KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

Mantas Kaminickas

DAUGIAKRITERIJINIO SPRENDIMŲ PRIĖMIMO METODŲ TAIKYMAS INVESTICIJŲ PORTFELIO FORMAVIMUI

Baigiamasis magistro studijų projektas

Vadovai
Doc. dr. Audrius Kabašinskas

Doc. dr. Beata Šeinauskienė

KAUNAS, 2019

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

DAUGIAKRITERIJINIO SPRENDIMŲ PRIĖMIMO METODŲ TAIKYMAS INVESTICIJŲ PORTFELIO FORMAVIMUI

Baigiamasis magistro studijų projektas

Didžiųjų verslo duomenų analitika (6213AX001)

Vadovai
Doc. dr. Audrius Kabašinskas
2019 05 30

Doc. dr. Beata Šeinauskienė
2019 05 30

Recenzentas
Doc. dr. Kristina Šutienė
2019 05

Projektą atliko
Mantas Kaminickas
2019 05 30

KAUNAS, 2019

MAGISTRO BAIGIAMOJO PROJEKTO UŽDUOTIS

Išduota studentui: *Mantui Kaminickui* Grupė *DVDA-17*

1. Darbo tema:

Lietuvių kalba: *Daugiakriterijinio sprendimų priėmimo metodų taikymas investicijų portfelio formavimui*

Anglų kalba: *Application of multicriteria decision making techniques for investment portfolio formation*

2. Darbo tikslas: *Sukurti ir praktiškai pritaikyti optimalaus investicijų portfelio sudarymo algoritmą, paremtą daugiakriterijiniais sprendimų priėmimo metodais. Sudarytą algoritmą palyginti su kitais žinomais investicijų portfelio formavimo metodais.*

3. Reikalavimai ir sąlygos: *Darbas turi būti parengtas pagal KTU Matematikos ir gamtos mokslų fakulteto dekano patvirtintą dokumentą: „Baigiamųjų projektų rengimo ir gynimo metodiniai reikalavimai“.*

4. Projekto struktūra. *Turinys konkretizuojamas kartu su vadovu, atsižvelgiant į BBP pobūdį, pateiktą Metodinių reikalavimų 14 ir 15 punktuose.*

Įvadas, tikslai, uždaviniai, literatūros apžvalga, algoritmo ir jo dalių aprašymas ir analizė, algoritmo taikymas realiems duomenims, rezultatų aptarimas ir palyginimas, išvados.

5. Ekonominė dalis. *Jei reikia ekonominio pagrindimo; turinys ir apimtis konkretizuojama darbo eigoje kartu su vadovu.*

-

6. Grafinė dalis. *Jei reikia, pateikiama schemos, algoritmai ir surinkimo brėžiniai; turinys ir apimtis konkretizuojama darbo eigoje kartu su vadovu.*

Pateikiama sudaryto algoritmo struktūrinė schema.

5. Ši užduotis yra neatskiriama magistro baigiamojo projekto dalis

6. Projekto pateikimo gynimui kvalifikacinėje komisijoje terminas *iki 2019 05 31*
(data)

Užduotį gavau: *Mantas Kaminickas* *2019 02 27*
(studento vardas, pavardė, parašas) *(data)*

Vadovas: *Doc. dr. Audrius Kabašinskas* *2019 02 27*
(pareigos, vardas, pavardė, parašas) *(data)*

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas
(Fakultetas)
Mantas Kaminickas
(Studento vardas, pavardė)
Didžiųjų verslo duomenų analitika (6213AX001)
(Studijų programos pavadinimas, kodas)

Baigiamojo projekto „Daugiakriterijinio sprendimų priėmimo metodų taikymas investicijų portfelio formavimui“

AKADEMINIO SĄŽININGUMO DEKLARACIJA

2019 m. gegužės mėn. 30 d.
Kaunas

Patvirtinu, kad mano, Manto Kaminicko, baigiamasis projektas tema „Daugiakriterijinio sprendimų priėmimo metodų taikymas investicijų portfelio formavimui“ yra parašytas visiškai savarankiškai, o visi pateikti duomenys ar tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti sąžiningai. Šiame darbe nei viena dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar internetinių šaltinių, visos kitų šaltinių tiesioginės ir netiesioginės citatos nurodytos literatūros nuorodose. Įstatymų nenumatytų piniginių sumų už šį darbą niekam nesu mokėjęs.

Aš suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo faktui, man bus taikomos nuobaudos, remiantis Kauno technologijos universitete galiojančia tvarka.

(vardą ir pavardę įrašyti ranka) *(parašas)*

Kaminickas, M. Daugiakriterijinio sprendimų priėmimo metodų taikymas investicijų portfelio formavimui. Magistro baigiamasis projektas / vadovas doc. dr. Audrius Kabašinskas; Kauno technologijos universitetas, Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas, Taikomosios matematikos katedra.

Mokslo kryptis ir sritis: Didžiųjų verslo duomenų analitika, Matematikos mokslai.

Reikšminiai žodžiai: *investicijų portfelis, investicijų portfelio formavimo metodai, daugiakriterijinis optimizavimas, kopula funkcijos.*

Kaunas, 2019. 55 p.

SANTRAUKA

Pagrindinis investuotojo uždavinys yra optimaliai paskirstyti savo turtą, investuojant į įvairias investavimo priemones. Tačiau tai nėra paprasta užduotis, kadangi finansinių priemonių kainas veikia daugybė skirtingų ir nuolat kintančio reikšmingumo veiksnių, kaip, pavyzdžiui, centrinių bankų politika, žaliavų kainos, technologijų raida, politinė situacija ir kiti. Įprastai investicijų portfelio formavimui taikomi įvairūs sprendimų priėmimo metodai, paremti matematinio optimizavimo, skirtingų euristikų ir kriterijų taikymu. Tačiau visi metodai remiasi tam tikromis prielaidomis, kurios vienu investavimo laikotarpiu gali realizuotis, o pasikeitus situacijai rinkoje, nustoti veikti. Viena iš tokių prielaidų yra priimti, jog visi investuotojai veikia tik racionaliai. Šia prielaida remiasi dauguma matematinio optimizavimo metodų. Racionalumo prielaida reiškia, jog rinkoje investicijos bus nukreiptos į tokius investavimo priemonių derinius, kurie, remiantis esama informacija, yra optimalūs ir ateityje turėtų pasiekti didžiausią investicinę grąžą, tam tikram rizikos lygiui. Tačiau tyrimai rodo, jog investuotojų racionalumas yra labiau išimtis, negu taisyklė, todėl taip pat kuriami ir taikomi priešinga prielaida besiremiantys metodai. Dėl skirtingų metodų gausos, investuotojui sunku pasirinkti, kuris būtų tinkamiausias pagal jo keliamus tikslus ir priimtiną rizikos lygį. Todėl šio darbo tikslas palyginti skirtingomis prielaidomis besiremiančius metodus ir sukurti daugiakriterijinį portfelio formavimo metodą, kuris apjungtų įvairius metodus bei padėtų išnaudoti jų stipriąsias puses.

Darbe taikomi investicijų portfelio optimizavimo metodai pagal CVaR ir diversifikacijos rodiklius bei Markowitz modelis su išskirtims atspariais kovariacijų matricos sudarymo metodais. Taip pat sudaromi inercijos momentų ir slankiųjų vidurkių metodai, kurie remiasi investuotojų iracionalumo prielaida. Papildomai pasiūlytas portfelio formavimo metodas pagal Tarptautinės ekonominio bendradarbiavimo ir plėtros organizacijos skaičiuojamus pirmaujančius indikatorius. Skaičiavimuose reikalingų scenarijų generavimui naudojama Studento kopulos funkcija, apjungianti vienmačius Studento skirstinius. Daugiakriterijinis portfelio formavimo algoritmas sudaromas apjungiant skirtingus metodus, su automatiškais parinktais svoriais. Sudaryti metodai palyginami pagal įvairius ekonometrinius ir statistinius kriterijus bei statistinius testus.

Gauti rezultatai parodė, jog analizuojamu laikotarpiu nuo 1988 metų pradžios iki 2018 metų pabaigos, statistiškai reikšmingai didžiausią grąžą būtų sugeneravęs pagal darbe pasiūlytą pirmaujančių indikatorių metodiką sudarytas investicijų portfelis, lyginant su kitais šiame darbe analizuotais investicijų portfeliais. Darbe pasiūlyto daugiakriterijinio metodo metinė grąžą gavosi vidutiniškai apie 3,8% mažesnė už pirmaujančių indikatorių portfelio grąžą, tačiau pagal rizikos rodiklius daugiakriterijinis metodas geresnis ir leidžia gauti panašius grąžos ir rizikos santykio rodiklius, kaip ir pirmaujančių indikatorių portfelis. Stochastinio dominavimo testas neparodė nei vieno iš šių

metodų pranašumo. Darbe pasiūlyti daugiakriterijinis ir pirmaujančių indikatorių portfelio formavimo metodai galėtų būti gera alternatyva praktiškai taikomiems investicijų portfelio formavimo metodams.

Kaminickas, M. Application of Multicriteria Decision Making Techniques for Investment Portfolio Formation. Masters's thesis / supervisor assoc. prof. Audrius Kabašinskas. Kaunas University of Technology, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, department of Applied Mathematics

Research area and field: Business Big Data Analytics, Mathematical Sciences.

Key words: *investment portfolio, investment portfolio formation methods, multicriteria optimization, copula functions.*

Kaunas, 2019. 55 p.

SUMMARY

The main goal for the investor is to optimally distribute his wealth between several securities. However, it’s not an easy task, as price of the securities might vary significantly due to many external factors, such as central banks regulation, raw materials price, technological breakthrough, political situation and etc. Therefore, for this purpose investors most commonly use decision-making techniques, that are based on mathematical optimization or heuristic parameters. The problem is that all methods rely on assumptions, that might be valid during one time period, but not valid during another. One of many assumptions states that investors’ decisions are only rational. This assumption is especially common with mathematical optimization methods. The idea behind it is that rational investor will always invest into the portfolio, which judging on the existing information, will allow to earn the best return for the accepted risk. However, researches show that rationality of the investors is more of the exception rather than rule, therefore methods that rely on the opposite assumption are also under the development. The goal of this work is to compare different investment portfolio formation methods, and to create the multicriteria decision making algorithm for portfolio optimization by combining different type methods.

For investment portfolio formation we will use CVaR and diversification parameter optimization methods as well as classical Markowitz model with robust covariance matrix estimation techniques. Also, inertia momentum and moving average methods will be used as these methods do not rely on the investor rationality assumption. Additionally, in this work we will create simple investment portfolio formation technique, that will rely on leading economic indicators by Organization for Economic Co-operation and Development. For scenario generation, Student copula function will be used. Also, multicriteria decision making algorithm will be created by combining single criteria methods with automatic estimation of their significance. All methods under the consideration will be compared using various econometric and statistic parameters as well as tests.

Results derived in this work show that during the analyzed period from 1988 to 2018 inclusively, leading economic indicators method allowed to earn the highest return if compared to other models tested in this work. Multicriteria model generated 3,8% smaller average annual return. However, multicriteria model is less risky and because of this it has a similar return to risk ratio as a leading economic indicators portfolio. These two methods can be a good alternative for practically used investment portfolio formation techniques.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Problemos formulavimas

Investicijų portfelio formavimui taikomi įvairūs sprendimų priėmimo metodai, paremti matematinio optimizavimo, skirtingų euristikų ir kriterijų taikymu. Tačiau visi metodai remiasi tam tikromis prielaidomis, kurios vienu investavimo laikotarpiu gali realizuotis, o pasikeitus situacijai rinkoje – nustoti veikti.

Pagal šiuolaikinę portfelio teoriją priimama svarbi prielaida, jog investuotojai veikia tik racionaliai [1]. Ši prielaida reiškia, jog rinkoje investicijos bus nukreiptos į tokius investavimo priemonių derinius, kurie, remiantis esama informacija apie investavimo priemonių grąžas, yra optimalūs ir ateityje turėtų pasiekti didžiausią investicinę grąžą, tam tikram rizikos lygiui. Investuotojų racionalumo prielaida įprastai remiasi dauguma matematinio optimizavimo metodų. Tačiau tyrimai rodo, jog praktiškai investuotojų racionalumas yra labiau išimtis, negu taisyklė [2]. Investuotojai yra linkę investuoti remianti asmeniniais įsitikinimais bei įvairių prognozių ir išorinių informacijos šaltinių formuojama nuomone, o ne pagal istorines investavimo priemonių grąžas. Todėl taip pat kuriami ir taikomi metodai, kurie kai kuriais atvejais leidžia pasinaudoti iracionaliu investuotojų elgesiu ir taip uždirbti didesnę grąžą. Iš to kyla probleminiai klausimai: kurie iš šių skirtingų metodų geriau tinka portfelio formavimo uždaviniui spręsti bei ar galima gauti geresnį metodą, apjungus šių dviejų skirtingų tipų metodus?

Darbo aktualumas

Investicinio turto paskirstymas kelioms skirtingoms investavimo priemonėms leidžia pagerinti investavimo sąlygas, suteikiant finansinių priemonių visumai tokias charakteristikas, kurios nebūtų pasiekiamos investavus tik į vieną iš tų priemonių [3]. Taigi pagrindinis investuotojo uždavinys yra optimaliai paskirstyti savo turtą įvairioms investavimo priemonėms. Tačiau tai nėra paprasta užduotis, kadangi finansinių priemonių kainas veikia daugybė skirtingų ir nuolat kintančio reikšmingumo veiksnių, kaip, pavyzdžiui, centrinių bankų politika, žaliavų kainos, technologijų raida, politinė situacija ir kiti. Todėl nėra sukurta vieno geriausio metodo investicijų portfelio formavimui, tačiau nuolatos ieškoma, kaip sukurti geresnius metodus šiam svarbiam uždaviniui spręsti. Šiuo darbu prisidedama prie investicijų portfelio formavimo metodų raidos, pasiūlant ir ištestuojant daugiakriterijinį investicijų portfelio formavimo algoritmą.

Tikslas ir uždaviniai

Darbo tikslas sukurti ir su realiais duomenimis ištestuoti daugiakriterijinį investicijų portfelio formavimo algoritmą, kuris leistų apjungti skirtingus investicijų portfelio formavimo metodus.

Tikslui pasiekti keliami uždaviniai:

- Atliekama pasirinktų metodų teorijos analizė.
- Atliekama didžiųjų duomenų įtraukimo į investicijų portfelio sudarymo procesą galimybių analizė.
- Sukuriamas daugiakriterijinio investicijų portfelio formavimo algoritmas.
- Sukuriama kompiuterinė programa pasirinktų metodų pritaikymui.

- Atliekama investavimo priemones ir finansų rinkas aprašančių duomenų analizė.
- Atliekama metodų validacija ir gautų rezultatų analizė.
- Apibendrinamos darbo metu gautos išvados.

Skyrių apibendrinimas

Skyriuje „DARBO TEORINIS APRAŠYMAS“ pateikiama literatūros apžvalga ir teorinė informacija apie investicijų grąžų skaičiavimą, grąžų aprašymui taikomus skirstinius, scenarijų generavimo metodus, matematinio optimizavimo ir kitus investicijų portfelio formavimui taikomus metodus, metodų apjungimo ir palyginimo būdus.

Skyriuje „METODIKA“ pagrindžiamas investavimo priemonių pasirinkimas, nurodomi duomenų šaltiniai bei pateikiamas darbe pasiūlyto daugiakriterijinio investicijų portfelio formavimo algoritmas.

Skyriuje „MODELIŲ TAIKYMAS IR REZULTATŲ ANALIZĖ“ aprašomi rezultatai gaunami pritaikius pasirinktus metodus. Rezultatai apibendrinami skyriuje „IŠVADOS“.

1. DARBO TEORINIS APRAŠYMAS

1.1. Investavimo priemonių grąžų skaičiavimas

Darbe analizuojamos investavimo priemonės aprašomos istorinių grąžų laiko eilutėmis. Praktiniuose skaičiavimuose įprastai taikoma aritmetinės grąžos skaičiavimo formulė:

$$R_{[t-1,t]} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \tag{2.1.1}$$

kur $R_{[t-1,t]}$ – analizuojamo intervalo $[t-1, t]$ grąža, P_{t-1} ir P_t – investavimo priemonės kaina intervalo pradžioje ir pabaigoje atitinkamai. Aritmetinė grąža tinka apskaičiuoti realų vertės pokytį, tačiau turi kelis, taikymui matematiniame modeliavime neparankius, trūkumus [4]:

1. kelių periodų suminė grąža skaičiuojama dauginant aritmetines grąžas, todėl susiduriama su problemomis, kai grąžos yra artimos nuliui.
2. Aritmetinė grąža yra nesimetrinė, todėl investavimo priemonės kainą tinka skaičiuoti tik viena kryptimi.

Kaip alternatyva aritmetinei grąžai, matematiniame modeliavime naudojama logaritminė grąža, neturinti anksčiau minėtų trūkumų. Logaritminės grąžos skaičiavimo formulė:

$$R_{[t-1,t]} = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right). \tag{2.1.2}$$

Šiame darbe modeliai sudaromi pagal logaritminę grąžą, o portfelių rezultatai apskaičiuojami pagal aritmetinės grąžos formulę.

1.2. Tikimybiniai skirstiniai

Investavimo priemonių grąžų duomenys aprašomi tikimybiniais skirstiniais. Literatūros šaltiniuose [5], [6] ir [7] tam rekomenduojama naudoti Studento skirstinį, kuris leidžia įvertinti retai pasitaikančius, tačiau kelis kartus standartinį nuokrypį viršijančius kainų pokyčius. Tačiau investavimo priemonių grąžų aprašymui praktikoje taip pat plačiai taikomas normalusis skirstinys, kuris geriau tinka mažiau rizikingų investavimo priemonių grąžoms modeliuoti. Todėl parenkant geriausiai investavimo priemonių grąžas aprašančius skirstinius, šiame darbe taikomi normalusis ir Studento skirstiniai.

Normalusis skirstinys ypač plačiai taikomas praktikoje. Šio skirstinio taikymas dažnai grindžiamas Centrine ribine teorema, pagal kurią didelis skaičius nepriklausomų arba silpnai priklausomų atsitiktinių dydžių nusakomi normaliuoju skirstiniu [8]. Normaliojo skirstinio tankio funkcija aprašoma formule:

$$p(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.2.1}$$

kur μ – atsitiktinio dydžio vidurkis, σ – atsitiktinio dydžio standartinis nuokrypis.

Tačiau remiantis šaltiniu [9], investavimo priemonių grąžų skirstiniai pasižymi sunkiomis uodegomis, susidarančiomis dėl didelių investicinio turto kainų pokyčių, įprastai ekonominių recesijų metu. Retai pasitaikantiems, tačiau dideliems kainų pokyčiams modeliuoti, naudojamas Studento skirstinys, kurio tankio funkcija:

$$p(x,v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}, \tag{2.2.2}$$

kur v – pagrindinis Studento skirstinio parametras – laisvės laipsnių skaičius, o $\Gamma(\cdot)$ – gamma funkcija išreiškiama:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx. \tag{2.2.3}$$

1.3.Kopula funkcijos scenarijų generavimui

Scenarijai šiame darbe apibrėžia galimus investicinio turto vertės pokyčius. Tinkamai sudaryti scenarijai atkartoja ne tik vienmačių skirstinių momentus bet ir jų tarpusavio koreliacijas. Dėl šios priežasties netikslu būtų scenarijus generuoti tik pagal vienmačius skirstinius, tam reikalingi daugiamačiai skirstiniai, kurie aprašytų koreliacijas tarp skirtingų investavimo priemonių.

Dauguma scenarijų generavimo algoritmų remiasi Monte Karlo metodu ir atkartoja svarbiausius atsitiktinių dydžių vienmačių skirstinių momentus bei tiesines koreliacijas tarp jų [10]. Tačiau detalesnis tyrimai parodė, jog tiesinės koreliacijos nepakanka aprašyti finansinių priemonių grąžų priklausomybei [11]. Todėl scenarijų generavimui buvo pritaikytos kopula funkcijos, kurios ne tik leidžia apjungti vienmačius skirstinius, bet ir įvertinti netiesinę koreliaciją tarp investavimo priemonių grąžų [12]. Pavyzdžiui, finansinių recesijų metu, koreliacija tarp daugumos investavimo priemonių gali būti didesnė, negu įprastai, kadangi stipriai krenta visų turto klasių kaina. Tokia koreliacija nėra tiesinė. Pagrindinės kopulos funkcijų teoremos aprašytos šaltinyje [13].

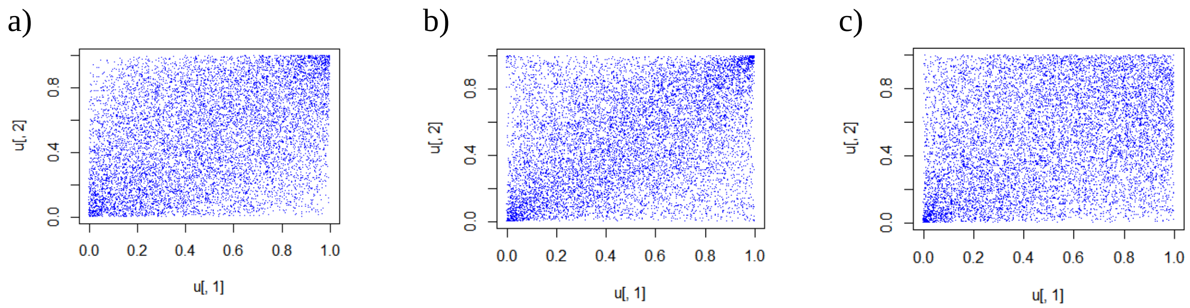
Teorema 2.3.1 (Sklar teorema) *Tarkime, jog $F \in F(F_1, \dots, F_n)$ yra n – dimensinė pasiskirstymo funkcija sudaryta iš tolygiųjų vienmačių skirstinių $F_1, \dots F_n$. Tuomet egzistuoja kopula funkcija $C(\cdot)$, tokia kad $F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$.*

Šaltinyje [14] įrodyta, jog jeigu $F_i(x_i)$ skirstiniai yra tolygūs ir generuoja tolygiai pasiskirsčiusius atsitiktinius kintamuosius $u_i = F_i(x_i)$, tai galima užrašyti $x_i = F_i^{-1}(u_i)$, kur $F_i^{-1}(\cdot)$ yra skirstinio funkcijos $F_i(x_i)$ inversija. Remiantis šia išvada, Sklar teorema gali būti užrašoma:

$$C(u_1, \dots, u_n) = C(\boldsymbol{u}) = F\left(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)\right), \qquad \boldsymbol{u} \in [0,1]^n. \tag{2.3.1}$$

Pagal (2.3.1) matome, jog kopula yra daugiamačio skirstinio funkcija, aprašanti tolygiai pasiskirsčiusius atsitiktinius kintamuosius.

Finansinių grąžų modeliavimui įprastai naudojamos Gauso, Studento ar Claytono kopulos. Šių kopulų sklaidos diagramų pavyzdžiai dvimačiu atveju pateikiami 1.1 paveiksle.



1.1 pav. Kopulos funkcijų sklaidos diagramos: a – Gauso kopula, b – Studento kopula, c – Claytono kopula

Pagal sklaidos diagramas matome, jog Gauso kopulos reikšmės pasiskirsto beveik tolygiai, prie bet kokių vienmačių kintamųjų reikšmių. Studento kopulos reikšmės tankesnės, kai abu vienmačiai kintamieji atitinka maksimalias arba minimalias reikšmes. Todėl modeliuojant investavimo priemonių grąžas su Studento kopula, būtų įvertinama stipresnė koreliacija labai neigiamoms ir teigiamoms finansinių priemonių grąžoms. Claytono kopulos reikšmės sutankėja, tik kai abiejų vienmačių kintamųjų reikšmės yra minimalios. Vadinasi, tokia kopilos funkcija leistų įvertinti stipresnę finansinių priemonių grąžų koreliaciją finansinių recesijų metu.

Gauso kopulos funkcija aprašoma [15]:

$$C(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{P}|}} e^{-0.5\boldsymbol{N}^{-1}(\boldsymbol{u})^T(\boldsymbol{P}^{-1}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{N}^{-1}(\boldsymbol{u})}, \tag{2.3.2}$$

kur $\boldsymbol{N}^{-1}(\boldsymbol{u}) = \left(N^{-1}(u_1), \dots, N^{-1}(u_n)\right)^T$, N yra standartinio normaliojo skirstinio funkcija, $u_i = F_i(x_i)$, $\boldsymbol{P}$ yra koreliacijų matrica, o $|\cdot|$ yra determinanto operatorius. Sudarant Gauso kopulą, parenkama koreliacijų matrica $\boldsymbol{P}$ tokia, kad maksimizuotų tikėtinumo funkciją visiems stebiniams $t = 1, \dots, T$. Darbe taikoma tikėtinumo funkcija:

$$\ln(L) = \sum_{t=1}^{T} \ln c\left(F_1(x_{t,1}), \dots, F_n(x_{t,n})\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} \ln f_i(x_{t,i}) \tag{2.3.3}$$

Studento kopulos funkcija aprašoma [15]:

$$C(\boldsymbol{u}) = \frac{(\Gamma\left(\frac{v}{2}\right))^{n-1}\left(\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)\left(1+\frac{\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{u})}{v}\right)\right)^{-\frac{v+n}{2}}}{\left(\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)^n\sqrt{|\boldsymbol{P}|}\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{v}\left(\Phi^{-1}(u_i)\right)^2)\right)^{-\frac{v+1}{2}}},$$

kur $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{u}) = \left(\Phi^{-1}(u_1),\dots,\Phi^{-1}(u_n)\right)^T$, Φ yra Studento skirstinio funkcija, $u_i = F_i(x_i)$, $\boldsymbol{P}$ yra koreliacijų matrica, $|\cdot|$ yra determinanto operatorius, v yra laisvės laipsnių skaičius, o $\Gamma(\cdot)$ gamma funkcija. Šios kopula funkcijos atveju, optimizuojant tikėtinumo funkcijos reikšmę, parenkamos $\boldsymbol{P}$ ir v reikšmės.

Claytono kopulos funkcija aprašoma [16]:

$$C(\boldsymbol{u}) = \left[\max\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{-\alpha} - n + 1\right)\right]^{-\frac{1}{\alpha}},$$

kai $\alpha > 0$, Claytono kopula leidžia modeliuoti $n \geq 2$ vienmačių skirstinių, jeigu $\alpha \in [-1,0)$, tada leistinas skirstinių skaičius $n \leq 1 - \frac{1}{\alpha}$.

Remiantis tarptautinio investicinio banko J.P. Morgan ataskaita [17], grąžų modeliavimui rekomenduojama naudoti Studento kopulos funkciją. Ši kopulos funkcija leidžia įvertinti stipresnę grąžų koreliacija finansinių recesijų ir spartaus kainų augimo metu.

Sudarius kopulos funkciją, scenarijai generuojami Monte Carlo metodu.

1.4.Investicijų portfelio formavimas

Investicijų portfelio formavimas, tai procesas, kurio metu parenkami svoriai portfelį sudarančioms investavimo priemonėms, siekiant optimalios reikšmės, pasirinktai tikslo funkcijai. Įprastai keliamas tikslas maksimizuoti tikėtiną grąža arba(ir) minimizuoti riziką. Toliau aprašysime darbe taikytus investicijų portfelio formavimo metodus.

1.5.Portfelio formavimas pagal slankųjį vidurkį ir turto klasių inertiškumo rodiklį

Šaltinyje [2] pasiūlyti du metodai investicijų portfelio formavimui pagal slankiųjų vidurkių ir inertiškumo rodiklius. Šie du metodai galimai leidžia prognozuoti realių investuotojų elgesį ir portfelyje padidinti tų turto klasių dalį, į kurias gali padidėti globalaus kapitalo judėjimas bei sumažinti kitų turto klasių, jeigu tikimasi kapitalo patraukimo iš atitinkamų pozicijų.

Inertiškumo rodiklis $M(t)$ skaičiuojamas pagal formulę:

$$M(t) = \frac{P(t)}{P(t-\tau)}, \tag{2.5.1}$$

kur P(t) – investavimo priemonės kaina duotuoju momentu, $P(t-\tau)$ – investavimo priemonės kaina prieš τ mėnesių. Portfelis lygiomis dalimis formuojamas iš tokių vertybinių popierių ar turto klasių, kurių inertiškumas yra didžiausias [18]. Tačiau nėra iš anksto žinoma, kiek geriausių turto klasių pasirinkti bei kelių mėnesių (τ) inertiškumą skaičiuoti. Šiam klausimui spręsti, šaltinyje [2] rekomenduota taikyti Welch statistinį testą [19]. Šis testas leidžia palyginti nulinę hipotezę, jog pagal vieną modelį sudaryto investicijų portfelio grąžų vidurkis yra didesnis arba lygus kitu modeliu sudaryto portfelio grąžų vidurkiui. Tą patį galima padaryti ir su Studento t-testu, tačiau remiantis šaltiniais [20] ir [21], Welch testas yra patikimesnis, kai imčių dispersijos nėra lygios. Welch testo matematinė išraiška:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}}, \tag{2.5.2}$$

kur $\bar{X}_.$ – imties vidurkis, $\sigma_.^2$ – imties dispersija, $N_.$ – imties dydis. Skirstinio laisvės laipsnių ν aproksimacija atliekama pagal Welch – Satterthwaite lygtį:

$$\nu = \frac{\left(\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}\right)^2}{\frac{\sigma_1^4}{N_1^2(N_1-1)} + \frac{\sigma_2^4}{N_2^2(N_2-1)}}. \tag{2.5.3}$$

Analizei taikomas kiekviename investavimo žingsnyje pagal Welch testą atrinktas geriausias modelis.

Slankusis vidurkis (MA) skaičiuojamas pagal formulę:

$$MA = \frac{\sum_{t=1}^{N} P_t}{N}, \tag{2.5.1}$$

kur $\sum_{t=1}^{N} P_t$ – investavimo priemonės kainų suma per N laiko periodų, lygių vienam mėnesiui. Formuojant investicijų portfelį pagal MA rodiklį, investuojama į tas priemonės, kurių kaina P_t duotuoju momentu yra didesnė, už apskaičiuoto slankiojo vidurkio reikšmę. Kaip ir inertiškumo rodiklių metodo atveju, iš anksto nėra žinoma, kokio ilgio periodą pasirinkti slankiojo vidurkio skaičiavimui. Todėl taip pat sudaromi visi galimi portfeliai pagal šį rodiklį, o geriausias portfelis kiekviename investavimo žingsnyje atrenkamas pagal Welch testą.

Šiame skyriuje aptarti metodai nesiremia prielaida, jog visi rinkos dalyviai yra racionalūs, o atvirkščiai leidžia išnaudoti žinias apie rinkos dalyvių iracionalų elgesį.

1.6.Markowitz investicijų portfelio optimizavimo modelis

Pirmąjį portfelio optimizavimo modelį, kuris vertina ne tik investicinio turto grąžas, bet ir riziką, aprašė mokslininkas H. Markowitz, straipsnyje [1]. Šiame šaltinyje mokslininkas taip pat pasiūlė efektyvaus portfelio sąvoką, pagal kurią kiekvienam laukiamam pelningumo lygiui, egzistuoja efektyvus portfelis, kurio rizikingumas yra mažiausias, lyginant su kitais galimais variantais. Taigi egzistuoja daug efektyvių portfelių, iš kurių sau optimalų investuotojas gali pasirinkti pagal priimtiną rizikos lygį ar laukiamą grąžą. Markowitz investicijų portfelio optimizavimo modelio formuluotė:

$$\begin{gathered} \min \sigma^2 = \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{i} = 1, \\ \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\mu} \geq \mu_{min}. \end{gathered} \tag{2.6.1}$$

Šiame modelyje: σ^2 – portfelio grąžų dispersija, $\boldsymbol{\omega}$ – portfelį sudarančių investavimo priemonių svoriai, $\boldsymbol{\Sigma}$ – grąžų kovariacijų matrica, $\boldsymbol{i}$ – vienetinė matrica, $\boldsymbol{\mu}$ – tikėtinos investavimo priemonių grąžos, μ_{min} – minimali portfelio grąžą.

Minimali portfelio grąžą pasirenkama pagal investuotojui priimtiną rizikos lygį (didesnė grąžą lemia didesnę riziką ir atvirkščiai). Investuotojams priimtinam rizikos lygiui aprašyti, šaltinyje [22] buvo pasiūlytos abejingumo kreivės (angl.: utility function). Investicijų portfelio atveju, abejingumo kreivė rodo, kokią investicijų portfelio riziką toleruoja investuotojas, esant tam tikram pelningumui. Investuotojas žinodamas sau priimtiną rizikos lygį, iš efektyvių portfelių aibės, gali pasirinkti vieną jam tinkantį portfelį.

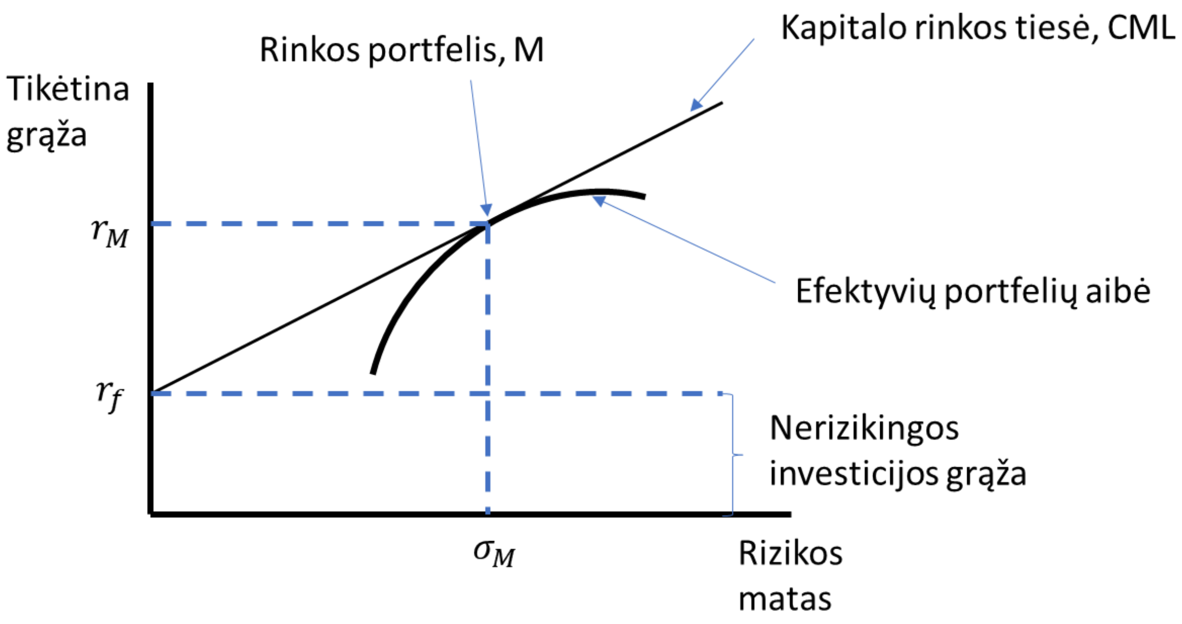
Tačiau praktinį Markowitz modelio ir abejingumo kreivės taikymą riboja keletas modelio trūkumų:

1. modelio rezultatas ypač jautrus prielaidoms apie tikėtinas grąžas [23],
2. modelis sudarytas remiantis prielaida, jog rinkos dalyviai veikia racionaliai (siekia maksimalios tikėtinos portfelio grąžos tam tikram rizikos lygiui), tačiau remiantis šaltiniu [2], reali situacija rinkoje šios prielaidos neatitinka,
3. modelyje taikomas jautrumo matas (dispersija), suteikia vienodai neigiamą prasmę tiek teigiamoms, tiek neigiamoms grąžoms,
4. vienintelis pagal abejingumo kreivę optimalus portfelis iš efektyvių portfelių aibės gaunamas, tik jeigu grąžos yra pasiskirsčiusios pagal normalųjį dėsnį.

Šiems trūkumams išspręsti, Markowitz modelio pagrindu buvo pasiūlyti geresni modeliai, kuriuos aptarsime kituose skyriuose.

1.7.Rinkos portfelis ir jo formavimas

Skyriuje 1.6 minėjome, jog Markowitz modelio rezultatas yra efektyvių portfelių aibė, kuri sudaroma investavimo priemonių svorius perskaičiuojant prie skirtingų μ_{min} reikšmių. Siekiant iš efektyvių portfelių aibės pasirinkti vieną optimalų portfelį, šaltiniuose [24] ir [25] buvo pasiūlyta rinkos portfelio idėja. Jai paaiškinti pateiksime 1.2 pav., kuriame grąžos ir rizikos ašių ribojamoje plokštumoje, pavaizduosime efektyvių portfelių aibę ir kapitalo rinkos tiesę (angl.: Capital Market Line, CML).



1.2 pav. Efektyvių portfelių aibė ir kapitalo rinkos tiesė grąžos – rizikos plokštumoje (sudaryta autoriaus pagal šaltinį [25])

Taškas „r_f“ grafike vaizduoja iš nerizikingų investicijų sudaryto portfelio grąžą. Rinkos portfelis nustatomas brėžiant liestinę efektyvių portfelių aibės kreivei iš taško „r_f“. Rinkos portfelis yra optimalus tikėtinos grąžos premijos už investavimą į rizikingas turto klases ir pasirinkto rizikos mato (pvz.: standartinis grąžų nuokrypis) santykio atžvilgiu. Šis praktikoje itin plačiai naudojamas santykis, vadinamas Sharp rodikliu, o jo skaičiavimo formulė užrašoma:

$$SR = \frac{r - r_f}{\sigma}, \qquad (2.7.1)$$

kur $r - r_f$ – grąžos premija už investavimą į rizikingas turto klases, σ – standartinis nuokrypis.

Gauta liestinė nuo taško „r_f“ iki taško „M“ vaizduoja portfelių, sudarytų įvairiomis proporcijomis paskirsčius investicinį kapitalą nerizikingoms investicijoms ir rinkos portfeliui, aibę. Taške „r_f“ visas kapitalas investuojamas į nerizikingas investicijas, o taške „M“ visas kapitalas investuojamas į rinkos portfelį. Svarbu pastebėti, jog tokiu būdu sudaryti portfeliai pagal grąžos ir rizikos santykį yra geresni už bet kurį portfelį iš efektyvių portfelių aibės. Todėl šaltinyje [24], optimalų portfelį pasiūlyta sudaryti toliau aprašytais dviem žingsniais:

1. pritaikius pasirinktą optimizavimo modelį, sudaroma efektyvių portfelių aibė;
2. optimalus krepšelis formuojamas investuojamą kapitalą paskirstant nerizikingoms investicijoms ir rinkos portfeliui, pagal investuotojui priimtiną rizikos lygį.

Jeigu investuotojui priimtina aukštesnė rizika, negu „σ_M“, o laukiama grąžą didesnė, negu „r_M“, tokiu atveju optimalus portfelis turėtų būti sudaromas visą nuosavą investicinį kapitalą bei už „r_f“ dydžio palūkanas skolintą kapitalą investuojant į rinkos portfelį.

Tačiau šios teorijos taikymas negarantuoja, jog pagal ją sudarytam investicijų portfeliui, pavyks uždirbti laukiamą grąžą. Pagrindiniai teorijos trūkumai pastebimi analizuojant teorijos kūrėjų priimtas prielaidas:

- rinkos dalyviai veikia racionaliai (siekia maksimalios tikėtinos portfelio grąžos, tam tikram rizikos lygiui);
- rinkoje egzistuoja nerizikinga investicija;
- investuotojas turi galimybę skolintis už palūkanas, lygias nerizikingos investicijos grąžai.

1.8.Išskirtims atsparūs kovariacijų matricos sudarymo metodai

Optimizuojant investicijų portfelį, tenka remtis pagal istorinius duomenis įvertintomis grąžos ir rizikos charakteristikomis. Pavyzdžiui, Markowitz modelyje buvo naudojami investavimo priemonių grąžų vidurkiai ir kovariacijų matrica. Tačiau tiek vidurkis, tiek kovariacijų matrica yra jautrūs išskirtims duomenyse [26], dėl to gali būti gaunami netikslūs šių svarbių modelio parametrų įverčiai bei atitinkamai blogas sprendinys. Ši problema gali būti sprendžiama pašalinant ar specialiai parinktu svoriu sumažinant išskirtis, kurioms atrasti, sukurta įvairių statistinių metodų. Remiantis šaltiniu [27], išskirčių nustatymui investavimo priemonių grąžas aprašančiuose duomenyse, rekomenduojama naudoti ortonormuotą Gnanadesikan–Kettenring (OGK) arba Stahel-Donoho (SDE) statistinius įverčius.

SDE taikymo metodika panašiu metu (1981) pasiūlyta šaltiniuose [28] ir [29]. Šiuo metodu apskaičiuojami svoriai, kurie leidžia sumažinti išskirtis. Svoriai apskaičiuojami pagal kriterijų „t“, kuris daugiamačio stebinio „x“ atveju randamas:

$$t(x,a) = \frac{x^T \boldsymbol{a} - \hat{\mu}(\boldsymbol{Xa})}{\hat{\sigma}(\boldsymbol{Xa})}. \tag{2.8.1}$$

Šioje formulėje $\hat{\sigma}(X)$ yra vidutinis absoliutinis nuokrypis, apskaičiuojamas pagal formulę $\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i - \bar{X}|}{n}$, $\hat{\mu}(X)$ – mediana, X – analizuojamų investavimo priemonių grąžų matrica, a – tiesinis operatorius, toks kad $\|a\| = 1$. Kriterijus „t“ skaičiuojamas su įvairiais operatoriais „a“. Galiausiai stebinio svoris nustatomas pagal didžiausią kriterijaus „t“ reikšmę.

OGK metodas pasiūlytas šaltinyje [30]. Šiuo metodu apskaičiuojama išskirtims atspari kovariacija, tarp kurių nors dviejų investavimo priemonių grąžų:

$$s_{jk} = 0.25\left(\sigma\left[\frac{\boldsymbol{X_j}}{\sigma(\boldsymbol{X_j})} + \frac{\boldsymbol{X_k}}{\sigma(\boldsymbol{X_k})}\right]^2 - \sigma\left[\frac{\boldsymbol{X_j}}{\sigma(\boldsymbol{X_j})} - \frac{\boldsymbol{X_k}}{\sigma(\boldsymbol{X_k})}\right]^2\right). \tag{2.8.2}$$

Šioje formulėje X – analizuojamų investavimo priemonių grąžų matrica, o X_i – i – tasis matricos stulpelis, $\sigma(\cdot)$ – išskirtims atsparus neapibrėžtumo matas. OGK metodo autoriai, neapibrėžtumui skaičiuoti, rekomenduojama naudoti statistinį τ–įvertį, pasiūlytą [31] straipsnyje. Šiam dydžiu apskaičiuoti, pirmiausiai randami išskirtis sumažinantys svoriai (angl.: „Robustness weights“):

$$\omega_i = \omega_c\left(\frac{x_i - med(\boldsymbol{X})}{s_0}\right), \tag{2.8.3}$$

kur $\omega_c(u) = \max\left(0, \left(1 - \left(\frac{u}{4.5}\right)^2\right)^2\right)$, funkcija $med(\cdot)$ grąžina atsitiktinio dydžio medianą, $s_0 = med(|X_i - \overline{\boldsymbol{X}}|)$. Šie svoriai toliau naudojami skaičiuojant išskirtims atsparią grąžą:

$$\mu(\boldsymbol{X}) = \frac{\sum_i \omega_i x_i}{\sum_i \omega_i}. \tag{2.8.4}$$

Galiausiai randamas rizikos įvertis:

$$\sigma(\boldsymbol{X}) = \sqrt{s_0^2 * \left(\frac{1}{n}\right) \sum_i \min\left(9, \left(\frac{x_i - \mu(\boldsymbol{X})}{s_0}\right)^2\right)}, \tag{2.8.5}$$

kur n – atsitiktinių dydžių aibę sudarantis stebinių skaičius.

1.9. Investicijų portfelio optimizavimas pagal diversifikacijos matus

Pagrindinė investicijų portfelio sudarymo idėja yra paskirstyti kapitalą tarp kelių, kuo mažiau koreliuojančių investicijų, tokiu būdu siekiant sumažinti bendrą portfelio riziką ir uždirbti didesnę grąžą už prisiimtą rizikos lygį. Ši investavimo technika vadinama diversifikacija. Šaltiniuose [32] ir [33] autoriai pasiūlė ir ištyrė investicijų portfelio diversifikaciją kiekybiškai įvertinantį rodiklį:

$$DR = \frac{\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}}}, \tag{2.9.1}$$

kur $\boldsymbol{\Sigma}$ – kovariacijų matrica, $\boldsymbol{\sigma}$ – investavimo priemonių standartiniai nuokrypiai, $\boldsymbol{\omega}$ – investavimo priemonių svoriai portfelyje. Formulėje skaitiklis rodo investicijų portfelio neapibrėžtumą, kuris apskaičiuojamas, kaip svorių ir investavimo priemonių grąžų standartinių nuokrypų vektorinė sandauga. Vardiklis rodo portfelio grąžų standartinį nuokrypį. Todėl kuo didesnis rodiklis „DR“, tuo jo grąžų neapibrėžtumas mažesnis už atskirų investavimo priemonių neapibrėžtumą, o portfelis labiau diversifikuotas.

Diversifikacijos rodiklį galima naudoti portfelio formavimui [33], tam gali būti naudojamas modelis:

$$\begin{gathered} \arg\max_{\omega \epsilon \Omega} DR, \\ \boldsymbol{\omega}^{T}\boldsymbol{i} = 1, \\ \boldsymbol{\omega}^{T}\boldsymbol{\mu} \geq \mu_{min}, \end{gathered} \tag{2.9.2}$$

kur DR – diversifikacijos rodiklis pagal formulę (2.10.1), o kitų parametrų reikšmės tokios pačios, kaip (2.7.1) modelyje.

1.10. Stochastinis optimizavimas

Investicijų portfelis turėtų būti formuojamas pagal investavimo priemonių grąžas ateityje. Tačiau einamuoju laiko momentu jos nėra žinomos ir autoriaus žiniomis nėra sukurtų metodų, kurie leistų patikimai prognozuoti finansinių priemonių grąžas. Todėl logiška investicijų grąžas aprašyti ne taškiniu įverčiu, bet atsitiktiniu dydžiu ir jį apibūdinančiu skirstiniu, o sprendinį optimizuoti pagal tikėtinas atsitiktinio dydžio baigtis. Toks optimizavimo uždavinys matematikoje vadinamas stochastiniu optimizavimu.

Praktikoje dažnai taikomas dviejų žingsnių stochastinio optimizavimo uždavinys, kai pirmuoju žingsniu randamas optimalus sprendinys pagal einamuoju momentu turimą informaciją, o antruoju žingsniu remiamasi žiniomis apie atsitiktinių dydžių baigtis [34]. Tipinis dviejų žingsnių stochastinio optimizavimo uždavinio pavyzdys būtų ūkininko problema. Pirmame žingsnyje sprendžiama, kaip padalinti turimą žemės plotą skirtingų kultūrų sodinimui, o antrame žingsnyje, turint informaciją apie derlių, sprendžiama kaip jį optimaliai realizuoti. Dviejų žingsnių stochastinio optimizavimo uždavinys užrašomas [34]:

$$
\begin{gathered}
\min_{\boldsymbol{x} \epsilon \boldsymbol{X}} \{ g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + E\big(Q(\boldsymbol{x}, \xi)\big) \}, \\
\boldsymbol{Ax} \ \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ \geq \boldsymbol{0}, \\
\min_{\boldsymbol{y} \epsilon \boldsymbol{Y}} \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{y}, \\
\boldsymbol{Tx} + \boldsymbol{Wy} \ \leq \boldsymbol{h}, \boldsymbol{y} \ \geq \boldsymbol{0}.
\end{gathered}
\tag{2.10.1}
$$

Modelyje vektorius $\boldsymbol{x}$ yra pirmojo žingsnio optimalūs sprendiniai, $\boldsymbol{X}$ – pirmojo žingsnio galimų sprendinių aibė, $\boldsymbol{Ax} \ \leq \boldsymbol{b}$ pirmojo žingsnio optimizavimo uždavinio ribojimai, $E(\cdot)$ – tikėtinumo funkcija, $Q(\boldsymbol{x}, \xi)$ – antrojo žingsnio optimizuojamos funkcijos optimalus sprendinys, $\xi = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{h})$ antrojo žingsnio optimizavimo uždavinio parametrai, $\boldsymbol{y}$ – antrojo žingsnio optimalių sprendinių vektorius.

Įprastas metodas stochastinio optimizavimo uždavinio sprendimui yra priimti, jog atsitiktinių parametrų vektorius ξ, turi baigtinį reikšmių, vadinamų scenarijais, skaičių. Scenarijai žymimi $\xi_1 \dots \xi_N$, kur N yra scenarijų skaičius, o jų tikėtinumas įvertinamas tikimybėmis $p_1 \dots p_N$. Tuomet tikėtinumo funkcija gali būti užrašoma [35]:

$$
E\big(Q(\boldsymbol{x}, \xi)\big) = \sum_{k=1}^{K} p_k \, Q(\boldsymbol{x}, \xi_k)
\tag{2.10.2}
$$

Sukūrus scenarijus ir priskyrus juos apibūdinančias tikimybes, stochastinis uždavinys gali būti išsprendžiamas įprastais optimizavimo metodais. Esant ypač dideliam scenarijų skaičiui, taikomi iteraciniai stochastinių uždavinių sprendimo metodai, tokie kaip „L-shaped“ ar „progressive hedging“ [34].

1.11. CVaR investicijų portfelio optimizavimo modelis

CVaR yra plačiai naudojamas rizikos vertinimo matas, lygus pasirinktą kvantilį viršijančių skirstinio reikšmių vidurkiui. CVaR apskaičiuojamas pagal formulę:

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(X)d\beta, \tag{2.11.1}$$

kur α – pasirinktas pasikliautinumo lygmuo, įprastai $\alpha\epsilon[0,9; 0,95]$, $VaR_\beta(X)$ – atsitiktinio dydžio X skirstinio β kvantilis – taip pat plačiai naudojamas rizikos matas. CVaR turi reikšmingų privalumų, lyginant su kitais rizikos vertinimo matais [36]:

- yra koherentinis rizikos matas, todėl portfelio riziką galima paprastai apskaičiuoti, kaip jį sudarančių investavimo priemonių CVaR sumą;
- CVaR funkcija yra iškiloji, todėl optimizuojant pagal CVaR, visada randamas globalus optimumas;
- įvertina tik neigiamus grąžų pokyčius, todėl teigiami grąžų pokyčiai neįtakoja CVaR reikšmės;
- CVaR minimizuoti pakanka tiesinio optimizavimo metodų.

Rizikos mato CVaR minimizavimą, kaip teisinio stochastinio optimizavimo uždavinį, išreiškė Rockafellar ir Uryasev straipsnyje [37]. CVaR tiesinio optimizavimo modelis formuluojamas:

$$\begin{gathered} \arg \min_{\omega\epsilon\Omega,\mathrm{VaR}\epsilon\mathbb{R}} VaR + \frac{1}{(1-\alpha)}\sum_{j=1}^{N} p_j y_j, \\ y_j \geq f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\mu_j}) - VaR, \\ y_j \geq 0, \\ \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{i} = 1, \\ \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\mu} \geq \mu_{min}, \end{gathered} \tag{2.11.2}$$

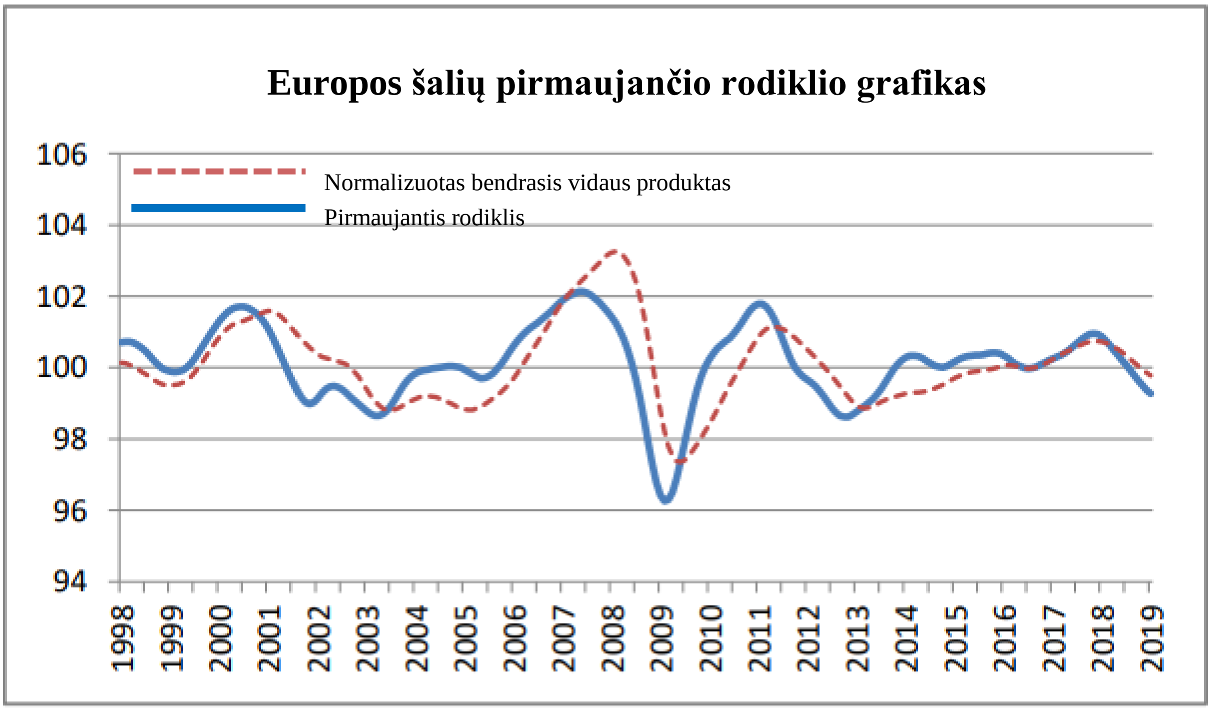
kur N – scenarijų, sudarytų pagal grąžas aprašantį daugiamatį skirstinį, skaičius, $f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\mu_j}) -$ nuostolių funkcija priklausanti nuo investavimo priemonių grąžų ir svorių portfelyje, įpratai naudojama $f(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\mu_j}) = \boldsymbol{\omega^T}\boldsymbol{\mu_j}$, p_j – tikimybė priimama lygi 1/ N.

Stochastiniam CVaR modeliui pritaikyti reikalingi scenarijai. Juos galima gauti scenarijų generavimo būdu, aprašytu 1.3 skyriuje. CVaR modelio sprendinys yra portfelio VaR ir portfelį sudarančių investavimo priemonių svoriai.

1.12. Išorinių duomenų panaudojimas portfelio formavimui

Iki šiol analizuoti investicijų portfelio formavimo modeliai sudaromi tik pagal investavimo priemonių grąžų duomenimis. Tačiau darbe keliamas tikslas, uždavinį išspręsti panaudojant didžiuosius duomenis. Didieji duomenys pasižymi kintamumu (angl.: data velocity), kiekiu (angl.: data volume) ir įvairove (angl.: data variety). Todėl tikslui pasiekti, būtina įtraukti išorinius duomenis, kadangi tai leistų investicijų portfelį formuoti ne tik pagal investavimo priemonių grąžas.

Atlikus įvairių išorinių duomenų analizę, nuspręsta pritaikyti Ekonominio Bendradarbiavimo ir Plėtros organizacijos (EBPO) [38] skaičiuojamus pirmaujančius rodiklius (angl.: „Leading indicators"). Šie rodikliai skirti prognozuoti ekonominio ciklo pokyčius. Pavyzdžiui, visoms Europos šalims apskaičiuoto rodiklio palyginimas su normalizuotu bendruoju vidaus produktu pateikiamas 1.3 paveiksle.



1.3 pav. Europos šalių bendrojo vidaus produkto ir pirmaujančio rodiklio grafikų palyginimas (sudaryta pagal šaltinį [38])

Pagal grafiką matome, jog rodiklis dar 2017 metų viduryje signalizavo apie 2018 metų ekonominės recesijos pradžią bei beveik 6 mėnesiais anksčiau rodė jos pabaigą. Taip pat ir kitais atvejais, pirmaujantis rodiklis iš anksto įspėja apie šalių bendrojo vidaus produkto pakilimus ir nuosmukius. Pirmaujantis rodiklis sudaromas pagal įvairius, kiekvienai šaliai atskirai parinktus, kriterijus. Vokietijos ir JAV atveju naudojami parametrai pateikiami 1.1 lentelėje. Rodiklių skaičiavimo metodika plačiau aprašoma ataskaitoje [39]. Pirmaujantys rodikliai kiekvieną mėnesį sudaromi atskiroms valstybėmis ir regionams bei apima laikotarpį nuo 1970 metų.

1.1 lentelė. Pirmaujančių rodiklių skaičiavimui naudojami parametrai

Valstybė	Rodiklių sąrašas
Vokietija	IFO verslo aplinkos indikatorius (angl.: IFO business climate indicator) (normuotas absoliutus)

Valstybė	Rodiklių sąrašas
	Produkcijos užsakymų pokytis (angl.: Orders inflow/demand (manuf.))(%) Produkcijos eksporto užsakymų pokytis (angl.: Export order books (manuf.)) (%) Naujų produkcijos užsakymų kiekis (angl.: New orders in manuf. Industry) (normuotas absoliutus) Sandėliuojamos produkcijos kiekio pokytis (angl.: Finished goods stocks (manuf.)) (%) Palūkanų normos pokytis (angl.: Spread of interest rates) (%) Paslaugų paklausos pokytis (angl.:Services – Demand evolution) (%) Vartotojų nuomonės indikatoriaus pokytis (angl.: Consumer - Confidence indicator) (%)
JAV	Pradėtų statybų skaičius (angl.: Work started for dwellings sa) (absoliutus) Suma išleista ilgalaikiam turtui įsigyti (angl.: Net new orders - durable goods sa) (USD) Akcijų kaina (angl.: Share prices: NYSE composite) (normuota) Vartotojų nuomonės indikatoriaus pokytis (angl.: Consumer - Confidence indicator)(%) Gamybos darbo valandų skaičius per savaitę (angl.: Weekly hours worked: manufacturing sa) (valandos) Gamybos įmonių nuomonės indikatoriaus pokytis (angl.: Manufacturing - Industrial confidence indicator) (%) Palūkanų normos pokytis (angl.: Spread of interest rates) (%)

Sudarant investicijų portfelį pagal pirmaujančius rodiklius priimama prielaida, jog ekonomikos nuosmukio atveju, turėtų reikšmingai mažėti rizikingomis laikomų turto klasių (akcijos ir nekilnojamas turtas) kaina, todėl geriau portfelyje laikyti mažiau rizikingas investavimo priemones, pavyzdžiui, obligacijas arba grynuosius pinigus. Ir atvirkščiai, jeigu prognozuojamas ekonomikos augimas, akcijų ir nekilnojamo turto kaina turėtų augti sparčiau, negu nerizikingų turto klasių, todėl portfelyje geriau laikyti rizikingas turto klases. Šiame darbe pasiūlytas paprastas investicijų portfelio sudarymo algoritmas pagal pirmaujančius rodiklius, aprašomas žemiau:

1. Slankiojo vidurkio metodu skaičiuojamas 3 paskutinių mėnesių (įskaitant ir einamąjį mėnesį) „OECD Total“ pirmaujančio rodiklio vidurkis.
2. Jeigu einamojo mėnesio pirmaujančio rodiklio reikšmė viršija vidutinę arba yra jai lygi, investuojama į „rizikingą portfelį“, kurį lygiomis dalimis sudaro akcijos ir nekilnojamas turtas. Jeigu einamojo mėnesio pirmaujančio rodiklio reikšmė mažesnė už vidutinę, apskaičiuotą pirmame žingsnyje, investuojama į „nerizikingą portfelį“, kurį lygiomis dalimis sudaro trumpalaikės ir ilgalaikės obligacijos.

1.13. Daugiakriterijinio investicijų portfelio formavimo metodo sudarymas

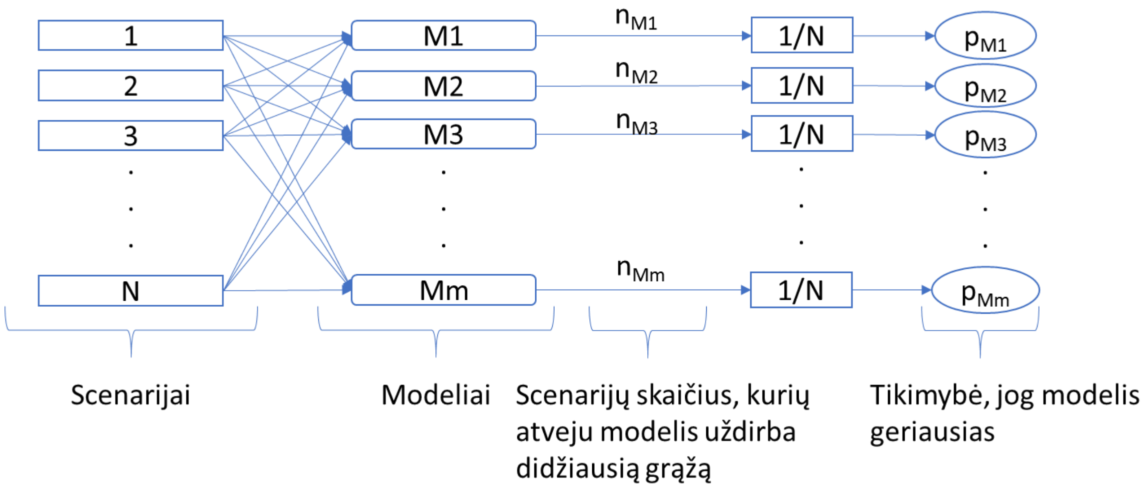
Remiantis šaltiniu [40], investicijų portfelio optimizavimo modelių kombinacijos gali aplenkti atskirus modelius. Kombinuotas modelis optimalų investicijų portfelį leidžia sudaryti pagal daug skirtingų kriterijų, dėl to geriau prisitaiko prie nuolat kintančios situacijos rinkoje. Pavyzdžiui, formuojant portfelį pagal momentų ar slankiųjų vidurkių metodus, labiau orientuojamasi į esamą situaciją rinkoje, tačiau neįvertinama istorinė investavimo priemonių rizika. Antra vertus, portfeliai sudaryti pagal rizikos matus (CVaR, σ^2 ir kiti) vertina investavimo priemonių riziką, kuri nustatoma pagal ilgo horizonto istorinius duomenis.

Darbe taikomas metodas investicijų portfelio formavimui pagal kelių modelių rezultatus, aprašomas formule:

$$\boldsymbol{\omega_{comb}} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{p_i \omega_i}, \tag{2.13.1}$$

kur m – modelių skaičius, $\boldsymbol{\omega_{comb}}$ – bendras visų modelių rezultatas, pagal kurį formuojamas investicijų portfelis, p_i – tikimybė, jog i modelis yra geriausias investicijų portfelio formavimui, $\boldsymbol{\omega_i}$ – i modelio svoriai.

Kombinuoto modelio tikslumas reikšmingai priklauso nuo tikimybių p_i pasirinkimo. Šioms tikimybėms parinkti, naudojami Monte Carlo metodu sugeneruoti scenarijai. Tikimybių apskaičiavimo algoritmas pateikiamas grafiškai 1.4 paveiksle.



1.4 pav. Tikimybės, jog pasirinktas modelis yra geriausias investicijų portfelio formavimui einamojo investavimo žingsnio metu, apskaičiavimo algoritmas

Pagal taikomą metodą, kiekvieno scenarijaus ir modelio atveju, apskaičiuojama portfelio grąža. Jeigu modelis i, scenarijaus s atveju duoda geriausią grąžą, tada priimama, kad parametras $b_{i,s} = 1$. Priešingu atveju $b_{i,s} = 0$. Atlikus šią analizę, ieškomos tikimybės randamos pagal formulę:

$$p_i = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N} b_{i,s}, \tag{2.13.2}$$

kur N – scenarijų skaičius.

1.14. Modelių rezultatų palyginimas

Įvade buvo minėta, jog situacija finansinėse rinkose nuolat kinta, todėl modelis, kuris gerai veikė ar būtų veikęs praeityje, nebūtinai bus geriausias ateityje [41]. Taip pat galutinis rezultatas priklauso nuo investavimo pradžios ir pabaigos laiko momentų. Dėl šios priežasties, modelių palyginimui mokslininkas Hansen [42] pasiūlė SPA (angl.: superior predictive ability) statistinį kriterijų ir testą. Šiuo statistiniu testu vertinama, ar analizuojamas modelis statistiškai reikšmingai aplenkia palyginamąjį modelį. Nulinė šio testo hipotezė teigia, jog kriterijui $\mu_m$esant mažesniam arba lygiam nuliui, modelis „m“ neaplenkia palyginamojo modelio:

$$H_0^m: \mu_m \leq 0. \tag{2.14.1}$$

Kriterijus μ_m apskaičiuojamas pagal formulę:

$$\mu_{m,n} = \bar{d}_{m,n}\mathbf{1}\left(\sqrt{T}\bar{d}_{m,n} \leq\ -\bar{\omega}_m\sqrt{2loglogT}\right), \tag{2.14.2}$$

kur $\bar{d}_{m,n}$ – skirtingais metodais suformuotų portfelių grąžų skirtumo vidurkis, „n“ laiko eilutės atveju ($\bar{d}_{m,n} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{m,t}$), $R_{m,t}$ – modelio „m“ grąžos ir palyginamojo modelio grąžos skirtumas laiko momentu „t“, T – analizuojamų periodų skaičius, $\bar{\omega}_m$ – rodiklio $\bar{d}_{m,n}$, gauto vertinant „N“ atsitiktinės atrankos (angl.: bootstrapping) būdu sudarytų grąžų laiko eilučių, standartinis nuokrypis, $\mathbf{1}(\cdot)$ – indikacinė funkcija lygi 1-netui, jeigu nelygybė teisinga ir lygi nuliui priešingu atveju.

Pati SPA statistika skaičiuojama pagal formulę:

$$SPA_T = \max(\sqrt{T} * \frac{\bar{d}_{m,n}}{\bar{\omega}_m}) \tag{2.14.3}$$

Reikšmingumo lygmens (p-reikšmė) skaičiavimas atliekamas pagal atsitiktinės atrankos būdu (angl.: bootstrapping) sudarytas grąžų laiko eilutes. Jų sudarymui taikoma [43] šaltinyje aprašyta metodika.

Kitas statistinis testas, naudojamas šiame darbe modelių rezultatų palyginimui, yra stochastinio dominamo testas (angl.: „stochastic dominance“) aprašytas šaltinyje [44]. Šiuo testu lyginamos portfelių grąžas aprašančių empirinių skirstinių savybės.

Pirmos eilės stochastinio dominavimo testas skirtas palyginti investicijų portfelius, generuojamų grąžų atžvilgiu. Sakykime lyginami portfeliai A ir B, o A portfelio grąžos aprašomos empirine skirstinio funkcija $F_A(x)$, B portfelio grąžos aprašomos funkcija $F_B(x)$. Atsitiktinis dydis x apibrėžiamas uždaru intervalu $x \in [x^*, x^U]$. Portfelis A būtų laikomas dominuojantis portfelio B atžvilgiu, jeigu galiotų sąlyga:

$$F_A(x) - F_B(x) \leq 0, \text{ su visais } x \in [x^*, x^U]. \tag{2.14.4}$$

Šiuo testu nustatoma, kurio portfelio grąžų tankio funkcija yra pasislinkusi labiau į teigiamų grąžų pusę. Jeigu A pagal pirmos eilės stochastinio dominavimo testą yra geresnis už B, naudosime žymėjimą $A \geq_1 B$.

Antros eilės stochastinio dominavimo testas skirtas palyginti grąžų sklaidai. Laikysime, jog A portfelis dominuoja B portfelį pagal antros eilės stochastinio dominavimo testą ($A \geq_2 B$), jeigu galioja sąlyga:

$$\int_{x^*}^{x} (F_A(y) - F_B(y))\, dy \leq 0, \text{ su visais } x \in [x^*, x^U]. \tag{2.14.5}$$

Trečios eilės stochastinio dominavimo testas skirtas palyginti grąžų empirinio skirstinio tankio funkcijos asimetrijos koeficientą (angl.: skewness). Akivaizdu, jog geresnis investicijų portfelis yra tas, kurio grąžos labiau pasislinkusios į teigiamų grąžų pusę. Laikysime, jog A portfelis dominuoja B portfelį pagal trečios eilės stochastinio dominavimo testą ($A \geq_3 B$), jeigu galioja sąlyga:

$$\int_{x^*}^{x} \int_{x^*}^{y} (F_A(z) - F_B(z)) dz\, dy \leq 0, \text{ su visais } x \in [x^*, x^U]. \tag{2.14.6}$$

Galimas ir ketvirtos eilės stochastinio dominavimo testas, pagal kurį lyginamas grąžų empirinio skirstinio tankio funkcijos eksceso koeficientas. Tačiau šiame darbe ketvirtos eilės stochastinio dominavimo testas nėra taikomas.

2. METODIKA

2.1. Investavimo priemonių pasirinkimas

Darbe taikomi investicijų portfelio formavimo metodai testuojami su pagrindines turto klases atkartojančių indeksų istorinėmis grąžomis, o nuo 2008 metų pradžios su realių biržoje prekiaujamų fondų (angl.: Exchange Traded Funds, ETFs) istorinėmis grąžomis. Biržoje prekiaujami fondai atkartoja turto klasių indeksų kainos dinamiką bei remiantis šaltiniu [2], šiuo metu yra viena efektyviausių investavimo priemonių. ETF pranašumai lyginant su kitomis investavimo priemonėmis:

- maži valdymo mokesčiai,
- didelis likvidumas,
- tiksliai atkartoja pasirinktos turto klasės kainos kitimą.

Detalesnis pasirinktų investavimo priemonių aprašymas pateikiamas 2.1 lentelėje.

2.1 lentelė Turto klasės ir jų indeksai bei indeksus atkartojantys ETF (sudaryta pagal šaltinį [2])

Turto klasė	Indekso pavadinimas	ETF pavadinimas	Trumpinys	Bendrasis išlaidų rodiklis[1]
Išsivysčiusių rinkų akcijos – JAV	S&P Index	SPDR S&P 500 ETF	SPY	0,09%
Išsivysčiusių rinkų akcijos – išskyrus JAV	MSCI EAFE Index	Vanguard FTSE Developed Markets ETF	VEA	0,09%
Besivystančių rinkų akcijos	MSCI Emerging Markets Index (MXEF)	Vanguard FTSE Emerging Markets ETF	VWO	0,15%
Obligacijos	BloomBarc US Agg Total Return Value (LBUSTRUU)	Vanguard Total Bond Market ETF	BND	0,08%
Trumpalaikės obligacijos	BloomBarc US 1-5Yr Gov/Cr FltAdj Ix (BFA1TRUU)	Vanguard Short term Bond Market ETF	BSV	0,08%
Nekilnojamas turtas	FTSE Nareit Equity REITS Index (FNERTR)	Vanguard REIT ETF	VNQ	0,1%

2.1 lentelėje pateikiamos investavimo priemonės apima viso pasaulio išsivysčiusių ir besivystančių rinkų akcijas, ilgalaikes bei trumpalaikes obligacijas, nekilnojamo turto rinkas. Toks investavimo priemonių rinkinys apima beveik visas pagrindines turto klases, todėl leidžia sudaryti plačiai diversifikuotą portfelį. Konkretūs ETF, investavimui į šias turto klases, pasirinkti pagal tris pagrindinius kriterijus:

- kuo mažesnis bendrasis išlaidų rodiklis,
- kuo didesnė biržoje prekiaujamo fondo kapitalizacija,
- kuo didesnė vidutinė dienos apyvarta (likvidumas).

[1] Metinis fondo valdymo mokestis, skaičiuojamas nuo investuoto turto.

Mažesni mokesčiai leidžia uždirbti atitinkamai didesnę grąžą. O didelė fondo kapitalizacija ir likvidumas, valdytojams leidžia tiksliau atkartoti pasirinktos turto klasės kainos dinamiką.

2.2. Darbe taikomų investicijų portfelio formavimo metodų apibendrinimas

Portfelio formavimui darbe taikomi 8 metodai, paremti 7 skirtingais kriterijais, ir vienas daugiakriterijinis metodas. Vienas iš metodų („Lygių svorių portfelis“), investuojamą kapitalą paskirsto lygiomis dalimis visoms turto klasėms. Darbe taikomų modelių apibendrinimas pateikiamas 2.2 lentelėje.

2.2 lentelė Darbe taikomų investicijų portfelio formavimo metodų apibendrinimas

Modelio pavadinimas	Trumpinys	Kriterijus	Skyrius
Portfelis pagal inertiškumą	IM	$M(t)$	1.5
Portfelis pagal slankųjį vidurkį	SV	MA	1.5
Markowitz + SDE	MSDE	$\mu\ ir\ \sigma^2$	1.6 ir 1.8
Markowitz + OGK	MOGK	$\mu\ ir\ \sigma^2$	1.6 ir 1.8
Labiausiai diversifikuotas	LDP	DR	0
Stochastinis CVaR	CVAR	CVaR	1.11
Lygių svorių portfelis	LS	-	-
Pirmaujančių indikatorių portfelis	PI	EBPO Pirmaujantys indikatoriai	1.12

Kiekviename investavimo žingsnyje šių modelių rezultatai apjungiami 1.12 skyriuje aprašytu būdu, taip gaunamas daugiakriterijinis investicijų portfelio formavimo metodas.

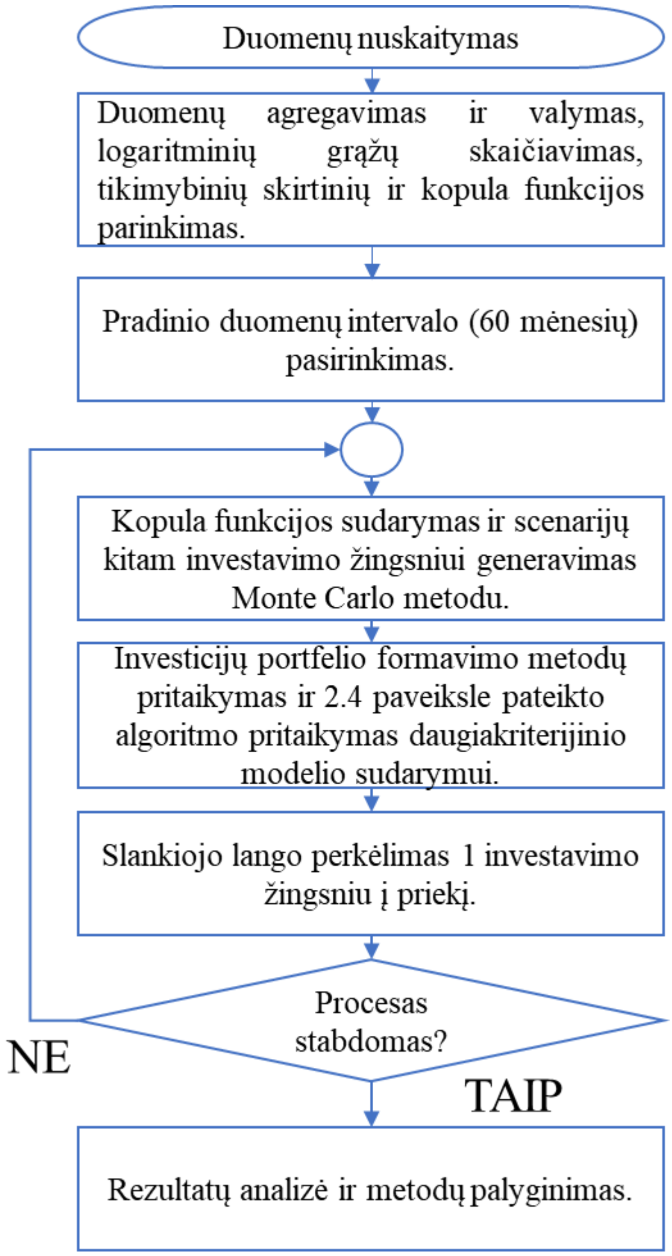
2.3.Investavimo priemonių istorinių kainų duomenys

Istorinės indeksų ir biržoje prekiaujamų fondų kainos nuskaitomos iš „Bloomberg“ duomenų bazės [45]. Duomenų bazėje pateikiamos kiekvienos darbo dienos investavimo priemonių atidarymo, uždarymo bei didžiausia ir mažiausia kainos. Taip pat yra pateikiama koreguota kaina, apskaičiuojama įvertinant investavimo priemonės vienetų kiekio pokytį ir dividendų įtaką grąžai. Šiame darbe skaičiavimams naudojama kiekvieno mėnesio paskutinės darbo dienos metu užfiksuota koreguota kaina.

Visų investavimo priemonių grąžos skaičiuojamos pagal kainas išreikštas US doleriais, todėl yra palyginamos ir neįtakojamos valiutos kainos pokyčių.

2.4. Daugiakriterijinis investicijų portfelio formavimo algoritmas

Šiame darbe sukurto daugiakriterijinio investicijų portfelio formavimo algoritmo schema pateikiama 2.1 paveiksle.



2.1 pav. Optimalaus investicijų portfelio pagal daugiakriterijinį metodą sudarymo algoritmas

Investavimo žingsnis pasirinktas lygus vienam mėnesiui. Tyrimo laikotarpis apima 376 investavimo žingsnius nuo 1987-12-31 iki 2018-12-31. Modelių sudarymui reikalingi rodikliai skaičiuojami pagal slankiojo lango metodu atrinktus duomenis. Pasirinktas slankiojo lango plotis lygus 60 investavimo žingsnių (atitinka 5 metus).

3. MODELIŲ TAIKYMAS IR REZULTATŲ ANALIZĖ

3.1. Finansinių grąžų duomenų žvalgomoji analizė

Pagal analizuojamo laikotarpio istorinius duomenis, 2.1 lentelėje apibendrintų indeksų grąžos ir rizikos rodikliai pateikiami 3.1 lentelėje.

3.1 lentelė. Analizuojamų indeksų grąžos ir rizikos rodikliai

	SPY	**VEA**	**VWO**	**BND**	**BSV**	**VNQ**
Metinė grąža, %	8,09	5,16	7,81	6,15	5,05	10,68
Standartinis nuokrypis, %	14,07	16,65	22,46	3,71	2,23	17,77
Sharp rodiklis, Rf = -0,3%	0,596	0,328	0,361	1,739	2,399	0,618
Rachev rodiklis, Rf = -0,3% (0.95;0.95)	0,859	0,893	0,763	1,955	3,787	0,449
VaR, % (0.95)	-0,065	-0,078	-0,106	-0,013	-0,006	-0,075
CVaR, % (0.95)	-0,097	-0,113	-0,165	-0,019	-0,009	-0,175
Didžiausias nuostolis nuo maksimumo, %	52,6	56,7	62,7	5,15	2,55	68,3

Didžiausią grąžą analizuojamu laikotarpių buvo galima uždirbti investavus į nekilnojamo turto ir JAV įmonių akcijas. Vidutinė metinė šių indeksų grąža siekia 10,68% ir 8,09% atitinkamai. Tačiau ženkliai mažesne rizika pasižymėjo obligacijų indeksai. Pagal standartinį nuokrypį išsiskiria trumpo laiko obligacijų indeksas BSV, kurio standartinis nuokrypis siekia tik 2,23%, kai besivystančių rinkų akcijų indekso standartinis nuokrypis daugiau, kaip 10 kartų didesnis. Obligacijų indeksai lenkia akcijų indeksus ir pagal grąžos bei rizikos santykį. Šių indeksų Sharp rodiklis didžiausias. Tarpusavyje lyginant kitus indeksus, geresnį Sharp rodiklį turi nekilnojamo turto ir JAV įmonių akcijų indeksai, lyginant su besivystančių rinkų ir Europos įmonių akcijų indeksais. Realios rizikos ir grąžos santykį geriau atspindi Rachev rodiklis, pagal kurį skaičiuojamas kairės skirstinio uodegos (neigiamų grąžų dalis) CVaR santykis su dešinės skirstinio uodegos (teigiamų grąžų dalis) CVaR santykiu. Taigi, šis rodiklis rodo, kokia grąžos premija gaunama už prisiimtą riziką. Pagal šį rodiklį pirmauja obligacijų indeksai, taip pat ženkliai pagerėja besivystančių rinkų ir Europos įmonių akcijų indeksų padėtis. Didžiausias nuostolis nuo maksimumo rodo, jog investavus tik į vieną akcijų ar nekilnojamo turto indeksą, galima tikėtis iki 68% turto vertės sumažėjimo. Investavus į obligacijų indeksus, vertės sumažėjimas siektų tik iki 5,2%, vertinant pagal paskutinių 30 metų duomenis.

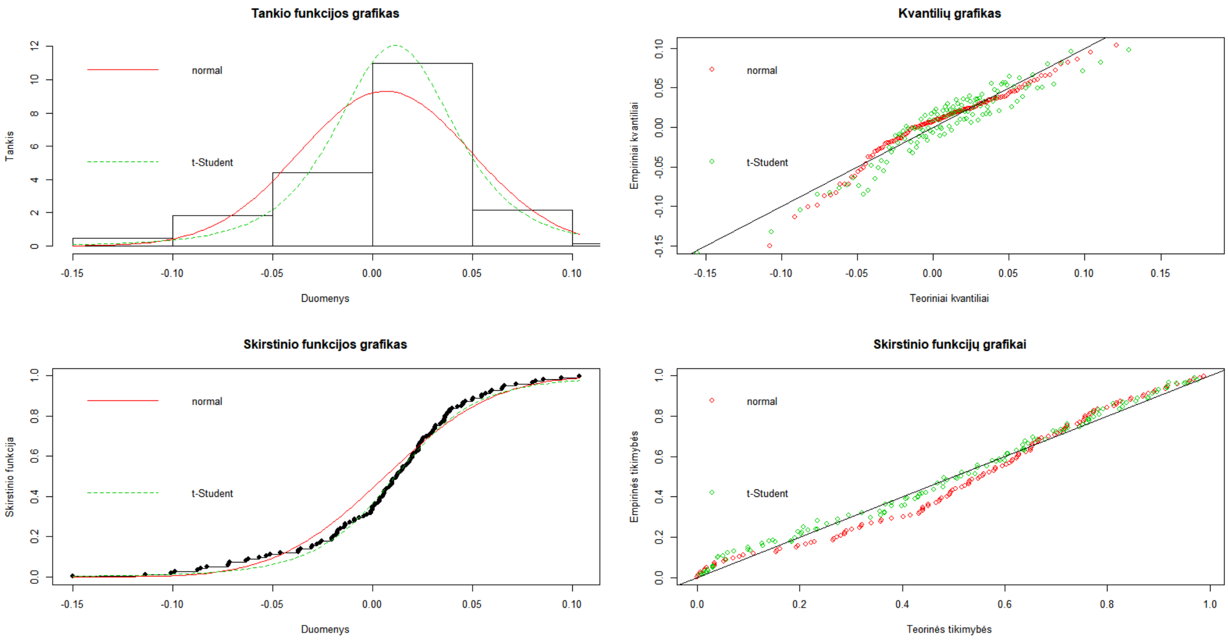
3.2. Tikimybinių skirstinių parinkimas

Atliekamas duomenų tyrimas, siekiant parinkti tiksliausiai investavimo priemonių grąžas aprašančius tikimybinius skirstinius. Skirstinys parenkamas vienas iš normaliojo ir t-Studento skirstinių. Investavimo priemonių pavadinimai atitinka pagal 2.1 lentelę. Tyrimo metu remiamasi tokiais kriterijais:

- empiriniai tankio bei skirstinio funkcijų grafikai,
- kvantilių grafikas (Q-Q),
- skirstinio funkcijų grafikas (P-P),
- Kolmogorovo-Smirnovo statistinis testas,
- Anderson-Darling statistinis testas,

- Akaike kriterijus,
- Bajeso kriterijus.

Grafiniai kriterijai SPY indekso atveju pateikiami 3.1 paveiksle. Kriterijų grafikai kitiems indeksams pateikiami 1 priede. Skirstinių parinkimui taikomų statistinių kriterijų rezultatai pateikiami 3.2 lentelėje.



3.1 pav. Grafikai SPY indekso grąžas aprašančio skirstinio parinkimui

3.2 lentelė Statistinių testų ir kriterijų rezultatai tikimybinio skirstinio parinkimui

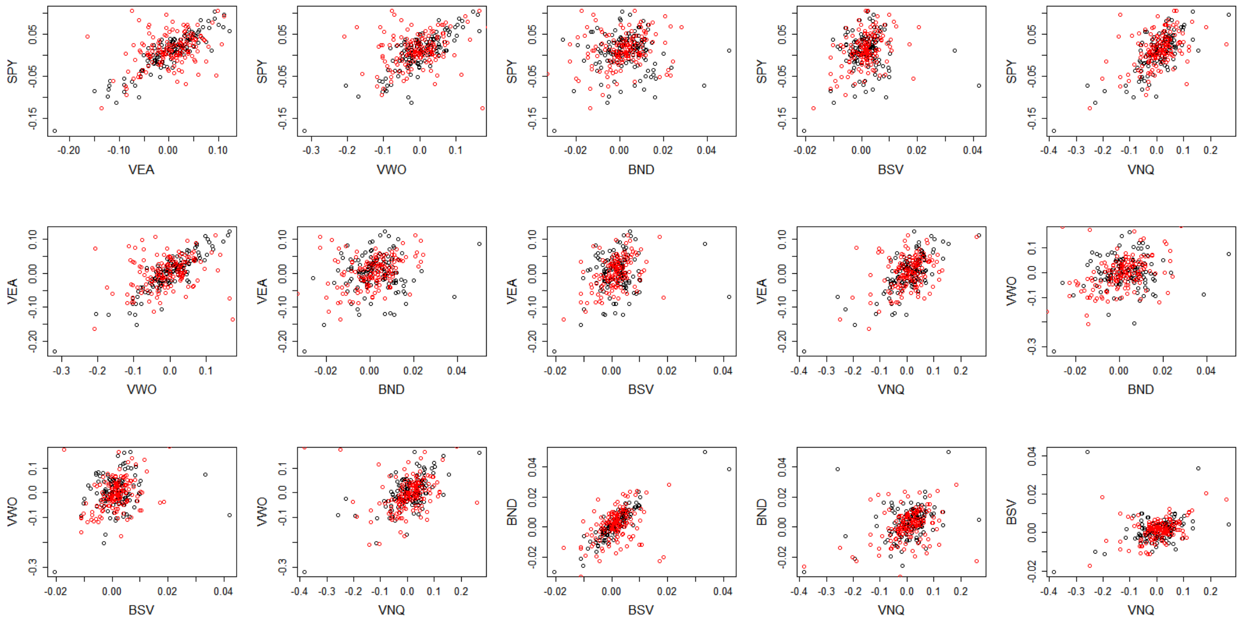
SPY		
	Normalusis	t-Studento
Kolmogorov – Smirnov testas	p = 0,1193	p = **0,054**
Anderson – Darling testas	1,967	**0,7993**
Akaike kriterijus	-449,7	**-456,4**
Bajeso kriterijus	-443,9	**-447,8**
VEA		
	Normalusis	t-Studento
Kolmogorov – Smirnov testas	p = 0,0792	p = **0,0399**
Anderson – Darling testas	0,9328	**0,3098**
Akaike kriterijus	-398,8	**-400,5**
Bajeso kriterijus	**-393,0**	-391,9
VWO		
	Normalusis	t-Studento
Kolmogorov – Smirnov testas	p = 0,0533	p = **0,0421**
Anderson – Darling testas	0,3776	**0,2402**

Akaike kriterijus	**-364,4**	-363,1
Bajeso kriterijus	**-358,7**	-354,4
BND		
	Normalusis	t-Studento
Kolmogorov – Smirnov testas	p = 0,0742	p = **0,0553**
Anderson – Darling testas	1,219	**0,3767**
Akaike kriterijus	-820,9	**-836,8**
Bajeso kriterijus	-815,2	**-828,2**
BSV		
	Normalusis	t-Studento
Kolmogorov – Smirnov testas	p = 0,1424	p = **0,0443**
Anderson – Darling testas	4,247	**0,3407**
Akaike kriterijus	-944,6	**-1006**
Bajeso kriterijus	-938,8	**-997,4**
VNQ		
	Normalusis	t-Studento
Kolmogorov – Smirnov testas	p = 0,0687	p = **0,0509**
Anderson – Darling testas	0,906	**0,4315**
Akaike kriterijus	-376,9	**-379,2**
Bajeso kriterijus	**-371,1**	-370,7

Pagal Kolmogorovo – Smirnovo testą tikrinama ar teorinė skirstinio funkcija atitinka empirinę. Remiantis šiuo neparametriniu testu, t-Studento skirstinys geriau tinka visų analizuojamų indeksų grąžų modeliavimui. Anderson–Darling testas yra jau aptarto Kolmogorovo–Smirnovo testo modifikaciją, pagal kurią didesnis svoris skiriamas skirstinių ekstremalioms reikšmės. Šiuo atveju Anderson–Darling testas yra netgi svarbesnis, kadangi pageidautina, jog pasirinktas skirstinys tinkamai aprašytų ekstremalias investavimo priemonių grąžų reikšmes. Pagal Anderson–Darling t-Studento skirstinys visais atvejais yra geresnis, už normalųjį. Pagal Akaike kriterijų, normalusis skirstinys geriau tinka VWO indekso grąžų modeliavimui, kitais atvejais geriau tinka t-Studento skirstinys. Pagal Bajeso kriterijų, normalusis skirstinys geriau tinka VEA, VWO ir VNQ grąžų modeliavimui. Papildomai atsižvelgiant į grafikus, pasirinkta visų indeksų grąžas modeliuoti naudojant t-Studento skirstinį.

3.3. Scenarijų generavimas

Scenarijų generavimui naudojama daugiamatė Studento kopulos funkcija, aprašyta 1.3 skyriuje. Parašyto programinio kodo validacija atliekama pagal unikalių indeksų porų grąžų sklaidos diagramas. Diagramos pateikiamos 3.2 paveiksle. Raudonos spalvos apskritimai vaizduoja sugeneruotus scenarijus, o juodos spalvos apkritimai realius duomenis.



3.2 pav. Indeksų grąžų sklaidos diagramos

Pagal sklaidos diagramas matome, jog scenarijai pakankamai gerai atkartoja daugumos indeksų porų grąžas ir koreliacijas tarp jų. Todėl priimama, jog parašytas programinis kodas tinkamas taikymui. Testuojant investicijų portfelio formavimo metodus, scenarijai generuojami kiekvieno investavimo žingsnio metu, pagal slankiojo langu metodu atrinktus istorinius duomenis.

3.4. Investicijų portfelio formavimo metodų taikymas

Analizė atliekama laikotarpiui nuo 1987-12-31, tačiau pradiniams momentams apskaičiuoti ir scenarijams sudaryti, reikalingas bent 5 metų laikotarpis, todėl pirmieji rezultatai gaunami nuo 1993 metų pradžios.

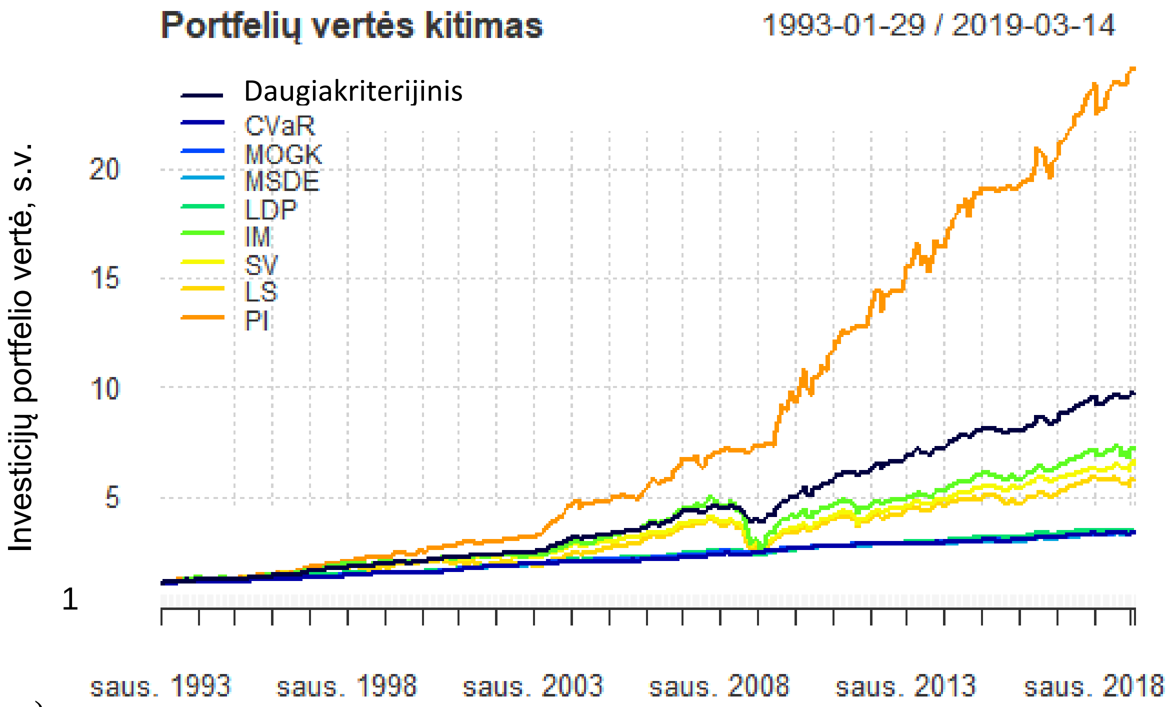
Analizuojamu laikotarpiu vyko net dvi recesijos. Pirmoji recesija, 2001 metais, nebuvo labai reikšminga globaliame kontekste ir labiau paveikė tik JAV įmonių akcijas, kadangi susidarė dėl JAV IT sektoriaus burbulo. Tačiau antroji recesija vykusi 2008 – 2009 metais buvo viena didžiausių ekonomikos istorijoje, jos metu net diversifikuotų akcijų indeksų kainos smuko iki 60%, o nekilnojamo turto net iki 70%. Nepaisant šių recesijų, analizuojamu laikotarpiu pastebimas didžiulis akcijų (vid. metinė grąža: +7,3%) ir nekilnojamo turto (vid. metinė grąža: +10,5%) kainų augimas. Obligacijų indeksų kaina net recesijų metu sumažėjo palyginti nedaug, o investicijos į šias priemones uždirbo stabilią +4% – +5% metinę grąžą. Galima teigti, jog pasirinktas laikotarpis yra pakankamai reprezentatyvus, kadangi bus galima ištirti modelių veikimą prieš ir po recesijų bei kaip sėkmingai modeliai išnaudoja didžiulį rizikingų investavimo priemonių kainų augimą.

Kai kurie parametrai pasirenkami prieš sudarant modelius, šių parametrų sąrašas pateikiamas 3.3 lentelėje.

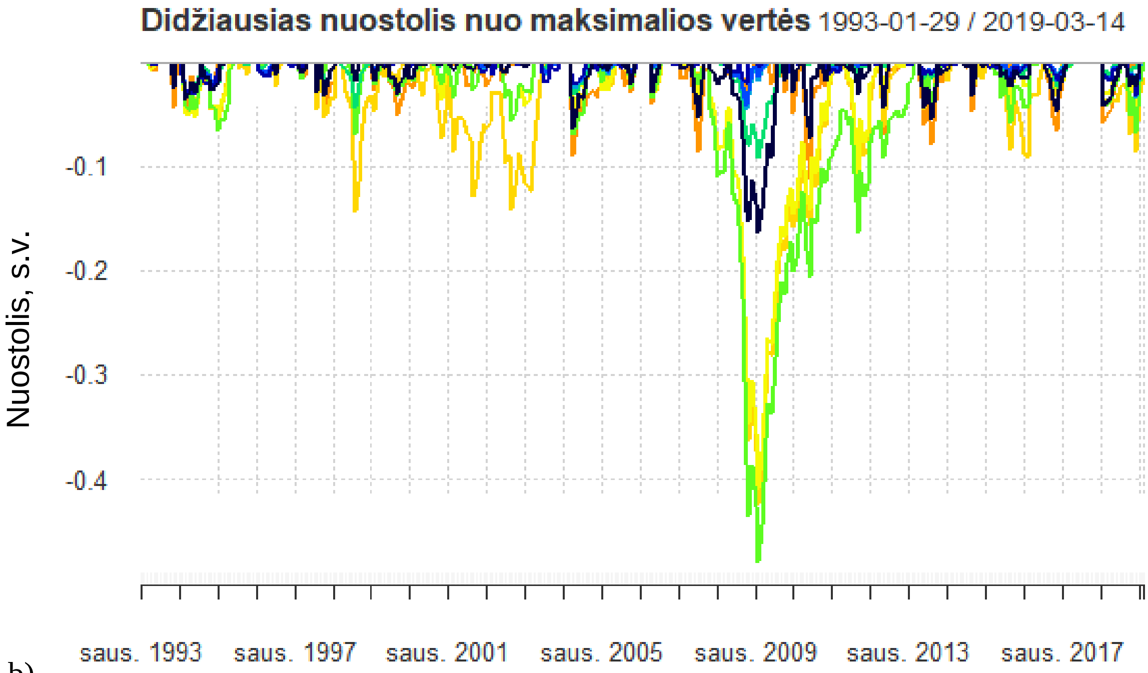
3.3 lentelė. Pasirinkti modelių parametrai

Pavadinimas	Vertė	Pastabos
Scenarijų skaičius	2000	Pastebėta, jog toks scenarijų skaičius pakankamas gauti stabilius CVaR modelio rezultatus.
Pasikliautinumo lygmuo	0,95	-
Minimali laukiama grąža	0,3%	Naudojama CVaR ir Markowitz modeliuose. Pasirinkta pagal mažiausią analizuojamų turto klasių grąžą per mėnesį, laikotarpiu nuo 1987 iki 2018..
Nerizikingų investicijų grąža	-0,3%	Pasirinkta pagal Vokietijos trumpo termino obligacijų grąžą.

Įvairiais metodais sudarytų portfelių vertės kitimo ir nuostolių grafikai pateikiami 3.3 paveiksle.



a)



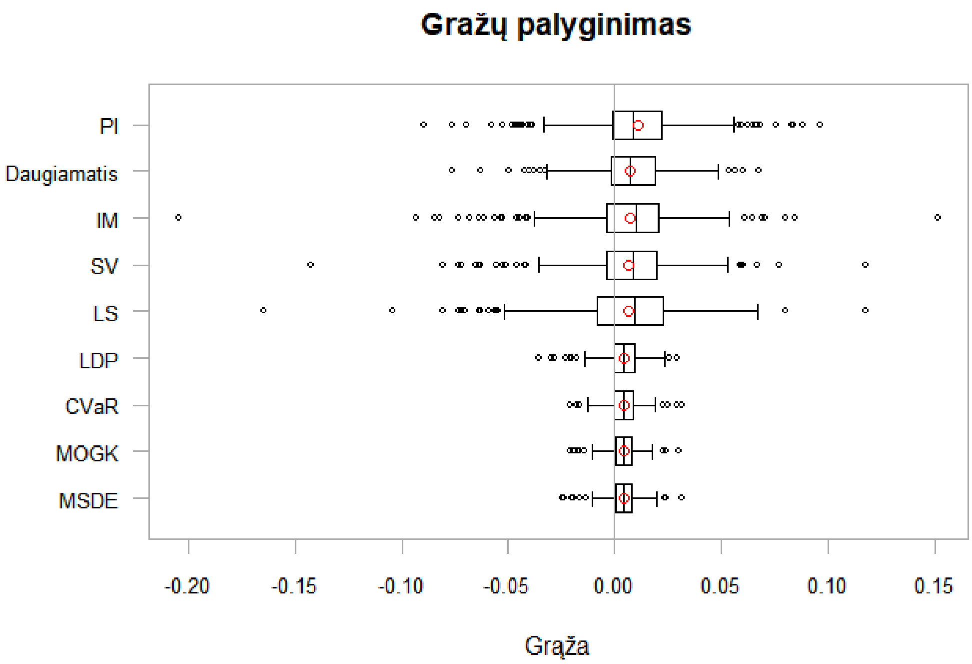
b)

3.3 pav. Įvairias metodais sudarytų portfelių vertės pokyčio (a) ir didžiausių nuostolių nuo maksimalios portfelio vertės (b) grafikai

Pagal a) grafiką matome, jog didžiausią teigiamą grąžą analizuojamu laikotarpiu būtų pavykę uždirbti pagal pirmaujančius indikatorius formuojamam portfeliui. Šis portfelis pasiekė 12,98% metinę grąžą. Lyginant su šiuo portfeliu, apie 3,87% mažesnę metinę grąžą būtų uždirbęs daugiakriterijinis metodas. Apie 5,5% mažesnę grąžą būtų uždirbę inercijos momentų ir slankiųjų vidurkių portfeliai. Portfeliai sudaryti pagal matematinio optimizavimo metodus (Markowitz, CVaR ir LDP), būtų uždirbę net apie 8,2% mažesnę metinę grąžą, už pirmaujančių indikatorių portfelį.

Pagal b) grafiką pastebime, jog stabiliausiai augo MOGK, MSDE ir CVaR metodais sudaryti portfeliai. Net recesijų metu šių portfelių vertė nenukrito žemiau 5% nuo maksimalios vertės, o pagal šį rodiklį ypač išsiskiria CVaR portfelis, kurio maksimalus vertės nuosmukis siekė tik 3,15% per visą analizuojamą laikotarpį. Labai gerus rezultatus analizuojamu laikotarpiu užfiksavo pagal pirmaujančius indikatorius formuojamas portfelis. Didžiausias šio portfelio vertės nuosmukis siekė 11,2%, o 2008 – 2009 ekonominės recesijos metu, šio portfelio vertė smuko mažiausiai, lyginant su kitais portfeliais, o tai buvo pagrindinis veiksnys lėmęs, jog portfelio vidutinė metinė grąža reikšmingai aplenkė kitų portfelių rodiklį. Pagal maksimalų vertės nuosmukį, daugiakriterijinis portfelis didžiąją laiko dalį lenkia pirmaujančių rodiklių portfelį, tačiau 2008 – 2009 recesijos metu, šio portfelio vertės kritimas siekė apie 16% ir buvo prastesnis. Kitų portfelių rezultatai dar prastesni. 2008 – 2009 recesijos metu, pagal inercijos momentus sudaryto portfelio vertė sumažėjo apie 47%, lygių svorių ir slankiųjų vidurkių portfelių vertės kritimas viršijo 40%.

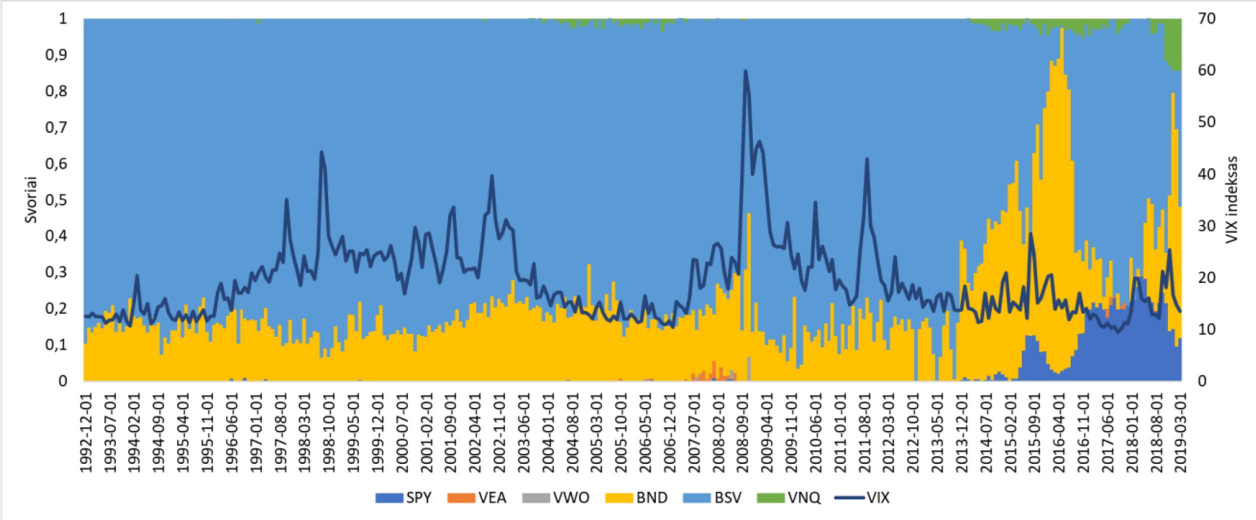
Apibendrinta informacija apie portfelių grąžas pateikiama stačiakampėje diagramoje **3.4** paveiksle. Portfeliai diagramoje išdėstyti vidutinės metinės grąžos, kurią rodo raudoni apskritimai, mažėjimo tvarka.



3.4 pav. Grąžų stačiakampės diagramos

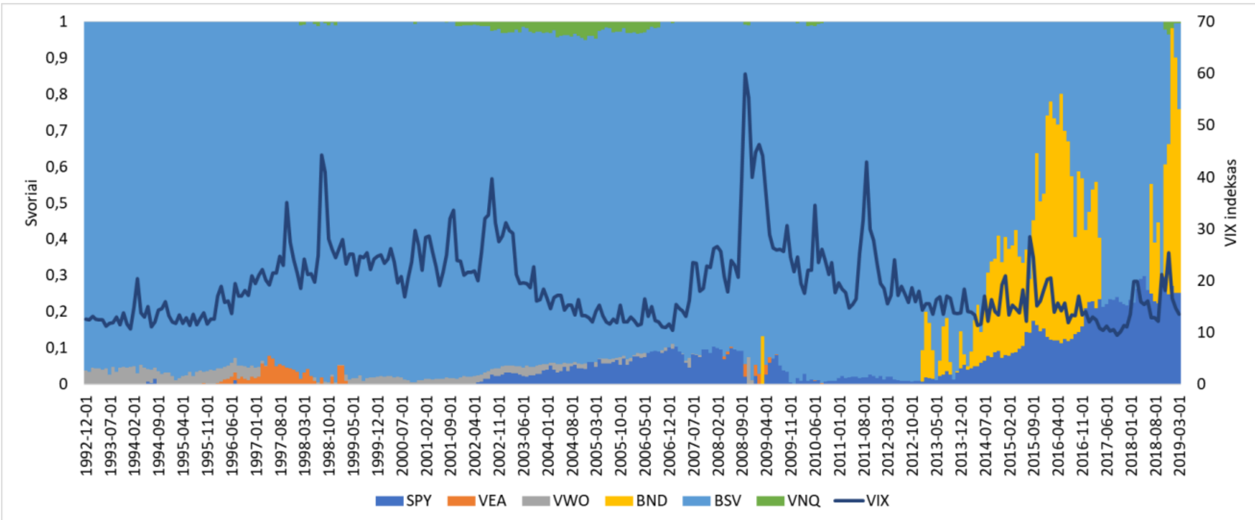
Pagal stačiakampes diagramas matome, jog lygių svorių portfelis patiria didžiausius vertės svyravimus. Beveik visų portfelių atstumas nuo medianos iki teigiamos grąžos maksimumo yra trumpesnis arba lygus atstumui iki neigiamos grąžos maksimumo. Tai rodo, jog labiau tikėtinos didelės neigiamos grąžos, negu teigiamos. Tačiau galima išskirti slankiųjų vidurkių, pirmaujančių indikatorių ir daugiakriterijinį metodus, pagal kuriuos sudarytų portfelių atstumai iki neigiamų maksimumų trumpesni, negu iki teigiamų. Kiti portfelių rizikos ir grąžos rodikliai pateikiami **3.4** lentelėje.

Investavimo priemonių svoriai portfeliuose, sudarytuose skirtingais metodais, pateikiami paveiksluose **3.5** – **3.12**. Vertinant portfelių sudėtį, atsižvelgiama į VIX indekso pokyčius. Šis indeksas parodo rinkos dalyvių lūkesčius dėl ateinančių 30 dienų akcijų rinkos rizikos. Dideli šio indekso pokyčiai rodo, jog rinkos dalyviai tikisi akcijų kainų pokyčių.

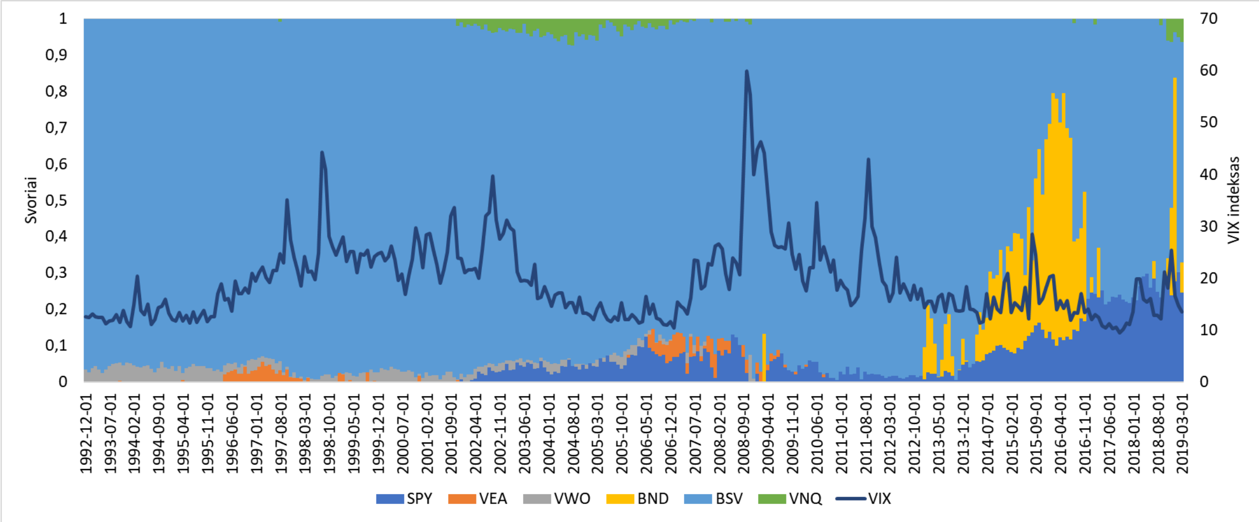


3.5 pav. Investavimo priemonių svoriai portfelyje sudarytame pagal CVaR metodą

Pagal šį modelį sudarytame portfelyje daugiausiai laikoma trumpalaikių obligacijų ir BloomBarc US obligacijų indeksai. Ir tik praėjus daugiau, kaip 5 metams po 2008 – 2009 metų krizės (atitinka slankiojo lango plotį), išaugo rizikingesnių turto klasių dalis. Taigi CVaR modelis daugiau, kaip puse dešimtmečio pavėlavo investuoti į tame dešimtmetyje ir aplamai ekonomikos istorijoje labiausiai augusias turto klases. Taip pat verta pastebėti, jog rizikingesnių investicijų dalis padidėjo artėjant tikėtinai ekonomikos augimo ciklo pabaigai, todėl recesijos atveju, portfelio vertės kritimas galimai būtų didesnis, negu buvo fiksuota per analizuojamą 30 metų laikotarpį. Portfelį sudarančių investavimo priemonių svorių koreliacija su VIX indeksu nenustatyta. Šio metodo veikimas pagrįstas prielaida, jog rinkos dalyviai yra absoliučiai racionalūs ir jų lūkesčiai turėtų priklausyti tik nuo einamuoju momentu turimos informacijos apie investavimo priemonių kainas. Tačiau maža koreliacija tarp VIX indekso ir portfelį sudarančių investavimo priemonių svorių rodo, jog realiai investuotojų lūkesčiai ženkliai skiriasi.

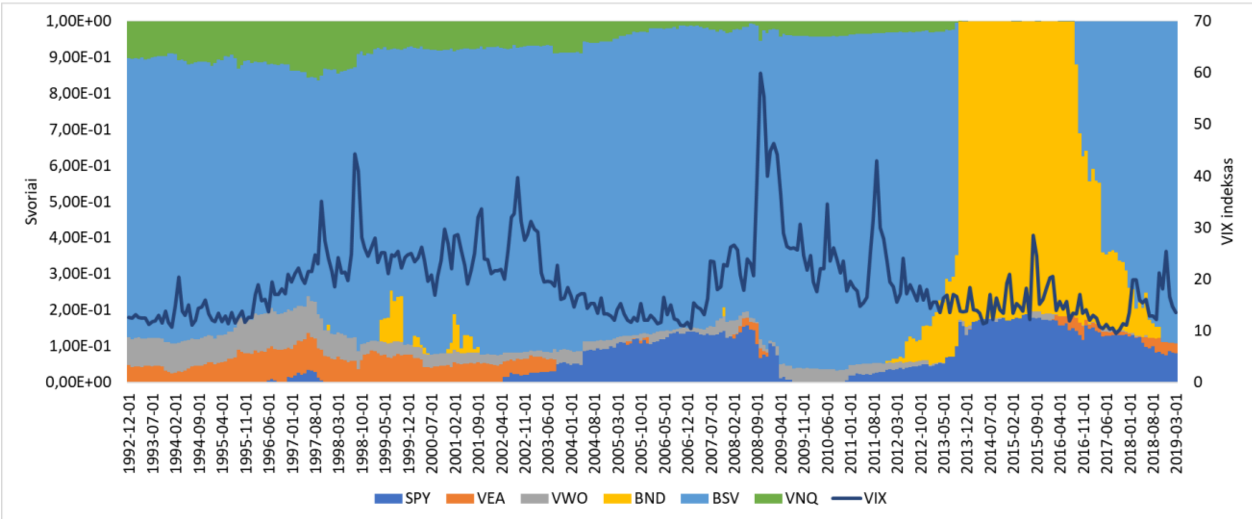


3.6 pav. Investavimo priemonių svoriai portfelyje sudarytame pagal MOGK metodą



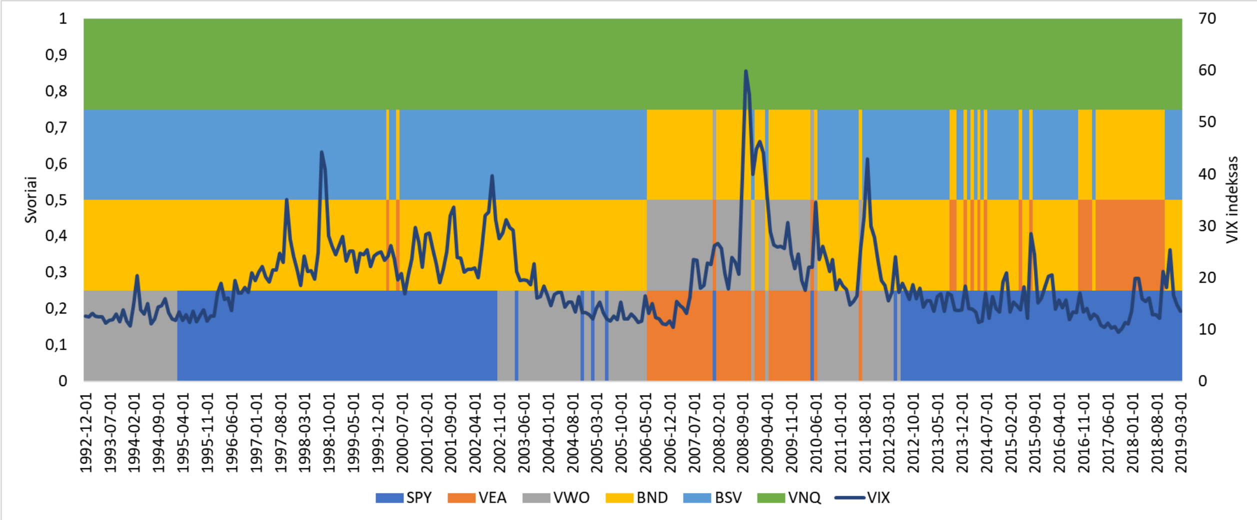
3.7 pav. Investavimo priemonių svoriai portfelyje sudarytame pagal MSDE metodą

Pagal MSDE ir MOGK metodus sudaryti portfeliai beveik identiški, o jų trūkumai panašūs, kaip ir CVaR investicijų portfelio optimizavimo metodo. Papildomai verta pastebėti, jog analizuojamo periodo pabaigoje, MOGK ir MSDE modeliai priskyrė mažesnę portfelio dalį nekilnojamo turto indeksui, negu prieš tai analizuotas CVaR modelis. Tačiau šiuose portfeliuose buvo laikoma didesnė rizikingo turto dalis, prieš pat 2018 – 2009 metų ekonomikos krizę. Šiais metodais sudarytų portfelių svorių koreliacija su VIX indeksu nenustatyta, kaip ir CVaR portfelio atveju.



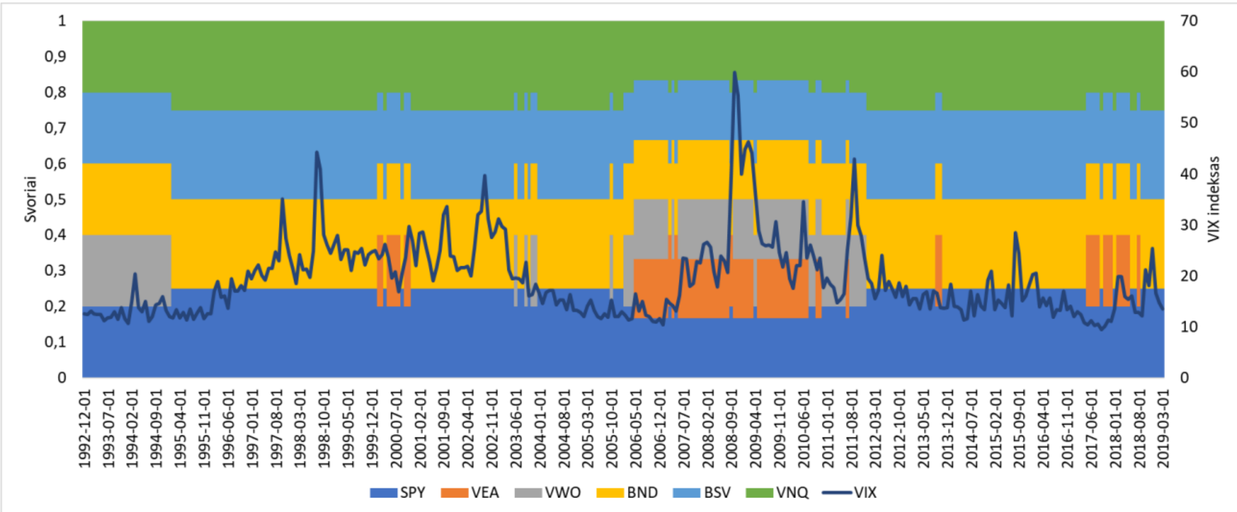
3.8 pav. Investavimo priemonių svoriai portfelyje sudarytame pagal LDP metodą

Lyginant su prieš tai analizuotais portfeliais, po 2008 – 2009 metų krizės, šiame portfelyje rizikingesnių investicijų dalis pradėjo didėti apie 2 metais anksčiau ir tai leido uždirbti didesnę grąžą. Tai rodo, jog šis portfelio formavimo metodas yra jautresnis finansų rinkoje vykstantiems pokyčiams. Tačiau vertinant svorių sąryšį su VIX indeksu, reikšmingų koreliacijų taip pat nenustatyta. Apibendrintai pagal svorių grafiką galima priimti, jog didžiausias portfelio diversifikacijos matas pasiekiamas, kai apie 20% turto investuojama į labiau rizikingas turto klases (akcijos, nekilnojamas turtas), o likusi dalis į mažiau rizikingas obligacijas.



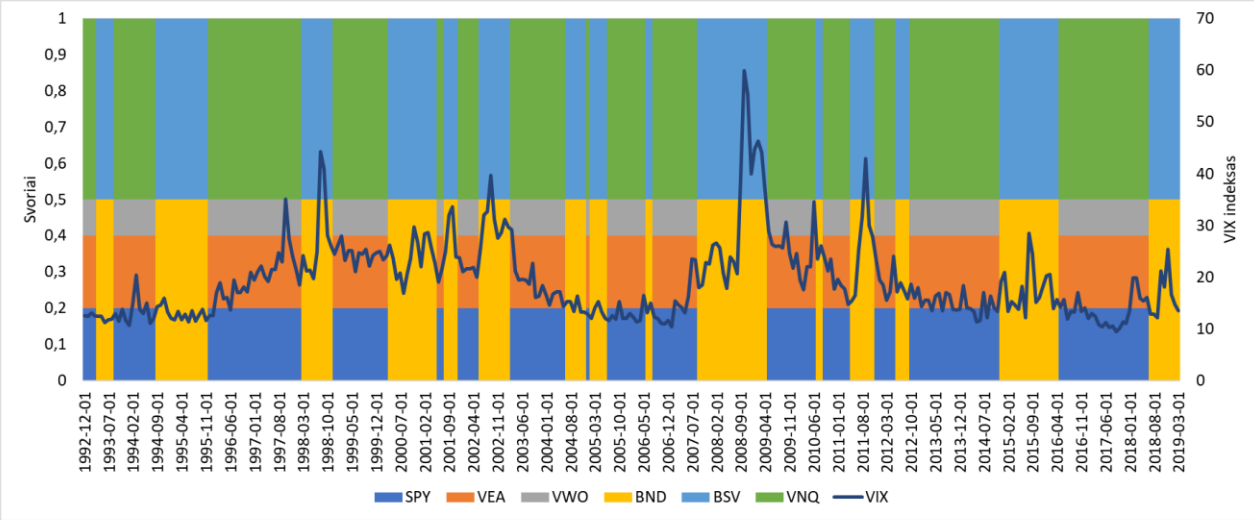
3.9 pav. Investavimo priemonių svoriai portfelyje sudarytame pagal IM metodą

Pagal inercijos momentų metodą, didžiąją laiko dalį lygiais svoriais investuojama į nekilnojamą turtą, JAV įmonių akcijas ir trumpalaikes bei ilgalaikes obligacijas. Tačiau prieš 2008 – 2009 metų krizę, pagal šį metodą buvo padidinta investuojamo turto dalis į akcijas. Tai lėmė ypač prastą portfelio rezultatą krizės metu, kai jo vertė per kelis mėnesius sumažėjo virš 47%. Šis pavyzdys rodo, jog metodas negarantuoja adekvačios reakcijos į investicijų vertės mažėjimą. Portfelį sudarančių investavimo priemonių svorių pokyčių sąryšis su VIX indeksu pastebimas tik 2008 krizės metu.



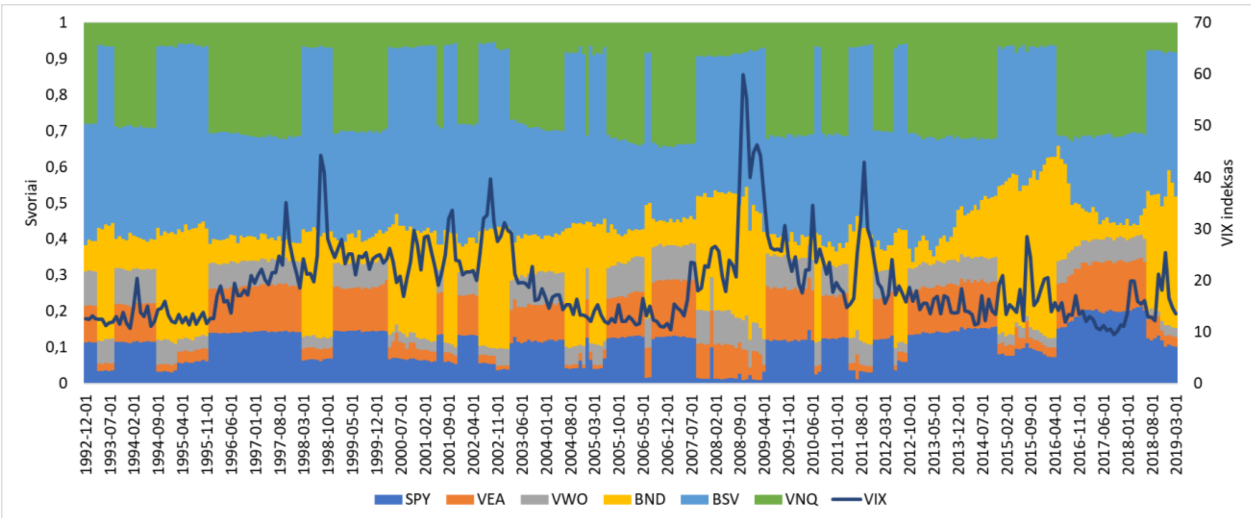
3.10 pav. Investavimo priemonių svoriai portfelyje sudarytame pagal SV metodą

Portfelis, sudarytas pagal slankiųjų vidurkių metodą, uždirbo mažesnę grąžą, negu inercijos momentų metodu sudarytas portfelis, tačiau taip pasižymėjo mažesniu vertės svyravimu ir didesniu grąžos/rizikos santykiu. Pagal svorių grafiką matome, jog didžiąją laiko dalį šis modelis lygiais svoriais paskirsto investicijas US akcijoms, nekilnojamam turtui bei obligacijoms, taigi laikomas 50:50 santykis mažiau rizikingų ir rizikingų investicijų. 2008 – 2009 recesijos laikotarpiu, rizikingų investicijų dalis portfelyje buvo didesnė, negu įprastai, todėl portfelis patyrė reikšmingą nuostolį. Portfelį sudarančių investavimo priemonių svorių pokytis atitiko VIX indekso pokyčius 2000 ir 2008 metais.



3.11 pav. Investavimo priemonių svoriai portfelyje sudarytame pagal PI metodiką

Pagal pirmaujantį rodiklį sudaromas portfelis formuojamas lygiomis dalimis iš trumpalaikių ir ilgalaikių obligacijų indeksų, kai pirmaujantis rodiklis prognozuoja bendrojo vidaus produkto mažėjimą. Kitu atveju, investuojama tik į akcijų ir nekilnojamo turto indeksus. Todėl pagal svorių grafiką galima įžvelgti, kuriais momentais analizuojamu laikotarpiu buvo prognozuojamas ekonomikos augimas ar nuosmukis. Pirmaujančių indikatorių portfelis, vienintelis iš visų šiame darbe analizuojamų portfelių, iš anksto sumažino rizikingų investicijų dalį prieš didžiausią analizuojamu laikotarpiu 2008 – 2009 metų finansų krizę. Taip pat sėkmingai nustatė ir didžiąją dalį kitų ekonomikos augimo bei smukimo laikotarpių. Gerą modelio reakciją į rinkoje vykstančius pokyčius pagrindžia ir svorių koreliacija su VIX indeksu. Beveik visais atvejais, kai pagal VIX indeksą buvo laukiama staigių akcijų kainų pokyčių, pirmaujančių indikatorių portfelis investuodavo į mažiau rizikingas obligacijas. Tai lėmė, jog portfelis uždirbo didžiausią grąžą, analizuojamu laikotarpiu, bei pasiekė gerus rizikos rodiklius – portfelio grąžos/rizikos santykis lenkia lygių svorių, slankiųjų vidurkių bei inercijos momentų metodais suformuotus portfelius.



3.12 pav. Investavimo priemonių svoriai portfelyje sudarytame pagal daugiakriterijinį metodą

Daugiakriterijinis metodas turi visų darbe aptartų vienmačių portfelio formavimo metodų savybių. Pagal šiuo metodu formuojamo portfelio svorių grafiką matome, jog metodas išnaudoja pirmaujančių indikatorių portfelio privalumus ir reikšmingai sumažina rizikingų investavimo priemonių dalį, artėjant ekonomikos nuosmukiams bei gerai koreliuoja su VIX indeksu. Tačiau lyginant su paprastu pirmaujančių indikatorių portfeliu, šiame portfelyje bet kuriuo momentu galima rasti tam tikrą dalį rizikingų ir mažiau rizikingų investicijų. Dėl to šis portfelis labiau diversifikuotas ir mažiau priklausomas nuo kiekvieno atskiro metodo klaidų. Pavyzdžiui, jeigu pirmaujantis rodiklis pavėluotai informuotų apie galimą recesiją, pagal šį rodiklį sudaryto portfelio vertė būtų paveikta labiausiai, kadangi portfelį sudarytų tik rizikingos investavimo priemonės. Daugiakriterijiniu metodu suformuotas portfelis būtų mažiau jautrus tokiai klaidai.

3.4 lentelė. Sudarytų portfelių grąžos ir rizikos rodikliai

	Daugiakriterijinis	**CVaR**	**MOGK**	**MSDE**	**LDP**	**IM**	**SV**	**LS**	**PI**
Metinė grąža, %	9,11	4,76	4,75	4,71	4,9	7,87	7,48	6,98	12,98
Metinės grąžos 95% pasikliautinumo intervalas	[6,65;11,6]	[3,64;5,88]	[3,69;5,81]	[3,66;5,76]	[3,65;6,15]	[3,76;11,9]	[4,12;10,8]	[3,11;10,8]	[9,93;16]
Standartinis nuokrypis, %	6,57	2,51	2,35	2,41	3,09	9,97	8,63	10,19	8,76
Sharp rodiklis, Rf = -0,3%	1,43	2,02	2,15	2,08	1,68	0,82	0,9	0,71	1,52
Rachev rodiklis, Rf = -0,3% (0.95;0.95)	1,19	2,56	1,95	1,59	1,15	0,32	0,52	0,53	1,52
VaR, % (0.95)	-0,025	-0,0077	-0,0077	-0,0081	-0,012	-0,044	-0,037	-0,047	-0,03
CVaR, % (0.95)	-0,042	-0,012	-0,013	-0,015	-0,022	-0,124	-0,082	-0,092	-0,049
Didžiausias nuostolis nuo maksimumo, %	16,38	3,15	4,04	4,46	9,02	47,84	40,81	42,34	11,21

Portfelių grąžos santykį su prisiimama rizikas parodo Sharp ir Rachev rodikliai. Pagal abu šiuos rodiklius, išsiskiria matematinio optimizavimo metodai (CVaR, MOGK, MSDE ir LDP), kurie didžiąją dalį kapitalo investuoja į obligacijų indeksus, turinčius gerus grąžos/rizikos rodiklius individualiai. Remiantis teorija aprašyta skyriuje „Rinkos portfelis ir jo formavimas“, investuotojas turėtų rinktis tokį portfelį, kurio Sharp rodiklis yra didžiausias. Šiuo atveju, tai būtų MOGK portfelis. Siekiant uždirbti didesnę grąžą ir išlaikyti nepakitusį investicijų portfelio Sharp rodiklį, tektų skolintis už Rf = -0,3% dydžio palūkanas ir paskolintus pinigus investuoti į tą patį MOGK portfelį. Tačiau neturint galimybės pasiskolinti už tokias ar mažesnes palūkanas ir investuojant brangiau pasiskolintą kapitalą, portfelio rizika išaugtų neproporcingai grąžai, o realus Sharp rodiklis sumažėtų. Taip pat MOGK ir kiti matematinio optimizavimo metodai negarantuoja tokio pačio aukšto grąžos ir rizikos santykio ateityje. Todėl siekiant padidinti portfelio grąžą, investuotojui tektų rinktis kitus portfelio formavimo metodus. Remiantis rezultatų lentele, gera alternatyva matematinio optimizavimo metodams, galėtų būti pirmaujančių indikatorių ir daugiakriterijinis metodai. Pagal šiuos metodus suformuotų portfelių grąžą lenkia ar yra panaši į rizikingiausių indeksų uždirbamą grąžą, tačiau visi rizikos rodikliai ženkliai geresni. Pagal Sharp ir Rachev grąžos/rizikos rodiklius, pirmaujančių indikatorių metodas šiek tiek lenkia daugiakriterijinį metodą, taip pat pirmasis turi mažesnį didžiausią vertės kritimą. Tačiau, kaip buvo minėta anksčiau, pirmaujančių rodiklių portfelis labai priklausomas nuo vieno rodiklio sėkmės prognozuojant įvykius rinkoje. Daugiakriterijinis metodas leidžia labiau diversifikuoti investicijas ir sumažinti vieno metodo klaidos įtaką bendram rezultatui.

3.5. Modelių palyginimo rezultatai

Skyriuje 3.4 palyginimas tarp modelių atliktas vizualiu vertinimu ir remiantis statistiniais ir ekonometriniais kriterijais, kaip grąža, standartinis nuokrypis ar Sharp‘o rodiklis. Tačiau jau pagal grafikus buvo galima pastebėti, jog modelių rezultatai priklauso nuo pasirinkto laikotarpio. Pavyzdžiui, analizę sustabdžius 2008 metų recesijos viduryje, slankiųjų vidurkių, inercijos momentų ir lygių svorių portfelių kriterijai būtų daug prastesni, negu pateikti 3.4 lentelėje. Pasirinktas investavimo pradžios momentas taip pat turi reikšmingą įtaką galutiniam rezultatui. Todėl modelio grąžų bei rizikos palyginimui, pritaikysime SPA ir stochastinio dominavimo testus.

Pirmiausiai pritaikysime SPA testą grąžų palyginimui. Pagal šio testo nulinę hipotezę, modelis neaplenkia palyginamojo modelio (jo grąžą nėra statistiškai reikšmingai didesnė už palyginamojo modelio). Atliekant analizę naudojamas pasikliautinumo lygmuo p=0,05. Lyginamos modelių poros ir gauti rezultatai apibendrinami 3.5 lentelėje.

3.5 lentelė. Modelių palyginimo panaudojant SPA statistinį testą rezultatai

Modelių pora	Tikimybė	Išvada
CVaR > Daugiakriterijinis[2]	0,4998	H_0 neatmetama
Daugiakriterijinis > CVaR	0,001	H_0 atmetama
IM > Daugiakriterijinis	0,5316	H_0 neatmetama
Daugiakriterijinis > IM	0,198	H_0 neatmetama
SV > Daugiakriterijinis	0,5224	H_0 neatmetama
Daugiakriterijinis > SV	0,061	H_0 neatmetama
LS > Daugiakriterijinis	0,5116	H_0 neatmetama
Daugiakriterijinis > LS	0,066	H_0 neatmetama
PI > Daugiakriterijinis	0,001	H_0 atmetama
Daugiakriterijinis > PI	0,5298	H_0 neatmetama
CVaR > PI	0,5082	H_0 neatmetama
PI > CVaR	0,001	H_0 atmetama
IM > PI	0,5236	H_0 neatmetama
PI > IM	0,007	H_0 atmetama
SV > PI	0,5336	H_0 neatmetama
PI > SV	0,001	H_0 atmetama
LS > PI	0,511	H_0 neatmetama
PI > LS	0,001	H_0 atmetama

[2] Žymėjimas „A > B“ naudojamas apibūdinti nulinei hipotezei, jog A modelis neaplenkia palyginamojo modelio B.

Pagal SPA testo rezultatus nustatėme, jog daugiakriterijiniu metodu suformuoto portfelio grąža, statistiškai reikšmingai viršija CVaR ir kitų matematinio optimizavimo metodais suformuotų portfelių grąžas. Tačiau su 0,05 pasikliautinumo lygmeniu neatmesta hipotezė, jog daugiakriterijinio portfelio grąža nėra didesnė už inercijos momentų, slankiųjų vidurkių ir lygių svorių portfelių grąžą. Tačiau lyginant daugiakriterijinį portfelį su slankiųjų vidurkių ir lygių svorių portfeliais, gaunama testo tikimybė arti pasirinktos pasikliautinumo ribos (0,061 ir 0,066 atitinkamai). Pirmaujančių indikatorių portfelio grąža statistiškai reikšmingai aplenkė visų kitų darbe analizuojamų portfelių grąžą ir atvirkščiai, nei vienas kitas portfelis neaplenkė pirmaujančių indikatorių portfelio sugeneruotos grąžos.

Toliau pritaikysime stochastinio dominavimo testą. Rezultatai pateikiami 3.6 lentelėje. Lentelėje „+“ ženklu žymime, jeigu stochastinio dominavimo taisyklė pasitvirtino ir „-“ ženklas naudojamas, jeigu nepasitvirtino.

3.6 lentelė. Stochastinio dominavimo testo rezultatai

Modelių pora	I – os eilės	II – os eilės	III – os eilės
Daugiakriterijinis > CVaR	-	-	-
Daugiakriterijinis > IM	-	+	+
Daugiakriterijinis > SV	+	+	+
Daugiakriterijinis > LS	-	+	+
Daugiakriterijinis > PI	-	-	-
PI > Daugiakriterijinis	-	-	-
PI > CVaR	-	-	-
PI > IM	+	+	+
PI > SV	+	+	+
PI > LS	+	+	+

Remiantis stochastinio dominavimo rezultatais pastebime, jog daugiakriterijinis portfelis pagal visus stochastinio dominavimo kriterijus pirmauja prieš slankiųjų vidurkių portfelį, o pagal II ir III eilės kriterijus pirmauja prieš inercijos momentų ir lygių svorių portfelius. Didžiausią grąžą uždirbę daugiakriterijinis ir pirmaujančių indikatorių portfeliai, pagal šį testą nėra dominuojantys prieš CVaR portfelį. Taip pat nėra dominuojančio portfelio tarpusavyje lyginant daugiakriterijinį ir pirmaujančių indikatorių portfelį. Tačiau pirmaujančių indikatorių portfelis pagal visus kriterijus dominuoja prieš inercijos momentų, slankiųjų vidurkių ir lygių svorių portfelius.

IŠVADOS

1. Pagal grąžos ir rizikos santykį (Sharp ir Rachev rodiklius), analizuojamu laikotarpiu optimaliausi metodai portfelio formavimui buvo Markowitz modelis su išskirtims atspariais kovariacijų matricos apskaičiavimo metodais ir CVaR rizikos mato minimizavimo modelis. Tačiau išsamesnė rezultatų analizė parodė, jog portfelį formuojant šiais metodais, neišnaudojama galimybė investuoti į ypač didelę grąžą uždirbančias investavimo priemones, kai jų kaina būna žemiausiame lygyje – recesijos metu ir iškarto po jos. Atvirkščiai, pagal šiuos metodus, portfelis aukštesnę grąžą generuojančiomis, tačiau rizikingomis investicijomis papildomas artėjant ekonomikos augimo ciklo pabaigai, kai išauga tikimybė šių investicijų vertės kritimui. Todėl šie portfelio formavimo metodai negarantuoja geriausio grąžos ir rizikos santykio ir jų generuojama grąža, per analizuotą 30 metų laikotarpį, statistiškai reikšmingai mažesnė už kitų darbe analizuotų portfelių grąžą. Todėl nerekomenduojama investicijų portfelį formuoti tik pagal šiuos metodus.
2. Darbe pasiūlytas investicijų portfelio formavimo metodas pagal pirmaujančius ekonominės situacijos indikatorius analizuojamu laikotarpiu būtų leidęs uždirbti statistiškai reikšmingai didžiausią grąžą, lyginant su kitais darbe taikytais metodais. Pagal šį metodą, analizuojamu laikotarpiu iš anksto sumažinama investicijų portfelio rizika artėjant ekonomikos nuosmukiui ir pereinama prie didžiausią grąžą generuojančių investavimo priemonių ekonomikos augimo metu. Pagal stochastinio dominavimo testo visus kriterijus, šiuo metodu suformuotas portfelis geresnis už darbe taikytus inercijos momentų, slankiųjų vidurkių ir lygių svorių portfelius. Tačiau neaplenkti daugiakriterijinis ir CVaR metodai. Pagal SPA testo rezultatus, šio portfelio grąža statistiškai reikšmingai lenkia kitų darbe sudarytų portfelių grąžas. Todėl tokio metodo pritaikymas analizuotu laikotarpiu leido ženkliai pagerinti daugiakriterijinio portfelio grąžą.
3. Slankiųjų vidurkių ir inercijos momentų investicijų portfelio formavimo metodai, per analizuotą 30 metų laikotarpį, leido uždirbti virš 7,5% vidutinę metinę grąžą ir pagal šį kriterijų statistiškai reikšmingai nusileido tik pirmaujančių indikatorių portfeliu. Tačiau šių portfelių grąžos ir rizikos santykio rodikliai vieni iš prasčiausių, lyginant su kitais darbe analizuotais portfeliais. Tai lėmė dideli šių portfelių vertės svyravimai ekonominių recesijų metu. Remiantis darbe pritaikyto stochastinio dominavimo testo rezultatais, vietoje šių metodų vertėtų rinktis daugiakriterijinį arba pirmaujančių indikatorių metodus investicijų portfelio formavimui.
4. Lygių svorių portfelis analizuojamu laikotarpiu būtų uždirbęs beveik 7% vidurinę metinę grąžą, tačiau rezultatų analizės metu nustatyta, jog dėl didelio lygių svorių portfelio vertės svyravimo, ši grąžą nėra statistiškai reikšmingai didesnė, lyginant netgi su mažiausią grąžą sugeneravusiais portfeliais. Todėl remiantis gautais rezultatais, šio modelio taikymas investicijų portfelio formavimui nerekomenduojamas.
5. Darbe pasiūlytas daugiakriterijinis investicijų portfelio formavimo metodas pagal grąžą statistiškai reikšmingai nusileido pirmaujančių indikatorių portfeliui. Tačiau atliktas stochastinio dominavimo testas parodė, jog nei pagal vieną iš kriterijų, šie du metodai nėra geresni vienas už kitą tarpusavyje. Taip pat remiantis rizikos/grąžos santykiu, daugiakriterijinis portfelis tik nežymiai nusileidžia pirmaujančių indikatorių portfeliui. Tačiau daugiakriterijinio metodo pagrindinis privalumas prieš didžiausią grąžą uždirbusį pirmaujančių indikatorių metodą yra platesnė portfelio diversifikacija ir mažesnė vieno metodo klaidos reikšmė galutiniam rezultatui. Tą rodo įprastai didesnis pirmaujančių

indikatorių portfelio didžiausias vertės nuokrypis nuo maksimalios. Dėl šios priežasties investavimui rekomenduojamas daugiamatis metodas.

6. Lyginant analizuotų portfelių sudėties pokyčių koreliaciją su VIX indeksu nustatyta, jog darbe taikyti CVaR, Markowitz ir didžiausios diversifikacijos metodai neįvertina investuotojų lūkesčių, dėl akcijų rinkos pokyčių. Inercijos momentų ir slankiųjų vidurkių metodai tą padarė tik 2008 krizės metu. Geriausiai realius investuotojų lūkesčius įvertina darbe pasiūlytas pirmaujančių indikatorių metodas bei visus metodus apimantis daugiakriterijinis investicijų portfelio formavimo algoritmas. Todėl pirmaujančių indikatorių įtraukimas rekomenduojamas, siekiant įvertinti investuotojų ateities lūkesčius.

LITERATŪROS ŠALTINIAI

[1] H. Markowitz, „Portfolio selection," *The Journal of Finance,* t. 7, pp. 77-91, 1952.

[2] L. Macijauskas, „Finansų rinkų dalyvių iracionalumu paremta taktinė turto alokacija," Technika, Vilnius, 2015.

[3] C. Institute, „Corporate Finance and Portfolio Management," Pearson Custom Publishing, 2009.

[4] P. Miskolczi, „Note on simple and logarithmic return," *Applied Studies in Agribusiness and Commerce,* t. 11, pp. 127-136, 2017.

[5] A. Peiro, „The distribution of stock returns: international evidence," *Applied Financial Economics,* t. 4, nr. 6, pp. 431-439, 2010.

[6] S. Hurst ir E. Platen, „The marginal distributions of returns and volatility," įtraukta *L1-Statistical Procedures and Related Topics*, 1997.

[7] S. Forghieri, „Portfolio Optimization using CVaR," LUISS Guido Carli, Roma, 2014.

[8] A. Aksomaitis, Tikimybių teorija ir statistika, Kaunas: Technologija, 202.

[9] R. Cont, „Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues," *Quantitative Finance,* t. 1, pp. 223-236, 2001.

[10] K. Hoyland, M. Kaut ir S. Wallace, „A Heuristic for Moment-matching Scenario Generation," *Computational Optimization and Applications*, t. 24, pp. 169-185, 2003.

[11] H. Ling, „Dependence patterns across financial markets: A mixed copula approach," *Applied Financial Economics,* t. 16, pp. 717-729, 2006.

[12] M. Kaut ir S. Wallace, „Shape-based Scenario Generation using Copulas," *Computational Management Science,* t. 5, pp. 181-199, 2011.

[13] A. Sklar, „Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges,“ *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris,* 1959.

[14] L. Devroye, „Non-uniform Random Variate Generation,“ *Springer-Verlag,* 1986.

[15] S. Bjorklund ir T. Uhlin, „Artificial neural networks for financial time series prediction and portfolio oprimization,“ Likoping University, Department of Management and Engineering, 2017.

[16] M. Manstavičius ir R. Leipus, „Bounds for the Clayton copula,“ *Nonlinear Analysis: Modelling and Control,* t. 22, pp. 248-260, 2017.

[17] J.P.Morgant Asset Management - Strategic Investment Advisory Group, „Non-normality of Market Returns,“ New York, 2009.

[18] M. Faber ir E. W. Richardson, „The Ivy Portfolio: How to Invest Like the Top Endownments and Avoid Bear Markets,“ Wiley, 2009.

[19] B. L. Welch, „The generalization of "Student's" problem when several different population variances are involved,“ *Biometrika,* t. 34, pp. 28-35, 1947.

[20] G. D. Ruxton, „The unequal variance t-test is an underused alternative to Student's t-test and the Mann-Whitney U test,“ *Behavioral Ecology,* t. 17, pp. 688-690, 2006.

[21] B. Derrick, D. Toher ir P. White, „Why Welchs test is Type I error robust,“ *The Quantitive Methods for Psychology,* t. 12, pp. 30-38, 2016.

[22] G. Debreu, „Representation of a preference ordering by numerical function,“ įtraukta *Decision processes,* New York, Wiley, 1954, pp. 159-167.

[23] C. Barry, „Portfolio Analysis Under Uncertain Means, Variances, and Covariances,“ *The Journal of Finance,* t. 29, pp. 515-522, 1973.

[24] J. Tobin, „Liquidity Preference as Behavior Towards Risk,“ *The Review of Economic Studies,* t. 15, pp. 65-86, 1958.

[25] W. F. Sharpe, „Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *The Journal of Finance,* t. 19, pp. 425-442, 1964.

[26] J. Raymaekers ir P. J. Rousseeuw, „Fast robust correlation for high dimensional data," 2018.

[27] B. Pfaff, Financial Risk Modelling and Portfolio Optimization with R, Wiley, 2016.

[28] W. Stahel, „Robuste Schätzungen: Infinitesimale Optimalität und Schätzungen von Kovarianzmatrizen," Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zürich, 1981.

[29] D. Donoho, „Breakdown properties of multivariate location estimators," Harvard University, Boston, 1982.

[30] R. Maronna ir R. Zamar, „Robust estimates of location and dispersion of high-dimensional datasets," *Technometrics,* t. 44, pp. 307-317, 2002.

[31] V. Yohai ir R. Zamar, „High breakdown point estimates of regression by means of the minimization of an efficient scale," *Journal of the American Statistical Assiociation,* t. 83, pp. 406-413, 1988.

[32] Y. Choueifaty ir Y. Coignard, „Toward maximum diversification," *Journal of Portfolio Management,* t. 34, pp. 40-51, 2008.

[33] Y. Choueifaty, T. Froidure ir J. Reynier, „Properties of the most diversified portfolio," TOBAM, Paris, 2011.

[34] F. Louveaux ir J. R. Birge, Introduction to Stochastic Programming, New York: Springer, 2011.

[35] H. H. Chen ir C. B. Yang, „Stock Investment with Stochastic Programming," įtraukta *Chen2014StockIW,* Taiwan, 2014.

[36] S. Sarykalin, G. Serraino ir S. Uryasev, „Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization," INFORMS, 2008.

[37] R. Rockafellar ir S. Uryasev, „Optimization of conditional value-at-risk," *The Journal of Risk,* t. 2, pp. 21-41, 2000.

[38] Organization for Economic Co-operation and Development, „OECD Leading indicators and tendency surveys," 2019. [Tinkle]. Available: http://www.oecd.org/sdd/leading-indicators/latestdocuments/. [Kreiptasi 30 03 2019].

[39] Organization for Economic Co-operation and Development, „OECD System of Composite Leading Indicators," 2012.

[40] P. Schanbacher, „Combining Portfolio Models," *Annals of Economics and Finance,* t. 15, pp. 433-455, 2014.

[41] H. White, „A reality check for data snooping," *Econometrica,* t. 68, pp. 1097-1126, 2000.

[42] P. R. Hansen, „A Test for Superior Predictive Ability," *Journal of Business & Economic Statistics,* t. 23, nr. 4, pp. 365-380, 2005.

[43] M. D. Politis ir J. P. Romano, „The Stationary Bootstrap," *Journal of the American Statistical Association,* t. 89, pp. 1303-1313, 1994.

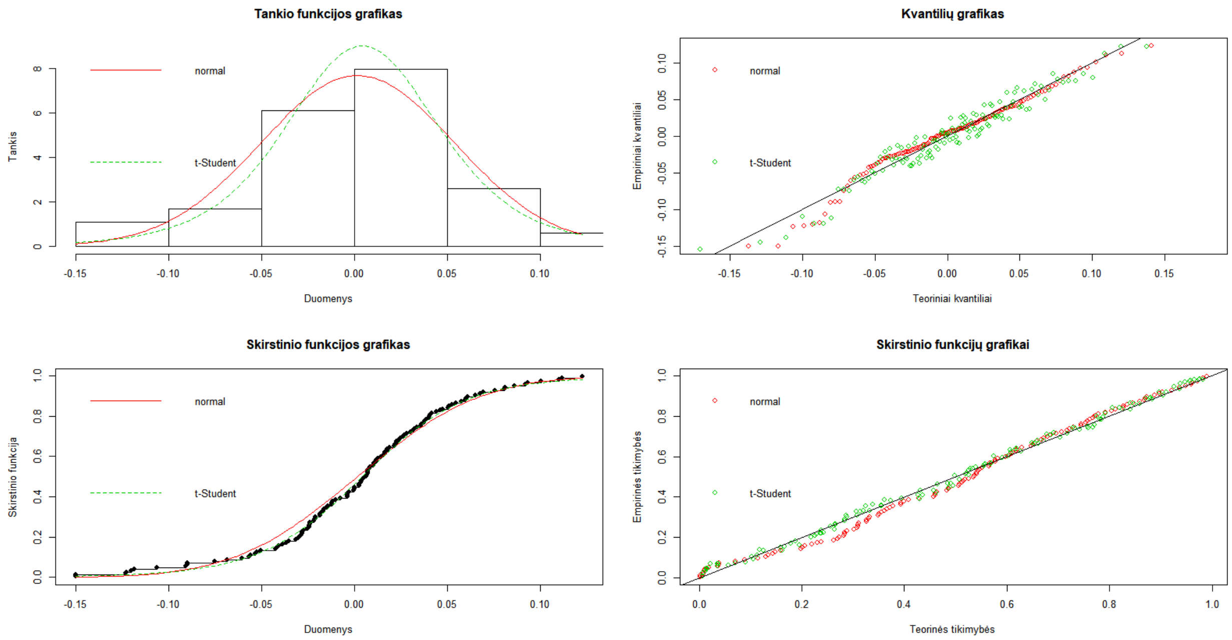
[44] H. D. Vinod, „Ranking mutual funds using unconventional utility theory and stochastic dominance," *Journal of Empirical Finance,* t. 11, pp. 353-377, 2004.

[45] Bloomberg, „Bloomberg," The Terminal, [Tinkle]. Available: https://www.bloomberg.com/professional/solution/bloomberg-terminal/. [Kreiptasi 14 Kovo 2019].

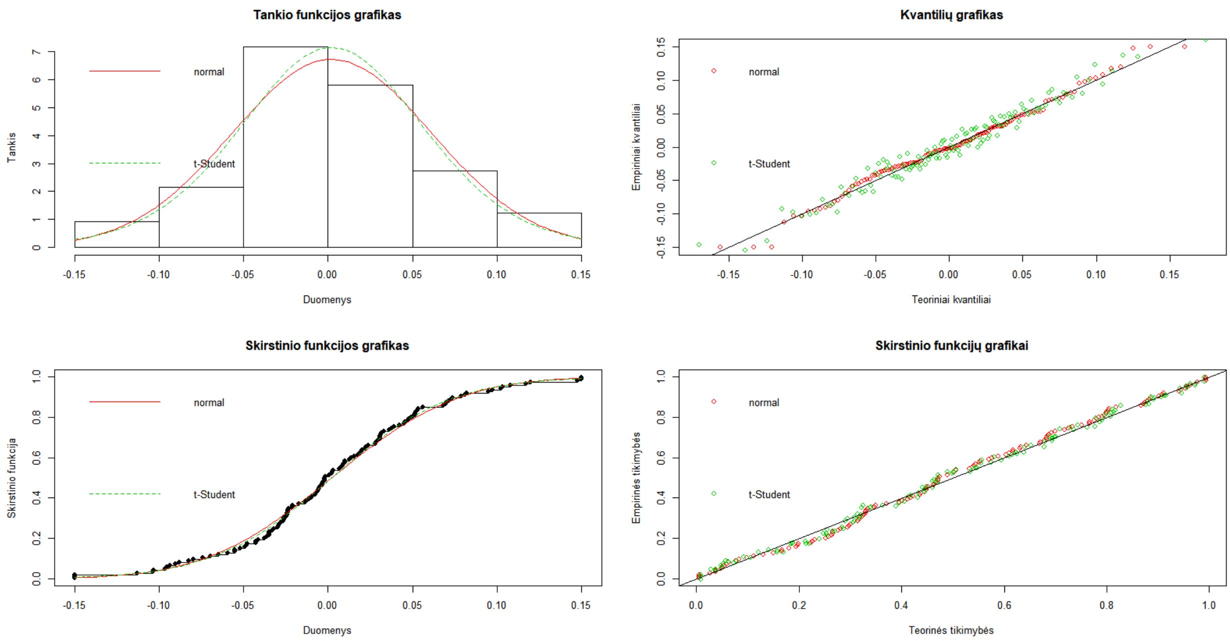
[46] M. Haugh, „An Introduction to Copulas," Columbia University, 2016.

Priedai

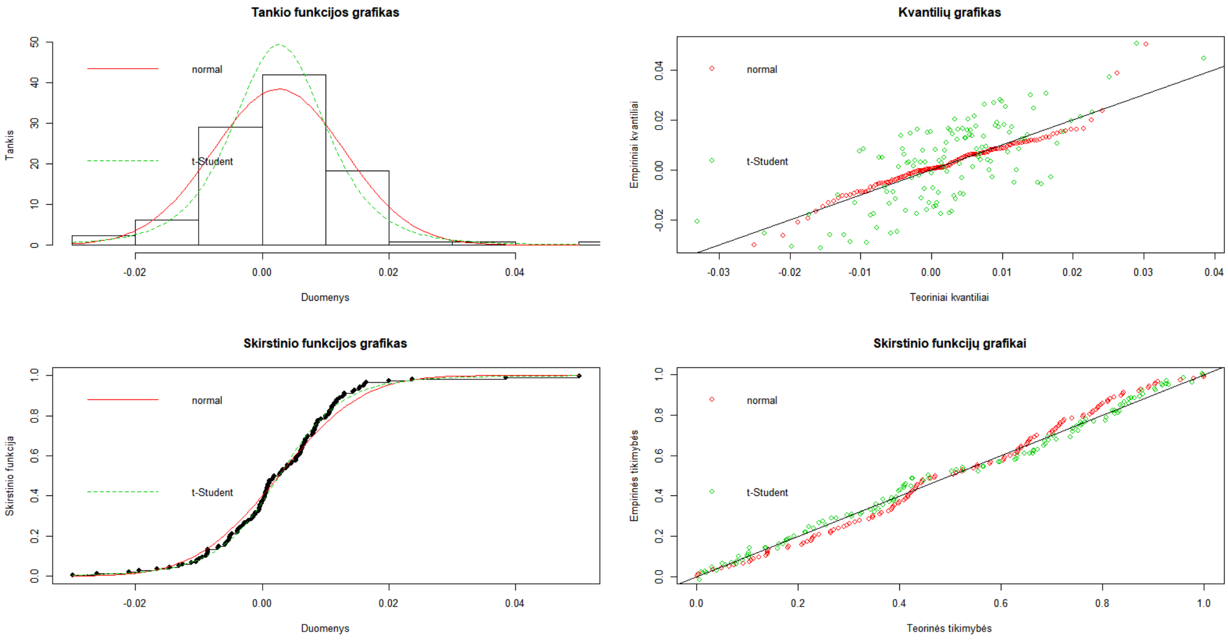
Priedas 1 Grafikai investavimo priemonių grąžas aprašančių skirstinių parinkimui



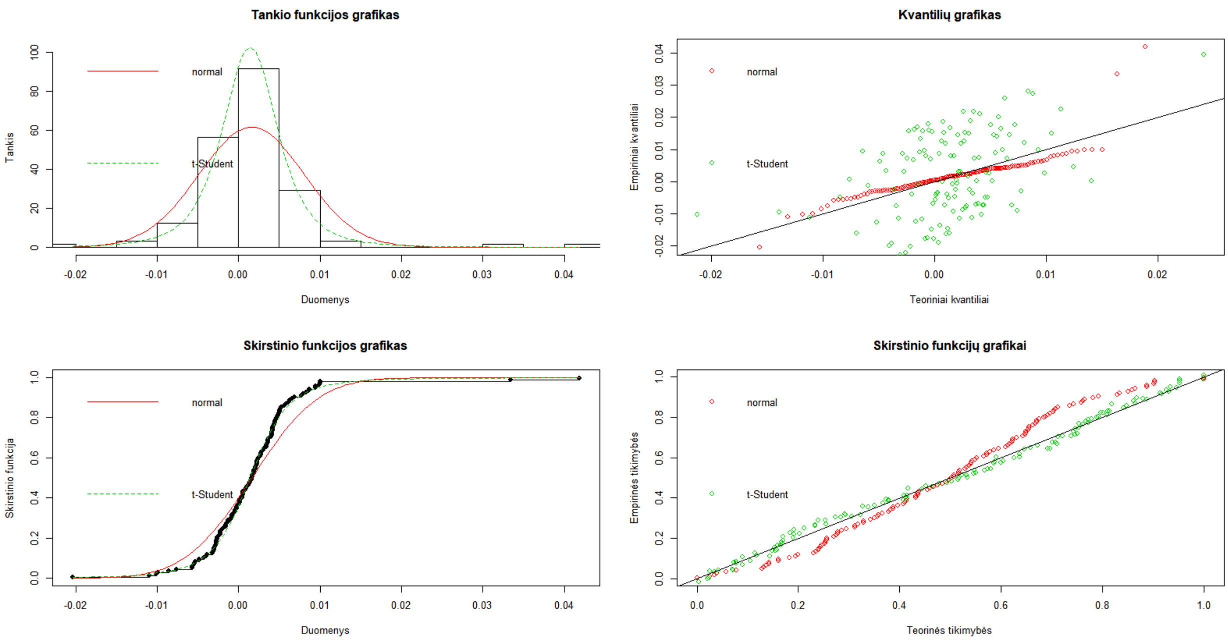
Grafikai VEA indekso grąžas aprašančio skirstinio parinkimui



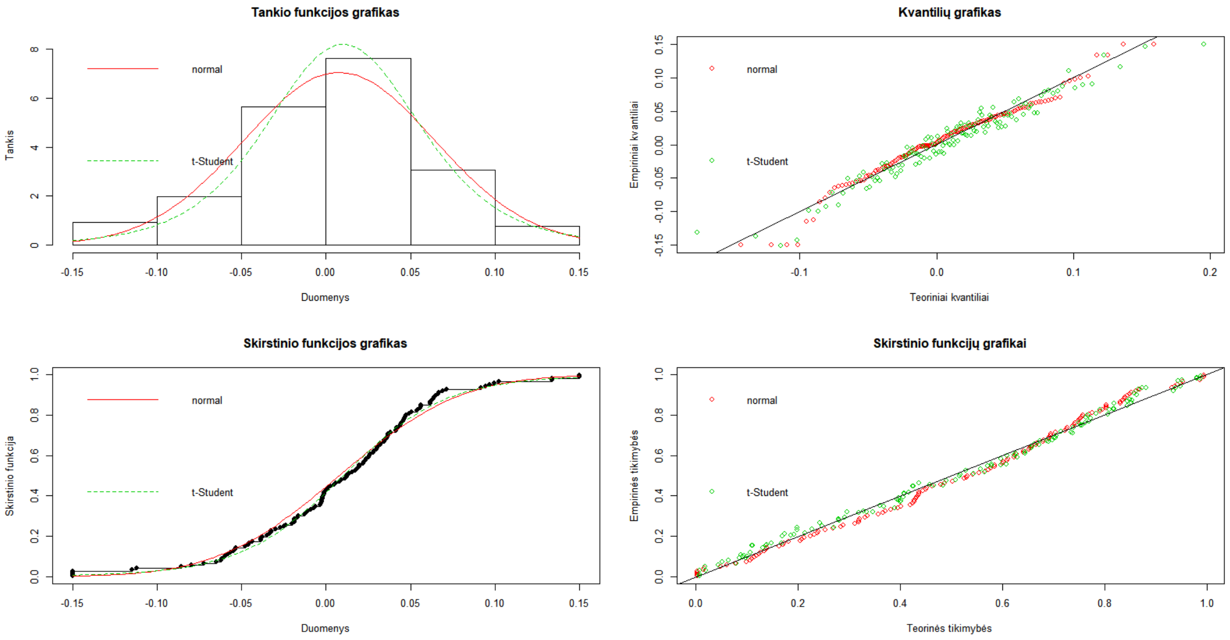
Grafikai VWO indekso grąžas aprašančio skirstinio parinkimui



Grafikai BND indekso grąžas aprašančio skirstinio parinkimui



Grafikai BSV indekso grąžas aprašančio skirstinio parinkimui



Grafikai VNQ indekso grąžas aprašančio skirstinio parinkimui