LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI
51 tomas, 2010, 454–458

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Atsitiktinio skaičiaus vektorių maksimumų konvergavimo greičio įvertis

Lina Dindienė, Algimantas Aksomaitis

Kauno technologijos universitetas
Studentų g. 50, LT-51368 Kaunas
E. paštas: lina_dindiene@yahoo.com; algimantas.aksomaitis@ktu.lt

Santrauka. Šiame darbe nagrinėjame tiesiškai normalizuotų dvimačių atsitiktinio skaičiaus vektorių maksimumų struktūrą. Taikome perkėlimo teoremą, kurios pagalba gauname šios struktūros konvergavimo greičio įverčio išraišką. Pateikiame pavyzdį, iliustruojantį teorinę medžiagą. Šiame straipsnyje patikslinsime rezultatus, gautus [1] darbe.

Raktiniai žodžiai: stochastiniai maksimumai, perkėlimo teorema, konvergavimo greičio įvertis.

Įvadas

Tarkime $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n),\ldots$ – atsitiktinių, nepriklausomų vektorių seka, turinti vienodą skirstinio funkciją $F(x,y)=P(X_j\leqslant x, Y_j\leqslant y)$, $j\geqslant 1$. Apibrėžkime statistikas:

$$Z_n^{(1)}=\max(X_1,X_2,\ldots,X_n),\qquad Z_n^{(2)}=\max(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n),$$
$$\max\bigl((X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)\bigr)=\bigl(Z_n^{(1)},Z_n^{(2)}\bigr),$$
$$Z_{N_n}^{(1)}=\max(X_1,X_2,\ldots,X_{N_n}),\qquad Z_{N_n}^{(2)}=\max(Y_1,Y_2,\ldots,Y_{N_n}),$$
$$\max\bigl((X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_{N_n},Y_{N_n})\bigr)=\bigl(Z_{N_n}^{(1)},Z_{N_n}^{(2)}\bigr),$$

čia $N_1,N_2,\ldots,N_n$ teigiamų sveikųjų atsitiktinių dydžių seka, nepriklausanti nuo (X_j,Y_j), $j\geqslant 1$ ir

$$P(N_n\leqslant x)=A_n(x).$$

Nagrinėsime tiesiškai normalizuotus maksimumus:

$$\overline{Z}_n^{(1)}=b_n^{-1}\bigl(Z_n^{(1)}-a_n\bigr),\qquad \overline{Z}_n^{(2)}=d_n^{-1}\bigl(Z_n^{(2)}-c_n\bigr),$$
$$\overline{Z}_{N_n}^{(1)}=b_n^{-1}\bigl(Z_{N_n}^{(1)}-a_n\bigr),\qquad \overline{Z}_{N_n}^{(2)}=d_n^{-1}\bigl(Z_{N_n}^{(2)}-c_n\bigr).$$

$-\infty<a_n<+\infty$, $b_n>0$, $-\infty<c_n<+\infty$, $d_n>0$. Pažymėkime

$$u_n(x,y)=n\bigl(1-F(xb_n+a_n,yd_n+c_n)\bigr). \tag{1}$$

Būtina ir pakankama silpnojo konvergavimo (visuose ribinio skirstinio tolydumo taškuose)

$$P\bigl(\overline{Z}_n^{(1)}<x,\overline{Z}_n^{(2)}<y\bigr)\quad\Rightarrow\quad H(x,y) \tag{2}$$

sąlyga yra [2]:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,y) = u(x,y).$$

Jei ši sąlyga tenkinama, $H(x,y) = e^{-u(x,y)}$ yra ribinis tiesiškai normalizuotų maksimumų skirstinys [2].

Pažymėkime:

$$\Delta_n(x,y) = \left|P\left(\overline{Z}_{N_n}^{(1)} \leqslant x, \overline{Z}_{N_n}^{(2)} \leqslant y\right) - \Psi(x,y)\right|,$$

čia $\Psi(x,y) = \int_0^\infty H^z(x,y)\,dA(z)$ ir $A(z) = \lim_{n\to\infty} P(\frac{N_n}{n} \leqslant z) = \lim_{n\to\infty} A_n(nz)$.

Rezultatai

Pateiksime teoremą, apibendrinančią rezultatą, esantį [1] publikacijoje.

1 teorema. *Tarkime $H(x,y)$ yra atsitiktinių vektorių $(\overline{Z}_{N_n}^{(1)}, \overline{Z}_{N_n}^{(2)})$ ribinis skirstinys ir $\lim_{n\to\infty} P(\frac{N_n}{n} \leqslant x) = A(x)$, $A(+0) = 0$. Tuomet, visiems x ir y, tenkinantiems sąlygą $\frac{u_n(x,y)}{n} \leqslant \frac{1}{2}$, teisingas įvertis:*

$$\begin{aligned}\Delta_n(x,y) &\leqslant \left(\frac{u_n^2(x,y)}{n} + \left|\rho_n(x,y)\right|\right) \cdot \int_0^\infty z\delta_n^z(x,y)\,dA_n(nz)\\ &\quad + u(x,y)\cdot \int_0^\infty \left|A_n(nz) - A(z)\right| H^z(x,y)\,dz,\end{aligned}$$

čia: $\delta_n(x,y) = \max(F^n(xb_n + a_n, yd_n + c_n), H(x,y))$, $\rho_n(x,y) = u_n(x,y) - u(x,y)$.

Teoremos įrodymas.

$$\begin{aligned}&\left|P\left(\overline{Z}_{N_n}^{(1)} \leqslant x, \overline{Z}_{N_n}^{(2)} \leqslant y\right) - \Psi(x,y)\right|\\ &\quad\leqslant \left|P\left(\overline{Z}_{N_n}^{(1)} \leqslant x, \overline{Z}_{N_n}^{(2)} \leqslant y\right) - EH^{\frac{N_n}{n}}(x,y)\right| + \left|EH^{\frac{N_n}{n}}(x,y) - \Psi(x,y)\right|\\ &\quad= I_n^{(1)}(x,y) + I_n^{(2)}(x,y).\end{aligned} \tag{3}$$

Iš pilnosios tikimybės formulės turime:

$$\begin{aligned}I_n^{(1)}(x,y) &= \left|\sum_{j\geqslant 1} F^j(xb_n + a_n, yd_n + c_n)P(N_n = j) - \sum_{j\geqslant 1} H^{\frac{j}{n}}(x,y)P(N_n = j)\right|\\ &= \left|\int_0^\infty F^{nz}(xb_n + a_n, yd_n + c_n)\,dA_n(nz) - \int_0^\infty H^z(x,y)\,dA_n(nz)\right|\\ &\leqslant \int_0^\infty \left|F^{nz}(xb_n + a_n, yd_n + c_n) - H^z(x,y)\right|\,dA_n(nz).\end{aligned} \tag{4}$$

Kadangi

$$
\begin{aligned}
&\bigl|F^{nz}(xb_n + a_n, yd_n + c_n) - H^z(x,y)\bigr| \\
&= z\left|\int_{H(x,y)}^{F^n(xb_n+a_n,yd_n+c_n)} t^{z-1}\,dt\right| \\
&\leqslant z\bigl(\max\bigl(F^n(xb_n + a_n, yd_n + c_n), H(x,y)\bigr)\bigr)^z \\
&\quad\times\bigl|\ln F^n(xb_n + a_n, yd_n + c_n) - \ln H(x,y)\bigr| \\
&\leqslant z\delta_n^z(x,y)\left(\left|n\ln\left(1 - \frac{u_n(x,y)}{n}\right) + u_n(x,y)\right| + \bigl|u_n(x,y) - u(x,y)\bigr|\right),
\end{aligned}
$$

tai pasinaudoję nelygybe

$$
\bigl|\ln(1-t) + t\bigr| \leqslant t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2},
$$

gauname

$$
\bigl|F^{nz}(xb_n + a_n, yd_n + c_n) - H^z(x,y)\bigr| \leqslant z\delta_n^z(x,y)\left(\frac{u_n^2(x,y)}{n} + \bigl|\rho_n(x,y)\bigr|\right), \tag{5}
$$

kai $\frac{u_n(x,y)}{n} \leqslant \frac{1}{2}$.

Iš (4) ir (5) išplaukia, kad

$$
I_n^{(1)}(x,y) \leqslant \left(\frac{u_n^2(x,y)}{n} + \bigl|\rho_n(x,y)\bigr|\right)\int_0^\infty z\delta_n^z(x,y)\,dA_n(nz).
$$

Toliau,

$$
\begin{aligned}
I_n^{(2)}(x,y) &= \left|\int_0^\infty H^z(x,y)\,dA_n(nz) - \int_0^\infty H^z(x,y)\,dA(z)\right| \\
&= \left|\int_0^\infty H^z(x,y)\,d\bigl(A_n(nz) - A(z)\bigr)\right|.
\end{aligned}
$$

Suintegravę dalimis, gauname

$$
\begin{aligned}
I_n^{(2)}(x,y) &= \left|\int_0^\infty \bigl(A_n(nz) - A(z)\bigr)\,dH^z(x,y)\right| \\
&\leqslant u(x,y)\int_0^\infty \bigl|A_n(nz) - A(z)\bigr|H^z(x,y)\,dz.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Teoremos įrodymas išplaukia iš (3), (4) ir (5).

1 išvada. *Tarkime, egzistuoja EN_n. Tuomet,*

$$
\begin{aligned}
\Delta_n(x,y) \leqslant{}& \left(\frac{u_n^2(x,y)}{n} + \bigl|\rho_n(x,y)\bigr|\right)\cdot E\frac{N_n}{n} \\
&+ u(x,y)\cdot\int_0^\infty \bigl|A_n(nx) - A(x)\bigr|H^z(x,y)\,dz.
\end{aligned}
$$

Pavyzdys

Tarkime $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ – atsitiktinių, nepriklausomų vektorių seka, turinti logistinį skirstinį

$$F(x,y) = \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

$\{N_n,\ n \geqslant 1\}$ turi geometrinį skirstinį su parametru $p_n = \frac{1}{n}$:

$$P(N_n = k) = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Su normalizavimo konstantomis $a_n = (\ln n, \ln n)$, $b_n = (1,1)$ gauname

$$P\left(\frac{Z_{N_n}^{(1)} - a_n}{b_n} < x, \frac{Z_{N_n}^{(2)} - c_n}{d_n} < y\right) = P\left(Z_{N_n}^{(1)} < \ln n + x, Z_{N_n}^{(2)} < \ln n + y\right)$$

$$\Rightarrow \quad H(x,y) = \exp\left(-e^{-x} - e^{-y}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n(nz) = A(z) = 1 - e^{-z}, \quad z > 0.$$

Teisingas įvertis:

$$\left|A_n(nx) - A(x)\right| \leqslant \frac{e^{-x}x^2}{n},$$

$$\sup_x \left|A_n(nx) - A(x)\right| \leqslant \frac{4e^{-2}}{n}.$$

Toliau:

$$u_n(x,y) = n\left(1 - \frac{1}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}}\right) = \frac{n(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}},$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} u_n(x,y) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x}+e^{-y}}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}} = e^{-x}+e^{-y} = u(x,y).
\end{aligned}$$

Vertiname konvergavimo greitį:

$$\begin{aligned}
\Delta_n(x,y) &\leqslant \left(\frac{\left(\frac{n(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}}\right)^2}{n} + \left|\frac{e^{-x}+e^{-y}}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}} - (e^{-x}+e^{-y})\right|\right)\cdot 1 \\
&\quad + \left(e^{-x}+e^{-y}\right)\int_0^{+\infty} \frac{4e^{-2}}{n} e^{-(e^{-x}+e^{-y})z}\,dz \\
&= \left(\frac{n(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})^2}{(1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})^2} + \left|\frac{-(e^{-x}+e^{-y})(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}}\right|\right) \\
&\quad + \frac{4e^{-2}}{n}\cdot\left(e^{-x}+e^{-y}\right)\frac{e^{-(e^{-x}+e^{-y})z}}{\ln e^{-(e^{-x}+e^{-y})}}\bigg|_0^{+\infty} \\
&= \frac{2(e^{-x}+e^{-y})^2}{n} + \frac{4e^{-2}}{n} = \frac{2((e^{-x}+e^{-y})^2+2e^{-2})}{n}.
\end{aligned}$$

Literatūra

[1] A. Aksomaitis. Estimation of convergence rate in the transfer theorem for maxima. *Nonlinear Analysis, Modeling and Control*, **13**(1):3–7, 2008.

[2] Ya. Galambosh. *Asimptoticheskaya teoriya ekstremalniyh poryadkoviyh statistik.* Nauka, Maskva, 1884 (rusų k.).

SUMMARY

The estimation of the convergence rate for maxima of random variables vectors
L. Dindienė, A Aksomaitis

Linearly normalized maxima of independent and identically distributed random vectors is presented in this work. We've obtained nonuniform estimate of convergence in case when normalization is linear. For clearness there is given an example is this paper. Transfer theorem was aplied.

Keywords: stochastic maxima, transfer theorem, rate of convergence.