Kauno technologijos universitetas

Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Trupmeninių diferencialinių lygčių solitoninių sprendinių konstravimo metodai ir algoritmai

Baigiamasis magistro projektas

Inga Timofejeva

Projekto autorė

Prof. habil. dr. Minvydas Ragulskis

Vadovas

Kaunas, 2020

Kauno technologijos universitetas

Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Trupmeninių diferencialinių lygčių solitoninių sprendinių konstravimo metodai ir algoritmai

Baigiamasis magistro projektas

Taikomoji matematika (6211AX006)

Inga Timofejeva
Projekto autorė

2020.05.26

Prof. habil. dr. Minvydas Ragulskis
Vadovas

2020-05-26

Doc. Loreta Saunorienė
Recenzentas

2020 05 26

Kaunas, 2020

Kauno technologijos universitetas

Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Inga Timofejeva

Trupmeninių diferencialinių lygčių solitoninių sprendinių konstravimo metodai ir algoritmai

Akademinio sąžiningumo deklaracija

Patvirtinu, kad mano, Ingos Timofejevos, baigiamasis projektas tema „Trupmeninių diferencialinių lygčių solitoninių sprendinių konstravimo metodai ir algoritmai" yra parašytas visiškai savarankiškai ir visi pateikti duomenys ar tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti sąžiningai. Šiame darbe nei viena dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar internetinių šaltinių, visos kitų šaltinių tiesioginės ir netiesioginės citatos nurodytos literatūros nuorodose. Įstatymų nenumatytų piniginių sumų už šį darbą niekam nesu mokėjęs.

Aš suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo faktui, man bus taikomos nuobaudos, remiantis Kauno technologijos universitete galiojančia tvarka.

Inga Timofejeva
(vardą ir pavardę įrašyti ranka)

(parašas)

Turinys

Paveikslų sąrašas

Timofejeva, Inga. Trupmeninių diferencialinių lygčių solitoninių sprendinių konstravimo metodai ir algoritmai. Magistro baigiamasis projektas / vadovas prof. habil. dr. Minvydas Ragulskis; Kauno technologijos universitetas, Matematikos ir gamtos mokslų fakuktetas.
Studijų kryptis ir sritis (studijų krypčių grupė): Matematika (N 001), Gamtos mokslai (N 000).
Reikšminiai žodžiai: solitoninė banga, trupmeninė diferencialinė lygtis, operatorinis skaičiavimas
Kaunas, 2020. 57 p.

Santrauka

Šis baigiamasis projektas siekia apjungti dvi didelę taikomąją vertę turinčias mokslo sritis: solitoninių bangų teoriją bei trupmeninės eilės diferencialinį ir integralinį skaičiavimą. Solitonai - išskirtiniu stabilumu bei dalelės savybėmis pasižyminčios bangos, plačiai taikomos daugelyje mokslo sričių (optika, hidrodinamika, biofizika, medicina ir kt.), tiriančių netiesinius dinaminius modelius. Trupmeninės eilės diferencialinis ir integralinis skaičiavimas – koncepcija, apibendrinanti klasikinių diferencijavimo bei integravimo operatorių eilę bei leidžianti modeliuoti realaus pasaulio reiškinius tiksliau negu tradicinis sveikosios eilės analogas. Kadangi abi šios mokslinės sritys yra pakankamai naujos, jas apjungiantis solitoninių sprendinių egzistavimo trupmeninės eilės diferencialinėse lygtyse klausimas beveik nėra ištirtas ir reikalauja išsamesnės analizės bei naujų tyrimo technikų. Todėl, šio baigiamojo projekto metu buvo siekiama išvystyti trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių sprendinių analizei skirtą metodologiją, taikytiną solitoniniams sprendiniams tirti. Darbo eigoje buvo pasiūlyta technika, pagrįsta charakteringosios paprastosios diferencialinės lygties, atitinkančios pradinę trupmeninę diferencialinę lygtį, konstravimu (kai charakteringoji lygtis egzistuoja). Tuomet, analiziniai trupmeninės diferencialinės lygties sprendiniai išreiškiami begalinių funkcijų eilučių pavidalu. Darbe pristatytas šių eilučių konvergavimo sričių praplėtimo algoritmas, bei išplėtimas į neigiamąją argumento pusašę, kurio metu sprendinys „išsišakoja“ į keletą skirtingų kompleksinių sprendinių. Siūlomos metodikos efektyvumui iliustruoti buvo ištirta trupmeninės eilės Rikati diferencialinė lygtis ir prieita prie išvados, kad šios lygties solitoniniai sprendiniai artėja prie paprastosios diferencialinės lygties sigmoidinio solitoninio sprendinio, kai pradinė sąlyga, atitinkanti pradinę trupmeninės išvestinės reikšmę, artėja prie nulio.

Timofejeva, Inga. Methods and algorithms for the construction of solitary solutions to fractional differential equations. Master's Final Degree Project / supervisor Prof. Dr. Habil. Minvydas Kazys Ragulskis; Faculty of mathematics and natural sciences, Kaunas University of Technology.
Study field and area (study field group): Mathematics (N 001), Natural sciences (N 000).
Keywords: solitary wave, fractional differential equation, operator calculus
Kaunas, 2020. 57 pages.

Summary

This final degree project aims to combine two highly applicable scientific fields: solitary wave theory and fractional calculus. Solitons are waves with exceptional stability and particle properties, widely used in many fields of science (optics, hydrodynamics, biophysics, medicine, etc.) that study nonlinear dynamic models. Fractional calculus is a concept that generalizes the order of classical differentiation and integration operators and allows to model real-world phenomena with more accuracy than using traditional calculus. Since both of these scientific fields are relatively new, the question of the existence of solitary solutions to fractional differential equations is almost unexplored and requires more detailed analysis and new research techniques. Thus, the aim of this final degree project was to develop an analytical framework for the analysis of solutions to *Caputo* fractional differential equations, applicable in the case of solitary solutions. Proposed technique is based on the construction of the characteristic ordinary differential equation corresponding to the original fractional differential equation (when the characteristic equation exists). Analytic solutions to fractional differential equation are then expressed in the form of infinite function series. This thesis presents an algorithm for the analytical continuation of such series as well as its extension to the negative half-line which results in solution branching out into several different complex solutions. In order to illustrate the efficacy of the proposed scheme, fractional Riccati differential equation was investigated and it was shown that the solitary solutions of this equation approach the kink solution of the ordinary Riccati differential equation as the initial condition corresponding to the fractional derivative value approaches zero.

Įvadas

Pastaruoju metu matematinėje bendruomenėje matomas didelis susidomėjimas tikslių diferencialinių lygčių sprendinių paieška, sąlygotas kompiuterinės algebros programinės įrangos patobulėjimo ir paplitimo. Analiziniai sprendiniai suteikia vertingą informaciją apie nagrinėjamos dinaminės sistemos ypatybes, kurios negalėtume įžvelgti skaitiniais metodais suformuotoje reikšmių lentelėje. Tikslių diferencialinių lygčių sprendinių paieškos metodai taip pat pasitarnauja norint nustatyti ar tiriamas modelis turi specifinėmis savybėmis pasižyminčių sprendinių. Pavyzdžiui, per pastarąjį šimtmetį buvo pademonstruota, jog daugelis optikoje, hidrodinamikoje, biofizikoje, medicinoje bei kitose mokslo srityse analizuojamų netiesinių dinaminių sistemų turi išskirtiniu stabilumu bei dalelės savybėmis pasižyminčius sprendinius – solitonus. Solitoninės bangos gali judėti dideliais atstumais nekeičiant savo formos ar greičio ir nepakinta net po susidūrimo su kitu solitonu. Todėl solitoninių sprendinių paieškos netiesiniuose modeliuose uždavinys yra reikšmingas tiek iš teorinės (solitoninių bangų egzistavimo bei savybių matematinis pagrindimas) tiek iš praktinės taikymo pusės. Kita vertus, vystantis diferencialinių lygčių sprendinių konstravimo bei analizės metodams, atsiranda noras tobulinti ir pačius modelius, kad pavyktų kuo tiksliau aprašyti realaus pasaulio reiškinius matematine kalba. Pastaraisiais dešimtmečiais buvo pastebėta, kad šį patikslinimą galima pasiekti taikant trupmeninės eilės diferencialinio bei integralinio skaičiavimo teoriją, išplečiančią klasikinių diferencijavimo bei integravimo operatorių eilę iki realiųjų arba kompleksinių skaičių aibės. Trupmeninės eilės modeliai yra pranašesni už paprastąsias ar dalinių išvestinių diferencialines lygtis, kadangi jais remiantis gali būti modeliuojamos sistemos „su atmintimi“, kuriose dabartinė sistemos būsena priklauso nuo sistemos savybių praeityje. Tačiau, kadangi ši sritis yra dar pakankamai nauja, solitoninių sprendinių egzistavimo trupmeninės eilės diferencialinėse lygtyse klausimas beveik nėra ištirtas ir reikalauja išsamesnės analizės bei naujų tyrimo technikų.

Taigi, šio baigiamojo darbo tikslas: išvystyti trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių sprendinių analizei skirtą metodologiją, taikytiną solitoniniams sprendiniams tirti.

Iškeltam tikslui pasiekti baigiamojo projekto metu buvo suformuluoti uždaviniai:

1. Trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių su daugianario tipo netiesiškumu begalinės laipsninės eilutės forma išreikštų sprendinių, atitinkančių teigiamas argumento reikšmes, konstravimas bei jų konvergavimo sričių praplėtimas.
2. Trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių su daugianario tipo netiesiškumu sprendinių išplėtimas į neigiamąją argumento pusašę.
3. Pasiūlytos metodologijos pritaikymas trupmeninės eilės Rikati diferencialinės lygties solitoniniams sprendiniams tirti.

1. Literatūros apžvalga

1.1. Solitoninės bangos ir jų taikymai

1.1.1. Solitoninės bangos (solitono) sąvoka

Matematikos bei fizikos moksluose solitoninė banga yra apibrėžiama kaip lokalizuota banga, kurią sąlygoja pusiausvyra tarp netiesinių ir dispersinių efektų. Solitoninės bangos dažnai vadinamos solitonais, kadangi joms būdingos šios dalelių savybės (Scott 2006):

1. Solitonas išlaiko savo formą judėdamas pastoviu greičiu;
2. Po susidūrimo su kitu solitonu abiejų bangų charakteristikos (amplitudė, greitis, forma, t.t.) nepakinta, išskyrus, galbūt, fazės pokytį.

Solitoninės bangos atsiranda tiek nagrinėjant tolydžiuosius modelius (pvz. *KdV* lygtis), tiek ir diskrečiasias sistemas (Toda 1993) su viena ar daugiau erdvės dimensijų.

1.1.2. Solitoninių bangų atradimo istorija

Pirmasis 1834 metais solitoninę bangą pastebėjo škotų jūrų laivyno architektas ir inžinierius John Scott Russell (Russell 1845). Kai vandens kanale viena iš baržų susidūrė su povandenine kliūtimi ir staiga sustojo, J. S. Russell tikėjosi pamatyti, kaip banga, atsiradusi laivo priekyje, išsiskaidys į daugybe mažesnių bangelių dėl dispersijos. Tačiau, užuot, jis išvijo kaip iš putų iškilo pusės metro aukščio varpo formos ketera. Jodamas ant arklio J. S. Russell sekė nesikeičiančią, vienodai sklindančią keterą keletą kilometrų, kol pametė ją „kanalo vingiuose“. J. S. Russell pavadino stebėtą reiškinį „perkėlimo banga“ (angl. „wave of translation“).

Netrukus, J. S. Russell atliko seką eksperimentų laboratorijoje, kurių metu pats išmoko sukelti solitonines bangas ilgame, siaurame vandens rezervuare (Russell 1845). Jis pastebėjo, jog numetus į vandenį kvadratinį bloką, atsiranda lokalus vandens susvyravimas, kuris greitai susiskirsto į vieną ar daugiau solitoninių bangų ir po jų sekančių mažesnių išsisklaidančių bangelių. Įvertinęs šį reiškinį kiekybiškai, J. S. Russell priėjo prie tokių išvadų (Russell 1845):

1. Mokslininko stebėtos bangos turėjo hiperbolinio sekanto formą;
2. Pakankamai didelė pradinė vandens masė gali sukelti dvejas ar daugiau nepriklausomų „beveik-solitoninių“ (angl. „near-solitary“) bangų, kurios yra atskirtos laiku.
3. Solitoninės bangos gali kirsti viena kitą nekisdamos.

4. Seklaus vandens kanale, kurio aukštis h, solitoninė banga, kurios amplitudė A, sklinda greičiu $\left(g(A+h)\right)^{1/2}$ (čia g – gravitacijos pagreitis). Taigi, didesnės amplitudės bangos juda greičiau už „žemesnes“ bangas (netiesiškumo efektas).

Po 40 metų, britų mokslininkas Rayleigh (Rayleigh 1876) bei pranzūcų matematikas ir fizikas Boussinesq nepriklausomai paskelbė matematines teorijas, palaikančias J. S. Russell eksperimentinius stebėjimus, kuriose parodė, kad tokio tipo solitoninė banga $u(x,t)$ gali būti apytiksliai aprašoma dviejų argumentų (x atitinka koordinatę, t - laiką) funkcija:

$$u(x,t) \approx \text{konstanta} \cdot B^2 \operatorname{sech}^2\left(B(x-ct)\right), \tag{1.1.1}$$

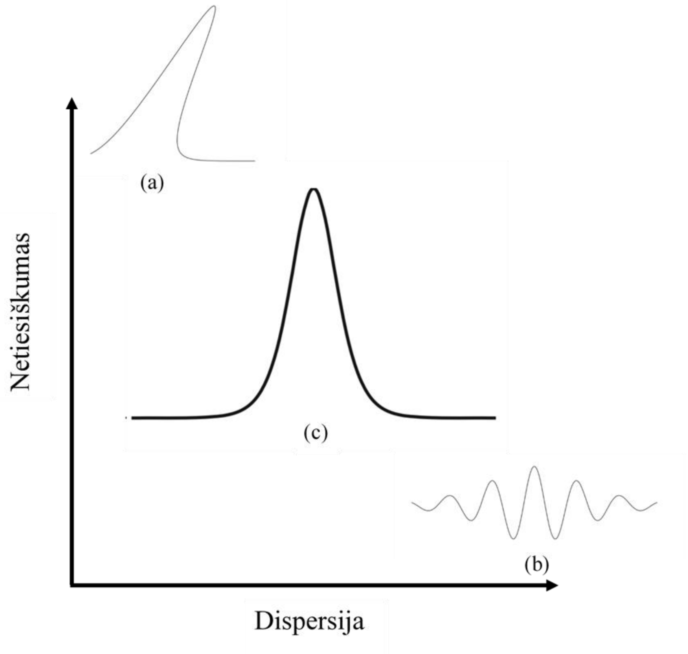
čia c – fazinis greitis, proporcingas B^2, B – teigiamas parametras, tuo pačiu metu valdantis solitoninės bangos plotį, greitį bei amplitudę.

Olandų matematikai D. Korteweg ir G. de Vries 1895 m. modeliuodami bangų sklidimą seklaus vandens paviršiumi (de Vries, Korteweg 1895) išvedė dalinių išvestinių diferencialinę lygtį, kuri jų manymu galėtų paaiškinti J. S. Russell gautus rezultatus. Mokslininkai padarė prielaidą, kad kiekvienam pjūvyje, statmename bangos sklidimo krypčiai, bangos aukštis yra pastovus (kaip buvo pastebėta J. S. Russell eksperimentų metu), o horizontalioji vandens srovė nepriklauso nuo gylio (seklaus vandens aproksimacija). Taigi, vienintelė netrivialioji erdvinė koordinatė yra ašyje, esančioje išilgai kanalo (arba vandens rezervuaro). Remiantis šiomis prielaidomis mokslininkai pasiūlė modelį, gerai žinomą kaip *Korteweg – de Vries* (*KdV*) lygtis:

$$u'_t + u'_{xxx} + 6uu'_x = 0. \tag{1.1.2}$$

Lygtis (1.1.2) parodo, kad bangos aukščio pokyčio greitį laike lemia dviejų dėmenų suma: netiesinio (amplitudės efektas) ir dispersinio (efektas, dėl kurio skirtingo bangos ilgio bangos sklinda skirtingais greičiais). D. Korteweg ir G. de Vries rado periodinį lygties sprendinį bei solitoninį sprendinį, atitinkantį bangą, kurią apibūdino J. S. Russell. Tokio tipo sprendiniai atsiranda pusiausvyros tarp netiesiškumo ir dispersijos pasekmėje (žr. 1 pav.).

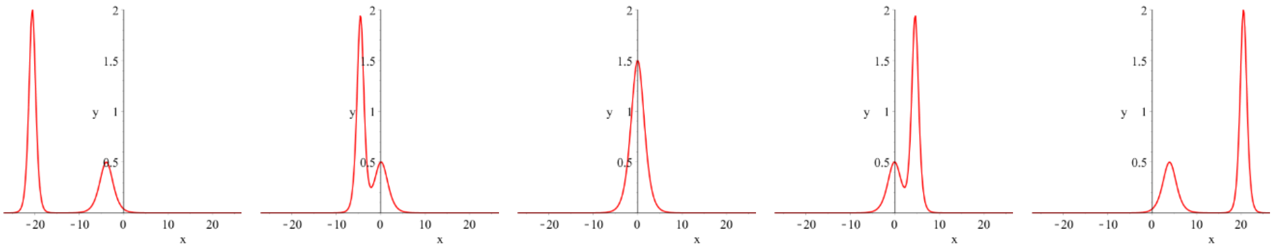
Šiais laikais, *KdV* lygtis jau yra tapusi klasikiniu, bendro pobūdžio modeliu, kurį galima išvesti ilgoms bangoms su nedideliu netiesiškumu įvairiuose fizikos ir inžinerijos mokslų kontekstuose, o ne tik hidrodinamikoje. Tačiau, net 70 metų po KdV lygties išvedimo, D. Korteweg, G. de Vries darbai ir J. S. Russell pastebėjimai buvo ignoruojami matematikų, fizikų bei inžinierių.



1 pav. Netiesiškumo bei dispersijos įtaka bangos formai. (a) dalyje stebime didelį netiesiškumą, bet mažą dispersiją. Taigi, matome lūžtančią bangą. (b) dalis iliustruoja atvirkščią efektą: esant mažam netiesiškumui, bet didelei dispersijai gaunamas bangų paketas. Kuomet netiesiškumas ir dispersija vienas kitą atsveria, stebime solitoninės bangos fenomeną, pavaizduotą (c) dalyje.

Sekantis reikšmingas proveržis solitoninių bangų istorijoje įvyko 1965 m., kai amerikiečių mokslininkai N. Zabusky ir M. Kruskal skaitiškai suintegravo *KdV* lygtį erdvės atžvilgiu periodinėje integravimo srityje ir pastebėjo (Zabusky, Kruskal 1965), kad pradinė didelės amplitudės glodi sinusoidinė banga išsiskaido į solitoninių bangų seką. Šios bangos sklinda pastoviais greičiais bei susiduria viena su kita neprarasdamos energijos, tarsi elementarios dalelės. Kadangi fizikoje įprasta naudoti priesagą "onas" norint pabrėžti dalelės savybes (pvz. elektronas, fotonas ir t.t.), N. Zabusky ir M. Kruskal pasiūlė pavadinimą „solitonas", kuris šiais laikais yra naudojamas kaip solitoninės bangos sinonimas.

Po dviejų metų, kartu su mokslininkais C. S. Gardner, J. M. Green ir R. M. Miura, M. Kruskal pristatė atvirkštinį sklaidos metodą (angl. inverse scattering method) (Kruskal et al. 1967), leidžiantį išspręsti netiesinę *KdV* lygtį analitiškai. Šio metodo atradimas leido teoriškai išanalizuoti KdV lygties solitoninių sprendinių ypatumus. Paaiškėjo, kad *KdV* lygties atskirus sprendinius sudaro atsitiktinis skaičius N skirtingo dydžio solitoninių bangų. „Aukštosios" solitoninės bangos lenkia „žemesnius" solitonus, elastingai (neprarandant energijos) susiduria ir grįžta į savo pradines formas (pradinės amplitudės bei pločiai). Šis efekto pavyzdys yra pademonstruotas 2 pav. Taigi, teoriniai pastebėjimai patvirtino skaitiškai gautus rezultatus. Be to, buvo pastebėta, kad bendrasis *KdV* lygties sprendinys susideda iš dviejų dalių: baigtinio skaičiaus solitoninių bangų ir dispersinės bangos. Bent viena solitoninė banga atsiranda net prie ypatingai „nesolitoninių" pradinių sąlygų, tokių kaip iš laivo priekio sklindanti banga, stebėta J. S. Russel. Srautas arba spontaniškai didėja arba išsisklaido tokiu būdu, kad susidarytų tiksli netiesiškumo ir dispersijos pusiausvyra (sudaranti solitoninės bangos pagrindą) net tuo atveju, kai šie du konkuruojantys mechanizmai iš pradžių yra visiškai nesubalansuoti.



(a) (b) (c) (d) (e)

2 pav. KdV lygties (1.1.2) dviejų pikų (angl. two-soliton) solitoninis sprendinys, t.y. sudarytas iš dviejų solitoninių bangų. Dalys (a)-(e) atitinka laiko momentus $t = -5, -1, 0, 1, 5$. Matome, kad bėgant laikui, didesnės amplitudės solitoninė banga, judėdama didesniu greičiu, pasiveja mažesnės amplitudės solitoną, susilieja su juo susidūrimo metu ir pralenkia jį nepakeisdama savo formos. Mažesnės amplitudės solitonas taip pat nepakeičia savo formos po susidūrimo.

1.1.3. Solitoninių bangų taikymai

Nuo solitoninių bangų atradimo iki šių dienų buvo ištirta daugybė įvairių solitonų rūšių (sigmoidiniai solitonai, oscilonai, kvėpuokliai ir kt.) sistemose su viena ar daugiau erdvės dimensijų. Mokslininkų buvo pademonstruota, kad daugelį fizinių sistemų galima gana sėkmingai modeliuoti naudojant lygtis, turinčias solitoninius sprendinius. Solitonai yra plačiai taikomi netiesinėje optikoje, analizuojant tiek erdvines (angl. spatial) bangas, kuriose netiesiškumas atsveria difrakciją, tiek laiko (angl. temporal) bangas, kuriuose netiesiškumas atsveria dispersiją (Agrawal 2000; Porter 2009; Scott 2006); teoriškai bei eksperimentų būdu tiriant *Bose–Einstein* kondensatus (Kevrekidis et al. 2007); hidrodinamikoje, nagrinėjant vandens bangų savybes (Whitham 2011); biofizikoje ir neuromoksle, pasitelkiant solitonines bangas įvairių biofizinių reiškinių pagrindimui (pvz. žymus *Hodgkin-Huxley* modelis) (Heimburg, Jackson 2005); klasikinėje ir kvantinėje lauko teorijoje (Deligne et al. 1999); informacijos perdavimo moksle, teoriškai bei praktiškai tiriant stabilių solitoninių bangų panaudojimo šviesolaidžiuose privalumus (Liu et al. 2017) ir t.t.

1.2. Diferencialinių lygčių solitoninių sprendinių paieškos metodai

Solitonas – banga, turinti išskirtines stabilumo savybes, atveriančias naują požiūrį į daugelį netiesinių dinaminių sistemų. Natūralu, kad siekiant susidaryti pilną vaizdą apie solitoninių bangų ypatumus, svarbu ištirti solitonų savybes analitiškai. Tačiau, šiam tikslui pasiekti būtina pirmiausia išvystyti metodikas, leidžiančias konstruoti netiesinių diferencialinių lygčių solitoninius sprendninius, jeigu tokie egzistuoja. Toliau yra patiekiami žinomiausi tokio pobūdžio algoritmai, pasiūlyti besivystant solitonų mokslui.

Vienas iš svarbiausių atradimų matematinės fizikos srityje XX a. buvo **atvirkštinės sklaidos transformacijos** (angl. inverse scattering transform) metodas, pasiūlytas mokslininkų C. S. Gardner, J. M. Green, R. M. Miura ir M. Kruskal netiesinių dalinių išvestinių diferencialinių lygčių solitoniniams sprendiniams rasti (Kruskal, Gardner, Green ir Miura 1967). Šis metodas pirmiausiai buvo pritaikytas *Korteweg–de Vries* lygčiai, tačiau netrukus buvo išplėstas ir leido tiksliai išspręsti netiesinę *Schrödinger* lygtį, *sine-Gordon* lygtį, *Toda* gardelės lygtį ir kt. Atvirkštinės sklaidos transformacijos metodas yra netiesinis *Fourier* transformacijos, plačiai taikomos tiesinių dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sprendimui, analogas. Šio metodo taikymas gali būti išskaidytas į tris pagrindinius žingsnius:

1. Tiesioginės sklaidos (angl. forward scattering) transformacijos taikymas. Šį žingsnį apima *Lax* poros, atitinkančios nagrinėjamą diferencialinę lygtį, paieška. Tinkamą *Lax* porą sudaro du tiesiniai operatoriai, $\mathbf{L}$ ir $\mathbf{M}$, tenkinantys lygybes

$$\mathbf{L}v = \lambda v; \qquad v_t' = \mathbf{M}v; \qquad \mathbf{L}_t' + \mathbf{LM} - \mathbf{ML} = 0 \tag{1.2.1}$$

   Trečioji lygybė, vadinama *Lax* lygtimi, užtikrina, kad tikrinė reikšmė λ bus nepriklausoma nuo laiko, t.y. $\lambda_t' = 0$.

2. Sklaidos duomenų nustatymas. Šiame etape yra įvertinamas tikrines reikšmes λ atitinkančių tikrinių funkcijų kitimas laike (apibrėžiamas paprastųjų tiesinių diferencialinių lygčių sistema), normavimo konstantos bei atspindžio koeficientai.

3. Atvirkštinės sklaidos transformacijos taikymas. Antrajame žingsnyje gauti sklaidos duomenys yra panaudojami *Gelfand-Levitan-Marchenko* tiesinei integralinei lygčiai spręsti. Gautas sprendinys atitinka pradinės netiesinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties sprendinį.

Taigi, atvirkštinės sklaidos transformacijos metodo pagrindą sudaro netiesinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties redukcija į tiesinę integralinę lygtį. Svarbu pažymėti, kad *Lax* poros paieška konkrečiai netiesinei diferencialinei lygčiai yra gana sudėtingas uždavinys, kadangi universalaus paieškos algoritmo nėra ir kiekviena nauja lygtis reikalauja išsamios teorinės analizės (Infeld, Rowlands 2000).

1971 m. japonų mokslininkas R. **Hirota** pasiūlė **tiesioginį metodą** (angl. Hirota direct method) integruojamų netiesinių diferencialinių lygčių aukštesnės eilės solitoniniams sprendiniams konstruoti

(Hirota 1971). Šio metodo pagrindą sudarė pradinės diferencialinės lygties transformavimas įvedant naujus kintamuosius, kurie suteiktų aukštesnės eilės solitoniniams sprendiniams paprastesnę formą. Metodas pasirodė esąs labai efektyvus ir neužilgo buvo pritaikytas *Korteweg–de Vries, sine-Gordon* bei netiesinei *Schrödinger* lygčiai spręsti. Toliau pademontuosime šio metodo veikimo principą *Korteweg–de Vries* lygties (1.1.2) pavyzdžiu.

Pirmiausia įvedama priklausomo kintamojo *Hirota* transformacija:

$$u(x,t) = 2\partial_{xx} \ln\big(F(x,t)\big) \tag{1.2.2}$$

Įstačius keitinį (1.2.2) į lygtį (1.1.2) gauname:

$$F''_{xt}F - F'_xF'_t + F''''_{xxxx}F - 4F'''_{xxx}F'_x + 3(F''_{xx})^2 = 0 \tag{1.2.3}$$

Pastebėsime, kad lygtis (1.2.3) turi homogeninę bei bitiesinę formą. Toliau, įvedamas *Hirota* bitiesinis operatorius ${}^{H}\mathbf{D}$, tenkinantis tokius sąryšius:

$$\begin{gathered}
{}^{H}\mathbf{D}_x^m\big({}^{H}\mathbf{D}_t^n(G\cdot F)\big) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^n G(x,t)F(x',t')\bigg|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}. \\
{}^{H}\mathbf{D}_x\big({}^{H}\mathbf{D}_t(F\cdot F)\big) = 2(FF''_{xt} - F'_xF'_t), \\
{}^{H}\mathbf{D}_x^2(F\cdot F) = 2(FF''_{xx} - (F'_x)^2), \\
{}^{H}\mathbf{D}_x^2(F\cdot F) = 2(FF''''_{xxxx} - 4F'_xF'_{xxx} + 3(F''_{xx})^2).
\end{gathered} \tag{1.2.4}$$

Panaudojus šį operatorių, lygtį (1.2.3) galime pertvarkyti tokiu būdu:

$$({}^{H}\mathbf{D}_x{}^{H}\mathbf{D}_t + {}^{H}\mathbf{D}_x^4)(F\cdot F) = 0. \tag{1.2.5}$$

Gautoji bitiesinė lygtis (1.2.5) gali būti išspręsta perturbacijos metodu (Hirota 1971). Pagrindinis *Hirota* tiesioginio metodo privalumas prieš kitus metodus (pvz. atvirkštinės sklaidos transformacijos metodą) yra tai, jog šio metodo prigimtis yra labiau algebrinė negu analitinė. Šis metodas dažnai taikomas analizės pradžioje tikrinant diferencialinės lygties integruojamumą. Iš kitos pusės, šis algoritmas turi analogišką trūkumą kaip ir atvirkštinės sklaidos metodas, kadangi diferencialinės lygties suvedimas į bitiesinę formą (analogišką lygčiai (1.2.5)) , sudarantis šio metodo pagrindą, yra gana sudėtingas uždavinys, kuriam nėra sukurto universalaus algoritmo.

Kitas metodas netiesinių diferencialinių lygčių solitoniniams sprendiniams konstruoti buvo pristatytas 1980-aisiais m. mokslininko V. B. Matveev (Matveev 1979). Šis metodas besiremia prancūzų matematiko J. G. Darboux įvestos ***Darboux* transfomacijos** taikymu. 1882 m. J. G. Darboux tyrė antros eilės tiesinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties tikrinių reikšmių uždavinį (Darboux 1882). Dabar ši lygtis yra žinoma kaip vienadimensinė *Schrödinger* lygtis:

$$-\phi''_{xx} - u(x)\phi = \lambda\phi, \tag{1.2.6}$$

čia $u(x)$ – žinoma potencialo funkcija; λ – konstanta, vadinama spektriniu parametru. J. G. Darboux pastebėjo, kad jeigu funkcijos $u(x)$ ir $\phi(x,\lambda)$ tenkina (1.2.6), o $f(x) = \phi(x,\lambda_0)$ yra lygties (1.2.6) sprendinys prie $\lambda = \lambda_0$ (čia λ_0 yra fiksuota konstanta), tuomet funkcijos $\tilde{u}$ ir $\tilde{\phi}$, apibrėžtos sąryšiais

$$\tilde{u} = u + 2(\ln(f))''_{xx}, \quad \tilde{\phi}(x,\lambda) = \phi'_x(x,\lambda) - \frac{f_x}{f}\phi(x,\lambda), \tag{1.2.7}$$

tenkina lygybę

$$-\tilde{\phi}''_{xx} - \tilde{u}\tilde{\phi} = \lambda\tilde{\phi}, \tag{1.2.8}$$

turinčią tokią pat formą, kaip ir (1.2.6). Taigi, transformacija (1.2.7) transformuoja funkcijas (u,ϕ) į funkcijas $(\tilde{u},\tilde{\phi})$, kurios tenkina tą pačią pradinę lygtį. Ši transformacija buvo pavadinta *Darboux* transformacija. Natūralu, jos ši transformacija galioji tik tuomet, kai $f \neq 0$.

Mokslininkas V. B. Matveev pastebėjo, kad *KdV* lygtis (1.1.2) sudaro toliau pateiktos tiesinės diferencialinių lygčių sistemos, žinomos kaip *KdV* lygties *Lax* pora, integruojamumo sąlygą:

$$-\phi''_{xx} - u\phi = \lambda\phi, \tag{1.2.9}$$

$$\phi_t = -4\phi'''_{xxx} - 6u\phi'_x - 3u'_x\phi. \tag{1.2.10}$$

Kadangi pirmoji *Lax* poros lygtis atitinka vienadimensinę *Schrödinger* lygtį (1.2.6), *Darboux* transformacija (1.2.7) gali būti pritaikyta ir *KdV* lygčiai. Natūralu, kad funkcijos $(\tilde{u},\tilde{\phi})$ tenkina (1.2.9). Be to, nesudėtinga įsitikinti, kad funkcijų pora $(\tilde{u},\tilde{\phi})$ taip pat tenkina (1.2.10). Iš to seka, kad funkcija $\tilde{u}$ yra *KdV* lygties sprendinys. Tarkime, kad yra žinomas bent vienas *KdV* lygties sprendinys u. Išsprendę tiesinių diferencialinių lygčių $(1.2.9, 1.2.10)$ sistemą gausime funkciją $\phi(x,t,\lambda)$. Parinkę parametro λ reikšmę λ_0 ir tarę, kad $f(x,t) = \phi(x,t,\lambda_0)$ gausime naują *KdV* lygties sprendinį $\tilde{u} = u + 2(\ln(f))''_{xx}$, bei jį atitinkančią antrąją *Lax* poros funkciją $\tilde{\phi}$. Taigi, šis algoritmas leidžia rekursiškai konstruoti naujus *KdV* lygties solitoninius sprendinius. Buvo pastebėta, kad *Darboux* transformacijos metodas gali būti analogiškai pritaikytas ir kitoms netiesinėms diferencialinėms lygtims. Tačiau, kaip ir anksčiau pristatytų metodų atvejais, *Darboux* transformacijos, atitinkančios konkrečią analizuojamą diferencialinę lygtį, paieška yra netrivialus ir neautomatizuojamas uždavinys, reikalaujantis išsamios analizės.

Panašaus pobūdžio į *Darboux* transformaciją metodas, pristatytas 1976 m. amerikiečių matematiko R. C. Hermann (Hermann 1976), remiasi ***Bäcklund*** **transformacija**. Šios transformacijos koncepcija buvo pasiūlyta 1880-aisiais m. mokslininkų L. Bianchi ir A.V. Bäcklund (Bäcklund 1875) diferencialinės topologijos srityje kaip pirmoji netriviali transformacija tarp pseudosferinių paviršių (pvz.: *sine-Gordon* lygties sprendiniai). Tiesioginė *Bäcklund* transformacija atvaizduoja netiesinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį į kitą dalinių išvestinių diferencialinę lygtį, kurios sprendinys privalo tenkinti pradinę lygtį. Tuo tarpu, *auto-Bäcklund* transformacija suriša tos pačios lygties sprendinius ir suteikia galimybę transformuoti žinomą diferencialinės lygties sprendinį į naują sprendinį baigtinį skaičių kartų. Pagrindinis šio metodo privalumas prieš analogišką *Darboux* transfomacijos, taikytinos tik tiesinėms diferencialinėms lygtims (atitinkančioms pradinės netiesinės lygties *Lax* porą) algoritmą yra tai, jog *auto-Bäcklund* transformacija gali būti tiesiogiai panaudojama netiesinei diferencialinei lygčiai be papildomų šios lygties pertvarkymų. Deja, iki šiol nėra sukurtas sistematizuotas *Bäcklund* transformacijų generavimo metodas, todėl šis solitoninių sprendinių generavimo būdas reikalauja papildomų teorinių tyrimų.

Kitas netiesinių diferencialinių lygčių solitoninių sprendinių konstravimo metodas buvo sukurtas 1992 m. kinų matematiko Liao Shijun ir pavadintas **homotopijos analizės metodu** (angl. homotopy analysis method, HAM) (Liao 1992). Tai yra pusiau analitinė technika, apjungianti tradicinį perturbacijos metodą bei homotopijos koncepciją, naudojamą topologijos moksle. Šio metodo taikymo eigoje gaunama laipsninė eilutė, kuri bendruoju atveju konverguoja į tikslųjį nagrinėjamos netiesinės sistemos sprendinį. Todėl, HAM taip pat apima konvergavimo kontrolės parametro, reguliuojančio konvergavimo sritį bei greitį, analizę. Svarbu pažymėti, kad šio metodo taikymas reikalauja didelio kieko simbolinio tipo skaičiavimų atlikimo. Todėl šis metodas paprastai yra realizuojamas pasitelkiant kompiuterinės algebros programinę įrangą.

Sekančiai netiesinių diferencialinių lygčių analizinių sprendinių paieškos technikų klasei priklauso šie metodai: eksponentinių funkcijų metodas (He, Wu 2006), $\tanh(\,)$ funkcijų metodas (Parkes, Duffy 1996), Jakobio elipsinių funkcijų metodas (Parkes et al. 2002), G'/G išplėtimo metodas (Wang et al. 2008), transformuotų racionaliųjų funkcijų metodas (Ma, Lee 2009), paprasčiausios lygties metodas (Kudryashov 2005) bei šių technikų patobulinimai. Visų šių metodų veikimo principą galima suskirstyti į 5 žingsnius:

1. Tarkime, kad duota netiesinė dalinių išvestinių diferencialinė lygtis funkcijos $u(x,t)$ atžvilgiu:

$$F(u, u'_t, u'_x, u''_{tt}, u''_{xt}, u''_{xx}, \dots) = 0, \tag{1.2.11}$$

2. Įvedus banginį keitinį $u(x,t) = u(\xi), \xi = x - qt$, lygtis (1.2.11) transformuojama į paprastąją diferencialinę lygtį:

$$F\left(u, -qu'_\xi, u'_\xi, q^2 u''_{\xi\xi}, -qu''_{\xi\xi}, u''_{\xi\xi}, \dots\right) = 0 \tag{1.2.12}$$

3. Daroma prielaida apie (1.2.12) sprendinio $u(\xi)$ formą. Metodo pavadinimas priklauso nuo funkcijų, kuriomis išreiškiamas sprendinys:

a) Eksponentinių funkcijų metode tariama, kad

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^{d} a_n \exp(n\xi)}{\sum_{m=-p}^{w} b_m \exp(m\xi)},$$

čia c, d, p, w – nežinomi teigiami sprendinio parametrai; a_n, b_m – nežinomi sprendinio koeficientai.

b) $\tanh(\,)$ funkcijų metode tariama, kad

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{m} a_i (\tanh(k\xi))^i,$$

čia m – nežinomas teigiamas sprendinio parametras; a_i, k – nežinomi sprendinio koeficientai.

c) Jakobio elipsinių funkcijų metode tariama, kad

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{m} a_i (\mathrm{sn}(\xi))^i,$$

čia, $\mathrm{sn}(\xi)$ – Jakobio elipsinė funkcija; m – nežinomas teigiamas sprendinio parametras; a_i – nežinomi sprendinio koeficientai.

d) G'/G išplėtimo metode tariama, kad

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\frac{G}{G'}\right)^i,$$

$$G'' + \lambda G' - \mu G = 0,$$

čia m – nežinomas teigiamas sprendinio parametras; a_i, λ, μ – nežinomi sprendinio koeficientai.

e) Transformuotų racionaliųjų funkcijų metode tariama, kad

$$u(\xi) = \frac{\sum_{j=0}^{m} p_{1j}\eta^j + \sum_{j=1}^{m} p_{2j}\eta^{j-1}\eta'}{\sum_{k=0}^{n} q_{1k}\eta^k + \sum_{k=1}^{n} q_{2k}\eta^{k-1}\eta'},$$

$$\eta' = T(\xi, \eta); \;\; \eta = \eta(\xi),$$

čia T – pasirinkta funkcija, m, n – nežinomi teigiami sprendinio parametrai; $p_{1j}, p_{2j}, q_{1k}, q_{2k}$ – nežinomi sprendinio koeficientai.

f) Paprasčiausios lygties metode tariama, kad

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{n} A_i(H(\xi))^i,$$

$$H'_\xi = aH(\xi) + bH^2(\xi),$$

čia $H(\xi)$ – funkcija, tenkinanti Bernulio arba Rikati lygtį (a, b – žinomi šios lygties koeficientai), n – nežinomas teigiamas sprendinio parametras; A_i – nežinomi sprendinio koeficientai.

4. Įstačius sprendinio keitinį (pasirinktą 3 žingsnyje) į (1.2.12) randami nežinomi sprendinio parametrai, subalansuojant laipsnius prie sprendinio ir lygties tiesinių ir netiesinių narių.

5. Suradus nežinomus parametrus, keitinys dar kartą įstatomas į lygtį ir sprendinio koeficientų atžvilgiu sudaroma algebrinių lygčių sistema, kurią išsprendus gaunamas ieškomas diferencialinės lygties (1.2.12) sprendinys.

Nepaisant to, jog dėl savo paprastumo šios netiesinių diferencialinių lygčių analizinių sprendinių paieškos technikos yra dažnai naudojamos praktikoje, literatūroje sutinkama nemažai kritikos dėl skuboto šių metodų taikymo ir dažnai pasitaikančių analitinių klaidų (Kudryashov 2009a; Kudryashov 2009b; Kudryashov, Loguinova 2009; Navickas, Ragulskis 2009; Navickas et al. 2010b).

Šiame baigiamajame darbe diferencialinių lygčių solitoniniams sprendiniams konstruoti bei analizuoti bus taikomas kiek kitoks metodas, besiremiantis apibendrinto diferencialinio operatoriaus ir tiesiškai rekurentinių sekų panaudojimu (Navickas, Bikulčiene 2006; Navickas et al. 2010a), kurio eigoje yra gaunami solitoniniai sprendiniai, išreikšti eksponentinių funkcijų arba jų baigtinių sumų santykiais. Šios technikos taikymas yra gana algoritmiškas, kas leidžia dalinai automatizuoti sprendinių paiešką pasitelkiant kompiuterinės algebros programinę įrangą. Šio metodo matematinis pagrindimas bei taikymo pavyzdžiai yra pateikiami tolimesniuose skyreliuose.

1.3. Trupmeninės eilės diferencialinio bei integralinio skaičiavimo istorija ir taikymai

1.3.1. Trupmeninės eilės diferencialinio bei integralinio skaičiavimo sąvoka

Trupmeninės eilės diferencialinis ir integralinis skaičiavimas – matematinės analizės sritis, nagrinėjantį tradicinio diferencialinio ir integralinio skaičiavimo apibendrinimą, kuomet diferencijavimo bei integravimo operatorių eilės yra išplečiamos iki realiųjų arba kompleksinių skaičių aibės. Šiame darbe bus kalbama tik apie trupmeninės eilės išvestines bei integralus. Tokio apibendrinimo pasekmėje diferencijavimo operatorius praranda lokalumo savybę, t.y. funkcijos $f(x)$ trupmeninės eilės išvestinės reikšmė taške x priklauso ne tik nuo funkcijos reikšmių, esančių taško x aplinkoje (kaip būtų tradicinės išvestinės atveju), bet ir nuo $f(x)$ reikšmių ankstesniuose taškuose (Gorenflo, Mainardi 1997). Kitais žodžiais, trupmeninės eilės operatoriai atsižvelgia į analizuojamų dinaminių sistemų praeitį. Dėl šios priežasties tokio tipo operatoriai leidžia efektyviau modeliuoti tam tikrus („nemarkoviškus") realaus pasaulio reiškinius.

1.3.2. Trupmeninės eilės diferencialinio bei integralinio skaičiavimo istorija

Gerai žinoma, kad XVII a. žymūs mokslininkai I. Newton (1642-1727) ir G. W. Leibniz (1646-1716) nepklausomai sukūrė diferencialinio ir integralinio skaičiavimo teoriją. Savo sukurtoje versijoje, G. W. Leibniz pirmas pasiūlė simbolinio metodo koncepciją bei panaudojo funkcijos $y = y(x)$ n-tosios išvestinės žymėjimą

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \mathbf{D}^n y, \tag{1.3.1}$$

kuriame n – neneigiamas sveikasis skaičius.

1695 m. rugsėjo 30 d. prancūzų matematikas G. de l'Hôpital parašė G. W. Leibniz laišką, kuriame teiravosi, kaip pasikeistų operatorius (1.3.1), jeigu prilygintume $n = \frac{1}{2}$. G. W. Leibniz atsake, jog tai sukeltų „akivaizdų paradoksą, iš kurio kada nors bus padarytos naudingos išvados". Šie vokiečių mokslininko žodžiai laikomi trupmeninės eilės diferencialinio bei integralinio skaičiavimo teorijos pradžia.

Praėjus daugiau kaip šimtui metų po G. W. Leibniz atsakymo, prancūzų matematikas S. F. Lacroix išleido diferencialinio ir integralinio skaičiavimo knygą (Lacroix 1819), kurioje išvedė funkcijos $y = x^m$ $(m \in \mathbb{N})$ n-tosios išvestinės formulę:

$$\mathbf{D}^n x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \tag{1.3.2}$$

čia $n\ (\leq m)$ – sveikasis skaičius. Pakeitęs faktorialo ženklą gama funkcija, mokslininkas gavo analogišką trupmeninės eilės išvestinės formulę:

$$\mathbf{D}^{\alpha}x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha}, \tag{1.3.3}$$

čia α, β – racionalūs (išreiškiami trupmenomis) skaičiai, o $\Gamma(\cdot)$ – gama funkcija, apibrėžiama tokiu būdu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} x^{z-1}e^{-x}dx; \quad Re(z) > 0 \tag{1.3.4}$$

ir turinti savybę $\Gamma(n) = (n-1)!$. Pritaikęs formulę (1.3.3) S. F. Lacroix apskaičiavo

$$\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\ . \tag{1.3.5}$$

Pastebėsime, kad S. F. Lacroix pasiūlė trupmeninės išvestinės pavyzdį tik funkcijoms, turinčioms išraišką $y(x) = x^{\beta}$.

Po trylikos metų, prancūzų matematikas J. Liouville savo knygoje (Liouville 1832) pateikė formalų funkcijos $y(x) = e^{ax}$ n-tosios sveikosios eilės išvestinės

$$\mathbf{D}^{n}e^{ax} = a^{n}e^{ax} \tag{1.3.6}$$

išplėtimą iki eilės $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\mathbf{D}^{\alpha}\, e^{ax} = a^{\alpha}e^{ax}. \tag{1.3.7}$$

Pritaikęs funkcijos $f(x)$ skleidinio eilute koncepciją, J. Liouville išvedė formulę:

$$\mathbf{D}^{\alpha} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^{\alpha} e^{a_n x}\,, \tag{1.3.8}$$

čia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(a_n x)\ , \mathrm{Re}(a_n) > 0. \tag{1.3.9}$$

Formulė (1.3.9) vadinama Liuvilio pirmąja trupmeninės išvestinės formule. Deja, ši formulė gali būti taikoma tik funkcijoms, turinčioms formą (1.3.9). Norėdamas išplėsti savo pirmąją trupmeninės išvestinės išraišką (1.3.8), J. Liouville pasinaudojo gama funkcijos savybe

$$\Gamma(\beta)x^{-\beta} = \int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-xt}dt; \quad \beta > 0 \tag{1.3.10}$$

ir suformulavo kitą apibrėžimą (Debnath, Speight 1971), panašų į S. F. Lacroix pasiūlytą formulę:

$$\mathbf{D}^\alpha x^{-\beta} = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta}, \qquad \beta > 0. \tag{1.3.11}$$

Formulė (1.3.11) vadinama Liuvilio antrąja trupmeninės išvestinės formule. Ši formulė gali būti naudojama tik racionalių funkcijų atvejais. Nors abu pasiūlyti apibrėžimai galioja tik pakankamai siaurai funkcijų klasei, mokslininkas sėkmingai pritaikė abi formules potencialų teorijos uždaviniams spręsti.

1858 m. mokslininkas H. R. Greer, pasinaudojęs (1.3.7), išvedė trupmeninių išvestinių formules trigonometrinėms funkcijoms. Jis pastebėjo, kad galioja sąryšis

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha\, e^{iax} &= i^\alpha a^\alpha e^{iax} = i^\alpha a^\alpha (\cos(ax) + i\sin(ax)) \\ &= a^\alpha \left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)(\cos(ax) + i\sin(ax)) \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Tuomet, funkcijų $\cos(ax)$ ir $\sin(ax)$ trupmeninės eilės išvestinės lygios:

$$\mathbf{D}^\alpha\,(\cos(ax)) = a^\alpha \left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\cos(ax) - \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\sin(ax)\right) = a^\alpha \cos\left(ax + \frac{\pi\alpha}{2}\right), \tag{1.3.13}$$

$$\mathbf{D}^\alpha\,(\sin(ax)) = a^\alpha \left(\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\cos(ax) + \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\sin(ax)\right) = a^\alpha \sin\left(ax + \frac{\pi\alpha}{2}\right). \tag{1.3.14}$$

Analogiškai yra randamos ir hiperbolinių funkcijų trupmeninės eilės išvestinės.

Pirmieji trupmeninės eilės diferencijavimo bei integravimo operatoriai, taikytini visoms funkcijoms $f(x)$ buvo pasiūlyti mokslininko B. Riemann (Riemann 1876), pasitelkiant J. Liouville paskelbtus rezultatus leidinyje (Liouville 1832). Todėl šie operatoriai yra vadinami *Riemann – Liouville* trupmeninės eilės operatoriais. Nagrinėkime tiesinę n-tosios eilės paprastąją nehomogeninę diferencialinę lygtį:

$$\mathbf{D}^n\, y(x) = f(x), \quad b \le x \le c. \tag{1.3.15}$$

Žinoma, kad $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ yra lygtį (1.3.15) atitinkančios homogeninės lygties $\mathbf{D}^n\, y = 0$ fundamentalioji sprendinių aibė. Jeigu $f(x)$ yra tolydi intervale $[b, c]$, tai su bet kokiu $a \in (b, c)$,

$$y(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1}\, f(t)\mathrm{d}t \tag{1.3.16}$$

yra diferencialinės lygties (1.3.15) atskirasis sprendinys prie pradinių sąlygų:

$$y^{(k)}(a) = 0, \qquad 0 \le k \le n-1.$$

Formulėje (1.3.16) pakeitę n trupmenine eile β ($\mathrm{Re}(\beta) \in (d-1, d]; d \in \mathbb{N}$) gausime *Riemann – Liouville* trupmeninės eilės integravimo operatoriaus apibrėžimą:

$$^{RL}\mathbf{I}_a^{\beta}(f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1} f(t)\mathrm{d}t. \tag{1.3.17}$$

Tuomet, *Riemann – Liouville* trupmeninės eilės diferencijavimo operatorius gaunamas tokiu būdu:

$$^{RL}\mathbf{D}_a^{\beta}(f(x)) = \mathbf{D}^d\left({}^{RL}\mathbf{I}_a^{d-\beta}(f(x))\right) = \frac{1}{\Gamma(d-\beta)} \frac{\mathrm{d}^d}{\mathrm{d}x^d} \int_a^x (x-t)^{d-\beta-1} f(t)\mathrm{d}t. \tag{1.3.18}$$

Nuo *Riemann – Liouville* trupmeninės eilės operatorių pasiūlymo iki šių laikų mokslininkų buvo išvestos dar dešimtys įvairių sveikos eilės išvestinių bei integralų išplėtimų, sėkmingai pritaikomų realaus pasaulio dinaminėms sistemoms modeliuoti.

Šiame darbe bus nagrinėjami matematiniai modeliai, įtraukiantys *Caputo* trupmeninės eilės diferencijavimo bei integravimo operatorius, pasiūlytus 1967 m. mokslininko M. Caputo (Caputo 1967):

$$\begin{gathered} ^{C}\mathbf{I}_a^{\beta}(f(x)) = {}^{RL}\mathbf{I}_a^{\beta}(f(x)), \\ ^{C}\mathbf{D}_a^{\beta}(f(x)) = {}^{C}\mathbf{I}_a^{d-\beta}\left(\mathbf{D}^d(f(x))\right) = \frac{1}{\Gamma(d-\beta)} \int_a^x \frac{\frac{\mathrm{d}^d}{\mathrm{d}x^d} f(u)}{(x-u)^{1-d+\beta}} \mathrm{d}u;\ x \ge a, \end{gathered} \tag{1.3.19}$$

kadangi *Caputo* apibrėžimai yra vieni dažniausiai taikomų realaus pasaulio reiškiniams modeliuoti.

1.3.3. Trupmeninės eilės diferencialinių lygčių taikymai bei sprendimo metodai

Nors trupmeninių diferencialinio skaičiavimo šaknys siekia XIX a. (Ross 1977), ši sritis sulaukė didesnio dėmesio tik pastaraisiais dešimtmečiais. Trupmeninio diferencialinio skaičiavimo bei trupmeninių diferencialinių lygčių svarbą parodo vis didesnio skaičiaus trupmeninės eilės modelių, skirtų realaus pasaulio reiškiniams modeliuoti, atsiradimas (Kilbas et al. 2006). Trumpa trupmeninių diferencialinių lygčių taikymo sričių apžvalga yra pateikiama toliau.

Trupmeninės eilės modeliai yra pranašesni už paprastąsias ar dalinių išvestinių diferencialines lygtis, kadangi jais remiantis gali būti modeliuojamos sistemos „su atmintimi“, kuriose dabartinė sistemos būsena laiko momentu $t = t_0$ priklauso nuo praeitų sistemos būsenų laiko momentais $t < t_0$. Taigi, tokio pobūdžio modeliai tinkami viskoelastinių medžiagų analizei (Adolfsson et al. 2005; Bagley, Torvik 1983). Pastebėsime, kad dauguma biologinių audinių pasižymi viskoelastinėmis savybėmis (Pal 2014), todėl trupmeninės diferencialinės lygtys yra naudojamos įvairių biomedicininių sistemų evoliucijai apibūdinti (Aghababa, Borjkhani 2014; Grahovac, Žigić 2010; Ionescu et al. 2017). Fizikoje trupmeninės eilės modeliai yra plačiai naudojami dielektrinių medžiagų (Ducharne et al. 2019; Ortega et al. 2019; Tarasov 2009) bei Bose-Einšteino kondensatų (Zhang et al. 2019) tyrimams. Trupmeninės diferencialinės lygtys taip pat yra naudojamos atminties efektui ekonominiuose modeliuose apibūdinti (Tarasov, Tarasova 2017; Tarasov, Tarasova 2018).

Dėl plataus trupmeninės eilės modelių pritaikymo buvo pasiūlyta daugybė metodų, skirtų trupmeninių diferencialinių lygčių sprendiniams konstruoti. Strapsnio (Arafa, Hagag 2019) autoriai pritaikė Q-homotopijos analizės transformacija trupmeninės susietosios Ramani lygties analiziniams sprendiniams gauti. Sveikosios eilės diferencialinių lygčių sprendiniai buvo panaudoti epidemijų plitimo modelių sprendiniams konstruoti (Demirci, Ozalp 2012) straipsnyje. Adamso tipo prediktoriaus-korektoriaus metodas, skirtas trupmeninių diferencialinių lygčių skaitiniams sprendiniams gauti, buvo aprašytas (Diethelm et al. 2002). Nauja prediktoriaus-korektoriaus metodų šeima TDL spręsti buvo aptarta (Kumar, Daftardar-Gejji 2019). Straipsnių (Pourbabaee, Saadatmandi 2019; Saadatmandi, Dehghan 2010) autoriai trupmeninių diferencialinių lygčių skaitinių sprendinių konstravimui panaudojo Legendre operatorinės matricos metodą.

Homotopijos analizės metodas buvo pritaikytas (Dehghan et al. 2010) straipsnyje trupmeninių *Korteweg-de-Vries*, *Burgers* ir *Boussinesq* modelių apytiksliams sprendiniams apskaičiuoti. Racionalių Krylovo metodų klasė, skirta dalinių išvestinių TDL skaitiniams sprendiniams konstruoti, buvo aptarta (Aceto et al. 2019). Straipsnio (Wang et al. 2019) autoriai trupmeninių diferencialinių lygčių sprendimui pritaikė tradicinį reprodukuojamo branduolio metodą. Iracionalios eilės trupmeninės diferencialinės lygtys buvo sprendžiamos (Khudair, Haddad 2017) straipsnyje, panaudojant aprėžtos transformacijos techniką. Dirbtinių neuroninių tinklų taikymas apytiksliams trupmeninių diferencialinių lygčių sprendimams konstruoti buvo aprašytas (Zúñiga-Aguilar et al. 2017).

1.4. Baigiamajame darbe naudojamų metodų ir programinės įrangos pasirinkimo pagrindimas

Kadangi baigiamojo darbo metu buvo analizuojamos netiesinės trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinės lygtys bei jų solitoniniai sprendiniai, svarbu buvo išsirinkti tinkamus metodus tokiam tyrimui atlikti.

Šiame baigiamajame darbe siūlomą metodologiją sudarė trys pagrindiniai žingsniai:

1. Netiesinės trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinės lygties suvedimas į paprastąją netiesinę diferencialinę lygtį;
2. Pirmajame žingsnyje gautos paprastosios netiesinės diferencialinės lygties solitoninių sprendinių konstravimas;
3. Pradinės trupmeninės eilės diferencialinės lygties eilutės forma išreikštų sprendinių, gaunamų transformuojant antrajame žingsnyje gautus sprendinius, konvergavimo srities praplėtimas bei analizė esant neigiamoms argumento reikšmėms.

Natūralu, kad antrajam anksčiau pateiktos metodologijos žingsniui buvo būtina išsirinkti atitinkamą paprastosios netiesinės diferencialinės lygties solitoninių sprendinių konstravimo metodą. Tokio pobūdžio technikas, aprašytas poskyryje 1.2, galima suskirstyti į dvi grupes:

1. Metodai, kurių eigoje nagrinėjama diferencialinė lygtis yra pertvarkomą į specifinę (metodui būdingą) formą, o gauta lygtis jau sprendžiama žinomais metodais (atvirkštinės sklaidos transformacijos, *Hirota* tiesioginis, *Darboux* ir *Bäcklund* transfomacijos bei homotopijos analizės metodai). Tokio pobūdžio metodai turi vieną ar abu toliau pateiktus trūkumus:
   a) metodas gali būti taikomas tik dalinių išvestinių diferencinėms lygtims;
   b) metodo taikymas bendruoju atveju yra komplikuotas, kadangi diferencialinės lygties pertvarkymas į tinkamą (metodui būdingą) formą nėra trivialus uždavinys ir kiekviena konkreti lygtis reikalauja papildomo teorinio tyrimo.
2. Metodai, kurių eigoje nagrinėjamos diferencialinės lygties solitoninio sprendinio išraiška yra „atspėjama“, o nežinomi sprendinio parametrai bei koeficientai randami įstačius „atspėtą“ išraišką į pradinę lygtį (eksponentinių funkcijų, $\tanh(\ )$ funkcijų, Jakobio elipsinių funkcijų, G'/G išplėtimo metodai ir kt.). Tokio pobūdžio metodai susilaukė nemažai kritikos dėl gaunamų sprendinių netinkamumo prie tam tikrų pradinių sąlygų bei kitų priežasčių (žr. poskyrį 1.2).

Šiame baigiamajame darbe paprastųjų netiesinių diferencialinių lygčių sprendimui bei solitoninių sprendinių konstravimui buvo pasirinktas apibendrinto diferencialinio operatoriaus bei tiesiškai rekurentinių sekų koncepcijomis besiremiantis metodas, apibrėžtas poskyryje 2.1. Šis metodas neturi anksčiau paminėtų trūkumų, yra nuodugniai ištirtas bei įrodytas bendruoju atveju, gali būti taikomas tiek paprastosioms tiek ir dalinių išvestinių diferencialinėms lygtims bei yra gana algoritmiškas.

Pirmasis bei trečiasis darbe siūlomos metodologijos žingsniai (pateikti šio poskyrio pradžioje) apėmė trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių analizinių sprendinių konstravimą bei jų konvergavimo srities praplėtimą tuo atveju kai sprendinys negali būti suvestas į „uždarąją“ formą. Skyrelyje 1.3.3 buvo paminėti metodai, naudotini trupmeninių diferencialinių lygčių sprendimui, tačiau, dėl šios mokslo srities naujumo, tokio pobūdžio technikos paprastai arba konstruoja apytikslius (skaitinius) lygties sprendinius arba tinka tik atskiriems trupmeniniams modeliams, t.y. negali būti taikomos bendruoju atveju. Šiame baigiamajame darbe anksčiau įvardintiems tikslams pasiekti buvo naudojama *Caputo* trupmeninių laipsninių eilučių koncepcija (žr. poskyrį 2.2), leidžianti užrašyti *Caputo* operatorius (1.3.19) ekvivalenčioje formoje, patogesnėje (šiame darbe sprendžiamų uždavinių atžvilgiu) trupmeninių diferencialinių lygčių analizinių sprendinių tyrimui atlikti.

Baigiamojo darbo metu sukurta trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių sprendinių analizės metodologija pasižymi tuo, jog didžioji pasiūlytos metodikos dalis gali būti algoritmizuota, t.y. didžiąją dalį skaičiavimų galima atlikti pasitelkiant programinę įrangą. Kadangi šiame darbe yra tiriami analiziniai (tikslūs) diferencialinių lygčių sprendiniai, šie skaičiavimai paprastai yra simbolinio tipo ir gali būti atliekami pasitelkiant kompiuterinės algebros programas. Tokio pobūdžio programos esmingai skiriasi nuo įprastų apytikslio skaičiavimo paketų ir programavimo kalbų tuo, kad jos sugeba manipuliuoti ne tik skaitinėmis, bet ir simbolinėmis kintamųjų reikšmėmis. Vienos populiariausių mokslininkų tarpe tokio tipo programos šiuo metu yra Maple ir Wolfram Mathematica, kurios funkcionalumo prasme yra gana artimos. Magistro baigiamojo darbo metu pasiūlytos metodologijos teiginių įrodymui, taikymo pavyzdžių konstravimui bei vizualizacijai buvo naudojamas Wolfram Mathematica programinės įrangos paketas.

1.5. Baigiamojo projekto temos ir uždavinių pagrindimas

Kaip buvo minėta poskyryje 1.1, didelę taikomąją vertę optikoje, hidrodinamikoje, biofizikoje ir kituose moksluose turi sveikosios eilės modeliai, kurių sprendiniai yra solitoninės bangos. Kadangi trupmeninės diferencialinės lygtis bendruoju atveju yra tinkamesnės realaus pasaulio reiškiniams modeliuoti dėl joms būdingo "atminties" efekto, natūralu manyti, jog minėtų modelių (su solitoniais sprendiniais) trupmeninės eilės analogai leistų dar tiksliau apibūdinti nagrinėjamas dinamines sistemas. Tačiau, tuomet atsiranda klausimas ar šie "patobulinti" trupmeninės eilės modeliai taip pat turės solitoninio tipo sprendinius ir jeigu taip, tai prie kokių modelio parametrų ar pradinių sąlygų. Kadangi solitonų bei trupmeninio diferencialinio ir integralinio skaičiavimo mokslinės sritys yra dar pakankamai "jaunos", tai tyrimų objektu, apjungiančiu šias sritis, mokslininkai susidomėjo tik pastaruoju dešimtmečiu (Guner, Bekir 2016; Hosseini et al. 2018; Zhou et al. 2017). Dėl šios priežasties, trupmeninės eilės diferencialinių lygčių solitoninių sprendinių egzistavimo klausimas reikalauja išsamesnės analizės bei naujų tyrimo technikų ir algoritmų, todėl šiame magistro baigiamajame darbe buvo iškelti tokie uždaviniai:

1. Trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių su daugianario tipo netiesiškumu begalinės laipsninės eilutės forma išreikštų sprendinių, atitinkančių teigiamas argumento reikšmes, konstravimas bei jų konvergavimo sričių praplėtimas. Toks praplėtimas leistų nagrinėti sprendinius kitoje negu taško $x = 0$ aplinkoje.
2. Trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių su daugianario tipo netiesiškumu sprendinių išplėtimas į neigiamąją argumento pusašę. Toks išplėtimas suteiktų naują požiūrį į trupmeninių diferencialinių lygčių sprendinius, kadangi jie galėtų būti analizuojami ne tik aibėje $x \in \mathbb{R}_+$ (kaip buvo daroma iki šiol), bet ir visoje realioje ašyje $x \in \mathbb{R}$.
3. Pasiūlytos metodologijos pritaikymas trupmeninės eilės Rikati diferencialinės lygties solitoniniams sprendiniams tirti.

2. Medžiagos ir tyrimų metodai

Kaip buvo minėta poskyryje 1.4, šiame baigiamajame darbe taikomos metodologijos bei teorijos gali būti suskirstytos į dvi grupes:

1. Paprastųjų diferencialinių lygčių solitoninių sprendinių konstravimui skirtos technikos, kurias apima apibendrinto diferencialinio operatoriaus metodas bei tiesiškai rekurentinių sekų teorijos taikymas.
2. Trupmeninės eilės diferencialinio ir integralinio skaičiavimo teorija, besiremianti *Caputo* laipsninių eilučių koncepciją.

Šiame skyriuje pateiksime teorinio pobūdžio medžiagą, reikalingą įvardintų koncepcijų suvokimui.

2.1. Apibendrinto diferencialinio operatoriaus metodo taikymas diferencialinių lygčių solitoniniams sprendiniams sukonstruoti

Šiame poskyryje yra pateikiamos pagrindinės apibendrinto diferencialinio operatoriaus bei tiesiškai rekurentinių sekų teorijos sąvokos ir rezultatai bei pristatomas netiesinių diferencialinių lygčių solitoninių sprendinių konstravimo metodas, besiremiantis šiomis koncepcijomis.

2.1.1. Formalios eilutės bei tiesinio operatoriaus sąvoka

Apibrėžimas 2.1.1. Formalia eilute vadinsime reiškinį:

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{C}, k = 0,1,\dots \tag{2.1.1}$$

Tuomet formalių eilučių aibe vadinsime aibę $\mathbb{F} = \{f | f \text{ tenkina } (2.1.1)\}$. Dažnai pasitaikantys formalių eilučių pavyzdžiai yra funkcijos $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$ ir kt.

Apibrėžimas 2.1.2. Formalių eilučių algebra $\mathcal{F}$ vadinsime aibę $\mathbb{F}$ kartu su tradicinėmis eilučių sumos, daugybos bei daugybos iš skaliaro operacijomis:

Tarkime, kad $f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, $g = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$, c - skaliaras. Tuomet operacijos tarp eilučių apibrėžiamos tokiu būdu:

1. $f + g = g + f = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) x^k$.
2. $f \cdot g = g \cdot f = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{l-k} \right) x^k$.
3. $c \cdot f = f \cdot c = \sum_{k=0}^{+\infty} (c a_k) x^k$.

Eilutė (2.1.1), kurios koeficientai $a_0 = 1, a_k = 0, k > 1$ yra vadinama formalių eilučių algebros neutraliuoju elementu, o eilutė su koeficientais $a_k = 0, k > 0$ – anuliuojančiuoju elementu. Elementų $x^k, k = 0,1, \dots$ begalinė aibė sudaro algebros $\mathcal{F}$ bazę.

Apibrėžimas 2.1.3. Tiesiniu operatoriumi vadinsime operatorių $\mathbf{A}(\cdot)$, veikiantį formalių eilučių aibėje $\mathbb{F}$ ir tenkinantį sąryšį:

$$\mathbf{A}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathbf{A}(f) + \beta\mathbf{A}(g), \tag{2.1.2}$$

čia $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathbb{F}$.

Pritaikę tiesinį operatorių formaliai eilutei (2.1.1) gausime:

$$\mathbf{A}(f) = \mathbf{A}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbf{A}(x^k). \tag{2.1.3}$$

Taigi, matome, kad tiesinio operatoriaus **A** poveikį formaliai eilutei pilnai nusako jo poveikis kiekvienam algebros $\mathcal{F}$ baziniam elementui.

Dažniausiai diferencialinių lygčių teorijoje pasitaikantys tiesiniai operatoriai:

1. Nulinis operatorius: $\mathbf{0}(f) = 0$.
2. Vienetinis operatorius $\mathbf{I}(f) = f$.
3. Diferencijavimo operatorius $\mathbf{D}_x(f) = f'_x$; pvz.: $\mathbf{D}_x(x^k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ kx^{k-1}, & k > 0 \end{cases}$.
4. Integravimo operatorius $\mathbf{L}_x(f) = \int f \mathrm{d}x$; pvz.: $\mathbf{L}_x(x^k) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)} + C$.

Pastebėsime, kad tolimesniuose skyreliuose bet koks operatorius **A**, pakeltas nuliniu laipsniu, bus laikomas vienetiniu operatoriumi **I**: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$.

2.1.2. Apibendrinto diferencialinio operatoriaus sąvoka

Tegul $\Phi_{c,s_0,\dots,s_{n-1}}$- funkcijų klasė, kurią sudaro norimą skaičių kartų diferencijuojamos (kintamųjų $c, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ atžvilgiu) funkcijos $p_j = p_j(c, s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$, atitinkančios vaizdavimą:

$$p_j: I_c \times I_{s_0} \times \dots \times I_{s_{n-1}} \to \mathbb{R}, \tag{2.1.4}$$

čia $I_c, I_{s_k} \subset \mathbb{R}, k = 1, \dots, n-1$ – netuščios aibės, kurias sudaro intervalai arba jų sąjungos.

Taip pat tarkime, kad duotos dvi šios klasės funkcijos $P = P(c, s)$, $Q = Q(c, s) \in \Phi_{c,s}$.

Apibrėžimas 2.1.4. Apibendrintuoju diferencialiniu operatoriumi funkcijų $P(c,s)$ ir $Q(c,s)$ atžvilgiu vadinsime tiesinį operatorių:

$$\mathbf{D} = P(c,s) \cdot \mathbf{D}_c + Q(c,s) \cdot \mathbf{D}_s \tag{2.1.5}$$

Pastebėsime, kad apibendrinto diferencialinio operatoriaus išraiškoje sumuojamų narių skaičius yra lygus nagrinėjamų funkcijų kintamųjų skaičiui (žr. skyrelį 2.1.3).

Pagrindinės apibendrinto diferencialinio operatoriaus savybės (analogiškos tradicinėms išvestinių savybėms) yra pateikiamos toliau:

1. $\mathbf{D}(fg) = \mathbf{D}(f)g + f\mathbf{D}(g)$;
2. $\mathbf{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\mathbf{D}(f)g - f\mathbf{D}(g)}{g^2}$;
3. $\mathbf{D}(h(f(c,s), g(c,s)) = \frac{\partial h}{\partial f}\mathbf{D}(f) + \frac{\partial h}{\partial g}\mathbf{D}(g)$;

čia $f, g, h \in \Phi_{c,s}$.

2.1.3. Apibendrinto diferencialinio operatoriaus taikymas paprastųjų diferencialinių lygčių sprendimui

Teorema 2.1.1 Tegul duota n-tosios eilės paprastoji diferencialinė lygtis:

$$y_x^{(n)} = f\left(x, y, y_x', \dots, y_x^{(n-1)}\right), \tag{2.1.6}$$

čia $f = f(c, s_0, \dots, s_{n-1}) \in \Phi_{c,s_0,\dots,s_{n-1}}$. Tarkime, kad šios lygties bendrasis sprendinys $y = y(x, c, s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$ priklauso nuo kintamojo x ir parametrų $c, s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \in \mathbb{R}$ bei tenkina pradines sąlygas:

$$y(c, c, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) = s_0;\ y_x^{(k)}(x, c, s_0, s_1, \dots, s_{n-1})\Big|_{x=c} = s_k, k = 1,2, \dots, n-1.$$

Apibrėžę diferencialinei lygčiai (2.1.6) apibendrintą difrerencialinį operatorių

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \cdot \mathbf{D}_{s_{k-1}} + f(c, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) \cdot \mathbf{D}_{s_{n-1}}, \tag{2.1.7}$$

jos sprendinį galime užrašyti toliau pateikoje išraiškoje:

$$y = y(x, c, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(x-c)^j}{j!} \cdot \mathbf{D}^j(s_0). \tag{2.1.8}$$

Teoremos 2.1.1 įrodymas gali būti rastas (Navickas, Bikulčiene 2006).

Įveskime pažymėjimą $p_j = \mathbf{D}^j(s_0)$. Tada $p_{j+1} = \mathbf{D}(p_j), j = 0,1, \ldots$. Tuomet (2.1.8) išraišką galime užrašyti tokiu būdu:

$$y = y(x, c, s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(x-c)^j}{j!} \cdot p_j. \qquad (2.1.9)$$

Pavyzdys 2.1.1. Nagrinėkime pirmosios eilės paprastąją diferencialinę lygtį:

$$y'_x = y^2, \qquad (2.1.10)$$

kurios bendrasis sprendinys $y = y(x, c, s)$ tenkina pradinę sąlygą $y(c, c, s) = s$.

Pagal (2.1.7), apibendrintas diferencialinis operatorius lygčiai (2.1.10) apibrėžiamas tokiu būdu:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c + s^2 \mathbf{D}_s \qquad (2.1.11)$$

Tuomet, pažymėję $p_j = \mathbf{D}^j s$ bei apskaičiavę:

$$p_0 = s; \quad p_1 = \mathbf{D}(p_0) = s^2; \quad p_2 = \mathbf{D}(p_1) = 2s^3; \ \ldots; p_j = \mathbf{D}(p_j) = j!\, s^{j+1} \qquad (2.1.12)$$

diferencialinės lygties (2.1.10) bendrąjį sprendinį galime užrašyti tokiu būdu (pagal Teoremą 2.1.1):

$$y(x, c, s) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(x-c)^j}{j!} \cdot p_j = \sum_{j=0}^{+\infty} (x-c)^j \cdot s^{j+1} = \frac{s}{1 - s(x-c)}. \qquad (2.1.13)$$

Pavyzdys 2.1.2. Nagrinėkime antrosios eilės paprastąją diferencialinę lygtį (Airy lygtį):

$$y''_{xx} + xy = 0, \qquad (2.1.14)$$

kurios bendrasis sprendinys $y = y(x, c, s_0, s_1)$ tenkina pradines sąlygas:

$$y(c, c, s_0, s_1) = s_0; \ y'_x(x, c, s_0, s_1)|_{x=c} = s_1.$$

Pagal (2.1.7), apibendrintas diferencialinis operatorius lygčiai (2.1.14) apibrėžiamas tokiu būdu:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c + s_1 \mathbf{D}_{s_0} - c s_0 \mathbf{D}_{s_1}. \qquad (2.1.15)$$

Tuomet, pagal Teoremą 2.1.1, šios lygties bendrasis sprendinys turi tokią išraišką:

$$y = y(x, c, s_0, s_1) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(x-c)^j}{j!} \cdot p_j, \qquad (2.1.16)$$

čia $p_j = p_j(c, s_0, s_1) = \mathbf{D}^j(s_0)$, t.y. $p_0 = s_0, p_1 = s_1, p_2 = -cs_0, p_3 = -(s_0 + cs_1), p_4 = c^2 s_0 - 2s_1, \dots$.

Taigi, pritaikius nagrinėjamai diferencialinei lygčiai apibendrintą diferencialinį operatorių bei Teoremą 2.1.1 galime sukonstruoti tikslųjį (analizinį) šios lygties sprendinį užrašytą begalinės eilutės pavidalu. Natūralu, kad begaline eilute galime išreikšti ir solitoninės bangos tipo sprendinį, jeigu toks egzistuoja. Tačiau, nepaisant to, jog iš teorinės pusės toks sprendinys yra visiškai teisingas, praktikoje tokia sprendinio forma gali sukelti sunkumų, kadangi begalinę eilutę reikėtų aproksimuoti, sumuojant fiksuotą (baigtinį) narių skaičių. Dėl šios priežasties yra svarbu pateikti sprendinį (2.1.8) „uždaroje formoje“, t.y. išreikšti jį elementariosiomis funkcijomis. Solitoninio sprendinio atveju „uždaroji forma“ yra eksponentinių funkcijų arba jų sumų santykis. Begalinę sprendinio eilutę suvesti į tokią formą galima pasitelkiant tiesiškai rekurentinių sekų teoriją. Svarbiausias šios teorijos sąvokas bei savybes, išsamiai išnagrinėtas straipsniuose (Kurakin et al. 1995; Navickas, Bikulčiene 2006; Navickas, Bikulciene ir Ragulskis 2010a; Navickas et al. 2013), pateiksime sekančiame skyrelyje.

2.1.4. Tiesiškai rekurentinės sekos sąvoka bei savybės

Apibrėžimas 2.1.5. k-tosios eilės tiesiškai rekurentine seka (angl. angl. linear recurring sequence) vadinsime skaičių arba funkcijų seką $(x_j, j \in \mathbb{Z}_0)$, tenkinančią sąryšį:

$$x_{j+k} = \alpha_{k-1} x_{j+k-1} + \cdots + \alpha_0 x_j, \tag{2.1.17}$$

čia $\alpha_i \in \mathbb{C}, i = 0, \dots, k-1$ – konstantos.

Tegul $\operatorname{order}\left(x_j, j \in \mathbb{Z}_0\right) = k$ žymi tiesiškai rekurentinės sekos eilę.

Tiesiškai rekurentinių sekų pagrindinė savybė teigia, kad k-tosios eilės sekai $(x_j, j \in \mathbb{Z}_0)$, tenkinančiai (2.1.17), sukonstruota Hankelio determinantų seką:

$$d_0 = 1, d_1 = x_0, d_2 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, d_3 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}, d_4 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{vmatrix}, \dots \tag{2.1.18}$$

tenkina sąryšį:

$$d_k \neq 0, d_{k+i} = 0, i = 1,2, \dots \tag{2.1.19}$$

Apibrėžimas 2.1.6. k-tosios eilės tiesiškai rekurentinės sekos $(x_j, j \in \mathbb{Z}_0)$ charakteringąja lygtimi (angl. characteristic equation arba auxiliary equation) vadinsime lygtį:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_k \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{k+1} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k-1} & x_k & \dots & x_{2k-1} \\ 1 & \rho & \dots & \rho^k \end{vmatrix} = 0, \tag{2.1.20}$$

čia $k = \operatorname{order}(x_j, j \in \mathbb{Z}_0)$.

Apibrėžimas 2.1.7. Lygties (2.1.20) šaknis $\rho_1, \dots, \rho_l$ vadinsime sekos $(x_j, j \in \mathbb{Z}_0)$ charakteringosiomis šaknimis. Šaknies ρ_i kartotinumo laipsnį žymėsime n_i.

Straipsnyje (Navickas, Bikulčiene 2006) buvo pateikta bei įrodyta teorema apie sekos rekurentiškumo būtiną ir pakankamą sąlygą.

Teorema 2.1.2. Seka $(x_j, j \in \mathbb{Z}_0)$ yra k-tosios eilės tiesiškai rekurentinė seka

$$\operatorname{order}(x_j, j \in \mathbb{Z}_0) = n_1 + \dots + n_l = k, \tag{2.1.21}$$

tada ir tik tada, kai visi $x_j, j \in \mathbb{Z}_0$ tenkina sąryšį:

$$x_j = \sum_{u=1}^{l} \sum_{v=0}^{n_u - 1} \beta_{uv} \binom{j}{v} \rho_u^{j-v}, \tag{2.1.22}$$

čia β_{uv} – konstantos, randamos iš tiesinės lygčių sistemos:

$$\sum_{u=1}^{l} \sum_{v=0}^{n_u - 1} \beta_{uv} \binom{j}{v} \rho_u^{j-v} = x_j, j = 0,1, \dots, k-1. \tag{2.1.23}$$

2.1.5. Diferencialinių lygčių solitoninių sprendinių konstravimas taikant apibendrinto diferencialinio operatoriaus bei tiesiškai rekurentinių sekų teorijas

Šiame skyrelyje pademonstruosime kaip apibendrinto diferencialinio operatoriaus bei tiesiškai rekurentinių sekų teorijos gali būti taikomos diferencialinių lygčių solitoniniams sprendiniams (jeigu tokie sprendiniai egzistuoja), išreikštiems eksponentinių funkcijų (arba jų sumų) santykiu, konstruoti.

Nagrinėkime pirmos eilės paprastąją diferencialinę lygtį:

$$y'_x = f(x, y), \tag{2.1.24}$$

kurios bendrasis sprendinys $y = y(x, c, s)$ tenkina pradinę sąlygą $y(c, c, s) = s$.

Įvedę nepriklausomo kintamojo x keitinį

$$\hat{x} = e^{\eta x}, x = \frac{1}{\eta}\ln(\hat{x}), \eta \in \mathbb{R}, \eta \neq 0, \tag{2.1.25}$$

gausime

$$y = y(x, c, s) = y\left(\frac{1}{\eta}\ln(\hat{x}), \frac{1}{\eta}\ln(\hat{c}), s\right) = \hat{y}(\hat{x}, \hat{c}, s) = \hat{y}(e^{\eta x}, e^{\eta c}, s) = \hat{y}, \\ \hat{y}(\hat{c}, \hat{c}, s) = s, \hat{c} = e^{\eta c} \tag{2.1.26}$$

$$y'_x = \eta \hat{x} \hat{y}'_{\hat{x}}. \tag{2.1.27}$$

Tada diferencialinę lygtį (2.1.24) galime perrašyti tokiu būdu:

$$\eta \hat{x} \hat{y}'_{\hat{x}} = f\left(\frac{1}{\eta}\ln(\hat{x}), \hat{y}\right) = \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}). \tag{2.1.28}$$

Apibrėžimas 2.1.8. Diferencialinės lygties (2.1.24) vaizdu vadinsime lygtį (2.1.28), o sprendinio $y(x, c, s)$ vaizdu – sprendinį $\hat{y}(\hat{c}, \hat{c}, s)$.

Pagal (2.1.7), apibendrintas diferencialinis operatorius lygčiai (2.1.28) apibrėžiamas tokiu būdu:

$$\widehat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_{\hat{c}} + \frac{\hat{f}(\hat{c}, s)}{\eta \hat{c}} \cdot \mathbf{D}_s. \tag{2.1.29}$$

Tuomet, pagal Teoremą 2.1.1, šios lygties bendrasis sprendinys turi tokią išraišką:

$$\hat{y}(\hat{x}, \hat{c}, s) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\hat{x} - \hat{c})^j}{j!} \cdot p_j;\ p_j = \widehat{\mathbf{D}}^j(s). \tag{2.1.30}$$

Teorema 2.1.3. Nagrinėkime k-tosios eilės tiesiškai rekurentinę seką $q_j = \frac{p_j}{j!}, j \in \mathbb{Z}_0$ $(\mathrm{order}\big(q_j, j \in \mathbb{Z}_0\big) = k)$, kurios visų charakteringųjų šaknų $\rho_1, \ldots, \rho_k$ kartotinumai $n_i = 1, i = 1, \ldots, k$. Taip pat, nemažindami bendrumo, tarkime, kad $\rho_1 = 0$. Jeigu galioja sąryšiai

$$\widehat{\mathbf{D}}(\rho_i) = \rho_i^2;\ \widehat{\mathbf{D}}(\beta_i) = \beta_i \rho_i;\ i = 1, \ldots, k; \tag{2.1.31}$$

tai sprendinį (2.1.29) galime užrašyti tokioje formoje:

$$\hat{y}(\hat{x}, \hat{c}, s) = \beta_1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{\beta_i}{1 - (\hat{x} - \hat{c})\rho_i}. \tag{2.1.32}$$

Teoremos 2.1.3 įrodymas gali būti rastas (Navickas, Bikulciene ir Ragulskis 2010a).

Pastebėsime, kad sprendinio (2.1.32) išraišką elementariais pertvarkiais galime suvesti į racionaliosios funkcijos pavidalą:

$$\hat{y}(\hat{x},\hat{c},s)=\sigma\frac{(\hat{x}/\hat{c}-\hat{y}_1)\cdots(\hat{x}/\hat{c}-\hat{y}_{k-1})}{(\hat{x}/\hat{c}-\hat{x}_1)\ \cdots(\hat{x}/\hat{c}-\hat{x}_{k-1})}=\sigma\frac{Y(\hat{x}/\hat{c})}{X(\hat{x}/\hat{c})},$$
$$X(\xi)=\prod_{i=1}^{k-1}(\xi-\hat{x}_i)\,;\ Y(\xi)=\prod_{i=1}^{k-1}(\xi-\hat{y}_i)\,, \tag{2.1.33}$$

čia $\sigma,\hat{x}_i,\hat{y}_i,i=1,\dots,k-1$ priklauso nuo $\hat{c},s,\eta$.

Gautai išraiškai (2.1.33) pritaikę keitinį $(2.1.25)$ galime sugrįžti prie pradinio kintamojo x. Tuomet gausime ieškomą diferencialinės lygties $(2.1.24)$ $(k-1)$-osios eilės solitoninį sprendinį:

$$y(x,c,s)=\sigma\frac{\left(e^{\eta(x-c)}-y_1\right)\cdots\left(e^{\eta(x-c)}-y_{k-1}\right)}{\left(e^{\eta(x-c)}-x_1\right)\ \cdots\left(e^{\eta(x-c)}-x_{k-1}\right)}=\sigma\frac{\prod_{i=1}^{k-1}\left(e^{\eta(x-c)}-y_i\right)}{\prod_{i=1}^{k-1}\left(e^{\eta(x-c)}-x_i\right)}. \tag{2.1.34}$$

Taigi, aukščiau pateikta metodika leidžia sukonstruoti pirmosios eilės paprastosios diferencialinės lygties solitoninius sprendinius (jei tokie egzistuoja). Norėdami rasti solitonus aukštesnės eilės paprastoje diferencialinėje lygtyje, metodiką galėtume taikyti analogiškai. Dalinių išvestinių diferencialinės lygties, priklausančios nuo kintamųjų $\xi_1,\dots,\xi_v;v\in\mathbb{N}$, atveju, turėtume iš pradžių pritaikyti banginį keitinį $x=C_1\xi_1+\cdots+C_v\xi_v,C_1;\dots,C_v\in\mathbb{R}$, suvedantį šią lygtį į paprastąją diferencialinę lygtį, o tuomet gautai lygčiai jau galėtume taikyti aukščiau pateiktą algoritmą.

Pastebėsime, kad egzistuoja tokios diferencialinės lygtys, kurioms neįmanoma rasti lygties parametrų bei η sąryšio, paverčiančio Teoremoje 2.1.3 nagrinėjamą seką $\left(q_j=\frac{p_j}{j!},j\in\mathbb{Z}_0\right)$ tiesiškai rekurentine. Natūralu, kad tokioms lygtims nepavyks rasti solitoninio sprendinio taikant šią metodiką. Tačiau, svarbu pažymėti, kad šis algoritmas ieško diferencialinės lygties solitoninių sprendinių, galiojančių prie visų pradinių sąlygų. Papildę aukščiau pateiktą metodiką susiaurintų ir išplėstų diferencialinių lygčių koncepcija, išsamiai aprašytą (Navickas, Ragulskis ir Bikulciene 2010b), šį algoritmą galėsime taikyti ir diferencialinėms lygtims, kurių solitoninis sprendinys egzistuoja tik prie tam tikrų pradinių sąlygų. Tuomet papildyto algoritmo rezultatu bus ne tik sukonstruotas solitoninis sprendinys, bet ir pradinių sąlygų ir lygties parametrų sąryšiai, prie kurių jis egzistuoja.

2.2. *Caputo* trupmeninių laipsninių eilučių teorija

Šiame poskyryje yra išdėstyti pagrindiniai klasikinių laipsninių eilučių bei *Caputo* trupmeninių eilučių teorijos apibrėžimai ir sąryšiai, taikomi tolimesniuose skyreliuose kuriant trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių sprendinių analizės metodologiją. Pastebėsime, kad šiame baigiamajame darbe yra naudojama mokslinio straipsnio (Navickas et al. 2017) autorių pasiūlyta *Caputo* trupmeninių laipsninių eilučių koncepcija, leidžianti užrašyti *Caputo* trupmeninius diferencijavimo bei integravimo operatorius (1.3.19) kiek kitokioje (ekvivalenčioje) formoje, patogesnėje trupmeninių diferencialinių lygčių tikslių (analizinių) sprendinių tyrimui atlikti.

2.2.1. Laipsninių eilučių praplėtimas

Šiame darbe yra analizuojamos funkcijos, išreiškiamos laipsninėmis eilutėmis tokiu būdu:

$$y(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \frac{(z-c)^j}{j!}, \quad z, c, a_j \in \mathbb{C} \tag{2.2.1}$$

bei šių funkcijų trupmeninės eilės analogai.

Pagal Koši-Adamaro teoremą, funkcijos $y(z)$ konvergavimo spindulys R taške c yra apibrėžiamas tokiu sąryšiu:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left(\sup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)\right). \tag{2.2.2}$$

Galimi trys atvejai:

1. Jeigu riba, esanti (2.2.2) išraiškoje artėja prie begalybės kai $n \to \infty$, tuomet laipsninė eilutė (2.2.1) diverguoja (Koši prasme) visuose taškuose išskyrus c. Nepaisant to, tokia eilutė taip pat neša naudingą informaciją (Hardy & Series, 1949). Todėl, funkcija (2.2.1) gali būti laikoma struktūriniu diferencialinės lygties sprendiniu.

2. Jeigu riba, esanti (2.2.2) išraiškoje artėja prie nulio kai $n \to \infty$, tuomet laipsninė eilutė (2.2.1) konverguoja visoje kompleksinėje plokštumoje.

3. Jeigu riba, esanti (2.2.2) išraiškoje artėja baigtinės teigiamos nenulinės reikšmės, tai laipsninė eilutė (2.2.1) konverguoja srityje $U = \{|z-c| < R\}; R > 0$. Tuomet eilutė (2.2.1) gali būti praplėsta į platesnę kompleksinę sritį (neįtraukiančią reiškinio (2.2.1) singuliarumų) taikant klasikinę Rymano praplėtimo techniką, kurią sudaro trys žingsniai (procedūra gali būti taikoma kelis kartus):

   a) Pasirenkamas taškas $c_1 \in U$, patenkantis į laipsninės eilutės (2.2.2) konvergavimo sritį;

   b) Funkcija $y(z)$ skleidžiama taške c_1, t.y. randami naujos eilutės

$$y(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \frac{(z - c_1)^j}{j!}, \;\; z, c, b_j \in \mathbb{C} \tag{2.2.3}$$

koeficientai $b_k, k = 0,1, \dots$;

c) Randama naujai sukonstruotos eilutės (2.2.3) konvergavimo sritis V. Jeigu V nėra U poaibis, tuomet sakome, kad funkcijos $f(z)$ konvergavimo sritis yra praplėsta iki $U \cup V$.

Tardami, kad $x \in \mathbb{R}$ yra praplėstos funkcijos argumentas, gausime realaus argumento laipsninę eilutę $y(x)$, apibrėžtą reikšmėms x, nebūtinai patenkančioms į konvergavimo spindulį $|x| < R$. Tokiu atveju, praplėsta funkcija $y(x)$ ir jos laipsninės eilutės reprezentacija yra laikomos ekvivalenčiomis.

2.2.2. Trupmeninės laipsninės eilutės

Trupmeninės eilės diferencialinių lygčių sprendiniai gali būti išreikšti laipsninėmis eilutėmis, kuriose sumuojami nariai su trupmeniniais laipsniais. Tolimesniuose šio poskyrio apibrėžimuose bei išvedimuose laikysime, kad $x \geq 0$, o nagrinėjamų trupmeninių operatorių bei eilučių eilės parametras $n \in \mathbb{N}$.

Apibrėžimas 2.2.1. Trupmeninės laipsninės eilutės baze $w_0^{(n)}, w_1^{(n)}, \dots$ vadinsime funkcijas:

$$w_j^{(n)}(x) = \frac{x^{\frac{j}{n}}}{\Gamma\left(\frac{j}{n} + 1\right)}, j = 0,1, \dots, \tag{2.2.4}$$

čia $\Gamma(\cdot)$ – gama funkcija:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \xi^{x-1} \exp(-\xi) \, \mathrm{d}\xi \, . \tag{2.2.5}$$

Pastebėsime, kad funkcija Γ tenkina gerai žinomas lygybes (Andrews et al. 1999):

$$\Gamma(1 + x) = x\Gamma(x), \qquad x > -1; \tag{2.2.6}$$

$$\Gamma(n + 1) = n!\,, \quad n = 0,1, \dots; \tag{2.2.7}$$

$$\Gamma(x) = \pm\infty, \quad x = 0, -1, \dots; \tag{2.2.8}$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{\frac{n-1}{2}}}, & n = 1,3,\dots; \\ \dfrac{(n-2)!!\sqrt{2}}{2^{\frac{n-1}{2}}}, & n = 2,4,\dots \end{cases}, \quad (-1)!! = 0!! = 1. \tag{2.2.9}$$

Apibrėžimas 2.2.2. *Caputo* laipsnine eilute vadinsime funkciją

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j w_j^{(n)}, \;\; v_j \in \mathbb{R}. \tag{2.2.10}$$

Pastebėsime, kad (2.2.10) yra tradicinės laipsninės eilutės (2.2.1) trupmeninės eilės analogas.

Tegul $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$. Panaudoję keitinį $t \coloneqq \sqrt[n]{x}$, galime perrašyti (2.2.10) tokiu būdu:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j \left(\sqrt[n]{x}\right)^j = \hat{f}(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j t^j \;; \quad \gamma_j = \frac{v_j}{\Gamma\left(\frac{j}{n}+1\right)}. \tag{2.2.11}$$

Tolimesniems skaičiavimams pareikalausime, kad $f(t)$ būtų analizinė (išskyrus baigtinį skaičių singuliarumo taškų) ir nesinguliari taške $t = 0$. Taigi, egzistuoja konvergavimo spindulys $|t| < T_0$; $T_0 > 0$. Funkciją $\hat{f}$ toliau vadinsime funkcijos f charakteristine funkcija.

Apibrėžimas 2.2.3. *Caputo* laipsninių eilučių aibe ${}^{C}\mathbb{F}_n$ vadinsime aibę visų funkcijų, turinčių pavidalą (2.2.10) ir tenkinančių reikalavimus, išvardintus aukščiau:

$${}^{C}\mathbb{F}_n = \left\{\sum_{j=0}^{+\infty} v_j w_j^{(n)}; c_j \in \mathbb{C},\; j = 0,1,\dots\right\}. \tag{2.2.12}$$

Caputo laipsninių eilučių aibė kartu tradicinėmis sumos ir daugybos iš skaliaro operacijomis sudaro tiesinę erdvę virš $\mathbb{C}$. Kadangi aibėje ${}^{C}\mathbb{F}_n$ argumento x laipsniai yra neneigiami, galime apibrėžti standartinę sandaugos tarp bazinių funkcijų $w_k^{(n)}, w_l^{(n)}$ operaciją:

$$w_k^{(n)} w_l^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{k+l}{n} \\ \frac{k}{n} \end{pmatrix} w_{k+l}^{(n)}; \quad k,l = 0,1,\dots. \tag{2.2.13}$$

Tuomet, remdamiesi (2.2.13), sandaugą tarp dviejų *Caputo* laipsninių eilučių $g_1^{(n)} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j w_j^{(n)}, g_2^{(n)} = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j w_j^{(n)} \in {}^{C}\mathbb{F}_n$ apibrėžiame tokiu būdu:

$$g_1^{(n)} g_2^{(n)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \binom{j/n}{k/n} \right) w_j^{(n)} \in {}^{C}\mathbb{F}_n. \tag{2.2.14}$$

Pastebėsime, kad daugybos (2.2.14) atžvilgiu neutralusis elementas yra $w_0^{(n)} = 1$.

Apibrėžimas 2.2.4. *Caputo* $\frac{1}{n}$-tosios eilės diferencijavimo bei integravimo operatoriais vadinsime operatorius ${}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ ir ${}^{C}\mathbf{I}^{\left(\frac{1}{n}\right)}$, apibrėžtus visiems $g \in {}^{C}\mathbb{F}_n$ tokiais sąryšiais:

$$\begin{gathered} {}^{C}\mathbf{D}^{(1/n)}\left(w_j^{(n)}\right) = \begin{cases} 0, \text{kai } j = 0; \\ w_{j-1}^{(n)}, \text{kai } j = 1,2,\ldots \end{cases}, \\ {}^{C}\mathbf{I}^{(1/n)}\left(w_j^{(n)}\right) = w_{j+1}^{(n)}, j = 0,1,\ldots \end{gathered} \tag{2.2.15}$$

Aibė ${}^{C}\mathbb{F}_n$ yra uždara operatorių ${}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ ir ${}^{C}\mathbf{I}^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ atžvilgiu. Pastebėsime, kad taikant *Caputo* $\frac{1}{n}$-tosios eilės diferencijavimo operatorių vienetui gaunamas nulis, kadangi ${}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)}\left(w_0^{(n)}\right) = 0$.

Tegul $f = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j w_j^{(n)} \in {}^{C}\mathbb{F}_n$. Iš (2.2.15) seka, kad funkcijai f pritaikius *Caputo* $\frac{1}{n}$-tosios eilės diferencijavimo operatorių, gausime

$${}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)} f = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{j+1} w_j^{(n)}. \tag{2.2.16}$$

Šiame darbe *Caputo* $\frac{k}{n}$-tosios eilės išvestines bei integralus žymėsime atitinkamai $\left({}^{C}\mathbf{D}^{(1/n)}\right)^k$ ir $\left({}^{C}\mathbf{I}^{(1/n)}\right)^k$.

Racionaliosios eilės $\frac{k}{n}; k \in \mathbb{N}$ *Caputo* išvestinės yra apibrėžiamos aukštesnių operatoriaus ${}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ laipsnių pagalba:

$$\left({}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^k f = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{j+k} w_j^{(n)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{j+k}{n} + 1\right) \gamma_{j+k}}{\Gamma\left(\frac{j}{n} + 1\right)} \left(\sqrt[n]{x}\right)^j. \tag{2.2.17}$$

Atskiru atveju, kai $k = m \cdot n; m \in \mathbb{N}$, (2.2.17) lygtis gali būti pertvarkyta tokiu būdu:

$$\left({}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^{(m\cdot n)} f = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{j}{n} + m + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{j}{n} + 1\right)} \gamma_{j+mn} \left(\sqrt[n]{x}\right)^{j}$$
$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{m} \left(\frac{j}{n} + k\right)\right) \gamma_{j+mn} \left(\sqrt[n]{x}\right)^{j}. \qquad (2.2.18)$$

Apibrėžimas 2.2.5. *Caputo* algebra vadinsime algebrą ${}^{C}\mathcal{F}_n = \langle {}^{C}\mathbb{F}_n; +, \cdot \,|\mathbb{C}\rangle$.

Svarbią teorinę bei praktinę vertę *Caputo* trupmeninių laipsninių eilučių teorijoje turi sąryšiai tarp skirtingų eilių *Caputo* algebrų. Nagrinėkime *Caputo* trupmeninės išvestinės eilės parametro n skleidinį pirminių skaičių $p_1, \dots, p_m$ laipsnių sandauga:

$$n = \prod_{j=1}^{m} p_j^{k_j}\ , \quad m, k_j \in \mathbb{N}. \qquad (2.2.19)$$

Caputo laispninių eilučių aibėms galioja tokios savybės:

1. ${}^{C}\mathbb{F}_{p_j} \subset {}^{C}\mathbb{F}_{p_j^2} \subset \cdots \subset {}^{C}\mathbb{F}_{p_j^{k_j}} \subseteq {}^{C}\mathbb{F}_n$;
2. Bendruoju atveju ${}^{C}\mathbb{F}_{p_1} \cup {}^{C}\mathbb{F}_{p_1^2} \cup \dots \cup {}^{C}\mathbb{F}_{p_m^{k_m}} \neq {}^{C}\mathbb{F}_n$;
3. ${}^{C}\mathbb{F}_{p_j} \cap {}^{C}\mathbb{F}_{p_l} = {}^{C}\mathbb{F}_1,\ j \neq l$.

Aibę ${}^{C}\mathbb{F}_1$ sudaro baziniai elementai su sveikaisiais laipsniais, todėl vienetinis elementas $w_0^{(p_j)} = w_0^{(p_l)} = w_0^{(n)} = 1$ yra toks pat bet kokiam poaibiui ${}^{C}\mathbb{F}_{p_j^l}, l = 1, \dots, k_j$. Iš šių pastebėjimų išplaukia, kad algebros, sukonstruotos iš aibių, pateiktų pirmoje savybėje, yra ${}^{C}\mathcal{F}_n$ poalgebriai:

$${}^{C}\mathcal{F}_{p_j} \subset {}^{C}\mathcal{F}_{p_j^2} \subset \cdots \subset {}^{C}\mathcal{F}_{p_j^{k_j}} \subseteq {}^{C}\mathcal{F}_n.$$

Kitos algebros ${}^{C}\mathcal{F}_n$ savybės yra detaliau nagrinėjamos straipsniuose (Navickas, Telksnys, Marcinkevicius ir Ragulskis 2017; Navickas et al. 2018).

3. Tyrimų rezultatai ir jų aptarimas

Kaip buvo minėta anksčiau, šio baigiamojo projekto tikslas – išvystyti trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių solitoninių sprendinių analizei skirtą metodologiją. Natūralu, kad šiam tikslui pasiekti pirmiausiai reikia sukurti technikas, leidžiančias spręsti bei analizuoti trupmenines diferencialines lygtis bendruoju atveju, kurios savo ruožtu galėtų būti taikomos solitoninius sprendinius turintiems trupmeninės eilės modeliams.

Taigi, poskyryje 3.1 yra išvedamos ir teoriškai pagrindžiamos technikos leidžiančios: (a) sukonstruoti tikslius (analizinius) sprendinius trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinėms lygtims su daugianario tipo netiesiškumu; (b) praplėsti gautų sprendinių, turinčių begalinės laipsninės eilutės pavidalą, konvergavimo sritis bei (c) išplėsti gautus sprendinius į neigiamąją argumento pusašę. Poskyryje 3.2. yra pateikiamas pasiūlytų technikų taikymo pavyzdys trupmeninės eilės Rikati diferencialinės lygties, turinčios solitoninius sprendinius, atveju.

3.1. Trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių tyrimo metodologija

3.1.1. Rymano algoritmas *Caputo* laipsninių eilučių konvergavimo srities praplėtimui

Skyrelyje 2.1.1 buvo parodyta, kad analizinės funkcijos gali būti praplėstos už jų konvergavimo spindulio ribų panaudojant Rymano praplėtimo algoritmą. Analogiška technika gali būti taikoma ir *Caputo* laipsninėms eilutėms (2.2.11).

Tegul $f = \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j \left(\sqrt[n]{x}\right)^j$ ir eilutės f konvergavimo spindulys kintamojo $\sqrt[n]{x}$ atžvilgiu taške $x = 0$ yra T_0. Pasirinkime $\sqrt[n]{x_0}$ tokį, kad x_0 būtų nenulinis ir patektų į funkcijos f konvergavimo sritį: $0 < \sqrt[n]{x_0} < T_0$. Tuomet *Caputo* laipsninė eilutė f gali būti pertvarkyta tokiu būdu:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j \left(\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right) + \sqrt[n]{x_0}\right)^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \gamma_j \left(\sqrt[n]{x_0}\right)^{j-k} \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{j} \left(\sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} \gamma_j \left(\sqrt[n]{x_0}\right)^{j-k} \right) \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right)^k = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{\gamma}_j \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right)^j. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Koeficientai $\hat{\gamma}_j$ apibrėžiami tokiu būdu:

$$\hat{\gamma}_j = \sum_{k=j}^{+\infty} \binom{k}{j} \gamma_k \left(\sqrt[n]{x_0}\right)^{k-j}. \tag{3.1.2}$$

Pastebėsime, kad (3.1.2) lygtimi apibrėžti koeficientai yra baigtiniai, kadangi nepraplėsta eilutė f konverguoja. Lygtyje (3.1.1) išvestos eilutės konvergavimo spindulys kintamojo $\sqrt[n]{x}$ atžvilgiu taške $x = \sqrt[n]{x_0}$ yra $T_1 > 0$ (konvergavimo sritis - $\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right| < T_1$).

Be to, jeigu tą pačią procedūrą pakartotume su $x_1 \neq x_0$, kuris taip pat tenkintų sąlygą $0 < \sqrt[n]{x_1} < T_1$, tai gautume:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \hat{\gamma}_j \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right)^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{\gamma}_j \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_1}\right)^j, \tag{3.1.3}$$

jeigu x būtų toks, kad eilutės iš abiejų lygybės pusių konverguotų.

Ši procedūra gali būti pritaikyta funkcijai iš *Caputo* laipsninių eilučių aibės ${}^{C}\mathbb{F}_n$ praplėsti tarp dviejų singuliarumo taškų (arba tarp singuliarumo ir begalybės, jeigu kitų singuliarumų nėra) perrašant funkciją kitoje bazėje $\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_k}\right)^j, k = 0,1, \ldots$. Pastebėsime, kad šios išplėstos eilutės sutampa taško x, gulinčio visų jų konvergavimo spiduliuose, atžvilgiu, todėl išplėtimai yra vieninteliai.

Pastebėsime, kad tokie algebriniai veiksmai, kaip *Caputo* diferencijavimo operatorius yra apibrėžti tik bazėje $\left(\sqrt[n]{x}\right)^j$ (taško $x = 0$ aplinkoje). Dėl šios priežasties tolimesniuose skyreliuose visi reikiami skaičiavimai yra pirmiausiai atliekami taško $x = 0$ aplinkoje ir tik tuomet praplečiami į visą funkcijos apibrėžimo sritį. Todėl kintamojo x nulinė aplinka yra vadinama algebrinių veiksmų aplinka.

3.1.2. Trupmeninės eilės diferencialinių lygčių su daugianario tipo netiesiškumu sprendinių konstravimas

Kadangi šio darbo tikslas yra naujos trupmeninės eilės *Caputo* netiesinių diferencialinių lygčių sprendimo bei analizės metodologijos kūrimas, patogiausia pradėti tokio tipo tyrimą nuo "paprastesnių" dinaminių modelių analizės. Todėl toliau bus analizuojamos trupmeninės diferencialinės lygtys su daugianario tipo netiesiškumu. Kita vertus, bet kokį kitą netiesiškumą galime aproksimuoti daugianariu, taigi šis tyrimas yra vertingas ir bendruoju atveju.

Nagrinėkime tokią *Caputo* trupmeninės eilės diferencialinę lygtį:

$$\left({}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n (y_n) = Q_m(y_n); \quad y_n = y_n(x), \tag{3.1.4}$$

čia $y_n \in {}^{C}\mathbb{F}_n$ ir $Q_m - m$-tosios eilės daugianaris:

$$Q_m(y) = \sum_{k=0}^{m} a_k y^k; \quad m \in \mathbb{N}, a_m \neq 0. \tag{3.1.5}$$

Šiame skyrelyje diferencialinės lygties (3.1.4) sprendiniai bus tiesiogiai konstruojami algebrinių veiksmų aplinkoje, bei praplečiami į kitas aplinkas naudojant procedūrą, aprašytą ankstesniame skyrelyje.

3.1.2.1. Trupmeninės diferencialinės lygties (3.1.4) sprendinių konstravimas taško $x = 0$ aplinkoje

Nagrinėkime *Caputo* laipsninę eilutę $y_n = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j w_j^{(n)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j \left(\sqrt[n]{x}\right)^j \in {}^{C}\mathbb{F}_n$. Pastebėsime, kad galioja sąryšis:

$$\begin{aligned} \left({}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n (y_n) &= \left({}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j w_j^{(n)}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{j+n} w_j^{(n)} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_{j+n}\, \Gamma\left(\frac{j+n}{n} + 1\right) \frac{\left(\sqrt[n]{x}\right)^j}{\Gamma\left(\frac{j}{n} + 1\right)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{j}{n} + 1\right) \gamma_{j+n} \left(\sqrt[n]{x}\right)^j . \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Taigi, įstatę funkciją y_n į (3.1.4) gausime:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{j}{n} + 1\right) \gamma_{j+n} \left(\sqrt[n]{x}\right)^j = \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k_1 + \cdots + k_m = j} \prod_{l=1}^{k} \gamma_{k_l} \right) \left(\sqrt[n]{x}\right)^j \right) \right) + a_0. \tag{3.1.7}$$

Tegul $\sqrt[n]{x} = t$ ir $\hat{y}_n = \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j t^j$. Tuomet (3.1.7) galime pertvarkyti tokiu būdu:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (j+n) \gamma_{j+n} t^j = n Q_m(\hat{y}_n). \tag{3.1.8}$$

Pertvarkius (3.1.8) reiškinį, gausime:

$$\sum_{j=n}^{+\infty} j \gamma_j t^{j-1} = n t^{n-1} Q_m(\hat{y}_n). \tag{3.1.9}$$

Pastebėsime, kad pridėjus prie abiejų (3.1.9) lygties pusių narį $\sum_{j=1}^{n-1} j \gamma_j t^{j-1}$, kairioji pusė pavirs tradicinę (sveikosios eilės) funkcijos $\hat{y}_n$ išvestine kintamojo t atžvilgiu, o visa lygtis taps paprastąja diferencialine lygtimi:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{y}_n}{\mathrm{d}t} = nt^{n-1}Q_m(\hat{y}_n) + \sum_{j=1}^{n-1} j\gamma_j t^{j-1}. \tag{3.1.10}$$

Panaudoję apibrėžimą $\gamma_j = \frac{v_j}{\Gamma\left(\frac{j}{n}+1\right)}$, gausime lygtį (3.1.10) kiek kitoje formoje:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{y}_n}{\mathrm{d}t} = n\left(t^{n-1}Q_m(\hat{y}_n) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{v_j}{\Gamma\left(\frac{j}{n}\right)} t^{j-1}\right). \tag{3.1.11}$$

Pridėjus prie paprastosios diferencialinės lygties (3.1.11) pradinę sąlygą $\hat{y}_n(c) = s$, gautas Koši uždavinys gali būti sprendžiamas panaudojant metodą, aprašytą poskyryje 2.1. Apibendrintas diferencialinis operatorius lygčiai (3.1.11) apibrėžiamas tokiu būdu (žr. Teoremą 2.1.1):

$$\mathbf{D}_{cs} = \mathbf{D}_c + n\left(c^{n-1}Q_m(s) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{v_j}{\Gamma\left(\frac{j}{n}\right)} c^{j-1}\right)\mathbf{D}_s \tag{3.1.12}$$

Tuomet paprastosios diferencialinės lygties (3.1.11) sprendinys (naudojant argumento t reikšmes, su kuriomis eilutė konverguoja) turi tokią begalinės laipsninės eilutės formą:

$$\hat{y}_n = \hat{y}_n(t,c,s) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(t-c)^j}{j!} p_j(c,s), \tag{3.1.13}$$

čia $\hat{y}_n(c,c,s) = s$, $p_j(c,s) = \mathbf{D}_{cs}^j(s)$. Jeigu įmanoma, pritaikę skyrelyje 2.1.5 aprašytą metodiką, sprendinį (3.1.13) galime užrašyti „uždaroje formoje“. Jeigu to padaryti nepavyksta, sprendinio (3.1.13) konvergavimo sritį galime praplėsti taikant metodologijas, pristatomas toliau.

Pastebėję, kad $y_n(x) = \hat{y}_n\left(\sqrt[n]{x}\right)$, galime suformuluoti teoremą 3.1.1.

Teorema 3.1.1. Trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinė lygtis (3.1.4) turi bendrąjį sprendinį

$$y_n(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right)^j}{j!} p_j\left(\sqrt[n]{x_0}, u_0\right), \tag{3.1.14}$$

$$y_n\left(\sqrt[n]{x_0}\right) = u_0, \tag{3.1.15}$$

$$\left({}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^k y_n\Big|_{x=0} = v_k; \quad k = 1, \dots, n-1, \tag{3.1.16}$$

prie bet kokių parametrų $u_0; v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ reikšmių $(x_0 \geq 0)$, jeigu x tenkina nelygybę $\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\right| < T_{x_0}$. Čia $T_{x_0} > 0$ žymi (3.1.14) eilutės konvergavimo spindulį.

3.1.2.2. Koši uždavinys suformuluotas trupmeninei diferencialinei lygčiai (3.1.4) taške $x = 0$

Remiantis Teorema 3.1.1, Koši uždavinys trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinei lygčiai (3.1.4) gali būti suformuluotas taške $x = 0$:

$$\left({}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right)^{n} y_n = Q_m(y_n), \quad y_n = y_n\left(x, u_0^{(0)}\right); \tag{3.1.17}$$

$$\left({}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right)^{k} y_n \bigg|_{x=0} = v_k; \quad k = 1, \dots, n-1; \tag{3.1.18}$$

$$y_n|_{x=0} = u_0^{(0)}. \tag{3.1.19}$$

Pastebėsime, kad šiuose skaičiavimuose yra naudojama $\sqrt[n]{x}$ šaknis, turinti mažiausią reikšmę arg (x).

Iš rezultatų, gautų praeitame skyrelyje, Koši uždavinys (3.1.17)-(3.1.19) taško $x = 0$ aplinkoje turi tokį sprendinį:

$$y_n = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{x}\right)^j}{j!} p_j\left(0, u_0^{(0)}\right). \tag{3.1.20}$$

Šis sprendinys gali būti praplėstas į platesnę konvergavimo sritį, taikant algoritmą, aprašytą skyrelyje 3.1.1:

1. Pasirenkama seka $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots$ ir laisvai pasirenkamas parametras $u_0^{(0)} \in \mathbb{R}$.
2. Parametras $u_0^{(k+1)}$ $(k = 0,1, \dots)$ yra apskaičiuojamas pagal (3.1.13) formulę:

$$u_0^{(k+1)} = \hat{y}_n\left(\sqrt[n]{x_{k+1}}, \sqrt[n]{x_k}, u_0^{(k)}\right). \tag{3.1.21}$$

   Pastebėsime, kad koeficientų $p_j(c, s)$ tikslios algebrinės išraiškos jau yra žinomos, taigi parametras $u_0^{(k+1)}$ gaunamas nesudėtingai įstatymo būdu.

3. Randama naujai gautos eilutės $\hat{y}_n\left(\sqrt[n]{x}, \sqrt[n]{x_{k+1}}, u_0^{(k+1)}\right)$ konvergavimo sritis $\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_k}\right| < T_{x_{k+1}}$.

4. Pasirenkamas naujas taškas $x_{k+2} \in \left\{\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_k}\right| < T_{x_{k+1}}\right\}$ ir procedūra (2-4 žingniai) kartojama iš naujo.

Bendras Koši uždavinio (3.1.17)-(3.1.19) sprendinys gali būti užrašytas bet kokiam k:

$$y_n = y_n\left(x, u_0^{(0)}\right) = \hat{y}_n\left(\sqrt[n]{x}, \sqrt[n]{x_k}, u_0^{(k)}\right), \tag{3.1.22}$$

čia $\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_k}\right| < T_{x_k}, T_{x_k} > 0, x_k \geq 0.$

3.1.2.3. Koši uždavinys suformuluotas trupmeninei diferencialinei lygčiai (3.1.4) taške $x \neq 0$

Pertvarkymai, aprašyti praeitame skyrelyje, gali būti pritaikyti bendresnio Koši uždavinio, kuriame pirmoji pradinė sąlyga formuluojama nenuliniame taške x, sukonstravimui:

$$\left({}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n y_n = Q_m(y_n), \quad y_n = y_n\left(x, u_0^{(0)}\right); \tag{3.1.23}$$

$$\left({}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^k y_n\bigg|_{x=0} = v_k; \quad k = 1, \dots, n-1; \tag{3.1.24}$$

$$y_n|_{x=0} = u_0^{(0)}; \quad x_0 \neq 0. \tag{3.1.25}$$

Analogiškai Koši uždaviniui (3.1.17)-(3.1.19), uždavinio (3.1.23)-(3.1.25) atveju gaunamas toks sprendinys:

$$y_n = y_n\left(x, x_0, u_0^{(0)}\right) = \hat{y}_n\left(\sqrt[n]{x}, \sqrt[n]{x_0}, u_0^{(0)}\right). \tag{3.1.26}$$

Pastebėsime, kad pradinės sąlygos, atitinkančios trupmeninių išvestinių reikšmes, privalo būti formuluojamos taške $x = 0$, kad sprendinys (3.1.26) galiotų.

3.1.3. Trupmeninės eilės diferencialinių lygčių su daugianario tipo netiesiškumu sprendiniai prie neigiamų argumento x reikšmių

Kaip buvo teigiama anksčiau, vienas iš pagrindinių šio darbo uždavinių yra trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių sprendinių praplėtimas į neigiamąją laiko ašį argumento x atžvilgiu. Tokio išplėtimo pasekmėje gaunamos kompleksinės trupmeninės *Caputo* laipsninės eilutės, kurios yra apibrėžiamos sekančiame skyrelyje.

3.1.3.1 Kompleksinės trupmeninės *Caputo* laipsninės eilutės

Nagrinėkime *Caputo* laipsninių eilučių bazės, apibrėžtos skyrelyje 2.2.2, išplėtimą:

$$\left(w_j^{(n)}\right)_k = \frac{\left(\sqrt[n]{|x|}\right)^j}{\Gamma\left(\frac{j}{n}+1\right)} \exp\left(ij\frac{arg(x)+2\pi k}{n}\right), \tag{3.1.27}$$

čia i-menamasis vienetas, $x \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, n-1; j = 0,1, \dots$ ir $\sqrt[n]{|x|} \in \mathbb{R}$ atitinka šaknį su mažiausia reikšme $\arg(x)$. Ši bazė prie $k = 0$ sutampa su baze $w_j^{(n)}$, apibrėžta skyrelyje 2.2.2. Tačiau, kai $k = 1,2, \dots, n-1$, funkcijos $\left(w_j^{(n)}\right)_k$ yra kompleksinės.

Panaudojant (3.1.27) standartinę *Caputo* trupmeninę laipsninę eilutę (2.2.10) galime išplėsti į n kompleksinių trupmeninių eilučių tokiu būdu:

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j\left(w_j^{(n)}\right)_k; \quad k = 0, \dots, n-1. \tag{3.1.28}$$

3.1.3.2. Trupmeninės eilės diferencialinių lygčių su daugianario tipo netiesiškumu sprendinių praplėtimas į neigiamąją pusašę

Iš Teoremos 3.1.1 išplaukia, kad trupmeninės *Caputo* diferencialinės lygties (3.1.4) sprendinys turi formą (3.1.14), kur koeficientai p_j yra sugeneruojami taikant apibendrinto diferencialinio operatoriaus metodą, aprašytą ankstesniuose skyreliuose. Panaudojant bazę, apibrėžtą skyrelyje 3.1.3.1, sprendinį (3.1.14) galime išplėsti į kompleksinę plokštumą:

$$\begin{aligned}\left(y_n(x)\right)_k = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{|x|} - \sqrt[n]{|x_0|}\right)^j}{j!} \exp\left(ij\frac{arg(x_0)+2\pi k}{n}\right) \cdot \\ \cdot\, p_j\left(\sqrt[n]{|x_0|}\exp\left(i\frac{arg(x_0)+2\pi k}{n}\right), u_0\right).\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

Pažymėję $\alpha = arg(x_0)$ ir $\beta_n^{(k)}(\alpha) = \exp\left(i\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right)$, eilutę (3.1.29) galime perrašyti tokiu būdu:

$$\left(y_n(x)\right)_k = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{|x|} - \sqrt[n]{|x_0|}\right)^j}{j!}\left(\lambda_j^{(k)}(|x_0|, \alpha, u_0) + i\mu_j^{(k)}(|x_0|, \alpha, u_0)\right), \tag{3.1.30}$$

čia

$$\lambda_j^{(k)}(|x_0|, \alpha, u_0) = \operatorname{Re}\left(\left(\beta_n^{(k)}(\alpha)\right)^j p_j\left(\sqrt[n]{|x_0|}\beta_n^{(k)}(\alpha), u_0\right)\right); \tag{3.1.31}$$

$$\mu_j^{(k)}(|x_0|, \alpha, u_0) = \mathrm{Im}\left(\left(\beta_n^{(k)}(\alpha)\right)^j p_j\left(\sqrt[n]{|x_0|}\beta_n^{(k)}(\alpha), u_0\right)\right). \tag{3.1.32}$$

Išraiška (3.1.30) leidžia analizuoti sprendinius prie neigiamų argumento reikšmių ($x < 0$), tačiau šie sprendiniai yra daugiareikšmiai (kadangi $\sqrt[n]{|x|}$ turi n skirtingų šaknų) bei kompleksiniai.

3.1.3.3. Trupmeninės eilės diferencialinių lygčių su daugianario tipo netiesiškumu sprendinių Rymano praplėtimas neigiamoje pusašėje

Metodo, aprašyto skyrelyje 3.1.2.2, patobulinimas yra būtinas, kad galėtume sukonstruoti trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinės lygties (3.1.4) atskirus sprendinius. Pasirinkime dvi skaičių sekas: ... $< x_{-r} < \cdots < x_{-1} < 0$; $0 < x_1 < x_2 < \cdots$ ir $x_0 = 0$. Kiekvienam $k = 0, \dots, n-1$, pradinė sąlyga $s_0^{(k)} \in \mathbb{R}$ yra pasirenkama laisvai.

Tuomet, sekos $s_{-r}^{(k)}$ ir $s_r^{(k)}$ yra apskaičiuojamos panaudojant šiuos sąryšius:

$$s_{r+1}^{(k)} = \hat{y}\left(\left(\sqrt[n]{x_{r+1}}\right)_k, \left(\sqrt[n]{x_r}\right)_k, s_r^{(k)}\right); r = 0,1, \dots; \tag{3.1.32}$$

$$s_{-r-1}^{(k)} = \hat{y}\left(\left(\sqrt[n]{x_{-r-1}}\right)_k, \left(\sqrt[n]{x_{-r}}\right)_k, s_{-r}^{(k)}\right); r = 0,1, \dots; \tag{3.1.33}$$

čia $\hat{y}$ žymi paprastosios diferencialinės lygties sprendinį į kurį pagal Teoremą 3.1.1 yra transformuojama trupmeninė diferencialinė lygtis (3.1.4).

Trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinės lygties (3.1.4) atskirasis sprendinys, atitinkantis k-tąją reiškinio $\sqrt[n]{x_r}$ šaknį, užrašomas tokiu būdu:

$$\left(y_n(x)\right)_k = \hat{y}\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)_k; \left(\sqrt[n]{x_0}\right)_k; s_r^{(k)}\right), \tag{3.1.34}$$

čia $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Pastebėsime, kad seka ... $< x_{-1} < x_0 < x_1 < \cdots$ privalo būti parinkta tokiu būdu, kad eilutė generuojama $\hat{y}$ konverguotų aibėse $\mathbb{R}$ ir $\mathbb{C}$. Be to, kadangi taškas $x = 0$ yra trupmeninės diferencialinės lygties sprendinio išsišakojimo taškas, funkcijos $\left(y_n(x)\right)_k$ nėra diferencijuojamos šiame taške.

Taigi, apibendrinant šiame poskyryje pasiūlytą (3.1.4) tipo trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių sprendinių analizės metodologiją, galime suformuluoti šiuos pagrindinius žingsnius:

1. *Caputo* laipsninę eilutę $y_n = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j w_j^{(n)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j \left(\sqrt[n]{x}\right)^j \in {}^C\mathbb{F}_n$ įstatome į trupmeninę diferencialinę lygtį ir gautą išraišką pertvarkome į paprastąją diferencialinę lygtį (3.1.11) (žr. skyrelį 3.1.2.1);

2. Gautą paprastąją diferencialinę lygtį sprendžiame apibendrinto diferencialinio operatoriaus metodu ir gauname begalinės laipsninės eilutės formos sprendinį (3.1.13) (žr. skyrelį 3.1.2.1);

3. Trupmeninės diferencialinės lygties (3.1.4) sprendinį (galiojantį prie $x > 0$) gauname (3.1.13) išraiškai pritaikę keitinį $t = \sqrt[n]{x}$ (žr. Teoremą 3.1.1). Jeigu, įmanoma, taikome 2.1.5 skyrelyje aprašytą metodiką, kad suvestume sprendinį į „uždarą“ formą. Jeigu tokio suvedimo atlikti nepavyksta, pereiname prie sekančio žingsnio;

4. Norėdami praplėsti trupmeninės diferencialinės lygties (3.1.4) gautą begalinės laipsninės eilutės formos sprendinio konvergavimo sritį, taikome modifikuotą Rymano praplėtimo algoritmą (žr. skyrelį 3.1.2.2);

5. Norėdami nagrinėti trupmeninės diferencialinės lygties (3.1.4) sprendinius prie neigiamų argumento x reikšmių, naudojame praplėstų į neigiamąją pusašę sprendinių išraiškas (3.1.29), tačiau, šiuo atveju gauname n skirtingų kompleksinių sprendinių (žr. skyrelį 3.1.3.2);

6. Norėdami praplėsti trupmeninės diferencialinės lygties (3.1.4) gautų kompleksinių sprendinių prie $x < 0$ konvergavimo sritį, taikome modifikuotą Rymano praplėtimo algoritmą neigiamoje pusašėje (žr. skyrelį 3.1.3.3).

3.2. Skaitinis pasiūlytos metodologijos taikymo pavyzdys trupmeninių diferencialinių lygčių solitoniniams sprendiniams tirti

Rikati lygtis yra paprasčiausias netiesinis modelis ir taipogi paprasčiausias modelis, kuriame egzistuoja solitoniniai sprendiniai. Kadangi dėl bendros trupmeninės eilės solitono formos dar nėra sutarta, Rikati diferencialinės lygties, kaip paradigminio solitonus generuojančio modelio, apibendrinimas į trupmeninės eilės diferencialinę lygtį suteiks įžvalgų į trupmeninės eilės solitoninių sprendinių struktūrą. Atskirais atvejais jau buvo parodyta (Navickas, Telksnys, Marcinkevicius ir Ragulskis 2017), kad kai kurios trupmeninės eilės Rikati diferencialinės lygtys turi sprendinius, apimančius solitoninių sprendinių aibę.

Taigi, šiame poskyryje pritaikysime pasiūlytą (3.1.4) tipo trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių sprendinių analizės metodologiją trupmeninės eilės Rikati diferencialinei lygčiai bei ją atitinkantiems solitoniniams sprendiniams.

Nagrinėkime tokią paprastąją Rikati diferencialinę lygtį:

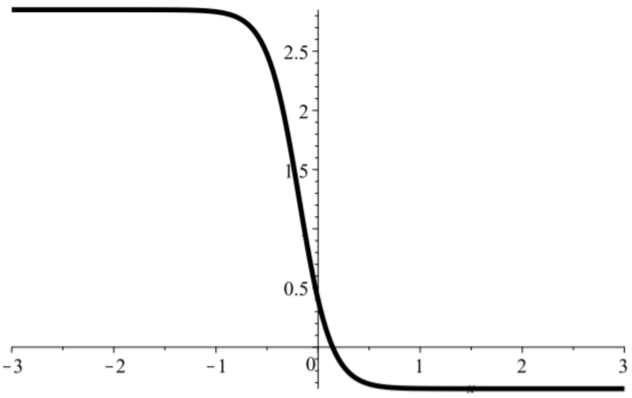
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y^2 - 5y - 2; \tag{3.2.1}$$

$$y(x_0) = u_0. \tag{3.2.2}$$

Gerai žinoma, kad paprastoji diferencialinė lygtis (3.2.1) turi tokį sigmoidinį solitoninį sprendinį:

$$y(x, x_0, u_0) = \frac{\alpha_2(u_0 - \alpha_1)\exp\big(2\alpha_1(x - x_0)\big) - \alpha_1(u_0 - \alpha_2)\exp\big(2\alpha_2(x - x_0)\big)}{(u_0 - \alpha_1)\exp\big(2\alpha_1(x - x_0)\big) - (u_0 - \alpha_2)\exp\big(2\alpha_2(x - x_0)\big)}, \tag{3.2.3}$$

čia $\alpha_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{41}}{4}$ yra daugianario $2y^2 - 5y - 2$ šaknys. Sprendinys (3.2.3) yra nesudėtingai gaunamas pritaikius konstravimo algoritmą, besiremiantį apibendrinto diferencialinio operatoriaus metodu bei tiesiškai rekurentinių sekų teorija (žr. poskyrį 2.1). Šio sprendinio grafikas yra pavaizduotas 3 pav.



3 pav. Paprastosios diferencialinės lygties (3.2.2) sigmoidinis solitoninis sprendinys, gaunamas prie pradinių sąlygų $x_0 = 0, u_0 = \frac{2}{5}$.

Nemažindami bendrumo, tarkime, kad $n = 2, x_0 = 0$ ir nagrinėkime trupmeninės eilės diferencialinę Rikati lygtį:

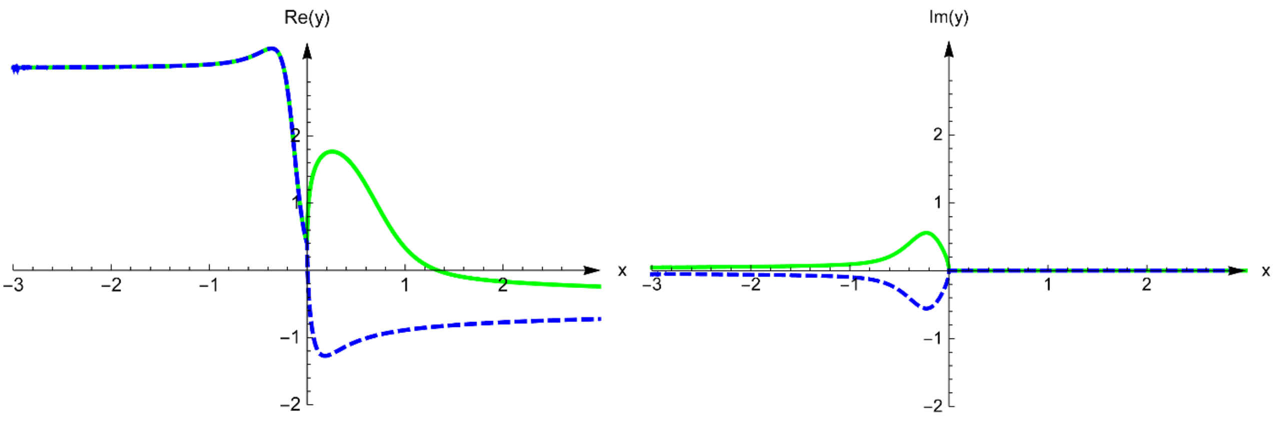
$$\left({}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^2 y = 2y^2 - 5y - 2. \tag{3.2.4}$$

$${}^{C}\mathbf{D}^{\left(\frac{1}{2}\right)} y\Big|_{x=0} = v_1; \quad y(0) = u_0^{(0)}. \tag{3.2.5}$$

Trupmeninės diferencialinės lygties (3.2.4)-(3.2.5) solitoninis sprendinys yra sukonstruojamas panaudojant algoritmą, aprašytą skyrelyje 3.1.2. Kadangi gauto, begalinės laipsninės eilutės formą turinčio, solitoninio sprendinio nepavyksta suvesti į „uždarą formą“, jo konvergavimo sritis yra praplečiama teigiamąją bei neigiamąją pusašes (argumento x atžvilgiu) taikant metodiką, pasiūlytą poskyryje 3.1. Pastebėsime, kad egzistuoja du solitoniniai sprendiniai, kadangi reiškinys $\sqrt{x}$ turi dvi šaknis. Realiosios bei menamosios šių sprendinių dalys yra pavaizduotos 4 pav. Taip pat atkreipsime dėmesį, kad sprendinys yra realusis, kai $x \geq 0$, menamosios dalys atsiranda tik prie neigiamų argumento x reikšmių.

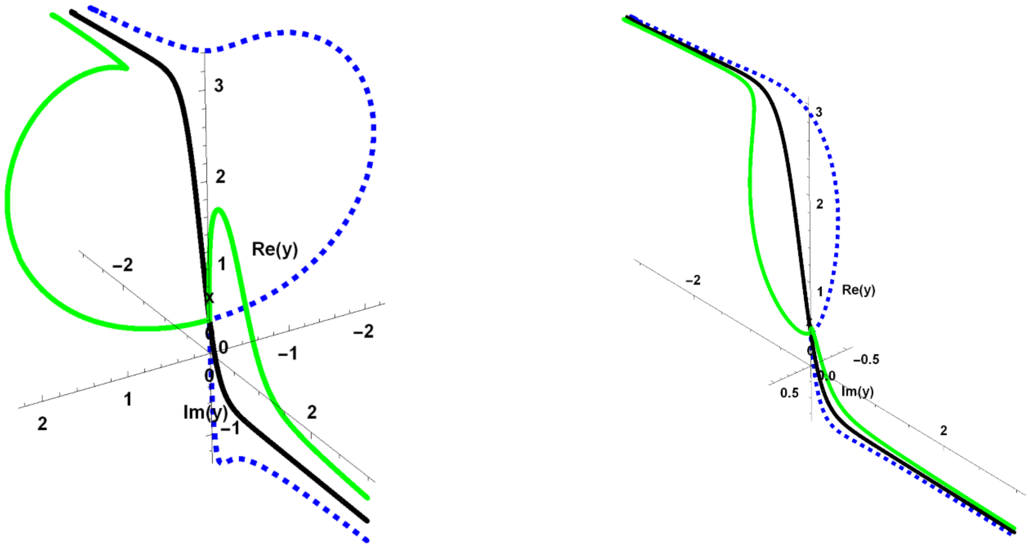
Trupmeninės diferencialinės lygties (3.2.4)-(3.2.5) solitoniniai sprendiniai prie skirtingų pradinės sąlygos v_1 reikšmių yra pavaizduoti 5 pav. Matome, kad kai pradinė sąlyga v_1 artėja prie nulio, trupmeninės diferencialinės lygties (3.2.4)-(3.2.5) solitoninis sprendinys artėja prie paprastosios diferencialinės lygties sigmoidinio solitoninio sprendinio (3.2.3). Taigi, keisdami pradinės sąlygos v_1 reikšmes galime reguliuoti skirtumą tarp trupmeninės diferencialinės Rikati lygties solitoninių sprendinių bei paprastosios Rikati diferencialinės lygties solitoninio sprendinio. Todėl, šis efektas, surišantis trupmeninių bei paprastųjų diferencialinių lygčių sprendinius yra svarbus tiek iš teorinės, tiek iš praktinės pusės.

Baigiamajame darbe pristatytos metodologijos taikymas sudėtingesnėms trupmeninės eilės netiesinėms diferencialinėms lygtiems yra neabejotinas būsimų tyrimų tikslas, kadangi tai leistų padaryti daugiau išvadų apie trupmeninių diferencialinių lygčių solitoninius sprendinius bei jų sąryšius su netrupmeniniais analogais.



(a) (b)

4 pav. Trupmeninės diferencialinės Rikati lygties (3.2.4) solitoninių sprendinių realiosios (dalis (a)) bei menamosios (dalis (b)) dalys prie pradinių sąlygų $x_0 = 0, u_0^{(0)} = \frac{2}{5}, v_1 = 5$. Žalioji vientisa bei mėlynoji punktyrinė linija atitinka sprendinius, gaunamus nagrinėjant reiškinio $\sqrt{x}$ dvi skirtingas šaknis.



(a) (b)

5 pav. Trupmeninės diferencialinės Rikati lygties (3.2.4) solitoniniai sprendiniai. Pradinės sąlygos $x_0 = 0,\ u_0^{(0)} = \frac{2}{5}$ parinktos vienodos abiem atvejais (a) ir (b). Pradinė sąlyga, atitinkanti trupmeninės eilutės koeficientus (a) atveju yra $v_1 = 5$, (b) atveju - $v_1 = 1$. Žalioji vientisa bei mėlynoji punktyrinė linija atitinka sprendinius, gaunamus nagrinėjant reiškinio $\sqrt{x}$ dvi skirtingas šaknis. Juodoji linija atitinka paprastosios diferencialinės lygties sprendinį (3.2.2).

Išvados

Baigiamojo projekto metu atlikus eilę teorinių bei praktinių tyrimų buvo gautos šios išvados:

1. Trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių su daugianario tipo netiesiškumu sprendinio konvergavimo sritį galima praplėsti taikant pristatytą modifikuotą Rymano praplėtimo algoritmą.

2. Trupmeninės eilės *Caputo* diferencialinių lygčių su daugianario tipo netiesiškumu sprendinys „išsišakoja“ į n skirtingų kompleksinių sprendinių kai nagrinėjamos neigiamos argumento reikšmės (čia n - trupmeninių operatorių bei eilučių eilės parametras).

3. Trupmeninės Rikati diferencialinės lygties solitoniniai sprendiniai artėja prie paprastosios diferencialinės lygties sigmoidinio solitoninio sprendinio, kai pradinė sąlyga, atitinkanti pradinę trupmeninės išvestinės reikšmę, artėja prie nulio.

Literatūros sąrašas

1. ACETO, Lidia, Daniele BERTACCINI, Fabio DURASTANTE ir Paolo NOVATI. Rational Krylov methods for functions of matrices with applications to fractional partial differential equations. Journal of Computational Physics, 2019, 396, 470-482.
2. ADOLFSSON, Klas, Mikael ENELUND ir Peter OLSSON. On the fractional order model of viscoelasticity. Mechanics of Time-dependent materials, 2005, 9(1), 15-34.
3. AGHABABA, Mohammad Pourmahmood ir Mehdi BORJKHANI. Chaotic fractional-order model for muscular blood vessel and its control via fractional control scheme. Complexity, 2014, 20(2), 37-46.
4. AGRAWAL, Govind P. Nonlinear fiber optics. In *Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century*. Springer, 2000, p. 195-211.
5. ANDREWS, George E, Richard ASKEY ir Ranjan ROY. *Special functions*. Edtion ed.: Cambridge university press, 1999. ISBN 0521789885.
6. ARAFA, Anas AM ir Ahmed M SH HAGAG. A new analytic solution of fractional coupled Ramani equation. Chinese Journal of Physics, 2019, 60, 388-406.
7. BÄCKLUND, Albert V. Ueber flächentransformationen. Mathematische Annalen, 1875, 9(3), 297-320.
8. BAGLEY, Ronald L ir PJ TORVIK. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. Journal of Rheology, 1983, 27(3), 201-210.
9. CAPUTO, Michele. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. Geophysical Journal International, 1967, 13(5), 529-539.
10. DARBOUX, Gaston. On a proposition relative to linear equations. CR Acad. Sci. Paris, 1882, 94(physics/9908003), 1456-1459.
11. DE VRIES, G ir DJ KORTEWEG. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. Phil. Mag, 1895, 39(5), 422-443.
12. DEBNATH, Lokenath ir Thomas B SPEIGHT. ON GENERALIZATION OF DERIVATIVES. Pi Mu Epsilon Journal, 1971, 5(5), 217-220.
13. DEHGHAN, Mehdi, Jalil MANAFIAN ir Abbas SAADATMANDI. Solving nonlinear fractional partial differential equations using the homotopy analysis method. Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal, 2010, 26(2), 448-479.
14. DELIGNE, Edited Pierre, Pavel ETINGOF, Daniel S FREED, Lisa C JEFFREY, et al. Quantum fields and strings. A course for mathematicians. In *Material from the Special Year on Quantum Field Theory Held at the Institute for Advanced Study*. Citeseer, 1999.
15. DEMIRCI, Elif ir Nuri OZALP. A method for solving differential equations of fractional order. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2012, 236(11), 2754-2762.
16. DIETHELM, Kai, Neville J FORD ir Alan D FREED. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. Nonlinear Dynamics, 2002, 29(1-4), 3-22.
17. DUCHARNE, Benjamin, Brittany NEWELL ir Gael SEBALD. A Unique Fractional Derivative Operator to Simulate All Dynamic Piezoceramic Dielectric Manifestations: From Aging to Frequency-Dependent Hysteresis. IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, 2019, 67(1), 197-206.
18. GORENFLO, Rudolf ir Francesco MAINARDI. Fractional calculus. In *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*. Springer, 1997, p. 223-276.
19. GRAHOVAC, NM ir MM ŽIGIĆ. Modelling of the hamstring muscle group by use of fractional derivatives. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(5), 1695-1700.
20. GUNER, Ozkan ir Ahmet BEKIR. Bright and dark soliton solutions for some nonlinear fractional differential equations. Chinese Physics B, 2016, 25(3), 030203.
21. HE, Ji-Huan ir Xu-Hong WU. Exp-function method for nonlinear wave equations. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 30(3), 700-708.

22. HEIMBURG, Thomas ir Andrew D JACKSON. On soliton propagation in biomembranes and nerves. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2005, 102(28), 9790-9795.
23. HERMANN, R. The geometry of nonlinear differential equations. In *Bäcklund transformations and solitons*. Math. Sci. Press Brookline, MA, 1976.
24. HIROTA, Ryogo. Exact solution of the Korteweg—de Vries equation for multiple collisions of solitons. Physical review letters, 1971, 27(18), 1192.
25. HOSSEINI, Kamyar, Peyman MAYELI ir Reza ANSARI. Bright and singular soliton solutions of the conformable time-fractional Klein–Gordon equations with different nonlinearities. Waves in Random and Complex Media, 2018, 28(3), 426-434.
26. INFELD, Eryk ir George ROWLANDS. *Nonlinear waves, solitons and chaos*. Edtion ed.: Cambridge university press, 2000. ISBN 0521635578.
27. IONESCU, C, A LOPES, Dana COPOT, JA Tenreiro MACHADO, et al. The role of fractional calculus in modeling biological phenomena: A review. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2017, 51, 141-159.
28. KEVREKIDIS, Panayotis G, Dimitri J FRANTZESKAKIS ir Ricardo CARRETERO-GONZÁLEZ. *Emergent nonlinear phenomena in Bose-Einstein condensates: theory and experiment*. Edtion ed.: Springer Science & Business Media, 2007. ISBN 3540735917.
29. KHUDAIR, Ayad R ir SAM HADDAD. Restricted fractional differential transform for solving irrational order fractional differential equations. Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 101, 81-85.
30. KILBAS, AA, HM SRIVASTAVA ir JJ TRUJILLO. Theory and Applications of fractional derivatial Equations. North-Holland Mathematics Studies, 2006, 204.
31. KRUSKAL, MD, CS GARDNER, JM GREEN ir RM MIURA. Method for solving Korteweg–de Vries equation. Phys. Rev. Lett, 1967, 19, 1095-1098.
32. KUDRYASHOV, Nikolai A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 24(5), 1217-1231.
33. KUDRYASHOV, Nikolai A. On "new travelling wave solutions" of the KdV and the KdV–Burgers equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009a, 14(5), 1891-1900.
34. KUDRYASHOV, Nikolai A. Seven common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009b, 14(9-10), 3507-3529.
35. KUDRYASHOV, Nikolai A ir Nadejda B LOGUINOVA. Be careful with the Exp-function method. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(5), 1881-1890.
36. KUMAR, Manoj ir Varsha DAFTARDAR-GEJJI. A new family of predictor-corrector methods for solving fractional differential equations. Applied Mathematics and Computation, 2019, 363, 124633.
37. KURAKIN, VL, AS KUZMIN, AV MIKHALEV ir AA NECHAEV. Linear recurring sequences over rings and modules. Journal of Mathematical Sciences, 1995, 76(6), 2793-2915.
38. LACROIX, Silvestre François. Traité du calcul différentiel et du calcul intégral Tome 3. Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 1819.
39. LIAO, Shi-Jun. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems. Ph. D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University Shanghai, 1992.
40. LIOUVILLE, Joseph. *Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions*. Edtion ed., 1832.
41. LIU, Lei, Bo TIAN, Han-Peng CHAI ir Yu-Qiang YUAN. Certain bright soliton interactions of the Sasa-Satsuma equation in a monomode optical fiber. Physical Review E, 2017, 95(3), 032202.
42. MA, Wen-Xiu ir Jyh-Hao LEE. A transformed rational function method and exact solutions to the 3+ 1 dimensional Jimbo–Miwa equation. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 42(3), 1356-1363.

43. MATVEEV, VB. Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomtcev-Petviaschvily equation, depending on functional parameters. Letters in Mathematical Physics, 1979, 3(3), 213-216.
44. NAVICKAS, Z, T TELKSNYS, R MARCINKEVICIUS ir M RAGULSKIS. Operator-based approach for the construction of analytical soliton solutions to nonlinear fractional-order differential equations. Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 104, 625-634.
45. NAVICKAS, Zenonas ir L BIKULČIENE. Expressions of solutions of ordinary differential equations by standard functions. Mathematical Modelling and Analysis, 2006, 11(4), 399-412.
46. NAVICKAS, Zenonas, Liepa BIKULCIENE ir Minvydas RAGULSKIS. Generalization of Exp-function and other standard function methods. Applied Mathematics and Computation, 2010a, 216(8), 2380-2393.
47. NAVICKAS, Zenonas, Liepa BIKULCIENE, Maido RAHULA ir Minvydas RAGULSKIS. Algebraic operator method for the construction of solitary solutions to nonlinear differential equations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(6), 1374-1389.
48. NAVICKAS, Zenonas ir Minvydas RAGULSKIS. How far one can go with the Exp-function method? Applied Mathematics and Computation, 2009, 211(2), 522-530.
49. NAVICKAS, Zenonas, Minvydas RAGULSKIS ir Liepa BIKULCIENE. Be careful with the Exp-function method–additional remarks. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010b, 15(12), 3874-3886.
50. NAVICKAS, Zenonas, Tadas TELKSNYS, Inga TIMOFEJEVA, Romas MARCINKEVIČIUS, et al. An operator-based approach for the construction of closed-form solutions to fractional differential equations. Mathematical Modelling and Analysis, 2018, 23(4), 665-685.
51. ORTEGA, A, JJ ROSALES, JM CRUZ-DUARTE ir M GUIA. Fractional model of the dielectric dispersion. Optik, 2019, 180, 754-759.
52. PAL, Subrata. Mechanical properties of biological materials. In *Design of Artificial Human Joints & Organs*. Springer, 2014, p. 23-40.
53. PARKES, EJ ir BR DUFFY. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations. Computer physics communications, 1996, 98(3), 288-300.
54. PARKES, EJ, BR DUFFY ir PC ABBOTT. The Jacobi elliptic-function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations. In.: Elsevier, 2002.
55. PORTER, Mason A. Experimental Results Related to DNLS Equations. In *The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation*. Springer, 2009, p. 175-189.
56. POURBABAEE, Marzieh ir Abbas SAADATMANDI. A novel Legendre operational matrix for distributed order fractional differential equations. Applied Mathematics and Computation, 2019, 361, 215-231.
57. RAYLEIGH, Lord. On waves. Phil. Mag., 1876, 1, 257-259.
58. RIEMANN, Bernhard. Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. Gesammelte Werke, 1876, 62(1876).
59. ROSS, Bertram. The development of fractional calculus 1695–1900. Historia Mathematica, 1977, 4(1), 75-89.
60. RUSSELL, John Scott. *Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*. Edtion ed., 1845.
61. SAADATMANDI, Abbas ir Mehdi DEHGHAN. A new operational matrix for solving fractional-order differential equations. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(3), 1326-1336.
62. SCOTT, Alwyn. *Encyclopedia of nonlinear science*. Edtion ed.: Routledge, 2006. ISBN 1135455589.
63. TARASOV, Vasily E. Fractional integro-differential equations for electromagnetic waves in dielectric media. Theoretical and Mathematical Physics, 2009, 158(3), 355-359.

64. TARASOV, Vasily E ir Valentina V TARASOVA. Time-dependent fractional dynamics with memory in quantum and economic physics. Annals of Physics, 2017, 383, 579-599.
65. TARASOV, Vasily E ir Valentina V TARASOVA. Macroeconomic models with long dynamic memory: Fractional calculus approach. Applied Mathematics and Computation, 2018, 338, 466-486.
66. TODA, Morikazu. Vibration of a chain with nonlinear interaction. In *Selected Papers of Morikazu Toda.* World Scientific, 1993, p. 97-102.
67. WANG, Mingliang, Xiangzheng LI ir Jinliang ZHANG. The (G′ G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. Physics Letters A, 2008, 372(4), 417-423.
68. WANG, Yu-Lan, Li-na JIA ir Hao-lu ZHANG. Numerical solution for a class of space-time fractional equation by the piecewise reproducing kernel method. International Journal of Computer Mathematics, 2019, 96(10), 2100-2111.
69. WHITHAM, Gerald Beresford. *Linear and nonlinear waves*. Edtion ed.: John Wiley & Sons, 2011. ISBN 1118031202.
70. ZABUSKY, Norman J ir Martin D KRUSKAL. Interaction of" solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Physical review letters, 1965, 15(6), 240.
71. ZHANG, Rongpei, Zijian HAN, Yongyun SHAO, Zhen WANG, et al. The numerical study for the ground and excited states of fractional Bose–Einstein condensates. Computers & Mathematics with Applications, 2019, 78(5), 1548-1561.
72. ZHOU, Qin, Abdullah SONMEZOGLU, Mehmet EKICI ir Mohammad MIRZAZADEH. Optical solitons of some fractional differential equations in nonlinear optics. Journal of Modern Optics, 2017, 64(21), 2345-2349.
73. ZÚÑIGA-AGUILAR, CJ, HM ROMERO-UGALDE, JF GÓMEZ-AGUILAR, RF ESCOBAR-JIMÉNEZ, et al. Solving fractional differential equations of variable-order involving operators with Mittag-Leffler kernel using artificial neural networks. Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 103, 382-403.