Liet. mat. rink. LMD darbai, **50**, 2009, 416–419

Netolygusis k-tojo maksimumo konvergavimo greičio įvertis

Arvydas JOKIMAITIS
Kauno technologijos universitetas
Studentų g. 50, LT-51368 Kaunas
el. paštas: arvydas.jokimaitis@ktu.lt

Santrauka. Straipsnyje gautas nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo netolygusis konvergavimo greičio įvertis.

Raktiniai žodžiai: ekstremaliosios reikšmės, pozicinės statistikos, netolygusis konvergavimo greičio įvertis.

1. Įvadas

Tarkime, kad $X_1, X_2, ...X_n, \ldots$ – nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su pasiskirstymo funkcija $F(x)$. Sudarysime n pirmųjų sekos narių variacinę eilutę:

$$X_{1:n} \leqslant \ldots \leqslant X_{n:n}.$$

Didžiausią variacinės eilutės narį vadinsime maksimumu ir žymėsimeZ_n. Kai k yra fiksuotas, o $n \to \infty$, pozicinę statistiką $X_{n-k+1:n}$ vadinsime k-tuoju maksimumu.

Pažymėkime

$$u_n(x) = n\bigl(1 - F(a_n + b_n x)\bigr);$$

čia $\{a_n, n \geqslant 1\}$ ir $\{b_n > 0, n \geqslant 1\}$ – centravimo ir normavimo konstantų sekos. Tarkime, kad skirstinio funkcija $F(x)$ yra tokia, jog

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) > 0. \tag{1}$$

Tada (žr. [5])

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \tag{2}$$

visuose funkcijos H tolydumo taškuose; čia H – neišsigimusi skirstinio funkcija. Be to $H(x) = e^{-u(x)}$. Ribinių maksimumo skirstinių klasės pirmą kartą aprašytos [2] darbe.

1 TEOREMA. *Tiesiškai normuotas k-tasis maksimumas turi neišsigimusį ribinį skirstinį $H_{(k)}(x)$ tada ir tik tada, kai galioja* (2) *lygybė. Be to su visais x, tokiais, kad $0 < u(x) < \infty$, galioja lygybė*

$$H_{(k)}(x) = H(x) \sum_{t=0}^{k-1} \frac{(u(x))^t}{t!}. \tag{3}$$

1 teoremos įrodymas pateiktas [5] darbe.

Šiame darbe rasime tiesiškai normuoto ir centruoto k-tojo maksimumo netolygųjį konvergavimo greičio įvertį.. Pažymėsime, kad k-tųjų ekstremaliųjų reikšmių bei pozicinių statistikų problematika bene plačiausiai yra apžvelgta [4] darbe. Tolygusis konvergavimo greičio įvertis yra gautas [1] darbe. Apibendrintųjų pozicinių statistikų asimptotika yra nagrinėta [3] darbe.

2. Pagrindinis rezultatas

Pažymėkime

$$
\begin{aligned}
&v_n(x) = u_n(x) - u(x),\\
&u_{n-t}(x) = (n-t)\bigl(1 - F(a_n + b_n x)\bigr),\\
&v_{n-t}(x) = u_{n-t}(x) - u(x), t = 1, ..., k-1,\\
&\tau_n(x) = \max\bigl(u_n(x), u(x)\bigr),\\
&c(n,t) = \frac{n(n-1)...(n-t+1)}{n^t}.
\end{aligned}
$$

2 TEOREMA. *Tarkime, tenkinama (3) lygybė. Su visais x ir n, su kuriais $|v_n(x)| \leqslant \ln 2$, $|v_{n-t}(x)| \leqslant \ln 2$ ir $n \geqslant k \geqslant 2$, teisingas netolygusis konvergavimo greičio įvertis*

$$
\begin{aligned}
&\bigl|P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) - H_{(k)}(x)\bigr|\\
&\quad \leqslant \Delta_n(x) + \sum_{t=1}^{k-1} \frac{c(n,t)(u_n(x))^t \Delta_{n-t}(x)}{t!} + H(x)\bigl|v_n(x)\bigr| \sum_{t=1}^{k-1} \frac{(\tau_n(x))^{t-1}}{t!}\\
&\quad + H(x) \sum_{t=1}^{k-1} \frac{1 - c(n,t)}{t!} \bigl(u_n(x)\bigr)^t;
\end{aligned}
$$

čia

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{n-t}(x) = \frac{(u_{n-t}(x))^2 e^{-u_{n-t}(x)}}{2(n-t-1)} + H(x)\bigl(\bigl|v_{n-t}(x)\bigr| + \theta_t (v_{n-t}(x))^2\bigr), \quad 0 < \theta_t < 1,\\
&\Delta_n(x) = \frac{(u_n(x))^2 e^{-u_n(x)}}{2(n-1)} + H(x)\bigl(\bigl|v_n(x)\bigr| + \theta (v_n(x))^2\bigr), \quad 0 < \theta < 1.
\end{aligned}
$$

Kai $k = 1$, konvergavimo greičio įvertis lygus $\Delta_n(x)$.

Pastaba. Kai kurių skirstinių (pavyzdžiui, eksponentinio, tolygiojo intervale, Pareto) atveju centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti taip, kad gautume $v_n(x) = 0$. Tada įverčio išraiška yra žymiai paprastesnė.

Įrodymas. Turime

$$\begin{aligned}
&\bigl|P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) - H_{(k)}(x)\bigr| \\
&\quad = \Bigl|\sum_{t=0}^{k-1} C_n^t \bigl(F(a_n + b_n x)\bigr)^{n-t}\bigl(1 - F(a_n + b_n x)\bigr)^t - H(x)\sum_{t=0}^{k-1}\frac{(u(x))^t}{t!}\Bigr| \\
&\quad \leqslant \bigl|F^n(a_n + b_n x) - H(x)\bigr| \\
&\quad + \Bigl|\sum_{t=1}^{k-1}\frac{c(n,t)}{t!}\bigl(F(a_n + b_n x)\bigr)^{n-t}\bigl(n(1 - F(a_n + b_n x))\bigr)^t - H(x)\sum_{t=1}^{k-1}\frac{(u(x))^t}{t!}\Bigr|.
\end{aligned}$$

Atsižvelgę į tai, kad

$$cx_1x_2 - y_1y_2 = cx_2(x_1 - y_1) + y_1(x_2 - y_2) + x_2y_1(c-1),$$

su visais c, x_1, x_2, y_1, y_2, gauname

$$\begin{aligned}
&\bigl|P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) - H_{(k)}(x)\bigr| \leqslant \bigl|F^n(a_n + b_n x) - H(x)\bigr| \\
&\quad + \sum_{t=1}^{k-1}\frac{c(n,t)}{t!}\bigl(u_n(x)\bigr)^t\bigl|(F(a_n + b_n x))^{n-t} - H(x)\bigr| \\
&\quad + H(x)\sum_{t=1}^{k-1}\frac{1}{t!}\bigl|\bigl(u_n(x)\bigr)^t - \bigl(u(x)\bigr)^t\bigr| + H(x)\sum_{t=1}^{k-1}\frac{1 - c(n,t)}{t!}\bigl(u_n(x)\bigr)^t \qquad (4)
\end{aligned}$$

Įvertinsime (4) nelygybės dešiniosios pusės antrąjį dėmenį. Turime

$$\begin{aligned}
&\bigl|(F(a_n + b_n x))^{n-t} - H(x)\bigr| \\
&\quad \leqslant \Bigl|\Bigl(1 - \frac{u_{n-t}(x)}{n-t}\Bigr)^{n-t} - e^{-u_{n-t}(x)}\Bigr| + \bigl|e^{-u_{n-t}(x)} - e^{-u(x)}\bigr|. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Įvertinsime (5) nelygybės dešiniosios pusės pirmąjį dėmenį. Taikydami nelygybę

$$e^{-x} - \Bigl(1 - \frac{x}{n}\Bigr)^n \leqslant \frac{x^2e^{-x}}{2(n-1)},$$

kai $0 \leqslant x \leqslant n$, gauname

$$\Bigl|\Bigl(1 - \frac{u_{n-t}(x)}{n-t}\Bigr)^{n-t} - e^{-u_{n-t}(x)}\Bigr| \leqslant \frac{(u_{n-t}(x))^2e^{-u_{n-t}(x)}}{2(n-t-1)}. \qquad (6)$$

Dabar įvertinsime (5) nelygybės dešiniosios pusės antrąjį dėmenį. Taikydami nelygybę

$$e^{-y} - e^{-x} \leqslant e^{-x}\bigl(|x-y| + \theta(x-y)^2\bigr),$$

čia $0 < \theta < 1$ ir $x - y \leqslant \ln 2$, gauname

$$\left|e^{-u_{n-t}(x)} - e^{-u(x)}\right| \leqslant H(x)\left(\left|v_{n-t}(x)\right| + \theta_t(v_{n-t}(x))^2\right). \tag{7}$$

Atsižvelgę į (6) ir (7) nelygybes, gauname

$$\sum_{t=1}^{k-1} \frac{c(n,t)}{t!}\left(u_n(x)\right)^t \left|\left(F(a_n + b_n x)\right)^{n-t} - H(x)\right| \leqslant \sum_{t=1}^{k-1} \frac{c(n,t)(u_n(x))^t \Delta_{n-t}(x)}{t!}. \tag{8}$$

Analogiškai gauname, kad

$$\left|F^n(a_n + b_n x) - H(x)\right| \leqslant \Delta_n(x). \tag{9}$$

Dabar įvertinsime (4) nelygybės dešiniosios pusės trečiąjį dėmenį. Kadangi

$$b^t - a^t = \int_a^b t x^{t-1}\,\mathrm{d}x \leqslant t|a-b|\left(\max(a,b)\right)^{t-1},$$

kai $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ t \geqslant 1$, tai

$$\sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} H(x)\left|\left(u_n(x)\right)^t - \left(u(x)\right)^t\right| = H(x) \sum_{t=1}^{k-1} \frac{1}{t!}\left|\left(u_n(x)\right)^t - (u(x))^t\right|$$

$$\leqslant H(x)\left|v_n(x)\right| \sum_{t=1}^{k-1} \frac{(\tau_n(x))^{t-1}}{(t-1)!}. \tag{10}$$

Atsižvelgę į (4), (8), (9) ir (10) nelygybes, gauname teoremos įvertį.

Literatūra

1. M. Falk. Rates of uniform convergence of extreme order statistics. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 38:245–262, 1986.
2. B. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.*, 44:423–453, 1943.
3. F. Marohn. On rates of uniform convergence of lower extreme generalized order statistics, *Extremes*, 7:271–280, 2004.
4. R.-D. Reiss. *Approximate Distributions of Order Statistics*. New York, Springer, 1989.
5. Я. Галамбош. *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, Москва, Наука, 1984.

SUMMARY

A. Jokimaitis. The nonuniform estimate of the convergence rate of the k***th maxima***

In this paper the nonuniform estimate of the convergence rate for the kth maxima of the independent identically distributed random variables is obtained.

Keywords: extreme values, order statistics, convergence rate, nonuniform estimate.