

Tarpukario Lietuvos matematikos egzamino užduočių analizė

Birutė Ragalytė^{1,2}, Alma Paukštienė^{1,2}

¹*Panevėžio kolegija*

Laisvės a. 23, LT-35200 Panevėžys

²*KTU Panevėžio institutas*

Klaipėdos g. 3. LT-35209 Panevėžys

E. paštas: biruteragalyte@panko.lt; almapaukstiene@centras.lt

Santrauka. Straipsnyje apžvelgiamos tarpukario Lietuvos algebros, trigonometrijos ir analizės egzaminų užduotys. Analizuojama, kokie buvo pateikiami uždaviniai egzaminų metu ir kokių matematinių žinių reikėjo jiems išspręsti.

Raktiniai žodžiai: tarpukario Lietuvos matematikos egzaminai, algebros egzamino užduotys, trigonometrijos egzamino užduotys, analizės egzamino užduotys.

1 Įvadas

Tyrimo objektas – tarpukario Lietuvos algebros, trigonometrijos ir analizės egzaminų užduotys.

Tyrimo tikslas – išanalizuoti tarpukario Lietuvos matematikos egzaminų užduotis.

Tyrimo metodai – mokslinės literatūros, dokumentinių šaltinių analizė, lyginamoji analizė.

Tarpukario Lietuvos lietuvių, žydų, lenkų, vokiečių ir rusų gimnazijos buvo realinės (su sustiprintu fizikos-matematikos mokymu), humanitarinės (su sustiprinta lotynų kalba, kartais dar ir graikų), kalbinės (mokomos kelios dabartinės kalbos) ir komercinės (su sustiprintu komerciniu-buhalteriniu dalykų mokymu).

Realinių mokyklų abiturientai laikė algebros, trigonometrijos ir begalinių mažybių analizės egzaminus. Humanitarinių ir kalbinių mokyklų – algebros ir trigonometrijos, komercinių gimnazijų – algebros, trigonometrijos, komercinės algebros ir buhalterijos.

Tarpukario Lietuvos abiturientas laikydavo 2–4 matematikos egzaminus raštu (algebros, trigonometrijos, „begalinių mažybių“ – diferencialinio ir integralinio skaičiavimo, komercinės algebros) ir 1–2 žodžiu. Nagrinėjamo laikotarpio Lietuvoje egzamino užduotis rengdavo Švietimo ministerija, nors dažniausiai tai būdavo patikima vienam iš pačios gimnazijos matematikos mokytojui [2].

Matematikos egzamino žodžiu bilietai būtų sunkūs dabartiniam abiturientui – daugelio matematikos temų matematikos programoje jau nėra, iš matematinio įrodinėjimo įgūdžių liko tik „rageliai ir nageliai“ [2].

A. Zabulionis [2] surinko kai kurių tarpukario Lietuvos gimnazijų egzaminų užduotis. Daugiausia – Panevėžio berniukų ir mergaičių gimnazijų, bei Prienų „Žiburio“ gimnazijos, Alytaus realinės gimnazijos, Kauno jėzuitų humanitarinės gimnazijos,

Kauno „Aušros“ berniukų gimnazijos, Kauno Šv. Kazimiero seserų kongresijos mergaičių gimnazijos, Kauno mokytojų draugijos rusų gimnazijos.

Kiekvienos gimnazijos mokytojai rengdavo matematikos egzaminų užduotis. Jas palyginti tarpusavyje pakankamai sudėtinga. Todėl supažindinsime, kokio tipo uždaviniai daugiausia buvo pateikiami baigiamuosiuose egzaminuose.

2 Tarpukario Lietuvos matematikos egzaminų užduočių apžvalga

Algebra

1920 m. Panevėžio berniukų gimnazijoje egzaminui buvo pateiktas uždavinys:

Išspręskite lygtį $x + \sqrt{2(ax + b)} = c$, kur a ir b yra natūralieji lygties $8a + 17b = 91$ sprendiniai, o c yra binomo $(\sqrt{z} + \sqrt[3]{z})^c$ laipsnio rodiklis, su kuriuo binomo skleidinio ketvirtajame naryje kintamasis z yra ketvirtuoju laipsniu.

1920 m. egzaminui Panevėžio berniukų gimnazijoje buvo pateiktas vienas uždavinys, kuris buvo pakankamai sudėtingas. Norint išspręsti pateikiamą lygtį, reikėjo surasti parametrų a , b ir c reikšmes. Šių parametrų suradimas vėl yra atskiri uždaviniai. Nors ir pateikiamas vienas uždavinys, bet jis sudarytas iš kelių tarpusavyje susietų uždavinių.

Uždavinių tematika labai įvairi ir skiriasi kiekvienais metais. Jeigu 1920 m. algebros egzaminui reikėjo spręsti lygtį, tai tos pačios gimnazijos 1921 m. algebros egzamino užduotis skiriasi iš esmės.

1921 m. Panevėžio berniukų gimnazijoje egzaminui buvo pateikti 2 uždaviniai:

1. *Pirklys pirko avių ir arklų iš viso už 780 auksinų. Po to jis pardavė visus gyvulius, gaudamas už arklų po 73,6 auksino, o už avių po 11 auksinų ir taip gaudamas už kiekvieną arklą 15% pelno, o už avių tiek procentų pelno, kiek auksinų ji jam pačiam kainavo. Kiek arklų ir avių jis buvo pirkęs, jeigu bendras gyvulių skaičius mažesnis už 30?*

2. *Išspręskite lygtį: $x^{2 \lg x + 3} = 100000$.*

1921 m. algebros egzaminui Panevėžio berniukų gimnazijoje reikėjo spręsti procentų uždavinį, sudaryti sistemą, kuri sudaryta iš lygties ir nelygybių. Sprendžiant antrą uždavinį reikėjo logaritmų žinių.

Analizuojant pateiktus algebros egzaminų užduotis galime pastebėti, kad juose dažnai sprendžiami logaritmų, progresijų ir tekstiniai uždaviniai. Daugumai uždavinių išspręsti reikalinga Niutono binomo formulė. Sprendžiamos lygtys ir nelygybės su parametrais, kurių reikšmes reikia susirasti išsprendus kitą uždavinį.

Labai sunku nuspręsti, kokiais kriterijais remdamiesi mokytojai rinkdavo uždavinius egzaminams. Uždavinių skaičius skirtingose gimnazijose taip pat skirdavosi. Jei analizuotume 1930 m. algebros egzamino užduotį Panevėžio berniukų ir Panevėžio mergaičių gimnazijose, tai galėtume pastebėti:

- Berniukų gimnazijoje buvo pateikiami 4 uždaviniai, o mergaičių gimnazijoje 3 uždaviniai.
- Berniukų gimnazijoje pateikiami uždaviniai sudėtingesni.
- Uždavinių tematika panaši: Niutono binomas, geometrinė progresija (berniukų gimnazijoje ir aritmetinė progresija), lygtys su dešimtainiais logaritmais.

Uždavinių tematika išlieka panaši ir kitose gimnazijose. 1932 m. Alytaus realinėje gimnazijoje pateikiamoje egzamino užduotyje uždavinių tematika tokia pati, kaip ir 1930 m. Panevėžio mergaičių ir berniukų gimnazijose.

Trigonometrija

1921 m. Panevėžio berniukų gimnazijoje trigonometrijos egzaminui buvo pateikti 2 uždaviniai. Vieno iš uždavinių sąlyga:

Bukasis trikampis ABC (kampas A bukas) sukamas apie kraštinę AC. Raskite gautojo sukinio tūrį ir paviršiaus plotą, jei $BC = a = 5,82$ cm, $\angle B = 46^\circ 40'$ ir $\angle C = 24^\circ 20'$.

Šiame uždavinyje skaičiavimams naudojami ne sveikieji skaičiai, kampai pateikiami ne tik laipsniais, bet ir minutėmis. Analizuojamo uždavinio sprendimui reikia žinoti ir mokėti taikyti sukinio tūrio ir ploto radimo formules.

Panaši uždavinių tematika trigonometrijos egzamine išlieka ir 1924 metais. Panevėžio mergaičių gimnazijos egzamine pateikiamas toks uždavinys:

Bukas lygiašonis trikampis sukamas apie ilgiausią kraštinę kaip apie ašį. Raskite gautojo sukinio tūrį ir paviršių, jei trikampio perimetras yra lygus $2p = 20$ dm, o bukas kampas $\alpha = 122^\circ 39' 24''$.

Analizuojant trigonometrijos egzamino užduotis galime pastebėti, kad tarpukario Lietuvoje trigonometrijos egzamine buvo populiarūs uždaviniai, kuriuose reikia suskaičiuoti sukinio, gauto, sukant trikampį, nusakytą įvairiomis sąlygomis, tūrį ir paviršių plotą. Trikampis sukamas aplink ašį, apie kraštines ar aukštinę.

Analizuojant vėlesnių metų (nuo 1930 m. iki 1940 m.) galime pastebėti, kad nebe tokie populiarūs sukinių uždaviniai. Daugiau sprendžiama uždavinių susijusių su piramidėmis. Uždavinių tematika: piramidės šoninio paviršiaus, tūrio radimas, kai piramidė yra nusakoma įvairiomis sąlygomis. Nagrinėjamos piramidės, kurių pagrindas yra rombas. Uždaviniuose naudojami ne sveiki skaičiai, kampai nusakomi ne tik laipsniais, bet ir minutėmis bei sekundėmis.

A. Zabulionio knygoje [2] pateikiami 1932 m. Panevėžio berniukų gimnazijos ir Panevėžio mergaičių gimnazijos trigonometrijos egzaminų užduotys. Šiose užduotyse pateikiami 2 uždaviniai. Abiejų gimnazijų 2 uždavinyje prašoma reiškinių pakeisti logaritmuojamu (1 lentelė).

Tokio pat pobūdžio uždaviniai pateikti 1935 m. trigonometrijos egzamine Kauno mokytojų draugijos rusų gimnazijoje. Šiame egzamine buvo pateikti 2 uždaviniai. Pirmajame prašoma surasti keturkampes piramides turi, kurios pagrindas yra lygiašonė trapecija, kai žinoma jos šoninė kraštinė ir ji lygi trapecijos trumpesniajam pagrindui, žinomas vienas iš trapecijos pagrindų, taip pat žinoma kad piramidės aukštinė lygi pagrindo įstrižainei. Antras šio egzamino uždavinys – nurodyta reiškinių pakeisti logaritmuojamu.

Analizė

Knygoje [2] pateikiami 1925–1935 m. kai kurių Lietuvos gimnazijų egzaminų analizės užduotys. Šio egzamino uždavinių tematika buvo gana pastovi.

Analizės egzamino užduotyse dažniausiai būdavo pateikiami tokie uždaviniai:

- Rasti pateikiamų funkcijų išvestines;
- Apskaičiuoti integralą ir patikrinti atsakymą;
- Rasti funkcijos ekstremumus.

1 lentelė. Trigonometrijos egzamino uždaviniai pateikti 1930 m. ir 1932 m. Panevėžio gimnazijose [2].

| Gimnazija ir metai | Uždavinys |
|--|--|
| Panevėžio berniukų gimnazija, 1930 m. | Raskite šoninių paviršių piramidės, kurios pagrindas yra rombas, o viena briauna, einanti per rombo bukojo kampo viršūnę, yra statmena pagrindui. Dvisienis kampas prie pagrindo, kaip rombo smailusis kampas, lygus α , o rombo ilgesniosios įstrižainės ir aukštinės skirtumas d . Uždavinį išsprendkite, kai $\alpha = 35^\circ 24' 16''$, $d = 10$ m. |
| Panevėžio mergaičių gimnazija, 1930 m. | Piramidės pagrindas yra rombas. Raskite piramidės turi, jei priešingos šonines briaunos yra lygios, ilgesniosios ir trumpesniosios šoninių briaunų skirtumas lygus n , ilgesniosios šoninės briaunos yra palinkusios į pagrindo plokštumą kampu β , trumpesniosios – α . (Išsprendkite uždavinį, kai $n = 10$ cm, $\alpha = 69^\circ 27' 48''$, $\beta = 52^\circ 37' 24''$). |
| Panevėžio berniukų gimnazija, 1932 m. | Trikampio ABC kraštinė $AC = 12,746$ cm, $\angle BAC = 30^\circ 48' 12''$, plotas $S = 23,746$ m ² . Raskite turį kūno, kurį gausime sukdami trikampį apie kraštinę AB . |
| Panevėžio mergaičių gimnazija, 1932 m. | Pakeiskite reiškinį $\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\beta$ logaritmuojamu. Stačiojo gretasienio pagrindas yra lygiagretainis, kurio kraštinės a ir b atitinkamai lygios 18,304 cm ir 13,199 cm, o bukas kampas $\alpha = 115^\circ 12' 43''$. Trumpesnioji gretasienio įstrižainė lygi ilgesniajai pagrindo įstrižainei. Raskite gretasienio turį. Reiškinį $1 - \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\beta$ pakeiskite logaritmuojamu. |

2 lentelė. 1928 m. analizės egzamino užduotys Panevėžio mergaičių gimnazijoje ir Prienų „Žiburio“ gimnazijoje.

| Panevėžio mergaičių gimnazija | Prienų „Žiburio“ gimnazija |
|--|---|
| 1. Apskaičiuokite integralus: $\int (2 - 3x) \lg(6x - 5) dx;$ $\int \frac{15 \cos^5 x \cdot \sin x}{\sqrt{4 - 5 \cdot \cos^6 x}} dx;$ $\int \frac{dx}{(25 \operatorname{tg}^2 x - 49) \cdot \cos^2 x}.$ | 1. Raskite funkcijų išvestines $y = \sqrt{a+x} \cdot \sqrt[3]{a^2-x^2};$ $y = \operatorname{tg} x + \sec x.$ |
| 2. Raskite funkcijos išvestinę: $y = \lg \operatorname{tg}^3 x - \frac{3/\operatorname{ctg} 2x}{2 \cdot \operatorname{ctg} \sin^2 x}.$ | 2. Apskaičiuokite integralą ir patikrinkite atsakymą $\int \frac{4x^3 - 7x + 2}{2x + 1} dx.$ |
| 3. Raskite funkcijos ekstremumus: $y = \frac{5x^2 - 8x}{2x - 5}.$ | 3. Raskite funkcijos ekstremumus: $y = \frac{x^4}{e^x}.$ |

Analizuojant 2 lentelėje pateiktas 1928 m. skirtingų egzaminų užduotis galime teigti, kad:

- Uždavinių tematika analizės egzamine skirtingose gimnazijose yra ta pati: surasti išvestines, apskaičiuoti integralus, surasti funkcijos ekstremumus.
- Skirtingose gimnazijose analizės egzamine pateikiami nevienodo sudėtingumo uždaviniai.

Pakankamai sudėtingi integralai pateikti 1928 m. Panevėžio mergaičių gimnazijos analizės egzamine. Pirmajame iš pateiktų integralų reikia taikyti integravimo dalimis formulę. Antrajame integrale reikia naudoti keitinį, kurį pritaikius vėl gaunama pa-

kankamai sudėtinga funkcija. Trečiajame integrale reikia suintegruoti trigonometrinę funkciją.

Analizuojant tų pačių metų (1928 m.) Prienų „Žiburio“ gimnazijos analizės egzamino užduotį galime teigti, kad ji yra žymiai paprastesnė negu anksčiau analizuota Panevėžio mergaičių gimnazijos analizės egzamino užduotis. Pirmajame 1928 m. Prienų gimnazijos analizės egzamino uždavinyje reikia rasti dviejų funkcijų išvestines. Pirmoji funkcija – dviejų sudėtinių funkcijų sandauga, su parametru a ; antroji – dviejų funkcijų tangento ir sekanto suma. Dabartiniu metu sekanto funkcija nenaudojama ne tik vidurinėje mokykloje, ji nėra įtraukta net į aukštosios matematikos kursą. Antrajame uždavinyje prašo surasti racionaliosios funkcijos išvestinę. Sprendžiant šį uždavinį reikia mokėti daugianarį padalyti iš daugianario. Dalybos rezultatas – antrojo laipsnio daugianaris, o liekana – skaičius. Duotą integralą reikia suskaidyti į dviejų integralų sumą. Antrojo iš gautų integralų rezultatas – natūrinio logaritmo funkcija. Trečiasis uždavinys – rasti funkcijos ekstremumus. Norint išspręsti šį uždavinį, reikia mokėti rasti dalmens išvestinę ir išspręsti lygtį, kada ši išvestinė lygi nuliui bei monotoniškumo intervalus.

1929 m. Panevėžio berniukų gimnazijoje analizės egzaminui buvo pateiktas tekstinis uždavinys, kuriame reikia sudaryti funkciją ir rasti jos maksimalią reikšmę.

Analizės egzamino uždavinių tematika išlieka pastovi. Analizuojamo egzamino pirmajame uždavinyje prašoma rasti dviejų funkcijų išvestines. Pirmojoje iš funkcijų reikia rasti sandaugos išvestinę. Antrojoje užduoties dalyje reikia rasti išvestinę arksinuso funkcijos, kurios argumentas yra sudėtinė funkcija.

Antras egzamino uždavinys – įrodymo uždavinys. Šio uždavinio įrodymas susiveda į funkcijos sudarymą ir maksimalios reikšmės radimą.

Trečiasis egzamino uždavinys – apskaičiuoti apibrežtinį integralą taikant integravimo dalimis formulę.

Analizės egzamino uždavinių tematika nesikeičia ir 1933–1935 m. Funkcijos išvestinės ieškoma tik viename uždavinyje. Ieškant funkcijos išvestines, paprastai reikia rasti laipsninės, trigonometrinės funkcijų išvestines, kurios yra sudėtinės ir priklausančios nuo parametro a . Antrajame uždavinyje reikia sudaryti funkciją taisyklingos keturkampės piramidės, įbrėžtos į rutulį, tūriui surasti. Sudarius funkciją, reikia rasti jos didžiausią reikšmę. Trečiajame uždavinyje reikia surasti sukinio tūrį. Sprendžiant šį uždavinį reikia sudaryti integralą sukinio tūriui rasti, bei apskaičiuoti rezultatą.

3 Išvados

1. Tarpukario Lietuvos matematikos baigiamųjų egzaminų užduotys pakankamai sudėtingos, tai rodo aukštą to meto matematikos mokymo lygį.
2. Tarpukario Lietuvos matematikos egzamino užduotys skirdavosi gimnazijose tiek sudėtingumu, tiek ir tematika.

Literatūra

- [1] *Abituriento vadovas: Lietuvos gimnazijų ir mokytojų seminarijų lietuvių kalbos ir matematikos 1929 m. išleidžiamųjų egzaminų temos, uždavinių sprendimai ir elementariosios matematikos konspektas*. Šiauliai, 1929.
- [2] A. Zabulionis. *Matematikos brandos egzaminai*. Vilnius, 1995.

SUMMARY

Analysis of task in school leaving mathematical examination in Lithuania between the two world wars*B. Ragalytė, A. Paukštienė*

The school leaving mathematical examination in Lithuania between the two world wars is discussed in this article. Types of problems at the school-leaving mathematical examination (algebra, trigonometry, analysis) at this period are described. What mathematical knowledge needed to solve them is discussed.

Keywords: mathematical examination in Lithuania between the two world wars, algebra exam, trigonometry exam, analysis exam.