

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
VYTAUTO DIDŽIOJO UNIVERSITETAS
VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

AUDRIUS NEČIŪNAS

**TAMPRIŪJŲ BANGŲ SKLIDIMO SLOPINANČIOSE TERPĖSE
SKAITINIO MODELIAVIMO ALGORITMAI**

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, informatika (09P)

2018, Kaunas

Disertacija rengta 2014–2017 metais Kauno technologijos universiteto Informatikos fakulteto Taikomosios informatikos katedroje.

Mokslinis vadovas:

Prof. habil. dr. Rimantas BARAUSKAS (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika, 09P).

Redagavo: Inga Nanartonytė (leidykla „Technologija“)

Informatikos mokslo krypties disertacijos gynimo taryba:

Prof. habil. dr. Minvydas RAGULSKIS (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika, 09P) – **pirmininkas**;

Prof. habil. dr. Rimantas KAČIANAUSKAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, technologiniai mokslai, mechanikos inžinerija, 09T);

Prof. dr. Gintaras PALUBECKIS (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika, 09P);

Doc. dr. Kristina POŠKUVIENĖ (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika, 09P);

Prof. dr. Miguel A. F. SANJUAN (Rey Juan Carlos universitetas, fiziniai mokslai, informatika, 09P).

Disertacija bus ginama viešame Informatikos mokslo krypties disertacijos gynimo tarybos posėdyje 2018 m. rugsėjo 4 d. 13 val. Kauno technologijos universiteto Disertacijų gynimo salėje salėje.

Adresas: K. Donelaičio g. 73-403, 44249 Kaunas, Lietuva.

Tel. + 370 37 300 042; faks. + 370 37 324 144; el. paštas doktorantura@ktu.lt.

Disertacijos santrauka išsiųsta 2018 m. rugpjūčio 3 d.

Su disertacija galima susipažinti interneto svetainėje <http://ktu.edu> ir Kauno technologijos universiteto bibliotekoje (K. Donelaičio g. 20, 44239 Kaunas), Vytauto Didžiojo universiteto (K. Donelaičio g. 52, Kaunas) ir Vilniaus Gedimino technikos universiteto (Saulėtekio al. 14, 10223 Vilnius) bibliotekose.

IVADAS

Bėgančiųjų bangų modeliavimas turi didelę praktinę reikšmę planuojant ultragarso matavimus, atliekant vamzdynų sistemos vientisumo stebėseną, analizuojant vamzdynuose sužadintų impulsų sklidimą, žemės drebėjimų bangų sklidimą ir kt. Įprastai sudėtingos geometrinės formos struktūrose ar terpėse sklindančių bangų analizei taikomi skaičiavimo būdai, pagrįsti baigtinių elementų (BE) ar baigtinių skurtumų (BS) metodais. Tačiau būdingieji šių metodų trūkumai išryškėja, kai nagrinėjamos didelių, palyginti su sklindančiųjų bangų ilgiais, dimensijų struktūros. Ribinis modeliavimo atvejis yra begalinė terpė bangai sklisti viena ar keliomis kryptimis. Šiuo atveju modeliuoti įprastiniu baigtinių elementų metodu (BEM) yra sudėtinga dėl atsirandančių dirbtinių bangų atspindžių nuo skaičiuojamosios srities kraštų. Siekiant šių atspindžių išvengti ar juos sumažinti kartu su BEM taikomi įvairūs metodai, pavyzdžiui, neatspindinčios kraštinės sąlyga (tinkama tik akustinėms bangoms), kraštinės integraliniai elementai, suderinto akustinio impedanso sluoksniai ir kt. Vis dėlto minėti būdai leidžia gauti tik apytikslius rezultatus ir taip pat reikalauja didelių papildomų skaičiavimo išteklių. Pusiau analitiniai metodai, tokie kaip PABEM (pusiau analitinis baigtinių elementų metodas), atrodo perspektyvūs, nes leidžia išvengti diskretizacijos struktūroje begalinės kraštinės kryptimi. Nors PABEM principai yra gerai žinomi jau keletą dešimtmečių, tačiau jis dar nėra pakankamai išvystytas, palyginti su įprastiniu BEM, todėl aktuali tolesnė šio metodo analizė.

Bangos bangolaidžiuose (plokštelėje, strype, vamzdyje ir pan.) yra apibūdinamos dispersinėmis kreivėmis. Dispersinėmis kreivėmis nusakomi ryšiai tarp fazinio, grupinio, energijos greičių ir bangos dažnio. PABEM palengvina dispersinių kreivių skaičiavimą bangolaidžiams, turintiems nekintamą geometrinę formą bent vienos kraštinės atžvilgiu. Diskretizacija baigtiniais elementais reikalinga tik tokio bangolaidžio skerspjūvyje. Laiko ir erdvės harmoninių svyravimų sprendiniai yra pritaikomi sklindančiosios bangos kryptimi. Šių sprendinių išraiškose naudojamos kompleksinių skaičių eksponentinės funkcijos. Kaip ir įprastinių BEM atveju, PABEM leidžia išreikšti bangolaidžio atsaką į jėgą tam tikrame laiko intervale. Šis atsakas išreiškiamas kaip atskirų modų atsakų į jėgą superpozicija.

Yra atlikta daug bangų bangolaidžiuose, esančiuose vakuume, tyrimų, tačiau modeliuoti bangas slopinančiose terpėse išlieka sudėtinga užduotimi. Įprastai PABEM paremtas prielaida, jog į bėgančiosios bangos amplitudės mažėjimą galima neatsižvelgti, tai leidžia taikyti tam tikrus matematinius supaprastinimus BEM formuluotėje. Esant aukštam slopinimo lygiui, šie supaprastinimai lemia didelius bangos sprendinių netikslumus. Šiame tyrime PABEM formuluotė yra praplėsta siekiant nagrinėti bangas slopinančiose terpėse. Energijos praradimas modeliuojamas įvertinant Reilėjaus slopinimą (t. y. energijos praradimą lemia bangolaidžio materijos slopinimas) ir

išspinduliuojančiąsias bangas (t. y. energijos praradimą lemia bangolaidį supanti slopinanti terpė), kai nagrinėjamas bangolaidis idealiajame skystyje.

Tyrimo objektas

Disertacijos tyrimo objektas – pusiau analitiniai baigtinių elementų modeliai ir jų taikymas tiriant bangų sklidimą slopinančiose terpėse.

Tyrimo tikslas

Tyrimo tikslas – tobulinti ir kurti sklindančiosios bangos modoms ir priverstiniam atsakui apskaičiuoti skirtus algoritmus esant dideliame terpės slopinimui.

Tyrimo uždaviniai

Darbo tikslui pasiekti iškelti šie uždaviniai:

1. Realizuoti PABEM algoritmus apskaičiuojant vakuume esančiu bangolaidžiu sklindančių bangų modų sprendinius, kai Reilėjaus slopinimo bangolaidyje lygis reikalauja panaudoti kompleksinius bangos skaičius.
2. Ištirti priverstinius harmoninius ir neharmoninius sklindančiosios bangos atsakus vakuume esančiame bangolaidyje esant vidiniam Reilėjaus slopinimui.
3. Verifikuoti priverstinį sklindančiųjų bangų atsaką neilgame bangos sklidimo kelyje, sulyginant PABEM rezultatus su 3D BEM modelio, vaizduojančio tokio paties bangolaidžio segmentą, rezultatais.
4. Sudaryti PABE modelį bangolaidžiui, panardintam idealiajame skystyje, ir, atlikus skaitinius eksperimentus, apskaičiuoti dispersijos priklausomybes.
5. Įvertinti teorines prielaidas apskaičiuoti priverstinio žadinimo sklindančiųjų bangų sprendinius į idealųjį skystį panardintame stačiakampio skerspjuvio bangolaidyje.

Darbo mokslinis naujumas

Svarbiausias darbo mokslinio naujumo elementas yra vienkrypčių bangolaidžių analizei taikomo PABEM išplėtimas įvertinant Reilėjaus slopinimo bangolaidžio medžiagoje įtaką. Skirtingai nuo iki šiol žinomų tyrimų, bangų skaičiaus išraiškai panaudota formuluotė su kompleksiniu eksponentės rodikliu. Taip pat buvo išplėstas žinomas į idealųjį skystį panardintos plokštelės PABE modelis, pritaikant jį panardintam stačiakampio skerspjuvio bangolaidžiui.

Praktinė reikšmė

Disertacijoje nagrinėti modeliai gali būti taikomi vystant skaitinio modeliavimo programinę įrangą, skirtą bangoms, sklindančioms slopinančiuose skysčiuose panardintuose bangolaidžiuose, modeliuoti. Vertinant skaičiavimų apimtis, nagrinėti modeliai leidžia gerokai sumažinti modeliavimui reikalingus

skaičiavimo išteklius. Inžineriniu požiūriu nagrinėti sklindančiųjų bangų slopinančiose terpėse modeliai gali būti pritaikomi planuojant bangomis ir virpesiais paremtas matavimų procedūras. Jie leidžia numatyti bangų atspindžio atsakus nepažeistose ir vidinių defektų paveiktose struktūrose ir tuo remiantis sukurti defektų atpažinimo algoritmus.

Darbo rezultatų apibavimas

Disertacijos tema paskelbti keturi moksliniai straipsniai: du iš jų publikuoti Mokslinės informacijos instituto (ISI) pagrindinio sąrašo leidiniuose, turinčiuose citavimo indeksą, ir du pristatyti tarptautinėse mokslinėse konferencijose.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, keturi skyriai, išvados ir literatūros šaltinių sąrašas. Darbo apimtis – 108 puslapiai. Disertacijoje pateikti 54 paveikslai, remtasi 112 literatūros šaltinių.

1. TRUMPUJŲ BANGŲ ALGORITMŲ SKAITINIŲ TYRIMŲ APŽVALGA

Pirmieji teoriškai bangas strypuose nagrinėjo ir dispersines lygtis pateikė Pochhammer'is ir Chree [1, 2]. Sklindančiųjų bangų sprendinius plokštelėms pristatė Reilėjus ir Lembas. Vienalyčių ir izotropinių plokštelių dispersijos kreivės gali būti analitiškai nustatomos iš Reilėjaus ir Lembo lygties [3], tačiau analitiniai dispersinių ryšių sprendiniai įmanomi tik paprastos geometrinės formos bangolaidžiams.

Norint gauti dispersines charakteristikas sudėtingose struktūrose, dažniausiai reikia kito skaičiavimo metodo, pagrįsto baigtinių elementų metodu BEM. Daugelis autorių, pavyzdžiui, Sorohan'as [4], Hladky-Hennion'as [5], Damljanovic'ius ir Weaver'is [6], Zienkiewicz'ius [7], tyrė sklindančiąsias bangas bangolaidžiuose taikydami įprastinius BEM. BEM – universalus metodas, kuris yra plačiai taikomas sprendžiant bendruosius uždavinius, susijusius su pasirenkamų geometrinių savybių ir medžiagos parametrų struktūromis. Tačiau šis metodas dėl skaičiavimo išteklių apimčių netinka nagrinėjant dideles struktūras ir esant dideliems dažniams.

Trimačių (3D) bangolaidžių BE modelių dydį galima sumažinti imant tik nedidelę reprezentatyvios bangolaidinės struktūros dalį su periodiškumo sąlygomis bangolaidžio ašies kryptimi. Tai leidžia gauti bangos charakteristikas sprendžiant tikrinių reikšmių uždavinį bangolaidžio fragmentui. Šis metodas pritaikomas bangos baigtinių elementų metode (BBEM) ir yra lengvai adaptuojamas komerciniuose BEM paketuose, optimizuojant bangų skaičiavimui modeliuojamuose bangolaidžiuose reikalingus išteklius [8]. Tačiau sudėtingoms struktūroms modeliuoti standartiniai BBE reikalauja sudėtingos matematinės

formuluotės, taip pat atsiranda skaitinių paklaidų nagrinėjant trumpas bangas, lyginant su reprezentatyvia bangolaidinės struktūros dalimi.

Kitas pusiau analitinis metodas, kuris reikalauja tik bangolaidžio skerspjuvio diskretizacijos, yra redukuotojo krašto baigtinių elementų metodas (angl. SBFEM) [9]. Panašus pusiau analitinis baigtinių elementų metodas PABEM reikalauja diskretizuoti taip pat tik skerspjuvį bangolaidyje [10]. Taikant BBEM, SBFEM ir PABEM metodus priimama prielaida, kad banga sklinda išilgai bangolaidžio ašies OZ ir turi eksponentinę išraišką e^{-ikz} . Šiuose methoduose laiko sritis Furjė transformacija pakeičiama dažnių sritimi, kurioje galima suskaičiuoti nusistovėjęsios dinamikos būseną bangolaidyje. Kai nagrinėjama slopstančioji banga, ją išreiškia kompleksinis skaičius – erdvės eksponentė, kurios realioji dalis yra bangos skaičius, o menamoji dalis – amplitudės dekrementas erdvėje [11]. Disertacijoje PABEM pasirinktas tolesnei bangų sklidimo analizei.

PABE metodą pirmą kartą pristatė Lagasse'as [12] ir Aalami'is [13]. Viola, Marzani'is ir Bartoli'is [14] patobulino ir pritaikė PABEM nagrinėti bangoms slopinančioje viskoelastinėje medžiagoje. PABE formuluotėje išilgai bangolaidžio ašies sklindanti analitinė banga sujungiama su deformacijų skaitiniu lauku bangolaidžio skerspjuvyje, išreikštame BE. Dėl šios priežasties PABEM leidžia modeliuoti bet kokio ilgio bangas. Svarbu pabrėžti, jog PABEM naudojami viena dimensija mažesni baigtiniai elementai negu pati struktūra, kuria sklinda banga [15]. PABEM plačiai taikomas simuliuoti bangoms užpildytuose vamzdynuose [16], periodiškai atsikartojančios geometrijos struktūrose [17], sluoksniuotuose bangolaidžiuose [18].

Pagrindiniai bangos slopinimo šaltiniai yra materijos vidinė trintis ir šoninės bangos, per kurias energija išspinduliuojama į aplinkines sritis, kur bangos faziniai greičiai mažesni. Norint modeliuoti bangolaidį supančią terpę, į kurią išspinduliuojama energija, reikia šią terpę izoliuoti neatspindinčia sąlyga [19, 20]. PABEM su akustinį impedansą atitinkančio sluoksnio metodika (angl. *perfectly match layer*) leidžia sujungti bangolaidį supančią terpę su neatspindinčia kraštine [11]. Vietoje terpės su neatspindinčia kraštine gali būti naudojamas pustrėčios dimensijos krašto elementas (angl. 2.5D BE), tačiau PABE-2.5D BE metodas reikalauja sudėtingos matematinės formuluotės [21].

Bendroji bangos izotropinėje medžiagoje lygtis išreiškia taip [22]:

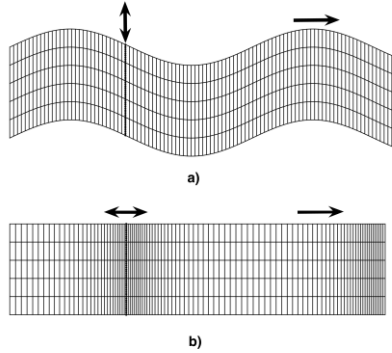
$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z};\end{aligned}\tag{1}$$

čia ρ – medžiagos tankis, u – poslinkių vektorius, σ – įtempiai.

Šios lygties sprendiniai yra išorinė ir skersinė bėgančiosios bangos (1.1 pav.):

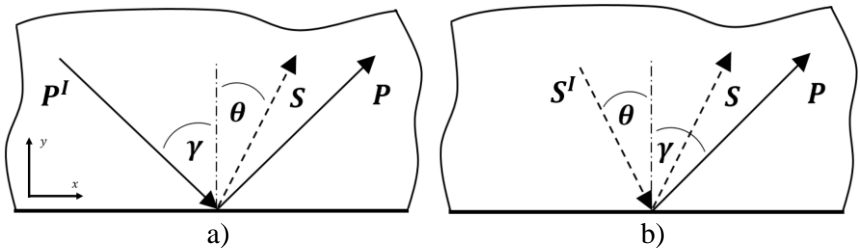
$$\phi = \Phi e^{i(\pm k_{Lx}x \pm k_{Ly}y \pm k_{Lz}z - \omega t)} \text{ ir } \psi = \Psi e^{i(\pm k_{Sx}x \pm k_{Sy}y \pm k_{Sz}z - \omega t)}, \quad (2)$$

čia Φ ir Ψ – atitinkamai išilginės ir skersinės bangos amplitudės, k_{Lx} , k_{Ly} , k_{Lz} , k_{Sx} , k_{Sy} ir k_{Sz} – išilginės ir skersinės bangų skaičiaus projekcijos atitinkamai OX , OY ir OZ ašyse, ω – kampinis dažnis $\left[\frac{rad}{s}\right]$.



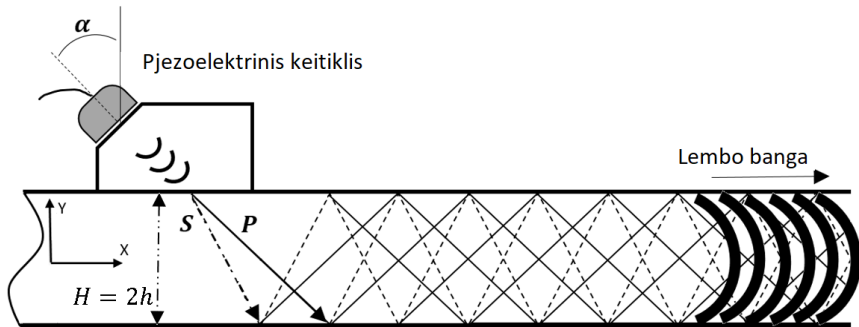
1.1 pav. Skersinė (a) ir išilginė (b) bangos

Kai harmoninė banga sklinda ribas turinčioje medžiagoje, įvyksta bangos lūžis ir atspindys susidaro išilgai ribų. Medžiagai ribojantis su vakuumu, krintančios išilginės bangos P (skersinės bangos S) visa energija atspindima ir konvertuojama į skersinės (išilginės) bangos energiją, todėl struktūroje energijos praradimų nėra (1. pav.).



1.2 pav. Išilginės P (a) ir skersinės S (b) bangų kritimas į medžiagos ir vakuumo ribą pusiauplokštumėje

Plokštelėje interferuojant išilginėms ir skersinėms bangoms susiformuoja Lembo banga (1.3 pav.).



1.3 pav. Lembo bangos susidarymas plokštelėje

Lembo bangos dispersiniai ryšiai (ω, k) gaunami iš Reilėjaus ir Lembo lygties:

$$\frac{\tan\left(\frac{q}{2}\right)}{\tan\left(\frac{p}{2}\right)} = -\frac{4k^2 pq}{(q^2 - k^2)^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\tan\left(\frac{q}{2}\right)}{\tan\left(\frac{p}{2}\right)} = -\frac{(q^2 - k^2)^2}{4k^2 pq}; \quad (4)$$

čia $p^2 = \left(\frac{\omega h}{c_{phL}}\right)^2 - k^2$ ir $q^2 = \left(\frac{\omega h}{c_{phS}}\right)^2 - k^2$, $h = \frac{H}{2}$, H , – plokštelės storis, c_{phL} ir c_{phS} – išilginės ir skersinės bangų faziniai greičiai. Iš (3) lygties gaunami simetrinių modų (1.4 pav., a), iš (4) lygties – asimetrinių modų sprendiniai (1.4 pav., **Klaida! Nerastas nuorodos šaltinis.** b).

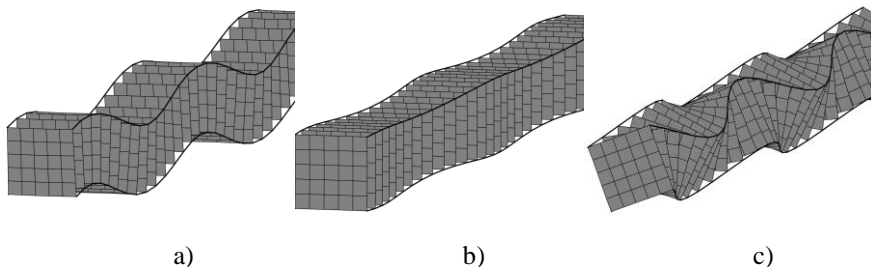


a)

b)

1.4 pav. Simetrinė (a) ir asimetrinė (b) Lembo modos

Trimačiame strypo bangolaidyje dėl papildomo matmens, lyginant su dvimate struktūra, egzistuoja trys pagrindinės modos: lenkimo F , išilginė L ir sukimo T (1.5 pav.).



1.5 pav. Fundamentaliosios lenkimo (a), išilginė (b) ir sukimo (c) modos stačiakampiam stripe

Esant tam tikroms kritimo kampo reikšmėms, išilginės ir skersinės bangos interferuodamos gali sudaryti paviršines Reilėjaus ir Lovo bangas bangolaidyje, kuris ribojasi su vakuumu. Paviršinės bangos sujungia skersinius ir išilginius svyravimus, sukurdamos elipsinės orbitos judėjimą. Reilėjaus banga keliauja statmenai santykinai storo kietojo kūno paviršiaus plokštumai, išiskverbdama į kūną per maždaug savo ilgį. Lovo bangos svyravimai yra lygiagretūs su kūno paviršiumi ir statmeni sklaidimo kryptčiai.

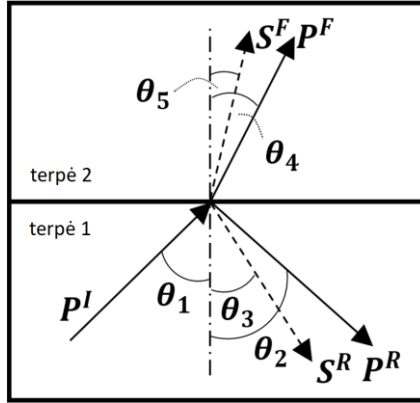
Fizinėms bangoms būdingas slopinimas, kuris apibūdinamas amplitudės kritimu. Šis amplitudės mažėjimas dažniausiai lemiamas geometrinio slopinimo, materijos vidinės trinties, išsisklaidymo, skysčio valkšnumo ar energijos išspinduliavimo šoninėmis bangomis [23].

Materijos absorbcija lemia, jog bangos energija konvertuojama į šilumą dėl vidinės trinties medžiagoje, dėl šių šiluminių nuostolių bangos energija mažėja. Atsižvelgiant į materijos absorbciją viskoelastingumas kietajame kūne dažniausiai simuliuojamas Kelvino ir Voigto modelių, į standumo matricą įtraukiant kompleksinės reikšmės Jungo modulį.

Bangos amplitudė mažėja dėl šoninių bangų sluoksniuotoje struktūroje, kurios skirtingiems sluoksniams būdingi tarpusavyje gerokai besiskiriantys medžiagų parametrai. Skirtingose medžiagose gerokai skiriasi ir faziniai bangų greičiai. 1.6 pav. pavaizduota išilginė banga P^I , kuri pereidama iš greitesnio fazinio greičio sluoksnio į lėtesnio greičio sluoksnį lūžta į P^F , S^F , atsispindi ir konvertuojasi į skersinę S^R . Sneliausias dėsnis sujungia krintančios išilginės bangos kampą θ_1 , konvertuotos skersinės bangos kampą θ_3 , lūžio kampus θ_4 , θ_5 su krintančios P^I , konvertuotos S^R ir lūžusių P^F , S^F bangų faziniais greičiais:

$$\frac{\sin(\theta_1)}{c_{phP^I}} = \frac{\sin(\theta_3)}{c_{phS^R}} = \frac{\sin(\theta_4)}{c_{phP^F}} = \frac{\sin(\theta_5)}{c_{phS^F}}. \quad (5)$$

Tuo atveju, kai didesnio greičio terpė yra bangolaidis, o lėtesnio – idealusis skystis, banga, sklindanti bangolaidžiu, spinduliuoja į skystį tik išilgines šonines bangas P^F , nes idealusis skystis palaiko tik išilgines bangas.



1.6 pav. Išilginės bangos lūžimas dviejų medžiagų terpėje

Reilėjaus slopinimo koeficientai gali būti parenkami taip, kad šiuo slopinimo modeliu būtų galima simuliuoti tiesinį viskoelastingumą medžiagoje. Koeficientų a ir b reikšmės gali būti susiejamos su kompleksinės reikšmės Jungo moduliui [24]:

$$\eta = \frac{1}{Q} = \frac{Im(\hat{E})}{Re(\hat{E})} = 2\xi = \frac{a}{2\omega} + \frac{b\omega}{2}; \quad (6)$$

čia η – nuostolio faktorius, Q – kokybės faktorius, ξ – slopinimo santykis.

Aukštųjų dažnių ruože masės slopinimas nyksta dėl atvirkštinio proporcingumo kampiniam dažniui ($\frac{a}{2\omega} \rightarrow 0$), o standumo slopinimo koeficientas b tada gali būti randamas pagal formulę:

$$b \approx \frac{Im(\hat{E})}{\omega Re(\hat{E})}. \quad (7)$$

Kompleksinis Jungo modulis ir kompleksinis Puasono koeficientas, kaip viskoelastinės medžiagos parametrai, gali būti gaunami iš eksperimentiškai išmatuotų išilginės ir skersinės fazinių bangų kompleksinių greičių [14]:

$$\hat{E} = \rho \hat{c}_{phS}^2 \left(\frac{3\hat{c}_{pHL}^2 - 4\hat{c}_{phS}^2}{\hat{c}_{pHL}^2 - \hat{c}_{phS}^2} \right) \text{ ir } \hat{\nu} = \left(\frac{\hat{c}_{pHL}^2 - 2\hat{c}_{phS}^2}{\hat{c}_{pHL}^2 - \hat{c}_{phS}^2} \right). \quad (8)$$

2. PABEM FORMULUOTĖ TAMPRIAJAI BANGAI NESLOPINAMAME BANGOLAIDYJE

PABEM tikrinių reikšmių uždavinys baigtiniam elementui, esančiam neslopinamame izotropiniame trimačio bangolaidžio skerspjuvyje, užrašomas:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{1e} + ik\mathbf{K}'_{2e} - ik^*\mathbf{K}^T_{2e} + k^*k\mathbf{K}_{3e} - \omega^2\mathbf{M}_e) \bar{\mathbf{U}}_e e^{i(kz-\omega t)} = \\ = \mathbf{F}_e(z) e^{-i\omega t} = \bar{\mathbf{F}}_e e^{i(kz-\omega t)}; \end{aligned} \quad (9)$$

čia k – bangos skaičius, k^* – jungtinis erdvės eksponentės skaičius, $\bar{\mathbf{F}}$ – išorinių jėgų vektorius, $\bar{\mathbf{U}}$ – mazginių poslinkių vektorius.

Masės ir standumo matricos elementui užrašomos taip:

$$\mathbf{M}_e = \int_x \int_y \mathbf{N}(x, y)^T \rho_e \mathbf{N}(x, y) dx dy,$$

$$\mathbf{K}_{1e} = \int_x \int_y \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 dx dy,$$

$$\mathbf{K}'_{2e} = \int_x \int_y \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 dx dy,$$

$$\mathbf{K}_{3e} = \int_x \int_y \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 dx dy;$$

čia \mathbf{N} – formos funkcija, o $\mathbf{B}_1 = \mathbf{L}_x \frac{\partial \mathbf{N}(x, y)}{\partial x} + \mathbf{L}_y \frac{\partial \mathbf{N}(x, y)}{\partial y}$ ir $\mathbf{B}_2 = \mathbf{L}_z \mathbf{N}(x, y)$,

$$\mathbf{L}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{L}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{L}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Surinkus visų BE standumo ir masių matricas, gaunamas viso bangolaidžio PABEM tikrinių reikšmių uždavinys:

$$(\mathbf{K}_1 + ik\mathbf{K}'_2 - ik^*\mathbf{K}^T_2 + k^*k\mathbf{K}_3 - \omega^2\mathbf{M}) \bar{\mathbf{U}} e^{i(kz-\omega t)} = 0. \quad (10)$$

Irašius kampinio dažnio reikšmes ω į kompleksinę tikrinių reikšmių lygtį (10 lygtis), gaunami sklindančiųjų modų sprendiniai. Modos pateikiamos kaip pora iš bangos skaičiaus ir svyravimų mazguose amplitudžių vektoriaus k , $\bar{\mathbf{U}}$. Gaunamų sprendinių skaičius esant nustatytam dažniui ω priklauso nuo BE tinklelio dydžio bangolaidžio skerspjuvyje. Kiekvienas modos poslinkių laukas $\bar{\mathbf{U}}$ apibūdina bėgančiosios bangos tipą. Vienos modos bangos skaičiaus priklausomybė nuo kampinio dažnio yra laikoma dispersiniu ryšiu (dispersine kreive). Dispersiniai ryšiai realiuose bangolaidžiuose yra netiesiniai.

Bangos skaičiai gali būti realieji, kompleksiniai (erdvės eksponentės) arba grynai menamieji (turi tik amplitudės dekrementą erdvėje). Realiojo skaičiaus k atitinka keliaujančiąją bangą. Tokiu atveju jungtinis kompleksinis $k^* = k$ ir dėl to (10) lygtis gali būti supaprastinama:

$$(\mathbf{K}_1 + ik(\mathbf{K}'_2 - \mathbf{K}'_2{}^T) + k^2\mathbf{K}_3 - \omega^2\mathbf{M})\bar{\mathbf{U}}e^{i(kz-\omega t)} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Norint šią lygtį paversti tiesiniu tikrinių reikšmių uždaviniu, reikia pertvarkyti į matricinį pavidalą:

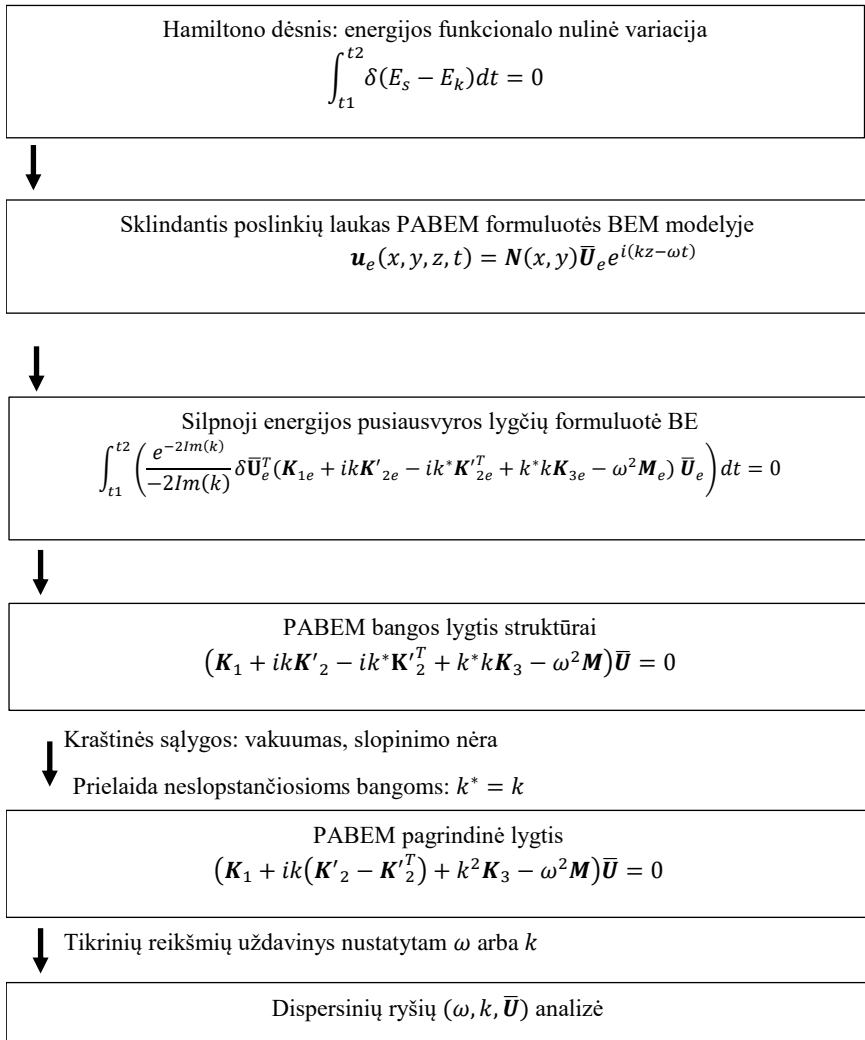
$$(\mathbf{A} - k\mathbf{B})\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 - \omega^2\mathbf{M} \\ \mathbf{K}_1 - \omega^2\mathbf{M} & i\mathbf{K}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 - \omega^2\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_3 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ k\bar{\mathbf{U}} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}'_2 - \mathbf{K}'_2{}^T.$$

kiekvienam nustatytam realiajam ω egzistuoja $2 \times$ *laisvės laipsnių skaičius* = $2N$ tikrinių bangos skaičių k sprendinių.

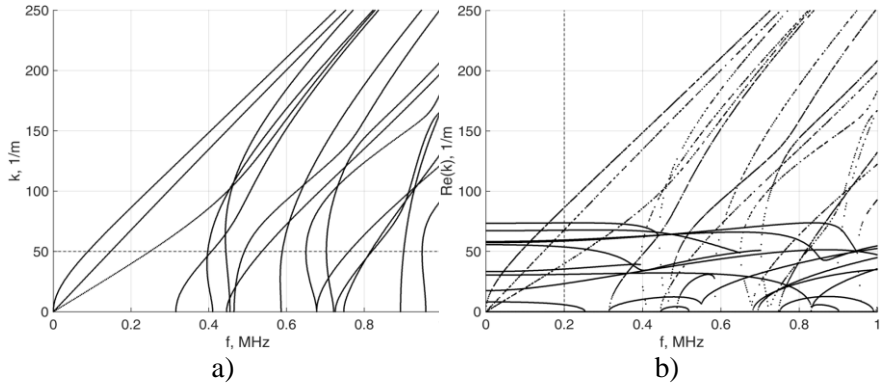
Apibendrinta sklindančiųjų bangų dispersinių ryšių įvertinimo algoritmo schema, naudojama taikant PABEM, pateikta 2.1 pav.



2.1 pav. Sklindančiųjų bangų dispersinių ryšių įvertinimo algoritmo schema taikant PABEM

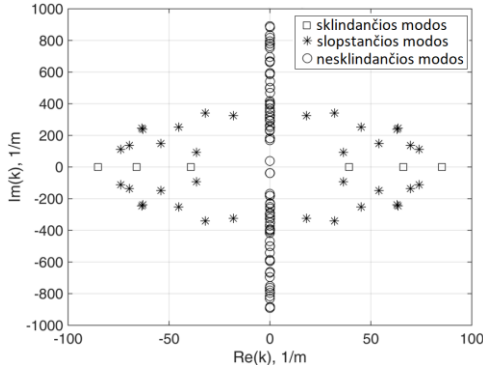
2.2 pav. pateiktos dispersinės kreivės aliuminio bangolaidyje. Bangolaidžio skersmuo buvo $0,00508 \times 0,00508$ m, masės tankis $\rho = 7850$ kg/m³, Jungo modulis $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa ir Puasono koeficientas $\nu = 0,3$. BE

tinklelio dydis 4×4 buvo pasirinktas skerspjūvyje. Sprendiniai $f(k)$ gaunami, kai žinomas k , ir sprendiniai $k(f)$ gaunami, kai žinomas dažnis f [Hz].



2.2 pav. $f(k)$ sprendiniai (a); $k(f)$ sprendiniai su $f = 0,2$ MHz, pažymėtu punktyrine linija (b)

2.3 pav. kompleksinių skaičių plokštumoje pavaizduoti suklasifikuoti tikriniai bangos skaičiai, apibūdinantys pirmyn ir atgal keliaujančias bangas esant fiksuotam dažniui $f = 0,2$ MHz. Kaip matyti, egzistuoja akivaizdi ašinė simetrija. Išskirtos trys bangos skaičių grupės: sklindančiųjų modų (angl. *propagative*), slopstančiųjų modų (angl. *evanescent*) ir nesklindančiųjų modų (angl. *end mode*). Gautos keturios sklindančiosios modos, iš jų dvi sutampa dėl kvadratinio bangolaidžio skerspjūvio.

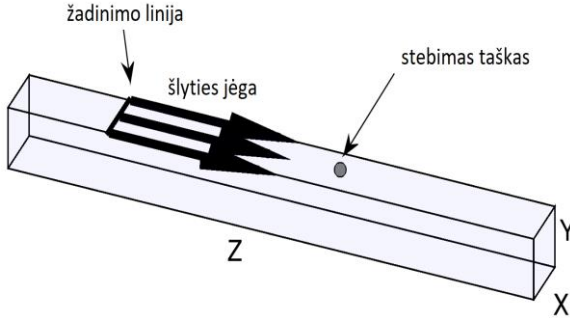


2.3 pav. Tikriniai bangos skaičiai kompleksinio skaičiaus plokštumoje esant dažniui $f = 0,2$ MHz

Kadangi mazginių poslinkių vektorius $\mathbf{U}(z)$ yra Furjė transformacija bangos skaičiaus atžvilgiu, pagal Koši reziduumų teoremą [25] išplaukia, kad

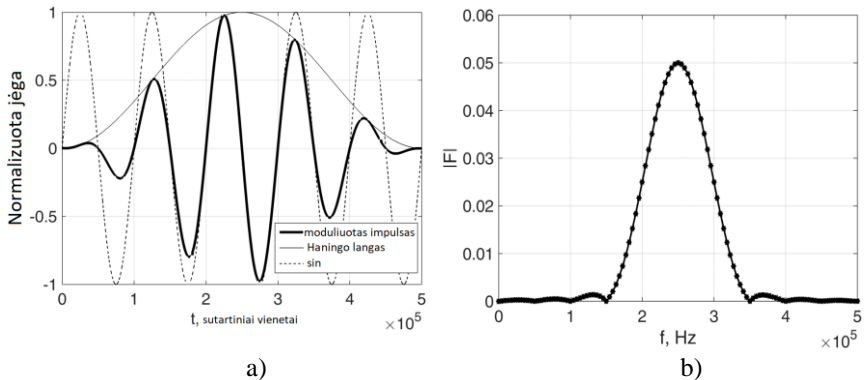
$$\mathbf{U}(z) = i \sum_{m=1}^N \frac{-W_m \mathbf{P}}{W_m B V_m} \mathbf{v}_m e^{i(k_m(z-z_0))}; \quad (13)$$

čia \mathbf{v}_j ir \mathbf{w}_j – atitinkamai dešininis ir kairinis tikriniai j -tosios modos vektoriai, z_0 – žadinimo vieta išilgai bangolaidžio ašies, išorinės jėgos mazginis vektorius yra $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{F} \end{pmatrix}$, sudėtiniai vektoriai $\mathbf{W}_{1 \times 2N} = (\mathbf{w}_j \quad k\mathbf{w}_j)$, $\mathbf{V}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_j \\ k\mathbf{v}_j \end{pmatrix}$.



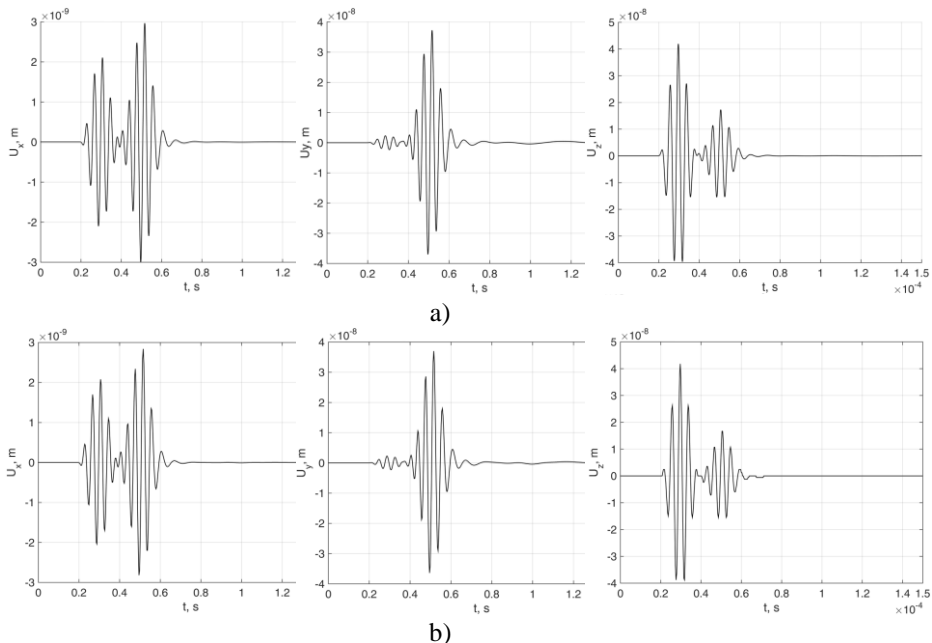
2.4. pav. Žadinimo schema

2.5 pav. (b) vaizduojama moduluoto penkių sinusoidžių žadinimo impulso spektrinių dažnių kreivė, kuri gauta pritaikius sparčiąją Furjė transformaciją laiko sričiai (2.5 pav., a). Impulso periodas su tuščiąja eiga pasirinktas 50 penkių sinusoidžių trukmių. Į atsaką į jėgą įtraukiami tik tie dažniai, kurie didesni už 0,05 % likusių dažnių. FFT atskaitos dažnis buvo pasirinktas 250 GHz dydžio. Harmoninių atsakų iš (13) lygties į atskirus dažnius suma leidžia gauti bendrą bangolaidžio atsaką į žadinimo impulsą.



2.5 pav. Žadinimo impulso moduliacija (a); žadinimo impulso dažnių spektras (b)

2.5 pav. (a) vaizduojami gauti mazginiai poslinkiai atitinkamai 0X, 0Y ir 0Z ašimis, stebimi taške, esančiame 0,1 m atstumu nuo žadinimo linijos.



2.6 pav. Stebimo taško mazginiai poslinkiai ($z = 0,1$ m atstumu nuo žadinimo linijos bangolaidyje) atitinkamai 0X, 0Y ir 0Z ašimis, gauti taikant PABEM (a) ir BEM (b)

Išreikštinės trimačio modelio analizės BEM rezultatai esant tam pačiam žadinimo scenarijui pateikti 2.6 pav. (b). 3D modelio tinklelis iki stebimo taško buvo pasirinktas $4 \times 4 \times 100$ atitinkamai 0X, 0Y ir 0Z ašimis. Rezultatai, gauti taikant abu modelius, labai gerai sutampa – didžiausia santykinė paklaida neviršija 2 % nagrinėtame laiko ir erdvės intervale.

3. BANGOS SLOPINAMAME BANGOLAIDYJE

Judėjimo lygtis taikant PABEM su Reilėjaus slopinimo nariu gali būti užrašoma:

$$(\mathbf{K}_1 + ik\mathbf{K}_2 + k^2\mathbf{K}_3 - i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\bar{\mathbf{U}}e^{i(kz-\omega t)} = \bar{\mathbf{F}}e^{i(kz-\omega t)}. \quad (14)$$

Sutraukus panašiuosius narius gaunama supaprastinta lygtis:

$$(\hat{\mathbf{K}}_1 + ik\hat{\mathbf{K}}_2 + k^2\hat{\mathbf{K}}_3 - \omega^2\hat{\mathbf{M}})\bar{\mathbf{U}}e^{i(kz-\omega t)} = \bar{\mathbf{F}}e^{i(kz-\omega t)}; \quad (15)$$

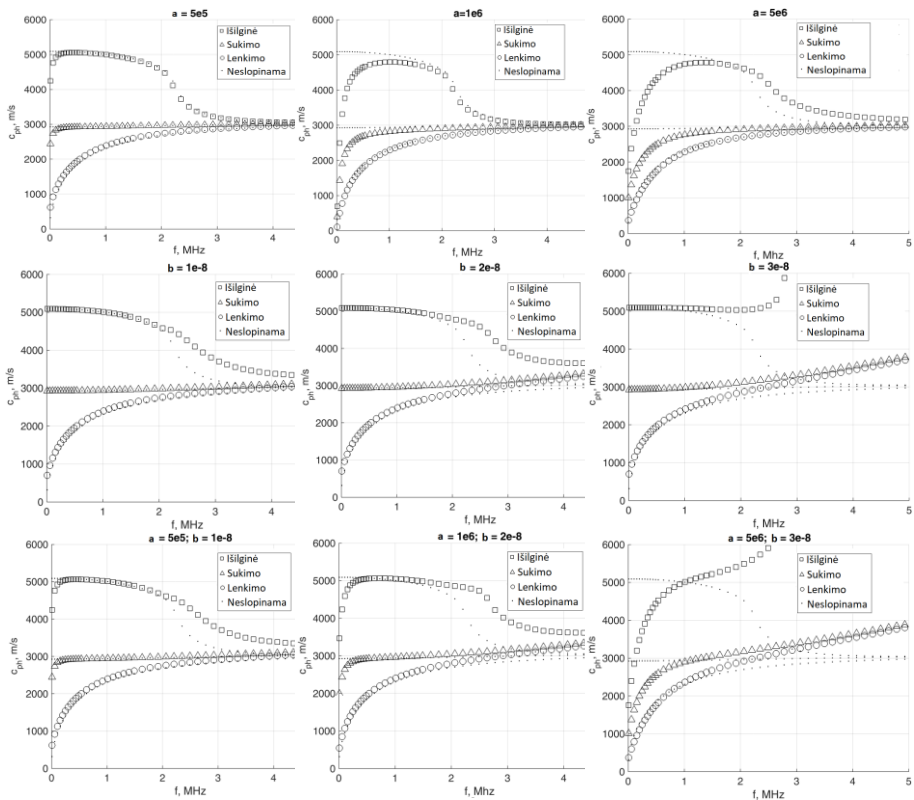
čia $\widehat{\mathbf{M}} = \left(1 + i\frac{a}{\omega}\right)\mathbf{M}$, $\widehat{\mathbf{K}}_1 = (1 - i\omega b)\mathbf{K}_1$, $\widehat{\mathbf{K}}_2 = (1 - i\omega b)\mathbf{K}_2$, $\widehat{\mathbf{K}}_3 = (1 - i\omega b)\mathbf{K}_3$.

Reilėjaus slopinimas lemia tiesioginių masės ir atvirkštinių standumo matricų proporcingumą kampiniam dažniui. Analogiškai Kelvino ir Voigto slopinimo modeliui gaunama kompleksinė standumo matrica.

Kelvino ir Voigto modelio atveju bangos slopinimas per bangos ilgį išlieka pastovus visame dažnių intervale. Esant slopinimui visi homogeninės (15) lygties sprendiniai yra slopstančiosios modos.

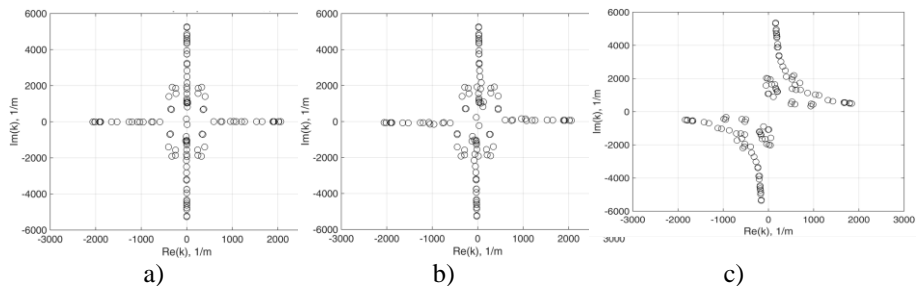
3.1 pav. pateikti dispersiniai ryšiai, gauti atlikus skaitinius eksperimentus keičiant Reilėjaus koeficientų a ir b reikšmes. Modeliavimo metu naudojamas bangolaidžio skerspjuvio tinklelis 4×4 . Slopinimo atveju visi tikriniai bangos skaičiai yra erdvės eksponentės ir apibūdina eksponentiškai slopstančių amplitudžių bangas. Bangos fazinis greitis išreiškiamas kaip kampinio dažnio ir bangos skaičiaus realiosios dalies santykis $c_{ph} = \frac{\omega}{\text{Re}(k)}$.

3.1 pav. pavaizduoti fundamentaliųjų modų faziniai greičiai esant įvairioms slopinimo reikšmėms. Esant labai dideliame slopinimui fazinis greitis nukrypsta nuo savo įprastinės elgsenos. Toks nukrypimas yra sunkiai paaiškinamas. Jį galėjo nulemti prielaida, jog kompleksinė erdvės eksponentė lygi savo jungtiniam skaičiui. Ši prielaida tinkama esant tik mažam ir vidutiniam slopinimui (11 lygtis).



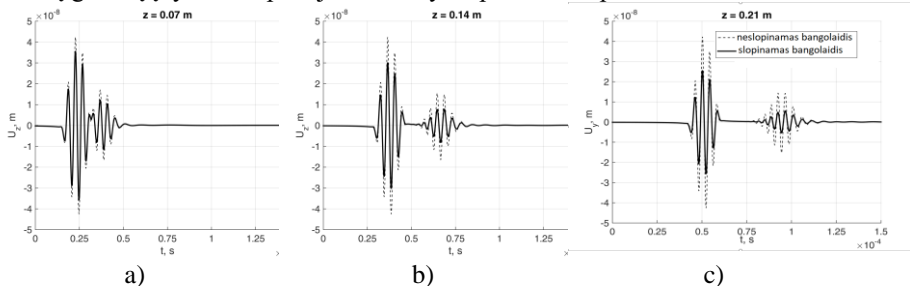
3.1 pav. Slopinimo poveikis fundamentaliųjų modų faziniams greičiams bangolaidyje su 4×4 tinklelio skerspjūviu

3.2 pav. vaizduojamas tikrinių bangos skaičių pasiskirstymas kompleksinių skaičių plokštumoje esant įvairioms Reilėjaus slopinimo stiprumo vėrtėms, kai nagrinėjamas dažnis $f = 1$ MHz. Didėjant slopinimui ašinė simetrija OX ir OY atžvilgiu tarp sprendinių išnyksta.



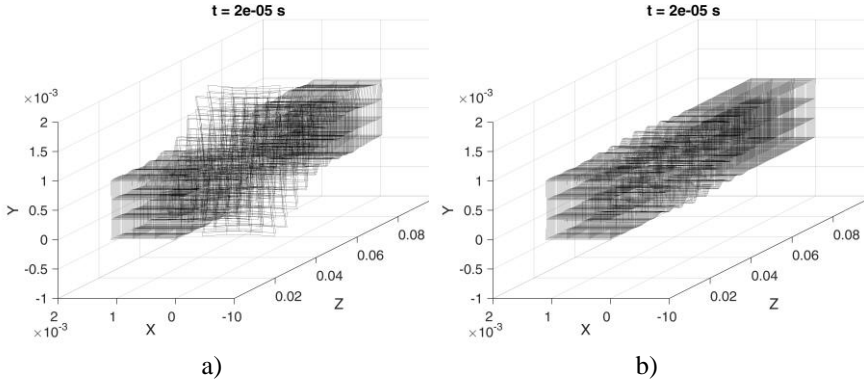
3.2 pav. Bangos skaičiai kompleksinių skaičių plokštumoje, kai $f = 1$ MHz ir slopinimo koeficientai: $a = 100$ ir $b = 10^{-9}$ (a); $a = 500$ (b) ir $b = 10^{-8}$; $a = 1000$ ir $b = 10^{-7}$ (c)

3.3 pav. pateikti atsako į jėgą rezultatai neslopinamame ir slopinamame (kai $a = 500$, $b = 10^{-8}$) aliumininuose bangolaidžiuose. Dėl skirtingų modų fazinių greičių įvyksta dispersijos reiškinys – pradinis impulsas išsisklaido.



3.3 pav. Mazginis atsakas į jėgą slopinamame ir neslopinamame bangolaidžiuose 0Z ašimi atstumu $z = 0,07$ m (a), $z = 0,14$ m (b) ir $z = 0,21$ m (c) nuo žadinimo vietos

Trimatis aliumininio bangolaidžio struktūros, deformuotos dėl bėgančiojo žadinimo impulso, vaizdas laiko momentu $t = 20$ μ s pateiktas 3.4 pav. Vaizdas piešiamas iš atskirų bangolaidžio skerspjūvių. Aukštas atskaitos dažnis pasirinktas, kad būtų užtikrinta dinaminė skiriamoji geba.

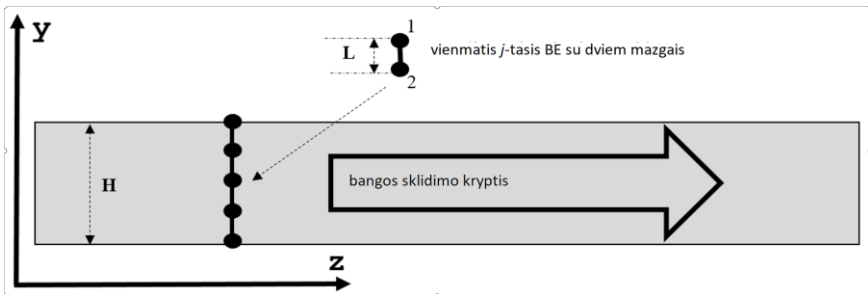


3.4 pav. 3D žadinimo vaizdas neslopinamame (a) ir slopinamame (b) ($a = 500$ ir $b = 10^{-7}$) aliumininiame bangolaidyje su 3×3 tinkleliu skerspjūvyje laiko momentu $t = 20 \mu s$

Kaip buvo parodyta, prielaida, kad $k^* = k$, galimai lemia sunkiai paaiškinamus dispersinių ryšių rezultatus esant dideliame slopinimui. Disertacijoje pasiūlyta (10) lygties modifikacija, kai išlaikoma jungtinė erdvės eksponentė k^* , esant Reilėjaus slopinimui.

Nemažinant bendrumo galima nagrinėti Lembo bangą, sklindančią izotropinėje H storio plokštelėje OZ ašimi. Tik plokštelės skerspjūvis yra diskretizuojamas dviejų mazgų vienmačiais L ilgio BE OY ašimi (3.5 pav.). Mazginių poslinkių vektorius \mathbf{u}_j -tajame elemente ($j = \overline{1, N}$, čia N yra BE skaičius skerspjūvyje) esant harmoniniams svyravimams užrašomas:

$$\mathbf{u}(y, z, t)_e = \mathbf{N}(y)\bar{\mathbf{U}}_e e^{i(kz - \omega t)}. \quad (16)$$



3.5 pav. BE diskretizacija plokštelės skerspjūvyje

Dinamikos lygtis $\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$ su slopinimo matrica \mathbf{C} , kuria įvertinamas viskoelastingumas plokštelėje, leidžia gauti PABEM pagrindinę lygtį.

Toliau nagrinėjami du pagrindinės lygties atvejai. Pirmuoju atveju bangos skaičius k yra žinomas, o kampinis dažnis ω yra nežinomas. Antruoju atveju ω yra žinomas, o k yra nežinomas.

Kai žinomas Lembo bangos skaičius k , $\omega(k)$ sprendiniai gali būti randami iš lygčių sistemos redukuojant laiko išvestinės eilę:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Sistema gali būti perrašoma į kanoninio pavidalo tikrinių reikšmių uždavinį:

$$\left(\begin{pmatrix} -i\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{V}} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (18)$$

Nagrinėjant tik sklindančiąsias modas neslopiniamame bangolaidyje ($\mathbf{C} = \mathbf{0}$), įprasta taikyti prielaidą, jog bangos skaičius yra grynai realusis skaičius, t. y. $k^* = k$. Ši prielaida leidžia BE standumą užrašyti taip:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_{e1} + ik(\mathbf{K}_{e2} - \mathbf{K}_{e2}^T) + k^2\mathbf{K}_{e3}. \quad (19)$$

Kita vertus, tiksliaame modelyje, kuriame taikomas materijos slopinimas ($\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$), turi išlikti tiek k^* , tiek k .

Antruoju atveju, kai Lembo bangos kampinis dažnis ω žinomas, $k(\omega)$ sprendiniai gali būti gaunami iš dinaminės lygties:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_1 + ik\mathbf{K}_2 - ik^*\mathbf{K}_2^T + k^*k\mathbf{K}_3)\mathbf{u} = \mathbf{0}; \quad (20)$$

čia $\dot{\mathbf{u}} = -i\omega\bar{\mathbf{U}}e^{i(kz-\omega t)}$, $\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2\bar{\mathbf{U}}e^{i(kz-\omega t)}$.

Pasižymėjus, kad $\bar{\mathbf{V}} = k^*\bar{\mathbf{U}}$, ir atlikus bangos skaičiaus laipsnio redukciją galima lygtį perrašyti sistema:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{V}} - k^*\bar{\mathbf{U}} = 0 \\ (-\omega^2\mathbf{M} - i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}_1)\bar{\mathbf{U}} + ik\mathbf{K}_2\bar{\mathbf{U}} - i\mathbf{K}_2^T\bar{\mathbf{V}} + k\mathbf{K}_3\bar{\mathbf{V}} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

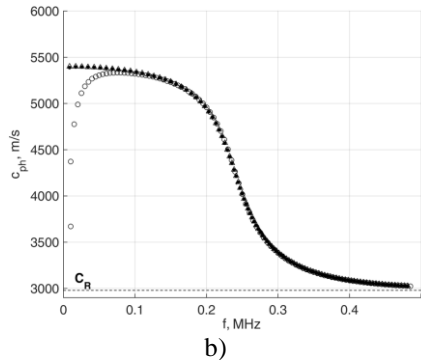
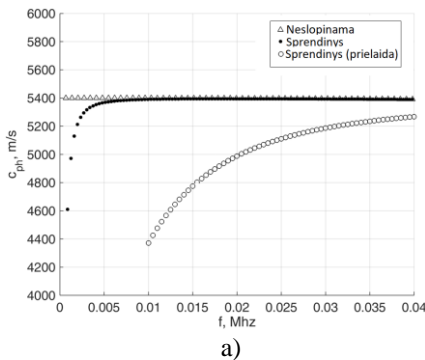
Sistemos matricinis užrašas yra:

$$\left(\begin{pmatrix} -i\mathbf{K}_2^T & (-\omega^2\mathbf{M} - i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}_1) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\mathbf{K}_3 & ik\mathbf{K}_2 \\ \mathbf{0} & -k^*\mathbf{I} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{V}} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (22)$$

Gauta sistema (22) lygtis) yra netiesinis bangos parametrų ω ir dviejų nežinomųjų – k bei jo jungtinio k^* – tikrinių reikšmių uždavinys. Nėra tiesioginio būdo apskaičiuoti dispersinius ryšius (ω , k , k^*). Pritaikius prielaidą, kad $k^* \approx k$, t. y. $Re(k) \gg Im(k)$ (t. y. bangos skaičius daug kartų didesnis už bangos amplitudės dekrementą erdvėje), kuri galioja tik esant mažam slopinimui, (22) lygtis gali būti suprastinama:

$$\begin{pmatrix} -i\mathbf{K}_2^T & (-\omega^2\mathbf{M} - i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}_1) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \mathbf{K}_3 & i\mathbf{K}_2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{V}} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (23)$$

Išilginės modos fazinių greičių, gautų neslopinamame bangolaidyje, slopinamame bangolaidyje taikant prielaidą $k^* = k$ (naudojantis (23) lygtimi) ir jos netaikant, palyginimas pateiktas 3.6 pav. Faziniai modų greičiai reikšmingai skiriasi tik žemųjų dažnių diapazone (3.6 pav., a). Šie skirtumai išnyksta didėjant dažniams. Visi sprendiniai asimptotiškai artėja prie Reilėjaus bangos fazinio greičio vertės c_R . Tai yra būdinga Lembo bangoms aukštųjų dažnių intervale (3.6 pav., b).

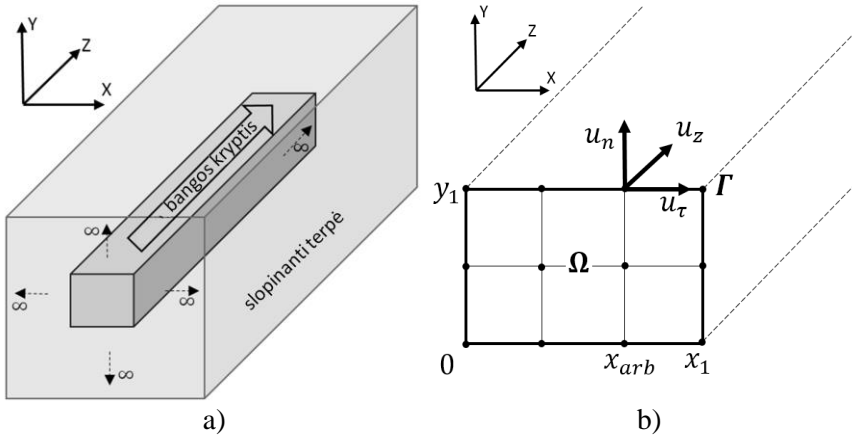


3.6 pav. Išilginės modos L_0 fazinių greičių, gautų neslopinamame, slopinamame bangolaidyje taikant prielaidą $Im(\omega) = 0$ (t. y. nėra amplitudės dekremento laiko intervale) ir $k^* = k$ ir netaikant jos žemųjų dažnių intervale (a) ir plačiame dažnių intervale (b), palyginimas

Buvo gauti tam tikrame laiko ir erdvės intervale slopinamos Lembo bangos dispersiniai ryšiai $\omega(k)$. Buvo atrinktas sprendinys iš kelių galimų įrašant bangos skaičių k su fiksuota menamąja dalimi. Taigi gautajam sprendiniui būdingas pastovus slopinimas per ilgio vienetą. Taip pat pastebėta, kad gautas slopinimas laiko intervale yra vienodas didelei daliai galimų sprendinių. Tačiau norint rasti laisvųjų slopinamųjų svyravimų sprendinius $k(\omega)$ reikia atlikti tolesnę analizę. Pavyzdžiui, rasti tik erdvėje slopinamųjų ($Im(\omega) = 0$, t. y. laiko eksponentės dekrementas laiko intervale lygus nuliui) bangų sprendinius $k(\omega)$ galima tik priėmus prielaidą, kad $k^* = k$, šiuo atveju slopinimas sprendinyje kinta su kampiniu dažniu. Apibendrintai analizę galima išplėsti esant kintančioms slopinimo vertėms.

4. ŠONINĖS BANGOS IDEALIAJAME SKYSTYJE PANARDINTAME BANGOLAIDYJE

Nagrinėjamas begaliniame idealiajame skystyje panardintas bangolaidis su begaline kraštine OZ ašimi. Taikoma prielaida, jog idealusis skystis nepalaiko skersinių bangų (4.1 pav., a). Nagrinėjama OZ ašimi sklindanti kampinio dažnio ω banga su bangos vektoriumi \mathbf{k}_z , kurio kryptis sutampa su OZ kryptimi. Taikant PABEM tik bangolaidžio skerspjūvis Ω , kurio perimetras Γ , diskretizuojamas BE (4.1 pav., b). Struktūros koordinatinių sistema pasirenkama taip, kad mazginiai poslinkiai ant skerspjūvio kontūro – poslinkiai u_τ , tangentiniai skerspjūviui, poslinkiai u_n , statmenai skerspjūviui, poslinkiai u_z , lygiagretūs su bangolaidžio ašimi, – viršutinėje perimetro Γ dalyje sutampa su OX arba OY ir OZ ašimis koordinatinių sistemoje. Poslinkiai u_τ ir u_z sukeltų skersines bangas supančiame skystyje, tačiau jų idealiajame skystyje nėra. Esant idealiajam skysčiui, tik u_n poslinkiai sukelia šonines išilgines bangas, per kurias bangolaidis praranda energiją.



4.1 pav. Panardinto bangolaidžio schema (a); skerspjūvio bangolaidyje diskretizacija (b)

Šiame darbe nagrinėjamas iškilusis bangolaidžio skerspjūvis, kad būtų galima išvengti bangų, grįžtančių į bangolaidį. Skystis, kaip kraštinė bangolaidžio sąlyga, gali būti įtraukiamas į bendrąją PABEM pagrindinę lygtį:

$$(\mathbf{K}_1 + ik_z \mathbf{K}_2 + k_z^2 \mathbf{K}_3 - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{F}_{skystis} + \mathbf{F}_{žadinimas}; \quad (24)$$

čia $\mathbf{F}_{skystis}$ – mazginių jėgų vektorius, atitinkantis paviršinius įtempimus dėl skysčio bangai sklindant panardintu bangolaidžiu, $\mathbf{F}_{žadinimas}$ – mazginių jėgų vektorius,

atitinkantis priverstinį bangos žadinimą. Kai $\mathbf{F}_{\text{žadinimas}} = \mathbf{0}$, (24) lygtis leidžia gauti dispersinius ryšius panardintame bangolaidyje.

$\mathbf{F}_{skystis}$ apibendrina skysčio įtempius ant kontūro Γ :

$$\mathbf{F}_{skystis} = i \frac{\omega^2}{\tilde{k}_L} \mathbf{Q} \mathbf{u} = i \frac{\omega^2}{\tilde{k}_L} \mathbf{Q} \mathbf{U} e^{ik_z z}; \quad (25)$$

čia \tilde{k}_L – šoninės išilginės bangos skaičiaus projekcija į ašį, lygiagrečią su poslinkių vektoriumi u_n , matrica \mathbf{Q} apibūdina skysčio mazginių įtempių pasiskirstymą kontūre Γ (26):

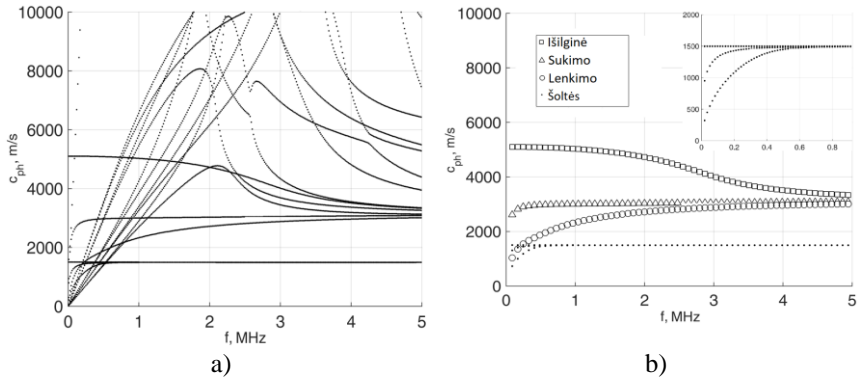
$$\mathbf{Q} = \int_{s \in \Gamma} (\mathbf{N}(s))^T \mathbf{C} \mathbf{N}(s) ds; \quad (26)$$

čia $\mathbf{N}(s)$ – vienmatė formos funkcija, interpoliuojanti x ir y koordinates ant kontūro Γ , s – uždaro perimetro Γ integralinis kintamasis.

Tada pagrindinė lygtis panardintam bangolaidžiui gali būti užrašoma kaip netiesinis tikrinių reikšmių uždavinys:

$$\left(\mathbf{K}_1 + ik_z \mathbf{K}_2 + k_z^2 \mathbf{K}_3 - \omega^2 \mathbf{M} - i \frac{\omega^2}{\tilde{k}_L} \mathbf{Q} \right) \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (27)$$

Dispersiniai ryšiai gali būti išreiškiami kaip fazinis bangos greitis $c_{ph} = \frac{\omega}{\text{Re}(k_z)}$, kuris sieja santykiu žinomą kampinį dažnį su rasto bangos skaičiaus k_z realiąja dalimi naudojant (27) lygtį. Panardinto bangolaidžio su 3×3 BE skerspjūvio tinkleliu modų fazinių greičių PABEM modeliavimo rezultatai yra pateikti 4.2 pav. (a). Aliuminio bangolaidžio parametrai buvo: tankis $\rho = 2780 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, Jungo modulis $E = 7,24 \cdot 10^{10}$ Pa, Puasono koeficientas $\nu = 0,34$, skerspjūvio matmenys $0,001 \text{ m} \times 0,001 \text{ m}$. Idealojo skysčio (vandens) parametrai buvo: tankis $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, fazinis išilginės bangos greitis $\tilde{c}_L = 1500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Buvo stebimos tik fundamentaliosios modos ir Šoltės kvazimodos, jų rezultatai pateikti 4.2 pav. (b).



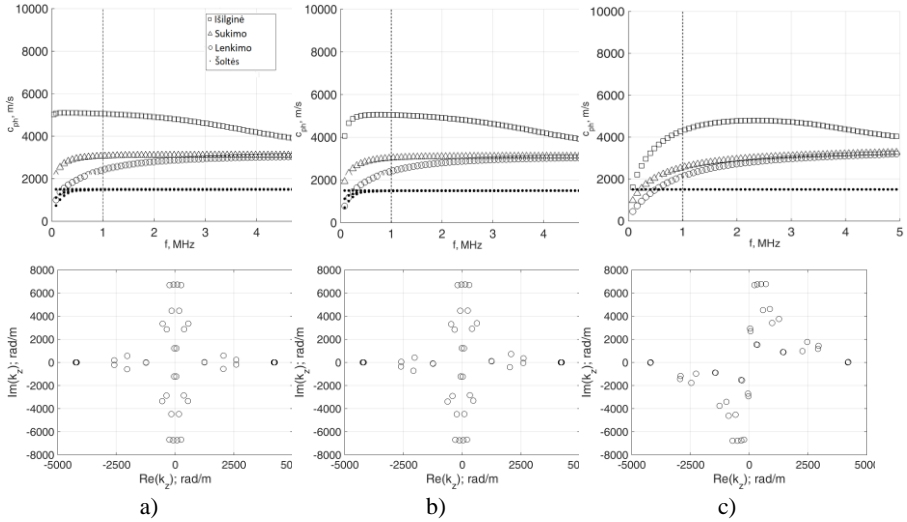
4.2 pav. Panardinto bangolaidžio modų faziniai greičiai (a); panardinto bangolaidžio fundamentaliųjų modų ir Šoltės kvazimodų faziniai greičiai (b)

Skysčio šoninės bangos daro įtaką tiek tampriai, tiek viskoelastinei bangolaidžio medžiagai. Reilėjaus slopinimas buvo pasirinktas medžiagos absorbcijai panardintame bangolaidyje modeliuoti. Įtraukiama Reilėjaus slopinimo matrica \mathbf{C} ir (27) lygtis perrašoma:

$$\left(\widehat{\mathbf{K}}_1 + ik_z \widehat{\mathbf{K}}_2 + k_z^2 \widehat{\mathbf{K}}_3 - \omega^2 \widehat{\mathbf{M}} - i \frac{\omega^2}{k_L} \mathbf{Q} \right) \mathbf{U} = \mathbf{0}; \quad (28)$$

čia $\widehat{\mathbf{K}}_j = (1 - i\omega b) \mathbf{K}_j, j = 1, 2, 3$ ir $\widehat{\mathbf{M}} = (1 - i\omega^{-1} a) \mathbf{M}$.

Panardinto bangolaidžio fundamentaliųjų modų ir Šoltės kvazimodų dispersinių ryšių skaitinio modeliavimo rezultatai, kai keičiamos Reilėjaus slopinimo koeficientų a ir b vertės, pateikti 4.3 pav. Didėjant slopinimui, Šoltės kvazimodų amplitudės nekinta ir trys atskiros Šoltės kvazimodų grupės susilieja į vieną. Esant stipriam slopinimui (4.3 pav., c) fundamentaliųjų modų fazinių greičių kreivės asimptotiškai tolsta nuo Reilėjaus bangos fazinio greičio vertės. Tokia elgsena nėra pagrįsta fizikine prasme ir tai atsispindi bangos skaičių kompleksinėje plokštumoje ašinės simetrijos neišlaikymu. Kaip minėta anksčiau, šis neadekvatumas yra pagrindinėje PABEM lygtyje pritaikytos prielaidos, kad $k_z^* = k_z$, pasekmė. Disertacijoje tariama, kad modelio adekvatumas yra išlaikomas, kai fazinis fundamentaliųjų modų greitis asimptotiškai artėja prie Reilėjaus bangos fazinio greičio vertės.



4.3 pav. Panardinto bangolaidžio faziniai greičiai ir bangos (esant $f = 1$ MHz (punktyrinė linija)), kai taikomas Reilėjaus slopinimas su koeficientais: $a = 1e5$; $b = 1e - 10$ (a); $a = 1e6$; $b = 1e - 9$ (b); $a = 1e7$; $b = 1e - 8$ (c)

Žinant dažnį ω apskaičiuoti modų sprendiniai ($k_z, \tilde{k}_L, c_{ph}, c_{gr}$) gali būti panaudojami modeliuoti atsakui į išorinę jėgą, kintančią laiko intervale. Bangolaidžio mazginių poslinkių vektorius, kaip atsakas į jėgą srityje $z > 0$, užrašomas:

$$\mathbf{U}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(z)_o \\ \mathbf{U}(z)_z \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^P \alpha_m^+ \boldsymbol{\varphi}_m e^{ik_z m(z-z_0)}; \quad (29)$$

čia

$$\alpha_m^+ = 2\pi i \frac{W_m \bar{F}}{W_m \bar{F} V_m k_z} \tilde{k}_L. \quad (30)$$

Mazginiai poslinkiai srityje $z < 0$ gaunami bangos skaičių k_z pakeitus jam priešingu $-k_z$:

$$\mathbf{U}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(z)_o \\ \mathbf{U}(z)_z \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^P \alpha_m^- \boldsymbol{\varphi}_m e^{ik_z m(z-z_0)}; \quad (31)$$

čia

$$\alpha_m^- = -2\pi i \frac{W_m \bar{F}}{W_m \bar{F} V_m k_z} \tilde{k}_L. \quad (32)$$

Kai mazginiai poslinkiai (29) ir (31) lygtimis yra suskaičiuoti kiekvienam kampiniam dažniui ω , taikant atvirkštinę Furjė transformaciją galima suskaičiuoti atsaką tam tikrame laiko intervale.

IŠVADOS

Vienas iš galimų metodų nagrinėti bangų sklidimą tiesiškai tamprioje terpėje yra pusiau analitinis baigtinių elementų metodas (PABEM), kuriam taikyti reikalinga prielaida, jog viena kryptimi bangolaidžio mechaninės savybės ir geometrinė struktūra yra vienodos. Šiame darbe PABEM buvo taikomas bangų stačiakampio skerspjuvio izotropiniame bangolaidyje modų charakteristikoms tirti. Buvo parodytas modelio adekvatumas ir galimybė išgauti dispersines kreives, fazinius ir grupinius bangų greičius, modų formas tamprioje ir viskoelastinėse homogeninėse medžiagose. Kita vertus, įprastas PABEM modelis palaiko tik mažą ir vidutinį Reilėjaus slopinimą, nes nėra vertinama jungtinės erdvės eksponentės įtaka valdančioje modelio lygtyje. Ši prielaida lemia, kad nagrinėjamas tiesinis tikrinių reikšmių uždavinys. Disertacijoje buvo plėtojamos naujos detalės tikrinių reikšmių uždavinio ir jėgos veikiamų bangų sprendiniams gauti PABE metodu.

Bendruoju atveju Reilėjaus slopinimas yra tiesiogiai proporcingas virpesių dažniui, todėl turėtų būti taikomas ribotame dažnių intervale. Taip yra, nes net jeigu bangolaidžio fizikinė ir geometrinė elgsena yra tiesinė, tikrinių reikšmių uždavinys turėtų būti nagrinėjamas kaip netiesinis.

1. Disertacijoje suformuluotos bendrinės kompleksinės tikrinių reikšmių uždavinio lygtys tam, kad būtų įvertintos kompleksinio bangos skaičiaus eksponentinės dalys, kurios aprašo stipriai slopinamus bangolaidžius. Darbe pateikiamas pavyzdys, kai taikomas tik masei proporcingas Reilėjaus slopinimas. Tačiau standumui proporcingas slopinimas gali būti įtraukiamas į skaičiavimo schemą be jokių pakeitimų algoritme.
2. Disertacijoje pasiūlyta nauja metodika, skirta slopinamosios bangos dispersijos priklausomybėms konstruoti. Tam, kad būtų išlaikytas tikrinių reikšmių davinio tiesiškumas, kompleksinių laiko eksponentčių formos sprendiniai turi būti skaičiuojami iš anksto apibrėžtiems bangos skaičiams. Tačiau tokiu atveju bangos skaičiai yra visiškai kompleksiniai ir gali būti nagrinėjami kaip kompleksinės erdvės eksponentės. Taigi dispersijos priklausomybės yra gaunamos kaip paviršius kompleksinio bangos skaičiaus erdvėje, o ne kaip nuo bangos skaičiaus priklausanti kreivė.
3. Atsako į jėgą trimačiame bangolaidyje analizė buvo atlikta taikant PABEM tiek tamprioje, tiek viskoelastinėje homogeninėje medžiagoje. Atsakas į jėgą yra gaunamas taikant bangos modų superpoziciją, kai pereinamieji sprendiniai randami pasitelkus Furjė transformaciją. Disertacijoje parodyta, kad bangų modos kartu su bangolaidžio atsaku į jėgą, sukeltą harmoninio ir bendrojo žadinimo ilgu laikotarpiu, gali būti gaunami naudojant gerokai

mažiau skaičiavimo išteklių, palyginti su tiesioginiu trimačio bangolaidžio modeliavimu BEM. Vis dėlto vertinant PABEM naudą kiekybiniu požiūriu svarbu atsižvelgti į laiko intervalą, kuriame nagrinėjamas sprendinys, ir žadinimo dėsnio, priklausančio nuo laiko, sudėtingumą. Kuo ilgesnis laikotarpis nuo žadinimo nagrinėjamas ir kuo mažiau harmoninių komponentių sudaro žadinimo dėsnį, tuo didesnė nauda. Praktiškai bangoms, naudojamoms ultragarso tyrimuose, skaičiavimų kaina gali būti sumažinama daug kartų. PABEM privalumas yra galimybė išgauti nusistovėjusius sužadintus sklindančiųjų bangų atsakus, invariantinius laiko ir erdvės intervale. Be to, PABE gali ilgai veikti nedidinant skaičiavimo išteklių (tai dažnai sukelia sunkumų modeliuojant 3D BEM).

4. Buvo pasiektas geras 3D BEM ir PABEM atsako į jėgą rezultatų atitikimas. Verifikavimas buvo atliktas modeliuojant pavyzdinių bangos signalų sklidimą tam tikrame laiko intervale. Atsižvelgiant į tai, tokie patys modeliavimai gali būti atliekami taikant PABEM ir 3D BEM, o gauti rezultatai palyginti. Skaitiniuose eksperimentuose didžiausias skirtumas tarp atitinkamų mazginių poslinkių abiejų modelių rezultatuose neviršijo 2 %.
5. PABEM panardintos plokštelės modelis dispersiniams ryšiams gauti buvo išplėstas iki trimačio bangolaidžio remiantis prielaida, kad idealusis skystis palaiko tik išilginę bangą.
6. Disertacijoje buvo pateiktas teorinis idealiajame skystyje panardinto trimačio bangolaidžio atsako į jėgą išvedimas. Šis leistų gauti fiziškai galimus panardinto bangolaidžio atsako į jėgą sprendinius. Be to, būtų galima detaliau nagrinėti sklindantį bangos impulsą, kuris taikant Furjė transformaciją gaunamas kaip slopstančiųjų ir šoninių modų superpozicija ir leidžia įsigilinti į keliaujančiojo impulso sugeneruotos šoninės bangos sklidimo pobūdį.

LITERATŪRA

1. POCHHAMMER, L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1876. Vol. 81, 324–336.
2. CHREE, C. The Equations of an Isotropic Elastic Solid in Polar and Cylindrical Coordinates their Solution and Application. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*. 1889. Vol. 14, 250–369.
3. VIKTOROV, I. A. *Rayleigh and Lamb Waves: Physical Theory and Applications*. Plenum press, 1967.
4. SOROHAN, Ş., CONSTANTIN, N., GĂVAN, M. and ANGHIEL, V. Extraction of Dispersion Curves for Waves Propagating in Free Complex Waveguides by Standard Finite Element Codes. *Ultrasonics*. May 2011. Vol. 51, no. 4, 503–515. DOI 10.1016/j.ultras.2010.12.003.
5. HLADKY-HENNION, A.-C. Finite Element Analysis of the Propagation of Acoustic Waves in Waveguides. *Journal of Sound and Vibration*. July 1996. Vol. 194, no. 2, 119–136. DOI 10.1006/jsvi.1996.0349.

6. DAMLJANOVIĆ, V. and WEAVER, R. L. Forced Response of a Cylindrical Waveguide with Simulation of the Wavenumber Extraction Problem. *The Journal of the Acoustical Society of America*. April 2004. Vol. 115, no. 4, 1582–1591. DOI 10.1121/1.1675818.
7. ZIENKIEWICZ, O. C. and TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method: Solid Mechanics Vol. 2*. Butterworth-Heinemann, 2000.
8. RENNO, J. M. and MACE, B. R. On the Forced Response of Waveguides Using the Wave and Finite Element Method. *Journal of Sound and Vibration*. December 2010. Vol. 329, no. 26, 5474–5488. DOI 10.1016/j.jsv.2010.07.009.
9. GRAVENKAMP, H., SONG, Ch. and PRAGER, J. A numerical approach for the computation of dispersion relations for plate structures using the Scaled Boundary Finite Element Method. *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331, no. 11, 2543–2557. DOI 10.1016/j.jsv.2012.01.029.
10. MU, J. and ROSE, J. L. Guided Wave Propagation and Mode Differentiation in Hollow Cylinders with Viscoelastic Coatings. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2008. Vol. 124, no. 2, 866–874. DOI 10.1121/1.2940586.
11. TREYSSÈDE, F., NGUYEN, K. L., BONNET-BENDHIA, A. S. and HAZARD, C. Finite Element Computation of Trapped and Leaky Elastic Waves in Open Stratified Waveguides. *Wave Motion*. 2014. Vol. 51, no. 7, 1093–1107. DOI 10.1016/j.wavemoti.2014.05.003.
12. LAGASSE, P. E. Higher-Order Finite-Element Analysis of Topographic Guides Supporting Elastic Surface Waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*. April 1973. Vol. 53, no. 4, 1116–1122. DOI 10.1121/1.1913432.
13. AALAMI, B. Waves in Prismatic Guides of Arbitrary Cross Section. *American Society of Mechanical Engineers*. 1973. Vol. 40, no. 4, p. 1067–1072.
14. BARTOLI, I., MARZANI, A., LANZA DI SCALEA, F. and VIOLA, E. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section. *Journal of Sound and Vibration*. 2006. Vol. 295, no. 3–5, 685–707. DOI 10.1016/j.jsv.2006.01.021.
15. GRAVENKAMP, H., PRAGER, J., SAPUTRA, A. A. and SONG, Ch. The simulation of Lamb waves in a cracked plate using the scaled boundary finite element method. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2012. Vol. 132, no. 3, 1358–1367. DOI 10.1121/1.4740478.
16. HAN, J.-H., KIM, Y.-J. and KARKOUB, M. Wave propagation modeling of fluid-filled pipes using hybrid analytical/two-dimensional finite element method. *Wave Motion*. 2014. Vol. 51, no. 7, 1193–1208. DOI 10.1016/j.wavemoti.2014.07.006.
17. TREYSSÈDE, F. and FRIKHA, A. A semi-analytical finite element method for elastic guided waves propagating in helical structures. *Proceedings - European Conference on Noise Control*. 2008.
18. PREDOI, M. V., CASTAINGS, M., HOSTEN, B. and BACON, C. Wave Propagation along Transversely Periodic Structures. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2007. Vol. 121, no. 4, 1935–1944. DOI 10.1121/1.2534256.
19. FAN, Z., LOWE, M. J. S., CASTAINGS, M. and BACON, C. Torsional Waves Propagation along a Waveguide of Arbitrary Cross Section Immersed in a Perfect Fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2008. Vol. 124, no. 4, 2002–2010. DOI 10.1121/1.2968677.
20. CASTAINGS, M. and LOWE, M. Finite Element Model for Waves Guided along Solid Systems of Arbitrary Section Coupled to Infinite Solid Media. *The Journal of the*

- Acoustical Society of America*. 2008. Vol. 123, no. 2, 696–708. DOI 10.1121/1.2821973.
21. FRANÇOIS, S., SCHEVENELS, M., GALVÍN, P., LOMBAERT, G. and DEGRANDE, G. A 2.5D coupled FE-BE methodology for the dynamic interaction between longitudinally invariant structures and a layered halfspace. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2010. Vol. 199, no. 23–24, 1536–1548. DOI 10.1016/j.cma.2010.01.001.
 22. BARTOLI, I. *Structural health monitoring by Bayesian updating*. University of California, San Diego, 2007.
 23. QUINTANILLA, F. H., FAN, Z., LOWE, M. J. S. and CRASTER, R. V. Guided waves' dispersion curves in anisotropic viscoelastic single- and multi-layered media. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*. 2015. Vol. 471, no. 2183. DOI 10.1098/rspa.2015.0268.
 24. SEMBLAT, J. F. Rheological Interpretation of Rayleigh Damping. *Journal of Sound and Vibration*. 1997. Vol. 206, no. 5, 741–744. DOI 10.1006/jsvi.1997.1067.
 25. HAYASHI, T., SONG, W.-J. and ROSE, J. L. Guided Wave Dispersion Curves for a Bar with an Arbitrary Cross-Section, a Rod and Rail Example. *Ultrasonics*. 2003. Vol. 41, no. 3, 175–183. DOI 10.1016/S0041-624X(03)00097-0.
 26. GRAVENKAMP, H., BIRK, C. and SONG, Ch. Numerical modeling of elastic waveguides coupled to infinite fluid media using exact boundary conditions. *Computers and Structures*. 2014. Vol. 141, 36–45. DOI 10.1016/j.compstruc.2014.05.010.

AUTORIAUS MOKSLINIŲ PUBLIKACIJŲ DARBO TEMA SĄRAŠAS

STRAIPSNIAI RECENZUOJAMUOSE PERIODINIUOSE MOKSLO LEIDINIUOSE

Straipsniai, paskelbti Mokslinės informacijos instituto duomenų bazės „ISI Web of Science“ leidiniuose, turinčiuose citavimo indeksą

1. Barauskas, Rimantas; **Nečiūnas, Audrius**; Patašius, Martynas. Elastic wave simulation based on modal excitation in 3D medium // *Journal of vibroengineering*. Kaunas: JVE International. ISSN 1392-8716. 2016, vol. 18, iss. 8, p. 5321–5336. DOI: 10.21595/jve.2016.18101.
2. **Nečiūnas, Audrius**; Patašius, Martynas; Barauskas, Rimantas. Calculating dispersion relations for waveguide immersed in perfect fluid // *Mathematical modelling and analysis*. 2018, vol. 23, iss. 2, p. 309–326. DOI: 10.3846/mma.2018.019.

Konferencijų pranešimų medžiagoje

Tarptautinėse leidyklose

1. **Nečiūnas, Audrius**; Barauskas, Rimantas; Keršienė, Vitalija. Obtaining dispersion curves of damped waves by employing semi analytical finite element formulation // Information and software technologies: proceedings of the 21st international conference, ICIST 2015, Druskininkai, Lithuania, October 15–16, 2015 / Giedre Dregvaite, Robertas Damasevicius (Eds.). Cham: Springer, 2015. ISBN 9783319247694. eISBN 9783319247700. p. 604–613. DOI: 10.1007/978-3-319-24770-0_51.

KONFERENCIJŲ PRANEŠIMAI IR TEZĖS

1. **Nečiūnas, Audrius**; Barauskas, Rimantas. Embedded waveguides response to external excitation // 22nd International Conference Mathematical Modelling and Analysis (MMA2017), May 30–June 2, 2017, Druskininkai, Lithuania [elektroninis išteklius]. Vilnius: VGTU. 2017, p. 47.

Informacija apie autorių

Išsilavinimas:

2002–2006 m. Bakalauro studijos Kauno technologijos universiteto Fundamentalųjų mokslų fakultete; matematikos bakalauro laipsnis.

2006–2008 m. Magistrantūros studijos Kauno technologijos universiteto Fundamentalųjų mokslų fakultete; matematikos magistro laipsnis.

2013–2017 m. Informatikos doktorantūros studijos Kauno technologijos universiteto Informatikos fakultete.

Darbo patirtis:

Nuo 2015 m. lektorius Kauno technologijos universiteto Informatikos fakultete.

El. paštas audrius.neciunas@ktu.lt

RESUME

The simulation of propagating waves is of primary importance in many engineering applications, such as planning the ultrasonic measurement procedures, monitoring of pipelines structural integrity by analyzing pressure pulses propagation, earthquake waves propagation and many others. Traditionally the computational methods of wave propagation analysis in geometrically complex structures and environments use the finite element or finite difference approaches. However, the inherent shortcomings arise due to huge dimensionalities of the models in case when the length of the analyzed waves is much lesser than the linear dimensions of the structure. The limit situation is the infinite wave propagation environment in one or several directions, which are very difficult to simulate by traditional FEM because of fictitious wave reflections form the artificially introduced boundaries of the computational domain. Existing techniques within traditional FEM, which enable to cope with the infinite domains are the non-reflecting boundary condition (suitable only for acoustic waves), scaled-boundary FEM techniques and perfectly matched layers. However, the latter approaches are approximate, as well as they require significant computational resources anyway. The semi-analytical approaches such as SAFE method seem to be promising as they enable to avoid the discretization of the structures along the infinite direction. Though principles of SAFE are well-known for several decades, the approach still is not developed so perfectly as the traditional FEM, therefore further research is still necessary.

The guided waves in the waveguide (plate, bar, pipe etc.) are described by their dispersion curves. The dispersion curves present the relationships of phase, group and energy velocities of the waves against the wave frequency. The SAFE method facilitates the calculation of dispersion curves for waveguides having uniform cross-section geometries along at least one direction. The finite element discretization of the waveguide cross-section only. Along the wave propagation direction, the harmonic solutions in space and time are used. Expressions of such solutions use the exponential functions in the space of complex numbers. Similarly as conventional FEM, the SAFEM enables to express the forced time-dependent wave response analysis as a superposition of modal responses.

While there are many researches addressing waveguides in vacuum, SAFE modeling of travelling waves in dissipative environments is still a challenging task. The reason is that traditional SAFE analyses presume the amplitude decay of the travelling wave as negligible and therefore certain mathematical simplifications of the FE formulation are possible. In case of higher damping, such simplifications would lead to considerable errors of the solution. In this research, the SAFE formulation is extended in order to treat the wave propagation problems in viscous environments. The energy dissipation model is presented via Rayleigh damping (i.e. energy dissipation caused by material damping) and via leaky wave, where the waveguide immersed into perfect fluid is considered.

Research object

The research object is the semi-analytical finite element models for simulation of guided waves in viscous environments.

Research aim

The aim of the research is to develop the algorithms for obtaining the propagating wave modal solutions and forced responses of wave propagation in the environments with higher level of viscosity.

Research tasks

1. To implement Semi Analytical Finite Element for extracting modal solutions of guided waves in waveguides surrounded by vacuum, where the level of Rayleigh damping requires to use the solutions in terms of complex wavenumbers;
2. To obtain the forced response of the waveguide with internal Rayleigh damping placed in vacuum environment to external harmonic and non-harmonic loading;
3. To verify the forced wave propagation results obtained with SAFEM along a short propagation path by comparing them against the results obtained by the 3D FEM model, which represents a bounded segment of the same waveguide;
4. To develop the SAFE model of a waveguide immersed into the perfect fluid and to obtain the corresponding dispersion curves;
5. To analyze the theoretical feasibility of obtaining forced response for immersed rectangular waveguide.

Scientific novelty

The scientific novelty of this dissertation is in the extension of the SAFE models of unidirectional waveguides by incorporating the Rayleigh damping of the waveguide material. Differently from the existing analyses, the formulation containing the complex conjugate wavenumbers has been used in order to obtain mathematically exact solutions along the wave propagation direction. A novelty of this work is also the transition from the earlier known immersed into the perfect fluid plate model to the immersed waveguide model.

Practical relevance

The developed approach can facilitate the development and enhancement of the software for the computer simulation of guided wave propagation with application to damped waveguides positioned in fluids. From computational standpoint, the developed approaches enable to reduce the dimensionality of the models and thus save computer resources. From the standpoint of the engineering practice, such simulations facilitate the design of the wave- and vibrations-based

non-destructive measurement procedures by predicting the wave responses from fault-free structures or the structures with internal faults.

Approbation of the research results

The main results of the dissertation are represented in 4 scientific publications: 2 in the periodical scientific journals (ISI Web of Science) and 2 in international conference proceedings.

The structure and volume of the dissertation

Doctoral dissertation consists of an introduction, 3 main chapters, conclusions, references, list of publications. Doctoral dissertation consists of 97 pages. The main part of the dissertation contains 50 Pavures and 113 entries in the reference list.

CONCLUSIONS

One of efficient methods to study wave propagation phenomena in the linearly elastic medium is the Semi-Analytical Finite Element (SAFE) method. It enables to analyze waves in 3D waveguides, which are uniform geometrically and physically along at least one direction, by using 2D mesh discretization of the cross-section only. In this study, SAFEM was used to explore the characteristics of guided wave modes and forced wave propagation responses in a rectangular cross-section isotropic waveguide. It has been shown that the SAFE model is capable of obtaining adequate results in terms of wave dispersion curves, phase and group velocities, of structural propagating wave modes in elastic and viscoelastic waveguides. Up to this time the SAFE models were used mostly for waveguides of only light or moderate Rayleigh damping because of inherent simplifying assumption that the complex part of the wavenumber is always very small. This approach leads to linear eigenproblem equations, from which the wave modes are obtained. In this work the following new elaborations regarding modal and forced wave solutions obtained by SAFE method have been carried out.

In general, Rayleigh damping states a proportional frequency dependence, therefore, should be applied in a limited range of frequency. The reason is that even in case the physical and geometrical behavior of the waveguide is linear, the eigenvalue problem has to be considered as non-linear one.

1. The full complex eigenvalue equations have been formulated in order to cope with complex wavenumber exponents, which may represent significantly damped waveguides. As an example, only the mass-proportional Rayleigh damping term was used. However, the stiffness-proportional damping component can be included as well without any changes to the computational algorithm.

2. A new approach to construction of the dispersion relations of the damped wave modes has been proposed. In order to retain the linearity of the eigenproblem the solutions in terms of complex time exponents have to be calculated at prescribed modal wavenumbers. However, the wavenumbers are now fully complex and shall be treated as complex space exponents. Therefore the dispersion relation is obtained as a surface above the complex wavenumber plane rather than a curve over the wavenumber axis.
3. The forced wave response analysis was performed by using SAFE method for a 3D waveguide for elastic and viscoelastic homogenous materials. The forced response is obtained by using the normal wave modes superposition principle, where transient solutions are obtained via Fourier transformation. We demonstrated that the wave modes, as well as, the combined forced responses of the waveguides to harmonic and general excitations during long time intervals can be obtained at much lower cost compared to the direct simulation of a waveguide as solid 3D FE structure. The quantitative evaluation of the gain cannot be estimated uniquely as it depends on the time interval over which the solution is necessary, as well as, on the complexity of the time law of excitation. The longer the time interval from the beginning of the excitation and the less harmonic components contains the excitation time law, the bigger is the gain. Practically, for waves used in ultrasonic applications the computational cost can be reduced many times. As the advantages of SAFEM are the ability to acquire steady forced propagating wave responses invariant in time and space. Moreover, SAFE may treat very long without any increase of the computational resource needs, while this always leads to numerical calculation difficulties in for the 3D FEM.
4. Good agreement of results obtained by using 3D FEM and SAFEM was demonstrated. This verification task has been performed by simulating sample wave signals of quite limited propagation duration. At such conditions the same simulations can be performed by SAFEM and 3D FEM and the results compared against each other. In such numerical experiments the differences between the nodal displacements of the forced response did not exceed 2%.
5. The known approach for acquiring dispersion relations for immersed plate was extended to the three-dimensional waveguide analysis under similar assumptions about the leaky two-dimensional waves.
6. The theoretical derivation of the forced response of the three-dimensional waveguide immersed into perfect fluid was performed. This would enable to extract physically meaningful solutions. Furthermore, it would lead to further analysis of a propagating wave pulse, which is via Fourier transform considered as a superposition of evanescent and leaky modes and thus helps to gain fundamental insights into propagation of leaky waves generated by traveling impulse.

UDK 519.65:531 (043.3)

SL344. 2018-05-31, 2,25 leidyb. apsk. I. Tiražas 50 egz.

Išleido Kauno technologijos universitetas, K. Donelaičio g. 73, 44249 Kaunas
Spausdino leidyklos „Technologija“ spaustuvė, Studentų g. 54, 51424 Kaunas