus duomenis.
- Pabandyti išskaidyti klausimų grupes statistiniais metodais bei pagal moksleivių charakterio savybes.
- Nustatyti, kaip kregždės uodegos katastrofa aprašo lyderystę moksleivių darbo grupėse
- Palyginti gautus rezultatus su Stephan J. Guastello tyrimų rezultatais.

Apklauso klausimų formavimui ir klausimų grupių išskyrimui buvo remiamasi B. Avolio literatūra [26] bei LSMU asistentės Rožės Joffe rekomendacijomis. Tyrime dalyvavo KTU inžinerijos licėjaus šeštos ir dešimtos klasės moksleiviai. Duomenų analizei buvo naudojami statistiniai bei grafiniai metodai. Kregždės uodegos katastrofos tyrimui buvo taikoma diferencialinių lygčių bei bifurkacijų teorija.

1. TEORINĖ DALIS

Šiame skyriuje yra aptariami naudojami metodai, jų pritaikomumas darbe bei kiti teoriniai aspektai leidžiantys atlikti duomenų analizę. Taip pat aprašomos lyderystės sąvokos ir su tuo susiję statistiniai bei skaitiniai metodai.

1.1. SĄVOKOS IR APIBRĖŽIMAI

Katastrofų teorija remiasi diferencialinių lygčių, dinaminėmis sistemomis bei jų pokyčiais. Norėdami pradėti nagrinėti konkrečią dinaminę sistemą, pirmiausia turime susipažinti su tam tikromis svarbiomis sąvokomis ir apibrėžimais.

1 Apibrėžimas. Diferencialas – tai funkcijos pokyčio tiesinė pagrindinė dalis. Funkcija $F(x)$, apibrėžta intervale $(a; b)$, vadinama diferencijuojama taške $x \in (a; b)$, jei jos piktį $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$ galima išreikšti dviejų dėmenų suma: $\Delta F(x) = A\Delta x + o(\Delta x)$, čia A yra skaičius, nepriklausantis nuo Δx [13].

Diferencialinių lygčių sprendimo metodų yra sugalvota daug. Pačios lygtys tarpusavyje gali stipriai skirtis ne tik sprendinio pavidalu, bet ir pačia sandara. Lygčių sistema dar gali būti vadinama dinamine sistema.

2 Apibrėžimas. Dinaminė sistema yra tokia matematinė sistema, kuri aprašo taško koordinatų priklausomybę nuo laiko geometrinėje erdvėje. Bet kokiu laiko momentu dinaminė sistema turi būseną, kurią lemia realių skaičių rinkinys – vektorius, kuris gali būti išreikštas tašku būsenų erdvėje. Maži pokyčiai sistemos būsenoje paprastai padaro mažus pokyčius šiuose skaičiuose. Normalinė n - tos eilės dinaminė sistema užrašoma tokiu būdu [3]:

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n); \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Jos sprendinius galima pavaizduoti n - matėje erdvėje. Tačiau tai yra gana abstraktu ir todėl pavaizduoti paprastai yra gana sudėtinga, todėl šiame tiriamajame darbe bus naudojamas tik atvejis, kai $n = 1$.

Nesudėtinga pastebėti, kad norėdami pradėti analizuoti katastrofas, pirmiausia turime gerai suprasti, kas yra bifurkacija ir kam ji reikalinga. Žinome, kad kartais dinaminę sistemą galima neblogai apibūdinti žinodami jos rimties taškus bei tų taškų pobūdį. Įvykus bifurkacijai gali ne tik pasikeisti rimties taškų stabilumas, bet ir jų skaičius nagrinėjamoje dinaminėje sistemoje.

3 Apibrėžimas. Rimties taškas dinaminėje sistemoje yra toks taškas, kuriame visos pirmos eilės išvestinės išnyksta [3], t.y.

$$\begin{aligned} \frac{\delta f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_1} &= 0; \\ &\vdots \\ \frac{\delta f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_n} &= 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Toks taškas (x_1, \dots, x_n) , tenkinantis prieš tai aprašytą lygtį, ir yra vadinamas rimties arba fiksuotu tašku.

4 Apibrėžimas. Bifurkacija yra staigus kokybinis dinaminės sistemos judėjimo arba topologijos pakitimas tolygiai ir nedaug pakitus parametru, nusakančiam ją [13].

5 Apibrėžimas. Turime paprastą pirmos eilės diferencialinę lygtį. Autonominės sistemos pusiausvyros sprendinys f_e yra vadinamas stabilium, jei kiekvienam mažam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta > 0$, toks, kad kiekvienam sprendiniui $f(t)$ galioja $\|f(t_0) - f_e\| < \delta$, kad su ε galioja $\|f(t) - f_e\| < \varepsilon$, kiekvienam $t \geq t_0$ [1].

Stabilumas šiame darbe yra svarbus tuo, kad jis leidžia nustatyti, kaip laike keičiasi rimties taškai ar sprendiniai. Jei dinaminė sistema nėra stabili, tai jos pokyčius nusakyti yra labai sudėtinga.

1.2. KATASTROFŲ TEORIJA

Istoriškai katastrofų teorija prasidėjo nuo paviršių klasifikavimo problemos. Minėtų rimties taškų radimas bei analizė yra parastas ir aiškus būdas nagrinėti dinamines sistemas, tačiau to neužtenka norint pilnai nusakyti funkcijų pokyčius.

Dažnai paprastos bifurkacijos nesugeba tinkamai nusakyti dinaminės sistemos pokyčius priklausomai nuo tam tikrų parametrų reikšmių. Dėl to, atsirado nauja mokslo šaka – katastrofų teorija, kuri yra atskira bifurkacijų teorijos šaka.

Katastrofų teorija nagrinėja, kaip dinaminė sistema elgiasi priklausomai ne nuo vieno, o nuo kelių parametrų vienu metu. Visgi, katastrofa taip pat kaip ir bifurkacija yra staigus dinaminės sistemos kokybinis pasikeitimas kintant parametrų reikšmėms. Yra manoma, kad katastrofos taškas yra toks taškas, su kuriuo funkcijos gradientas yra lygus nuliniam vektoriui, o antros eilės išvestinių (Hesse) matrica yra išsigimusi, t.y. jos determinantas yra lygus nuliui [3].

$$\left(\frac{\delta f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_n} \right) = (0, \dots, 0); \quad (1.3)$$

$$\det(H(f)) = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_1 \delta x_2} & \dots & \frac{\delta^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_1 \delta x_n} \\ \frac{\delta^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_2^2} & \dots & \frac{\delta^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_2 \delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_n \delta x_1} & \frac{\delta^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_n \delta x_2} & \dots & \frac{\delta^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\delta x_n^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.4)$$

Akivaizdu, kad tenkinant šias sąlygas nebūtinai dinaminėje sistemoje bus katastrofa, tačiau šios lygybės padeda nustatyti tas parametrų reikšmes, su kuriomis dinaminėje sistemoje yra kokybiniai pokyčiai. Dažniausiai katastrofos atsiradimą ar išnykimą nusakantis parametras, kuris tenkina aukščiau aprašytas katastrofos sąlygas, tokiu atveju išnyksta.

Kaip jau buvo minėta anksčiau, katastrofos gali atsirasti, kai nagrinėjame dinaminės sistemos pokyčius priklausomai nuo kelių parametrų. Įsivedame kelias papildomas sąvokas, kurios bus naudojamos tolimesniame tyrime.

6 Apibrėžimas. Elgsenos plokštuma šiame darbe yra vadinama funkcijos priklausomybė nuo dviejų parametrų pasirinktinai. Jos paviršius padeda suprasti, kas vyksta dinaminėje sistemoje bei nuspėti galimus jos pokyčius [8].

7 Apibrėžimas. Kaip minėjome, katastrofų teorijoje analizuojamų parametrų yra ne vienas. Parametrų erdve vadinsime trijų parametrų priklausomybę geometrinėje erdvėje. Nuo elgsenos plokštumos ji skiriasi tuo, kad iš čia be papildomo tyrimo negalime nusakyti pačios dinaminę sistemą aprašančios funkcijos pokyčių [1].

Priklausomai nuo kintamųjų, parametrų, daugianarių eilės skaičiaus ir kitų savybių yra išskiriamos septynios elementarios katastrofos. Jos pateiktos **1.1 lentelėje**. Aukštesnės nei dviejų kintamųjų eilės diferencialinės lygtys katastrofų teorijoje yra analizuojamos labai retai arba visai netiriamos. Nagrinėjant didesnių dimensijų erdvę pasidaro sudėtinga tiek interpretuoti rezultatus, tiek nustatyti jų pritaikomumą.

Kai kurie mokslininkai iš šių septynių katastrofų išskiria dvi pagrindines – tai perlinkio ir klostės. Teigiama, kad likusios katastrofos yra sudėtinės [31]. Manoma, kad bet kokia katastrofa aptinkama dinaminėse sistemose gali būti išreikšta būtent per šias dvi, t.y. gali dinaminė sistema susidėti iš vienos perlinkio ir dviejų klostės katastrofų ir atvirkščiai. Nesudėtinga pastebėti, kad sudėjus perlinkio ir klostės katastrofas į tą pačią dinaminę sistemą, galime nebūtinai gauti vieną po kitos einančius dviejų katastrofų pavidalus. Dažniausiai yra labai sudėtinga nustatyti iš kokių pagrindinių katastrofų yra sudaryta analizuojamoji [31].

1.1 lentelė.

Elementariosios katastrofos [3]

Katastrofos pavadinimas		Potencialo funkcija	Potencialo funkcijos pirmosios išvestinės
Vieno kintamojo	Perlinkio katastrofa	$x^3 - ax$	$3x^2 - a$
	Klostės katastrofa	$x^4 - hx - rx^2$	$4x^3 - h - 2rx$
	Kregždės uodegos katastrofa	$x^5 + wx + vx^2 + ux^3$	$5x^4 + w + 2vx + 3ux^2$
	Drugelio katastrofa	$x^6 - ax - bx^2 - cx^3 - dx^4$	$6x^5 - a - 2bx - 3cx^2 - 4dx^3$
Dviejų kintamųjų	Hiperbolinė katastrofa	$x^3 - y^3 + ax + by + cxy$	$3x^2 + a + cy$ $3y^2 + b + cx$
	Elipsinė katastrofa	$x^3 - xy^2 + ax + by + cx^2 + cy^2$	$3x^2 - y^2 + a + 2cx$ $-2xy + b + 2cy$
	Parabolinė katastrofa	$x^2y + y^4 + ax + by + cx^2 + dy^2$	$2xy + a + 2cx$ $x^2 + 4y^3 + b + 2dy$

Šiame tiriamajame darbe plačiau bus papasakota apie kregždės uodegos katastrofą, kuri susideda iš perlinkio ir klostės katastrofų. Tačiau prieš tai pirmiausia susipažinsime su jau minėtomis dviejomis pagrindinėmis katastrofomis.

1.2.1. PERLINKIO KATASTROFA

Kaip buvo minėta anksčiau, perlinkio katastrofa yra aprašoma tokia funkcija:

$$f(x, a) = x^3 - ax. \quad (1.5)$$

Matome, kad yra tik vienas parametras a . Jis yra vadinamas bifurkacijos parametru. Kadangi

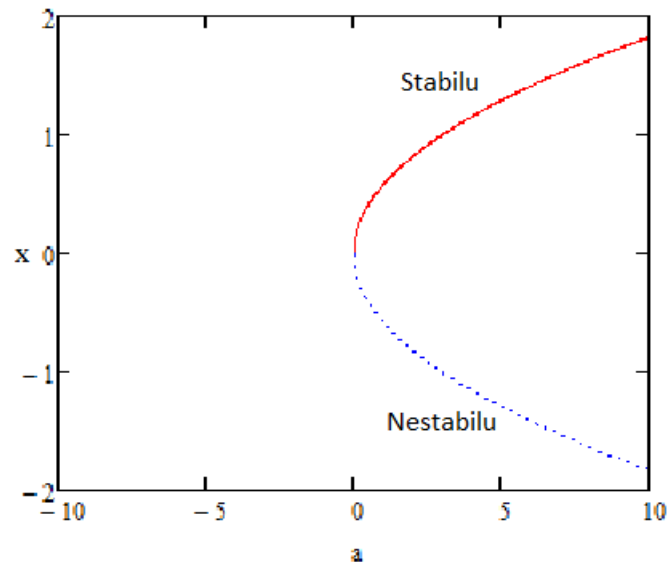
$$\frac{df(x, a)}{dx} = 3x^2 - a = 0 \Rightarrow a = 3x^2, \quad (1.6)$$

$$\frac{d^2f(x, a)}{dx^2} = 6x = 0 \Rightarrow x = 0,$$

tai $a = 0$. Toks taškas dar yra vadinamas kritiniu tašku. Iš čia matome, kad šią dinaminę sistemą reikia nagrinėti dviem atvejais, kai $a \leq 0$ ir kai $a > 0$. Tai pavaizduota 1.1 pav. Norėdami, nustatyti, kuri sritis yra stabili, o kuri ne, pirmiausia turime rasti x priklausomybę nuo parametro a , o po to tikrinti, įgyjamą funkcijos reikšmę [4].

$$x = \pm \sqrt{\frac{a}{3}}. \quad (1.7)$$

Pavyzdžiui, imkime $a = 1$. Gauname, kad $f(x, a) = \pm 0,385$. Vadinasi, kai $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$, turime stabilumą, o kai $x = -\sqrt{\frac{a}{3}}$, turime nestabilią sritį. Stabilumas reiškia, kad po perturbacijos [4] sistema grįžta į tą patį arba nukeliauja į kitą rimties tašką, arba išlieka ribiniuose cikluose.



1.1 pav. Perlinkio katastrofa

Iš perlinkio katastrofos grafiko matome, kad nesudėtinga pastebėti rimties taškų skaičiaus pokyčius priklausomai nuo parametro a . Kol parametras $a \leq 0$, tol nėra fiksuotų taškų ir sistema nėra nei stabili, nei nestabili. Tuo tarpu, kai a tampa bent šiek tiek didesnis už nulį, sistema kokybiškai pasikeičia. Atsiranda dvi sritys: viena stabili (raudona linija) ir viena nestabili (mėlynas punktyras).

Šią katastrofą bent jau iš dalies turi visos likusios elementarios katastrofos, išskyrus klostės, nes kaip bus parodyta sekančiame skyriuje, nėra įmanoma patekti į nestabilią sritį. Ir priešingai, klostės katastrofai yra būdingi šuoliai iš vienos stabilios srities į kitą, o perlinkio – tokių pokyčių nėra.

1.2.2. KLOSTĖS KATASTROFA

Klostės katastrofa (angl. Cusp) yra sudėtingesnis atvejis nei perlinkio, nes šiuo atveju dinaminė sistema priklausys nuo dviejų parametrų reikšmių. Kaip minėta anksčiau, ji aprašoma tokia funkcija [1]:

$$f(x, a, b) = x^4 - hx - rx^2; \quad (1.8)$$

$$\frac{df(x, a, b)}{dx} = 4x^3 - h - 2rx. \quad (1.9)$$

Akivaizdu, kad šios dinaminės sistemos elgseną galime atvaizduoti trijų dimensijų erdvėje. Tačiau, kad būtų paprasčiau įsivaizduoti ir suprasti, kas vyksta, visų pirma fiksuokime vieną iš parametro reikšmių. Tai pavaizduota 1.2 pav. ir 1.3 pav.

Lokaliniai kubinės parabolės ekstremumo taškai randami iš sąlygos [3]:

$$\frac{d(4x^3 - 2rx)}{dx} = 0. \quad (1.10)$$

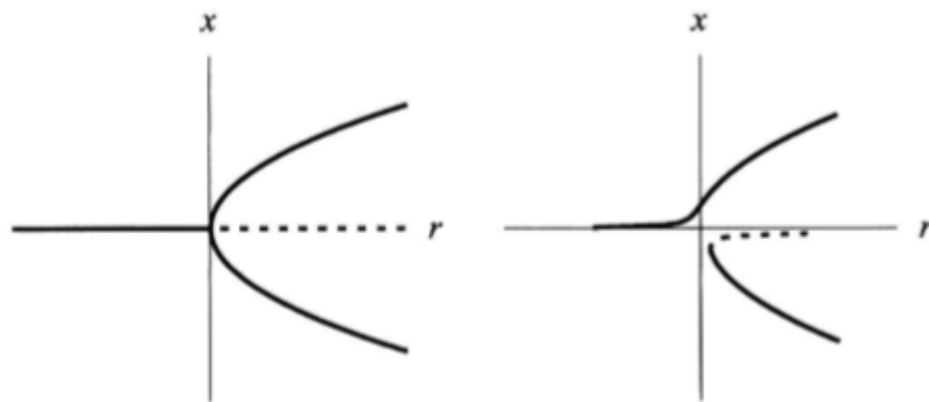
Iš čia gauname, kad

$$x_{max} = \sqrt{\frac{r}{6}}, \quad x_{min} = -\sqrt{\frac{r}{6}}. \quad (1.11)$$

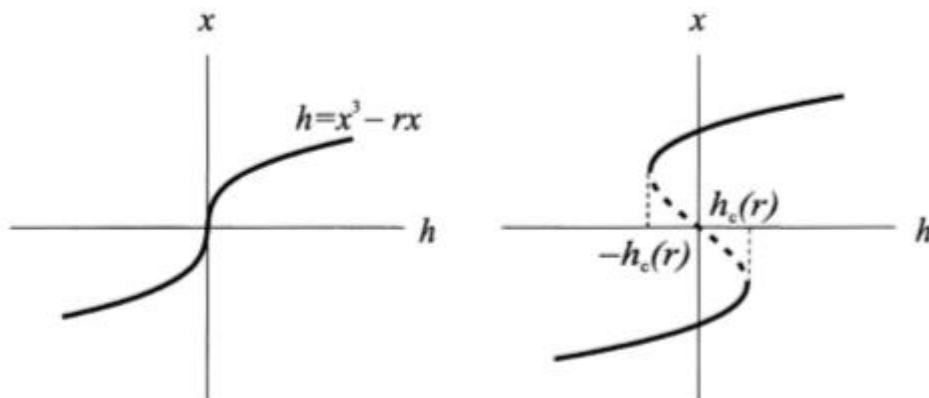
Taip pat, įstačius į funkciją gauname:

$$h_c(r) = rx_{max} - x_{max}^3 = \frac{5r}{6} \sqrt{\frac{r}{6}}, \quad (1.12)$$

čia $\pm h_c$ yra kubinės parabolės reikšmės minimumo ir maksimumo taškuose.



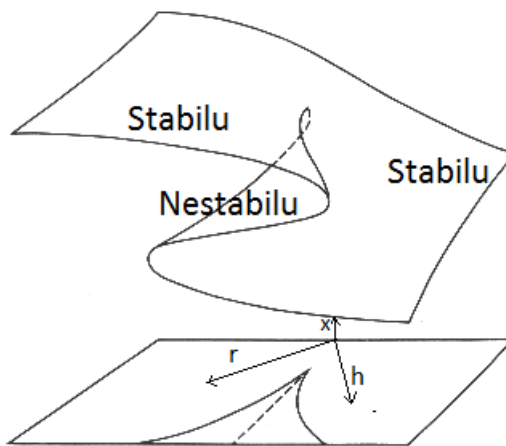
1.2 Pav. Klostės katastrofos bifurkacijų grafikai esant fiksuotoms parametro h reikšmėms [4]



1.3 Pav. Klostės katastrofos bifurkacijų grafikai esant fiksuotoms parametro r reikšmėms [4]

Iš 1.2 pav. matyti, kad kai $h = 0$, turime įprastą šakutės tipo bifurkaciją, tačiau, kai $h \neq 0$ bifurkacijų diagrama išsiskiria į dvi atskiras dalis [4]. Esant didelėms parametro r reikšmėms dinaminė sistema keliauja viršutine diagramos šaka. Į apatinę šaką sistema gali pereiti tik esant dideliems trikdžiams. 1.3 paveiksle matome, kad kol $r < 0$, yra tik vienas susikirtimo taškas su abscisių ašimi nepriklausomai nuo to, kokią reikšmę įgyja parametras h , t.y. vienas fiksuotas taškas. Be to visada turime stabilią sritį. Kai $r > 0$, jau atsiranda fiksuotų taškų skaičiaus priklausomybė nuo parametro h . Gali būti vienas, du arba trys fiksuoti taškai. Šiuo atveju yra dvi stabilios ir viena nestabili sritys. Į nestabilią sritį patekti yra neįmanoma, nes judant stabilia dalimi ir pasiekus kritinę sritį įvyksta šuolis į kita stabilią sritį. Tikimybė patekti į nestabilią sritį yra lygi nuliui.

Iki šiol bifurkacijų diagramas braižėme fiksavus vieną iš parametrų, tačiau neretai tenka sužinoti, kaip atrodytų paviršius kintant abiem parametrams vienu metu. Jis atvaizduotas 1.4 paveiksle.



1.4 Pav. Klostės katastrofa [1]

Iš 1.4 pav. akivaizdu, kad elgsenos plokštumoje yra dvi stabilios ir viena nestabili sritis. Esant ant viršutinės stabilios srities galima keliauti elgsenos plokštuma (keičiant parametrų reikšmes) iki kol pasiekiamas stabilios srities kraštas. Tada įvyksta šuolis į apatinę stabilią sritį. Tačiau, jei norime keisti parametrus priešinga linkme, mes grįšime jau nebe ta pačia trajektorija. Šuolis į viršutinę sritį įvyks kitoje vietoje. Dėl to, toks reiškinys yra vadinamas katastrofa. Taip pat matome, kad yra nestabili sritis, tačiau dabar, priešingai, nei perlinkio katastrofos atveju, į ją galime patekti, tik tuo atveju, jei dinaminė sistema yra stipriai paveikiama tam tikrų stiprių išorinių trikdžių.

1.4 pav. apačioje vaizduojama plokštuma yra vadinama parametrų plokštuma. Jos pagalba galime nustatyti, kiek yra fiksuotų taškų prie tam tikrų parametro reikšmių. Jei esame ant vaizduojamo trikampio krašto, tai yra du fiksuoti taškai. Tuo tarpu esant trikampio viduje turime tris fiksuotus taškus, o išorėje – vieną fiksuotą tašką.

Klostės katastrofos pagalba galima aprašyti įvairius realius reiškinius tokius, kaip šuns elgsenos modelis (priklausomai nuo baimės ir pykčio) [1,4], žmogaus elgsenos modelis (priklausomai nuo pykčio ir savigailos) [1], akcijų kainų indekso modelis (priklausomai nuo bulių ir nuo meškos rinkų) [8]. Taip pat šiuo modeliu yra aprašomi ir kai kurie fizikiniai reiškiniai, tokie kaip vandens ir garų modelis [3]. Šuns elgsenos modelis yra vienas populiariausių, nes labai aiškiai galima suprasti, kodėl įvyksta šuoliai.

Tarkime, kad šuns elgesys priklauso nuo pykčio yra baimės. Jei yra daug pykčio, tai tikėtina, kad jis žmogų užpuls. Jei daugiausia yra baimės, tai tikriausiai šuo išsigąs ir pabėgs. Įdomiausia yra tada, kai šuo turi ir pykčio ir baimės, bei kokia yra riba tarp atsitraukimo ir užpuolimo. Pavyzdžiui, jei šuo tuo pačiu metu yra vienodai ir išsigandęs ir susierzinęs. Nagrinėjant tiesinius metodus, gautume, kad šie jausmai vienas kitą kompensuoja iš šuo lieka neutralus. Realybėje, toks poelgis yra mažiausiai tikėtinas. Analogiškai aprašomi ir kiti elgsenos, ekonomikos bei fizikiniai reiškiniai, kuriuos nusakyti pakanka dviejų parametrų.

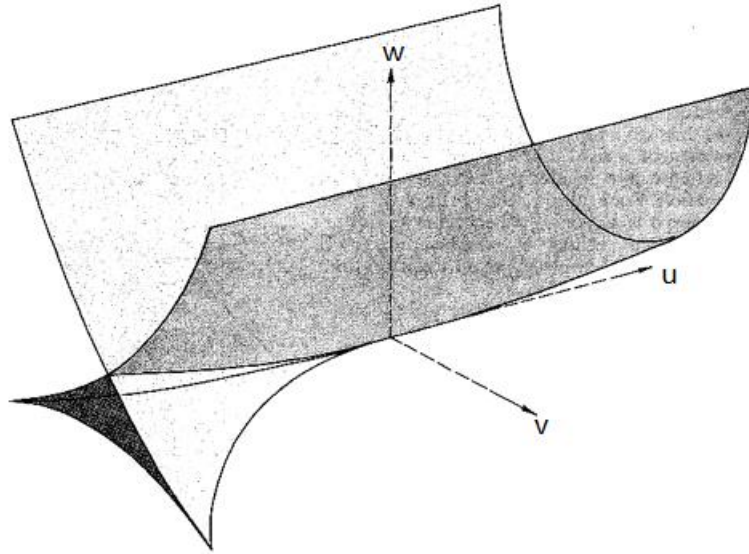
Šiame darbe norima parinkti geriausią modelį, galintį aprašyti lyderystę darbo grupėse. Paprastesniu atveju klostės katastrofa neblogai tai ir padaro. Tačiau šis modelis tinka tik tada, kai teigiame, jog grupėje arba yra vienas lyderis, arba jo iš viso nėra. Realiose situacijose grupėje gali būti ne vienas lyderis, o keli. Priklausomai nuo to, kokiomis savybėmis jie pasižymi, gali būti priskirti arba pirminiams arba antriniam lyderiams. Plačiau apie tai yra aprašyta 1.3. skyriuje.

1.2.3. KREGŽDĖS UODEGOS KATASTROFA

Kregždės uodegos katastrofa yra aprašoma tokia funkcija [3]:

$$f(x, u, v, w) = x^5 + wx + vx^2 + ux^3. \quad (1.13)$$

Akivaizdu, kad pilnai atvaizduoti dinaminės sistemos elgseną šiuo atveju yra sudėtinga, nes yra trys parametrai. Parametras w dar yra vadinamas asimetrijos parametru, v – nuolydžio arba antruoju asimetrijos parametru, o u vadinamas bifurkacijos parametru. Galime vieno parametro reikšmę fiksuoti ir taip atvaizduoti funkcijos dinamiką. Įvairūs atvejai yra pateikti 2.1. skyriuje. 1.5 paveiksle yra pateikta, kaip atrodo kregždės katastrofa vaizduojant tik parametrų erdvę.



1.5 pav. Kregždės uodegos katastrofa [3]

Šios katastrofos išsamus tyrimas pateiktas tiriamojoje dalyje, naudojant MATLAB programą. Yra parodyta, kaip keičiasi dinaminės sistemos elgsenos plokštuma keičiantis tam tikrų parametrų reikšmėms. Taip pat tiriamojoje dalyje pateikiamos ištraukos iš darbo metu sukurtų animacijų, kuriose matyti, kaip priklauso fiksuotų taškų skaičius nuo parametrų reikšmių. Galiausiai, aprašomas vienas realus modelis, kuris remiasi grupių lyderystės teorija [29].

1.3. KATASTROFOS ŽMONIŲ DARBO GRUPĖSE

Netiesinių dinaminė sistemų (NDS) teorija siūlo kitokį požiūrį, susiaurintas sąvokas bei analitinę techniką nagrinėjant procesus kintančius laike [2]. Šiame kontekste naudojamos netiesinės dinaminės sistemos sąvokos: pritraukimo sritys, bifurkacijos, saviorganizacija ir netolygus paviršius bei kregždės uodegos katastrofa nutrūkstančiam kitimui. Realiai dinaminiai procesai nėra taikomi šiuo metu egzistuojančiose lyderystės modeliuose, bet naujas požiūris į pokyčius ir charizmatiškuosius lyderius bei lyderių rolės apsikaitimus vis dažniau parodo, kad NDS modeliai yra reikalingi šioje srityje [5]. Lyderio atsiradimo procesas yra apibendrinamas kaip priklausomybė nuo esminių kintamųjų, kokybinių ir netiesinių

struktūrinių komponentų. Kokybiniai komponentai atsakingi už esminius kintamuosius padėties esančios tam tikroje situacijoje lyderio pasirodymo metu. Kiekybiniai komponentai parodo, kaip įvykiai klostosi laike bei matematinės struktūras, kurios sukelia šiuos pokyčius [2].

1.3.1. LYDERYSTĖS SAMPRATA

Lyderystę galima apibūdinti kaip „socialinės įtakos procesą, kuriame žmogus gali gauti reikiamą pagalbą ir paramą iš kitų tam, kad būtų pasiektas bendras tikslas“ [26]. Pavyzdžiui, kai kurie lyderiu laiko tokį asmenį, kurį kiti laiko pavyzdžiu ir juo seka arba tokį, kuris duoda instrukcijas ir vadovauja kitiems. Tuo tarpu kiti, lyderiu laiko žmogų, gebantį motyvuoti ir koordinuoti grupę žmonių, kad būtų pasiektas bendras tikslas [30].

Lyderystės studijos suformavo teorijas, kurios apima charakterio bruožus, situacijų sąveika, funkcijas, elgseną, galią, viziją ir kitas reikšmes [26].

Tarp žmonių grupių lyderystės problema vis populiarėja. Šiuo atveju, daugiau nei vienas žmogus duoda instrukcijas visai grupei. Kai kurios organizacijos tokiu būdu tikisi pagerinti kūrybingumą, sumažinti išlaidas. Kiti tradicinį vieno vadovo modelį grupėje laiko per brangiu. Kartais, sprendžiant tam tikrą problemą kai kurie grupės nariai gali tapti laikiniais lyderiais. Be to, tokiu atveju kiekvienas narys gali eksperimentuoti įvairias situacijas.

Gero funkcionalumo komandų charakteristikos [26]:

- Tikslas: nariai drąsiai dalinasi jausmais ir bendros pastangos yra sutelktos į užduoties tikslus.
- Prioritetai: kiekvienas komandos narys žino, kuri užduotis jam priklauso ir iki kada turi būti atlikta, kad būtų pasiektas bendras tikslas.
- Vaidmenys: kiekvienas narys žino savo vaidmenį atliekant užduotį. Turintys daugiausiai įgūdžių atlieka jiems skirtas užduotis.
- Sprendimai: valdžia ir sprendimų priėmimo linijos yra aiškiai suprantamos.
- Konfliktai: konfliktai yra viešai sprendžiami ir aptariami tie, kurie yra svarbūs sprendimų priėmime ir asmeniniame tobulėjime.
- Asmeniniai bruožai: kiekvienas narys žino savo stipriąsias ir silpnąsias puses ir jomis naudojasi.
- Normos: yra įvestos bendradarbiavimo normos ir matomos, kaip standartas kiekvienam grupės nariui.
- Efektyvumas: komandos laisvai tarpusavyje bendrauja ir palaiko vieni kitus.

- Sėkmė: Kiekvienas grupės narys žino ir supranta, kada jiems pasisekė ir ta sėkmė vienodai dalinasi bei didžiuojasi.

1.3.2. KATASTROFOS DARBO GRUPIŲ LYDERYSTĖS ATSIKADIMO PROCESĖ

Netiesinių dinaminų sistemų teorija ir jos neatsiejamos idėjos apibūdinant ir bandant nuspėti, kaip sistema pasikeis, stipriai įtakojo organizacijos elgsenos ir lyderystės teorijų formavimąsi. Lyderystės problemos išaugo dėl įmonių ar organizacijų valdymo pokyčių, strategijų formulavimo, ateities vizijų ir kitų priežasčių.

Lyderio pasirodymo procesas prasideda nuo grupės žmonių, kurioje nėra išskiriamas joks lyderis. Tradiciniuose nagrinėjamuose modeliuose grupė savanorių gali būti „išmatuojami“ (measured) priklausomai nuo to, koks yra skaičius charakteristikų, kurios siejasi su realia galimybe atsirasti tam tikriems pokyčiams [2]. Toliau grupės nariai bendrauja tarpusavyje tam, kad išspręstų jiems pateiktą uždavinį. Tada pasirodo keistas reiškinys: diskusijos pabaigoje grupėje atsiranda lyderis. Lyderis dažniausiai yra nustatomas balsuojant arba užpildant klausimyną. Kregždės katastrofos lyderystės modelyje yra atskiriamos dviejų rūšių stabilios sritys ir viena nestabili sritis [5].

Darbe nagrinėjama anksčiau aprašyta diferencialinė lygtis, su valdymo parametrais u , v ar w . Kiekvienas iš parametru aprašo skirtingus kintamuosius. Asimetrijos valdymo parametras u atskiria visus lyderius nuo nesantys lyderiais. Visi žmonės, nesantys lyderiais sudaro nestabilią sritį. Parametras w susideda iš įtampą mažinančių įsiterpimų (pvz: pokštavimas) ir realistiškų gamybos tikslų. Yra mažesnė tikimybė, kad grupėje pasirodys lyderis, jei gamybos paklausa yra absurdiška [5]. Bifurkacijos parametras v kontroliuoja plotą, kuriame lyderiai apsistoja arba pirminiame arba antriniame vaidmenyje. Abi pozicijos yra stabilios sritys. Šis parametras sudarytas iš gamybos etape esančios užduoties kontrolės ir kūrybos reikalingos planavimo etape. Nuolydžio parametras w atskiria pirminius ir antrinius lyderius. Šis nuolydžio parametras turi panašumų su asimetrijos parametru, bet jis tiksliai atskiria dvi stabilias sritis. Šis parametras išlieka nežinomas iki tol, kol po komandinių užduočių moksleiviai užpildo anketą bei yra atliekama surinktų duomenų analizė [2].

Tiriamos žmonių grupės gali būti skirtingos. Kad grupių dalyviai spręstų užduotis koordinuotai, gali būti įvedamos tam tikros situacijos, kur grupė turi imtis tam tikrų sprendimų teisinga tvarka. Yra keli koordinacijos užduočių tipai, kurie kilo iš lošimų teorijos. Šiuo atveju, geriausiai situaciją atitinka sankryžos žaidimas, kuriame žaidėjai turi imtis veiksmų teisinga tvarka, panašiai kaip automobilių judėjimas keturių

kelių lygiareikšmėje sankryžoje. Taip pat žaidėjai žaidimo metu turi išsiaiškinti, kokia turėtų būti ta teisinga judėjimo tvarka [11].

Kitoks koordinacijos atvejis gali būti, kai grupės nariams yra neleidžiama kalbėtis tarpusavyje. Dar vienas koordinacijos žaidimas gali būti, kai iš anksto nėra paskirtas lyderis [11]. Tai labai panašu, kaip nagrinėjant pulkus skirtingų rūšių paukščių, kurie iš pradžių neturi hierarchinės struktūros. Vis dėlto lyderis išryškėja ir tarp gyvūnų, kuriuose nėra hierarchinės struktūros, o juo yra laikomas tas grupės narys, kuris sėkmingai veda grupę link tikslo. Žinoma, toks lyderis nėra pastovus ir nuolat keičiasi. Vadinasi, atsiranda antro tipo lyderiai, kurie tam tikromis situacijomis gali geriau atlikti pavestą užduotį. Sankryžos žaidime tarp žmonių, visada atsiranda lyderis nepriklausomai nuo to, ar koordinacijos žaidime yra leidžiama kalbėtis, ar ne. Vis dėlto, grupės žmonių, kuriems galima tarpusavyje bendrauti demonstruoja geresnius informacijos apsikeitimo sugebėjimus, kūrybingesnes idėjas, būna geresnės nuotaikos [11].

Skirtinguose koordinacijos užduotyse yra skirtingi valdymo parametrai, bet galima išskirti pagrindines bendras tematikas tokiu būdu: tiek pirminiai, tiek antriniai lyderiai rodo didelius bendravimo ir komunikavimo įgūdžius, reikiamus užduočiai atlikti. Tai gali būti pavyzdys asimetrijos parametro, kuris juos atskiria nuo ne lyderių [2]. Bifurkacijos faktorius yra su užduotimi susijęs požymis, pavyzdžiui, produktyvumas, kūrybiškos idėjos inžinerinio dizaino komandoje, mokėjimas aiškiai kalbėti didelės koordinacijos reikalingose grupėse. Bifurkacijos faktorius žmones, kurie yra aukštai asimetrijos parametro atžvilgiu, išskiria pirminius ir antrinius lyderius [5]. Nuolydžio parametras, kuris tiksliai atskiria pirminius ir antrinius lyderius, yra konkrečiai susijęs su užduotimi, pavyzdžiui, kontrolė didelės koordinacijos reikalaujančioje grupėje, reagavimas į ekstremalias situacijas ir pan.

1.4. DALELIŲ SPIEČIAUS (PSO) ALGORITMAS

1995 metais Russell Eberhart ir James Kennedy sugalvojo naują algoritmą, kuris buvo paremtas paukščių arba žuvų elgesio ypatybėmis [24]. Nors toks modelis gali skambėti gana sudėtingai, tačiau iš esmės yra labai paprastas algoritmas. Po tam tikro iteracijų skaičiaus grupės kintamųjų reikšmės yra pakoreguotos taip, kad jos yra arčiausiai norimo tikslo visame skaičiavimo procese. PSO algoritmas analizuoja dalelių judėjimą pagal iš anksto nurodytą tikslo funkciją. Įsivaizduokite, kad stebite būrį paukščių skraidančių virš lauko, kuriame yra paslėptas maistas. Paukščiai maistą aptinka naudodamiesi uosle. Kuo arčiau pašaro paukštis yra, tuo jis garsiau čirškia. Tada visas būrys skrenda link garsiausiojo. Jei pakeliui, kuris nors paukštis atsiduria arčiau maisto, tai jis šaukia dar garsiau ir visas būrys pakeičia kryptį link jo.

Algoritmas yra apibūdinamas trimis kintamaisiais [24]:

- Tikslo reikšmė arba būseną,

- Globalus geriausias rezultatas, kuris nurodo, kuri dalelė yra arčiausiai tikslo
 - Algoritmo nutraukimo reikšmė, kuri nurodo, kada turime baigti skaičiuoti, jei tikslas nepasiektas.
- Kiekviena dalelė susideda iš [24]:

- Duomenų, kurie gali būti galimas sprendinys
- Greičio reikšmės, kuri nurodo, kiek duomenys gali keistis
- Geriausio asmeninio pasiekto rezultato, kuri parodo artimiausią tikslui pasiektą rezultatą.

Dalelės duomenys gali būti įvairiausi. Pavyzdyje apie paukščius duomenimis laikomos kiekvieno paukščio koordinatės erdvėje (X, Y, Z). Greičiai yra apskaičiuojami priklausomai nuo to, kaip toli tikslo yra duomenys. Kuo jie toliau, tuo didesnis įgyjamas greitis. Gyvūnas esantis toliausiai nuo maisto turi skristi greičiau nei kiti link geriausio globalaus rezultato, kad pasivytyt kitus. Dalelių spiečiaus algoritmo schema yra vaizduojama 1.6 paveiksle. Algoritmo aprašymas pateiktas 1.2 lentelėje.

1.2 lentelė

PSO algoritmo dalelių duomenų apibrėžimas [29]

Algoritmas 1. Apsibrėžiamie dalelių duomenis.
<p>Kiekvienai dalelei i iš S daryti</p> <p>Kiekvienai dimensijai d iš D daryti</p> <p>//Apsibrėžiamie kiekvienos dalelės poziciją ir greitį</p> $x_{i,d} = Rnd(x_{min}, x_{max})$ $v_{i,d} = Rnd(-\frac{v_{max}}{3}, \frac{v_{max}}{3})$ <p>Baigti ciklą</p> <p>// Apsibrėžiamie dalelės asmeninę geriausią poziciją</p> $pb_i = x_i$ <p>//Atnaujiname geriausią globalią poziciją</p> <p>Jei $f(pb_i) < f(gb)$ tada</p> $gb = pb_i$ <p>Baigti sąlygą</p> <p>Baigti ciklą</p>

PSO algoritmo aprašymas [29]

Algoritmas 2. Dalelių spiečiaus optimizavimas (geriausias globalus)
<pre> //Apsibrėžimai Kartoti Kiekvienai dalelei i iš S daryti //Atnaujiname kiekvienos dalelės geriausią asmeninę poziciją Jei $f(x_i) < f(pb_i)$ tada $pb_i = x_i$ Baigti sąlygą //Atnaujiname geriausią globalią poziciją Jei $f(pb_i) < f(gb)$ tada $gb = pb_i$ Baigti sąlygą Baigti ciklą //Atnaujiname dalelės greitį ir poziciją Kiekvienai dalelei i iš S daryti Kiekvienai dimensijai d iš D daryti $v_{i,d} = v_{i,d} + C_1 \cdot Rnd(0,1) \cdot (pb_{i,d} - x_{i,d}) + C_2 \cdot Rnd(0,1) \cdot (gb_d - x_{i,d})$ $x_{i,d} = x_{i,d} + v_{i,d}$ Baigti ciklą Baigti ciklą //Iteracijų skaičiaus pokytis $it = it + 1$ Tol, kol $it < ITERACIJŲ_SKAIČIUS$ </pre>

1.2 ir 1.3 lentelėse aprašomi kintamieji:

i – dalelės indeksas

d – dimensija

it – iteracijos numeris

$x_{i,d}$ – dalelės i pozicija dimensijoje d

$v_{i,d}$ – dalelės i greitis dimensijoje d

C_1 – pagreitis (konstanta) pažinimo komponentei

C_2 – pagreitis (konstanta) socialinei komponentei

Rnd – atsitiktinis dydis tolygiai pasiskirstęs intervale [0; 1]

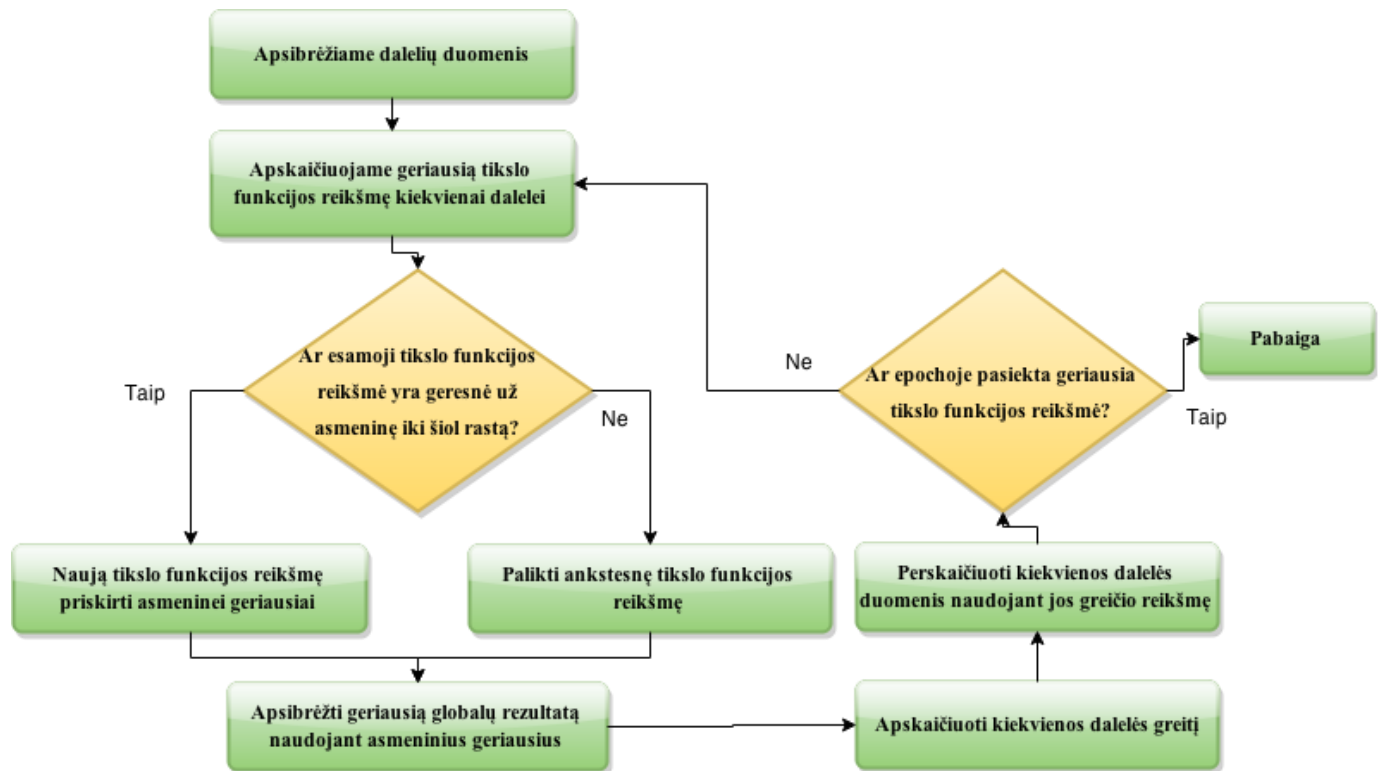
$pb_{i,d}$ – vieta dimensijoje d , kuri yra geriausia iš visų dalelės i aplankytų vietų.

gb_d – vieta dimensijoje d , kuri yra geriausia iš visų aplankytų vietų iš visų dalelių.

Skaičiuojant tikslo funkcijos reikšmes bus reikalinga vidutinė kvadratinė paklaida. Ji apsiraso tokia formule:

$$x_{VKP} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}, \quad (1.14)$$

kur x_i yra skirtumas tarp realios yra spėjamos reikšmės, o n yra imties dydis.



1.6 pav. PSO algoritmo schema [29]

Šiame darbe PSO algoritmas bus naudojamas empiriniam lyderio tikimybiniam pasiskirstymui sudaryti. Ieškamos bei tikslinamos geriausiai realų modelį atitinkančios kregždės uodegos katastrofos parametrų reikšmės.

1.5. KITI TEORINIAI ASPEKTAI

Šiame skyriuje aprašomi tyrimui naudojamos matematinės formulės bei sąvokos, reikalingos realiems duomenims apdoroti.

1.5.1. NORMALUSIS PASISKIRSTYMAS

Normalusis skirstinys dar yra vadinamas Gauso skirstiniu – tai tolydusis pasiskirstymas, pasižymintis šiomis savybėmis:

- Vidurkio (μ), modos ir medianos reikšmės sutampa.
- Pasiskirstymo tankio funkcija yra simetriška vidurio ašies atžvilgiu.
- Pasiskirstymo tankio funkcijos kreivės padėtis priklauso nuo vidurkio, o kreivės plotis ir amplitudė – nuo standartinio nuokrypio (σ).
- Atsitiktinių dydžių, pasiskirsčiusių pagal normalųjį dėsnį, suma taip pat yra atsitiktinis dydis, pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį.

Normaliojo skirstinio tikimybinio tankio funkcija yra aprašoma taip [27]:

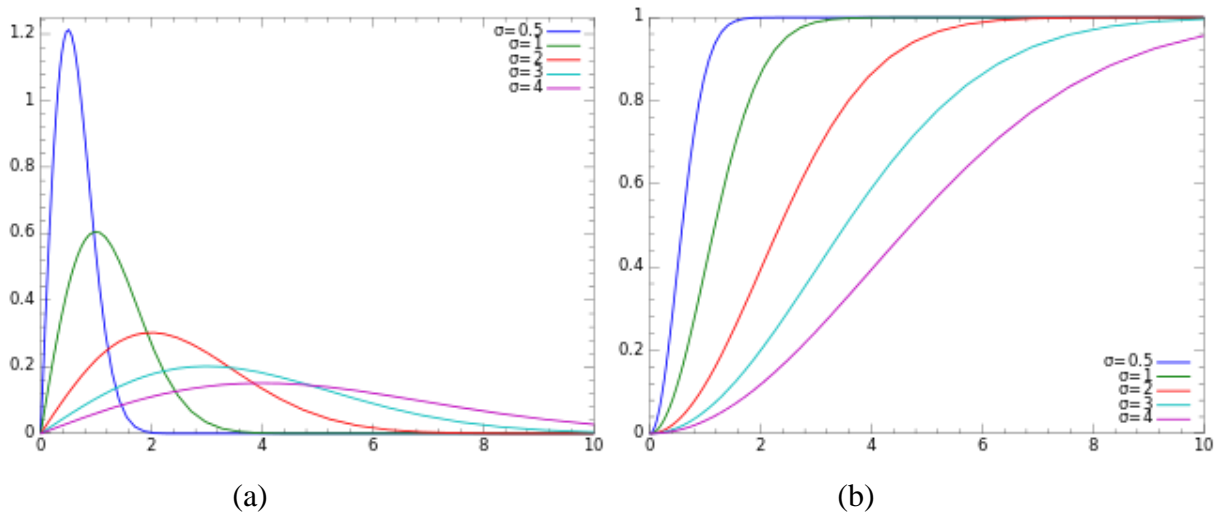
$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.15)$$

kur μ yra vidurkis, o σ – standartinis nuokrypis.

Normalusis dėsnis labai dažnai yra taikomas praktikoje. Nustatyta, kad jis labai gerai apibūdina daugelį reiškinių, tokių kaip žmogaus ūgis, svoris, vidutinė oro temperatūra, matavimo paklaidos ir pan.

1.5.2. RAYLEIGH PASISKIRSTYMAS

Rayleigh yra tolydusis pasiskirstymas, kuris yra pastebimas kai bendras vektorinis dydis yra siejamas su jo krypties komponente. Vienas iš Rayleigh dėsnio pasirodymo pavyzdžių yra, kai nagrinėjame vėjo greitį ortogonalioje dviejų dimensijų erdvėje. Šis dėsnis turi vieną parametą $\sigma > 0$. Tankio ir pasiskirstymo funkcijų priklausomybė nuo parametro yra vaizduojama 1.7 paveiksle.



1.7 pav. Rayleigh dėsnio (a) tankio funkcijos ir (b) pasiskirstymo funkcijos priklausomybė nuo parametro σ [27].

Rayleigh dėsnio apibrėžimo sritis yra $x \in [0, +\infty)$.

Tankio funkcija yra:

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}. \quad (1.16)$$

Pasiskirstymo funkcija yra:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.17)$$

Vidurkis:

$$M = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (1.18)$$

Dispersija:

$$D = \frac{4 - \pi}{2} \sigma^2. \quad (1.19)$$

Šiame darbe Rayleigh tikimybinis dėsnis yra naudojamas nusakant realius duomenis kartu su kregždės uodegos katastrofa.

1.5.3. DOANES FORMULĖ OPTIMALIAM HISTOGRAMOS INTERVALŲ SKAIČIUI

Doanes formulė yra naudojama norint rasti histogramos, kuri vaizduoja realius duomenis, optimaliam stulpelių skaičiui. Ši formulė yra modifikuota Stugesio formulė [28]. Ji naudojama tada, kai duomenys nėra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį. Pagal šią formulę histogramos stulpelių skaičius k yra lygus:

$$k = 1 + \log_2(n) + \log_2\left(1 + \frac{|g_1|}{\sigma_{g_1}}\right), \quad (1.20)$$

čia g_1 yra duomenų trečiasis momentas – asimetrija, o n – imties duomenų skaičius.

$$\sigma_{g_1} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}. \quad (1.21)$$

1.5.4. DISPERSINĖ ANALIZĖ (ANOVA)

Pažymėkime:

Y_{ij} – j -ojo objekto stebėjimas grupėje i ,

n_i – grupėje i esančių objektų skaičius,

$N = n_1 + n_2 + \dots + n_g$ – visas imties dydis.

Kad būtų galima atlikti vienmatę dispersinę analizę, turi būti tenkinamos tokios prielaidos [24]:

- Grupės i duomenys turi tą patį vidurkį $E(Y_{ij}) = \mu_i$.
- Išsibarstymas. Duomenys iš visų grupių turi bendrą dispersiją $\text{var}(Y_{ij}) = \sigma^2$.
- Duomenys turi būti tarpusavyje nepriklausomi.
- Duomenys pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį.

Keliama hipotezė, kad visi grupių vidurkiai yra lygūs, t.y.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_g. \quad (1.22)$$

Alternatyvi hipotezė yra, kad bent viena vidurkių pora yra nelygi viena kitai:

$$H_a: \mu_i \neq \mu_j \text{ bent vienai } i \neq j. \quad (1.23)$$

Įvedame kelis pažymėjimus:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} - \text{grupės } i \text{ vidurkis,}$$

$$\bar{y}_.. = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} - \text{bendras vidurkis.}$$

Reikalingi pažymėjimai su formulėmis yra surašyti į 1.4 lentelę.

1.4 lentelėje aprašoma Fišerio statistika turi $g - 1$ ir $N - g$ laisvės laipsnius. Mes atmetame H_0 prie α , jei Fišerio statistika yra didesnė už lentelėje gautą kritinę reikšmę, t.y. jei tenkinama nelygybė [29]:

$$F > F_{g-1, N-g, \alpha}. \quad (1.24)$$

Šiame darbe vienmatė dispersinė analizė yra naudojama norint nustatyti, ar šeštos ir dešimtos klasių moksleivių vidurkiai statistiškai reikšmingai tarpusavyje skiriasi. Daroma prielaida, kad jei nesiskiria, tai galime abi mokinių klases nagrinėti bendrai, t.y. taikyti vieną statistinį modelį pasiskirstymui nusakyti.

1.4 lentelė

Dispersinės analizės apibendrinimas [29]

	Laisvės laipsniai	Kvadratų suma (KS)	Kvadratų vidurkis (KV)	Fišerio statistika
Gydymas	$g - 1$	$\sum_{i=1}^g n_i (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2$	$\frac{KS_{gydymas}}{g - 1}$	$\frac{KV_{gydymas}}{KV_{klaida}}$
Klaida	$N - g$	$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{y}_i)^2$	$\frac{KS_{klaida}}{N - g}$	
Viso	$N - 1$	$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$		

1.5.5. KRUSKAL – WALLIS VIENMATĖ DISPERSINĖ ANALIZĖ

Kruskal-Wallis vieno kintamojo dispersinė analizė pagal rangus yra neparametrinis metodas, norint statistiškai įvertinti, ar imties duomenys yra vienodai pasiskirstę [24]. Kad metodas yra neparametrinis, tai reiškia, kad jis nereikalauja, jog duomenų pasiskirstymas būtų pilnai nusakomas dviem parametrais – vidurkiu ir dispersija. Jis naudojamas norint palyginti dvi ar daugiau imtis, kurios yra nepriklausomos ir kurios gali turėti skirtingus imties dydžius. Šis metodas yra praplečiamas į Mann – Whitmey U testą, kai nagrinėjamos daugiau nei dvi grupės. Parametrinis analogas šiam testui yra ANOVA dispersinė analizė. Kai atmetama Kruskal – Wallis nulinė hipotezė, kai bent viena imtis stochastiškai dominuoja bent vienoje iš kitų imčių. Šis testas neparodo, kurioje iš imčių pasirodo minėtas stochastinis dominavimas ar kiek stochastinio dominavimo grupių porų yra gaunama [29].

Priešingai nei vieno kintamojo dispersinė analizė (ANOVA), šis testas nereikalauja liekanų normalumo sąlygos, nes yra neparametrinis. Jei tyrėjas gali sudaryti griežtesnę prielaidą dėl pasiskirstymo formų ir skalių vienodumo visose grupėse, išskyrus bent kokiam medianiniam pokyčiui, tai keliami hipotezė, kad kiekvienos grupės medianos yra lygios. Alternatyvi hipotezė yra, kad bent viena grupės mediana skiriasi nuo kitų grupių populiacijos medianos.

Kruskal – Wallis testo skaičiavimus galime užrašyti tokiu būdu [29]:

- 1) Imami visų grupių duomenys ir jie suranguojami. Tai reiškia, kad mažiausia reikšmė įgyja reikšmę 1, antra nuo mažiausios – reikšmę 2 ir t.t. Jei yra susietų reikšmių, tai jas apibrėžiame kaip vidurkį reikšmių, kurias būtų įgijęs dydis, jei būtų nesusietas.
- 2) Šio testo statistika užsirašo formule:

$$K = (N - 1) \frac{\sum_{i=1}^g n_i (\bar{r}_i - \bar{r})^2}{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} (r_{ij} - \bar{r})^2}, \quad (1.25)$$

- Kur n_i yra stebėjimų skaičius grupėje i .
 - r_{ij} yra j -ojo stebėjimo rangas (tarp visų stebėjimų) grupėje i .
 - N yra visų grupių bendras stebėjimų skaičius.
 - $\bar{r}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij}}{n_i}$.
 - $\bar{r} = \frac{1}{2}(N + 1)$ yra visų r_{ij} vidurkis.
- 3) Jei duomenys neturi jokių apribojimų, tai K išraiškos vardiklis yra lygiai $(N - 1)N(N + 1)/12$ ir $\bar{r} = \frac{N+1}{2}$. Gauname, kad

$$K = \frac{12}{N(N + 1)} \sum_{i=1}^g n_i \left(\bar{r}_i - \frac{N + 1}{2} \right)^2 = \frac{12}{N(N + 1)} \sum_{i=1}^g n_i \bar{r}_i^2 - 3(N + 1). \quad (1.26)$$

- 4) Jei yra koreliaciniai rangų apribojimai, tai turime K padalinti iš $1 - \frac{\sum_{i=1}^G (t_i^3 - t_i)}{N^3 - N}$, kur G yra grupavimų skaičius su skirtingais apribotais rangais, o t_i yra grupėje i esančių apribotų reikšmių skaičius. Ši koreliacija dažniausiai padaro tik mažus K reikšmės pokyčius nebent yra labai didelis apribojimų skaičius.
- 5) p reikšmė yra paskaičiuojama iš $\Pr(\chi_{g-1}^2 \geq K)$. Jei dalis n_i yra mažos (mažesnės už 5), tai tikimybinis K reikšmės pasiskirstymas gali būti šiek tiek skirtingas nuo chi-kvadrato pasiskirstymo.

1.5.6. PEARSONO KORELIACIJOS KOEFICIENTAS

Pearsono koreliacijos koeficientas parodo tiesinę priklausomybę tarp kintamųjų. Rezultate gaunama reikšmė iš intervalo $[-1; 1]$, kur 1 reiškia, kad duomenys tarpusavyje yra teigiamai koreliuoti, o -1 – neigiamai. Pearsono koreliacijos koeficientas dažniausiai yra žymimas ρ raide. Ir jis apskaičiuojamas pagal formulę:

$$\rho_{X,Y} = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad (1.27)$$

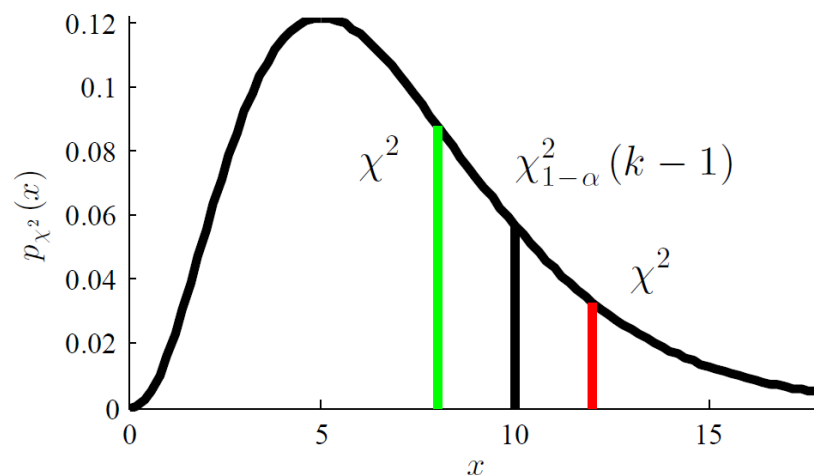
kur σ_X yra X standartinis nuokrypis, o cov yra kovariacija tarp X ir Y .

1.5.7. CHI KVADRATO SUDERINAMUMO TESTAS

Chi kvadrato testas, taip pat vadinamas χ^2 testu, yra bet kuri statistinė hipotezė, kurioje imties pasiskirstymas yra chi-kvadrato pasiskirstymas kai nulinė hipotezė yra neatmetama. Pearsono chi kvadrato testas dar yra žinomas kaip chi-kvadrato suderinamumo arba nepriklausomumo testas. Formaliai šis testas gali būti užrašomas taip:

- Pasirenkamas kritinis lygmuo α (pvz: $\alpha = 0,05$). Tada randamas pasiklovimo lygmuo $1 - \alpha$ (pvz: $1 - 0,05 = 0,95$).
- Tiriamą imtį sugrupuojame į k intervalų: $[\alpha_0; \alpha_1], [\alpha_1; \alpha_2], \dots, [\alpha_{k-1}; \alpha_k]$.
- Kiekviename intervale randame santykinus dažnius m_i , $i = 1; 2; \dots; k$.
- Randame tikimybes $p_i = F(\alpha_i) - F(\alpha_{i-1})$, $i = 1; 2; \dots; k$.
- Sudarome ieškomą statistiką: $\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - np_i)^2}{p_i}$.
- Randame kvantilį, su $k - 1$ laisvės laipsniais: $\chi_{1-\alpha}^2(k - 1)$.
- Nulinė hipotezė H_0 priimama, jei $\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2(k - 1)$.

Suderinamumo hipotezės priėmimas taip pat yra vaizduojamas 1.8 paveiksle:



1.8 pav. Suderinamumo hipotezės tikrinimo grafinė iliustracija.

1.5.8. SHAPIRO – WILK SUDERINAMUMO TESTAS

Shapiro – Wilk testas yra naudojamas norint nustatyti, ar duomenys yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį. Tikrinama nulinė hipotezė, kad duomenys x_1, x_2, \dots, x_n yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį. Statistika aprašoma formule [29]:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{x})^2}, \quad (1.28)$$

čia $x_{(i)}$ mažiausias testuojamas dydis i -oje imtyje; $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ – imties vidurkis; konstantos a_i yra apskaičiuojamos tokiu būdu [29]:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{\frac{1}{2}}}, \quad m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T, \quad (1.29)$$

čia m_1, m_2, \dots, m_n yra vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių kintamųjų imties, kurie yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį, statistiškai tikėtinos reikšmės. V yra šių reikšmių kovariacijų matrica.

Nulinė hipotezė yra atmetama, jei W yra mažesnė už prognozuojamą reikšmę, o duomenys, tokiu atveju, nėra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį [29].

Šiame darbe šis testas yra naudojamas tam, kad būtų galima atlikti dispersinę bei koreliacinę analizes.

2. TIRIAMOJI DALIS IR REZULTATAI

Šiame skyriuje aprašomas kregždės uodegos katastrofos tyrimas tiek parametru erdvėje, tiek elgsenos plokštumoje (žr. 2.1. skyrių). Taip pat, analizuojamos mokinių darbo grupės (žr. 2.2.1. skyrių), modeliuojamas lyderystės elgsenos pokytis priklausomai nuo vaikų charakterinio savybių (žr. 2.2.6. skyrių).

2.1. KREGŽDĖS UODEGOS KATASTROFOS TYRIMAS

Kregždės uodegos katastrofą atvaizduoti viena iliustracija yra labai sunku. Norint išsiaiškinti, kodėl įvyksta vienokie ar kitokie pasikeitimai, reikia išsamios analizės. Kaip buvo minėta anksčiau, kregždės katastrofą aprašo trys parametrai. Vadinas, norint atvaizduoti elgsenos paviršių reikia vieną iš parametru fiksuoti, nes keturių dimensijų erdvę atvaizduoti yra sudėtinga, o interpretuoti rezultatus tokiu atveju beveik neįmanoma.

Šis skyrelis susideda iš dviejų pagrindinių dalių:

- Fiksuojamas parametras u . Atvaizduojame elgsenos paviršių prie skirtingų šio parametro reikšmių. Stebimi pasikeitimai dinaminėje sistemoje.
- Nagrinėjama parametru erdvė. Nustatoma fiksuotų taškų skaičiaus priklausomybė nuo parametro reikšmių.

2.1.1. DINAMINĖS SISTEMOS ELGSENOS PRIKLAUSOMYBĖS NUO PARAMETRO u TYRIMAS

Kregždės uodegos katastrofa aprašo dinaminės sistemos elgseną, kurioje yra dvi stabilios ir dvi nestabilios sritys. Dinaminė sistema yra aprašoma tokia lygtimi:

$$f(x, u, v, w) = x^5 + wx + vx^2 + ux^3.$$

Arba

$$\frac{\delta f(x, u, v, w)}{\delta x} = 5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w. \quad (2.1)$$

Skirtingai nei klostės katastrofos atveju (žr. 1.2.2. skyrių), čia prisideda dar vienas valdymo parametras u , kuris žymi postūmį (ang. bias). Jis dar kitaip yra vadinamas antruoju asimetrijos parametru. Šiuo atveju jį galima vadinti katastrofos parametru, nes būtent jo pokyčiai nulemia, ar įvyksta kregždės uodegos katastrofa, ar ne.

Fiksuoti taškai randami išsprendus tokią lygtį:

$$5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0.$$

Šiuos rimties taškai yra atvaizduoti grafiškai 2.1.2. skyriuje prie įvairių parametru reikšmių. Norint nustatyti, kada įvyksta šioje dinaminėje sistemoje katastrofa, reikia apskaičiuoti ir antros eilės išvestinę [3].

$$\frac{d^2 f(x, u, v, w)}{dx^2} = 20x^3 + 6ux + 2v.$$

Turime išspręsti tokią lygčių sistemą parametru v ir w atžvilgiu:

$$\begin{cases} 5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0, \\ 20x^3 + 6ux + 2v = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Gauname:

$$\begin{aligned} v &= -10x^3 - 3ux, \\ w &= 15x^4 + 3ux^2. \end{aligned}$$

Šių išraiškų pagalba atvaizduojame kritinę sritį. Tam apibrėžiame tokias funkcijas:

$$\begin{aligned} v(x, u) &= -10x^3 - 3ux, \\ w(x, u) &= 15x^4 + 3ux^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Fiksavus parametro u reikšmę gauname dvi funkcijas, kurios priklauso nuo vieno parametro x . Nesudėtinga pastebėti, kad galime išskirti tris galimus atvejus:

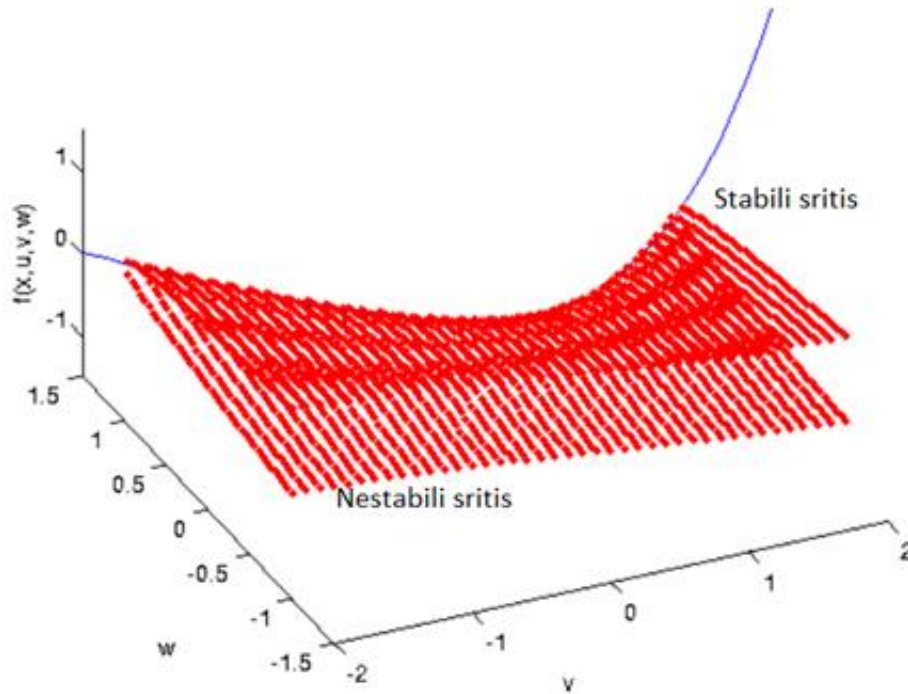
- a) Kai $u > 0$;
- b) Kai $u = 0$;
- c) Kai $u < 0$.

Aptarsime kiekvieną iš jų atskirai. Kad būtų aiškiau pastebėti, su kuriomis parametru reikšmėmis dinaminė sistema iš esmės pasikeičia, t.y. įvyksta bifurkacija, pažymėkime šią sritį mėlyna linija (kritinė sritis). Pradėkime nuo paprasčiausio atvejo, kai tiriamas parametras yra teigiamas.

- a) Kai $u > 0$, tai turime dvi galimas sritis: stabilią ir nestabilią. Gauname grafiką panašų į perlinkio katastrofą.

Pastaba: perėjimas iš stabilios srities į nestabilią sritį yra kokybinis dinaminės sistemos elgsenos pasikeitimas.

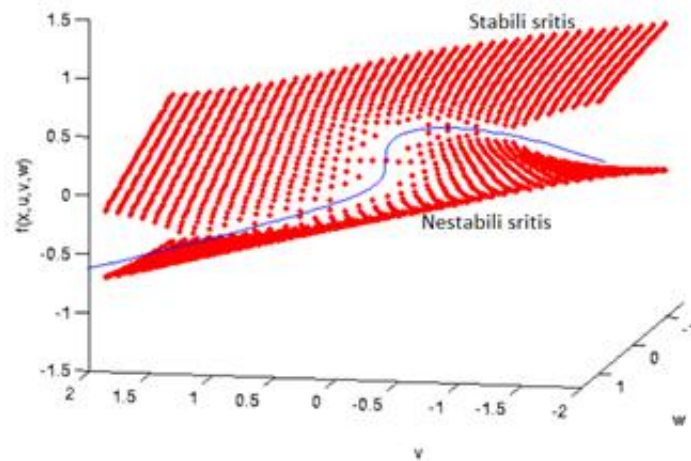
Atvaizduokime atvejį, kai $u = 1$. Taip pat paveiksle pažymėkime, kur yra stabili, o kur nestabili sritis. Gauti rezultatai pateikti 2.1 paveiksle.



2.1 pav. Kregždės uodegos sistemos dinamikos vizualizacija, kai $u > 0$ [22].

Priklausomai, nuo likusių parametų v ir w reikšmių galime neturėti nei vieno fiksuoto taško, vieną fiksuotą tašką (ant mėlynai pažymėtos kritinės srities) ir du fiksuotus taškus. Jei esame ant stabilios srities, tai keičiant parametų v ir w reikšmes galime toliau judėti ant stabilaus paviršiaus tol, kol pasiekiamo kritinę sritį (mėlyna linija). Jei dabar bent šiek tiek pakeisime nors vieno parametro reikšmę, taip, kad judėsime tolyn nuo stabilios srities, iškart pereisime į nestabilią sritį. Dabar norėdami po truputį keisti parametrus, kad grįžtume į pradinę būseną pirmiausia, turime pasiekti kritinę sritį, o tik tada padarius dar vieną žingsnelį tolyn nuo nestabilios srities, mes galėsime atsidurti ant stabilaus paviršiaus. Akivaizdu, kad toks kregždės katastrofos atvejis yra analogas perlanko katastrofai. Jei stipriai pakeitę parametrus mes atsiduriame toje vietoje, kur nėra nei stabilios, nei nestabilios srities, tai galime teigti, kad ten nėra rimties taškų. Tokiu atveju mes mažai ką galime pasakyti apie dinaminę sistemą, o jos išsamesnei analizei reikėtų pasitelkti kitus metodus.

- b) Kai kurie šaltiniai išskiria atvejį, kai $u = 0$. Šiuo atveju dinaminė sistema yra tam tikroje kritinėje būsenoje, nes atlikus bent mažiausią poslinkį į vieną ar kitą (teigiamą ar neigiamą) parametro u pusę gauname iš esmės pasikeitusią dinaminę sistemą.

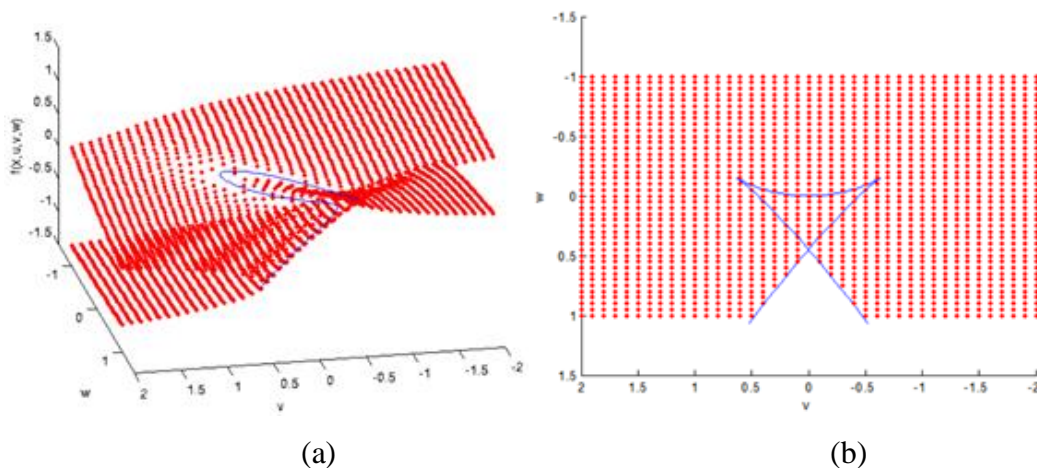


2.2 pav. Kregždės uodegos sistemos dinamikos vizualizacija, kai $u = 0$.

Iš 2.2 pav. grafiko matyti, kad vis dar yra dvi sritys: viena stabili, o kita nestabili. Galima pastebėti, kad kritinės srities (mėlyna linija) viduryje formuojasi naujos sritys. Šis atvejis yra dažnai priskiriamas a) atvejui.

Nei a), nei b) dalyse nebuvo matyti kregždės uodegos katastrofos, nes dinaminė sistema turėjo tik dvi skirtingas stabilumo sritis. Įdomesnis atvejis yra tada, kai nagrinėjamas parametras u yra neigiamas.

c) Kai $u < 0$. Dabar turime dvi stabilias ir dvi nestabilias sritis. Perėjimas, kai u virsta mažesniu už nulį, yra vadinamas kregždės uodegos katastrofa.

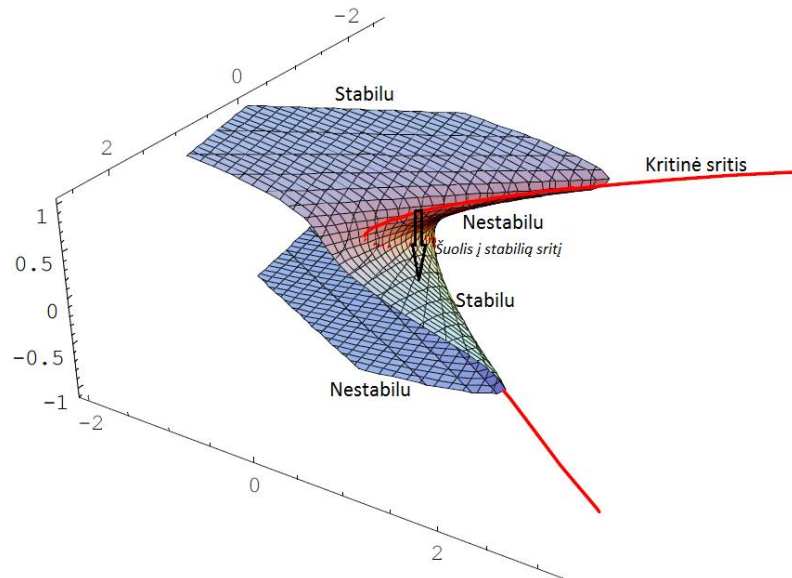


2.3 pav. Kregždės uodegos katastrofa, kai $u < 0$.

Iš 2.3 pav. kairėje pusėje esančio grafiko matyti, kad viena stabili sritis dengia kitą ir viena nestabili sritis dengia kitą nestabilią. Tokie persilenkimai yra panašūs į klostės katastrofą, tačiau čia taip pat yra ir sritys, analogiškos perlinkio katastrofos atvejui. Taip pat skirtingai nei klostės katastrofa, šiuo atveju nėra tokios srities, į kurią būtų neįmanoma patekti. Dešinėje pusėje esantis grafikas yra tas pats, kuris yra ir

kairėje, tik atvaizduotas iš viršaus. Atvaizdavus kritinę sritį, matome, kad gautas vaizdas labai primena kregždės uodegą. Dėl to ši katastrofa ir įgavo tokį pavadinimą.

Kad būtų suprantamiau, kas vyksta šiuo atveju dinaminėje sistemoje, pavaizduokime tą patį atvejį pasitelkę daugiau spalvų ir sužymėkime visus svarbius reiškinius pačiame grafike (žr. 2.4 pav.).



2.4 pav. Kregždės uodegos katastrofa, kai $u < 0$.

Šiuo atveju galimas ne tik perėjimas į nestabilumą, bet taip pat šuolis į stabilią sritį. 2.4 pav. rodyklė ir parodo, kad pasiekus tam tikrą kritinę sritį yra šuolis, po kurio atsiduriame kitoje stabilioje plokštumoje. Tačiau ši kregždės uodegos katastrofa nėra analogas klostės katastrofai, nes čia galima pereiti į nestabilią sritį.

Aprašykime kiekvieną galimą atvejį:

- Iš viršutinės stabilios srities galima pereiti į apatinę stabilią sritį po truputį keičiant parametrus ir neperžengiant kritinės srities (raudona linija).
- Iš viršutinės stabilios srities galima pereiti į apatinę stabilią sritį šuoliu, kai yra peržengiama kritinė sritis.
- Iš viršutinės stabilios srities galima pereiti į nestabilią viršutinę sritį, kai kritinė raudona linija yra toliau apatinės stabilios srities ribos.
- Iš apatinės stabilios srities galima pereiti į viršutinę stabilią sritį po truputį keičiant parametrus ir neperžengiant kritinės srities (raudona linija).
- Iš apatinės stabilios srities galima pereiti į nestabilią viršutinę sritį, po truputį keičiant parametrus ir peržengiant kritinę raudoną liniją.

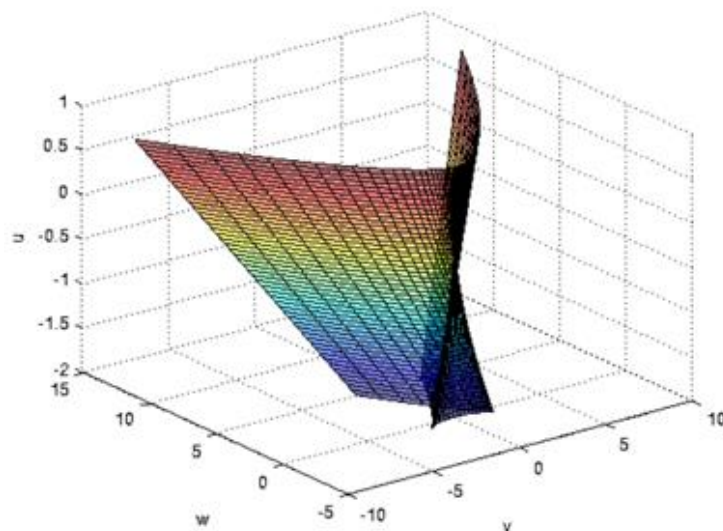
- Iš apatinės stabilios srities galima pereiti į nestabilią apatinę sritį, kai peržengiama kritinė raudona linija.

Pastaba: Šuolio iš apatinės stabilios srities į viršutinę būti negali, nes vietoje to yra perėjimas į nestabilią sritį.

Čia aprašyta tik tai, kaip gali pasikeisti būseną judant nuo vienos iš dviejų stabilumo sričių. Analogiškai yra ir kai pradama nuo nestabilių sričių.

2.1.2. KREGŽDĖS UODEGOS KATASTROFOS PARAMETRŲ ERDVĖS TYRIMAS

Parametrų erdvė vaizduoja visų parametrų priklausomybę vienas nuo kito. Jau žinome, kad kregždės uodegos katastrofos atveju yra trys parametrai: u, v, w , kurie ir sudaro trijų dimensijų erdvę. Gautą vaizdą galima pamatyti 2.5 pav. grafike.



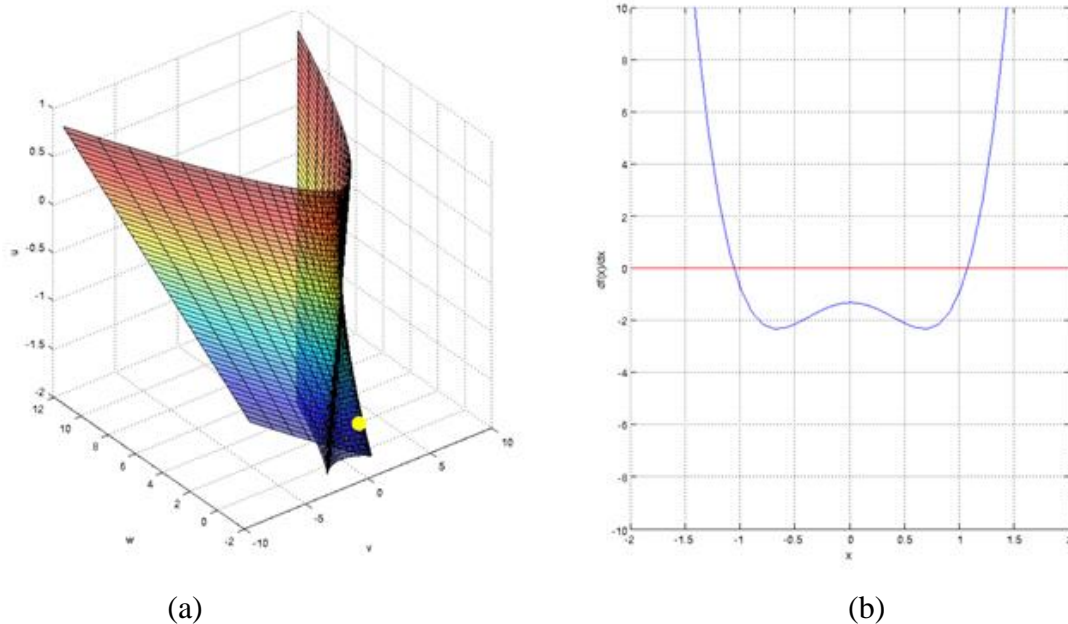
2.5 pav. Kregždės uodegos katastrofos parametrų erdvė.

2.5 pav. matomas vaizdas labai primena kregždės uodegą, tačiau to, kas vyksta dinaminėje sistemoje parametrui įgyjant tam tikras reikšmes, žvelgiant į šį grafiką nėra paprasta nusakyti. Tam buvo atliktas tyrimas imant taškus tam tikrose vietose ir šalia atvaizduojant funkcijos išvestinės grafiką. Akivaizdu, kad tokiu būdu galėsime matyti, kiek yra rimties taškų kregždės uodegos viduje, kraštuose ar visai atsitraukus nuo vaizduojamo grafiko. MATLAB programos pagalba buvo sukurta animacija, vaizduojanti visus įmanomus atvejus ir dinaminės sistemos pokyčius. Toliau pateikiami pagrindiniai gauti rezultatai.

Parinktą parametrų rinkinį pažymėsime parametrų erdvėje dideliu tašku, o šalia atvaizduosime funkcijos išvestinės grafiką su tomis parametrų reikšmėmis. Taip, pat prisiminkime, kaip yra randami

rimties taškai – funkcijos išvestinę prilyginus nuliui. Kad būtų aiškiau pastebėti, kiek yra rimties taškų, grafike paryškinkime abscisių ašį raudona spalva. Tiek, kiek yra susikirtimo taškų su funkcijos išvestinės grafiku, tiek ir yra rimties taškų, nes tada $\frac{df(x)}{dx} = 0$.

a) Parinkime tokias parametru reikšmes, kad taškas būtų šalia grafiko, bet jo nelieštų.

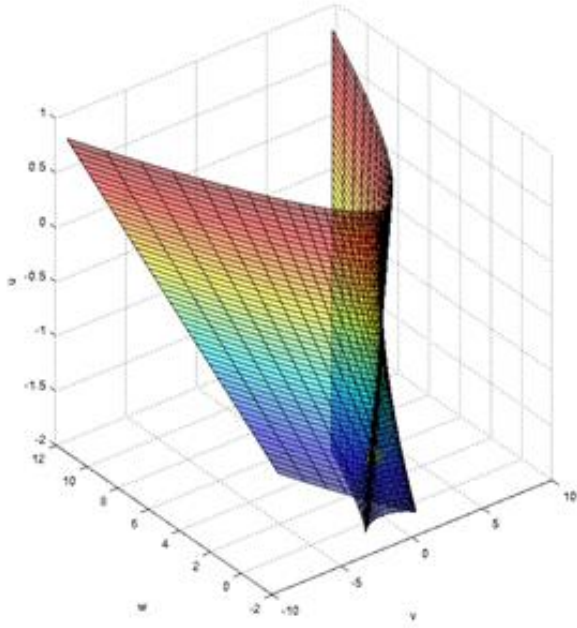


2.6 pav. Kregždės uodegos katastrofos parametru erdvė (a) ir išvestinės grafikas (b), kai $u = -1, 5, v = 0, w = -1, 3$.

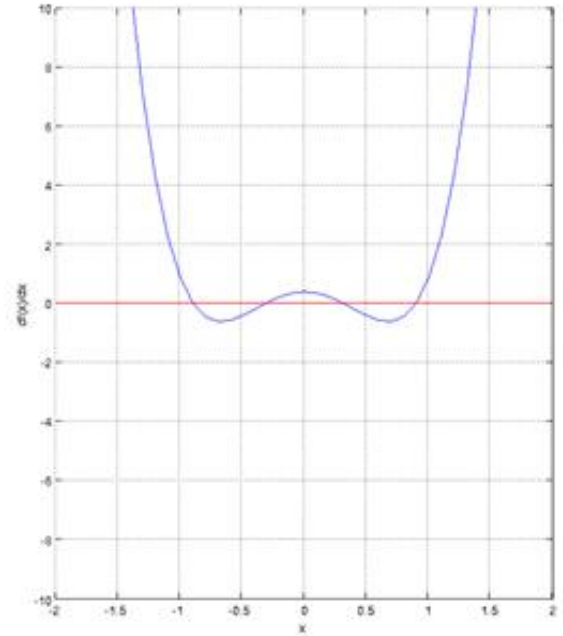
2.6 pav. grafike geltonas taškas rodo, kokį parametru rinkinį pasirinkome. Dešinėje pusėje esančiame grafike matome, kad yra du rimties taškai, nes funkcijos išvestinės grafikas kerta abscisių ašį dviejuose taškuose. Jei parinktume tokias parametru reikšmes, kad šis funkcijos išvestinės grafikas šiek tiek pakiltų abscisių ašies atžvilgiu, gautume du sankirtos ir vieną sąlyčio tašką. Vadinasi, turėtume tris rimties taškus. Tokiu atveju geltonas rutuliukas kairėje pusėje esančiame grafike būtų vaizduojamas ant kregždės uodegos krašto. Jei norime sužinoti, kur būtų taškas, kai funkcijos išvestinės grafiką dar daugiau pakeltume aukštyne abscisių ašies atžvilgiu ir gautume keturis susikirtimo taškus, tai reiktų parinkti tokį parametru rinkinį, kuris būtų kregždės uodegos viduje. Tai galime pamatyti b) dalyje.

b) Parinkime tokias parametru reikšmes, kad taškas būtų kregždės uodegos viduje.

Iš 2.7 pav. grafiko matyti, kad taškui esant kregždės uodegos viduje, dinaminė sistema turi keturis fiksuotus taškus. Galima teigti, kad tai atitinka 2.4 paveikslą grafiko sritį, kuri yra tarp kelių persilenkimų.



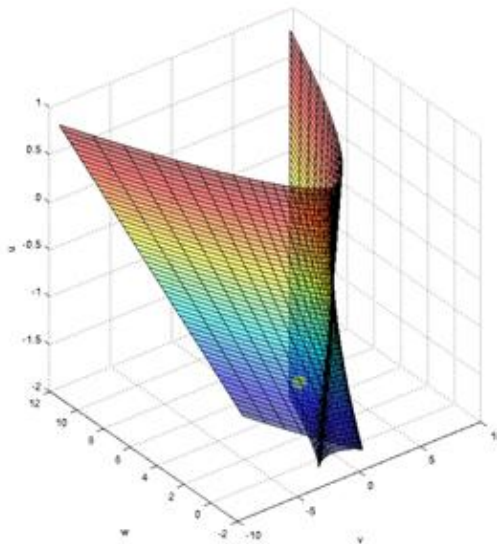
(a)



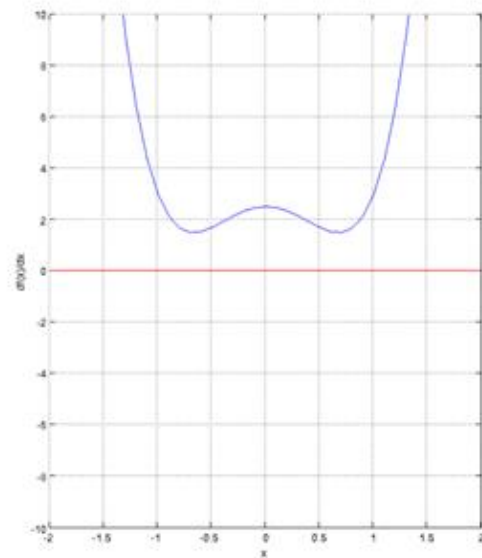
(b)

2.7 Pav. Kregždės uodegos katastrofos parametų erdvė (a) ir išvestinės grafikas (b), kai $u = -1,5, v = 0, w = 0,4$.

c) Paimkime tokias parametų reikšmes, kad minėtas taškas būtų kitoje kregždės uodegos pusėje, nei nagrinėjome iki šiol.



(a)



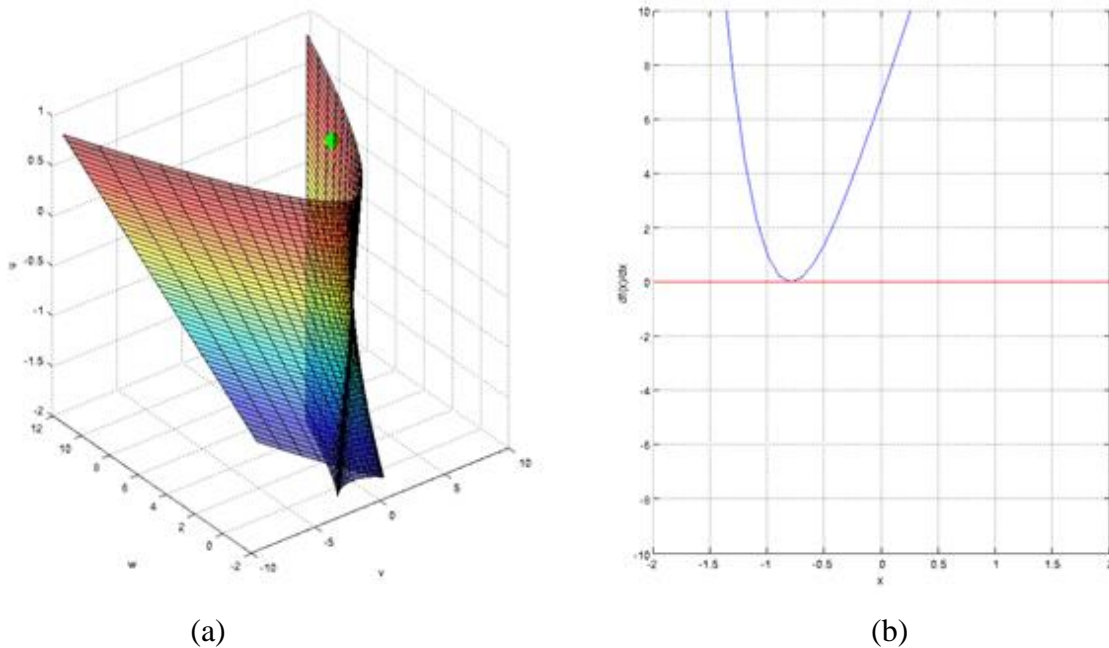
(b)

2.8 Pav. Kregždės uodegos katastrofos parametų erdvė (a) ir išvestinės grafikas (b), kai $u = -1,5, v = 0, w = 2,5$.

Iš dešinėje pusėje esančio 2.8 pav. grafiko galime matyti, kad šiuo atveju dinaminė sistema neturi fiksuotų taškų, todėl apie jos stabilumą ką nors pasakyti yra pakankamai sudėtinga. Tam reikėtų naudoti kitus metodus.

Iki šiol bandėme parinkti tokias parametrų reikšmes, kad tiesiog slenkant funkcijos išvestinės kreivei abscisių ašies atžvilgiu, stebima, kaip keičiasi fiksuotų taškų skaičius. Akivaizdu, kad tokiais atvejais vienas fiksuotas taškas nėra įmanomas. Tam aptarkime ir kitus galimus parametrų rinkinius.

d) Paimkime tokį parametrų rinkinį, kad taškas atsidurtų ne ant pačios uodegos, o virš jos.



2.9 Pav. Kregždės uodegos katastrofos parametrų erdvė (a) ir išvestinės grafikas (b), kai $u = 0,4, v = 6,0801, w = 6,9122$.

Iš gauto grafiko (žr. 2.9 pav.) aiškiai matyti, kad yra tik vienas fiksuotas taškas. Jei atsidurtume ant kitos grafiko šakos, tai dešinėje pusėje esančiame grafike funkcijos išvestinė būtų pakrypusi į kitą pusę ordinačių ašies atžvilgiu. Daugiau įvairių galimų variantų yra pateikta ataskaitos 2 priede.

Susipažinus, ką reiškia kiekviena kregždės katastrofos parametrų erdvės vaizduojama sritis, galime teigti, kad jos pilnai pakanka norint nusakyti fiksuotų taškų skaičių nagrinėjamoje dinaminėje sistemoje. Šiuo atveju buvo tik trys nagrinėjami parametrai, tačiau kitų elementarių katastrofų atveju (pavyzdžiui drugelio katastrofoje) tai padaryti yra kur kas sudėtingiau.

2.2. KREGŽDĖS UODEGOS KATASTROFOS MOKINIŲ DARBO GRUPĖSE ATSIRADIMO TYRIMAS

Iki šiol analizavome tik pačią kregždės uodegos katastrofą ir jos galimus pokyčius. Šiame skyriuje tiriamas konkretus pritaikymo pavyzdys – tai lyderio atsiradimas mokinių darbo grupėse. Kad tokia reiškinys pasirodo ši katastrofa, yra aprašoma 1.3. skyriuje.

2.2.1. MOKINIŲ DARBO GRUPIŲ STATISTINIŲ DUOMENŲ SURINKIMAS IR ANALIZĖ

2015 metų kovo 9 ir 16 dienomis KTU inžinerijos licėjuje KTU universiteto matematikos ir gamtos mokslų fakulteto magistrantė Eglė Butkevičiūtė ir asistentas Mantas Landauskas dešimtos ir šeštos klasės mokiniams vedė užsiėmimus tema „Lyderystės atsiradimo mokinių grupėse tyrimas“. Mokiniai atsitiktinai buvo suskirstyti į grupes. Šios komandos turėjo atlikti matematinės – logines užduotis. Buvo atsižvelgiama tiek į atliktų užduočių teisingumą, tiek į atlikimo greitį. Pabaigoje užpildoma anketa, kurios pagalba bus atliekami tolimesni tyrimai. Anketos forma pateikta 3 priede. Ji buvo sudaroma remiantis 1.3.1. skyriuje pateikta informacija bei LSMU psichologijos asistentės Rožės Joffe rekomendacijomis.

Iš viso apklausoje dalyvavo $n = 102$ mokiniai. Kiekvienas klausimas įvertintas po vieną balą. Jei mokins ties, pavyzdžiui, antru klausimu pasirinko du grupės narius, tai jiems skiriama po 0,5 taško ir t.t. Pabaigoje kiekvienam mokiniui buvo priskirta jo gautų taškų suma. Dėl atsiradusių anketos pildymo klaidų buvo šiek tiek koreguojami duomenys, t.y. jei ties tam tikru klausimu nebuvo nieko pažymėta, tai buvo traktuojama, kad visi komandos nariai gavo po vienodą tam klausimui skirtą taško dalį. Gauti duomenys buvo sunormuojami tiek pagal mokinių skaičių grupėje, tiek pagal klausimų skaičių. Sutvarkyti duomenys pateikti 4 priede (kompaktiniame diske).

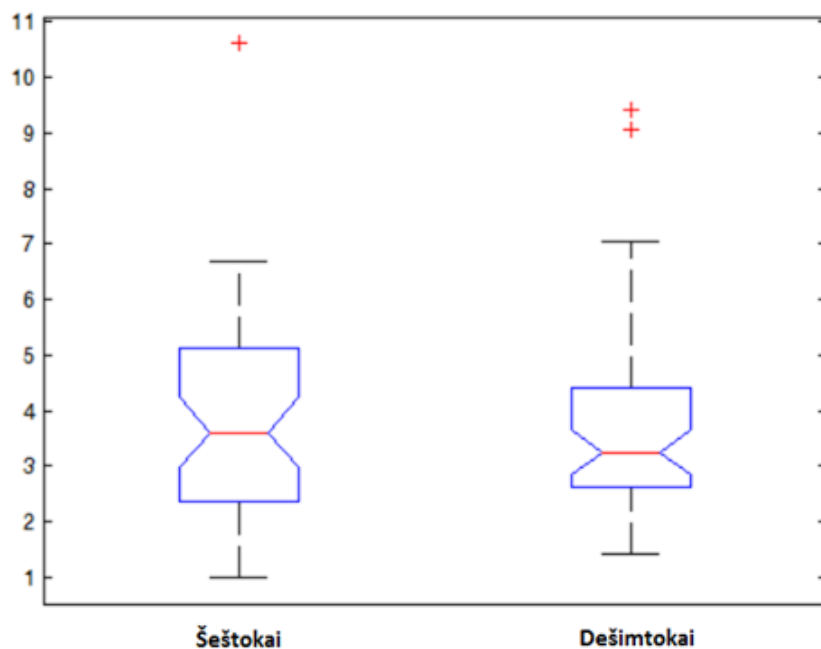
Gautų sunormuotų duomenų x_1, x_2, \dots, x_{102} skaitinės charakteristikos:

$$\text{Vidurkis: } M(x) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 3,7188;$$

$$\text{Standartinis nuokrypis: } \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 1,8063;$$

$$\text{Asimetrija: } A(x) = g_1 = \frac{1}{n\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 = 1,2178.$$

Šeštos klasės apklausos duomenų vidurkis yra 3,8298, standartinis nuokrypis 1,9261. Tuo tarpu dešimtos klasės vidurkis yra 3,6905, o standartinis nuokrypis lygus 1,7717. Mokinių šeštokų ir dešimtokų skaitinės charakteristikos vaizduojamos stačiakampėje diagramoje 2.10 paveiksle.



2.10 pav. Šeštokų ir dešimtokų balų stačiakampės diagramos.

Norėdami šeštos ir dešimos klasių mokinius analizuoti kartu, pirmiausia turime įsitikinti, kad jie statistiškai reikšmingai nesiskiria. Tam naudosimės vienmate dispersine analize (žr. 1.5.4. skyrius). Ar galime naudoti ANOVA dispersinę analizę, galime sužinoti tik patikrinę prielaidas apie vidurkių ir dispersijų tarp klasių lygybę bei pasiskirstymą pagal normalųjį dėsnį. Normalumo tikrinimui naudosime Shapiro - Wilk statistiką. Hipotezė keliama prie pasirinkto kritinio lygmens $\alpha = 0,05$. Gauti rezultatai pateikti 2.1 lentelėje.

2.1 lentelė

Shapiro Wilk statistikos rezultatai šeštos ir dešimos klasių moksleiviams.

Klasė	Tikrinama hipotezė	Gauta Shapiro – Wilk statistikos reikšmė	p reikšmė (reikšmingumo lygmuo)	Hipotezė priimama ar atmetama
Šeštokai	H_0 : rezultatai pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį	0,9252	0,0067	Atmetama
Dešimtokai	H_0 : rezultatai pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį	0,8724	0,0003	Atmetama

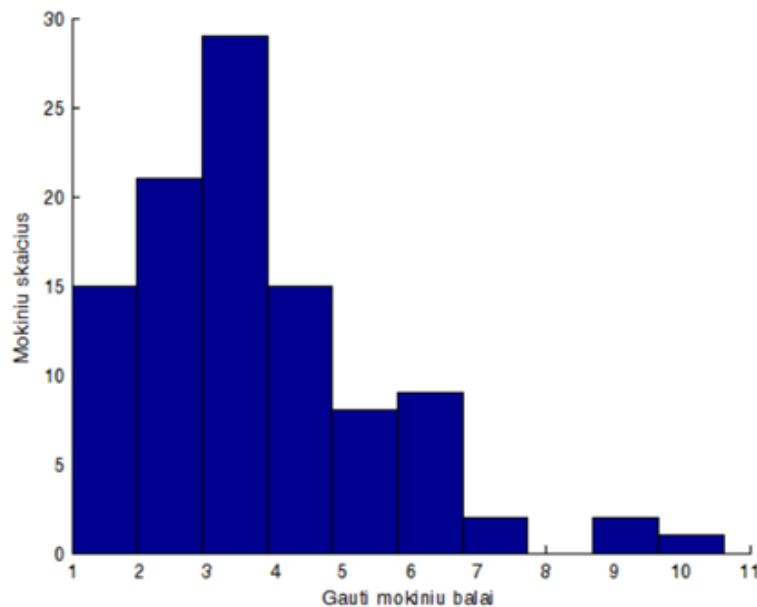
Iš 2.1 lentelės matome, kad hipotezės apie duomenų pasiskirstymą pagal normalųjį dėsnį yra atmetamos, tai duomenys yra pasiskirstę pagal kitą dėsnį, o ANOVA dispersinę analizę taikyti yra netikslinga. Tokiu atveju nustatyti, ar duomenys yra vienodai pasiskirstę galime nparametriniu Kruskal-Wallis testu. Prie kritinio lygmens $\alpha = 0,05$ gauname, kad reikšmingumo lygmuo $p = 0,6969$. Vadinasi, nulinė hipotezė apie duomenų pasiskirstymą pagal tą patį dėsnį yra neatmetama. Galime teigti, kad duomenų pasiskirstymas tarp šeštokų ir dešimtokų statistiškai reikšmingai nesiskiria. Vadinasi, abiejų klasių duomenis galime analizuoti kaip bendrus. Tolimesniame tyrime nebus atskiriami šeštokai ir dešimtokai.

Surinktus duomenis patogiausia atvaizduoti histograma. Tam reikia žinoti, kiek histogramos stulpelių parinkti. Pasinaudosime Doanes formule (1.5.8. skyrelis). Iš (1.28) ir (1.29) formulių gauname, kad:

$$\sigma_{g_1} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}} = 0,2362;$$

$$k = 1 + \log_2(n) + \log_2\left(1 + \frac{|g_1|}{\sigma_{g_1}}\right) = 10,2981.$$

Vadinasi, duomenims atvaizduoti, bus naudojama dešimties stulpelių histograma. Ji pavaizduota 2.11 paveiksle. Iš jos matome, kad duomenys nėra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį. Tai galime patikrinti ir naudojantis Shapiro – Wilk statistika prie kritinio lygmens $\alpha = 0,05$. Gaunama Shapiro – Wilk reikšmė yra 0,9129, o reikšmingumo lygmuo $p = 0,0001$. Vadinasi, hipotezė apie duomenų pasiskirstymą pagal normalųjį dėsnį yra atmetama. Tolimesniuose tyrimuose bus formuojamas modelis geriausiai atitinkantis apklausos rezultatų duomenis.



2.11 Pav. Apklausos duomenų rezultatų histograma.

Kaip buvo minėta anksčiau, mokinių apklausa buvo siejama su lyderio atsiradimu grupėje. Kuo daugiau balų surinko moksleivis savo grupės narių požiūriu, tuo labiau jis pasižymėjo lyderio savybėmis. Iš 2.11 paveikslo galime pastebėti, kad tarp mokinių grupių išsiskyrė trys lyderiai. Juos vadinsime pirmo tipo lyderiais. Daugiausiai mokinių surinko apie 1-3 balus. Juos tolimesniame tyrime vadinsime nesančiais lyderiais. Tarpe tarp lyderių ir ne lyderių yra grupė žmonių, kurie surinko 5,5 – 7,7 balus, jie bus vadinami antro tipo lyderiais.

2.2.2. GERIAUSIAI ATITINKANČIO APKLAUSOS DUOMENŲ MODELIO PAIEŠKA

2.2.1. skyriuje, mokinių balai nėra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį. Iš 2.11 paveikslo matyti, kad trys lyderiai yra tarsi atskirti nuo likusių mokinių. Kad būtų į tai atsižvelgta į pasiskirstymo modelį įtrauksime ir katastrofos funkciją. Ją žymėsime $f(x)$.

Buvo analizuojami įvairūs atvejai su įvairiomis pasiskirstymo funkcijomis. Tam tikro dėsnio pasiskirstymo tankio funkciją žymėsime $p(x)$. 2.2 lentelėje pateiktas sąrašas funkcijų, kurios buvo tiriamos bei kokių sąryšiu jos buvo susietos su kregždės uodegos katastrofos funkcija.

Norint nustatyti, kuris pasiskirstymas geriausiai aprašo surinktus duomenis, buvo naudojamas dalelių spiečiaus (PSO) algoritmas (žr. 1.4. skyriuje). Į šį algoritmą buvo įtraukti visi funkcijų $p(x)$ ir $f(x)$ parametrai kaip dalelės dimensijos. Tikslų funkcija yra apibrėžiama dviem būdais:

- 1) Vidutine kvadratine paklaida tarp histogramos stulpelių vidurio taško ir tiriamos pasiskirstymo tankio funkcijos tame taške. Ją tolimesniame darbe žymėsime $F_1(x)$, kur x yra daugiamatis atsitiktinis dydis, kurio dimensija priklauso nuo ieškomų parametrų skaičiaus.
- 2) Keliama hipotezė apie duomenų pasiskirstymą pagal analizuojamą dėsnį, t.y. taikomas chi – kvadrato kriterijus (χ^2). Geresnis modelis laikomas tas, su kuriuo gaunama mažesnė kritinio lygmens α reikšmė ties kuria vis dar nulinė hipotezė nėra atmetama. Pažymėkime šią tikslo funkciją $F_2(x) = \arg \min_{\alpha} \{X \sim g(x)\}$.

Pasirenkant dėsnį norima gauti kiek įmanoma tikslesnius rezultatus, t.y. kad kuo labiau pasiskirstymo tankio funkcija atitiktų realius duomenis. Tam įvedame papildomus parametrus. Tiriamos išraiškos atrodo taip:

$$g(x) = p(a_1 \cdot x + a_2) + a_3(f(x \cdot a_1 + a_4 + a_2) + a_5),$$

$$g(x) = p(a_1 \cdot a_3(f(x \cdot a_1 + a_4) + a_5) + a_2),$$

$$g(x) = p(a_1 \cdot x + a_2) \cdot a_3(f(x \cdot a_1 + a_4 + a_2) + a_5).$$

Šie visi parametrai reikalingi tam, kad galėtume įvertinti tiek funkcijų postūmius (a_2 ir a_4), katastrofos įtaką surinktiems duomenims (a_3), kreivių ištempimą abscisių ašies atžvilgiu (a_1) bei katastrofos funkcijos postūmį ordinačių ašies atžvilgiu (a_5). Reikia nepamiršti, kad pačioje kregždės uodegos katastrofos funkcijoje yra trys nežinomi parametrai u, v, w . Taip pat, funkcijoje $p(x)$ yra vienas arba daugiau nežinomų parametų (priklausomai nuo to, kurią funkciją pasirinksiame).

2.2 lentelė

Tiriamų pasiskirstymo tankio funkcijų sąrašas

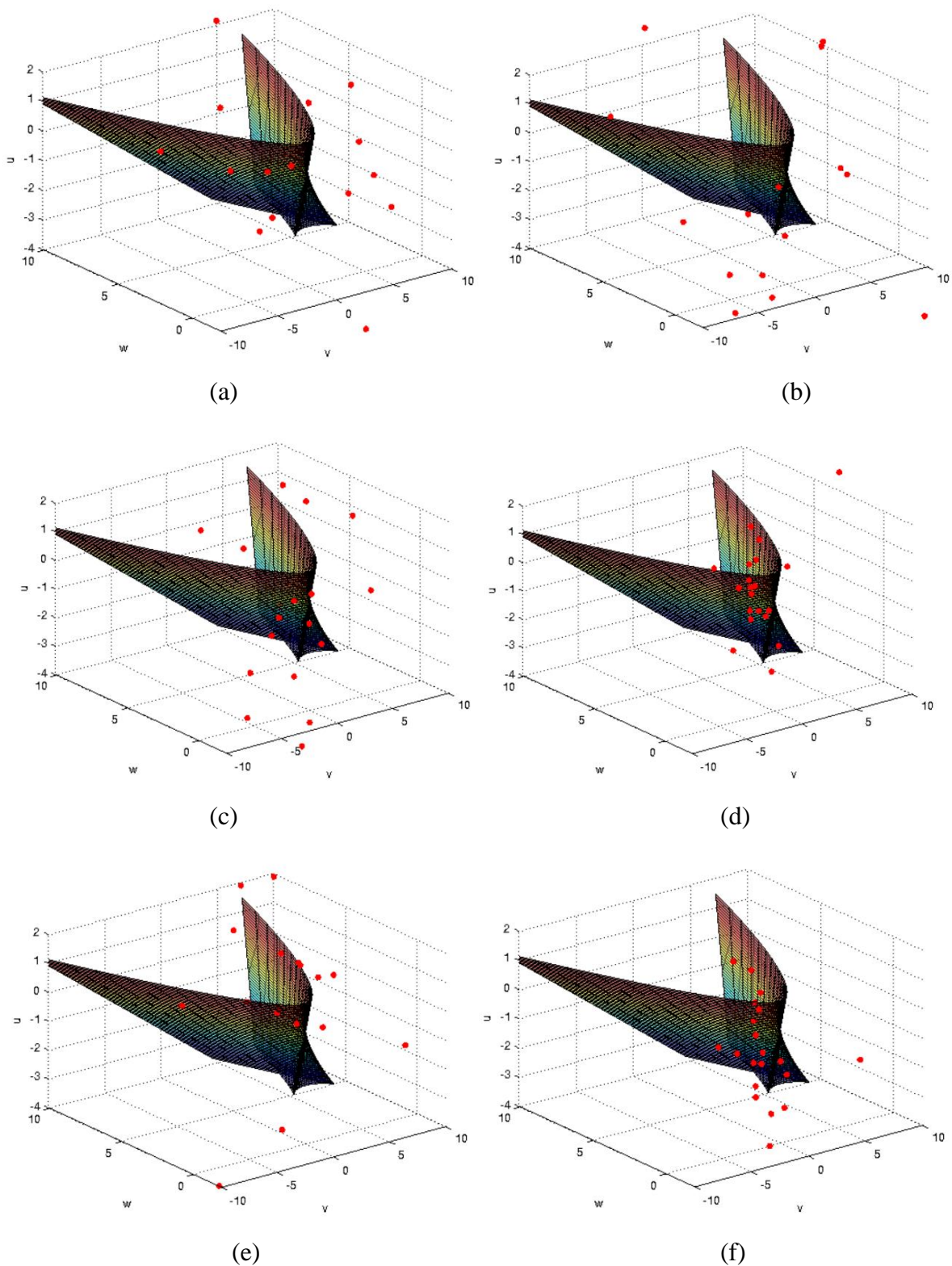
Nr.	$p(x)$ pasiskirstymo pavadinimas	$p(x)$ pasiskirstymo funkcijos išraiška	$p(x)$ ir $f(x)$ mišiniai (suma, sandauga ir superpozicija). (funkcijų mišinį žymėsime $g(x)$)
1	Dagum	$\frac{ap}{x} \left(\frac{(x/b)^{ap}}{\left(\left(\frac{x}{b} \right)^a + 1 \right)^{p+1}} \right); a, b, p > 0, x \geq 0$	$p(f(x)), p(x) + f(x)$
2	Pareto	$\frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}; x_m, \alpha > 0, x \geq x_m$	$p(f(x)), p(x) \cdot f(x), p(x) + f(x)$
3	Gompertz	$b\eta e^{bx} e^\eta \exp(-\eta e^{bx}); \eta, b > 0, x \geq 0$	$p(x) + f(x)$
4	Levy	$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{c}{2(x-\mu)}}}{(x-\mu)^{3/2}}, c > 0, x \geq \mu$	$p(f(x)), p(x) \cdot f(x), p(x) + f(x)$
5	Log-logistinis	$\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{(1 + (x/\alpha)^\beta)^2}, \alpha, \beta > 0, x \geq 0$	$p(f(x)), p(x) + f(x)$
6	Log-normalusis	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}; \mu \in R, \sigma > 0, x > 0$	$p(f(x)), p(x) + f(x)$
7	Rayleigh	$\frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0, x \geq 0$	$p(f(x)), p(x) \cdot f(x), p(x) + f(x)$
8	Apibendrintas logistinis	$\frac{\alpha \exp(-x)}{(1 + \exp(-x))^{\alpha+1}}; \alpha > 0, x \geq 0$	$p(x) + f(x)$
9	Erlango	$\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}; k \in N, \lambda > 0, x \geq 0$	$p(f(x)), p(x) \cdot f(x), p(x) + f(x)$
10	Eksponentinis	$\lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0, x \geq 0$	$p(f(x)), p(x) \cdot f(x), p(x) + f(x)$

Norėdami iliustruoti, kaip veikia dalelių spiečiaus (PSO) algoritmas pirmiausia paimkime paprastesnį atvejį: $g(x) = p(a_3(f(x \cdot a_1 + a_4 + a_2) + a_5))$, kur $p(x)$ funkcija yra eksponentinio skirtinio tankio funkcija (žr. 2.2 lentelę). Imkime atsitiktinių dalelių skaičių lygų 20, o iteracijų skaičių lygų 100. Kol kas apsiribokime vidutinės kvadratinės paklaidos skaičiavimu tarp dažnių grafiko stulpelių vidurinių reikšmių ir funkcijos $g(x)$ reikšmių tame taške. Tyrimas susideda iš trijų dalių: 1. dalelių judėjimas trimatėje erdvėje, 2. funkcijos $g(x)$ grafikas mažėjant paklaidai, 3. paklaidų grafikas prie skirtingų iteracijų skaičiaus. Pradinės parametrų reikšmės PSO algoritme yra: $u = -1,5; v = -0,1; w = 0,5; a_1 = 0,1; a_2 = -1,5; a_3 = -0,5; a_4 = -0,5; a_5 = 0,5; \lambda = 0,8$.

1. Kadangi iš viso yra tiriami devyni parametrai, tai visų vienu metu grafiškai atvaizduoti yra neįmanoma. Kadangi mus labiausiai domina, kokias parametrų u, v, w reikšmes įgyja kregždės uodegos katastrofa, tai atvaizduosime tik šiuos parametrus trimatėje erdvėje. Buvo sukurta animacija, kuri parodo dalelių judėjimą kintant priklausomai nuo iteracijos. Kadangi tyrimui buvo pasirinkta 20 dalelių skaičius, tai grafike vaizduojamas 20 taškų judėjimas. Pavyzdys pateiktas 2.12 paveiksle.

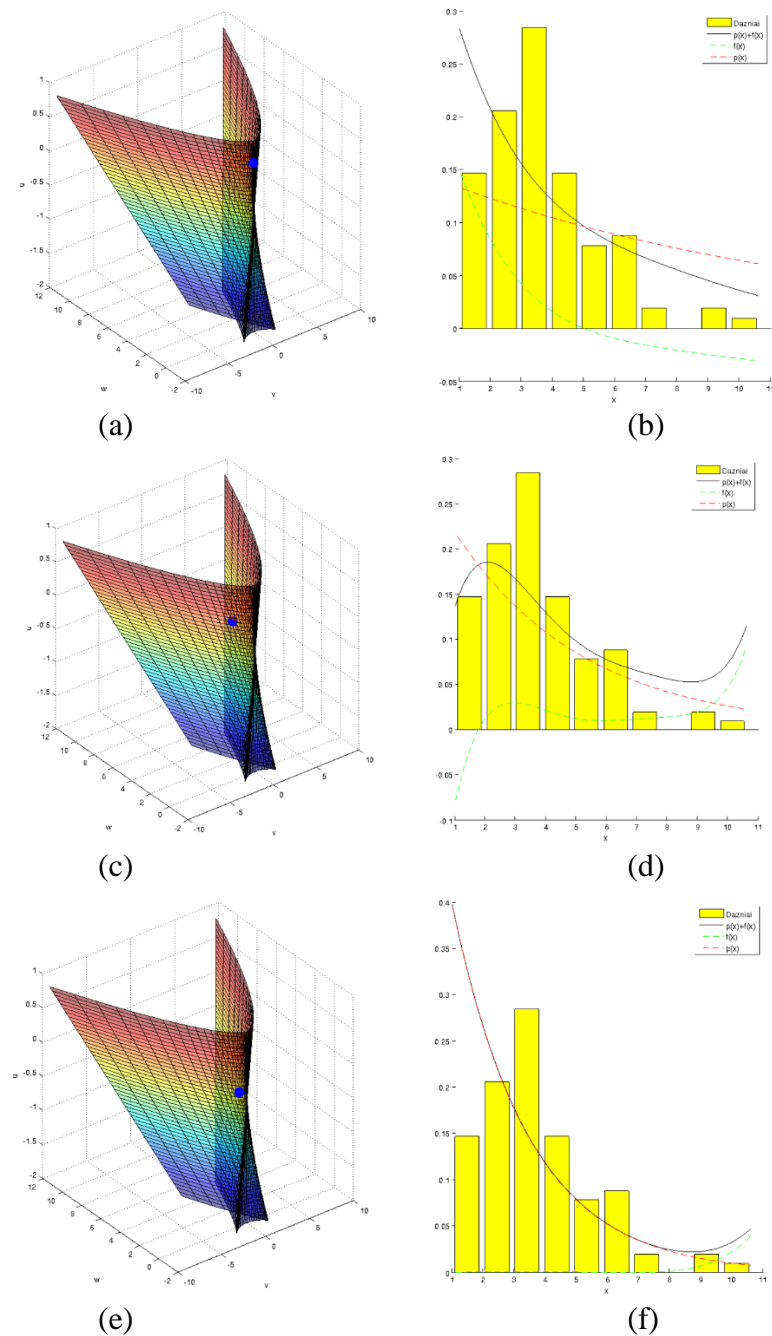
Iš 2.12 paveikslo grafiko matyti, kad iš pradžių taškai tarsi sklaidosi, o maždaug ties 25 iteracija, pradeda grupotis ir artėti prie geriausio rasto rezultato. Akivaizdu, kad dalelių judėjimo kryptis pasikeitė. Tačiau ties maždaug 42 iteracija dalelės vėl pradėjo sklaidytis. Taip atsitiko dėl to, kad buvo rastas kitas - geresnis modelis, atitinkantis surinktus duomenis, tačiau kryptis tapo nukreipta link kito (šioje erdvėje nevaizduojamo) parametro. Ties 92 iteracija matome, kad dalelės vėl pradėjo grupotis. Taip pat, galime pastebėti, kad norint geriau matyti dalelės taškų judėjimą, reikėtų labiau praplėsti parametrų erdvę. Matome, kad dalis taškų išsina iš kreivės ribų, jų būsenos iš grafiko nustatyti negalima. Akivaizdu, kad algoritmas veikia taip, kaip to buvo tikėtasi, tačiau geresniems rezultatams pasiekti reikia pasirinkti didesnę iteracijų bei dalelių skaičių. Tai bus atlikta tolimesniame tyrime, tačiau gauti duomenys vis vien gali būti tik apytiksliai, nes algoritmas remiasi dalelių atsitiktinumu.

Kaip evoliucionuoja daugiau dalelių prie daugiau iteracijų galima pamatyti ataskaitos 5 priede. Priede imama, kad dalelių skaičius yra lygus 50, o iteracijų skaičius 200. Jei atsitiktinių dalelių skaičių stipriai padidintume, tai vaizdavimas taptų sudėtingas, nes stebėti kiekvieną dalelę tokiu atveju nebegalime. 5 priede yra tiriama pirmoji tikslo funkcija $F_1(x)$, kur yra skaičiuojamos vidutinės kvadratinės paklaidos. Tuo tarpu 6 priede parodomas PSO algoritmo veikimas su antrąja tikslo funkcija $F_2(x)$, kur minimizuojama kritinio lygmens α reikšmė.



2.12 pav. Dalelių judėjimas pagal PSO algoritmą parametru u, v, w erdvėje: a) 4-oje iteracijoje, b) 13-oje iteracijoje, c) 25-oje iteracijoje, d) 31 – oje iteracijoje, e) 42-oje iteracijoje, f) 92-oje iteracijoje.

2. Iki šiol stebėjome dalelių pokyčius, tačiau kaip atrodo funkcijos $g(x)$ grafikas ir kokios yra $p(x)$ ir $f(x)$ jam įtakos nesimatė. Paimkime tokį patį pavyzdį su 20 atsitiktinių dalelių ir 100 iteracijų bei atvaizduokime dažnių ir funkcijos $g(x)$ grafikus kiekvienoje iteracijoje. Tai galima pamatyti 2.13 paveiksle.



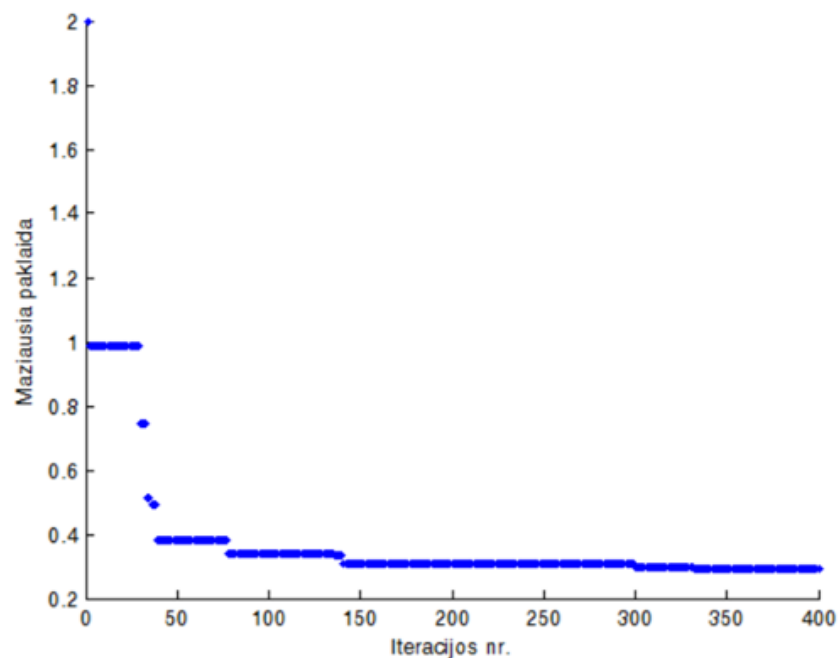
2.13 pav. Kregždės uodegos katastrofos parametrų erdvė ir funkcijos $g(x)$ grafikas prie tam tikrų parametrų reikšmių: 5-oje iteracijoje a) ir b) $u = -0,5446$; $v = -0,4642$; $w = 0,5462$; 59-oje iteracijoje c) ir d) $u = -1,5056$; $v = 0,9884$; $w = 0,2379$; 67-oje iteracijoje e) ir f) $u = -1,3651$; $v = -0,4870$; $w = 0,0300$.

2.13 paveiksle yra grafiškai vaizduojamos funkcijos su iki tol gautomis geriausiomis parametru reikšmėmis. Raudona punktyrinė linija žymi funkcijos $p(x)$ grafiką, žalia punktyrinė linija – funkcijos $f(x)$ grafiką. Galutinis geriausias gautas rezultatas $g(x)$ prie tam tikros iteracijos yra vaizduojamas juoda linija.

Iš 2.13 paveiklo matyti, kaip kinta funkcijos $g(x)$ forma, bei kokias reikšmes įgyja kregždės uodegos parametrai u, v, w . Akivaizdu, kad gautas modelis nėra tinkamas turimiems duomenims nusakyti. Kairėje pusėje esančiame grafike yra vaizduojama u, v, w parametru erdvė. Mėlynas rutuliukas parodo, kurioje kregždės uodegos katastrofos vietoje esame, t.y. kuris parametru rinkinys yra parinktas. Nors panašu, kad šių parametru pokyčiai yra pakankamai nedideli, tačiau funkcijos $g(x)$ grafiko forma stipriai keičiasi. Tai galėjo įvykti dėl kelių priežasčių: dėl to, kad maži pokyčiai parametru erdvėje galėjo sukelti kokybinius dinaminės sistemos $f(x)$ pokyčius bei dėl to, kad reikšmingai kito kitų parametru reikšmės. Be to, čia nėra vaizduojamos likusių parametru reikšmės. Labai tikėtina, kad algoritmą įvykdžius iš naujo bus gauti visiškai kiti ir galbūt geresni rezultatai. Dėl to, reikėtų tyrimui naudoti ne tik didesnę iteracijų skaičių, bet ir didesnę atsitiktinių dalelių skaičių.

Daugiau įvairių pavyzdžių prie didesnio dalelių skaičiaus ir didesnio iteracijų skaičiaus yra pateikta ataskaitos 6 priede.

3. Turbūt viena svarbiausių šio PSO algoritmo tyrimo dalių yra paklaidų pokyčių analizė. Kaip jau buvo minėta, imame vidutines kvadratinės paklaidas tarp histogramos stulpelių vidurio taškų ir funkcijos $g(x)$ reikšmių tame taške. Imkime dalelių skaičių lygų 20, o iteracijų skaičių lygų 300. Gautų paklaidų grafikas kiekvienoje iteracijoje yra pateiktas 2.14 paveiksle.



2.14 pav. Vidutinių kvadratinių paklaidų kritimas kiekvienoje iteracijoje.

Iš 2.14 paveikslo aiškiai matyti, kad nors buvo atlikta 400 iteracijų, algoritmas nenusistovėjo. Vadinasi tolimesniems tyrimams bus reikalingas gerokai didesnis iteracijų skaičius.

Iki šiol tyrimui parinktas pavyzdys buvo skaičiuojamas tik su viena tikslo funkcija – vidutinių kvadratinių paklaidų minimizavimas. Kita tikslo funkcija yra hipotezių apie vienodą pasiskirstymą tikrinimas. Šio pavyzdžio rezultatai su antra tikslo funkcija yra pateikti 7 ir 8 priede. Geriausia apskaičiuota vidutinė kvadratinė paklaida yra lygi 0,2710. Tolimesniame tyrime galima bus pastebėti, kad toks rezultatas nėra geriausias ir skirtumas nuo geriausio rasto yra daugiau 0,2. Vadinasi toks modelis ne pakankamai aprašo apklausos duomenis. Stephan J. Guastello tyrimuose buvo naudojamas būtent eksponentinis dėsnis. Kad to paties modelio taikyti šiame darbe negalime, pastebime ir iš histogramos pavaizduotos 2.11 paveiksle. Akivaizdu, kad tokie dėsniai, pagal kuriuos duomenys yra labiausiai koncentruoti į mažus duomenis, yra netinkami.

Iš visų analizuojamų pasiskirstymo tankio funkcijų $p(x)$ ir jų formų su kregždės uodegos katastrofos funkcija $f(x)$ (žr. 2.2 lentelę) buvo parinkta Rayleigh pasiskirstymo tankio funkcija tokia forma: $g(x) = p(x) + f(x)$. Dalis pasiskirstymo funkcijų (Dagum, Gompertz, Levy, log-logistinis, log-normalusis ir Erlango) buvo atmestos dėl per didelio parametrų skaičiaus, nes kuo daugiau dalelė turi dimensijų, tuo sunkiau nusistovi geriausias norimas rezultatas. Tam tikrais atvejais programa nesugebėdavo rasti dėsnio, geriausiai apibūdinančio analizuojamus duomenis. Kita dalis tikimybinio tankio funkcijų (Pareto, apibendrintas logistinis, eksponentinis) nepakankamai gerai atspindėjo duomenis ir vidutinės kvadratinės paklaidos arba kritinio lygmens α reikšmės buvo gautos per didelės.

2.2.3. PSO ALGORITMŲ REZULTATŲ SU SKIRTINGOMIS TIKSLO FUNKCIJOMIS PALYGINIMAS

2.2.2. skyriuje minėta, kad yra tiriamos dvi tikslo funkcijos: vidutinių kvadratinių paklaidų minimizavimas (VKP) ir hipotezių apie vienodą pasiskirstymą tikrinimas (HT). Taip pat, jau žinome, kad duomenis geriausiai atitinka Rayleigh ir kregždės uodegos katastrofos funkcijų tokia išraiška $g(x) = p(a_1 \cdot x + a_2) + a_3(f(x \cdot a_1 + a_4 + a_2) + a_5)$. Šį dėsnį šiek tiek modifikuojame tokiu būdu: parametras σ imame kaip nežinomą parametras (Rayleigh dėsnyje σ yra analizuojamų duomenų moda). Vadinasi, iš viso yra tiriami 9 parametrai. Akivaizdu, kad norint, jog parametrų reikšmės būtų optimalios ir nusistovėtų bėgant iteracijoms, reikia imti kiek įmanoma didesnius dalelių ir iteracijų skaičius. Imkime 1000 atsitiktinių dalelių ir 10000 iteracijų. Geriausi gauti rezultatai pateikti 2.3 lentelėje bei 2.15 ir 2.16 paveiksluose.

Nagrinėjamu atveju PSO algoritmo tiek pažinimo komponentės pagreičio konstanta, tiek socialinės komponentės pagreičio konstantos reikšmės yra imamos 0,01. Tyrimo metu buvo nustatyta, kad imant

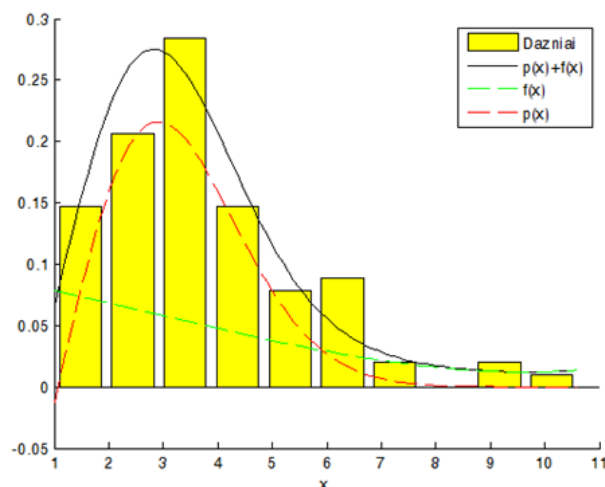
didesnes šias reikšmes PSO algoritme aprašytos dalelės gali judėti per greitai ir „peršokti“ geriausią sprendinį. Tačiau, jei imame mažesnes komponentių reikšmes, algoritmas prie geriausio sprendinio artėja lėtai ir dalelės judėjimo kryptis nesikeičia ilgą laiką, o geriausio sprendinio paieška reikalauja daug laiko ir resursų.

2.3 lentelė

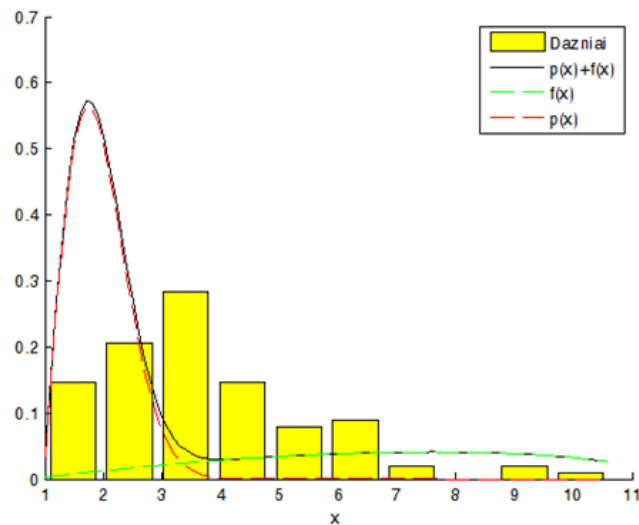
Tikslo funkcijų gautų parametru palyginimas

Parametrai\Tikslo funkcijos	VKP parametru reikšmės	HT parametru reikšmės
u	6,2472	0,2239
v	-0,0669	-3,0733
w	-5,7073	-3,9317
σ	0,1342	0,1133
a_1	0,0727	-0,1483
a_2	-1,0631	-0,9726
a_3	0,5345	-0,1057
a_4	-0,0912	0,4476
a_5	2,5457	2,5289

Iš 2.3 lentelės aiškiai matyti, kad gauname skirtingus rezultatus. Tikslo funkcijos minimizavimas ieškant mažiausių vidutinių paklaidų tarp dažnių grafiko stulpelių ir funkcijos $g(x)$ reikšmių tuose taškuose trunka pakankamai trumpai. Tuo tarpu minimizuojant tikslo funkciją, kuri remiasi kritinio lygmens α minimizavimu, su kuria hipotezė H_0 yra priimama, chi-kvadrato metodu skaičiavimai yra apytiksliai 10 kartų ilgesni. Taip atsitinka dėl to, kad ieškoma mažiausia galima kritinio lygmens α reikšmė ties kuria vis dar priimama hipotezė apie duomenų pasiskirstymą pagal $g(x)$ dėsnį.



2.15 pav. Vidutinių kvadratinų paklaidų minimizavimo tikslo funkcijos geriausi gauti rezultatai.



2.16 pav. Hipotezių tikrinimo chi-kvadrato metodu tikslo funkcijos geriausi gauti rezultatai.

2.15 ir 2.16 paveiksluose žalia linija žymima kregždės uodegos katastrofos funkcijos $f(x)$ dedamoji $g(x)$ funkcijai, o raudona punktyrine linija - $p(x)$ funkcijos dedamoji.

Galime tarpusavyje sulyginti tikslo funkcijų paklaidas. Palyginimas pateiktas 2.4 lentelėje.

2.4 lentelė

Tikslo funkcijų optimalumo palyginimai

Tikslo funkcijos pavadinimas	Pirmos tikslo funkcijos parametrai	Antros tikslo funkcijos parametrai
Vidutinė kvadratinė paklaida ($F_1(x)$).	0,0650	0,0449
Minimizuojama kritinio lygmens α reikšmė ($F_2(x)$).	0,3159	0,0308

Akivaizdu, kad 2.16 paveiksle pavaizduotas modelis gerokai blogiau atspindi apklausoje surinktus duomenis. Tuo tarpu, 2.15 paveiksle gauti rezultatai visai neblogai aprašo mokinių lyderystę. Nors 2.4 lentelėje mažiausias kritinis lygmuo, ties kuriuo vis dar hipotezė priimama, yra $\alpha = 0,0308$, bet vidutinė kvadratinė paklaida yra gerokai didesnė, nei skaičiuojant su pirmąja tikslo funkcija. Akivaizdu, kad naudojant antrąją tikslo funkciją ne tik, kad sugaišime gerokai daugiau laiko, bet ir gausime prastesnius rezultatus. Vadinasi, tolimesniame tyrime naudosimės tik pirmąja tikslo funkcija gautais rezultatais.

2.2.4. APKLAUSOJE PATEIKTŲ KLAUSIMŲ ANALIZĖ IR IŠSKAIDYMAS Į GRUPES

Anketa, kurią pildė šeštos ir dešimtos klasės mokiniai yra pateikta 3 priede. Atskirai išanalizuokime anketoje pateiktus 20 klausimų. Jie surašyti 2.5 lentelėje.

2.5 lentelė

Apklaustos klausimai

Klausimo nr.	Klausimas
1	Dažniausiai priimdavo sprendimus
2	Labiausiai palaikė kitus
3	Labiausiai pasitikėjai žaidimo metu
4	Stengėsi nuslopinti nesutarimus
5	Įtikinamiausiai išsakė savo idėjas
6	Labiausiai palaikė kitų idėjas
7	Daugiausiai pateikė pasiūlymų
8	Atsakingiausias
9	Labiausiai susitelkęs į užduotį
10	Greičiausiai sugalvodavo naują idėją
11	Uždavė daugiausiai klausimų
12	Labiausiai stengėsi laimėti
13	Daugiausiai pateikė idėjų
14	Labiausiai sekė instrukcijas
15	Labiausiai stengėsi užduotį atlikti laiku
16	Dažniausiai primindavo, kad nukrypstama nuo temos
17	Apibendrindavo rezultatus
18	Stengėsi palengvinti užduotį
19	Daugiausiai juokavo
20	Labiausiai elgėsi kaip lyderis

Šioje dalyje pagrindinis darbo tikslas yra suskirstyti 2.5 lentelėje esančius klausimus į grupes. Prieš tai ištirsime koreliaciją tarp klausimų. Tam skaičiuosime Pearsono koreliacijos koeficientus ρ bei tikrinsime hipotezes apie šių koeficientų lygybę nuliui. Taip galėsime išskirti tarpusavyje priklausomus klausimus ir suskirstyti juos į grupes. Rezultatai pateikti 9 ir 10 priede. Pagal šiuos koeficientus galime nustatyti, kurie klausimai yra tarpusavyje priklausomi. Gauti rezultatai pateikti 2.6 lentelėje.

2.6 lentelė

Tarpusavyje priklausančių klausimų sąrašas

Prikl. klausimai		Prikl. klausimai		Prikl. klausimai		Prikl. klausimai		Prikl. klausimai		Prikl. klausimai		Prikl. klausimai	
Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.	Nr.
3	1	7	5	20	7	5	10	1	13	7	15	14	18
5	1	8	5	1	8	7	10	3	13	8	15	17	18
7	1	9	5	3	8	8	10	5	13	10	15	20	18
8	1	10	5	5	8	9	10	7	13	12	15	1	19
9	1	12	5	7	8	11	10	8	13	20	15	5	19
10	1	13	5	9	8	12	10	9	13	14	16	7	19
12	1	14	5	10	8	13	10	10	13	1	17	9	19
13	1	15	5	13	8	14	10	14	13	3	17	10	19
14	1	17	5	14	8	15	10	17	13	5	17	11	19
15	1	18	5	15	8	17	10	18	13	6	17	14	19
17	1	19	5	17	8	18	10	20	13	7	17	17	19
18	1	20	5	18	8	19	10	1	14	8	17	20	19
19	1	2	6	20	8	20	11	5	14	9	17	1	20
20	1	17	6	1	9	7	11	7	14	10	17	3	20
6	2	1	7	3	9	10	11	8	14	12	17	5	20
1	3	3	7	5	9	12	11	9	14	13	17	7	20
5	3	5	7	7	9	14	11	10	14	14	17	8	20
7	3	8	7	8	9	19	11	11	14	18	17	9	20
8	3	9	7	10	9	1	12	12	14	19	17	10	20
9	3	10	7	12	9	5	12	13	14	20	17	12	20
10	3	11	7	13	9	7	12	16	14	1	18	13	20
13	3	12	7	14	9	9	12	17	14	3	18	14	20
15	3	13	7	17	9	10	12	18	14	5	18	15	20
17	3	14	7	18	9	11	12	19	14	7	18	17	20
18	3	15	7	19	9	14	12	20	14	8	18	18	20
20	3	17	7	20	9	15	12	1	15	9	18	19	20
1	5	18	7	1	10	17	12	3	15	10	18		
3	5	19	7	3	10	20	12	5	15	13	18		

Remiantis 2.6 lentele klausimai buvo suskirstyti į dvi grupes. Pirmai grupei priklauso 2, 6, 4, 11, 16 ir 19 klausimai, o antrai grupei priskiriami 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18 ir 20 klausimai. Remiantis LSMU psichologijos asistentės Rožės Joffe rekomendacijomis bei 1.3.1. skyriuje apžvelgta informacija antroji klausimų grupė buvo išskaidyta į dvi pagal charakterio savybes. Taigi, galutinis išskaidymas į grupes atrodo taip:

1. Komunikavimas

Priklausantys klausimai: 2, 6, 4, 11, 16, 19. Šios savybės gali būti suprantamos keliais būdais. Pirmiausia, tai komunikavimas, nesutarimų slopinimas, juokavimas, kitų idėjų palaikymas leidžia geriau jaustis kitiems komandos nariams, mažina įtampą ir gerina rezultatą. Kadangi šiuo atveju buvo tiriamos dešimtokų ir šeštokų grupės, tai toks bendravimas gali ne palengvinti užduočių atlikimą, o priešingai – trukdyti bei blaškyti kitus komandos narius.

2. Kūrybingumas

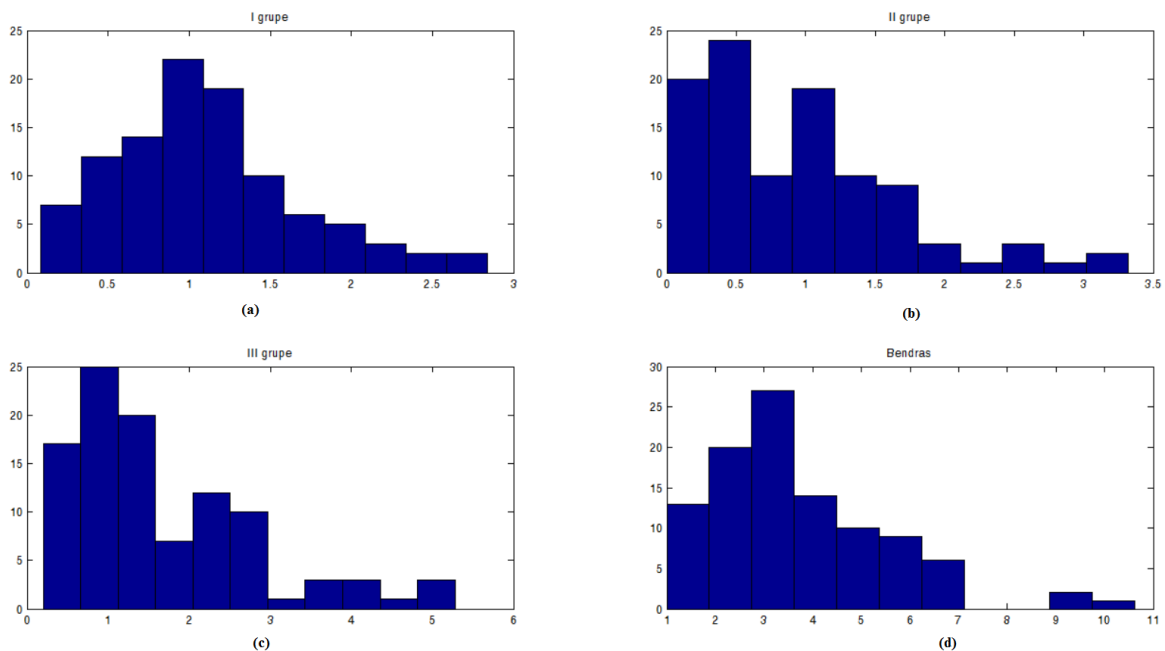
Priklausantys klausimai: 5, 7, 10, 13, 18. Kūrybingumas yra vienas svarbiausių lyderiui būdingų savybių. Grupės lyderiui yra svarbu sugebėti ne tik greitai sugalvoti naujas idėjas bet ir jas suprantamai paaiškinti kitiems grupės nariams.

3. Atsakingumas

Priklausantys klausimai: 1, 3, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 20. Tai yra tikriausiai pačios svarbiausios lyderiui būdingos savybės, dėl to 20 klausimas ir priskiriamas šiai grupei. Susitelkimas į užduotį, sprendimų priėmimas, įsiklausymas į klausimus yra labai svarbu visai grupei. Be šių savybių gali būti taip, kad užduotys ne tik kad nebus atliktos laiku, bet gal nebus iš viso atliktos.

2.2.5. KLAUSIMŲ GRUPIŲ DISPERSINĖ ANALIZĖ

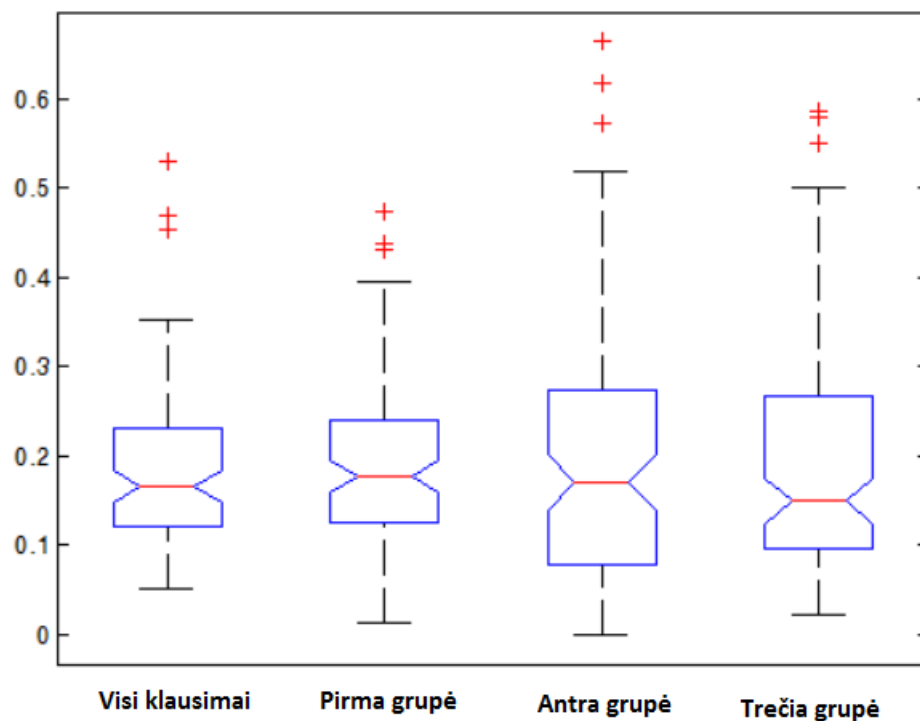
Prieš tai skyrelyje išskyrėme tris klausimų grupes pagal savybes ir koreliacijos koeficientus. Šioje dalyje ištirsime šių grupių pasiskirstymą. Atskirai kiekvienos grupės histogramos pateiktos 2.17 paveiksle.



2.17 pav. Klausimų grupių histogramos

Iš 2.17 paveiksle pavaizduotų histogramų sudėtinga pasakyti, ar klausimų grupės atskirai yra pasiskirsčiusios pagal tą patį dėsnį kaip ir visi klausimai kartu. Norėdami tai statistiškai pagrįsti atliksime Kruskal – Wallis vienmatę dispersinę analizę, t.y. tikrinsime nulinę hipotezę, kad kiekviena grupė yra pasiskirsčiusi pagal tą patį dėsnį. Alternatyvi hipotezė – bent viena grupė nėra pasiskirsčiusi pagal tą patį dėsnį.

Pasirinkus kritinį lygmenį $\alpha = 0,01$, gaunamas pasiklovimo lygmuo yra $p = 0,4744$. Vadinasi, nulinė hipotezė nėra atmetama, o tai reiškia, kad visos grupės yra pasiskirsčiusios pagal tą patį dėsnį. Be to, šios grupės taip pat yra pasiskirsčiusios kaip ir visų klausimų suma. Kad taip iš tiesų yra galime pastebėti ir 2.18 paveiksle vaizduojamose stačiakampėse diagramose.



2.18 pav. Klausimų grupių stačiakampės diagramos

Kadangi nėra statistiškai reikšmingo skirtumo tarp grupių pasiskirstymo ir bendrų duomenų, tai galime teigti, kad jos visos yra pasiskirsčiusios pagal tą patį dėsnį. Vadinasi, analizuojant kiekvieną grupę atskirai galime naudoti jau ankstesniuose skyriuose aprašytą Rayleigh ir kregždės uodegos katastrofos funkcijų derinį $g(x) = p(a_1 \cdot x + a_2) + a_3(f(x \cdot a_1 + a_4 + a_2) + a_5)$.

2.2.6. KLAUSIMŲ GRUPIŲ SĄRYŠIŲ SU KREGŽDĖS UODEGOS KATASTROFOS PARAMETRAIS u, v, w ANALIZĖ

Norėdami nustatyti klausimų grupių sąryšius su kregždės uodegos katastrofos funkcijos parametrais u, v, w turime iširti visus devynis galimus atvejus. Prieš tai esančiame skyriuje buvo nustatyta, kad galime naudoti tą patį klausimų sumos modelį kiekvienai klausimų grupei. Žinome, kad modelį aprašo Rayleigh dėsnis ir kregždės uodegos funkciją bei parametrai a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Šių parametų reikšmes ir Rayleigh dėsnio σ žinome iš ankstesnių skaičiavimų. Vadinasi, modelis aprašomas tokia forma:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{x+a_2}{\sigma^2} e^{-\frac{(a_1x+a_2)^2}{2\sigma^2}} \\
 &+ a_3((a_1x + a_2 + a_4)^5 + u(a_1x + a_2 + a_4)^3 + v(a_1x + a_2 + a_4)^2 \\
 &+ w(a_1x + a_2 + a_4) + a_5) \\
 &= \frac{0,0727 \cdot x - 1,0631}{(0,1342)^2} e^{-\frac{(0,0727 \cdot x - 1,0631)^2}{2(0,1342)^2}} + 0,5345 \\
 &\cdot ((0,0727 \cdot x - 1,0631 - 0,0912)^5 + u(0,0727 \cdot x - 1,0631 - 0,0912)^3 \\
 &+ v(0,0727 \cdot x - 1,0631 - 0,0912)^2 + w(0,0727 \cdot x - 1,0631 - 0,0912) \\
 &+ 2,5457). \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

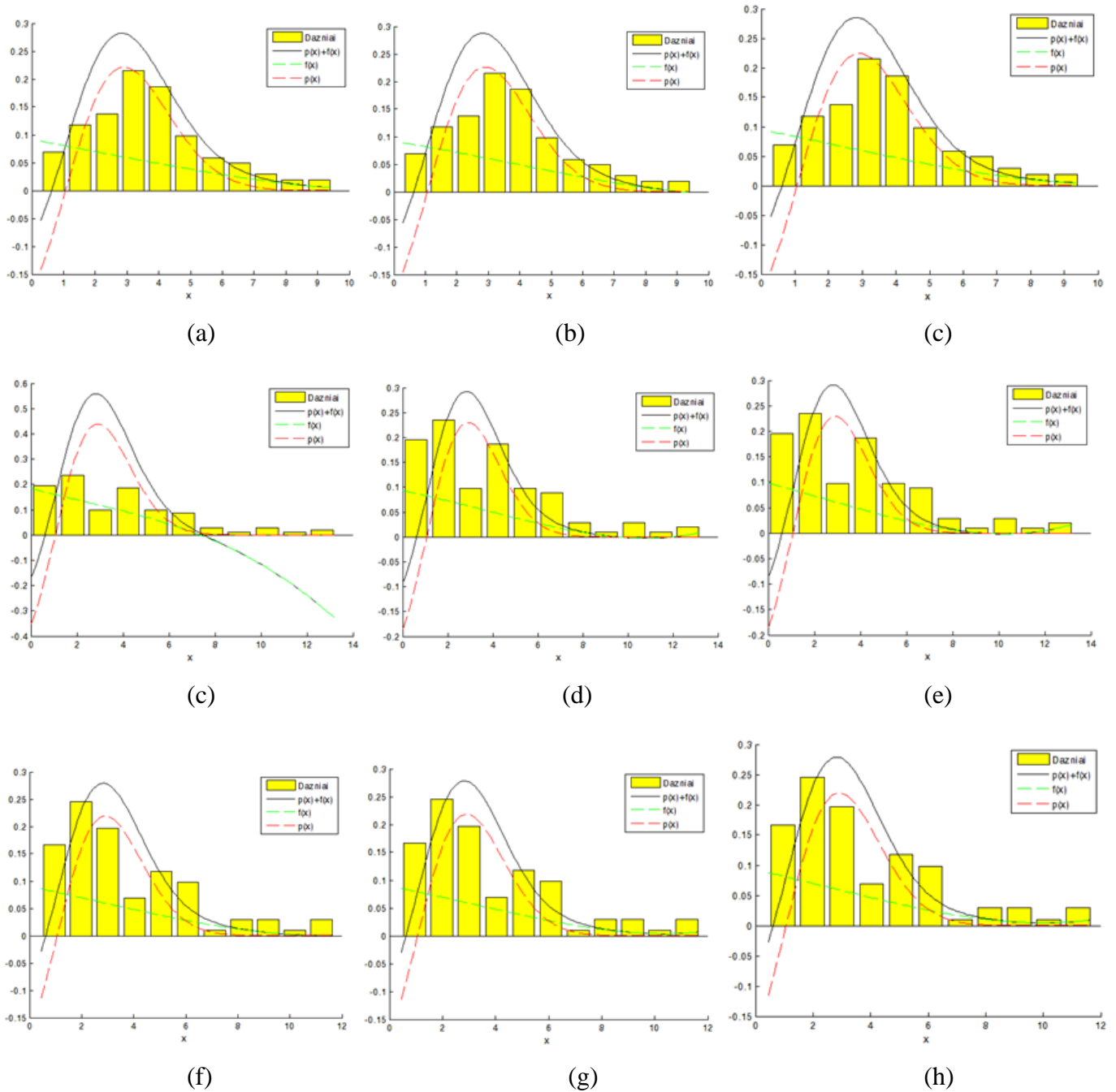
2.7 lentelė

Klausimų grupių ir parametų u, v, w analizės duomenys

Grupė	Rezultatai	U	V	W
Pirma	Geriausia reikšmė	4,2080	-2,0717	-6,2909
	P1	0,1224	0,1200	0,1215
	PB	0,0645	0,0753	0,0696
Antra	Geriausia reikšmė	-9,3530	-1,7783	-6,6522
	P2	0,0897	0,0884	0,0958
	PB	0,0593	0,0730	0,0756
Trečia	Geriausia reikšmė	4,0459	-1,1065	-6,2495
	P3	0,0857	0,0829	0,0818
	PB	0,0701	0,0641	0,0642

Naudojant dalelių spiečiaus algoritmą buvo gautos ir parametų u, v, w reikšmės (žr. 2.3 lentelę). Šioje dalyje norime patikrinti, kurie iš parametų aprašo vienos iš trijų grupių elgseną. Tam fiksuosime dviejų

parametrų reikšmes, o likusio paieškai vėl naudosis PSO algoritmą, tačiau šį kartą imsime tik atitinkamos grupės duomenis. Vidutinę kvadratinę paklaidą, rastą imant analizuojamos grupės duomenis žymėsime atitinkamai P1, P2 ir P3. Gautą parametro reikšmę įstatysime į modelį ir pagal bendrus (grupių duomenų sumos) duomenis gausime vidutinę kvadratinę paklaidą, kurią žymėsime PB. Pradiniai geriausi sprendiniai PSO algoritmui parenkami tokie, kokie yra gauti 2.3 lentelėje. Gauti rezultatai pateikti 2.7 lentelėje ir 2.19 paveiksle.



2.19 pav. Funkcijos $g(x)$ grafikai prie patikslintų parametrų u, v, w reikšmių klausimų grupių duomenims.

Žinome, kad analizuojant (2.4) modelį gauta mažiausia vidutinė kvadratinė paklaida yra 0,0650 (žr. 2.4 lentelę). Iš 2.7 lentelės matome, kad su kai kuriais parametrais bendroji (sumos) paklaida pagerėjo. Vadinasi, galime teigti, kad tokiu atveju bendrajame (2.4) modelyje toks parametras nenusako tiriamos grupės duomenų. Akivaizdu, kad pagerinta tikslo funkcijos reikšmė parodo, kad nepriklausomai nuo tiriamų duomenų, šios funkcijos įvertis gali pagerėti arba pablogėti. Ir priešingu atveju, jei gauname, kad naujoji parametro reikšmė pablogina rezultatą, tai toks parametras gali apibūdinti tos grupės duomenis. Remiantis lentelės duomenimis galime teigti, kad parametras u aprašo trečios grupės duomenis, tačiau atskirti, kurie iš parametrų v, w geriau aprašo pirmos ar antros grupių duomenis yra sudėtinga. Taip galėjo įvykti dėl to, kad statistiškai šios klausimų grupės yra priklausomos (žr. 2.6 lentelę).

Gauti rezultatai parodė, kad klausimų grupių išskaidymas pagal charakterio savybes statistiškai yra negalimas. Klausimų tarpusavio priklausomumas neleidžia išskaidyti į atskiras grupes, o tuo tarpu negalima atskirai analizuoti v ir w parametrų.

3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA

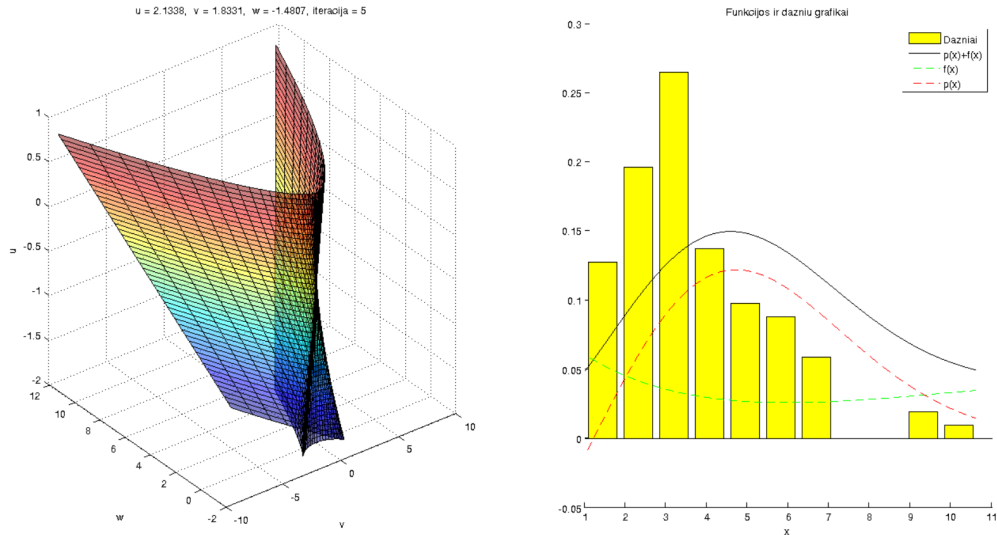
Šio darbo duomenų surinktų lyderystės duomenų apdorojimui buvo naudojama programa MATLAB R2013 bei jos paketas Statistics. Šio paketo pagalba buvo atliekamos dispersinė, koreliacinė analizės, tikrinamos hipotezės apie vidurkių, dispersijų lygybes, vienodo pasiskirstymo ir kitos. Tam naudojamos šio paketo funkcijos, tokios kaip:

- Kruskalwallis – skaičiuojama Kruskal Wallis neparametrinė vienmatė dispersinė analizė bei braižoma stačiakampė diagrama.
- vartest2 – tikrinama hipotezė apie dispersijų lygybę prie nurodyto kritinio lygmens.
- Ttest – Stjudento t testas, kuris tikrina ar duomenys yra vienodai pasiskirstę (geriausiai tinka, kai duomenys yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį).
- Kstest – Kolmogorovo – Smirnovio statistika, kuri parodo, ar duomenys yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį.
- Swtest – Shaphiro Vilko statistika, kuri tikrina, ar duomenys yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį.
- Corrcoef – Tikrina, ar koreliacijos koeficientai yra lygūs nuliui.
- anova1 – vienmatė dispersinė analizė ir kitos.

Duomenų sumai, vidurkiui, dispersijai, standartiniam nuokrypiui bei asimetrijai skaičiuoti taip pat naudojamos MATLAB programos standartinės funkcijos sum, mean, std, var, skewness. Be to, programoje yra generuojami atsitiktiniai skaičiai iš intervalo $[0; 1]$. Tam naudojama funkcija rand.

Be statistinės duomenų analizės, šiame darbe yra naudojamas paketas Graphics, kurio pagalba rezultatai yra atvaizduojami grafiškai. Naudojamos funkcijos yra įvairios: plot, plot3, surf, ersurf, hist, bar ir kitos.

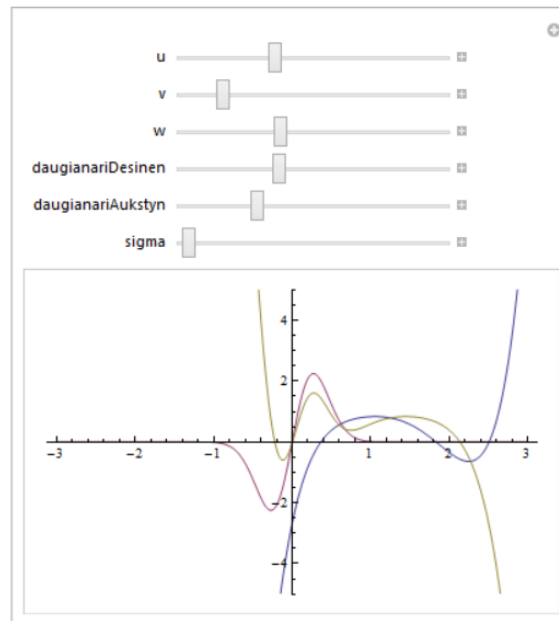
Viena svarbiausių šio darbo dalių yra animacijų kūrimas. Visos animacijos yra saugomos .gif formato failuose. Kūrimui naudojama funkcija imwrite, kuri kiekvieną paveikslėlį išsaugoja tam tikrame masyve, iš kurio ir yra sukuriamas filmukas. Tokiu būdu yra vaizduojama elgsenos plokštuma priklausomai nuo parametro u reikšmės, parametru erdvė ir įvairūs funkcijos diferencialo funkcijos atvejai bei PSO algoritmo veikimo tikrinimo įvairūs atvejai. Parametru reikšmės ar kita reikalinga informacija yra vaizduojama kreipiantis į funkciją title, kuri programos vykdymo metu norimus duomenis vaizduoja virš grafiko. Pavyzdys pateiktas 3.1 paveiksle. Virš kregždės uodegos katastrofos yra nurodomos parametru u, v reikšmės kiekvienoje iteracijoje. Priklausomai nuo šių reikšmių, vaizduojami ir kiti grafika. Galėdami stebėti dinaminės sistemos grafinį pavidalą, galime daugiau pasakyti apie jos galimą elgseną ir nuspėti pokyčius.



3.1 pav. Animacijos vaizdavimo su programa MATLAB pavyzdys

MATLAB programos paketų pagalba nesudėtingai galime atlikti įvairius matematinius skaičiavimus bei statistines ar grafines analizes, tačiau jo galimybės taip pat yra ribotos. 2.1, 2.2 ir 2.3 paveiksluose vaizduojami grafikai yra sudaryti iš taškų. Gauti taškai yra sudėti į vektorius. Programa MATLAB nesugeba tinkamai sujungti šių taškų į vieną tolydžią erdvę.

2.4 paveikslas yra gautas naudojantis programos Mathematica bandomąją versiją. Be to, prieš atliekant skaičiavimus su MATLAB reikia bent minimaliai žinoti galimus analizuojamos dinaminės sistemos pokyčius, nes tiriami mažiausiai trys parametrai. Tam buvo sukurta programa, kurios pagalba slankiojant parametrus, galima matyti dinaminės sistemos pokyčius. Pavyzdys pateiktas 3.2 paveiksle.



3.2 pav. Mathematica programos pavyzdys.

4. DISKUSIJA

Profesoriaus Stephen J. Guastello teigimu kregždės uodegos katastrofos dinamika gerai nusako darbo grupių lyderystės atsiradimo modelį [5]. Jo ir kitų autorių [21, 22, 23] teigimu komandos narius galima suskirstyti į tris grupes: nesantys lyderiais, pirmo tipo lyderiai ir antro tipo lyderiai. Be to, šie lyderiai priklausomai nuo užduoties specifikos gali tarpusavyje kisti. Šiame darbe buvo kuriamas modelis aprašyti moksleivių grupių lyderystės dinamikai. Tam naudojamas PSO algoritmas rado geriausią modelį pagal vidutines kvadratinės paklaidas. Mokslininko Stephen J. Guastello teigimu, geriausiai grupių lyderio atsiradimo apklausos duomenis aprašo eksponentinis dėsnis. 2.2.2. skyriuje parodyta, kad toks dėsnis surinktiems duomenims netinka. Paaiškėjo, kad geriausiai duomenis apibūdina Rayleigh dėsnio ir kregždės uodegos katastrofos funkcijų suma.

Tyrimo metu paaiškėjo, kad KTU inžinerijos licėjaus šeštos ir dešimtos klasių mokiniams yra būdingas kregždės uodegos katastrofos paprastesnis atvejis. Gauta parametro u teigiama reikšmė teigia, kad šiame modelyje mokinių lyderystę galima apibūdinti panašiai kaip parodyta 2.1 paveiksle. Tai reiškia, kad mokinius galime suskirstyti tik į dvi grupes – lyderius ir nesančius lyderiais. Antro tipo lyderių šiuo atveju nėra. Iš apklausos duomenų paaiškėjo, kad taip galėjo atsitikti dėl to, kad mokiniai lyderiu laiko tą komandos narį, kuris pateikia daugiausiai atsakymų. Kregždės uodegos modelyje lyderiu arba antro tipo lyderiu laikomas ir toks žmogus, kuris sugeba kitus komandos narius paskatinti siekti geresnio rezultato, kuris įtraukia į darbą visą grupę ir taip skatina tobulėti. Tuo tarpu lyderiu laikomas mokinyš dažniausiai perima visišką vadovavimą ir kiti komandos nariai gali likti neišgirsti ar nesuprasti. Tai puikiai atsispindėjo ir 2.6 lentelėje, kur parodyta klausimų tarpusavio priklausomybė.

Kaip buvo minėta 2.2.4. skyriuje, klausimus statistiniais metodais galima suskirstyti tik į dvi grupes. Po to, viena grupė pagal charakterio savybes išskaidyta į dvi: kūrybingumas ir atsakingumas. Kad toks išskaidymas nepasiteisino matyti ir 2.7 lentelėje, nes iš joje pateiktų duomenų nėra aišku, kurių klausimų grupę apibūdiną parametras v ir kuris w . Kadangi įsitikinome, kad kregždės uodegos modelį šiuo atveju lemia tik du parametrai, tai dvigubo perlinkio (žr. 2.3 pav.) gauti yra neįmanoma. Tai tik dar kartą įrodo, kad tarp mokinių nėra arba labai retai išryškėja antro tipo lyderiai.

Iš apklausos duomenų taip pat galime teigti, kad dalyje mokinių grupių nebuvo išskiriami lyderiai ir visi dirbo kartu. Toks atvejis yra vaizduojamas 2.1 paveiksle apatinėje dalyje, kuri nusako lyderio nebuvimą. Daugiausia komandų visgi turėjo lyderius, jie vaizduojami 2.1 pav. viršutinėje dalyje – stabili sritis. Akivaizdu, kad iš komandos išmetus lyderį, joje dažniausiai nebeliks kūrybingiausio ir atsakingiausio žmogaus (žr. 2.2.4. skyrių). Vadinasi, visi komandos nariai, norėdami atlikti užduotį teisingai ir laiku, turės

išrinkti naują lyderį arba taps grupe, kuri neturi lyderio. Antras atvejis gali atsitikti tada, jei komandos bendras kūrybingumas, atsakingumas bei kitų palaikymas atsidurs ant kritinės srities (žr. 2.1 pav.).

Žinoma, kad gautas modelis priklauso nuo charakterio savybių, tačiau daug lemia ir vaikų auklėjimas, mokymas bei amžius. Tikėtina, kad pritaikius kregždės uodegos katastrofą studentų darbo grupėms, būtų gauti visai kiti rezultatai ir juos būtų galima atvaizduoti 2.3 paveiksle parodytu dinamikos modeliu. Panašus atvejis ir yra aptarta Stephen J. Guastello darbuose [5, 11, 21]. Tyrimams atlikti jis duomenis surinko apklaussus Marquette universiteto studentus. Reikia nepamiršti, kad gali skirtis Amerikoje ir Lietuvoje žmonių požiūriai į vertybes, todėl ir rezultatai gali būti nepanašūs.

Tyrimui atlikti taip pat buvo sukurtas hibridinis PSO algoritmas. Dalis dalelių duomenų buvo suvesti pagal tai, kokie geriausi skaičiavimai buvo gauti iki naujo skaičiavimo pradžios, o dalis buvo parinkti Monte – Carlo metodu. Algoritmo modifikacija nepasiteisino, nes nepaisant įvesto atsiktinumo, sprendinys vis vien likdavo geriausias nurodytas. Taip galėjo atsitikti dėl per didelio dalelės dimensijų (modelio parametru) skaičiaus.

5. IŠVADOS

- Tiriant kregždės uodegos katastrofą buvo nustatyta, kad tik vienas parametras u lemia katastrofos atsiradimą arba išnykimą. Jam esant didesniam už nulį, gauname atvejį panašų į perlinkio katastrofą. Kai parametras u yra neigiamas, susiformuoja paviršius panašus į dvigubos klostės – gaunama kregždės uodegos katastrofa.
- Parametrų erdvė yra pakankama norint nustatyti rimties taškų skaičių. Ištirta, kad parinkus tokį parametrų rinkinį, kuris yra kregždės uodegos viduje, turime keturis rimties taškus, o esant ant krašto, turime tris fiksuotus taškus. Išėjus iš srities ribų turime du arba nei vieno rimties taško.
- Shapir – Wilk testas parodė, kad surinkti duomenys nėra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį. Dėl to, taikyti vienmatę dispersinę analizę (ANOVA) yra negalima. Be to, atlikus Kruskal Wallis dispersinę analizę prie kritinio lygmens $\alpha = 0,01$, paaiškėjo, kad KTU inžinerijos licėjaus šeštos ir dešimos klasių moksleivių duomenys yra vienodai pasiskirstę.
- Ištyrus surinktus duomenis apie grupių lyderio atsiradimą tarp mokinių paaiškėjo, kad juos geriausiai aprašo Rayleigh dėsnio ir kregždės uodegos katastrofos funkcijų suma. Naudojant dalelių spiečiaus (PSO) algoritmą rastos parametrų reikšmės yra: kregždės uodegos katastrofos funkcijos parametrai: $u = 6,2472, v = -0,0669, w = -5,7073$, atliekamų funkcijos transformacijų parametrai: $a_1 = 0,0727, a_2 = -1,0631, a_3 = 0,5345, a_4 = -0,0912, a_5 = 2,5457$, Rayleigh dėsnio parametras $\sigma = 0,1342$. Šie rezultatai gauti skaičiuojant pagal pirmąją tikslo funkciją $F_1(x)$, pagal kurią imama mažiausia vidutinė kvadratinė paklaida.
- Klausimai naudojant statistinę koreliacinę analizę bei mokinių charakterio savybes buvo išskaidyti į tris grupes: komunikavimas, atsakingumas ir kūrybingumas. Tyrimo metu paaiškėjo, kad toks išskaidymas mokinių darbo grupėse neviseiškai nusako kregždės uodegos katastrofos parametrus u, v, w . Daroma prielaida, kad taip galėjo atsitikti dėl to, jog mokinys, kuris nuolat kalba mažiausiai tikėtina jog bus lyderis.
- Paaiškėjo, kad tirtų mokinių darbo grupėse niekada arba labai retai išsiskiria antro tipo lyderiai, dėl to elgsena gali būti nusakoma 2.1 pav. Tarp moksleivių yra tik vienas lyderis, kuriuo visi seka arba jokio lyderio nėra.

6. REKOMENDACIJOS

- Tolimesniuose tyrimuose rekomenduojama apklausti suaugusių žmonių darbo grupes jiems pateikiant atitinkamo sudėtingumo užduotis. Be to, tikslinga būtų patikrinti ar rezultatai skiriasi priklausomai nuo darbo grupėse esančių žmonių skaičiaus.
- Lyderystės modeliui rasti galima parinkti kitokį algoritmą, pavyzdžiui: genetinį, bičių ar kitokį algoritmus. Palyginti algoritmų sudėtingumus bei įvertinti rezultatų paklaidas.

7. PADĖKOS

Noriu padėkoti savo magistro baigiamojo darbo vadovui M. Landauskui už pagalbą ir patarimus.

Taip pat dėkoju KTU inžinerijos licėjaus šeštų ir dešimtų klasių moksleiviams už dalyvavimą užduočių atlikime bei apklausoje užpildant anketą.

Autorė dėkoja LSMU sociologijos asistentei Rožei Joffe už konsultacijas anketų sudarymo, mokinių charakterio savybių dominavimo bei anketos klausimų išskaidymo į grupes klausimais.

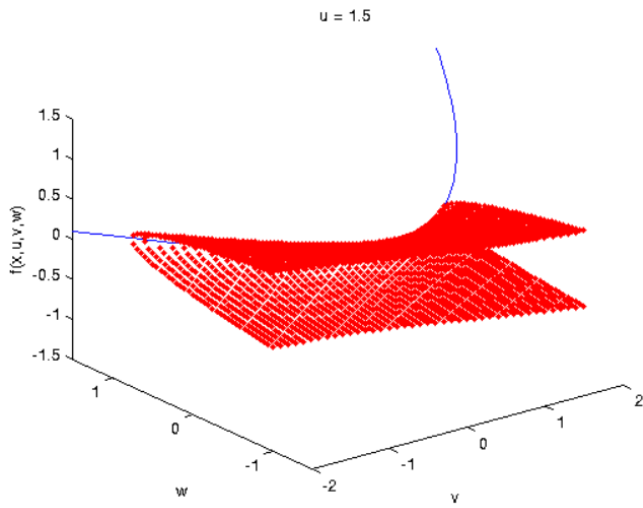
8. LITERATŪRA

1. S. J. Guastello / Basic Concepts of Nonlinear Dynamics Attractors and bifurcations, 2010, p. 1 – 13.
2. M. Piyaratne, H. Zhao, Z. Hu / Catastrophic Behavior of Aphid Population Dynamics: An analysis of Swallowtail Model, *Computational Ecology and Software*, 2014, p. 135 – 146.
3. Werner Sanns / Catastrophe Theory with Mathematica, *Darmstadt*, 2000, p. 12 – 104.
4. M.N. Murad / On the Cusp Catastrophe Model and Stability, ICSRS Publication, 2011 p. 2-9.
5. S. J. Guastello, D.D. Guastello / Origins of Coordination and Team Effectiveness: A Perspective From Game Theory and Nonlinear Dynamics, *Journal of Applied Psychology*, 1998. p. 423 – 437.
6. Bugis I., M. H. Kareem / Application of Swallowtail Catastrophe Theory to Transient Stability Assessment of Multi-Machine Power System, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, 2013, p. 390 – 398.
7. Lorraine Dodd / A Theory of Choices: Melding black swans, butterflies and swallowtails, *Journal of Applied Mathematics*, 2008, p. 692 – 670.
8. R. C. Mendez, F. F. Alfaro / Fold, Cusp, and Swallowtail Catastrophes in the Evolution of Planar Closed Orbits of Hydrogen in Crossed Electric and Magnetic Fields, *Revista Colombiana de Fisica Publication*, 2013, p. 28 – 40.
9. J. N. Nye / From Airy rings to the elliptic umbilic diffraction catastrophe, *Journal or Optics A: Pure and Applied Optics*, 2003, p. 503 – 510.
10. W. Yu, W. Bailing, Z. Huiyan / A Model to Analyze Weather Impact on Aphid Population Dynamics: An Application on Swallowtail Catastrophe Model; *European Scientific Journal*, 2014, p. 300 – 312.
11. S. J. Guastello / Nonlinear Dynamics in Psychology, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2000, p. 11-29.
12. S. J. Guastello / Butterfly Catastrophe Model of Motivation in Organizations: Evaluation of an Introductory Psychology Course, Paper presented at the Annual Meeting of the Midwestern Psychological Association, *Chicago*, 1985.
13. Algirdas Ambrazevičius / Įvadas į kokybinę paprastųjų diferencialinių lygčių teoriją, *Vilnius*, 2000, p. 4 – 139.
14. James K. Hazy / Toward a Theory of Leadership in Complex Systems: Computational Modeling Explorations; *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 2008, p. 281-310.
15. M. A. Riley, G. C. Van Orden / Tutorials in Contemporary Nonlinear Methods for the Behavioral Sciences, *Arizona state*, 2005.
16. J. C. Sprott / Dynamical Models of Love; *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Science*, 2004, 303 – 314.
17. Henry C. Wente / A Surprising Bubble Catastrophe, *Pacific Journal of Mathematics*, 1999, 339 – 350.
18. S. J. Guastello / Nonlinear Dynamics in Psychology, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2000, p. 1 – 20.
19. R. Thom / Topological Models in Biology, 1969, *Pergamon Press*, p. 313 – 335.
20. M. H. Kareem / Transient Stability Assessment of Multi – Machine Power System Using Swallowtail Catastrophe theory, *Journal of Computer Engineering and Information Technology*, 2014, p. 1 – 6.
21. G. Zaror, S. J. Guastello / Self – Organization and Leadership Emergence A Cross – Cultural Replication, *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Science*, 2000, p. 113 – 120.
22. S. J. Guastello, J. Craven, K. M. Zygowicz, B. R. Bock / A Rugged Landscape Model for Self – Organization and Emergent Leadership in Creative Problem Solving and Production Group, *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Science*, 2005, p. 297 – 340.

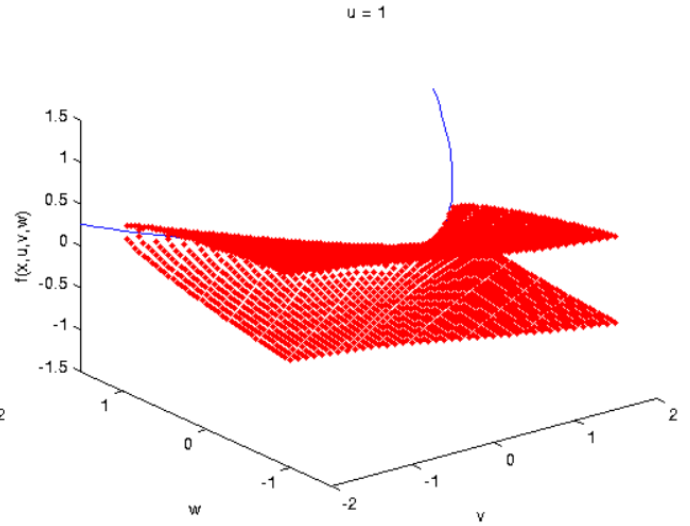
23. S. J. Guastello, R. W. Bond / The Emergence of Leadership in Coordination intensive Groups, *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Science*, 2007, p. 91 – 118.
24. Q. Bai / Analysis of Particle Swarm Optimization Algorithm, *Computer and Information Science*, 2010, p. 180 – 185.
25. S. J. Guastello / A butterfly Catastrophe Model of Motivation in Organization: Academic Performance, *Journal of Applied Psychology*, 1987, p. 165 – 182.
26. B. Avolio, F. Walumbwa, T. J. Weber / Leadership: Current Theories, Research, and Future Directions, Nebraska, 2009, p. 2 – 29.
27. D. M. Lane / Analysis of Variance, 2007, p. 513 – 596.
28. J. Miller, P. Haden / Statistical Analysis with The General Linear Model, *California*, 2006, p. 7 – 12.
29. R. Hassan, B. Cohanin, O. de Weck / A Comparison of Particle Swarm Optimization and the Genetic Algorithm, *Vanderplaats Research and Development*, 2004, p. 1 – 13
30. Fleener, John W. / Trait Approach to Leadership, *Encyclopedia of Industrial and Organizational Psychology*, 2006, p. 830 – 833.
31. V. I. Arnold / Catastrophe Theory, *Springer*, 2004, p. 1 – 74.

1 PRIEDAS

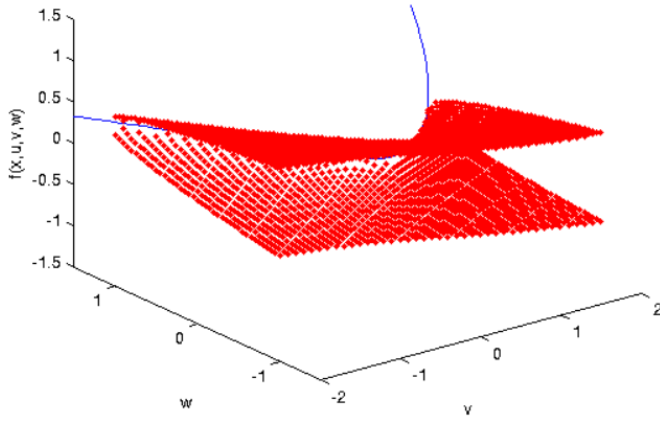
Kregždės uodegos katastrofos elgsenos paviršius esant skirtingoms parametro u reikšmėms.



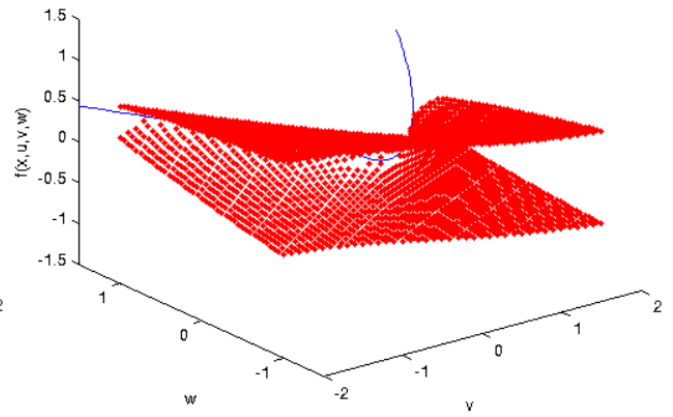
a) $u = 1,5$
 $u = 0.8$



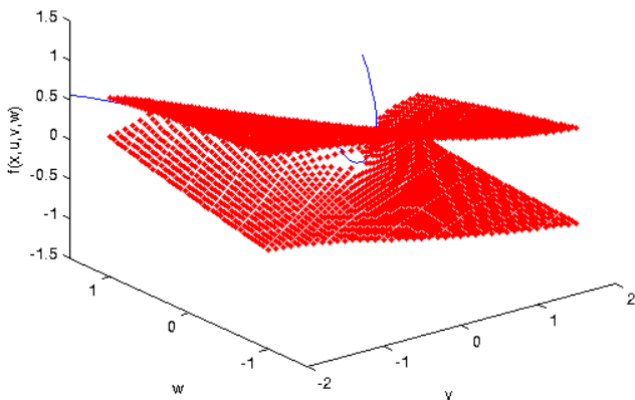
b) $u = 1$
 $u = 0.5$



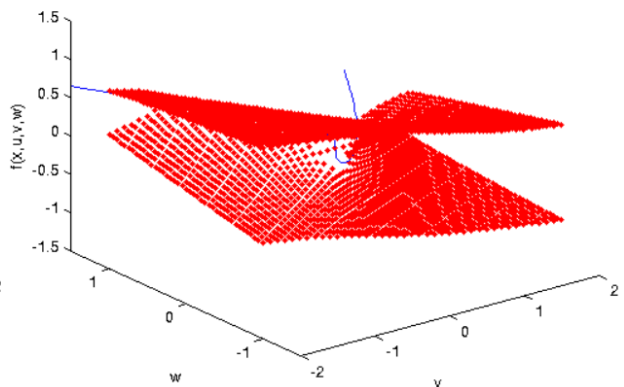
c) $u = 0,8$
 $u = 0.2$



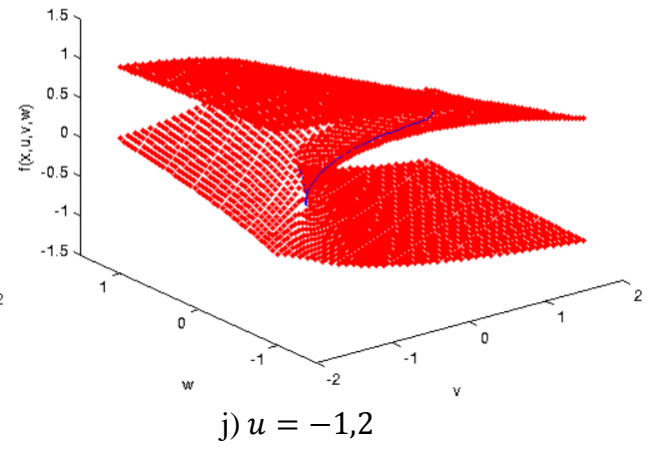
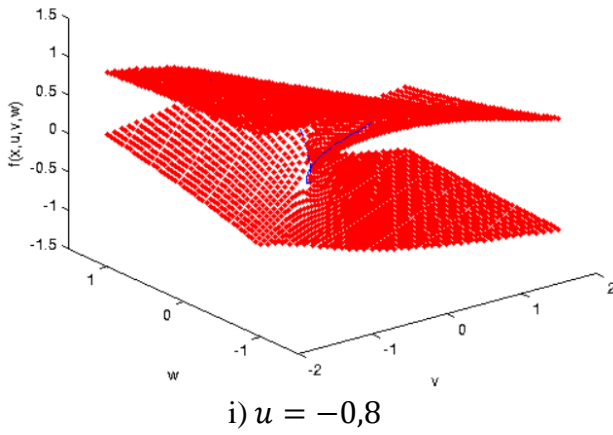
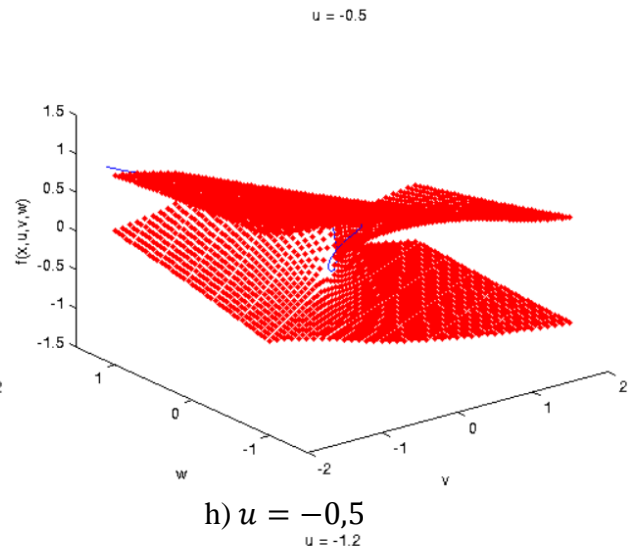
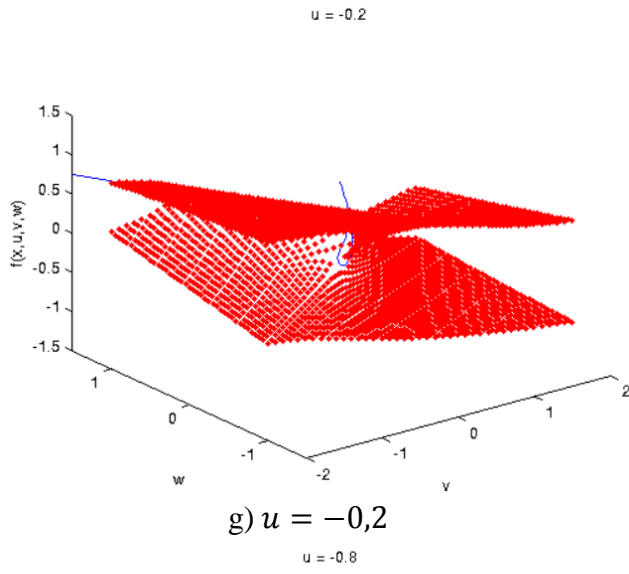
d) $u = 0,5$
 $u = 0$



e) $u = 0,2$

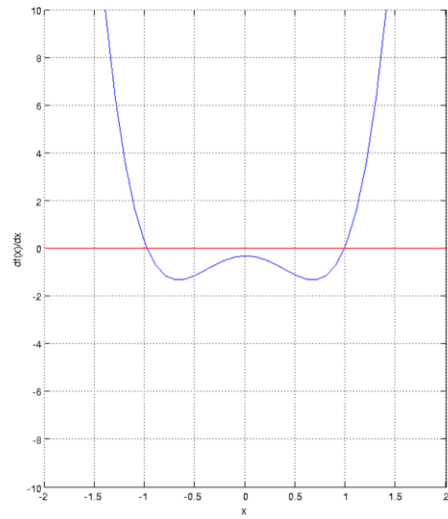
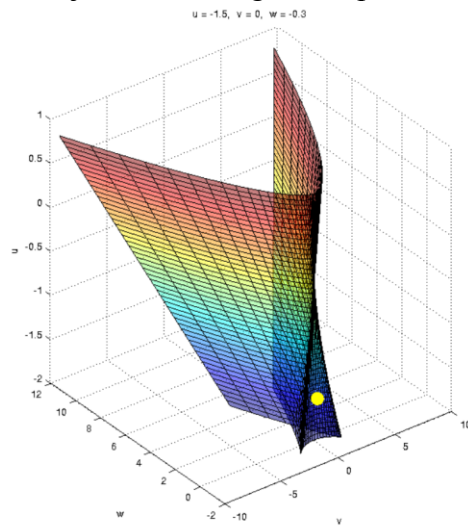


f) $u = 0$

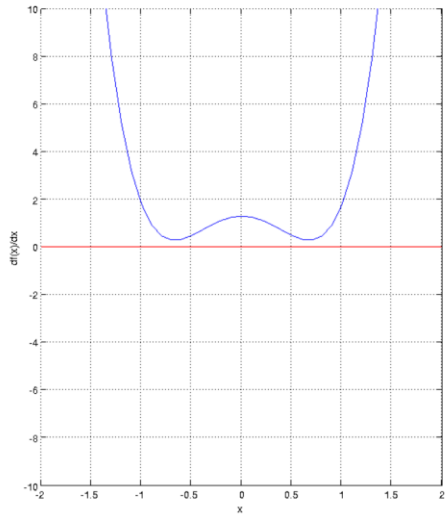
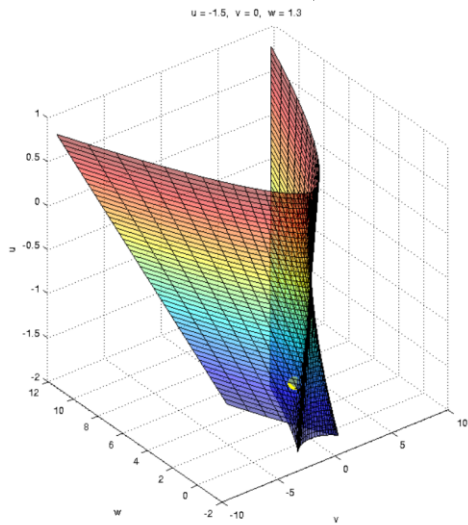


2 PRIEDAS

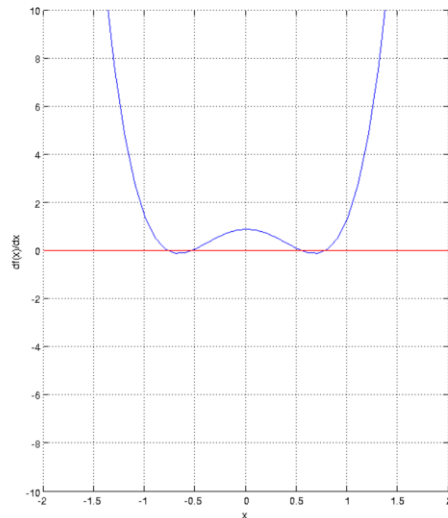
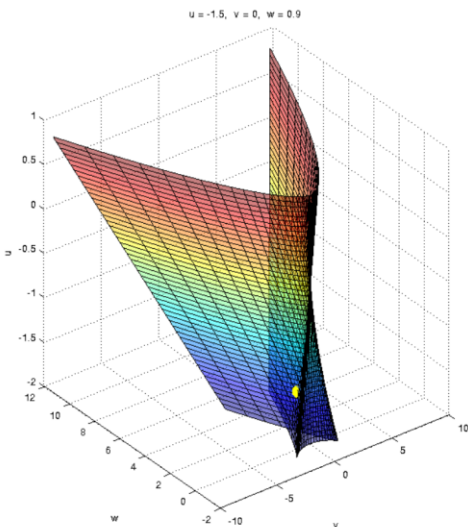
Vaizduojami funkcijos išvestinės grafikai prie tam tikrų parametrų reikšmių.



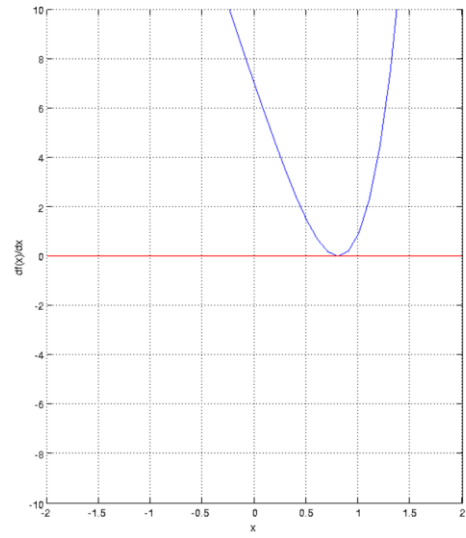
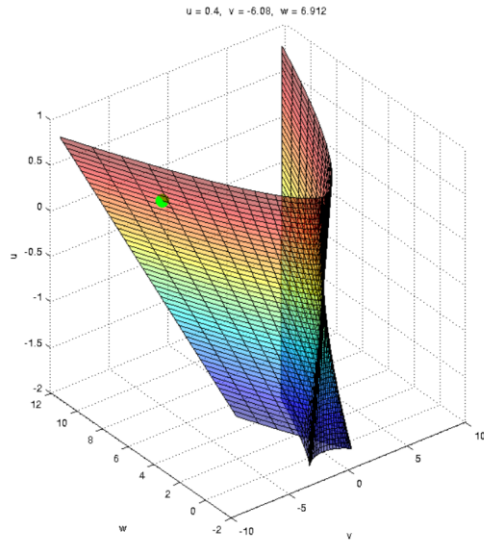
a) $u = -1.5, v = 0, w = -0.3$



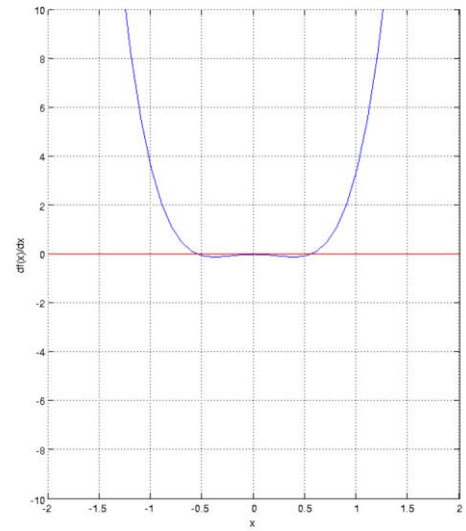
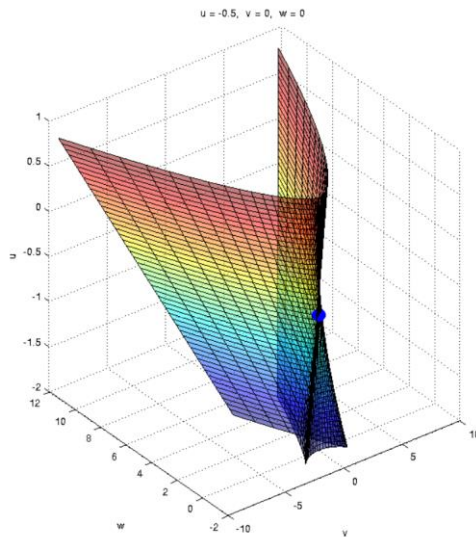
b) $u = -1.5, v = 0, w = 1.3$



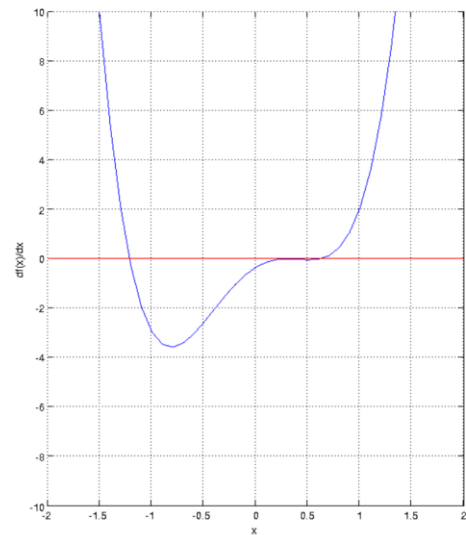
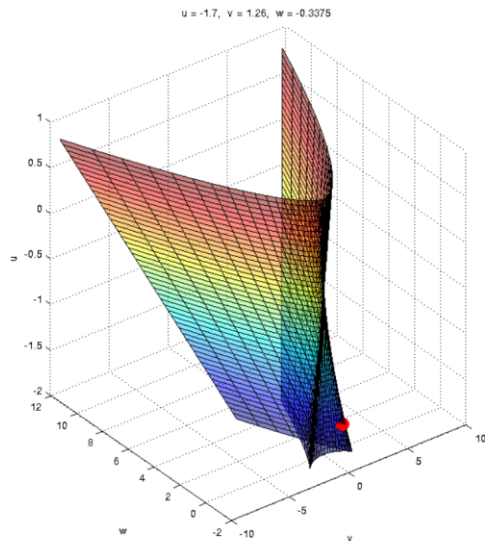
a) $u = -1.5, v = 0, w = 0.9$



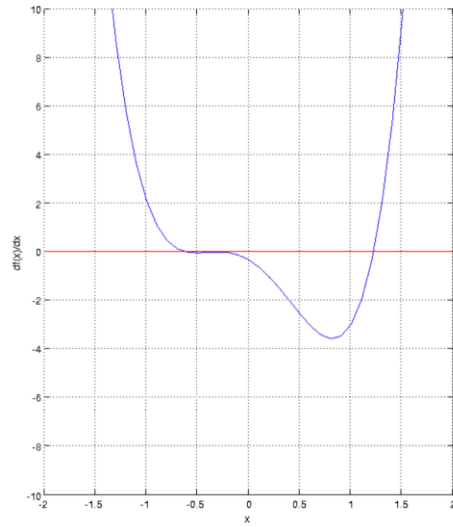
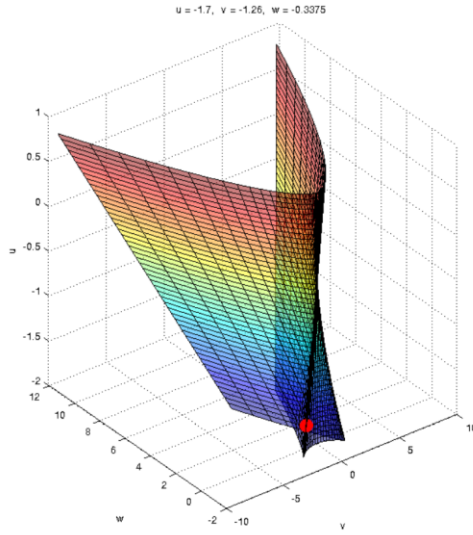
d) $u = 0.4, v = -6.08, w = 6.912$



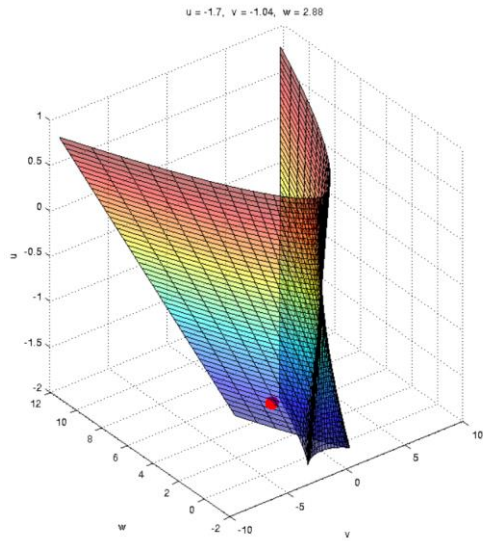
b) $u = -0.5, v = 0, w = 0$



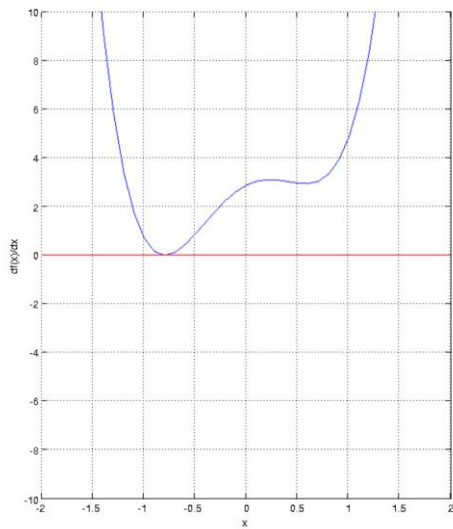
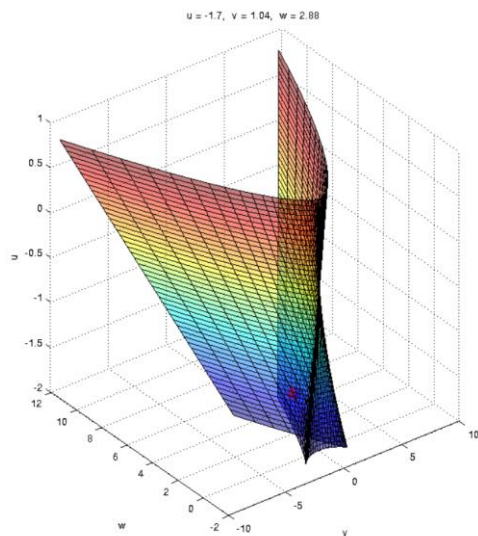
c) $u = -1.7, v = 1.26, w = -0.3375$



d) $u = -1.7, v = -1.26, w = -0.3375$



e) $u = -1.7, v = -1.04, w = 2.88$



f) $u = -1.7, v = 1.04, w = 2.88$

3 PRIEDAS

Anketa

Vardas, pavardė, komandos

nr. _____ Data _____

Pažymėk varnele ties tuo vardu, kuris labiausiai atitinka tavo nuomonę tuo klausimu. Neskubėk, prie kiekvieno klausimo atidžiai pagalvok ir pažymėk taip, kaip tau atrodo teisingiausia. Nei vienas klasiokas negaus ir nematys tavo anketos atsakymų, todėl gali drąsiai rašyti taip, kaip galvoji.

Klausimas\Vardas						
1. Dažniausiai priimdavo sprendimus						
2. Labiausiai palaikė kitus						
3. Labiausiai pasitikėjai žaidimo metu						
4. Stengėsi nuslopinti nesutarimus						
5. Įtikinamiausiai išsakė savo idėjas						
6. Labiausiai palaikė kitų idėjas						
7. Daugiausiai pateikė pasiūlymų						
8. Atsakingiausias						
9. Labiausiai susitelkęs į užduotį						
10. Greičiausiai sugalvodavo naują idėją						
11. Uždavė daugiausiai klausimų						
12. Labiausiai stengėsi laimėti						
13. Daugiausiai pateikė idėjų						
14. Labiausiai sekė instrukcijas						
15. Labiausiai stengėsi užduotį atlikti laiku						
16. Dažniausiai primindavo, kad nukrypstama nuo temos						
17. Apibendrindavo rezultatus						
18. Stengėsi palengvinti užduotį						
19. Daugiausiai juokavo						
20. Labiausiai elgėsi kaip lyderis						

Ačiū už nuoširdžius atsakymus!

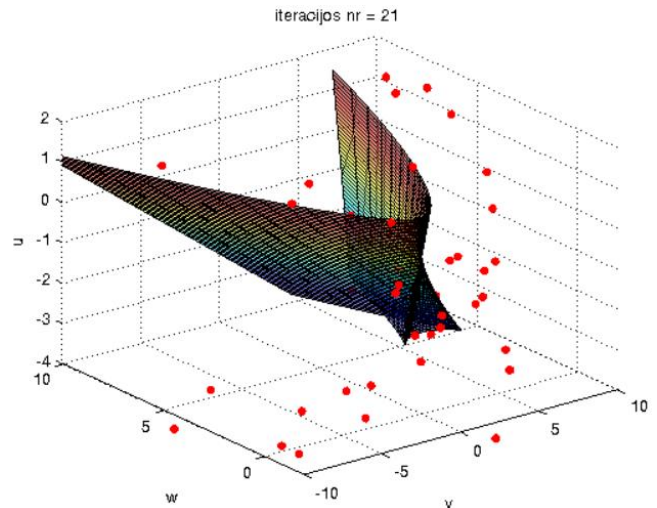
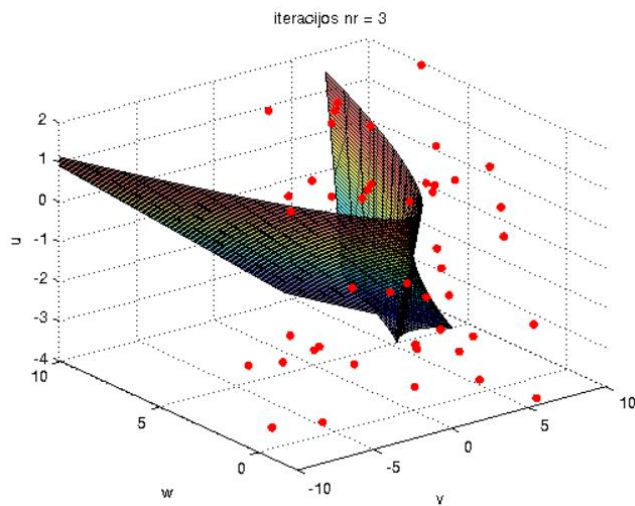
4 PRIEDAS

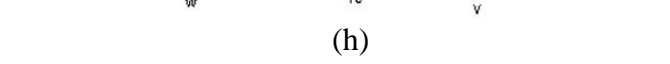
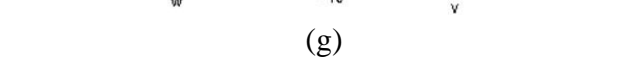
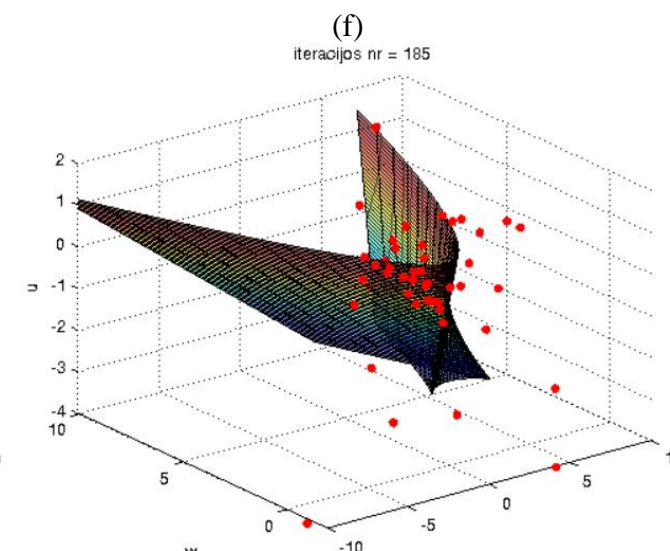
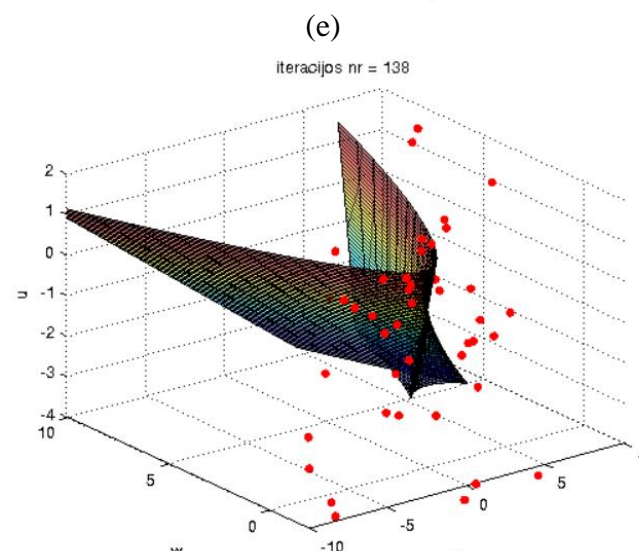
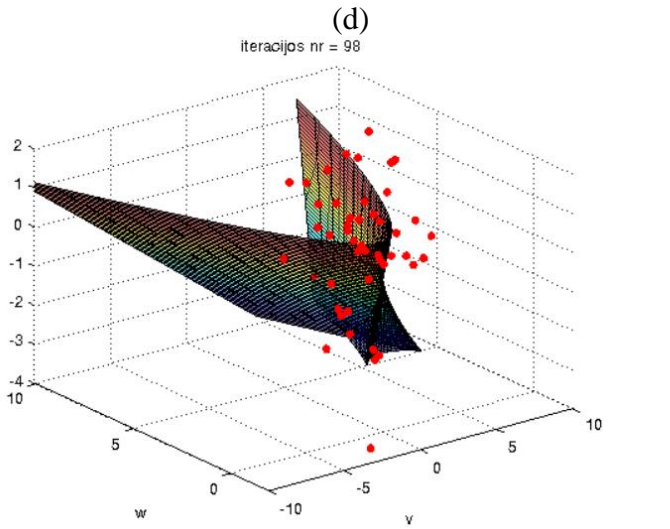
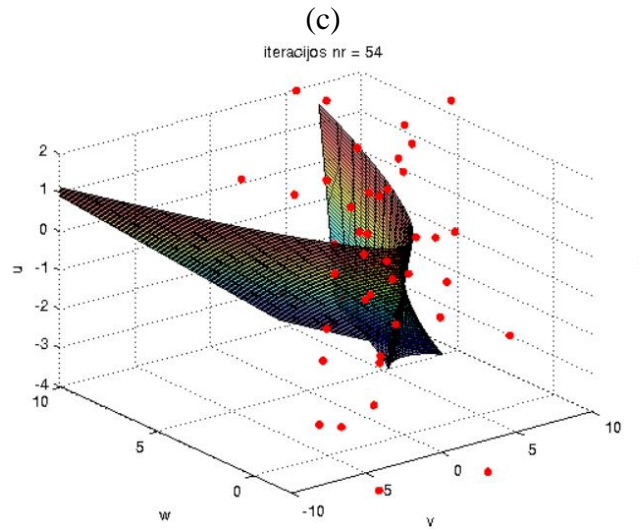
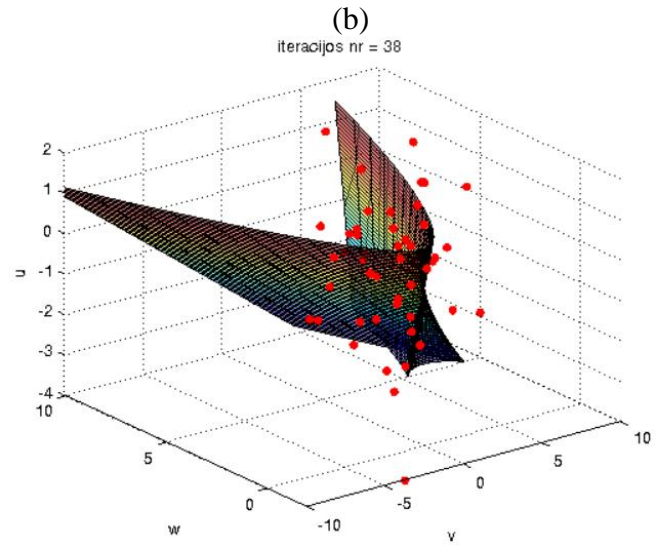
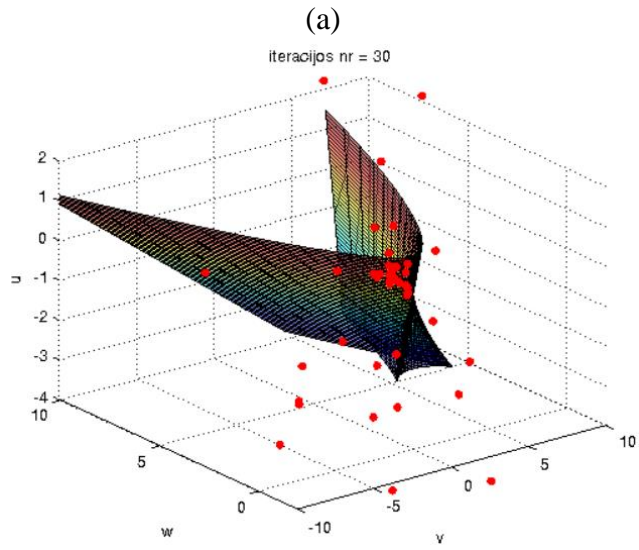
KTU inžinerijos licėjaus moksleivių užpildytos anketos pavyzdys

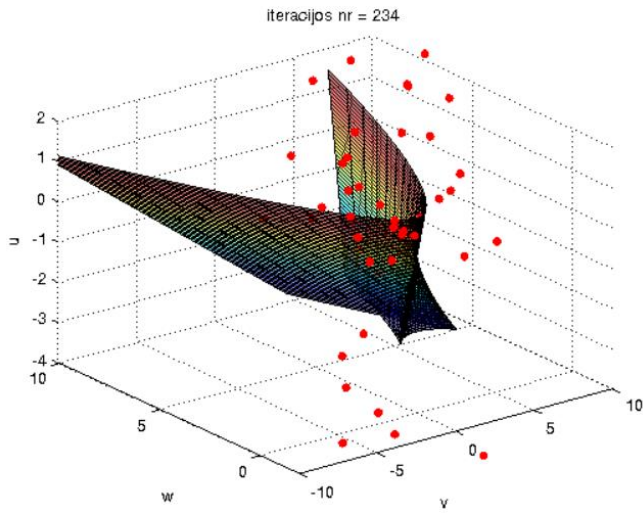
	I					
	A	B	C	D	E	F
1.	3	1	0	0	1	1
2.	0	4	0	1	0	1
3.	3,5	0	0	1	0	1,5
4.	0,5	1,5	1,5	1,5	0,5	0,5
5.	2	0	0	1	1	2
6.	0	1	1	0	3	1
7.	3,5	0	1	1	0	0,5
8.	2	0	1	2	0	1
9.	3	0	1	1	0	1
10.	1	0	0	2	0	3
11.	0	2	1	1	1	1
12.	2	2	1	0	1	0
13.	1	0	1	2	0	2
14.	1	0	1	1	1	2
15.	2	1	2	0	1	0
16.	0	1	2	2	1	0
17.	2	0	1	1	0	2
18.	2	1	0	2	0	1
19.	0	6	0	0	0	0
20.	5	0	0	0	0	1
Suma be 20	28,5	20,5	14,5	19,5	10,5	20,5
Bendra SUMA	33,5	20,5	14,5	19,5	10,5	21,5

5 PRIEDAS

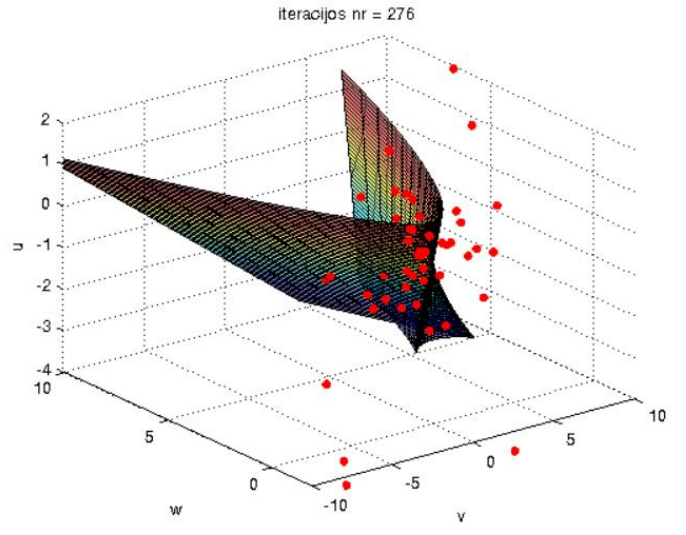
Dalelių judėjimas pagal PSO algoritmą parametru u, v, w erdvėje pavyzdys, kai dalelių skaičius lygus 50 ir minimizuojamos vidutinės kvadratinės paklaidos.



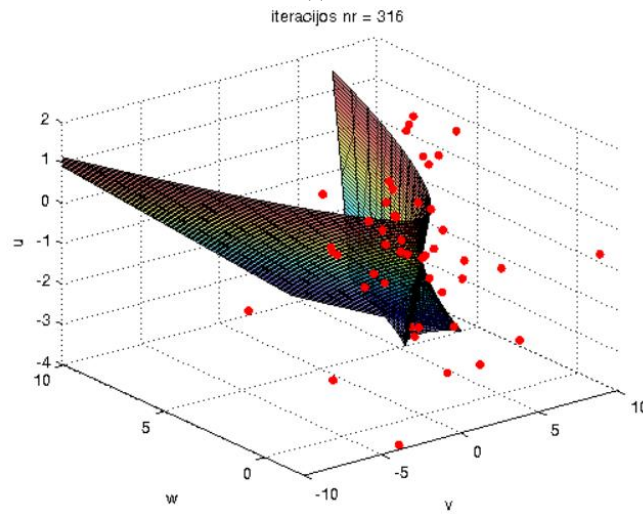




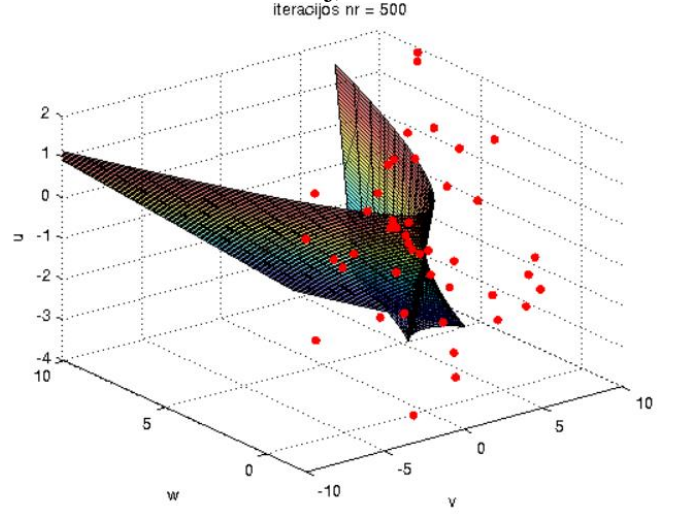
(i)



(j)



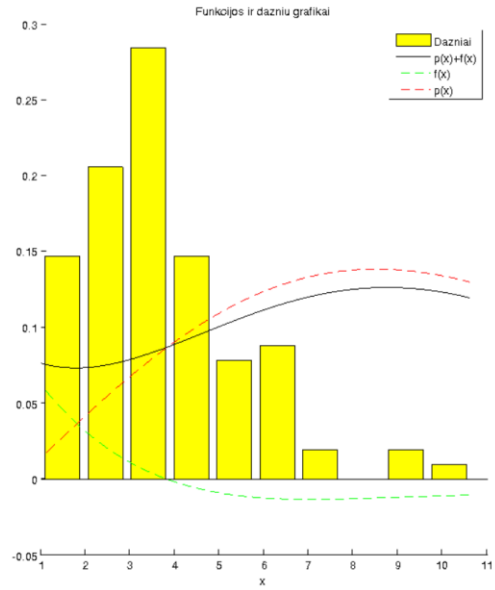
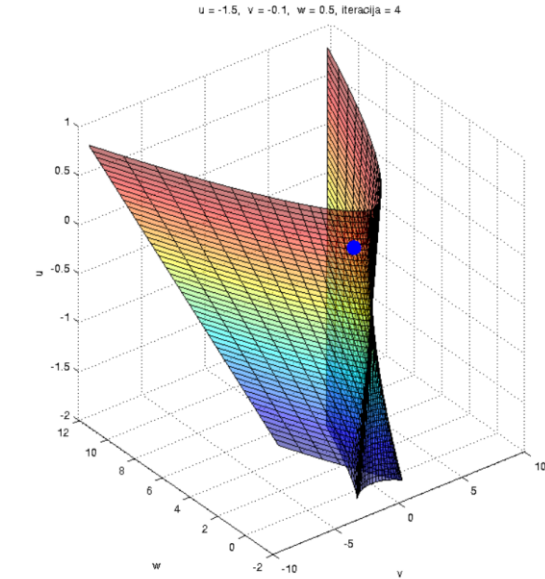
(k)



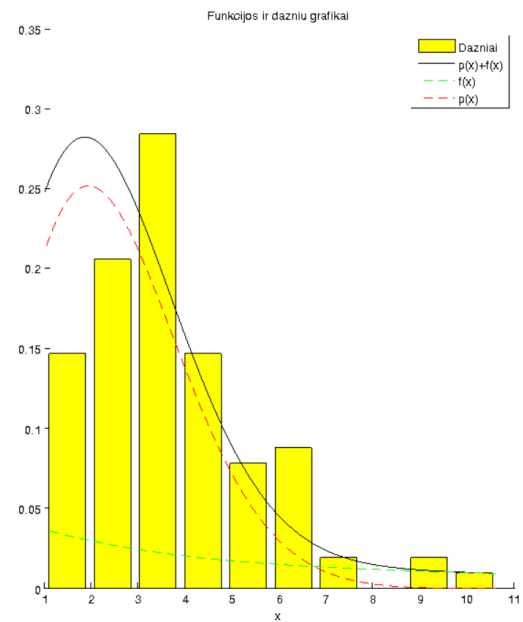
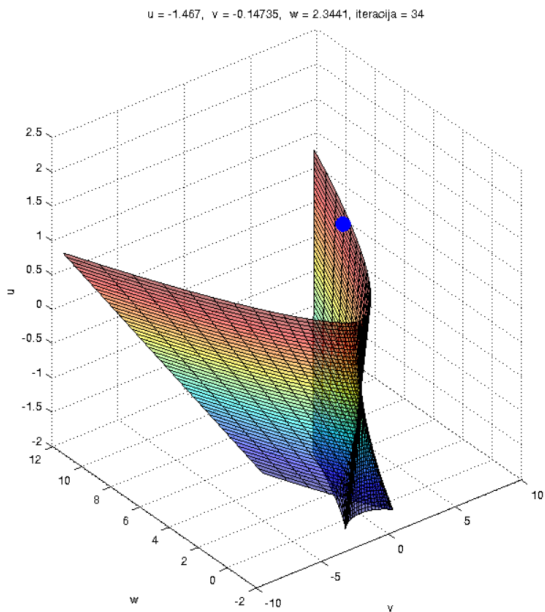
(l)

6 PRIEDAS

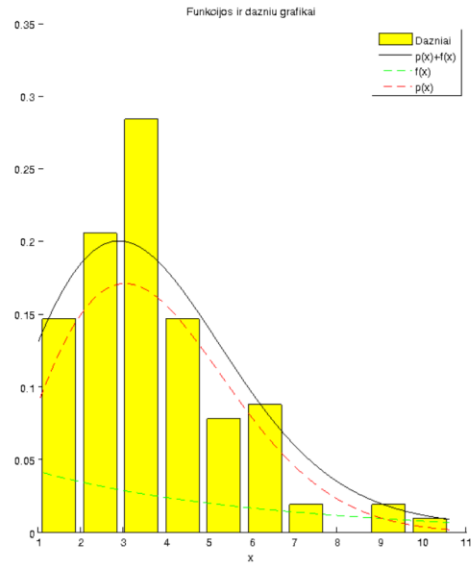
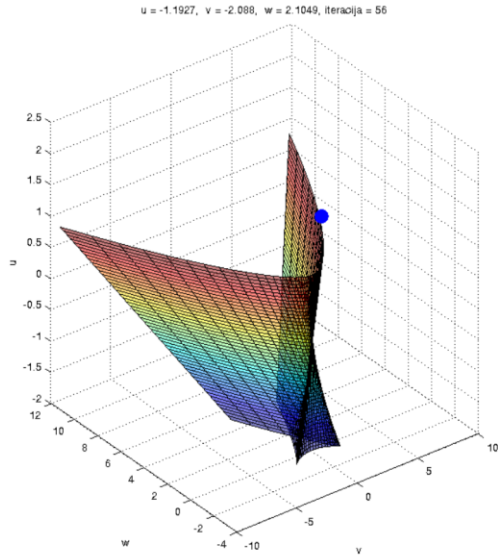
Kregždės uodegos katastrofos parametrų erdvės ir funkcijos $g(x)$ grafiko prie tam tikrų parametrų reikšmių pavyzdys, kai $p(x)$ yra Rayleigh dėsnis, o dalelių skaičius lygus 50 ir minimuojamos vidutinės kvadratinės paklaidos.



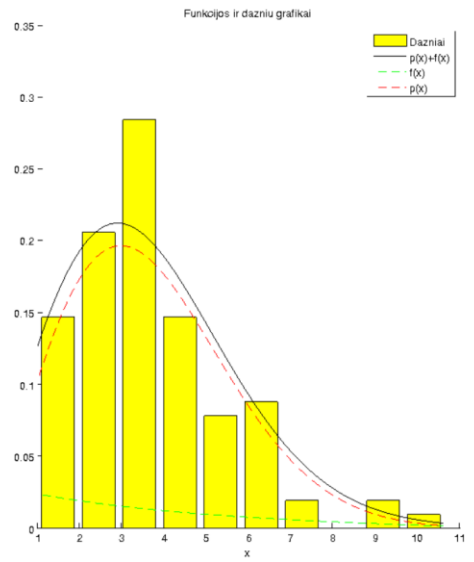
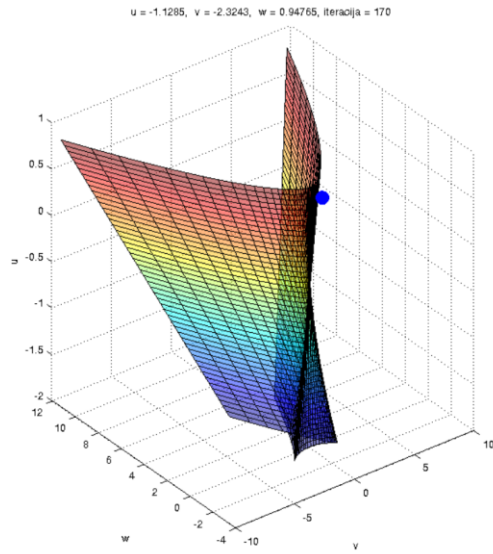
(a)



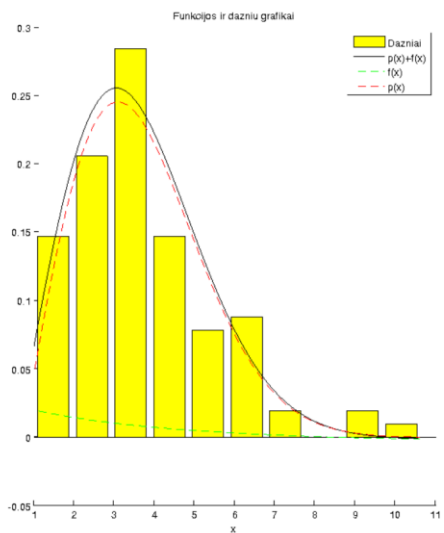
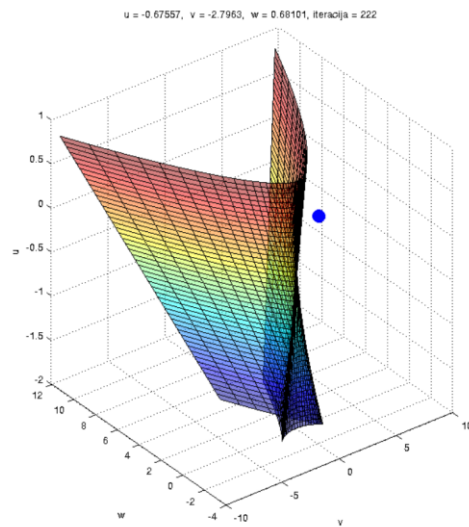
(b)



(c)



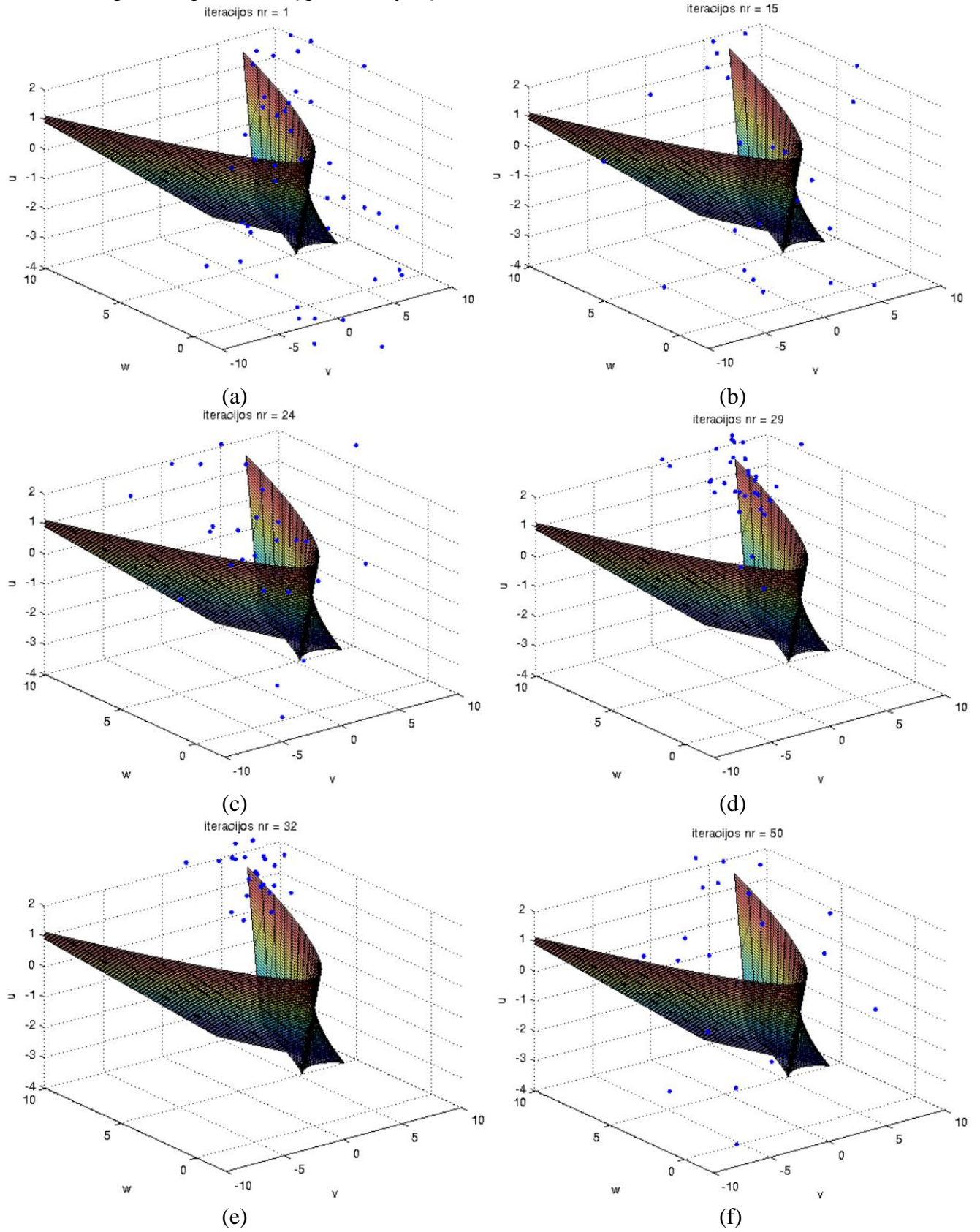
(d)

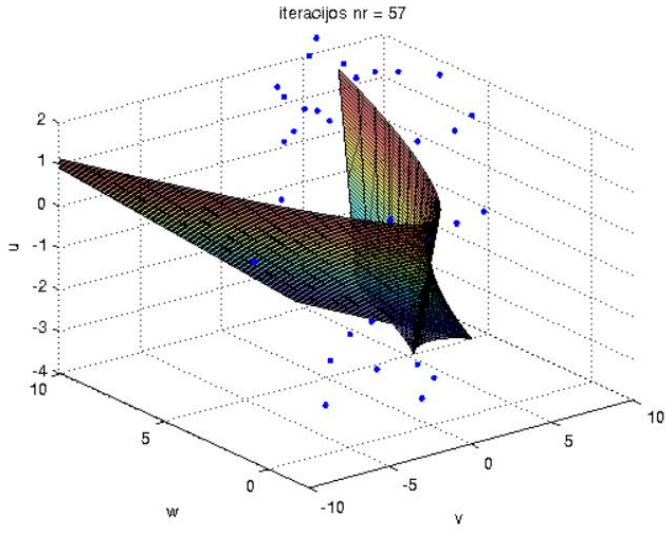


(e)

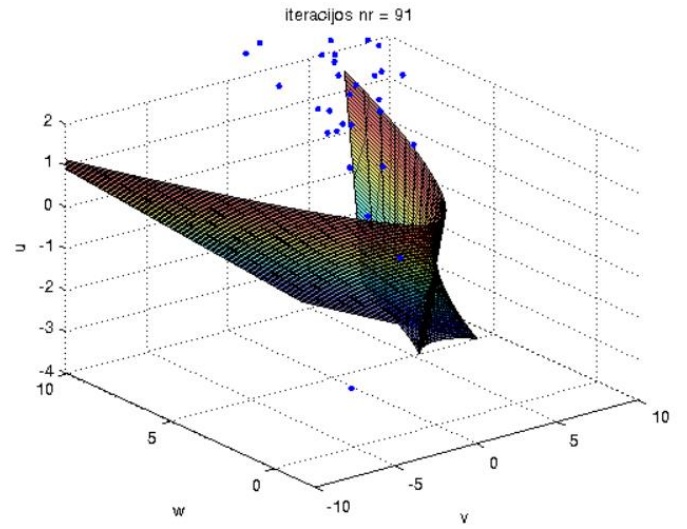
7 PRIEDAS

Dalelių judėjimas pagal PSO algoritmą parametru u, v, w erdveje pavyzdys, kai dalelių skaičius lygus 50 ir tikrinama hipotezė apie vienodą pasiskirstymą.

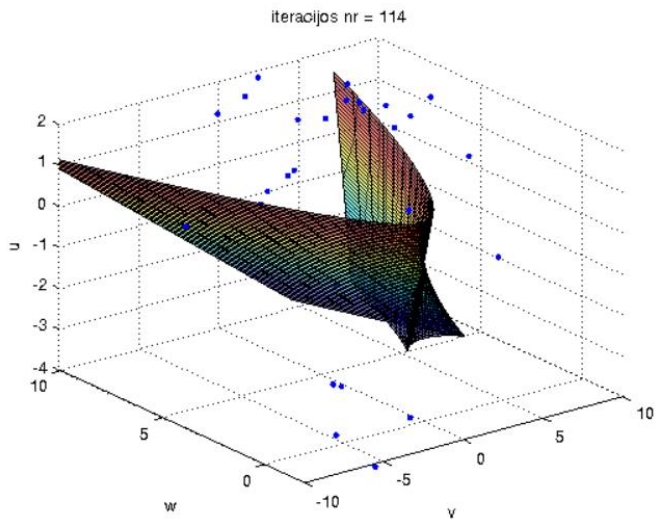




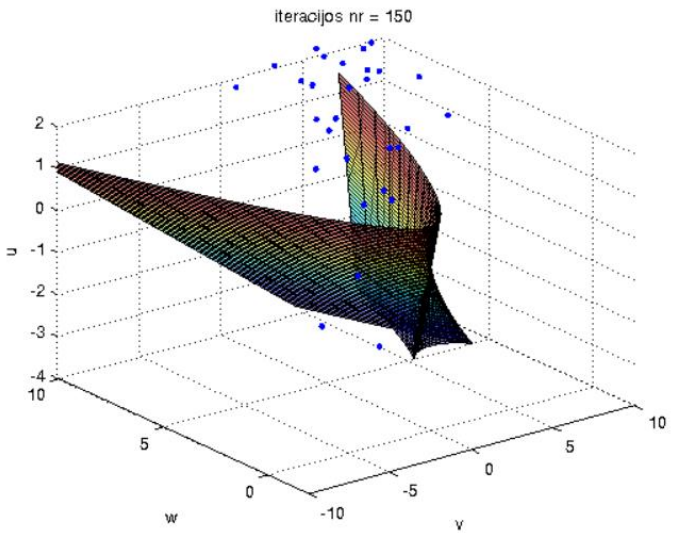
(g)



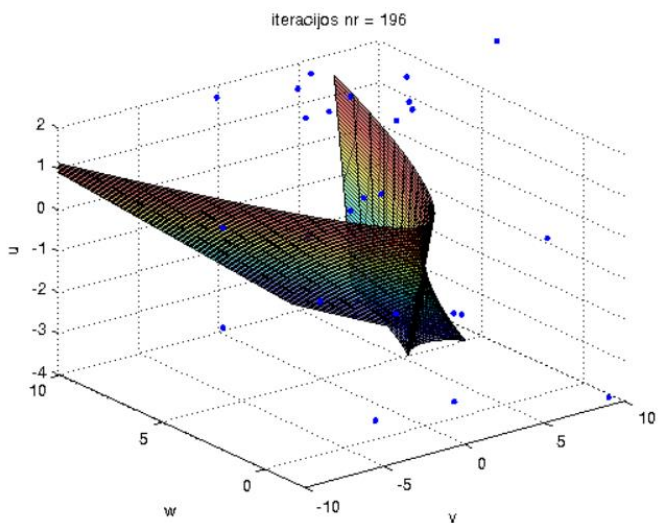
(h)



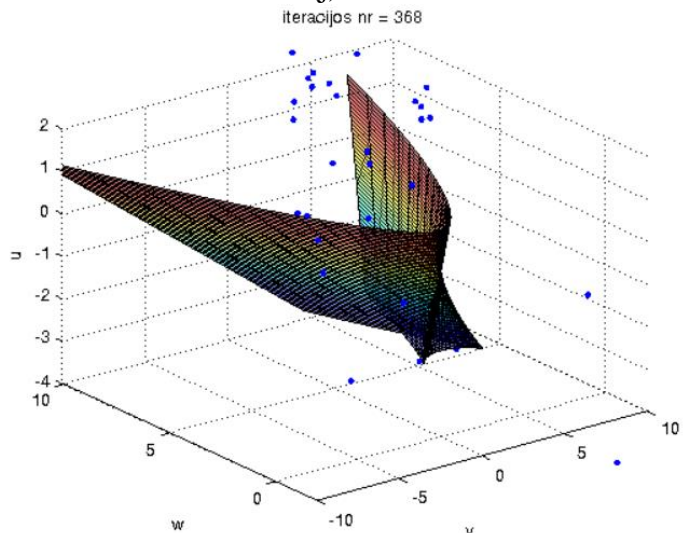
(i)



(j)



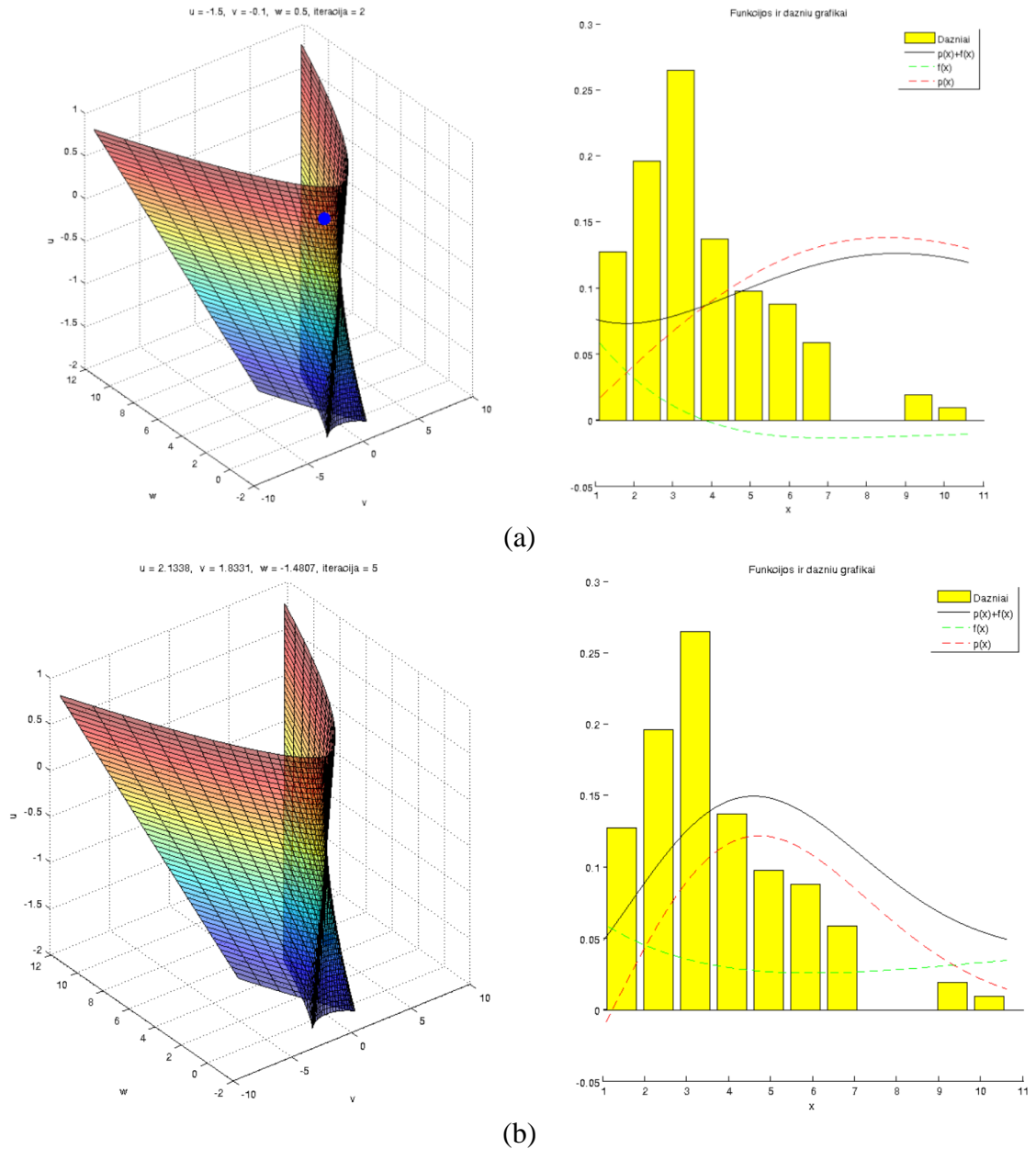
(k)

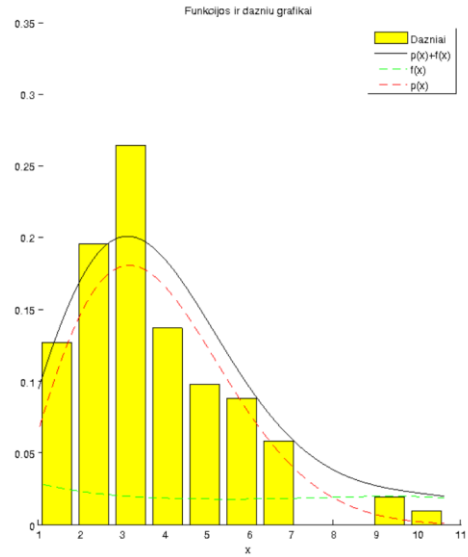
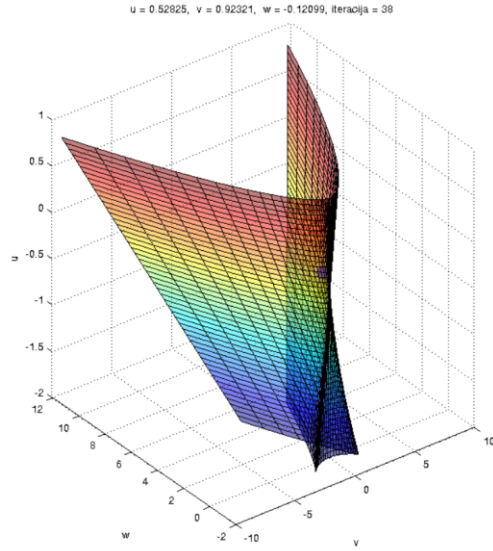


(l)

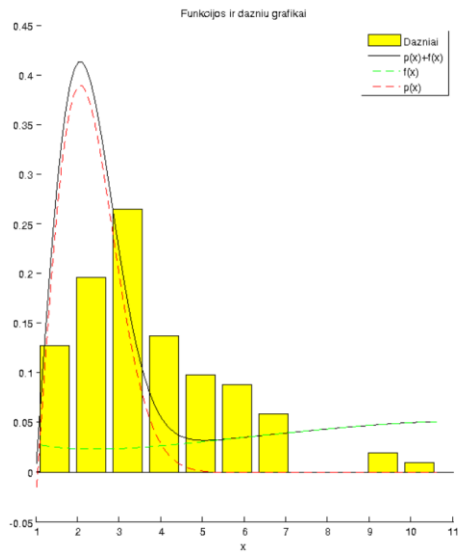
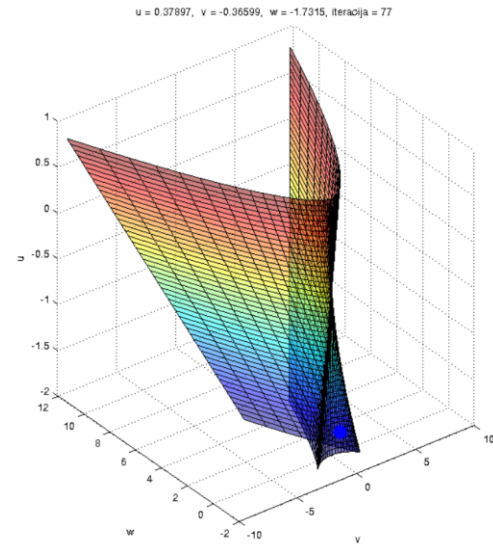
8 PRIEDAS

Kregždės uodegos katastrofos parametų erdvės ir funkcijos $g(x)$ grafiko prie tam tikrų parametų reikšmių pavyzdys, kai $p(x)$ yra Rayleigh dėsnis, o dalelių skaičius lygus 50 ir tikrinama hipotezė apie vienodą pasiskirstymą.

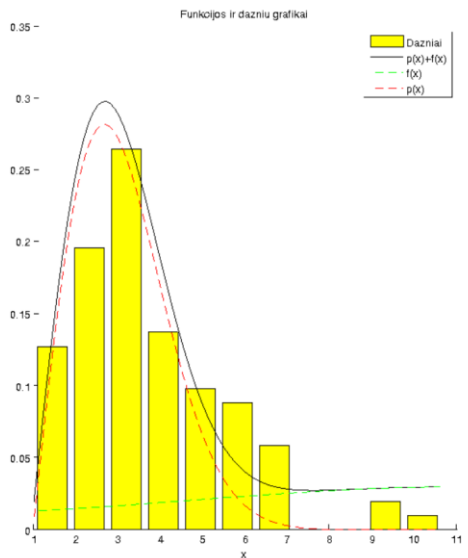
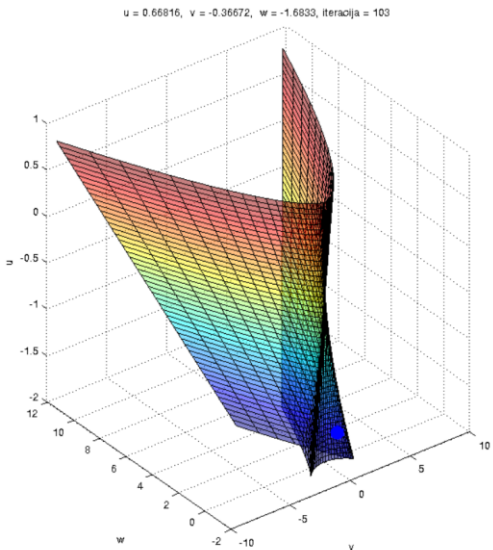




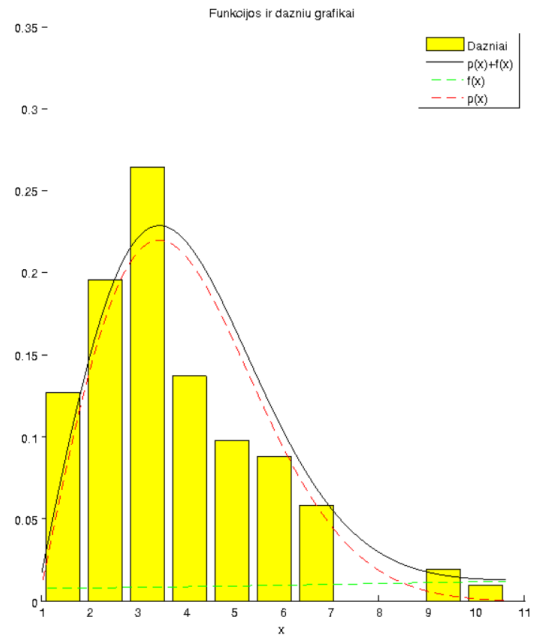
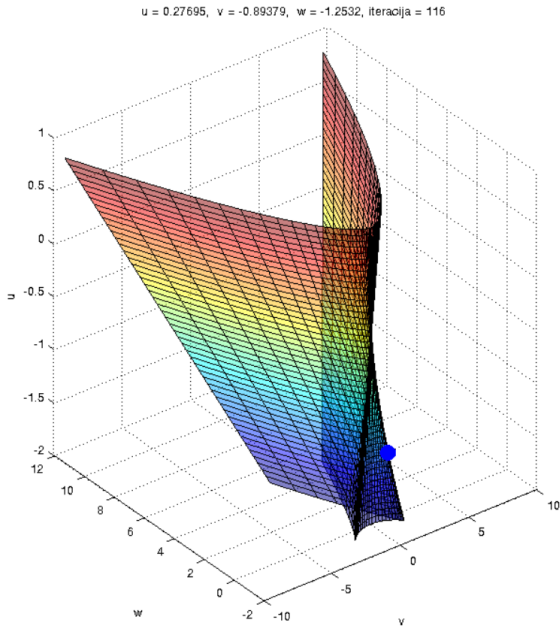
(c)



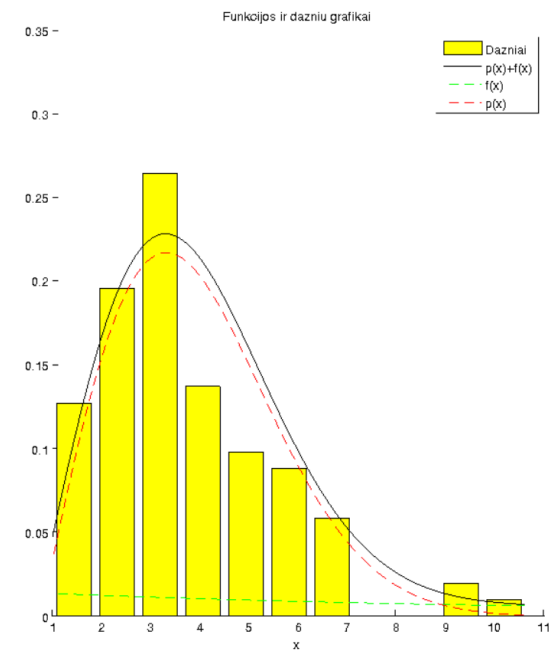
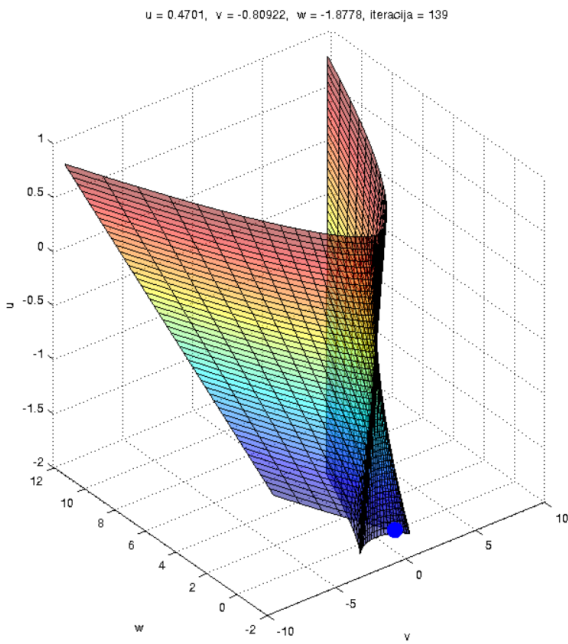
(d)



(e)



(f)



(g)

9 PRIEDAS

Pearsono koreliacijos koeficientai tarp klausimų

Kl. Nr.\Kl.Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.0000	-0.0783	0.4237	-0.0658	0.6237	0.0136	0.6868	0.4811	0.5347	0.6085
2	-0.0783	1.0000	-0.0809	-0.0248	-0.1332	0.3207	-0.0913	-0.0690	-0.0680	0.0039
3	0.4237	-0.0809	1.0000	-0.1184	0.3717	0.0718	0.4463	0.1966	0.3207	0.3753
4	-0.0658	-0.0248	-0.1184	1.0000	0.1548	-0.0029	0.0073	0.1185	0.0598	-0.1625
5	0.6237	-0.1332	0.3717	0.1548	1.0000	0.0142	0.5616	0.4767	0.3628	0.4096
6	0.0136	0.3207	0.0718	-0.0029	0.0142	1.0000	-0.1242	0.1459	-0.0138	0.0338
7	0.6868	-0.0913	0.4463	0.0073	0.5616	-0.1242	1.0000	0.4898	0.5021	0.4716
8	0.4811	-0.0690	0.1966	0.1185	0.4767	0.1459	0.4898	1.0000	0.2206	0.2280
9	0.5347	-0.0680	0.3207	0.0598	0.3628	-0.0138	0.5021	0.2206	1.0000	0.4515
10	0.6085	0.0039	0.3753	-0.1625	0.4096	0.0338	0.4716	0.2280	0.4515	1.0000
11	-0.1708	0.0230	-0.1421	0.0565	-0.1651	0.1559	-0.2490	0.0443	-0.1021	-0.2603
12	0.3439	0.0385	0.1069	-0.0374	0.2842	0.0998	0.2197	0.1079	0.3577	0.2270
13	0.5658	0.0495	0.2733	-0.0615	0.2457	0.0936	0.5454	0.3552	0.5117	0.5215
14	0.4594	0.0025	0.1398	0.0561	0.4079	0.0638	0.3686	0.3861	0.3801	0.4159
15	0.4868	0.0819	0.3090	-0.0601	0.3594	0.1303	0.3554	0.3021	0.1494	0.2567
16	-0.0056	0.1076	0.0303	0.1288	0.1229	0.1004	0.0258	0.0698	0.1618	-0.0328
17	0.4093	0.1428	0.2642	-0.0961	0.3663	0.2581	0.2993	0.2972	0.2789	0.3067
18	0.4754	-0.0756	0.3283	0.1699	0.4966	0.1750	0.4663	0.4613	0.4374	0.5122
19	-0.2601	0.1302	-0.1695	-0.0110	-0.3021	-0.0065	-0.2565	-0.0468	-0.2348	-0.2805
20	0.7444	0.0462	0.4170	-0.0063	0.5406	0.1036	0.6770	0.5096	0.4206	0.4624
Kl. Nr.\Kl.Nr	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-0.1708	0.3439	0.5658	0.4594	0.4868	-0.0056	0.4093	0.4754	-0.2601	0.7444
2	0.0230	0.0385	0.0495	0.0025	0.0819	0.1076	0.1428	-0.0756	0.1302	0.0462
3	-0.1421	0.1069	0.2733	0.1398	0.3090	0.0303	0.2642	0.3283	-0.1695	0.4170
4	0.0565	-0.0374	-0.0615	0.0561	-0.0601	0.1288	-0.0961	0.1699	-0.0110	-0.0063
5	-0.1651	0.2842	0.2457	0.4079	0.3594	0.1229	0.3663	0.4966	-0.3021	0.5406
6	0.1559	0.0998	0.0936	0.0638	0.1303	0.1004	0.2581	0.1750	-0.0065	0.1036
7	-0.2490	0.2197	0.5454	0.3686	0.3554	0.0258	0.2993	0.4663	-0.2565	0.6770
8	0.0443	0.1079	0.3552	0.3861	0.3021	0.0698	0.2972	0.4613	-0.0468	0.5096
9	-0.1021	0.3577	0.5117	0.3801	0.1494	0.1618	0.2789	0.4374	-0.2348	0.4206
10	-0.2603	0.2270	0.5215	0.4159	0.2567	-0.0328	0.3067	0.5122	-0.2805	0.4624
11	1.0000	-0.3279	-0.0804	-0.2402	-0.1072	0.0827	0.0839	-0.1699	0.2477	-0.1798
12	-0.3279	1.0000	0.1766	0.2296	0.3348	-0.0027	0.2162	0.1672	-0.1190	0.4256
13	-0.0804	0.1766	1.0000	0.3269	0.0770	-0.0021	0.4020	0.4607	-0.1932	0.5854
14	-0.2402	0.2296	0.3269	1.0000	0.0917	0.2130	0.4373	0.4524	-0.2321	0.4397
15	-0.1072	0.3348	0.0770	0.0917	1.0000	-0.0499	0.1636	0.1138	-0.0632	0.4278
16	0.0827	-0.0027	-0.0021	0.2130	-0.0499	1.0000	0.0247	0.0856	-0.0091	0.0181
17	0.0839	0.2162	0.4020	0.4373	0.1636	0.0247	1.0000	0.2960	-0.2265	0.4817
18	-0.1699	0.1672	0.4607	0.4524	0.1138	0.0856	0.2960	1.0000	-0.0661	0.5560
19	0.2477	-0.1190	-0.1932	-0.2321	-0.0632	-0.0091	-0.2265	-0.0661	1.0000	-0.2115
20	-0.1798	0.4256	0.5854	0.4397	0.4278	0.0181	0.4817	0.5560	-0.2115	1.0000

10 PRIEDAS

Hipotezių apie klausimų tarpusavio nepriklausomumą reikšmingumo lygmenys

Kl. Nr.\Kl.Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.0000	0.4340	0.0000	0.5112	0.0000	0.8922	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.4340	1.0000	0.4192	0.8048	0.1820	0.0010	0.3613	0.4910	0.4969	0.9692
3	0.0000	0.4192	1.0000	0.2359	0.0001	0.4730	0.0000	0.0476	0.0010	0.0001
4	0.5112	0.8048	0.2359	1.0000	0.1203	0.9766	0.9420	0.2354	0.5502	0.1028
5	0.0000	0.1820	0.0001	0.1203	1.0000	0.8875	0.0000	0.0000	0.0002	0.0000
6	0.8922	0.0010	0.4730	0.9766	0.8875	1.0000	0.2136	0.1434	0.8908	0.7356
7	0.0000	0.3613	0.0000	0.9420	0.0000	0.2136	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.4910	0.0476	0.2354	0.0000	0.1434	0.0000	1.0000	0.0259	0.0212
9	0.0000	0.4969	0.0010	0.5502	0.0002	0.8908	0.0000	0.0259	1.0000	0.0000
10	0.0000	0.9692	0.0001	0.1028	0.0000	0.7356	0.0000	0.0212	0.0000	1.0000
11	0.0861	0.8183	0.1541	0.5728	0.0973	0.1175	0.0116	0.6587	0.3073	0.0082
12	0.0004	0.7011	0.2849	0.7089	0.0038	0.3182	0.0265	0.2806	0.0002	0.0218
13	0.0000	0.6214	0.0054	0.5394	0.0128	0.3497	0.0000	0.0002	0.0000	0.0000
14	0.0000	0.9801	0.1611	0.5754	0.0000	0.5243	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
15	0.0000	0.4133	0.0016	0.5482	0.0002	0.1919	0.0002	0.0020	0.1341	0.0092
16	0.9556	0.2816	0.7624	0.1972	0.2186	0.3152	0.7968	0.4858	0.1042	0.7435
17	0.0000	0.1521	0.0073	0.3367	0.0002	0.0088	0.0022	0.0024	0.0045	0.0017
18	0.0000	0.4500	0.0008	0.0878	0.0000	0.0786	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0.0083	0.1920	0.0885	0.9126	0.0020	0.9486	0.0093	0.6404	0.0175	0.0043
20	0.0000	0.6444	0.0000	0.9499	0.0000	0.3001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Kl. Nr.\Kl.Nr	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.0861	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.9556	0.0000	0.0000	0.0083	0.0000
2	0.8183	0.7011	0.6214	0.9801	0.4133	0.2816	0.1521	0.4500	0.1920	0.6444
3	0.1541	0.2849	0.0054	0.1611	0.0016	0.7624	0.0073	0.0008	0.0885	0.0000
4	0.5728	0.7089	0.5394	0.5754	0.5482	0.1972	0.3367	0.0878	0.9126	0.9499
5	0.0973	0.0038	0.0128	0.0000	0.0002	0.2186	0.0002	0.0000	0.0020	0.0000
6	0.1175	0.3182	0.3497	0.5243	0.1919	0.3152	0.0088	0.0786	0.9486	0.3001
7	0.0116	0.0265	0.0000	0.0001	0.0002	0.7968	0.0022	0.0000	0.0093	0.0000
8	0.6587	0.2806	0.0002	0.0001	0.0020	0.4858	0.0024	0.0000	0.6404	0.0000
9	0.3073	0.0002	0.0000	0.0001	0.1341	0.1042	0.0045	0.0000	0.0175	0.0000
10	0.0082	0.0218	0.0000	0.0000	0.0092	0.7435	0.0017	0.0000	0.0043	0.0000
11	1.0000	0.0008	0.4220	0.0150	0.2835	0.4086	0.4020	0.0878	0.0121	0.0705
12	0.0008	1.0000	0.0757	0.0203	0.0006	0.9787	0.0291	0.0931	0.2336	0.0000
13	0.4220	0.0757	1.0000	0.0008	0.4415	0.9836	0.0000	0.0000	0.0517	0.0000
14	0.0150	0.0203	0.0008	1.0000	0.3593	0.0316	0.0000	0.0000	0.0189	0.0000
15	0.2835	0.0006	0.4415	0.3593	1.0000	0.6187	0.1004	0.2547	0.5277	0.0000
16	0.4086	0.9787	0.9836	0.0316	0.6187	1.0000	0.8050	0.3926	0.9278	0.8569
17	0.4020	0.0291	0.0000	0.0000	0.1004	0.8050	1.0000	0.0025	0.0221	0.0000
18	0.0878	0.0931	0.0000	0.0000	0.2547	0.3926	0.0025	1.0000	0.5095	0.0000
19	0.0121	0.2336	0.0517	0.0189	0.5277	0.9278	0.0221	0.5095	1.0000	0.0328
20	0.0705	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.8569	0.0000	0.0000	0.0328	1.0000

11 PRIEDAS

Projekto tikslų ir uždavinių schema

