Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
58 t., 2017, 28–32
ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

Oro temperatūrų ekstremaliųjų reikšmių indekso branduolinis įvertis

Arvydas Jokimaitis, Darius Petronaitis

Kauno technologijos universitetas, Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas
Studentų g. 48, LT-51368 Kaunas
E. paštas: arvydas.jokimaitis@ktu.lt, darius.petronaitis@ktu.lt

Santrauka. Straipsnyje gautas maksimalių oro temperatūrų Lietuvoje pasiskirstymo parametro, vadinamo ekstremaliųjų reikšmių indeksu, branduolinis įvertis.

Raktiniai žodžiai: ekstremaliųjų reikšmių indeksas, branduolinis įvertis.

Įvadas

Ekstremalūs gamtos reiškiniai (karščiai, speigai, uraganiniai vėjai, liūtys, potvyniai ir pan.) turi didelę įtaką įvairioms žmonių gyvenimo sritims, todėl šių reiškinių analizei skirta nemažai literatūros. Vis dažniau ekstremalūs gamtos reiškiniai tiriami pasitelkiant ekstremaliųjų reikšmių teoriją. Pastaraisiais metais pasirodė visa eilė tokio pobūdžio darbų (pvz. [1, 10, 11]). Šiame straipsnyje tęsiame [8] ir [9] darbuose pradėtą tyrimą. Pagrindinis mūsų tikslas – įvertinti maksimalių oro temperatūrų skirstinio ekstremaliųjų reikšmių indeksą taikant branduolinį įvertį.

Tyrimams naudosime Lietuvos hidrometeorologijos tarnybos prie Aplinkos ministerijos pateiktą atnaujintą informaciją apie maksimalias metines oro temperatūras užregistruotas 1961–2016 m. visose Lietuvos teritorijoje veikusiose meteorologinėse stotyse.[1]

Informacija apie maksimalias metines oro temperatūras Lietuvoje pateikta 1 lentelėje.

1 Branduolinis ekstremaliųjų reikšmių indekso įvertis

Tarkime, $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Pažymėkime:

$$Z_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i.$$

Jei atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ tenkina tam tikras sąlygas [6], tai centruotų ir normuotų maksimumų $\{Z_n\}$ sekos pasiskirstymas silpnai konverguoja į neišsigimusį ribinį pasiskirstymą. Ekstremaliųjų reikšmių teorijoje žinoma, kad ribinis maksimumo pasiskirstymas gali būti tik vieno iš trijų tipų: Frešė, Veibulo arba Gumbelio. Šie

[1] Neįtraukti veikusių agrometeorologijos stočių, paprastųjų klimato stočių ir vandens matavimo stočių duomenys.

1 lentelė. Užregistruoti oro temperatūros maksimumai Lietuvos meteorologijos stotyse 1961–2016 m.

Metai	°C	Metai	°C	Metai	°C	Metai	°C	Metai	°C
1961	30	1973	32	1985	30,6	1997	32,9	2009	31,7
1962	28,6	1974	30,9	1986	32,7	1998	34,5	2010	34,3
1963	35,2	1975	31,4	1987	31	1999	34,3	2011	32,5
1964	32,3	1976	30,7	1988	32,5	2000	31,9	2012	34,6
1965	29,4	1977	30,6	1989	32,9	2001	34	2013	34,1
1966	31,1	1978	29,2	1990	32	2002	35	2014	36,6
1967	30,9	1979	31,4	1991	32,4	2003	32,2	2015	35,8
1968	34,4	1980	29,1	1992	35,8	2004	31	2016	34,3
1969	31,4	1981	30,3	1993	30,7	2005	32,2		
1970	30,6	1982	31,4	1994	35,5	2006	35,2		
1971	33,5	1983	30,8	1995	33	2007	34,1		
1972	32	1984	32,9	1996	31,4	2008	31,3		

ribiniai pasiskirstymai aprašomi apibendrintuoju ekstremaliųjų reikšmių pasiskirstymu

$$H_\gamma(x) = \exp\bigl(-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\bigr), \quad \text{kai } 1+\gamma x > 0,\ \gamma \in \mathbb{R}.$$

Imdami $\gamma > 0$, $\gamma < 0$ arba $\gamma = 0$, gauname atitinkamus ribinius maksimumų pasiskirstymus. Parametras γ vadinamas ekstremaliųjų reikšmių indeksu.

Branduolinis ekstremaliųjų reikšmių indekso įvertis pirmą kartą buvo pasiūlytas [3] darbe. Vėliau pasirodė dar keletas branduoliniams parametro γ įverčiams skirtų darbų. Tačiau šiuose darbuose pateikti įverčiai turi vieną trūkumą: jie taikomi tik tada, kai $\gamma > 0$. [7] darbe buvo gautas universalus, t. y. galiojantis su visais $\gamma \in \mathbb{R}$, įvertis, kurį taikysime mūsų darbe.

Tarkime, turime maksimumų imtį $Z_1, \dots, Z_n$. Sudarome jų variacinę seką $Z_{(1)} \leqslant Z_{(2)} \leqslant \dots \leqslant Z_{(n)}$. Tada

$$\hat{\gamma}_{K,n,h} = \hat{\gamma}^{(+)} + \hat{\gamma}^{(-)}$$

čia

$$\hat{\gamma}^{(+)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} K_h\left(\frac{i}{n}\right) \ln \frac{Z_{(n-i+1)}}{Z_{(n-i)}},$$

$$\hat{\gamma}^{(-)} = \frac{q^{(2)}_{K,n,h}}{q^{(1)}_{K,n,h}} - 1,$$

$$q^{(1)}_{K,n,h} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha K_h\left(\frac{i}{n}\right) \ln \frac{Z_{(n-i+1)}}{Z_{(n-i)}},$$

$$q^{(2)}_{K,n,h} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d}{du}\bigl[u^{\alpha+1} K_h(u)\bigr]_{u=\frac{i}{n}} \ln \frac{Z_{(n-i+1)}}{Z_{(n-i)}}, \quad \alpha > 0,$$

$$K_h(u) = \frac{K\left(\frac{u}{h}\right)}{h}.$$

Čia $K(x)$ – branduolio funkcija, tenkinanti šias sąlygas:

1. $K(x) \geqslant 0$, kai $x \in [0,1]$ ir $K(x) = 0$ su kitais x;
2. $K(1) = K'(1) = 0$;
3. $\int_0^1 K(x)dx = 1$;
4. $K(x)$, $K'(x)$ ir $K''(x)$ yra aprėžtos.

Kai branduolio funkcija $K(x)$ tenkina 1–4 sąlygas ir $h = h_n$ yra toks, kad $h \to 0$, o $nh \to \infty$ tai parametro γ įvertis $\hat{\gamma}_{K,n,h}$ yra suderintasis. Be to, kai $\gamma > 0$, $\hat{\gamma}^{(+)} \to \gamma$ ir $\hat{\gamma}^{(-)} \to 0$, o kai $\gamma < 0$, tai $\hat{\gamma}^{(+)} \to 0$ ir $\hat{\gamma}^{(-)} \to \gamma$.

Jei tenkinamos aukščiau minėtos sąlygos ir $\alpha > \frac{1}{2}$, tai įvertis $\hat{\gamma}_{K,n,h}$ yra asimptotiškai normalusis. Literatūroje nurodyta, kad optimali α reikšmė yra $0,6$.

Literatūroje, skirtoje branduoliniams ekstremaliųjų reikšmių indekso įverčiams, dažniausiai taikomos šios branduolio funkcijos:

$$K_1(x) = \frac{15}{8}\left(1-x^2\right)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$$
$$K_2(x) = \frac{35}{16}\left(1-x^2\right)^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$$
$$K_3(x) = \frac{315}{128}\left(1-x^2\right)^4, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

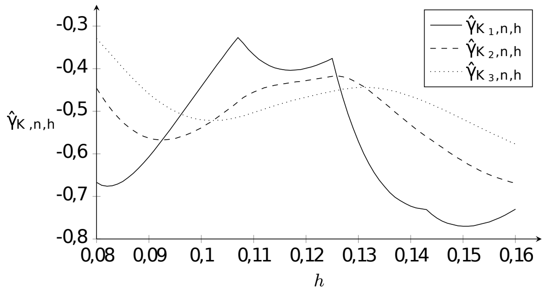
Skyrelio pabaigoje paminėsime pagrindinį branduolinio ekstremaliųjų reikšmių indekso įverčio privalumą lyginant su įprastiniais įverčiais. Savo ankstesniuose darbuose [8, 9] įvertindami parametrą γ taikėme momentų, apibendrintąjį Hilo, mišrųjį momentų ir kitus įverčius (žr. [2, 4, 5]). Šie įverčiai naudoja ne visą maksimumų imtį, o tik k didžiausių maksimumų. Taikant šiuos įverčius ypač svarbu yra optimalios k reikšmės parinkimas, nes net nedidelis k nuokrypis nuo optimalios reikšmės gali sukelti gana ryškius parametro γ įverčio reikšmių svyravimus. Taikant branduolinius parametro γ įverčius svarbus optimalios parametro h reikšmės parinkimas. Tačiau branduoliniai įverčiai yra “glodesni”, t. y. parametro h nuokrypis nuo optimalios reikšmės nesukelia tokių ryškių γ įverčio reikšmių svyravimų.

2 Pagrindiniai rezultatai

Kaip minėta, taikant branduolinį parametro γ įvertį, labai svarbus yra optimalios h reikšmės parinkimas. [7] darbe yra aprašytas optimalaus h parinkimo algoritmas, tačiau praktiškai, kai imtis nedidelė, kaip yra mūsų atveju, algoritmą sunku pritaikyti. Be to optimalios h reikšmės parinkimą apsunkina tai, kad ji priklauso ne tik nuo n, bet ir nuo parametro γ reikšmės. Taikysime euristinį algoritmą. Brėžiame parametro γ įverčio priklausomybės nuo h grafiką ir ieškome tokio h reikšmių intervalo, kuriame įverčio reikšmės pradeda nusistovėti. Suradę tokį intervalą, parametro h reikšmes imame iš jo. Pastebėsime, kad analogiškas algoritmas yra taikomas parenkant optimalią k reikšmę.

1 paveiksle pavaizduota $\hat{\gamma}_{K,n,h}$ reikšmių priklausomybė nuo h ir branduolio funkcijų $K_1(x)$,$K_2(x)$ ir $K_3(x)$.

Matome, kad tam tikras įverčio reikšmių nusistovėjimas stebimas, kai $h \in [0,107; 0,125]$. Su visomis h reikšmėmis paskaičiavome įverčio $\hat{\gamma}_{K,n,h}$ reikšmes. Rezultatai pateikti 2 lentelėje.



1 pav. $\hat{\gamma}_{K,n,h}$ priklausomybė nuo h esant skirtingiems branduoliams.

2 lentelė. Parametro γ įverčio reikšmių kitimo intervalas esant skirtingiems branduoliams ir parametrui $h \in [0,107; 0,125]$.

Branduolio funkcija	$\hat{\gamma}_{K,n,h}$
$K_1(x)$	$[-0,404; -0,325]$
$K_2(x)$	$[-0,478; -0,418]$
$K_3(x)$	$[-0,514; -0,453]$

Iš lentelėje pateiktų rezultatų matyti, kad su branduolio funkciją $K_1(x)$ gautos γ įverčio reikšmės turi didžiausią sklaidą. Todėl patikimesni rezultatai gaunami naudojant branduolius $K_2(x)$ ir $K_3(x)$.

3 Išvados

1 išvada. Oro temperatūros metiniai maksimumai turi Veibulo pasiskirstymą.

2 išvada. Nagrinėtu atveju optimali parametro reikšmė h priklauso intervalui $[0,107; 0,125]$.

3 išvada. Ekstremaliųjų reikšmių indekso γ įverčio reikšmės priklausomai nuo h ir branduolio parinkimo svyruoja nuo $-0,514$ iki $-0,325$.

Literatūra

[1] R. Alzbutas and I. Šeputytė. Tikimybinis ekstremaliųjų temperatūrų dinamikos vertinimas. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **56**:35–40, 2015.

[2] J. Beirlant, P. Vynckier and J. Teugels. Exces functions and estimation of the extreame-value index. *Bernoulli*, **2**:293–318, 1996.

[3] S. Csörgö, P. Deheuvels and D. Mason. Kernel estimates of the tail index of a distribution. *Ann. Stat.*, **13**:1050–1077, 1985.

[4] A. Dekkers, J. Einmahl and L. de Haan. A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *Ann. Stat.*, **17**:1833–1855, 1989.

[5] A. Ferreira, L. de Haan and L. Peng. On optimizing the estimation of high quantiles of a probability distribution. *Statistics*, **37**:401–434, 2003.

[6] B. V. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d'une séries aléatoire. *Ann. Math.*, **44**(3):423–453, 1943.

[7] P. Groeneboom, H.P. Lopuhaä and P.P. de Wolf. Kernel-type estimators for the extreme value index. *Ann. Stat.*, **31**:1956–1995, 2003.

[8] A. Jokimaitis and D. Petronaitis. Apie maksimalių oro temperatūrų Lietuvoje pasiskirstymą. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **54**:12–16, 2013.

[9] A. Jokimaitis and D. Petronaitis. Maksimalių oro temperatūrų skirstinio analizė. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **56**:13–17, 2015.

[10] R. W. Katz and R. Grotjahn. Statistical methods for relating temperature extremes to large-scale meteorological patterns. *US Clivar Var.*, **12**(1):4–7, 2014.

[11] J. Lee. Future trend in seasonal lengths and extreme temperature distributions over South Korea. *Asia-Pacific J. Atmos. Sci.*, **53**(1):31–41, 2017.

SUMMARY

Kernel-type estimator for the extreme value index of air temperature
A. Jokimaitis, D. Petronaitis

The article authors obtained of kernel-type estimator for the extreme value index of maximum air temperature.

Keywords: extreme value index, kernel-type estimators.