



Kauno technologijos universitetas
Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

**Arnoldo liežuviai ir jų sluoksniai trupmeninės eilės
diskretinėse sistemose: teorija ir taikymai**

Baigiamasis magistro studijų projektas

Ugnė Orinaitė
Projekto autorė

Prof. habil. dr. Minvydas Kazys Ragulskis
Vadovas

Kaunas, 2026



Kauno technologijos universitetas
Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

**Arnoldo liežuviai ir jų sluoksniai trupmeninės eilės
diskretinėse sistemose: teorija ir taikymai**

Baigiamasis magistro studijų projektas
Taikomoji matematika (6211AX006)

Ugnė Orinaitė
Projekto autorė

Prof. habil. dr. Minvydas Kazys Ragulskis
Vadovas

Doc. dr. Rasa Šmidkaitė
Recenzentė

Kaunas, 2026



Kauno technologijos universitetas

Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Ugnė Orinaitė

Arnoldo liežuviai ir jų sluoksniai trupmeninės eilės diskretinėse sistemose: teorija ir taikymai

Akademinio sąžiningumo deklaracija

Patvirtinu, kad:

1. baigiamąjį projektą parengiau savarankiškai ir sąžiningai, nepažeisdama(s) kitų asmenų autoriaus ar kitų teisių, laikydamasi(s) Lietuvos Respublikos autorių teisių ir gretutinių teisių įstatymo nuostatų, Kauno technologijos universiteto (toliau – Universitetas) intelektinės nuosavybės valdymo ir perdavimo nuostatų bei Universiteto akademinės etikos kodekse nustatytų etikos reikalavimų;
2. baigiamajame projekte visi pateikti duomenys ir tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti teisėtai, nei viena šio projekto dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar elektroninių šaltinių, visos baigiamojo projekto tekste pateiktos citatos ir nuorodos yra nurodytos literatūros sąrašė;
3. įstatymų nenumatytų piniginių sumų už baigiamąjį projektą ar jo dalis niekam nesu mokėjęs (-usi);
4. suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo ar kitų asmenų teisių pažeidimo faktui, man bus taikomos akademinės nuobaudos pagal Universitete galiojančią tvarką ir būsiu pašalinta(s) iš Universiteto, o baigiamasis projektas gali būti pateiktas Akademinės etikos ir procedūrų kontrolieriaus tarnybai nagrinėjant galimą akademinės etikos pažeidimą.

Ugnė Orinaitė

Patvirtinta elektroniniu būdu

Ugnė Orinaitė. Arnoldo liežuviai ir jų sluoksniai trupmeninės eilės diskretinėse sistemose: teorija ir taikymai. Magistro studijų baigiamasis projektas / vadovas prof. habil. dr. Minvydas Kazys Ragulskis; Kauno technologijos universitetas, Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas.

Studijų kryptis ir sritis (studijų krypčių grupė): Taikomoji matematika (Matematikos mokslai).

Reikšminiai žodžiai: Arnoldo liežuviai, trupmeninės eilės sistemos, Caputo išvestinė, nulpotentinės matricos, diskretinės dinaminės sistemos.

Kaunas, 2026. 58 p.

Santrauka

Arnoldo liežuvių analizė netiesinėse diskretinėse sistemose yra svarbi šiuolaikinės dinamikos teorijos tyrimų kryptis. Trupmeninės eilės modeliai leidžia įtraukti atminties efektus, o matricinės struktūros – nagrinėti daugiamatę ir hierarchinę dinamiką. Šių dviejų aspektų sąveika sudaro sudėtingą tyrimo objektą, kuris iki šiol literatūroje nagrinėtas fragmentiškai.

Šiame darbe siekiama ištirti, kaip trupmeninės eilės atmintis ir matricinė struktūra veikia Arnoldo liežuvių formavimąsi ir jų vidinę struktūrinę sandarą diskretinėse sistemose. Tyrimo objektas – Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis, išplėstas į matricinę formą su ypatingu dėmesiu nulpotentinių matricių struktūrai.

Teorinėje darbo dalyje analizuojami netiesinių diskretinių sistemų pagrindai, apskritiminis iteracinis modelis ir Arnoldo liežuvių struktūra parametrų erdvėje. Siekiant įtraukti atminties efektus, nagrinėjami trupmeninės eilės modeliai ir Caputo išvestinės diskretiniai analogai. Matricinių modelių teorija pristatoma per idempotentinių ir nulpotentinių matricių algebrines savybes, kurios sudaro pagrindą modelio išplėtimui.

Tyrime suformuluotas Caputo trupmeninis matricinis standartinis iteracinis modelis ir pritaikytas H–rangų skaičiavimo algoritmas, leidžiantis įvertinti sistemų generuojamų sekų algebrinį sudėtingumą. Gauti rezultatai parodė, kad idempotentinių matricių atveju sistema išlaiko skaliarinio modelio savybes, o nulpotentinės matricos lemia hierarchinės struktūros atsiradimą. Nustatyta, kad trupmeninės atminties ir nulpotentinės struktūros sąveika generuoja daugiasluoksnius Arnoldo liežuvius bei jų divergavimo hierarchijas.

Gauti rezultatai praplečia klasikinę sinchronizacijos teoriją ir iliustruojami praktiniu taikymu – parodoma, kad skirtingi hierarchiniai sluoksniai gali būti naudojami kaip nepriklausomi raktai signalų šifravimo schemose.

Ugnė Orinaitė. Arnold Tongues and their Layers in Discrete Fractional Systems: Theory and Applications. Master's Final Degree Project / supervisor Prof. Dr. Habil. Minvydas Kazys Ragulskis; Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Kaunas University of Technology.

Study field and area (study field group): Applied Mathematics (Mathematical Sciences).

Keywords: Arnold tongues, fractional–order systems, Caputo derivative, nilpotent matrices, discrete dynamical systems.

Kaunas, 2026. 58 pages.

Summary

The analysis of Arnold tongues in nonlinear discrete systems is an important research direction in modern dynamical systems theory. Fractional–order models allow memory effects to be incorporated, while matrix structures enable the study of multidimensional and hierarchical dynamics. The interplay between these two aspects constitutes a complex research object that has so far been addressed only fragmentarily in literature.

This work aims to investigate how fractional–order memory and matrix structure affect the formation of Arnold tongues and their internal structural organization in discrete systems. The object of study is the Caputo fractional standard map extended to matrix form, with particular emphasis on the structure of nilpotent matrices.

The theoretical part of the work covers the foundations of nonlinear discrete systems, the circle map, and the structure of Arnold tongues in parameter space. To incorporate memory effects, fractional–order models and discrete analogues of the Caputo derivative are examined. The theory of matrix iterative models is presented through the algebraic properties of idempotent and nilpotent matrices, which form the basis for the extension of the model.

The Caputo fractional matrix standard map is formulated, and the H–rank algorithm is applied to assess the algebraic complexity of sequences generated by the system. The results show that in the case of idempotent matrices the system retains the properties of the scalar model, whereas nilpotent matrices give rise to a hierarchical structure. It is established that the interaction between fractional memory and nilpotent structure generates multilayered Arnold tongues and their divergence hierarchies.

The obtained results extend classical synchronization theory and are illustrated by a practical application, demonstrating that different hierarchical layers can be used as independent keys in signal encoding schemes.

Turinys

Lentelių sąrašas	7
Paveikslų sąrašas	8
Įvadas.....	9
1. Literatūros apžvalga	10
1.1. Netiesinės diskretinės sistemos ir iteraciniai modeliai	10
1.2. Apskritiminis iteracinis modelis ir fazinė sinchronizacija	12
1.3. Arnoldo liežuviai: struktūra, bifurkacijos ir parametų erdvė	13
1.4. Trupmeninės eilės modeliai ir Caputo išvestinė.....	15
1.5. Trupmeniniai skirtumai diskretinėse sistemose.....	17
1.6. Matriciniai iteraciniai modeliai ir jų struktūros.....	18
2. Duomenys ir tyrimo metodai.....	21
2.1. Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis.....	21
2.2. n -tosios eilės idempotentinės ir nulpotentinės matricos	21
2.3. Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis su matriciniais n -tosios eilės kintamaisiais 23	
2.4. Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis su idempotentinėmis matricomis	24
2.5. Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis su nulpotentinėmis matricomis	28
2.6. Caputo standartinis trupmeninis iteracinis modelis su 4-tosios eilės nulpotentinėmis matricomis	34
2.7. Schema pagalbinio parametro reikšmių skaičiavimui	36
2.8. H-rangų skaičiavimo algoritmas	38
2.9. H-rangų skaičiavimo algoritmo skaitinis pavyzdys.....	39
2.10. H-rangų skaičiavimo algoritmo parametų kalibravimas	40
3. Tyrimų rezultatai ir jų aptarimas.....	43
3.1. Arnoldo liežuvių divergavimo hierarchijos.....	43
3.2. Hierarchinių struktūrų vaidmuo Caputo trupmeninės eilės matriciniame iteraciniame modelyje 43	
3.3. Hierarchinių sluoksnių divergavimo greičiai	46
3.4. Hierarchinių sluoksnių augimo greičiai ir Liapunovo rodikliai	47
3.5. Signalų šifravimas naudojant hierarchines chaotines sekas	48
Išvados	53
Literatūros sąrašas	54

Lentelių sąrašas

1 lentelė. Nulpotentinių matricų sandaugos taisyklės	22
2 lentelė. H–rango priklausomybė nuo slenkstinio parametro reikšmės	40
3 lentelė. MSE reikšmės skirtingiems atkūrimo raktams.....	52

Paveikslų sąrašas

1 pav. Schema, iliustruojanti pagalbinio parametro iteracinį konstravimą Caputo trupmeninės eilės standartiniame nulpotentinių matricių iteraciniame modelyje	37
2 pav. Pirmojo hierarchinio sluoksnio grafikų seka prie skirtingų parametro ε reikšmių	41
3 pav. Taškų, kurių H–rangas viršija 100, procentinė dalis kaip $\ln\varepsilon$ funkcija.....	42
4 pav. Arnoldo tipo liežuvių struktūros, gautos naudojant sukalibruotą H–rangų algoritmą parametru plokštumoje	43
5 pav. Panašių pereinamųjų procesų algebrinio sudėtingumo atvaizdavimas parametru plokštumoje ir kitimas per iteracijas	44
6 pav. Skirtingų pereinamųjų procesų algebrinio sudėtingumo atvaizdavimas parametru plokštumoje ir kitimas per iteracijas	45
7 pav. Naudojamos chaotinės sekos (raktai) signalo šifravimui.....	50
8 pav. Teisingo rakto transformacija taikant chaotiškai generuotą permutaciją.....	50
9 pav. Signalų užšifravimo ir iššifravimo rezultatai naudojant chaotiškai generuotas permutacijas	51

Įvadas

Netiesinių diskretinių sistemų analizė yra viena svarbiausių šiuolaikinės taikomosios matematikos kryptių, leidžianti tirti sudėtingus dinامينius reiškinius fizikoje, biologijoje ir inžinerijoje [1], [2]. Vienas iš pagrindinių tokių sistemų reiškinių yra sinchronizacija, glaudžiai susijusi su fazine sinchronizacija ir Arnoldo liežuviais – stabiliomis periodinių sprendinių sritimis parametru erdvėje [3]. Arnoldo liežuviai stebimi įvairiose srityse: širdies ir kvėpavimo sistemų dinamikoje, lazerinėse sistemose, neuroninius procesus aprašančiuose modeliuose ir kitur, todėl jų tyrimas turi tiek fundamentinę, tiek taikomąją reikšmę.

Pastaraisiais metais vis daugiau dėmesio skiriama trupmeninės eilės modeliams, kurie leidžia įtraukti atminties efektus [4], [5]. Tokiose sistemose dabartinė būsena priklauso nuo visos ankstesnės dinamikos, todėl atsiranda nauji reiškiniai, nebūdingi klasikiniam modeliams – keičiasi stabilumo savybės, bifurkacijų scenarijai ir fazinės sinchronizacijos sąlygos. Lygiagrečiai mokslinėje literatūroje tiriama matriciniai iteraciniai modeliai, leidžiantys analizuoti daugiamates sistemas ir jų hierarchinę struktūrą [6]. Ankstesni tyrimai parodė, kad nulpotentinių matricių struktūra lemia iš esmės naujus dinامينius efektus, tokius kaip baigtinio laiko divergavimas ir sudėtingos erdvinės struktūros [7].

Nepaisant reikšmingų pasiekimų kiekvienoje iš šių kryptių atskirai, trupmeninė dinamika ir matricinės struktūros mokslinėje literatūroje dažniausiai nagrinėjamos nepriklausomai viena nuo kitos. Ypač trūksta tyrimų, analizuojančių Arnoldo liežuvių struktūrą trupmeninėse matricinėse sistemose ir jų hierarchinę sandarą. Pirmieji žingsniai šia kryptimi žengti darbe [8], tačiau hierarchinių sluoksnių dinamika ir jų tarpusavio ryšiai išsamiau nenagrinėti. Būtent tai siekiama atlikti šiame darbe.

Darbo **tikslas** – ištirti Arnoldo liežuvių formavimąsi ir jų struktūrinę sandarą trupmeninės eilės diskretinėse sistemose, taikant Caputo trupmeninį matricinį standartinį iteracinį modelį.

Darbo **uždaviniai**:

1. išanalizuoti netiesinių diskretinių sistemų, apskritiminio iteracinio modelio ir Arnoldo liežuvių teorinius pagrindus;
2. ištirti trupmeninės eilės modelius ir Caputo išvestinės taikymą diskretinėse sistemose;
3. išnagrinėti matricinių iteracinių modelių savybes, daugiausia dėmesio skiriant idempotentinėms ir nulpotentinėms matricoms;
4. suformuluoti Caputo trupmeninį matricinį standartinį iteracinį modelį ir jo skaičiavimo schemą;
5. atlikti skaitinius tyrimus ir ištirti Arnoldo liežuvių struktūrą bei jų divergavimo hierarchijas;
6. įvertinti hierarchinių sluoksnių įtaką sistemos dinaminiam sudėtingumui, taikant H–rangų skaičiavimo algoritmą.

1. Literatūros apžvalga

1.1. Netiesinės diskretinės sistemos ir iteraciniai modeliai

Netiesinės diskretinės sistemos yra svarbi šiuolaikinės dinamikos teorijos dalis, plačiai taikoma fizikoje, biologijoje, ekonomikoje, inžinerijoje ir kitose srityse. Skirtingai nuo tolydžių modelių, aprašomų diferencialinėmis lygtimis, diskretinės sistemos nusako būsenos kitimą atskirais laiko momentais, todėl jų dinamika apibūdinama rekurentinėmis arba iteracinėmis priklausomybėmis. Tokia modeliavimo schema yra ypač naudinga tais atvejais, kai pats procesas natūraliai vyksta žingsniais, pavyzdžiui, sezoninėje populiacijų dinamikoje, skaitmeniniame valdyme, ekonominių ciklų analizėje ar diskrečių signalų apdorojime [1], [9]. Iteraciniai modeliai laikomi fundamentaliais modeliais, naudojamais tirti periodo dvigubėjimo kelią į chaosą, Liapunovo eksponentes ir universalius netiesinės dinamikos dėsniumus [2], [10].

Bendruoju atveju diskretinio laiko netiesinė sistema gali būti užrašoma taip:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (1.1.1)$$

čia x_n – sistemos būsena n -tuoju laiko momentu; f – netiesinė transformacija. Jei būsena yra daugiamatė, modelis apibendrinamas į vektorinę arba matricinę formą:

$$x_{n+1} = F(x_n), x_n \in \mathbb{R}^m, \quad X_{n+1} = F(X_n), X_n \in \mathbb{R}^{m \times m}. \quad (1.1.2)$$

Tokios sistemos gali turėti pusiausvyros taškus, periodines orbitas, kvaziperiodinius režimus ir chaotinius atraktorius. Diskretinių sistemų analizėje svarbiausi tampa fiksuotųjų taškų stabilumo, bifurkacijų, jautrumo pradinėms sąlygoms ir ilgalaikės orbitų struktūros klausimai [1], [11].

Vienas iš klasikinių ir labiausiai ištirtų netiesinių diskretinių modelių yra logistinis žemėlapis:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n); \quad (1.1.3)$$

čia a – valdymo parametras; x_n – normalizuota sistemos būsena. Šis žemėlapis tapo paradigminiu modeliu netiesinės dinamikos teorijoje, nes parodo, kaip iš labai paprastos netiesinės lygties gali atsirasti sudėtingas ir net chaotiškas elgesys [12]. Analitiniai ir skaitiniai tyrimai parodė, kad didėjant parametrai a , sistema pereina per bifurkacijų seką: kai $0 \leq a \leq 1$, egzistuoja stabilus fiksuotasis taškas $x = 0$; kai $1 < a \leq 3$, stabilus tampa taškas $x = 1 - \frac{1}{a}$; ties $a = 3$ prasideda periodo dvigubėjimo seka, kuri veda į vis sudėtingesnius periodinius režimus, o ties $a \approx 3.56995$ sistema pereina į chaotiškus režimus [1], [13].

Būtent logistinio žemėlapio analizė istoriniu ir metodologiniu požiūriu suformavo esmines sąvokas, šiandien taikomas daug platesniam diskrečių netiesinių sistemų spektrui. Viena jų – bifurkacija, suprantama kaip kokybinis sistemos elgesio pokytis, kintant parametrai. Diskretinėse sistemose ypač svarbi periodo dvigubėjimo bifurkacijų grandinė, kai stabilus fiksuotasis taškas tampa nestabilus, o vietoje jo atsiranda stabilios periodo–2, periodo–4, periodo–8 ir aukštesnių periodų orbitos. Toks perėjimas leidžia kalbėti apie chaosą, kuris pasižymi universaliomis Feigenbaumo konstantomis [10], [13].

Kita esminė netiesinių diskretinių sistemų savybė yra jautrumas pradinėms sąlygoms, laikomas vienu iš deterministinio chaoso požymių. Jeigu dvi trajektorijos, prasidėjusios labai artimose būsenose,

ilgainiui sparčiai išsiskiria, sistema pasižymi chaotišku elgesiu. Šią savybę dažnai kiekybiškai nusako Liapunovo eksponentė:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'(x_i)|; \quad (1.1.4)$$

čia $f'(x_i)$ – iteracinės funkcijos $f(x)$ išvestinė taške x_i ; x_i – trajektorijos taškas. Teigiama Liapunovo eksponentės reikšmė ($\lambda > 0$) rodo, kad artimos trajektorijos eksponentiškai tolsta viena nuo kitos ir tai indikuoja chaotišką elgesį, neigiama reikšmė ($\lambda < 0$) reiškia trajektorijų artėjimą ir sistemos stabilumą, o $\lambda = 0$ siejama su bifurkacijomis ir ribiniu dinamikos režimu [2].

Svarbu pažymėti, kad iteraciniai modeliai nėra vien teorinis chaoso iliustravimo įrankis. Jie naudojami ir praktiniuose valdymo bei modeliavimo uždaviniuose, pavyzdžiui, chaoso valdymui naudojant Ott–Grebogi–Yorke metodą, neuroninių tinklų modeliavime ar biologinių sistemų analizėje [1], [2]. Tai rodo, kad netiesinės diskretinės sistemos yra ne tik abstraktūs matematiniai objektai, bet ir svarbus taikomosios analizės instrumentas.

Literatūroje paprastai išskiriami įvairūs iteracinių modelių tipai. Klasikiniai (lokalūs) modeliai kitą būseną nustato tik iš ankstesnės iteracijos, tuo tarpu sudėtingesni modeliai – pavyzdžiui, trupmeniniai modeliai – pasižymi nelokalumu ir priklausomybe nuo visos būsenų istorijos [5]. Ši klasifikacija svarbi, nes ji parodo perėjimą nuo klasikinių diskrečių modelių prie sistemų su atmintimi, kurios yra viena iš pagrindinių nagrinėjamos temos krypčių.

Diskretinių sistemų reikšmė dar labiau išauga pereinant nuo skaliarinių prie daugiamačių ir matricinių modelių. Tokiuose modeliuose atsiranda naujos dinaminės savybės, susijusios su komponentų sąveika, kolektyviniais režimais ir struktūrine dinamika. Pavyzdžiui, susietų modelių gardelės (angl. *coupled map lattices*) leidžia modeliuoti erdvėje pasiskirsčiusias sistemas ir kompleksinį kolektyvinį elgesį [14]. Tokie išplėtimai yra svarbūs, nes leidžia interpretuoti sudėtingas parametrų erdvės struktūras kaip kelių tarpusavyje sąveikaujančių komponentų rezultatą.

Netiesinių diskretinių sistemų teorijoje išryškėja keli svarbiausi aspektai. Pirma, paprastos iteracinės taisyklės gali generuoti itin sudėtingą dinamiką. Antra, parametrų pokyčiai lemia kokybinius režimų virsmus – nuo stabilumo iki bifurkacijų ir chaoso. Trečia, diskretiniai modeliai yra ypač tinkami skaitiniams eksperimentams, parametrinių sričių braižymui ir struktūrinių reiškinių, tokių kaip sinchronizacija ar rezonansinės sritys, identifikavimui [11], [15]. Dėl šių priežasčių iteraciniai modeliai tapo natūraliu teoriniu pagrindu tolimesnei apskritiminio iteracinio modelio, standartinio iteracinio modelio, fazinės sinchronizacijos ir Arnoldo liežuvių analizei.

Apibendrinant galima teigti, kad netiesinės diskretinės sistemos yra vienas iš esminių šiuolaikinės netiesinės dinamikos tyrimo objektų. Jų svarba kyla iš dviejų tarpusavyje susijusių priežasčių: viena vertus, jos leidžia kompaktiškai aprašyti realius procesus, vykstančius diskrečiais laiko momentais, kita vertus, jos atskleidžia fundamentalius universalius dėsningumus – bifurkacijas, jautrumą pradinėms sąlygoms, chaoso atsiradimą ir stabilumo praradimą. Todėl būtent iteraciniai modeliai sudaro tinkamiausią teorinį pagrindą nagrinėti sinchronizacijos reiškinius, Arnoldo liežuvius ir jų struktūrinę sandarą tiek klasikiniuose, tiek trupmeninės eilės bei matriciniuose modeliuose.

1.2. Apskritiminis iteracinis modelis ir fazinė sinchronizacija

Vienas svarbiausių diskretinių netiesinių modelių, naudojamų sinchronizacijos ir rezonanso reiškiniams tirti, yra apskritiminis iteracinis modelis (angl. *circle map*). Šis modelis aprašo kampinio kintamojo evoliuciją ir yra plačiai taikomas tiriant sistemas, kurių dinamika susijusi su periodiniu išoriniu poveikiu, pavyzdžiui, priverstiniais osciliatoriais, elektroninėmis grandinėmis ar biologiniais ritmais. Kaip nagrinėjama literatūroje, apskritiminis iteracinis modelis yra vienas iš fundamentaliųjų modelių, leidžiančių suprasti, kaip paprastos netiesinės priklausomybės gali generuoti sudėtingą sinchronizacijos elgesį [3], [16].

Klasikinis apskritiminis iteracinis modelis užrašomas taip:

$$x_{n+1} = x_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \pmod{1}; \quad (1.2.1)$$

čia x_n – sistemos fazė; Ω – išorinio poveikio dažnis; K – netiesinio ryšio stiprumą nusakantis parametras. Ši lygtis gali būti interpretuojama kaip paprastas modelis, kuriame fazė kiekviename žingsnyje didėja beveik tolygiai, tačiau yra moduluojama sinusine netiesine triukšmu paveikta funkcija. Tokia struktūra leidžia modeliuoti konkurenciją tarp dviejų procesų – laisvos rotacijos ir priverstinės sąveikos [17].

Vienas esminių reiškinių, atsirandančių apskritiminiame iteraciniame modelyje, yra fazinė sinchronizacija (angl. *phase locking*). Šis reiškinys pasireiškia tada, kai sistemos vidinis dažnis sinchronizuojasi su išoriniu dažniu taip, kad jų santykis tampa racionalus. Kitaip tariant, sistema pereina į režimą, kuriame po tam tikro skaičiaus iteracijų jos fazė kartojasi su pastoviu poslinkiu. Tokiu atveju sakoma, kad sistema yra užrakinta santykiu $\frac{p}{q}$, kur p ir q yra sveikieji skaičiai [3].

Matematiškai šis reiškinys aprašomas per rotacijos skaičių ρ , kuris nusako vidutinį fazės pokytį per vieną iteraciją:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{n}; \quad (1.2.2)$$

čia x_n – kampinio kintamojo reikšmė po n -tosios iteracijos; x_0 – pradinė kampinio kintamojo reikšmė; n – iteracijų skaičius. Rotacijos skaičius yra vienas svarbiausių dydžių analizuojant apskritiminį iteracinį modelį, nes jis leidžia klasifikuoti sistemos dinaminį režimą. Jei ρ yra racionalus skaičius, sistema demonstruoja periodinį (sinchronizuotą) elgesį, tuo tarpu iracionalus ρ atitinka kvaziperiodinį režimą [16].

Tiriant apskritiminį iteracinį modelį parametrų erdvėje (Ω, K) nustatoma, kad fazinės sinchronizacijos sritys nėra pasiskirsčiusios atsitiktine tvarka, bet sudaro specifines geometrines struktūras. Šios sritys yra vadinamos Arnoldo liežuviais (angl. *Arnold tongues*), ir jos atsiranda aplink racionalias rotacijos skaičiaus reikšmes $\rho = \frac{p}{q}$ [17]. Geometriškai šios sritys dažniausiai turi pleišto formą ir plečiasi didėjant netiesinio ryšio parametrai K . Kiekvienas toks „liežuvis“ atitinka konkretų sinchronizacijos režimą, todėl parametrų erdvėje galima aiškiai identifikuoti stabilaus periodinio elgesio zonas.

Už Arnoldo liežuvių ribų sistema paprastai pereina į kvaziperiodinį režimą, kuriame fazė niekada tiksliai nesikartoja, tačiau išlieka struktūruota. Toliau didinant netiesiškumą, gali atsirasti ir

chaotiškas elgesys, kas rodo, kad apskritiminis iteracinis modelis apima visą spektrą dinamių režimų – nuo reguliarių iki chaotiškų [16]. Šis universalumas yra viena iš pagrindinių priežasčių, kodėl apskritiminis iteracinis modelis tapo standartiniu iteraciniu modeliu sinchronizacijos teorijoje.

Svarbu pažymėti, kad apskritiminis iteracinis modelis nėra izoliuotas modelis, o yra glaudžiai susijęs su kitais netiesinės dinamikos modeliais. Tarp dinamių sistemų, naudojamų rezonanso ir chaotiško elgesio tyrimams, ypatingą vietą užima standartinis iteracinis modelis (angl. *standard map*), dar vadinamas Chirikov–Taylor modeliu [18], kuris aprašo dvimatę diskretinę sistemą:

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n + K \sin(x_n); \\ x_{n+1} = x_n + p_{n+1} \pmod{2\pi}; \end{cases} \quad (1.2.3)$$

čia x_n – kampinis kintamasis (padėtis) n -tojoje iteracijoje; p_n – impulsinis kintamasis (momentas) n -tojoje iteracijoje; K – sistemos netiesiškumo parametras. Šis modelis yra vienas iš fundamentalių įrankių netiesinės dinamikos teorijoje [19], fazės erdvės plotą išsaugantis ir plačiai naudojamas Hamiltono sistemų chaoso tyrimuose [20], [21], leidžiantis tirti perėjimą nuo reguliaraus judėjimo prie chaoso [22].

Nors klasikinėje standartinio iteracinio modelio formoje Arnoldo liežuviai tiesiogiai neatsiranda, jis yra glaudžiai susijęs su apskritiminiu iteraciniu modeliu, kuriame tokios struktūros susiformuoja natūraliai. Dėl šios priežasties standartinis iteracinis modelis yra svarbus analizuojant dinaminis mechanizmus, lemiančius sinchronizacijos ir dažnio užrakinimo reiškinius.

Apskritiminio iteracinio modelio analizė leidžia išryškinti fundamentalius netiesinės dinamikos principus: kaip sąveika tarp vidinio ir išorinio dažnio lemia sinchronizaciją, kaip ši sinchronizacija priklauso nuo sistemos parametrų ir kaip parametrų erdvėje atsiranda struktūruotos stabilumo sritys. Šios savybės yra esminės tolimesniam Arnoldo liežuvių tyrimui, ypač kai modelis išplečiamas į sudėtingesnes sistemas.

Būtent čia atsiranda natūralus perėjimas prie trupmeninių ir matricinių modelių. Klasikinis apskritiminis iteracinis modelis neatsižvelgia į atminties efektus ar daugiamatę sąveiką, todėl jo išplėtimai – įtraukiant trupmeninius operatorius ar matricinius kintamuosius – leidžia tirti sudėtingesnes Arnoldo liežuvių struktūras. Tokiose sistemose sinchronizacijos sritys gali deformuotis, išsišakoti ar sudaryti daugiasluoksnes struktūras, kurios nebūdingos klasikiniams modeliams.

1.3. Arnoldo liežuviai: struktūra, bifurkacijos ir parametrų erdvė

Arnoldo liežuviai – pleišto formos sritys parametrų erdvėje – yra viena iš svarbiausių struktūrų netiesinių diskretinių sistemų teorijoje, glaudžiai susijusi su fazinės sinchronizacijos ir rezonanso reiškiniais. Šios struktūros pirmą kartą sistemingai aprašytos V. I. Arnoldo darbuose, nagrinėjant rezonansų problemą ir judėjimo stabilumą klasikinėje mechanikoje [17]. Vėlesni tyrimai parodė, kad Arnoldo liežuviai yra universalus reiškinys, pasireiškiantis įvairiose netiesinėse sistemose – nuo paprastų diskretinių modelių iki sudėtingų fizinių ir biologinių modelių [3], [16].

Kaip jau minėta anksčiau, Arnoldo liežuviai atsiranda nagrinėjant apskritiminį iteracinį modelį parametrų erdvėje (Ω, K) . Kiekvienam racionaliam rotacijos skaičiui $\rho = \frac{p}{q}$ egzistuoja tam tikra parametrų sritis, kurioje sistema demonstruoja stabilų periodinį režimą su tuo pačiu dažnių santykiu.

Šios sritys sudaro pleišto formos struktūras, kurios išsidėsto aplink atitinkamas Ω reikšmes, kai $K \rightarrow 0$, ir plečiasi didėjant netiesiškumui. Tokia struktūra lemia, kad parametų erdvėje susiformuoja ištisas sinchronizacijos regionų rinkinys, kuriame kiekvienas regionas atitinka konkretų rezonansinį režimą [16].

Geometriniu požiūriu Arnoldo liežuviai yra sritys, kuriose egzistuoja stabilios periodinės orbitos. Šių sričių ribos paprastai atitinka bifurkacijas, kurių metu sistema pereina iš kvaziperiodinio režimo į fazinio užrakinimo būseną. Dažniausiai šios ribos yra susijusios su balno–mazgo (angl. *saddle–node*) bifurkacijomis, kai atsiranda arba išnyksta periodiniai sprendiniai [11]. Tokiu būdu Arnoldo liežuviai gali būti interpretuojami kaip stabilumo sritys parametų erdvėje, kurios yra tiesiogiai susijusios su sistemos bifurkacine struktūra.

Svarbi Arnoldo liežuvių savybė yra jų hierarchinė organizacija. Mažesnio laipsnio rezonansai (pvz., 1: 1, 1: 2, 2: 1) paprastai sudaro platesnes ir labiau išreikštas Arnoldo liežuvių struktūras, tuo tarpu aukštesnio laipsnio rezonansai ($\frac{p}{q}$ su didesnėmis q reikšmėmis) atitinka siauresnes sritis. Ši struktūra yra glaudžiai susijusi su „velnio laiptų“ (angl. *devil's staircase*) funkcija, kuri aprašo rotacijos skaičiaus ρ priklausomybę nuo parametro Ω . Ši funkcija yra pastovi Arnoldo liežuvių viduje ir kinta tik tarp jų – tai atspindi staigius perėjimus tarp skirtingų sinchronizacijos režimų [16].

Kita svarbi savybė yra Arnoldo liežuvių plėtimasis didėjant parametrai K . Kai $K = 0$, sistema yra grynai kvaziperiodinė, o rotacijos skaičius tiesiogiai sutampa su Ω . Tačiau didėjant K , atsiranda intervalai, kuriuose rotacijos skaičius „užsifiksuoja“ ties racionaliomis reikšmėmis. Tai reiškia, kad net ir keičiant parametą Ω , sistema išlieka tame pačiame sinchronizacijos režime. Šis efektas yra vienas iš pagrindinių netiesinės dinamikos požymių ir rodo, kaip netiesiškumas gali stabilizuoti tam tikrus dinامينius režimus [3].

Arnoldo liežuvių struktūra tampa dar sudėtingesnė didėjant netiesiškumui. Esant pakankamai didelėms K reikšmėms, Arnoldo liežuviai pradeda persidengti, o sistema pereina į chaotišką režimą. Tokiu atveju parametų erdvė tampa fragmentuota, atsiranda fraktalinės struktūros ir sudėtingos bifurkacijų schemas [2]. Tai rodo, kad Arnoldo liežuviai yra ne tik sinchronizacijos indikatoriai, bet ir svarbus įrankis analizuojant perėjimą į chaosą.

Be apskritiminio iteracinio modelio, Arnoldo liežuvių analogai stebimi ir kituose modeliuose, įskaitant diferencines lygtis, priverstinius osciliatorius bei Hamiltono sistemas. Pavyzdžiui, standartiniame iteraciniame modelyje rezonansiniai regionai taip pat susiję su racionaliais dažnių santykiais, nors jų geometrinė struktūra skiriasi nuo klasikinio apskritiminio iteracinio modelio atvejo [21]. Tai patvirtina, kad Arnoldo liežuvių fenomenas yra universalus ir nepriklauso nuo konkretaus modelio formos.

Svarbus aspektas, kuris tampa ypač aktualus šiame darbe, yra Arnoldo liežuvių transformacija pereinant prie sudėtingesnių sistemų. Klasikiniame apskritiminiame iteraciniame modelyje Arnoldo liežuviai yra palyginti reguliarios formos, tačiau įvedus papildomus efektus – tokius kaip atmintis ar daugiamatė sąveika – jų struktūra gali iš esmės pasikeisti. Literatūroje atskleidžiama, kad net nedideli modelio modifikavimai gali sukelti Arnoldo liežuvių deformacijas, jų išsišakojimą, fraktalinių ribų atsiradimą, sudėtingesnių stabilumo sričių formavimąsi [3].

Šie efektai tampa dar ryškesni, kai sistema išplečiama į daugiamatę ar matricinę formą. Tokiu atveju sinchronizacijos reiškiniai nebeapsiriboja vienu kintamuoju, bet atsiranda keli tarpusavyje

sąveikaujantys režimai. Tai leidžia interpretuoti Arnoldo liežuvius kaip sudėtingesnių struktūrų – pavyzdžiui, sluoksnių ar hierarchinių rezonansinių regionų – projekciją parametru erdvėje.

Arnoldo liežuviai plačiai stebimi įvairiose netiesinėse sistemose, tokiose kaip apskritiminis iteracinis modelis [23], priverstiniai osciliatoriai [24], Josephsono sandūros [25], elektroninės grandinės [26], lazerinės sistemos [27] bei biologiniai ritmai [28], [29]. Dėl šios priežasties jie tapo vienu iš universalių sinchronizacijos reiškinių analizės įrankių, plačiai taikomų tiriant netiesinį rezonansą [30], dažnio užrakinimą [31] ir sinchronizacijos procesus įvairiose fizinėse, inžinerinėse ir biologinėse sistemose [32], [33], [34].

Apibendrinant galima teigti, kad Arnoldo liežuviai yra esminis įrankis analizuojant netiesinių diskretinių sistemų sinchronizaciją ir stabilumą. Jie leidžia identifikuoti stabilaus periodinio elgesio zonas, analizuoti bifurkacijų struktūrą, suprasti perėjimą nuo kvaziperiodinio režimo prie chaoso.

Be to, jų struktūra yra jautri modelio išplėtimams, todėl Arnoldo liežuvių analizė tampa ypač svarbi nagrinėjant sudėtingesnes sistemas, tokias kaip trupmeninės eilės ar matriciniai iteraciniai modeliai. Būtent šiose sistemose klasikinė Arnoldo liežuvių geometrija gali transformuotis į daugiasluoksnes ir hierarchines struktūras, kurios sudaro pagrindinį šio darbo tyrimo objektą.

1.4. Trupmeninės eilės modeliai ir Caputo išvestinė

Pastaraisiais dešimtmečiais netiesinių dinaminų sistemų teorija buvo reikšmingai išplėsta įtraukiant trupmeninės eilės analizę (angl. *fractional calculus*), kuri leidžia apibendrinti klasikinį diferencialinį skaičiavimą iki ne sveikųjų išvestinių ir integralų laipsnių. Skirtingai nuo klasikinių diferencialinių modelių, trupmeninės eilės lygtys leidžia aprašyti sistemas, kurių dinamika pasižymi atminties ir nelokalumo efektais, t. y. dabartinė sistemos būseną priklauso ne tik nuo esamos būsenos, bet ir nuo visos ankstesnės trajektorijos [4], [35].

Matematiškai trupmeninės eilės išvestinės gali būti apibrėžiamos keliais skirtingais būdais, iš kurių dažniausiai naudojami yra Riemanno–Liouville, Grünwaldo–Letnikovo ir Caputo apibrėžimai. Nors šie apibrėžimai yra matematiškai susiję, jų fizikinė interpretacija skiriasi. Praktiniuose taikymuose ypač svarbi yra Caputo trupmeninės eilės išvestinė, nes ji leidžia formuluoti pradines sąlygas tokiu pačiu būdu kaip ir klasikinėse diferencialinėse lygtyse [4].

Caputo trupmeninės eilės α išvestinė, kur $0 < \alpha < 1$, apibrėžiama taip:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{x'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau; \quad (1.4.1)$$

čia $\Gamma(\cdot)$ – gama funkcija; $x(t)$ – tiriama funkcija laiko atžvilgiu; $x'(\tau)$ – klasikinė pirmos eilės išvestinė; $(t-\tau)^{-\alpha}$ – atminties branduolio funkcija, apibūdinanti ankstesnių būsenų įtakos svorį. Ši formulė aiškiai parodo, kad išvestinė yra integralinė išraiška, kurioje dalyvauja visa ankstesnė funkcijos istorija. Integralo branduolys $(t-\tau)^{-\alpha}$ nusako, kaip skirtingi praeities momentai veikia dabartinę būseną – kuo mažesnis α , tuo stipresnis atminties efektas [35].

Šis nelokalumo aspektas yra esminis skirtumas tarp trupmeninių ir klasikinių modelių. Klasikinėse sistemose evoliucija yra lokali laike, t. y. priklauso tik nuo dabartinės būsenos, tuo tarpu trupmeninėse sistemose atsiranda ilgalaikės koreliacijos, kurios gali lemti visiškai kitokią dinaminę elgesį [5]. Dėl

šios prielaidos trupmeninės eilės modeliai tapo itin svarbūs tiriant sudėtingas sistemas, kuriose pasireiškia paveldimumas ar inercija.

Trupmeninės eilės modeliai plačiai taikomi įvairiose srityse. Fizikoje jie naudojami modeliuojant anomalinę difuziją ir energijos nuostolius turinčius procesus, biologijoje – neuronų aktyvumą ir širdies ritmų dinamiką, o inžinerijoje – viskoelastinių (tiek elastingomis, tiek klampiosiomis savybėmis pasižyminčių) medžiagų savybes bei signalų apdorojimą [4], [5]. Šių modelių universalumas kyla iš gebėjimo aprašyti sistemas, kurių dinamika negali būti tiksliai nusakyta klasikinėmis diferencialinėmis lygtimis.

Svarbus aspektas yra tai, kad trupmeninės eilės modeliai natūraliai išplečia ir klasikinius netiesinius modelius. Pavyzdžiui, standartinės dinaminės sistemos gali būti perrašomos trupmenine forma, įvedant Caputo išvestinę vietoje įprastos pirmos eilės išvestinės:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = f(x(t)). \quad (1.4.2)$$

Tokiu būdu gaunamos naujos sistemų klasės, kurių dinamika pasižymi lėtesniais pereinamaisiais procesais, sudėtingesnėmis bifurkacijomis ir išplėstomis stabilumo sritimis. Literatūroje pažymima, kad trupmeninės eilės įvedimas gali iš esmės pakeisti net ir paprastų netiesinių sistemų elgesį, įskaitant chaoso atsiradimo sąlygas ir bifurkacijų struktūrą [5].

Ypač svarbu pažymėti, kad trupmeninės eilės modeliai yra glaudžiai susiję su diskretinėmis sistemomis. Diskretizuojant trupmenines diferencialines lygtis arba tiesiogiai apibrėžiant trupmeninius skirtumus, gaunami trupmeniniai iteraciniai modeliai, kuriuose kiekviena būsena priklauso nuo visų ankstesnių iteracijų. Tokie modeliai tampa natūraliu klasikinių diskrečių sistemų apibendrinimu ir leidžia analizuoti, kaip atmintis veikia dinaminis procesus.

Šiame kontekste ypatingą reikšmę įgauna Caputo apibrėžimas, nes jis leidžia sujungti fizikinę interpretaciją, matematinę formalizmą ir skaitinį realizavimą į vieningą modeliavimo schemą. Dėl šios prielaidos Caputo trupmeninė išvestinė plačiai naudojama netiesinių dinaminė sistemų modeliavime, įskaitant ir diskretinius bei iteracinius modelius.

Šis ryšys tarp klasikinių modelių ir jų išplėtimų tampa ypač svarbus nagrinėjant trupmeninės eilės sistemas. Literatūroje pažymima, kad standartinio iteracinio ir apskritiminio iteracinio modelių trupmeninės versijos, suformuluotos naudojant Caputo [36] arba Liouville tipo [37] išvestines, leidžia tirti naujus dinaminis reiškinius. Kai trupmeninės eilės rodiklis artėja prie vieneto, trupmeninis standartinis iteracinis modelis artėja prie klasikinio apskritiminio iteracinio modelio [38], todėl tampa įmanoma stebėti Arnoldo liežuvių struktūrų formavimąsi ir jų transformacijas [39].

Galiausiai, pereinant prie šio darbo temos, svarbu pabrėžti, kad trupmeninės eilės įvedimas į klasikinius modelius – tokius kaip apskritiminis iteracinis modelis ar standartinis iteracinis modelis – leidžia tirti naujus reiškinius, susijusius su sinchronizacija ir Arnoldo liežuviais. Atminties efektai gali keisti fazinės sinchronizacijos sąlygas, deformuoti Arnoldo liežuvių struktūrą ir sukelti naujus stabilumo režimus. Todėl trupmeninės eilės modeliai sudaro esminę teorinę pagrindą nagrinėjant sudėtingesnes sinchronizacijos struktūras, kurios atsiranda diskretinėse sistemose su atmintimi.

1.5. Trupmeniniai skirtumai diskretinėse sistemose

Nors trupmeninės eilės diferencialinės lygtys yra efektyvi priemonė modeliuoti sistemas su atmintimi, daugelyje praktinių ir teorinių uždavinių svarbų vaidmenį atlieka diskretinės sistemos. Dėl šios priežasties buvo išplėta trupmeninės analizės kryptis, orientuota į diskretinius modelius, kuriuose atminties efektai realizuojami naudojant trupmeninius skirtumus (angl. *fractional differences*). Tokie modeliai leidžia natūraliai sujungti iteracinių modelių teoriją su trupmeninės eilės dinamika [40], [41].

Skirtingai nei klasikiniai diskretiniai modeliai, kuriuose būseną x_{n+1} priklauso tik nuo ankstesnės reikšmės x_n , trupmeniniai diskretiniai modeliai pasižymi nelokalumu laiko atžvilgiu, t. y. kiekviena būseną priklauso nuo visų ankstesnių iteracijų. Bendruoju atveju tokia priklausomybė gali būti užrašoma kaip svorinė suma:

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^n w_k f(x_{n-k}); \quad (1.5.1)$$

čia w_k – svoriai. Paprastai svoriai w_k mažėja pagal galios dėsnį ir yra susiję su trupmeninės eilės parametru. Tokia formulė atspindi ilgalaikės atminties efektą, kai net ir tolimos praeities būsenos daro įtaką dabartinei dinamikai [5].

Vienas iš svarbiausių klasikinių diskrečių modelių išplėtimo būdų yra jų trupmenizavimas (angl. *fractionalization*) [36], [37], [38], [39]. Tokie modeliai leidžia įtraukti ilgalaikės atminties efektus ir iš esmės pakeisti sistemos dinamines savybes, įskaitant bifurkacijų struktūrą ir sinchronizacijos sąlygas.

Vienas iš dažniausiai naudojamų diskrečių trupmeninių operatorių yra Grünwaldo–Letnikovo tipo skirtumas, kuris diskrečiu atveju gali būti interpretuojamas kaip suma su svoriais, apibrėžtais per gama funkciją. Alternatyviai, diskretinės trupmeninės sistemos gali būti gaunamos tiesiogiai diskretizuojant Caputo tipo išvestines, kas leidžia išlaikyti fizikinę interpretaciją ir pradinių sąlygų formuluotę [41].

Šių modelių esmė yra ta, kad sistema atmintyje saugo visą savo evoliuciją. Skirtingai nuo klasikinių iteracinių modelių, kur dinamika yra Markovo tipo (priklauso tik nuo dabartinės būsenos), trupmeniniai diskretiniai modeliai yra ne Markovo tipo, jų trajektorijos gali turėti ilgesnes koreliacijas, lėtesnį pereinamųjų procesų slopinimą ir sudėtingesnę struktūrą [5].

Vienas iš paprasčiausių tokių modelių pavyzdžių yra trupmeninis logistinis žemėlapis, kuris gaunamas įvedus atminties efektą į klasikinę logistinę iteraciją. Net ir nedidelis trupmeninės eilės įvedimas gali iš esmės pakeisti sistemos dinamiką – stabilumo sritys gali išsiplėsti, bifurkacijų seka gali deformuotis, o chaoso atsiradimas gali būti slopinamas arba atidėtas [5], [40].

Dar svarbiau yra tai, kad trupmeniniai skirtumai leidžia išplėsti ne tik paprastus modelius, bet ir sudėtingesnius modelius, tokius kaip apskritiminis iteracinis modelis ar standartinis iteracinis modelis. Tokiu atveju kiekviena iteracija tampa priklausoma nuo visos ankstesnės fazės istorijos, o tai gali reikšmingai pakeisti sinchronizacijos sąlygas. Fazinė sinchronizacija, kuri klasikiniame apskritiminiame iteraciniame modelyje priklauso tik nuo parametrų (Ω, K) , trupmeniniame modelyje

tampa priklausomas ir nuo atminties parametro α , taip įvedant papildomą dimensiją parametru erdvėje.

Tai susiję su tuo, kad atminties efektai keičia efektyvią sistemos dinamiką – dabartinė būseną tampa ne tik funkcija nuo x_n , bet ir nuo visos trajektorijos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Dėl šios priežasties net ir nedidelės praeities būsenų variacijos gali turėti ilgalaikį poveikį sinchronizacijos procesams [5].

Kitas svarbus aspektas yra tas, kad trupmeniniai diskretiniai modeliai dažnai pasižymi lėtu pereinamųjų procesų nykimu. Tai reiškia, kad sistema ilgą laiką gali išlikti pereinamajame režime prieš pasiekdama stacionarią būseną. Tokie efektai nėra būdingi klasikiniams diskretiniams modeliams ir gali turėti didelę reikšmę praktiniuose taikymuose, ypač signalų apdorojime ir biologinėse sistemose [40].

Apibendrinant galima teigti, kad trupmeniniai skirtumai suteikia natūralų būdą išplėsti diskretines netiesines sistemas įtraukiant atminties efektus. Jie leidžia pereiti nuo lokalių iteracinių modelių prie nelokalių dinamikos modelių, kuriuose sistemos elgesys priklauso nuo visos jos evoliucijos istorijos. Šis išplėtimas yra esminis žingsnis nagrinėjant sudėtingesnes sinchronizacijos struktūras, tokias kaip Arnoldo liežuvių deformacijos ir jų hierarchijos.

Būtent šiame kontekste trupmeniniai diskretiniai modeliai sudaro teorinį pagrindą tolimesniam tyrimui, kuriame klasikiniai iteraciniai modeliai išplečiami ne tik įtraukiant atmintį, bet ir pereinant prie daugiamatės bei matricinės dinamikos.

1.6. Matriciniai iteraciniai modeliai ir jų struktūros

Klasikiniai iteraciniai modeliai dažniausiai apibrėžiami skaliarinių arba mažos dimensijos vektorinių kintamųjų erdvėje. Tačiau daugelis realių sistemų pasižymi sudėtingesne struktūra, kurioje keli komponentai sąveikauja tarpusavyje netiesiniu būdu. Dėl šios priežasties buvo pasiūlytas natūralus šių modelių išplėtimas – matriciniai iteraciniai modeliai, kuriuose būsenos kintamasis yra matrica, o sistemos dinamika aprašoma matricinėmis transformacijomis [42].

Bendruoju atveju tokia sistema gali būti užrašoma taip:

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad X_n \in \mathbb{R}^{m \times m}; \quad (1.6.1)$$

čia F – netiesinė funkcija, veikianti matricių erdvėje; X_n – sistemos būseną n -tojoje iteracijoje. Skirtingai nuo skaliarinių modelių, čia dinamika vyksta aukštesnės dimensijos erdvėje, o sistemos elgesys priklauso ne tik nuo atskirų elementų reikšmių, bet ir nuo jų tarpusavio sąveikos struktūros [6].

Naujausi tyrimai parodė, kad matricinių kintamųjų įvedimas leidžia atskleisti iš esmės naujus dinaminis efektus, tokius kaip baigtinio laiko divergavimas ir sprogstamasis nestabilumas [43], [44]. Be to, matriciniai modeliai buvo sėkmingai taikomi praktiniuose uždaviniuose, įskaitant vaizdų slėpimą [45], sinchronizaciją [46] bei sudėtingų raštų formavimąsi [47]. Taip pat nustatyta, kad tokios sistemos gali generuoti naujus reiškinius, pavyzdžiui, diverguojančias spirales bangas Barkley modelyje [7] ir sudėtingą fazinę dinamiką neuroniniuose modeliuose [48].

Vienas iš svarbiausių matricinių modelių aspektų yra tai, kad jų dinamika gali būti analizuojama naudojant matricių algebrą, ypač tikrinių reikšmių ir Jordan formos teoriją. Šios priemonės leidžia išskaidyti sudėtingą matricinę dinamiką į paprastesnius komponentus, kurie gali būti interpretuojami

kaip atskiri „dinaminiai sluoksniai“ [42]. Tokia dekompozicija tampa ypač svarbi nagrinėjant netiesinius iteracinius procesus, kuriuose skirtingi komponentai gali evoliucionuoti skirtingais greičiais ar skirtingais režimais.

Literatūroje akcentuojama, kad matricinių iteracinių modelių įvedimas gali iš esmės pakeisti sistemos dinamiką. Skirtingai nei skaliariniai modeliai, matricinės sistemos gali generuoti naujus reiškinius, tokius kaip baigtinio laiko divergavimas, sprogstamasis nestabilumas ir sudėtingos kolektyvinės dinamikos struktūros.

Tokie efektai atsiranda dėl to, kad matricinė struktūra leidžia egzistuoti ne tik vienam dinaminiam režimui, bet visai jų sistemai, kuri gali būti tarpusavyje susieta. Šis reiškinys yra glaudžiai susijęs su susietų modelių gardelėmis, kuriose daug skaliarinių sistemų sąveikauja tarpusavyje, sukurdamos sudėtingą kolektyvinę dinamiką [14].

Ypatinę reikšmę matricinėse sistemose įgauna specialios matricių klasės, tokios kaip idempotentinės ir nulpotentinės matricos. Idempotentinė matrica P tenkina sąlygą $P^2 = P$, o nulpotentinė matrica N tenkina sąlygą $N^k = 0$ tam tikram $k \in \mathbb{N}$.

Šios struktūros turi esminę įtaką sistemos dinamikai. Idempotentinės matricos leidžia išskaidyti sistemą į nepriklausomas dalis, kurios evoliucionuoja atskirai, tuo tarpu nulpotentinės matricos sukuria hierarchinę priklausomybę tarp komponentų, kur aukštesnio lygmens dinamika priklauso nuo žemesnio lygmens komponentų [42].

Būtent nulpotentinės struktūros yra ypač svarbios nagrinėjant sudėtingus iteracinius procesus. Tokiose sistemose dinamika gali būti išreikšta kaip daugianarė išraiška pagal nulpotentinės matricos laipsnius:

$$X_n = \sum_{j=0}^{k-1} \mu_j^{(n)} N^j; \quad (1.6.2)$$

čia $\mu_j^{(n)}$ – koeficientai, aprašantys skirtingų „sluoksnių“ evoliuciją. Ši reprezentacija leidžia interpretuoti matricinę sistemą kaip kelių tarpusavyje susietų skaliarinių posistemių rinkinį, kur kiekvienas sluoksnis atitinka tam tikrą nulpotentiškumo lygį.

Tokia struktūra natūraliai veda prie sluoksnių sampratos. Skirtingai nei klasikinėse sistemose, kur dinamika aprašoma vienu kintamuoju, matricinėse sistemose atsiranda keli tarpusavyje susiję dinaminiai lygmenys. Kiekvienas iš jų gali turėti skirtingas stabilumo savybes, bifurkacijas ar sinchronizacijos režimus. Šie sluoksniai nėra nepriklausomi – jų sąveika lemia bendrą sistemos elgesį.

Svarbu pažymėti, kad tokia daugiasluoksniė dinamika neturi tiesioginio analogo skaliarinėse sistemose. Net ir paprastos netiesinės funkcijos, taikomos matriciniams kintamiesiems, gali generuoti žymiai sudėtingesnę elgesį nei jų skaliariniai atitikmenys. Tai susiję su tuo, kad matricinė algebra įveda papildomus struktūrinius apribojimus ir sąveikas, kurios keičia dinamikos eigą.

Šis aspektas tampa ypač svarbus analizuojant sinchronizacijos reiškinius. Klasikinėse sistemose Arnoldo liežuviai aprašo vieno kintamojo fazinį sinchronizavimą, tuo tarpu matricinėse sistemose sinchronizacija gali vykti skirtingose modelio struktūrose vienu metu. Tai reiškia, kad vietoje vienos

sinchronizacijos struktūros atsiranda jų sistema, kuri gali būti interpretuojama kaip daugialypė Arnoldo liežuvių struktūra.

Dar svarbiau yra tai, kad skirtingi sluoksniai gali reaguoti skirtingai į parametrų pokyčius. Pavyzdžiui, vienas sluoksnis gali būti stabilus, tuo tarpu kitas – chaotiškas, arba skirtingi sluoksniai gali sinchronizuotis su skirtingais dažnių santykiais. Tokia situacija neturi tiesioginio analogo klasikiniuose skaliariniuose modeliuose, o tai rodo, kad matricinės sistemos atveria galimybę tirti žymiai sudėtingesnius dinامينius reiškinius [43], [44].

Svarbus žingsnis šioje srityje yra matricinių modelių taikymas sinchronizacijos analizei. Nors klasikiniai Arnoldo liežuviai aprašo vienmačio kintamojo fazinį sinchronizavimą, matricinėse sistemose atsiranda galimybė tirti daugiamatę sinchronizaciją, kur skirtingi komponentai gali sinchronizuotis skirtingais režimais. Tai leidžia interpretuoti Arnoldo liežuvius ne kaip vieną struktūrą, bet kaip tarpusavyje susijusių sinchronizacijos regionų sistemą.

Literatūroje ilgą laiką trupmeninė ir matricinė analizė buvo vystomos atskirai. Trupmeniniai modeliai daugiausia buvo taikomi skaliarinėms sistemoms, tuo tarpu matriciniai modeliai dažniausiai nagrinėti be atminties efektų. Tik naujausiuose darbuose pradėta sistemingai nagrinėti šių dviejų krypčių sąveika.

Dvi pagrindinės plėtros kryptys yra susijusios su trupmeninės atminties įvedimu bei matricinės dinamikos įtraukimu. Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis į pradinį modelį įveda ilgalaikės atminties efektus, realizuojamus per trupmeninės eilės išvestines [39], [49]. Tuo tarpu standartinis nulpotentinių matricių iteracinis modelis pakeičia skaliarinį būsenos kintamąjį matricomis, turinčiomis nulpotentinę struktūrą. Tokios sistemos pasižymi iš esmės kitokiu elgesiu, įskaitant baigtinio laiko divergavimą ir sprogstamą nestabilumą bei Arnoldo liežuvių nebuvimą [44].

Šių dviejų krypčių sujungimas sudaro palyginti naują tyrimų sritį, kurioje trupmeninės dinamikos ir nulpotentinės algebros sąveika gali generuoti naujus sinchronizacijos režimus. Pirmieji žingsniai šia kryptimi jau žengti – parodyta, kad Caputo trupmeninis matricinis standartinis iteracinis modelis su nulpotentine struktūra generuoja daugiasluoksnius Arnoldo liežuvius ir jų divergavimo hierarchijas [8]. Tačiau šios struktūros iki šiol išsamiau nenagrinėtos: neaišku, kaip trupmeninės atminties parametras veikia liežuvių plotį ir išsidėstymą, kokia yra hierarchinių sluoksnių tarpusavio priklausomybė ir kaip šios struktūros keičiasi kintant sistemos parametrams. Būtent į tokius klausimus ir siekiama atsakyti šiame darbe.

Apibendrinant galima teigti, kad matriciniai iteraciniai modeliai sudaro natūralų klasikinių diskretinių sistemų išplėtimą, leidžiantį įtraukti struktūrinę sąveiką tarp komponentų. Jie atskleidžia naujus dinامينius efektus, susijusius su sluoksnių atsiradimu, hierarchine priklausomybe ir kolektyvine dinamika. Būtent ši daugiasluoksnė struktūra sudaro pagrindą tolimesniam tyrimui, kuriame analizuojami Arnoldo liežuviai matricinėse ir trupmeninėse sistemose.

2. Duomenys ir tyrimo metodai

2.1. Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis

Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis pateikiamas taip [38], [39]:

$$p^{(k+1)} = p^k - \frac{K}{\Gamma(\alpha-1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k-r+1) \sin x^{(r)} + \sin x^{(k)} \right), \quad (\text{mod } 2\pi); \quad (2.1.1)$$

$$x^{(k+1)} = x^k + p^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k-r+1) \sin x^{(r)} \right), \quad (\text{mod } 2\pi);$$

čia $k = 0, 1, 2, \dots$; K – standartinio iteracinio modelio parametras; α – trupmeniškumo parametras ($1 < \alpha \leq 2$); V_{α}^s – iteraciniai parametrai:

$$V_{\alpha}^s(m) = m^{\alpha-s} - (m-1)^{\alpha-s}; \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.1.2)$$

Pažymėtina, kad suma $\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k-r+1) \sin x^{(r)}$ lygtyje (2.1.3) nevykdoma, kai $k = 0$ ($p^{(1)} = p^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha-1)} \sin x^{(0)}, (\text{mod } 2\pi)$), ir $x^{(0)}$ prilyginamas 0 [38]. Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis yra specialus trupmeninio apibendrinto modelio atvejis [50]. Kai $\alpha = 2$, Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis redukuojasi į netrupmeninį standartinį iteracinį modelį, tačiau kai $\alpha = 1$, jis automatiškai tampa apskritiminiu iteraciniu modeliu [51]. Vis dėlto, kai trupmeniškumo parametras α artėja prie 1, išryškėja aiški Arnoldo liežuvių struktūra [8]. Todėl Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis gali būti laikomas paradigminio apskritiminio iteracinio modelio trupmeniniu analogu [8]. Būtent šis modelis sudaro pagrindą tolimesniam išplėtimui į matricinę formą, toliau nagrinėjamą šiame darbe.

2.2. n -tosios eilės idempotentinės ir nulpotentinės matricos

Prieš išsamiai nagrinėjant trupmeninius matricinius modelius, pirmiausia tikslinga pristatyti specialias $n \times n$ matricių formas.

Idempotentinė struktūra yra svarbi šiame darbe todėl, kad ji leidžia išskaidyti matricinę sistemą į nepriklausomas dalis, kurių kiekviena evoliucionuoja atskirai – tai tiesiogiai atitinka skaliarinio modelio savybes. Tarkime, kad konstruojama kvadratinė matrica \mathbf{X} , kurios visos tikrinės reikšmės yra skirtingos, t. y. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$; $\lambda_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, \dots$). Tokios struktūros matrica gali būti užrašoma kaip idempotentinė matrica [44]:

$$\mathbf{X} = \lambda_1 \mathbf{D}_1 + \lambda_2 \mathbf{D}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{D}_n; \quad (2.2.1)$$

čia \mathbf{D}_j ($j = 1, 2, \dots, n$) – tarpusavyje susieti, komutuojantys, ortogonalūs idempotentai, tenkinantys sąlygą $\sum_{j=1}^n \mathbf{D}_j = \mathbf{I}$. Kiekviena matrica \mathbf{D}_j yra panaši į diagonalinę matricę, turinčią vieną nenulinį elementą $d_{j,j}$, o visi kiti elementai yra lygūs nuliui:

$$\mathbf{D}_j = \mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{j,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det \mathbf{T} \neq 0. \quad (2.2.2)$$

Matricos \mathbf{D}_j tenkina šias savybes:

$$\det \mathbf{D}_j = 0, \quad \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{D}_j = \begin{cases} \mathbf{D}_i, & \text{kai } i = j \\ \mathbf{0}, & \text{kai } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.3)$$

Toliau panagrinėkime nulpotentinę matricą, pasižyminčią priešingomis struktūrinėmis savybėmis. Tarkime, kad konstruojama kvadratinė matrica \mathbf{X} , kurios visos tikrinės reikšmės sutampa, t. y. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda_0$ ($\lambda_0 \in \mathbb{R}$). Tokiu atveju ši matrica gali būti pateikiama nulpotentinės matricos forma [44]:

$$\mathbf{X} = \lambda_j \mathbf{I} + \mu_1 \mathbf{N}_1 + \mu_2 \mathbf{N}_2 + \dots + \mu_{n-1} \mathbf{N}_{n-1}; \quad (2.2.4)$$

čia $\mu_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$). Nulpotentinės matricos \mathbf{N}_j konstruojamos panašumo transformacijos būdu iš vidinės matricos, kurios j -tojoje virš pagrindinės diagonalės esančioje įstrižainėje yra vienetai, o visi kiti elementai yra lygūs nuliui:

$$\mathbf{N}_j = \mathbf{T} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & n_{1,j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n_{2,j+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det \mathbf{T} \neq 0. \quad (2.2.5)$$

Nulpotentinės matricos \mathbf{N}_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) determinantai yra lygūs nuliui, t. y. $\det \mathbf{N}_j = 0$. Nors kiekviena nulpotentinė matrica yra singuliacinė, jų sandaugos atskleidžia svarbius struktūrinius dėsningumus, kurie yra esminiai matricų skaidymui. Nulpotentinių matricų sandaugos pateikiamos 1 lentelėje.

1 lentelė. Nulpotentinių matricų sandaugos taisyklės

\cdot	\mathbf{N}_1	\mathbf{N}_2	\mathbf{N}_3	\mathbf{N}_4	\cdots	\mathbf{N}_{n-2}	\mathbf{N}_{n-1}
\mathbf{N}_1	\mathbf{N}_2	\mathbf{N}_3	\mathbf{N}_4	\mathbf{N}_5	\cdots	\mathbf{N}_{n-1}	$\mathbf{0}$
\mathbf{N}_2	\mathbf{N}_3	\mathbf{N}_4	\mathbf{N}_5	\mathbf{N}_6	\cdots	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
\mathbf{N}_3	\mathbf{N}_4	\mathbf{N}_5	\mathbf{N}_6	\mathbf{N}_7	\cdots	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
\mathbf{N}_4	\mathbf{N}_5	\mathbf{N}_6	\mathbf{N}_7	\mathbf{N}_8	\cdots	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
\mathbf{N}_{n-2}	\mathbf{N}_{n-1}	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	\cdots	\mathbf{N}_{n-1}	$\mathbf{0}$
\mathbf{N}_{n-1}	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	\cdots	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

Iš lentelės matyti, kad sandaugos rezultatas priklauso tik nuo indeksų sumos: jei $i + j$ neviršija $n - 1$, gaunama aukštesnio laipsnio nulpotentinė matrica, o priešingu atveju – nulpinė matrica. Šis dėsningumas gali būti užrašytas bendra nulpotentinių matricų \mathbf{N}_i ir \mathbf{N}_j komutatyvios daugybos taisykle:

$$\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j = \mathbf{N}_j \cdot \mathbf{N}_i = \begin{cases} \mathbf{N}_{i+j}, & \text{jei } i + j \leq n - 1 \\ \mathbf{0}, & \text{jei } i + j \geq n \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.6)$$

Ši taisyklė tiesiogiai veda prie apibendrintos savybės $(\mathbf{N}_j)^{j+1} = \mathbf{0}$.

Pažymėtina, kad kvadratinė n -tosios eilės matrica gali turėti įvairias tikrinių reikšmių konfigūracijas ir dėl to būti išreiškiama ne tik idempotentine forma ((2.2.1) lygtis) arba nulpotentine forma ((2.2.4) lygtis). Pavyzdžiui, ji gali turėti tris skirtingas tikrines reikšmes ir $(n - 3)$ sutampančias tikrines reikšmes. Darbe [44] pasiūlyti pakavimo kodai (angl. *packing codes*) suteikia metodologinį pagrindą $n \times n$ matricių struktūriniais tipams apibūdinti ir jų divergavimo spartai netiesiniuose matriciniuose modeliuose analizuoti. Darbe pakavimo kodai naudojami kaip pagalbinė klasifikavimo priemonė aprašant skirtingų matricių struktūrų įtaką Arnoldo liežuvijų formavimuisi. Paprasčiausias atvejis gaunamas, kai $n = 2$, nes tuomet galimos tik dvi situacijos: tikrinės reikšmės sutampa arba jos yra skirtingos. Šie atvejai, aprašyti darbuose [6], [43], buvo išsamiai nagrinėti įvairiuose modeliuose [7], [45], [52].

2.3. Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis su matriciniais n -tosios eilės kintamaisiais

Iteraciniai skaliariniai kintamieji $x^{(k)}$ ir $p^{(k)}$ lygtyje (2.1.1) gali būti pakeisti kvadratine $n \times n$ matrica:

$$\mathbf{X}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_{11}^{(k)} & \cdots & x_{1n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}^{(k)} & \cdots & x_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (2.3.1)$$

iš iteracinių skaliarinių kintamųjų $x_{11}^{(k)}, x_{12}^{(k)}, \dots, x_{nn}^{(k)} \in \mathbb{R}$, ir

$$\mathbf{P}^{(k)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(k)} & \cdots & p_{1n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^{(k)} & \cdots & p_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad (2.3.2)$$

iš iteracinių skaliarinių kintamųjų $p_{11}^{(k)}, p_{12}^{(k)}, \dots, p_{nn}^{(k)} \in \mathbb{R}$ [44], [47], [39], [52], [48]. Tuomet Caputo trupmeninis matricinis standartinis iteracinis modelis užrašomas taip:

$$\mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{P}^{(k)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha - 1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k - r + 1) \sin \mathbf{X}^{(r)} + \sin \mathbf{X}^{(k)} \right), \quad (\text{mod } 2\pi); \quad (2.3.3)$$

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{P}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k - r + 1) \sin \mathbf{X}^{(r)} \right), \quad (\text{mod } 2\pi);$$

čia $k = 0, 1, 2, \dots$

Pažymėtina, kad matricinis iteracinis modelis išlaiko tą pačią struktūrą kaip ir skaliarinis Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis ((2.3.4) lygtis), tačiau vietoje skaliarinių kintamųjų naudojamos matricinės būsenos $\mathbf{X}^{(k)}$ ir $\mathbf{P}^{(k)}$. Sinusinė funkcija čia taikoma matriciniam argumentui, todėl jos reikšmė priklauso nuo visos matricinės struktūros – tai esminis skirtumas nuo klasikinio atvejo. Toliau nagrinėjami du atvejai: kai pradinių sąlygų matricos yra idempotentinės ir nulpotentinės, nes būtent matricių algebrinė struktūra lemia sistemos dinaminį sudėtingumą.

2.4. Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis su idempotentinėmis matricomis

Pirmiausia nagrinėjamas atvejis, kai matricos yra idempotentinės. Pagrindinis principas yra tai, kad jei matrica išskaidoma į ortogonalinių idempotentų sumą, tuomet analitinės funkcijos veikia kiekvieną komponentą nepriklausomai. Tai atitinka skaliarinę spektrinę teoremą, tačiau remiasi algebriniais idempotentais, o ne ortogonaliomis projekcijomis.

Teiginys 2.4. Tarkime, kad $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ yra tokios formos: $\mathbf{P} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{D}_j$, kur $\{\mathbf{D}_j\}_{j=1}^n$ yra tarpusavyje ortogonalinių konjuguotų idempotentų šeima, o $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Tuomet bet kuriai analitinei funkcijai f galioja:

$$f(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^n f(c_j) \mathbf{D}_j. \quad (2.4.1)$$

Įrodymas. Tegul f yra analitinė funkcija, turinti Teiloro eilutės plėtinį taške c_0 :

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} (z - c_0)^m. \quad (2.4.2)$$

Pritaikę šį plėtinį matricai, gauname:

$$f(\mathbf{P}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} (\mathbf{P} - c_0 \mathbf{I})^m. \quad (2.4.3)$$

Dabar įstatykime plėtinį $\mathbf{P} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{D}_j$. Kadangi $\mathbf{D}_i \mathbf{D}_j = \mathbf{0}$, kai $i \neq j$, pakėlę sumą laipsniu m , gauname:

$$(\mathbf{P} - c_0 \mathbf{I})^m = \sum_{j=1}^n (c_j - c_0)^m \mathbf{D}_j. \quad (2.4.4)$$

Tuomet funkcija $f(\mathbf{P})$ įgauna formą:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{P}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} (\mathbf{P} - c_0 \mathbf{I})^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} ((c_1 \mathbf{D}_1 + \dots + c_n \mathbf{D}_n) - c_0 (\mathbf{D}_1 + \dots + \mathbf{D}_n))^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} ((c_1 - c_0) \mathbf{D}_1 + \dots + (c_n - c_0) \mathbf{D}_n)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} \left(\sum_{j=1}^n (c_j - c_0) \mathbf{D}_j \right)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} \left(\sum_{j=1}^n (c_j - c_0)^m \mathbf{D}_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} (c_j - c_0)^m \right) \mathbf{D}_j = \sum_{j=1}^n f(c_j) \mathbf{D}_j.
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Tai gaunama iš multinominės formulės [53], kad pakėlę matricą $\sum_{j=1}^n (c_j - c_0) \mathbf{D}_j$ laipsniu m , gauname $\sum_{j=1}^n (c_j - c_0)^m \mathbf{D}_j$:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^n (c_j - c_0) \mathbf{D}_j \right)^m &= ((c_1 - c_0) \mathbf{D}_1 + (c_2 - c_0) \mathbf{D}_2 + \dots + (c_n - c_0) \mathbf{D}_n)^m \\
&= \sum_{\substack{m_1 + m_2 + \dots + m_n = m \\ 0 \leq m_1, m_2, \dots, m_n \leq m}} \binom{m}{m_1, m_2, \dots, m_n} ((c_1 - c_0) \mathbf{D}_1)^{m_1} \\
&\quad \cdot ((c_2 - c_0) \mathbf{D}_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot ((c_n - c_0) \mathbf{D}_n)^{m_n} \\
&= \sum_{\substack{m_1 + m_2 + \dots + m_n = m \\ 0 \leq m_1, m_2, \dots, m_n \leq m}} \frac{m!}{m_1! m_2! \dots m_n!} ((c_1 - c_0) \mathbf{D}_1)^{m_1} \cdot ((c_2 - c_0) \mathbf{D}_2)^{m_2} \\
&\quad \cdot \dots \cdot ((c_n - c_0) \mathbf{D}_n)^{m_n} \\
&= \frac{m!}{m! 0! \dots 0!} ((c_1 - c_0) \mathbf{D}_1)^m \cdot ((c_2 - c_0) \mathbf{D}_2)^0 \cdot \dots \cdot ((c_n - c_0) \mathbf{D}_n)^0 \\
&\quad + \frac{m!}{0! m! \dots 0!} ((c_1 - c_0) \mathbf{D}_1)^0 \cdot ((c_2 - c_0) \mathbf{D}_2)^m \cdot \dots \cdot ((c_n - c_0) \mathbf{D}_n)^0 \\
&\quad + \dots + \frac{m!}{0! 0! \dots m!} ((c_1 - c_0) \mathbf{D}_1)^0 \cdot ((c_2 - c_0) \mathbf{D}_2)^0 \cdot \dots \\
&\quad \cdot ((c_n - c_0) \mathbf{D}_n)^m = \sum_{j=1}^n ((c_j - c_0) \mathbf{D}_j)^m = \sum_{j=1}^n (c_j - c_0)^m (\mathbf{D}_j)^m \\
&= \sum_{j=1}^n (c_j - c_0)^m \mathbf{D}_j.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Taip pat iš idempotentinių matricų savybių gauname, kad $\mathbf{D}_i \mathbf{D}_j = \mathbf{0}$, kai $i \neq j$, o $\mathbf{D}_j^2 = \mathbf{D}_j$. Taigi galutinis rezultatas:

$$f(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} (c_j - c_0)^m \right) \mathbf{D}_j = \sum_{j=1}^n f(c_j) \mathbf{D}_j. \quad (2.4.7)$$

Kiekvienas idempotentinis komponentas evoliucionuoja nepriklausomai: funkcija f veikia tik skaliarinius koeficientus c_j , o idempotentų šeima $\{\mathbf{D}_j\}_{j=1}^n$ išlieka nepakitusi. \square

Lema 2.4. Tegul pradinių sąlygų matricos $\mathbf{P}^{(0)}, \mathbf{X}^{(0)}$ yra idempotentinės matricos, išskaidytos ta pačia konjuguotų idempotentų šeima:

$$\mathbf{P}^{(0)} = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,p}^{(0)} \mathbf{D}_j, \quad \mathbf{X}^{(0)} = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,x}^{(0)} \mathbf{D}_j. \quad (2.4.8)$$

Tarkime, kad skaliarai $\lambda_{j,p}^{(0)} \neq \lambda_{l,p}^{(0)}$ ir $\lambda_{j,x}^{(0)} \neq \lambda_{l,x}^{(0)}$, kai $j \neq l$, bei $\lambda_{j,p}^{(0)}, \lambda_{j,x}^{(0)} \in \mathbb{R}$. Tuomet iteracinės matricos $\mathbf{P}^{(k+1)}, \mathbf{X}^{(k+1)}$, kai $k = 0, 1, 2, \dots$ Caputo trupmeniniame standartiniame matriciniame iteraciniame modelyje, aprašytame formule, išlieka idempotentinėmis matricomis su ta pačia tarpusavyje susietų idempotentų šeima $\{\mathbf{D}_j\}$, o jų iteraciniai atnaujinimai komponentiškai yra:

$$\mathbf{P}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,p}^{(k+1)} \mathbf{D}_j, \quad \mathbf{X}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,x}^{(k+1)} \mathbf{D}_j; \quad (2.4.9)$$

kur:

$$\lambda_{j,p}^{(k+1)} = \lambda_{j,p}^{(k)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha - 1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k - r + 1) \sin(\lambda_{j,x}^{(r)}) + \sin(\lambda_{j,x}^{(k)}) \right); \quad (2.4.10)$$

$$\lambda_{j,x}^{(k+1)} = \lambda_{j,x}^{(k)} + \lambda_{j,p}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k - r + 1) \sin(\lambda_{j,x}^{(r)}) \right);$$

čia $j = 1, 2, \dots, n$.

Įrodymas. Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis idempotentinėms matricoms $\mathbf{P}^{(k)}$ ir $\mathbf{X}^{(k)}$ įgyja tokią formą:

$$\mathbf{P}^{(k+1)} = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,p}^{(k)} \mathbf{D}_j \right) - \frac{K}{\Gamma(\alpha - 1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k - r + 1) \sin \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,x}^{(r)} \mathbf{D}_j \right) + \sin \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,x}^{(k)} \mathbf{D}_j \right) \right). \quad (2.4.11)$$

Remiantis gauta formule, matricos lygtis įgauna tokią formą:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(k+1)} = & \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,p}^{(k)} \mathbf{D}_j \right) \\ & - \frac{K}{\Gamma(\alpha - 1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k - r + 1) \left(\sum_{j=1}^n \sin(\lambda_{j,x}^{(r)}) \mathbf{D}_j \right) \right. \\ & \left. + \left(\sum_{j=1}^n \sin(\lambda_{j,x}^{(k)}) \mathbf{D}_j \right) \right). \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Pergrupavę sumas lygties išraiškoje, gauname idempotentinės matricos $\mathbf{P}^{(k+1)}$ išraišką:

$$\mathbf{P}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,p}^{(k+1)} \mathbf{D}_j; \quad (2.4.13)$$

kur:

$$\lambda_{j,p}^{(k+1)} = \lambda_{j,p}^{(k)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha - 1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k - r + 1) \sin(\lambda_{j,x}^{(r)}) + \sin(\lambda_{j,x}^{(k)}) \right). \quad (2.4.14)$$

Matricos $\mathbf{X}^{(k+1)}$ išraišką, gauname analogiškai, pakeitę idempotentinės matricos skaidymo išraiškas:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,x}^{(k)} \mathbf{D}_j \right) + \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,p}^{(0)} \mathbf{D}_j \right) - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k - r + 1) \sin \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,x}^{(r)} \mathbf{D}_j \right). \quad (2.4.15)$$

Remiantis išvesta formule, matricos lygtis įgauna tokią formą:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(k+1)} = & \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,x}^{(k)} \mathbf{D}_j \right) + \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,p}^{(0)} \mathbf{D}_j \right) \\ & - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k - r + 1) \left(\sum_{j=1}^n \sin(\lambda_{j,x}^{(r)}) \mathbf{D}_j \right) \right). \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Pergrupavę sumas lygties išraiškoje, gauname idempotentinės matricos $\mathbf{X}^{(k+1)}$ išraišką:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,x}^{(k+1)} \mathbf{D}_j; \quad (2.4.17)$$

kur

$$\lambda_{j,x}^{(k+1)} = \lambda_{j,x}^{(k)} + \lambda_{j,p}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k - r + 1) \sin(\lambda_{j,x}^{(r)}) \right). \quad (2.4.18)$$

Taigi iš Lemos 2.4. išplaukia svarbi praktinė išvada: n –mačių idempotentinių matricų Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis suskyla į $2n$ skaliarinių tikrinių reikšmių modelių, kurie atitinka n tarpusavyje nesusietų skaliarinių Caputo trupmeninių standartinių iteracinių modelių:

$$\lambda_{j,p}^{(k+1)} = \lambda_{j,p}^{(k)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha - 1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_\alpha^2 (k - r + 1) \sin(\lambda_{j,x}^{(r)}) + \sin(\lambda_{j,x}^{(k)}) \right), \quad (\text{mod } 2\pi);$$

$$\lambda_{j,x}^{(k+1)} = \lambda_{j,x}^{(k)} + \lambda_{j,p}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_\alpha^1 (k - r + 1) \sin(\lambda_{j,x}^{(r)}) \right), \quad (\text{mod } 2\pi);$$
(2.4.19)

čia $k = 0, 1, \dots; j = 1, 2, \dots, n$.

Kitaip tariant, idempotentinių matricų Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis pasižymi tokiu pačiu sudėtingumo lygiu kaip ir jo skaliarinis atitikmuo. Tai reiškia, kad idempotentinė struktūra nesukuria naujos hierarchinės dinamikos – ji tik atkartoja skaliarinę elgesį keliuose nepriklausomuose lygiuose. Priešingas rezultatas stebimas nulpotentinių matricų atveju, kuris nagrinėjamas kitame skyrelyje.

2.5. Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis su nulpotentinėmis matricomis

Priešingai nei idempotentinės matricos, nulpotentinės matricos (išskyrus trivialų nulio atvejį) nėra diagonalizuojamos, nulpotentinės matricos sąveikauja per algebrinę daugybą. Tokių matricų analitines funkcijas galima nagrinėti pasitelkiant Teiloro eilutės plėtinius, o nulpotentinių matricų sandaugos susijungia į aukštesnės eilės nulpotentines matricas, kurios galiausiai išnyksta.

Teiginys 2.5. Tegul $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ yra apibrėžta taip:

$$\mathbf{P} = c_0 \mathbf{I} + c_1 \mathbf{N}_1 + c_2 \mathbf{N}_2 + \dots + c_{n-1} \mathbf{N}_{n-1} = c_0 \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \mathbf{N}_j;$$
(2.5.1)

čia $c_0, c_j \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0$. Kiekviena \mathbf{N}_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) yra nulpotentinė matrica, kurios nulpotentiškumo indeksas lygus $j+1$, ir $\mathbf{N}_j \cdot \mathbf{N}_l = \mathbf{N}_{j+l}$, jei $j+l \leq n-1$, priešingu atveju $\mathbf{N}_j \cdot \mathbf{N}_l = \mathbf{0}$ ($j, l = 1, 2, \dots, n-1$). Jei f yra analitinė funkcija, tai:

$$f(\mathbf{P}) = f(c_0) \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{m=1}^j \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_m} \right) \mathbf{N}_j;$$
(2.5.2)

čia $f^{(m)}(c_0)$ – funkcijos f m –toji išvestinė, apskaičiuota taške c_0 .

Įrodymas. Tegul f yra analitinė funkcija, turinti Teiloro eilutės plėtinį taške c_0 :

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} (z - c_0)^m.$$
(2.5.3)

Kadangi $\mathbf{P} - c_0\mathbf{I} = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \mathbf{N}_j$ ir $(\sum_{j=1}^{n-1} c_j \mathbf{N}_j)^m = \mathbf{0}$, $m \geq n$; pritaikę šią plėtinį matriciai, gauname:

$$f(\mathbf{P}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} (\mathbf{P} - c_0\mathbf{I})^m = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} (\mathbf{P} - c_0\mathbf{I})^m. \quad (2.5.4)$$

Formulę galima perrašyti taip:

$$f(\mathbf{P}) = f(c_0)\mathbf{I} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} \left(\sum_{j=1}^{n-1} c_j \mathbf{N}_j \right)^m. \quad (2.5.5)$$

Iš multinominės formulės [53] ir iš nulpotentinių matricių savybių $\mathbf{N}_i \mathbf{N}_j = \mathbf{N}_{i+j}$, galutinis rezultatas:

$$f(\mathbf{P}) = f(c_0)\mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{m=1}^j \frac{f^{(m)}(c_0)}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_m} \right) \mathbf{N}_j. \quad (2.5.6)$$

Skirtingai nei idempotentinių matricių atveju, matricių tarpusavio sandaugos nesusiprastina, vietoj to žemesnės eilės nulpotentinių matricių daugyba generuoja aukštesnės eilės matricas, taip suformuojant hierarchinę struktūrą tarp koeficientų.

□

Pavyzdys 2.5. Tarkime, kad f yra sinuso funkcija, o matricos eilė yra $n = 4$. Tegul $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ apibrėžta taip:

$$\mathbf{P} = c_0\mathbf{I} + \sum_{j=1}^3 c_j \mathbf{N}_j; \quad (2.5.7)$$

čia $c_0, c_j \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0$. Kiekviena $\mathbf{N}_j \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ($j = 1, 2, 3$) yra nulpotentinė matrica, kurios nulpotentiškumo indeksas lygus $j + 1$. Tuomet pagal išvestą formulę, gauname:

$$\sin(\mathbf{P}) = \sin(c_0)\mathbf{I} + \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{m=1}^j \frac{\sin\left(c_0 + \frac{m\pi}{2}\right)}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_m} \right) \mathbf{N}_j. \quad (2.5.8)$$

Kiekviena vidinė suma surenka visus elementus iš c_j , kurių indeksų suma lygi j . Toliau apskaičiuokime kiekvienos vidinės sumos reikšmę atskirai pagal j reikšmes.

Kai $j = 1$, tada $m = 1$ ir suma lygi:

$$\sum_{m=1}^1 \frac{\sin\left(c_0 + \frac{m\pi}{2}\right)}{m!} \sum_{i_1=1}^1 c_{i_1} = \frac{\sin\left(c_0 + \frac{1 \cdot \pi}{2}\right)}{1!} \cdot c_1 = c_1 \cos(c_0). \quad (2.5.9)$$

Kai $j = 2$, tada $m = 1, 2$ ir suma lygi:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^2 \frac{\sin\left(c_0 + \frac{m\pi}{2}\right)}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2=2 \\ i_1, i_2 \geq 1}} c_{i_1} c_{i_2} &= \frac{\sin\left(c_0 + \frac{\pi}{2}\right)}{1!} \cdot c_2 + \frac{\sin\left(c_0 + \frac{2 \cdot \pi}{2}\right)}{2!} \cdot c_1 \cdot c_1 \\ &= c_2 \cos(c_0) - \frac{(c_1)^2 \sin(c_0)}{2}. \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Kai $j = 3$, tada $m = 1, 2, 3$ ir suma lygi:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 \frac{\sin\left(c_0 + \frac{m\pi}{2}\right)}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=3 \\ i_1, i_2, i_3 \geq 1}} c_{i_1} c_{i_2} c_{i_3} &= \frac{\sin\left(c_0 + \frac{\pi}{2}\right)}{1!} \cdot c_3 + \frac{\sin\left(c_0 + \frac{2 \cdot \pi}{2}\right)}{2!} \cdot (c_1 \cdot c_2 + c_2 \cdot c_1) \\ &+ \frac{\sin\left(c_0 + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right)}{3!} \cdot c_1 \cdot c_1 \cdot c_1 \\ &= c_3 \cos(c_0) - c_1 c_2 \sin(c_0) - \frac{(c_1)^3 \cos(c_0)}{6}. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Gauname, kad $\sin(\mathbf{P})$ turi nulpotentinės matricos formą su tais pačiais nulpotentais $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$:

$$\begin{aligned} \sin(\mathbf{P}) &= \sin(c_0) \mathbf{I} + c_1 \cos(c_0) \mathbf{N}_1 + \left(c_2 \cos(c_0) - \frac{(c_1)^2 \sin(c_0)}{2} \right) \mathbf{N}_2 \\ &+ \left(c_3 \cos(c_0) - c_1 c_2 \sin(c_0) - \frac{(c_1)^3 \cos(c_0)}{6} \right) \mathbf{N}_3. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Kiekvieno nulpotento koeficientas jau nebėra nepriklausomas: \mathbf{N}_2 priklauso nuo c_1 , o \mathbf{N}_3 priklauso ir nuo c_1 , ir nuo c_2 . Šis susietumas parodo turtingesnę nulpotentų algebrinę struktūrą ir yra esminis skirtumas nuo idempotentinio atvejo – būtent ši hierarchinė priklausomybė tarp koeficientų lemia naujas dinamines savybes, kurios nagrinėjamos šiame darbe.

Lema 2.5. *Tegul pradinųjų sąlygų matricos $\mathbf{P}^{(0)}$ ir $\mathbf{X}^{(0)}$ turi tuos pačius nulpotentus:*

$$\mathbf{P}^{(0)} = \lambda_{0,p}^{(0)} \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_{j,p}^{(0)} \mathbf{N}_j, \quad \mathbf{X}^{(0)} = \lambda_{0,x}^{(0)} \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_{j,x}^{(0)} \mathbf{N}_j. \quad (2.5.13)$$

Tuomet iteracinės matricos $\mathbf{P}^{(k+1)}$ ir $\mathbf{X}^{(k+1)}$ Caputo trupmeninės eilės standartiniam iteraciniam modelyje taip pat išlieka nulpotentinės matricos su tais pačiais nulpotentais:

$$\mathbf{P}^{(k+1)} = \lambda_{0,p}^{(k+1)} \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_{j,p}^{(k+1)} \mathbf{N}_j, \quad \mathbf{X}^{(k+1)} = \lambda_{0,x}^{(k+1)} \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_{j,x}^{(k+1)} \mathbf{N}_j; \quad (2.5.14)$$

kur:

$$\lambda_{0,p}^{(k+1)} = \lambda_{0,p}^{(k)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha - 1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k - r + 1) \sin(\lambda_{0,x}^{(r)}) + \sin(\lambda_{0,x}^{(k)}) \right), \quad (\text{mod } 2\pi);$$

$$\begin{aligned} \mu_{j,p}^{(k+1)} = & \mu_{j,p}^{(k)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha - 1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k - r \right. \\ & + 1) \left(\sum_{m=1}^j \frac{\sin(\lambda_{0,x}^{(r)} + \frac{m\pi}{2})}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} \mu_{i_1,x}^{(r)} \mu_{i_2,x}^{(r)} \dots \mu_{i_m,x}^{(r)} \right) \\ & \left. + \sum_{m=1}^j \frac{\sin(\lambda_{0,x}^{(k)} + \frac{m\pi}{2})}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} \mu_{i_1,x}^{(k)} \mu_{i_2,x}^{(k)} \dots \mu_{i_m,x}^{(k)} \right); \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

$$\lambda_{0,x}^{(k+1)} = \lambda_{0,x}^{(k)} + \lambda_{0,p}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k - r + 1) \sin(\lambda_{0,x}^{(r)}) \right), \quad (\text{mod } 2\pi);$$

$$\begin{aligned} \mu_{j,x}^{(k+1)} = & \mu_{j,x}^{(k)} + \mu_{j,p}^{(0)} \\ & - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k - r \right. \\ & \left. + 1) \left(\sum_{m=1}^j \frac{\sin(\lambda_{0,x}^{(r)} + \frac{m\pi}{2})}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} \mu_{i_1,x}^{(r)} \mu_{i_2,x}^{(r)} \dots \mu_{i_m,x}^{(r)} \right) \right); \end{aligned}$$

Įrodymas. Matrica:

$$\mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{P}^{(k)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha - 1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k - r + 1) \sin(\mathbf{X}^{(r)}) + \sin(\mathbf{X}^{(k)}) \right) \quad (2.5.16)$$

gali būti užrašyta atitinkamų nulpotentinių matricių kombinacijomis.

Pirmoji matrica iš pradinių sąlygų apibrėžimo gaunama taip:

$$\mathbf{P}^{(k)} = \lambda_{0,p}^{(k)} \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_{j,p}^{(k)} \mathbf{N}_j. \quad (2.5.17)$$

Antroji matrica išskaidoma į vienetinės matricos narį ir nulpotentinių matricių narius, naudojant anksčiau gautą sinuso funkcijos išraišką nulpotentinei matriciai:

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k-r+1) \sin(\mathbf{X}^{(r)}) \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k-r+1) \left(\sin(\lambda_{0,x}^{(r)}) \mathbf{I} \right. \\
&+ \left. \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{m=1}^j \frac{\sin\left(\lambda_{0,x}^{(r)} + \frac{m\pi}{2}\right)}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} \mu_{i_1,x}^{(r)} \mu_{i_2,x}^{(r)} \dots \mu_{i_m,x}^{(r)} \right) \mathbf{N}_j \right) \\
&= \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k-r+1) \sin(\lambda_{0,x}^{(r)}) \right) \mathbf{I} \\
&+ \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k-r \right. \\
&+ 1) \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{m=1}^j \frac{\sin\left(\lambda_{0,x}^{(r)} + \frac{m\pi}{2}\right)}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} \mu_{i_1,x}^{(r)} \mu_{i_2,x}^{(r)} \dots \mu_{i_m,x}^{(r)} \right) \mathbf{N}_j \right) \\
&= \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k-r+1) \sin(\lambda_{0,x}^{(r)}) \right) \mathbf{I} \\
&+ \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_{\alpha}^2 (k-r \right. \\
&+ 1) \left. \left(\sum_{m=1}^j \frac{\sin\left(\lambda_{0,x}^{(r)} + \frac{m\pi}{2}\right)}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} \mu_{i_1,x}^{(r)} \mu_{i_2,x}^{(r)} \dots \mu_{i_m,x}^{(r)} \right) \right) \mathbf{N}_j.
\end{aligned} \tag{2.5.18}$$

Trečioji matrica taip pat gali būti užrašyta kaip vienetinės matricos ir nulpotentinių matricių kombinacija:

$$\sin(\mathbf{X}^{(k)}) = \sin(\lambda_{0,x}^{(k)}) \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{m=1}^j \frac{\sin(\lambda_{0,x}^{(k)} + \frac{m\pi}{2})}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} \mu_{i_1,x}^{(k)} \mu_{i_2,x}^{(k)} \dots \mu_{i_m,x}^{(k)} \right) \mathbf{N}_j. \quad (2.5.19)$$

Taigi matrica $\mathbf{P}^{(k+1)}$ išlieka nulpotentinė, o jos koeficientai tenkina atitinkamas rekursines lygtis:

$$\begin{aligned} \lambda_{0,p}^{(k+1)} &= \lambda_{0,p}^{(k)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha-1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_\alpha^2 (k-r+1) \sin(\lambda_{0,x}^{(r)}) + \sin(\lambda_{0,x}^{(k)}) \right), \quad (\text{mod } 2\pi); \\ \mu_{j,p}^{(k+1)} &= \mu_{j,p}^{(k)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha-1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_\alpha^2 (k-r+1) \right. \\ &\quad \left. + 1 \right) \left(\sum_{m=1}^j \frac{\sin(\lambda_{0,x}^{(r)} + \frac{m\pi}{2})}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} \mu_{i_1,x}^{(r)} \mu_{i_2,x}^{(r)} \dots \mu_{i_m,x}^{(r)} \right) \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^j \frac{\sin(\lambda_{0,x}^{(k)} + \frac{m\pi}{2})}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} \mu_{i_1,x}^{(k)} \mu_{i_2,x}^{(k)} \dots \mu_{i_m,x}^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

Analogiškai gaunama ir matricos išraiška:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{P}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_\alpha^1 (k-r+1) \sin(\mathbf{X}^{(r)}) \right). \quad (2.5.21)$$

Matrica $\mathbf{X}^{(k+1)}$ išskaidoma analogiškai, naudojant tą pačią nulpotentinių matricų skaidymo procedūrą. Pirmoji matrica:

$$\mathbf{X}^{(k)} = \lambda_{0,x}^{(k)} \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_{j,x}^{(k)} \mathbf{N}_j. \quad (2.5.22)$$

Antroji matrica:

$$\mathbf{P}^{(0)} = \lambda_{0,p}^{(0)} \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_{j,p}^{(0)} \mathbf{N}_j. \quad (2.5.23)$$

Trečioji matrica:

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k-r+1) \sin(\mathbf{X}^{(r)}) \\
&= \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k-r+1) \sin(\lambda_{0,x}^{(r)}) \right) \mathbf{I} \\
&+ \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k-r \right. \\
&+ 1) \left(\sum_{m=1}^j \frac{\sin(\lambda_{0,x}^{(r)} + \frac{m\pi}{2})}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} \mu_{i_1,x}^{(r)} \mu_{i_2,x}^{(r)} \dots \mu_{i_m,x}^{(r)} \right) \right) \mathbf{N}_j.
\end{aligned} \tag{2.5.24}$$

Taigi matrica $\mathbf{X}^{(k+1)}$ taip pat išlieka nulpotentinė su tais pačiais nulpotentais, išlaikant tą pačią algebrinę struktūrą:

$$\begin{aligned}
\lambda_{0,x}^{(k+1)} &= \lambda_{0,x}^{(k)} + \lambda_{0,p}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k-r+1) \sin(\lambda_{0,x}^{(r)}) \right), \quad (\text{mod } 2\pi); \\
\mu_{j,x}^{(k+1)} &= \mu_{j,x}^{(k)} + \mu_{j,p}^{(0)} \\
&- \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k-r \right. \\
&+ 1) \left(\sum_{m=1}^j \frac{\sin(\lambda_{0,x}^{(r)} + \frac{m\pi}{2})}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} \mu_{i_1,x}^{(r)} \mu_{i_2,x}^{(r)} \dots \mu_{i_m,x}^{(r)} \right) \right).
\end{aligned} \tag{2.5.25}$$

Skirtingai nei idempotentų atveju, koeficientai yra susieti per aukštesnės eilės narius, todėl dinamika tampa turtingesnė ir labiau susipynusi. Ši hierarchinė koeficientų struktūra yra esminis pagrindas tolimesniam skaitiniam tyrimui, kuriame analizuojamas Arnoldo liežuvių formavimasis ir jų struktūriniai ryšiai nulpotentinių matricių atveju.

□

2.6. Caputo standartinis trupmeninis iteracinis modelis su 4–tosios eilės nulpotentinėmis matricomis

Ankstesniame skyrelyje išvestos bendrosios nulpotentinių matricių iteracinių modelių formulės. Siekiant iliustruoti konkrečią skaičiavimo schemą ir perteikti hierarchinės struktūros susidarymo mechanizmą, toliau nagrinėjamas atskiras atvejis – Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis

su 4–tosios eilės nulpotentinėmis matricomis. Šiame poskyryje išvedamos atitinkamos skaičiavimo formulės, skirtos $\mathbf{P}^{(k+1)}$ ir $\mathbf{X}^{(k+1)}$ tikrinėms reikšmėms bei pagalbiniais parametrams.

Tegul matricos $\mathbf{P}^{(0)}, \mathbf{X}^{(0)} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ yra apibrėžtos taip:

$$\mathbf{P}^{(0)} = \lambda_{0,p}^{(0)} \mathbf{I} + \sum_{j=1}^3 \mu_{j,p}^{(0)} \mathbf{N}_j, \quad \mathbf{X}^{(0)} = \lambda_{0,x}^{(0)} \mathbf{I} + \sum_{j=1}^3 \mu_{j,x}^{(0)} \mathbf{N}_j; \quad (2.6.1)$$

čia $\lambda_{0,p}^{(0)}, \lambda_{0,x}^{(0)} \in \mathbb{R}; \mu_{j,p}^{(0)}, \mu_{j,x}^{(0)} \in \mathbb{R}; \mu_{1,p}^{(0)}, \mu_{1,x}^{(0)} \neq 0$. Tada:

$$\mathbf{P}^{(k+1)} = \lambda_{0,p}^{(k+1)} \mathbf{I} + \mu_{1,p}^{(k+1)} \mathbf{N}_1 + \mu_{2,p}^{(k+1)} \mathbf{N}_2 + \mu_{3,p}^{(k+1)} \mathbf{N}_3; \quad (2.6.2)$$

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \lambda_{0,x}^{(k+1)} \mathbf{I} + \mu_{1,x}^{(k+1)} \mathbf{N}_1 + \mu_{2,x}^{(k+1)} \mathbf{N}_2 + \mu_{3,x}^{(k+1)} \mathbf{N}_3;$$

kur:

$$\lambda_{0,p}^{(k+1)} = \lambda_{0,p}^{(k)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha - 1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_\alpha^2 (k - r + 1) \sin(\lambda_{0,x}^{(r)}) + \sin(\lambda_{0,x}^{(k)}) \right), \quad (\text{mod } 2\pi);$$

$$\mu_{1,p}^{(k+1)} = \mu_{1,p}^{(k)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha - 1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_\alpha^2 (k - r + 1) \mu_{1,x}^{(r)} \cos(\lambda_{0,x}^{(r)}) + \mu_{1,x}^{(k)} \cos(\lambda_{0,x}^{(k)}) \right);$$

$$\begin{aligned} \mu_{2,p}^{(k+1)} = \mu_{2,p}^{(k)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha - 1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_\alpha^2 (k - r + 1) \left(\mu_{2,x}^{(r)} \cos(\lambda_{0,x}^{(r)}) - \frac{(\mu_{1,x}^{(r)})^2 \sin(\lambda_{0,x}^{(r)})}{2} \right) \right. \\ \left. + \mu_{2,x}^{(k)} \cos(\lambda_{0,x}^{(k)}) - \frac{(\mu_{1,x}^{(k)})^2 \sin(\lambda_{0,x}^{(k)})}{2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{3,p}^{(k+1)} = \mu_{3,p}^{(k)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha - 1)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} V_\alpha^2 (k - r + 1) \left(\mu_{3,x}^{(r)} \cos(\lambda_{0,x}^{(r)}) - \mu_{1,x}^{(r)} \cdot \mu_{2,x}^{(r)} \sin(\lambda_{0,x}^{(r)}) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(\mu_{1,x}^{(r)})^3 \cos(\lambda_{0,x}^{(r)})}{6} \right) + \mu_{3,x}^{(k)} \cos(\lambda_{0,x}^{(k)}) - \mu_{1,x}^{(k)} \cdot \mu_{2,x}^{(k)} \sin(\lambda_{0,x}^{(k)}) \right. \\ \left. - \frac{(\mu_{1,x}^{(k)})^3 \cos(\lambda_{0,x}^{(k)})}{6} \right); \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

$$\lambda_{0,x}^{(k+1)} = \lambda_{0,x}^{(k)} + \lambda_{0,p}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_\alpha^1 (k - r + 1) \sin(\lambda_{0,x}^{(r)}) \right), \quad (\text{mod } 2\pi);$$

$$\mu_{1,x}^{(k+1)} = \mu_{1,x}^{(k)} + \mu_{1,p}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_\alpha^1 (k - r + 1) \mu_{1,x}^{(r)} \cos(\lambda_{0,x}^{(r)}) \right);$$

$$\mu_{2,x}^{(k+1)} = \mu_{2,x}^{(k)} + \mu_{2,p}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k-r+1) \left(\mu_{2,x}^{(r)} \cos(\lambda_{0,x}^{(r)}) - \frac{(\mu_{1,x}^{(r)})^2 \sin(\lambda_{0,x}^{(r)})}{2} \right) \right);$$

$$\mu_{3,x}^{(k+1)} = \mu_{3,x}^{(k)} + \mu_{3,p}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k-r+1) \left(\mu_{3,x}^{(r)} \cos(\lambda_{0,x}^{(r)}) - \mu_{1,x}^{(r)} \cdot \mu_{2,x}^{(r)} \sin(\lambda_{0,x}^{(r)}) - \frac{(\mu_{1,x}^{(r)})^3 \cos(\lambda_{0,x}^{(r)})}{6} \right) \right);$$

čia $k = 0, 1, \dots$

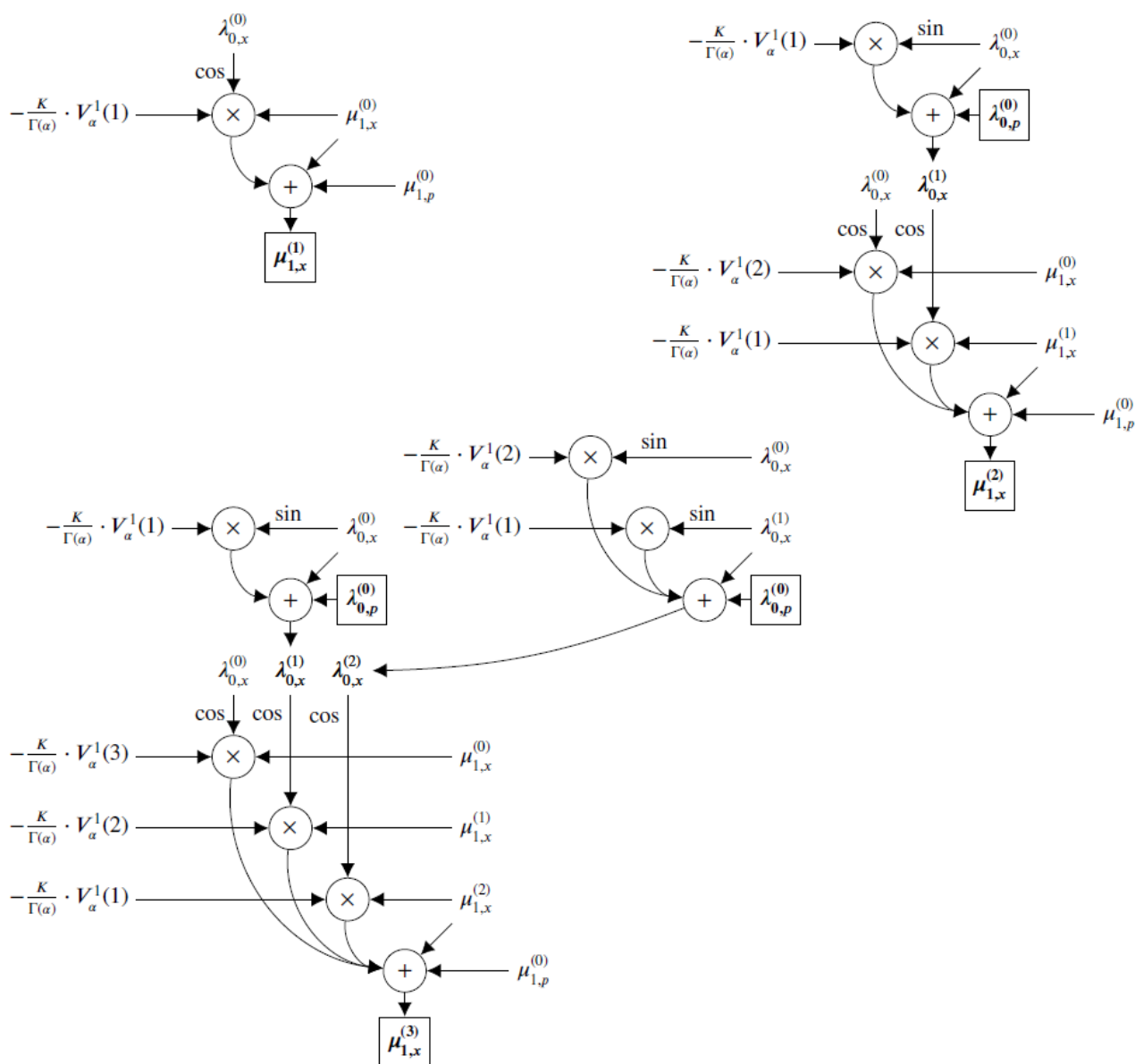
Išvestos 4–tosios eilės nulpotentinių matricių skaičiavimo formulės sudaro konkretų skaitinį pagrindą modelio realizavimui.

2.7. Schema pagalbinių parametro reikšmių skaičiavimui

Kaip aptarta darbe [8], Arnoldo liežuvijų struktūros Caputo trupmeninės eilės standartiniame iteraciniame modelyje yra konstruojamos iš pagalbinių parametro $\mu_{1,x}^{(k)}$ iteracinių sekų. Ketvirtos eilės nulpotentinės matricos generuoja tris pagalbinių parametrų hierarchijas: $\mu_{1,x}^{(k+1)}, \mu_{2,x}^{(k+1)}, \mu_{3,x}^{(k+1)}$ ((2.6.3) lygtis).

1 pav. pateikta diagrama, iliustruojanti pagalbinių parametro $\mu_{1,x}^{(k+1)}$ ($k = 0, 1, 2$) iteracinį konstravimą Caputo trupmeninės eilės standartiniame nulpotentinių matricių iteraciniame modelyje. Diagramoje aiškiai pavaizduotas tik parametro $\mu_{1,x}^{(k+1)}$ konstravimas. Skaičiavimo schemos parametrus $\mu_{2,x}^{(k+1)}, \mu_{3,x}^{(k+1)}$ yra analogiškos, tačiau jose atsiranda papildomi aukštesnės eilės nulpotentiniai sąryšiai, todėl šiame darbe detalios schemos nėra pateikiamos.

Diagrama vaizduoja pirmuosius tris rekursinius žingsnius, kuriuose kosinuso funkcija modifikuotos sandaugos ir sumavimo operacijos generuoja komponentes $\mu_{1,x}^{(k+1)}, \mu_{2,x}^{(k+1)}, \mu_{3,x}^{(k+1)}$. Kiekviename aukštesnės eilės lygmenyje įtraukiami visų ankstesnių lygmenų rezultatai.



1 pav. Schema, iliustruojanti pagalbinio parametro iteracinį konstravimą Caputo trupmeninės eilės standartiniame nulpotentinių matricių iteraciniame modelyje

1 pav. pavaizduoti pirmieji trys iteracinio proceso žingsniai, atskleidžiant algebrinę struktūrą, kurią sudaro nulpotentinių matricių sistema. Kiekvienas blokas atitinka elementarią aritmetinę operaciją. Apskritimai su daugybos ženklu \times žymi daugybos operacijas, susijusias su kosinuso nariais $\cos(\lambda_{0,x}^{(k)})$, o apskritimai su sudėties ženklu $+$ žymi žemesnės eilės komponentių sumavimą. Kryptinės rodyklės nurodo skaičiavimų eigą tarp nuoseklių žingsnių.

Pirmajame lygmenyje komponentė $\mu_{1,x}^{(1)}$ gaunama dauginant bazinę tikrinę reikšmę iš atitinkamo kosinuso nario ir pridėdant pradinę p komponentės reikšmę. Šis žingsnis aprašo pradinį x komponentės kitimą ir nusako netiesinį poveikį, būdingą trupmeninės eilės standartiniame iteraciniame modeliui.

Antrajame lygmenyje $\mu_{1,x}^{(2)}$ konstravimas tampa sudėtingesnis. Atsiranda dvi daugybos šakos, kurių rezultatai sudedami. Šiame etape atsiranda nulpotentinė struktūra: aukštesnės eilės komponentės

priklauso tiek nuo naujai gautų kosinuso narių, tiek nuo ankstesnio lygmens rezultatų. Taigi komponentės $\mu_{1,x}^{(k+1)}$ formuojamos ne atskirai, bet nuosekliai remiantis ankstesniais rezultatais.

Trečiajame lygmenyje hierarchinė struktūra tampa dar ryškesnė. Atsiranda trys daugybės šakos, įtraukiami visų ankstesnių lygmenų rezultatai, o gautos reikšmės sudedamos. Tai parodo, kad kiekviena aukštesnės eilės komponentė priklauso nuo visų žemesnių lygmenų rezultatų.

Skaičiavimo diagrama, pateikta 1 pav., aiškiai iliustruoja trupmeninės atminties poveikį, kuris apima visą proceso istoriją nuo pradinių sąlygų. Nariai $V_\alpha^s(k-j+1)$ šį atminties poveikį išreiškia tiesiogiai. Jie atsiranda iš diskrečiojo Caputo operatoriaus ir pasižymi nelokalia struktūra: kiekviena reikšmė gaunama kaip svertinė ankstesnių būsenų suma, o svoriai priklauso nuo trupmeninės eilės parametro α . Todėl dabartinė būseną priklauso ne tik tiesiogiai nuo paskutinės iteracijos, bet ir nuo visos ankstesnės proceso istorijos.

Svarbu pažymėti, kad dydžiai $V_\alpha^s(k-j+1)$ gali būti apskaičiuoti iš anksto, prieš atliekant iteracinę procedūrą, kuria konstruojama pagalbinių parametrų $\mu_{1,x}^{(k+1)}$ seką Caputo trupmeninės eilės standartiniame nulpotentinių matricių iteraciniame modelyje (žr. 1 pav.). Todėl diagrama atskiria nelokalų atminties kaupimo mechanizmą nuo vėliau taikomo algebrinio (nulpotentinio) susiejimo.

Išvestos formulės sudaro skaitinį pagrindą tolimesniam tyrimui, kuriame H–rangų algoritmo pagalba analizuojamas šių sekų algebrinis sudėtingumas ir Arnoldo liežuvių struktūra.

2.8. H–rangų skaičiavimo algoritmas

H–rangų (angl. *H–rank*) skaičiavimo algoritmas yra glaustas ir skaičiavimo požiūriu efektyvus įrankis, skirtas įvertinti sekų, gautų iš diskrečiųjų arba tolydžių dinaminų sistemų, algebrinį sudėtingumą [54], [55]. H–rango sąvoka buvo įvesta darbe [56] kaip Hankelio (angl. *Hankel*) matricos, sudarytos iš duotos laiko eilutės, tikrinių reikšmių, viršijančių nustatytą slenkstį, skaičius.

H–rangų skaičiavimo algoritme naudojami du pagrindiniai parametrai: Hankelio matricos dydis l ir slenkstis ε . Parametras l apibrėžia stebėjimo lango dydį $L = 2l - 1$ bei galimų H–rango reikšmių intervalą $[0, l]$. Slenkstis ε lemia, ar algoritmas pervertina, ar nuvertina nagrinėjamos dinamikos sudėtingumą esamame stebėjimo lange. Todėl abu parametrai turi būti tinkamai sukalibruoti, kad H–rangų algoritmas pateiktų prasmingus rezultatus, atspindinčius netiesinės sekos algebrinį sudėtingumą [39].

Tarkime, kad nagrinėjama begalinė realiųjų skaičių seka $\{y_n\}_{n \geq 1}$. Su šia seka susieta Hankelio transformacija yra seka $\{\Delta_l\}_{l \geq 1}$, kur kiekvienas elementas Δ_l apibrėžiamas kaip Hankelio matricos K_l , kurios dydis yra $l \times l$, determinantas. Matrica K_l sudaroma iš nuoseklių sekos narių:

$$K_l = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_l \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_{l+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_l & y_{l+1} & \cdots & y_{2l-1} \end{bmatrix}. \quad (2.8.1)$$

Tarkime, kad egzistuoja toks sveikasis skaičius r , kuriam $\Delta_r \neq 0$, o visi vėlesni Hankelio matricos determinantai išnyksta, t. y. $\Delta_{r+1} = \Delta_{r+2} = \cdots = 0$. Esant šiai sąlygai, seka $\{y_n\}$ tenkina r –tosios eilės tiesinę rekurentinę lygtį: kiekvienas narys y_n , kai $n > r$, gali būti išreikštas kaip ankstesnių r narių tiesinė kombinacija [57].

Tiesioginis aukštesnės eilės Hankelio determinantų skaičiavimas yra nestabilus ir tampa nepraktiškas, kai nagrinėjama seka yra paveikta skaitmeninio ar matavimo triukšmo, kaip dažniausiai pasitaiko realiuose duomenyse. Dėl šios priežasties determinantais pagrįstas kriterijus paprastai pakeičiamas fiksuoto dydžio Hankelio matricos tikrinių reikšmių dekompozicija (angl. *singular value decomposition*, SVD), kuri suteikia stabilesnį sekos algebrinės struktūros apibūdinimą [58].

Tarkime, kad parenkamas stebėjimo lango ilgis $l \in \mathbb{N}$ ir sudaroma Hankelio matrica K_l . Atlikę jos tikrinių reikšmių dekompoziciją, gauname l neneigiamas kvadratinės tikrines reikšmes λ_i^2 ($i = 1, \dots, l$), išrikiuotas mažėjimo tvarka:

$$\lambda_l^2 \geq \lambda_{l-1}^2 \geq \dots \geq \lambda_1^2 \geq 0. \quad (2.8.2)$$

Šios reikšmės aprašo esminę informaciją apie sekos vidines algebrines priklausomybes. H–rangas – skaitinis sekos sudėtingumo rodiklis – apibrėžiamas pagal tai, kiek kvadratinių tikrinių reikšmių viršija pasirinktą slenkstį $\varepsilon > 0$ [56]. Kitaip tariant, H–rangas lygus S , jei tenkinamos sąlygos:

$$\lambda_{l-j}^2 > \varepsilon, j = 0, \dots, S - 1, \quad \lambda_{l-j}^2 \leq \varepsilon, j = S, \dots, l - 1. \quad (2.8.3)$$

Parametras l turi būti pakankamai didelis, kad Hankelio matrica atspindėtų visas svarbias sekos savybes (reikalingas lango ilgis yra $2l - 1$). Tuo tarpu slenkstis ε turi būti parinktas taip, kad atskirtų reikšmingas tikrines reikšmes nuo tų, kurias lemia triukšmas ar skaitmeninės paklaidos.

H–rangų skaičiavimo algoritmas sėkmingai taikytas įvairių netiesinių reiškinų analizei, pavyzdžiui, atšokančio kamuolio uždavinyje [59], trupmeninės eilės svyravimų modelyje [60], klasikiniuose iteraciniuose modeliuose [54] bei trupmeniniuose iteraciniuose modeliuose [52], [55]. Metodo pagrindas yra Hankelio matricų algebrinės savybės, kurios atspindi koreliacijas tarp nuoseklių signalo segmentų.

2.9. H–rangų skaičiavimo algoritmo skaitinis pavyzdys

Tarkime, nagrinėjama griežtai periodinė seka $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 7, 2, 3, 7, 2, \dots\}$, kurios periodas lygus 3. Atitinkami Hankelio matricos determinantų dydžiai, didinant matricos eilę, yra:

$$\Delta_1 = |3| = 3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -43;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -252; \quad (2.9.1)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Visi ketvirtos ir aukštesnės eilės determinantų dydžiai yra lygūs nuliui, t. y. $\Delta_l = 0$, kai $l \geq 4$, todėl galima teigti, kad ši seka tenkina trečiosios eilės tiesinę rekurentinę sąryšio lygtį. Pasirinkus $N = 6$ eilės Hankelio matricą, matricos K_6 tikrinių reikšmių dekompozicija duoda šias kvadratinės tikrines

reikšmes: $\{\lambda_n^2\}_{n=1}^6 = \{24; 9,165; 9,165; 0; 0; 0\}$. Trys kvadratinės tikrinės reikšmės yra griežtai teigiamos, todėl šios idealios periodinės sekos H–rangas yra lygus 3.

Siekiant iširti metodo atsparumą triukšmui, ta pati periodinė seka paveikiama Gauso triukšmu. Atsitiktinai sugeneruotas vienuolikos triukšmo reikšmių rinkinys yra: $\{\eta_k\}_{k=1}^{11} = \{0,082; -0,147; 0,031; -0,202; 0,096; -0,013; 0,176; -0,089; 0,045; 0,132; -0,068\}$. Tada pirmieji vienuolika triukšmu paveiktos sekos narių yra: $\{\tilde{y}_k\}_{k=1}^{11} = \{3,082; 7,853; 2,031; 2,798; 7,096; 1,987; 3,176; 6,911; 2,045; 3,132; 6,9325\}$. Iš triukšmu paveiktos sekos sudarytos Hankelio matricos K_6 kvadratinės tikrinės reikšmės yra: $\{\lambda_n^2\}_{n=1}^6 = \{24,056; 9,177; 9,001; 0,504; 0,173; 0,152\}$.

Toliau šiai kvadratinių tikrinių reikšmių sekai galima parinkti skirtingas slenkstinio parametro ε reikšmes, kad būtų nustatytas H–rangas. Rezultatai pateikti 2 lentelėje. Pavyzdžiui, jeigu slenkstinio parametro reikšmė lygi 0, tuomet triukšmu paveiktos sekos H–rangas yra lygus 6, nes visos sekos reikšmės yra didesnės už parametro reikšmę. Jeigu $\varepsilon = 0,16$, tuomet H–rangas lygus 5, nes penki sekos nariai yra didesni už 0,16. Atitinkamai skaičiuojama ir su kitomis slenkstinio parametro reikšmėmis. Kai $\varepsilon \geq 25$, visos tikrinės reikšmės neviršija slenkstinio parametro reikšmės ir H–rangas lygus 0.

2 lentelė. H–rango priklausomybė nuo slenkstinio parametro reikšmės

Slenkstinis parametras ε	0	0,16	0,2	1	9,05	15	25
H–rangas	6	5	4	3	2	1	0

Taigi pasirinkus atitinkamą slenkstį ε , galima nustatyti H–rangą, kuris parodo, kiek kvadratinių tikrinių reikšmių narių viršija nustatytą parametro ε reikšmę. Taip gaunamas ne tik realiųjų skaičių periodinės sekos, bet ir triukšmu paveiktos sekos H–rangas.

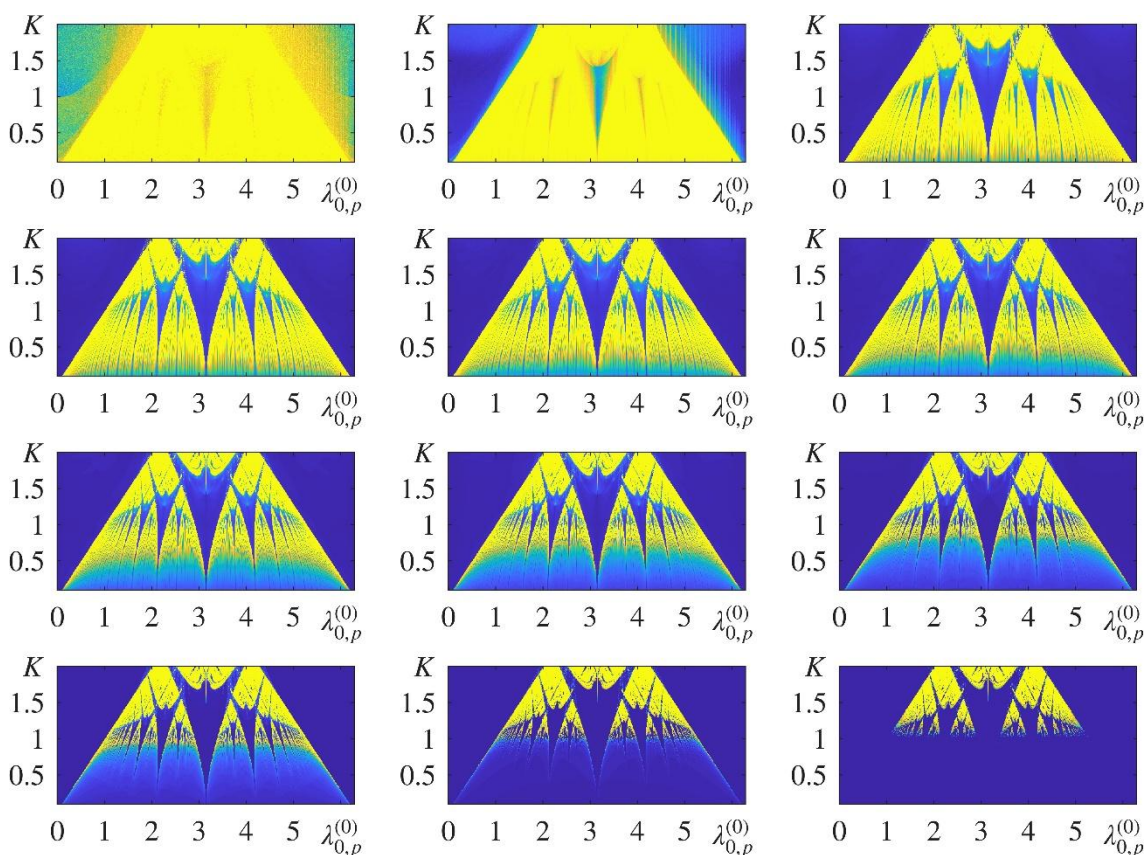
Šiame darbe H–rangų algoritmas taikomas pagalbinių parametru $\mu_{1,x}^{(k+1)}, \mu_{2,x}^{(k+1)}, \mu_{3,x}^{(k+1)}$ sekoms, siekiant įvertinti Caputo trupmeninio matricinio standartinio iteracinio modelio generuojamos dinamikos algebrinį sudėtingumą ir identifikuoti Arnoldo liežuvio struktūras parametru erdvėje.

2.10. H–rangų skaičiavimo algoritmo parametru kalibravimas

Prieš atliekant pagrindinius skaičiavimus, būtina tinkamai sukaliuoti H–rangų algoritmo parametrus. Kalibravimas atliekamas pirmajam pagalbinio parametro $\mu_{1,x}^{(k)}$ hierarchiniam sluoksniui ir nustatomos pradinės sąlygos. Pradinės fazės $\lambda_{0,p}^{(0)}$ parametro intervalas parenkamas $[0, 2\pi]$, netiesiškumo parametras K parenkamas intervale $[0, 2]$, o trupmeninės eilės parametras $\alpha = 1.001$ [8]. Kiekvienai konkrečiai parametru $\lambda_{0,p}^{(0)}$ ir K reikšmių porai pradinės sąlygos nustatomos taip: $\mu_{1,x}^{(0)} = 1, \mu_{1,p}^{(0)} = 1, \lambda_{0,x}^{(0)} = 0$ [8]. Tuomet vykdomas algoritmas, pavaizduotas 2 pav., atliekant 399 iteracijas (atitinkamai maksimalus H–rangas lygus 200). H–rango struktūros vizualizuojamos naudojant mėlynai–geltoną spalvų skalę: mėlyna spalva atitinka H–rangą, lygų 0, o geltona – maksimalų H–rangą, lygų 200.

2 pav. pateikiama pirmojo hierarchinio sluoksnio $\mu_{1,x}^{(k)}$ grafikų seka prie skirtingų parametro ε reikšmių, atitinkamai $\varepsilon \in \{10^{-16}, 10^{-14}, 10^{-12}, 10^{-10}, 10^{-8}, 10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-2}, 1, 50, 5000, 10^6\}$.

Kiekvienas grafikas vaizduoja H-rango pasiskirstymą parametru $(\lambda_{0,p}^{(0)}, K)$ plokštumoje. Horizontalioji ašis atitinka pradinės fazės parametru $\lambda_{0,p}^{(0)}$, o vertikalioji – netiesiškumo parametru K .

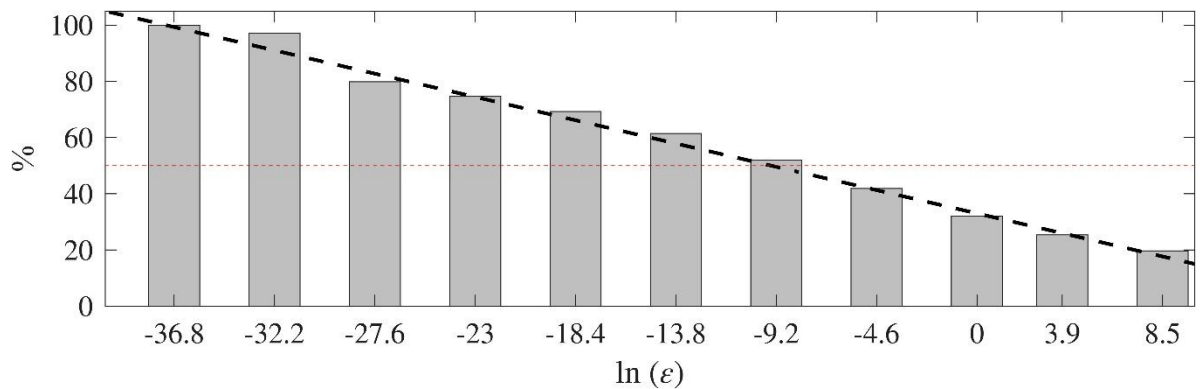


2 pav. Pirmojo hierarchinio sluoksnio grafikų seka prie skirtingų parametro ε reikšmių

H-rangų skaičiavimo algoritmo parametras ε turi būti tinkamai sukalibruotas. Jei parametras ε yra per mažas (pvz., 10^{-16}), visas modelio vaizdas tampa geltonas (žr. 2 pav.). Jei parametras ε yra per didelis (pvz., 10^6), modelio vaizdas tampa beveik visiškai mėlynas. Tik tarpinės parametro ε reikšmės sukuria subalansuotą H-rango pasiskirstymą.

2 pav. H-rangų struktūros aiškiai atskleidžia gerai žinomą Arnoldo liežuvių formą parametru plokštumoje $(\lambda_{0,p}^{(0)}, K)$. Parametro ε kalibravimo strategija grindžiama reikalavimu, kad trapecinėje srityje, kurioje išsidėstę Arnoldo liežuviai, 50 % pikselių turėtų H-rangą didesnį nei 100, o likę 50 % – mažesnį nei 100. Ši riba pasirinkta siekiant užtikrinti subalansuotą H-rango pasiskirstymą parametru erdvėje – kad nei per didelė, nei per maža parametru sritis būtų priskiriama aukšto sudėtingumo zonai.

Pikselių, kurių H-rangas didesnis nei 100, procentinė dalis skirtingoms ε reikšmėms pateikta 3 pav. Atkreiptinas dėmesys, kad 3 pav. horizontalioji ašis yra logaritminė. Logaritminė skalė naudojama todėl, kad ε kinta per kelias skirtingų eilės dydžių sekas – nuo 10^{-16} iki 10^6 .



3 pav. Taškų, kurių H–rangas viršija 100, procentinė dalis kaip $\ln \varepsilon$ funkcija

3 pav. kiekvienas stulpelis atitinka pikselių dalį, kurių H–rangas viršija 100. Raudona punktyrinė horizontali linija žymi 50 % ribą. Juoda punktyrinė linija vaizduoja tiesinę aproksimaciją pikselių, kurių H–rangas didesnis nei 100, procentinei daliai kaip ε funkcijai: $y = -1,8x + 33$, kur $x = \ln \varepsilon$. Beveik tiesinė priklausomybė logaritminėje skalėje rodo, kad plotas, kuriame H–rangas viršija 100, mažėja maždaug pagal logaritminį dėsnį.

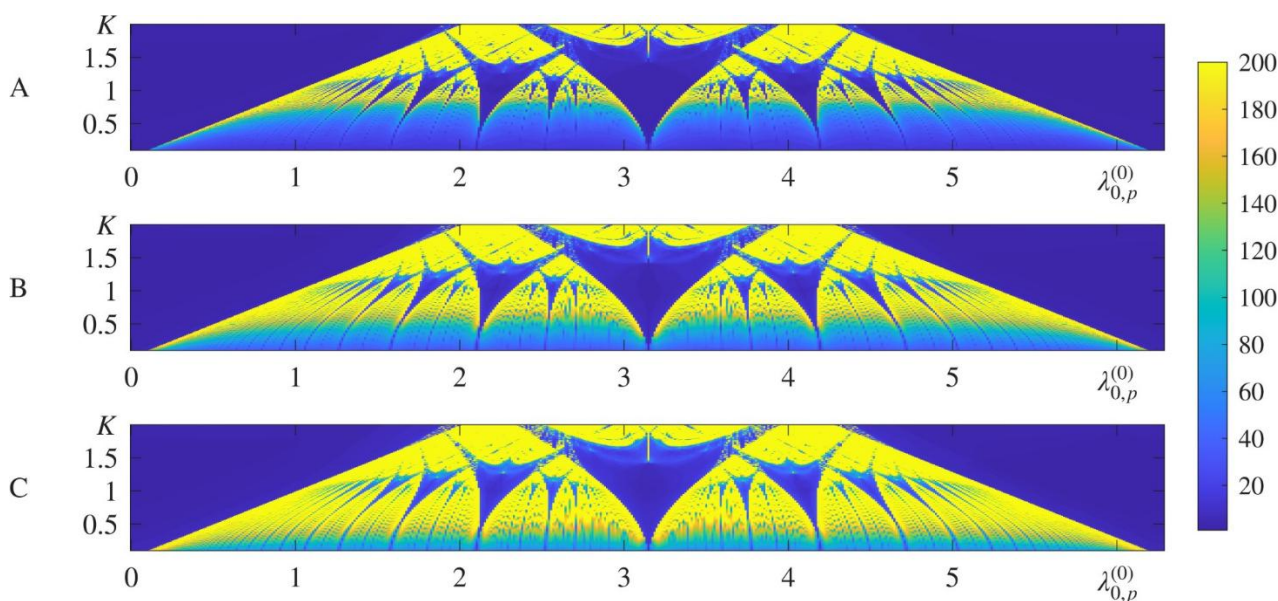
Taigi šio kalibravimo tikslas – nustatyti tokią ε reikšmę, kuriai esant abi sritys, tiek su H–rangu didesniu už 100, tiek ir su mažesniu nei 100, užimtų vienodą plotą. Raudonos horizontalios linijos ir juodos įstrižos linijos sankirta pastebima, kai $x = -9\frac{4}{9}$, ir tai atitinka $\varepsilon = 7,92 \cdot 10^{-5}$. Ši ε reikšmė naudojama visuose tolimesniuose skaičiavimuose, kuriuose analizuojama Arnoldo liežuvių struktūra ir hierarchinių sluoksnių dinamika.

3. Tyrimų rezultatai ir jų aptarimas

3.1. Arnoldo liežuvių divergavimo hierarchijos

Šiame skyrelyje pateikiami pagrindiniai skaitinių tyrimų rezultatai, gauti taikant Caputo trupmeninį matricinį standartinį iteracinį modelį su 4-tosios eilės nulpotentinėmis matricomis. Siekiama parodyti, kad trupmeninės atminties ir nulpotentinės struktūros sąveika generuoja ne vieną, o kelias tarpusavyje susijusias Arnoldo liežuvių struktūras – divergavimo hierarchiją, kurioje kiekvienas hierarchinis sluoksnis $\mu_{1,x}^{(k)}$, $\mu_{2,x}^{(k)}$, $\mu_{3,x}^{(k)}$ pasižymi skirtingu algebriniu sudėtingumu.

Sukalibruotas H-rangų skaičiavimo algoritmas naudojamas vizualizuoti tris struktūras, atitinkančias $\mu_{1,x}^{(k)}$ (A dalis), $\mu_{2,x}^{(k)}$ (B dalis) ir $\mu_{3,x}^{(k)}$ (C dalis) parametrų plokštumoje $(\lambda_{0,p}^{(0)}, K)$ (žr. 4 pav.).



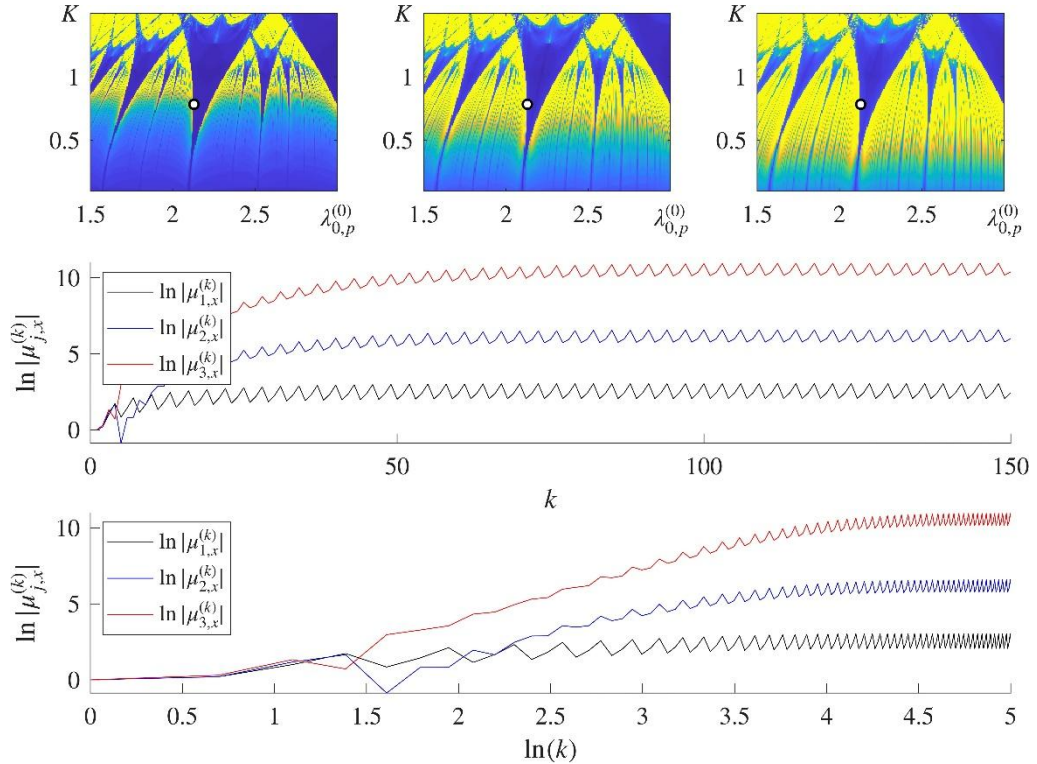
4 pav. Arnoldo tipo liežuvių struktūros, gautos naudojant sukalybruotą H-rangų algoritimą parametrų plokštumoje

Arnoldo tipo liežuvių struktūros aiškiai matomos visose trijose 4 pav. dalyse. Pastebima, kad trajektorijų, susijusių su $\mu_{3,x}^{(k)}$, vidutinis algebrinis sudėtingumas yra didesnis nei $\mu_{2,x}^{(k)}$ ir $\mu_{1,x}^{(k)}$. Šis sudėtingumo didėjimas atsispindi didėjančiame geltonos spalvos dominavime C dalyje. Be to, smulkioji struktūra palaipsniui kinta tarp grafiko dalių, aukštesniuose sluoksniuose tapdama sudėtingesnė. H-rango algoritmas yra sukalybruotas taip, kad A dalyje būtų vienodos geltonų ir mėlynų sričių proporcijos, sudarančios atskaitos lygį palyginimui.

3.2. Hierarchinių struktūrų vaidmuo Caputo trupmeninės eilės matriciniame iteraciniame modelyje

Ankstesniame skyrelyje parodyta, kad skirtingi hierarchiniai sluoksniai generuoja skirtingo algebrinio sudėtingumo Arnoldo liežuvių struktūras. Tačiau lieka atviras klausimas – ar tas pats parametrų plokštumos taškas visuose sluoksniuose elgiasi vienodai, ar skirtingi sluoksniai gali priklausyti skirtingoms dinaminėms sritims. Šiame skyrelyje šis klausimas nagrinėjamas išsamiau, analizuojant du konkrečius parametrų taškus ir stebint, kaip jų pereinamųjų procesų algebrinis sudėtingumas kinta priklausomai nuo hierarchinio lygmens.

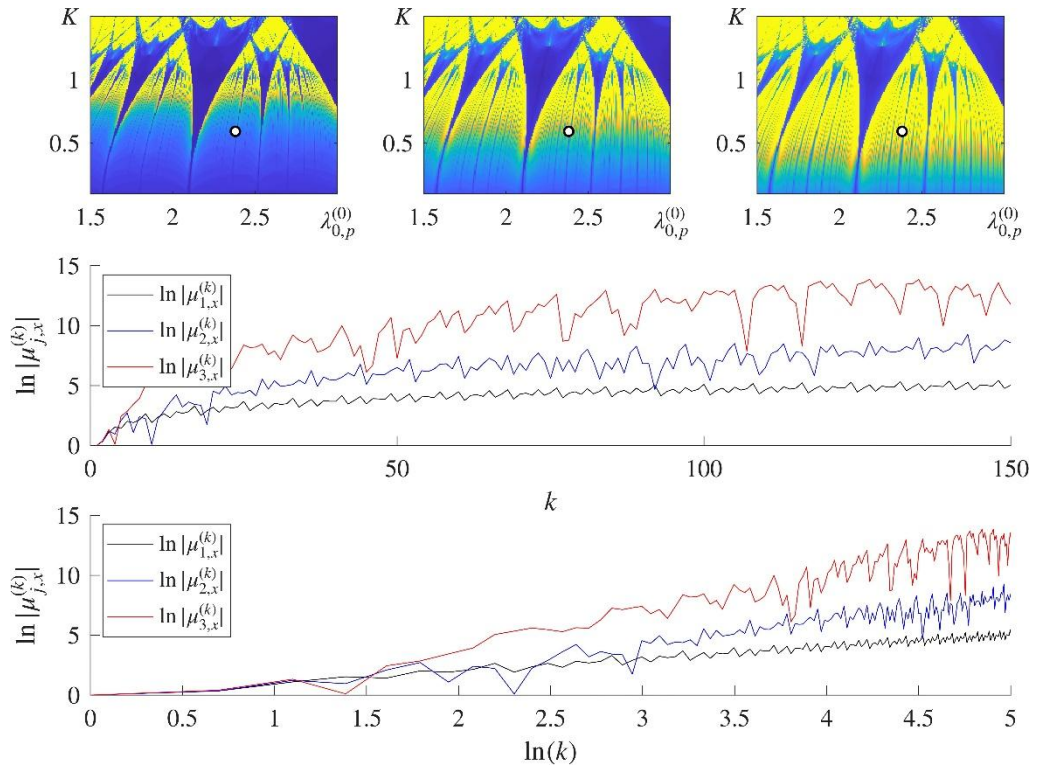
5 pav. ir 6 pav. iliustruoja, kaip hierarchinės struktūros, gautos naudojant sukalibruotą H–rangų skaičiavimo algoritmą, susijusios su pereinamųjų procesų algebriniu sudėtingumu. Abiejuose paveiksluose viršutinės dalys rodo priartintas parametų plokštumos $(\lambda_{0,p}^{(0)}, K)$ sritis atitinkamai $\mu_{1,x}^{(k)}$, $\mu_{2,x}^{(k)}$ ir $\mu_{3,x}^{(k)}$ sluoksniams. Balti apskritimai nurodo tą patį parametų tašką visose dalyse.



5 pav. Panašių pereinamųjų procesų algebrinio sudėtingumo atvaizdavimas parametų plokštumoje ir kitimas per iteracijas

5 pav. vaizduojamos priartintos sritys atitinkamai $\mu_{1,x}^{(k)}$, $\mu_{2,x}^{(k)}$ ir $\mu_{3,x}^{(k)}$ atvejams viršutiniuose grafikuose parinktam parametų taškui visose dalyse $(\lambda_{0,p}^{(0)} = 2,1300; K = 0,7828)$. Šiame pavyzdyje taškas patenka į mėlyną sritį kiekviename hierarchiniame sluoksnyje. Vidurinė ir apatinė dalys rodo $\ln |\mu_{j,x}^{(k)}|$ kitimą priklausomai nuo iteracijos indekso k atitinkamai tiesinėje skalėje ir logaritminėje skalėje, parodant panašų pereinamųjų procesų algebrinį sudėtingumą.

Pasirinktas taškas visose trijose hierarchijose patenka į mėlyną sritį, todėl pereinamųjų procesų $\mu_{1,x}^{(k)}$, $\mu_{2,x}^{(k)}$ ir $\mu_{3,x}^{(k)}$ algebrinis sudėtingumas yra panašus. Tai patvirtina apatinė dalis, kur funkcijos $\ln |\mu_{j,x}^{(k)}|$ ($j = 1, 2, 3$) didėja panašiai, priklausomai nuo k . Nors amplitudės skiriasi (dėl nulpotentinės hierarchijos), jų nuolydžiai ir svyravimo režimai išlieka stipriai koreliuoti. Aukštesni sluoksniai sustiprina tą patį nestabilumo mechanizmą, o ne įveda naują dinamiką.



6 pav. Skirtingų pereinamųjų procesų algebrinio sudėtingumo atvaizdavimas parametų plokštumoje ir kitimas per iteracijas

6 pav. pateikiama analogiška analizė, tačiau nagrinėjamas parametų taškas, kuris skirtinguose hierarchiniuose sluoksniuose priklauso skirtingoms spalvinėms sritims ($\lambda_{0,p}^{(0)} = 2,3813$; $K = 0,5926$). Taškas patenka į mėlyną sritį $\mu_{1,x}^{(k)}$ atveju, į šviesiai mėlyną sritį $\mu_{2,x}^{(k)}$ atveju ir į geltoną sritį $\mu_{3,x}^{(k)}$ atveju. Vidurinė ir apatinė dalys rodo $\ln|\mu_{j,x}^{(k)}|$ kitimą priklausomai nuo iteracijos indekso k atitinkamai tiesinėje skalėje ir logaritminėje skalėje, parodant didėjantį pereinamųjų procesų algebrinį sudėtingumą didėjant hierarchiniam lygiui.

Tas pats parametų taškas skirtinguose hierarchiniuose sluoksniuose priklauso skirtingoms spalvinėms sritims: $\mu_{1,x}^{(k)}$ atveju jis yra tamsiai mėlynoje srityje, $\mu_{2,x}^{(k)}$ – šviesiai mėlynoje, o $\mu_{3,x}^{(k)}$ – geltonoje srityje, todėl atitinkamų pereinamųjų procesų algebrinis sudėtingumas didėja nuo $\mu_{1,x}^{(k)}$ iki $\mu_{3,x}^{(k)}$. Apatinė dalis tai patvirtina, rodydama didėjančius $\ln|\mu_{j,x}^{(k)}|$ svyravimus didėjant k . Šiuo atveju nulpotentinė hierarchija ne sustiprina vieno mechanizmo, o generuoja sudėtingesnę dinamiką.

Šis pavyzdys išryškina svarbią hierarchinės struktūros savybę: tas pats parametų taškas skirtinguose sluoksniuose gali priklausyti skirtingoms sritims. Todėl konkretų $\mu_{j,x}^{(k)}$ apibrėžiantis hierarchinis lygmuo tampa esminiu parametru, lemiančiu pereinamųjų procesų algebrinį sudėtingumą. Praktiniuose taikymuose tai gali būti naudojama kaip papildomas saugumo parametras informacijos šifravimui [61], [62].

Apibendrinant, gauti rezultatai patvirtina, kad trupmeninės atminties ir nulpotentinės struktūros sąveika generuoja daugiasluoksnes Arnoldo liežuvių hierarchijas, kurių sudėtingumas didėja kylant nuo žemesnių iki aukštesnių sluoksnių. Šis reiškinys neturi analogo klasikiniame skaliariniame iteraciniame modelyje.

3.3. Hierarchinių sluoksnių divergavimo greičiai

Panagrinėkime bendrą pagalbinio kintamojo $\mu_{j,x}^{(k+1)}$ formą, aprašytą lygtimi:

$$\begin{aligned} \mu_{j,x}^{(k+1)} = & \mu_{j,x}^{(k)} + \mu_{j,p}^{(0)} \\ & - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1(k-r) \right. \\ & \left. + 1 \right) \left(\sum_{m=1}^j \frac{\sin\left(\lambda_{0,x}^{(r)} + \frac{m\pi}{2}\right)}{m!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=j \\ i_1, i_2, \dots, i_m \geq 1}} \mu_{i_1,x}^{(r)} \mu_{i_2,x}^{(r)} \dots \mu_{i_m,x}^{(r)} \right). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Lygtis yra bendra hierarchijos rekursinė išraiška. Prie fiksuoto j ji susideda iš dviejų dalių: tiesinio nario $\mu_{j,x}^{(k)}$, kuris aprašo paties kintamojo evoliuciją, ir sužadinimo nario, kuris generuojamas iš žemesnės eilės kintamųjų sandaugų $\mu_{i_l,x}^{(r)}$, $i_l < j$. Būtent šis sužadinimo narys priklauso nuo visų skaičiaus j skaidymų ir yra atsakingas už hierarchinį sluoksnių susietumą.

Atminties branduolys $V_{\alpha}^1(m) = m^{\alpha-1} - (m-1)^{\alpha-1}$ tenkina asimptotinę ryšį:

$$V_{\alpha}^1(m) \sim (\alpha-1)m^{\alpha-2}, \quad m \rightarrow \infty; \quad (3.3.2)$$

ir pasižymi lėtu laipsniniu mažėjimu, kai $1 < \alpha \leq 2$. Todėl $\mu_{j,x}^{(k+1)}$ evoliucija priklauso nuo visos ankstesnės parametro $\lambda_{0,x}^{(r)}$ istorijos.

Kai $j = 1$, gauname tiesinę lygtį, kuri generuoja bazinį pagalbinį kintamąjį:

$$\mu_{1,x}^{(k+1)} = \mu_{1,x}^{(k)} + \mu_{1,p}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1(k-r+1) \mu_{1,x}^{(r)} \cos(\lambda_{0,x}^{(r)}) \right). \quad (3.3.3)$$

Ši lygtis apibrėžia pagrindinį pagalbinį kintamąjį $\mu_{1,x}^{(k)}$, kurio reikšmės per netiesines sandaugas lemia aukštesnės eilės narių dinamiką. Tai galima pamatyti nagrinėjant konkrečius atvejus $j \geq 2$, kuriuose sužadinimo narys yra sudarytas iš sandaugų.

Kai $j \geq 2$, sužadinimo narys lygties išraiškoje yra sudarytas iš sandaugų:

$$\mu_{i_1,x}^{(r)} \mu_{i_2,x}^{(r)} \dots \mu_{i_m,x}^{(r)}, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_m = j; \quad (3.3.4)$$

kurios atitinka visus skaičiaus j skaidymus. Kiekvienas toks skaidymas atitinka vieną sandaugų kombinaciją, o visi jie kartu sudaro sužadinimo nario struktūrą. Didžiausią indėlį tarp visų skaidymų atitinka $j = 1 + 1 + \dots + 1$ ($m = j$), kuris duoda aukščiausio laipsnio sandaugą $(\mu_{1,x}^{(r)})^j$. Todėl kintamasis $\mu_{j,x}^{(k+1)}$ yra valdomas kintamojo $\mu_{1,x}^{(k)}$ per polinominio tipo sužadinimo narį, kurio laipsnis yra j . Tai aiškiai matoma nagrinėjant pateikiamus atvejus.

Pavyzdžiui, kai $j = 2$, rekursija lygtyje gali būti perrašyta taip:

$$\mu_{2,x}^{(k+1)} = \mu_{2,x}^{(k)} + \mu_{2,p}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k-r+1) \left(\mu_{2,x}^{(r)} \cos(\lambda_{0,x}^{(r)}) - \frac{(\mu_{1,x}^{(r)})^2 \sin(\lambda_{0,x}^{(r)})}{2} \right) \right). \quad (3.3.5)$$

Ši išraiška atskiria tiesinę $\mu_{2,x}^{(k)}$ plėtinio dalį nuo kvadratinio sužadavimo nario $(\mu_{1,x}^{(r)})^2$. Taigi $\mu_{2,x}^{(k)}$ evoliuciją lemia antros eilės priklausomybė nuo $\mu_{1,x}^{(k)}$.

Dar sudėtingesnė situacija susidaro kitame hierarchijos lygmenyje, kai $j = 3$, tuomet lygtis gali būti perrašyta taip:

$$\mu_{3,x}^{(k+1)} = \mu_{3,x}^{(k)} + \mu_{3,p}^{(0)} - \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{r=0}^k V_{\alpha}^1 (k-r+1) \left(\mu_{3,x}^{(r)} \cos(\lambda_{0,x}^{(r)}) - \mu_{1,x}^{(r)} \cdot \mu_{2,x}^{(r)} \sin(\lambda_{0,x}^{(r)}) - \frac{(\mu_{1,x}^{(r)})^3 \cos(\lambda_{0,x}^{(r)})}{6} \right) \right). \quad (3.3.6)$$

Šioje lygtyje priklausomybė nuo $\mu_{1,x}$ yra aiški: ji pasireiškia tiesiogiai per kubinį narį $(\mu_{1,x}^{(r)})^3$ ir per mišrios sandaugos narį $\mu_{1,x}^{(r)} \mu_{2,x}^{(r)}$. Pastarasis įveda netiesioginę priklausomybę nuo $\mu_{1,x}^{(k)}$ per $\mu_{2,x}^{(k)}$, kuris pats yra veikiamas $(\mu_{1,x}^{(r)})^2$.

Bendruoju atveju, kai $j \geq 2$, lygties struktūra rodo, kad $\mu_{j,x}^{(k+1)}$ turi sužadavimo narius, kurių laipsnis $\mu_{1,x}^{(r)}$ atžvilgiu siekia iki j . Todėl pagalbiniai kintamieji sudaro augimo hierarchiją, valdomą bazinio dydžio $\mu_{1,x}^{(k)}$, kur aukštesnių eilių nariai priklauso nuo vis aukštesnio laipsnio polinominių $\mu_{1,x}^{(k)}$ kombinacijų.

3.4. Hierarchinių sluoksnių augimo greičiai ir Liapunovo rodikliai

Ankstesniame skyrelyje nustatyta, kad pagalbiniai kintamieji $\mu_{1,x}^{(k)}$ sudaro hierarchiją, kurioje aukštesnių eilių nariai priklauso nuo žemesnių per polinominias sandaugas. Šiame skyrelyje nagrinėjama, koku greičiu šie kintamieji auga iteracijų skaičiui k didėjant, ir kodėl klasikiniai chaoso rodikliai šio augimo neaptinka.

Panagrinėkime pirmąjį pagalbinį kintamąjį $\mu_{1,x}^{(k)}$. Tarkime, kad dydis $|\mu_{1,x}^{(k)}|$ tenkina algebrinio augimo sąlygą:

$$|\mu_{1,x}^{(k)}| \sim k^{\beta}, \quad \beta > 0. \quad (3.4.1)$$

Ši prielaida motyvuojama tuo, kad trupmeninės eilės atminties branduolys $V_\alpha^1(m)$ mažėja pagal galios dėsnį, o ne eksponentiškai, todėl natūralu tikėtis, kad ir generuojamų sekų augimas bus polinominis. Taip pat ši prielaida yra suderinama su anksčiau nustatyta hierarchijos struktūra, kurioje aukštesnės eilės pagalbiniai kintamieji atlieka polinominės funkcijos, priklausančios nuo $\mu_{1,x}^{(k)}$, vaidmenį. Iš rekursinių ryšių aukštesnės eilės kintamiesiems gauname:

$$\mu_{2,x}^{(k)} \sim (\mu_{1,x}^{(k)})^2, \quad \mu_{3,x}^{(k)} \sim (\mu_{1,x}^{(k)})^3, \quad \dots, \quad \mu_{j,x}^{(k)} \sim (\mu_{1,x}^{(k)})^j. \quad (3.4.2)$$

Todėl:

$$|\mu_{j,x}^{(k)}| \sim k^{j\beta}. \quad (3.4.3)$$

Taigi visa hierarchija pasižymi polinominiu augimu. Natūraliai kyla klausimas – ar šį augimą galima aptikti klasikiniiais chaoso analizės įrankiais, pavyzdžiui, Liapunovo rodikliu? Parodysime, kad ne.

Klasikinis Liapunovo rodiklis, susietas su seka $\mu_{1,x}^{(k)}$, apibrėžiamas taip:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \frac{|\mu_{1,x}^{(k)}|}{k}. \quad (3.4.4)$$

Pritaikę šį apibrėžimą sąlygai $\mu_{1,x}^{(k)} \sim k^\beta$, gauname $\frac{1}{k} \ln |\mu_{1,x}^{(k)}| = \frac{1}{k} \ln(k^\beta) = \frac{\beta \ln k}{k}$. Todėl

$$L_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\mu_{1,x}^{(k)}|}{k} = 0. \quad (3.4.5)$$

Kadangi $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{k} = 0$, tas pats skaičiavimas galioja ir visiems aukštesnės eilės kintamiesiems.

Naudodami sąlygą $\mu_{j,x}^{(k)} \sim k^{j\beta}$, gauname:

$$L_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\mu_{j,x}^{(k)}|}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k^{j\beta}}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{j\beta \ln k}{k} = 0. \quad (3.4.6)$$

Taigi klasikiniai Liapunovo rodikliai visai hierarchijai $\mu_{1,x}^{(k)}, \mu_{2,x}^{(k)}, \dots, \mu_{n-1,x}^{(k)}$ yra lygūs nuliui, nes jie aptinka tik eksponentinį divergavimą – algebrinis augimas lieka nematomas šiuo metodu. Todėl H–rangų algoritmas yra tinkamesnis įrankis šios hierarchijos sudėtingumui įvertinti.

Šias išvadas apie algebrinį $\mu_{j,x}^{(k)}$ augimą patvirtina skaitiniai eksperimentai, pateikti 5 pav. ir 6 pav., kur $\ln |\mu_{j,x}^{(k)}|$ priklausomybė nuo $\ln |k|$ yra aproksimuojama tiesine funkcija. Jei augimas yra polinominis, t. y. $|\mu_{j,x}^{(k)}| \sim k^{j\beta}$, tai $\ln |\mu_{j,x}^{(k)}|$ turėtų būti tiesinė $\ln(k)$ funkcija su nuolydžiu $j\beta$. Būtent tokia tiesinė priklausomybė ir stebima eksperimentiniuose grafikuose, taip patvirtinant teorinę prielaidą.

3.5. Signalų šifravimas naudojant hierarchines chaotines sekas

Realūs signalai pasižymi didele statistine priklausomybe tarp gretimų reikšmių, kurią dažnai išnaudoja signalų analizės bei steganografijos schemas [61]. Siekiant sumažinti šią priklausomybę ir

padidinti informacijos paslėpimo saugumą, taikomos duomenų pertvarkymo (angl. *scrambling*) technikos [62]. Vienas pirmųjų darbų, kuriame pasiūlyta naudoti chaotines sistemas vaizdų šifravimui, buvo J. Fridrich [63], jo darbe buvo pristatyta permutacijos (angl. *permutation*) ir difuzijos struktūra, vėliau tapusi daugelio metodų pagrindu.

Vienas iš efektyvių metodų yra pikselių ar signalų reikšmių permutacija, kai originalaus signalo elementai perrikiuojami pagal tam tikrą taisyklę. Jei permutacijos taisyklė generuojama chaotinėmis sekomis, metodas pasižymi trimis svarbiomis savybėmis: pseudoatsitiktinumu, deterministiškumu ir jautrumu pradinei būsenai [64], [65]. Permutacija sunaikina lokalią koreliaciją tarp gretimų signalo reikšmių, todėl signalas praranda struktūrinės savybes.

Tarkime mūsų turimas signalas, kurį norime užšifruoti, yra diskretinis:

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}. \quad (3.5.1)$$

Šiam signalui sudaroma permutacija naudojant rūšiavimo algoritmą. Turimos sekos narius surūšiuojame didėjimo tvarka ir užfiksuojuame originalias indeksų pozicijas. Mūsų turimam signalui S taikoma permutacija:

$$S' = S(\pi), \quad s'_i = s_{\pi_i}; \quad (3.5.2)$$

čia π – permutacija. Norint atkurti signalą, turi būti naudojama ta pati permutacija, naudojant tą pačią indeksų perstatymą:

$$S_{atkurtas}(\pi_i) = S'_i, \quad \text{arba} \quad S_{atkurtas} = S'(\pi^{-1}). \quad (3.5.3)$$

Panagrinėkime elementarų pavyzdį. Tarkime, kad duotas signalas $S = [10, 20, 30, 40]$ ir chaotinė seka $X = [0,3; 0,1; 0,8; 0,5]$. Surikiavę sekos narius didėjimo tvarka $[0,1; 0,3; 0,5; 0,8]$, gauname permutaciją (surikiuotų narių pozicijas originalioje sekoje) $\pi = [2, 1, 4, 3]$. Pritaikę šią permutaciją signalui, gauname užkoduotą signalą $S' = [S_2, S_1, S_4, S_3] = [20, 10, 40, 30]$. Naudodami tą pačią permutaciją $S(\pi_i) = S'_i$ atvirkštine tvarka, tiksliai atkuriame signalą $S = [10, 20, 30, 40]$. Jei vietoje teisingos permutacijos naudojama kita, pavyzdžiui $\pi' = [3, 1, 2, 4]$, gautas rezultatas $S' = [10, 40, 20, 30]$ nesutampa su originaliu signalu. Tai iliustruoja esminę metodo savybę – teisingas iššifravimas įmanomas tik naudojant identišką permutaciją.

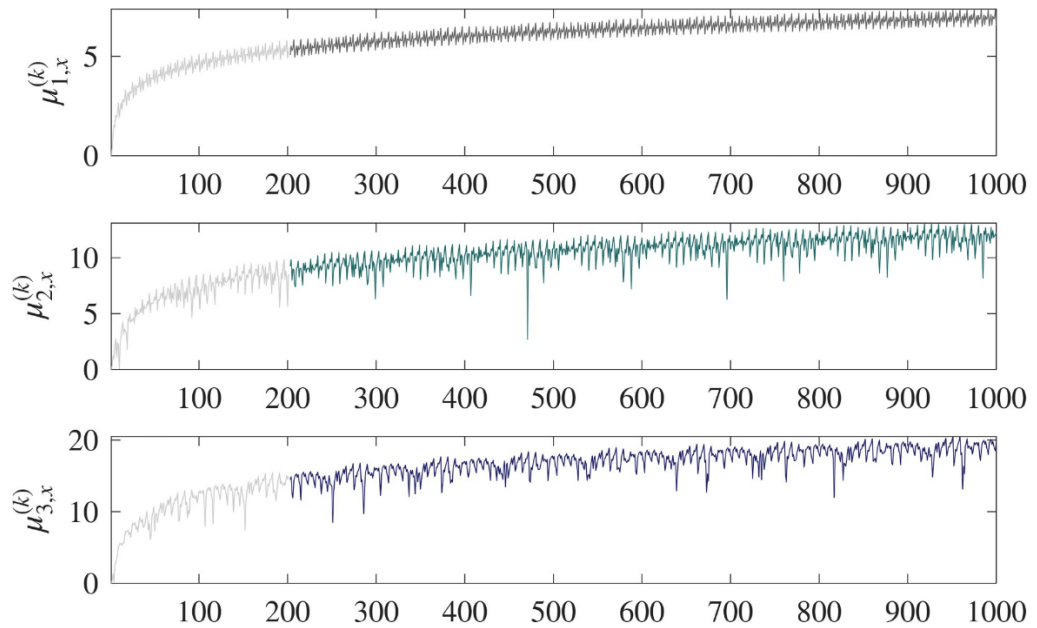
Tolimesniam eksperimentui naudojamas sintetinis signalas:

$$s(t) = \sin(2\pi ft) + \eta(t); \quad (3.5.4)$$

čia f – dažnis (pasirinkta reikšmė $f = 5$); $\eta(t)$ – atsitiktinis triukšmas. Tuomet diskretizuotas signalas aprašomas taip:

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}, \quad N = 800. \quad (3.5.5)$$

Chaotines sekas galima naudoti kaip raktus šifravimo sistemose. Šiame darbe naudojamos Caputo trupmeninio matricinio iteracinio modelio parametrų $\mu_{1,x}^{(k)}, \mu_{2,x}^{(k)}, \mu_{3,x}^{(k)}$ sekos (1000 kiekvienos sekos narių), kurios pasirinktos kaip šifravimo raktai (žr. 7 pav.). Siekiant išvengti pradinių nestabilių reikšmių, praleidžiami pereinamieji procesai (200 pirmųjų sekos narių), ir toliau naudojami elementai po pereinamųjų procesų (tolimesni 800 sekos narių).

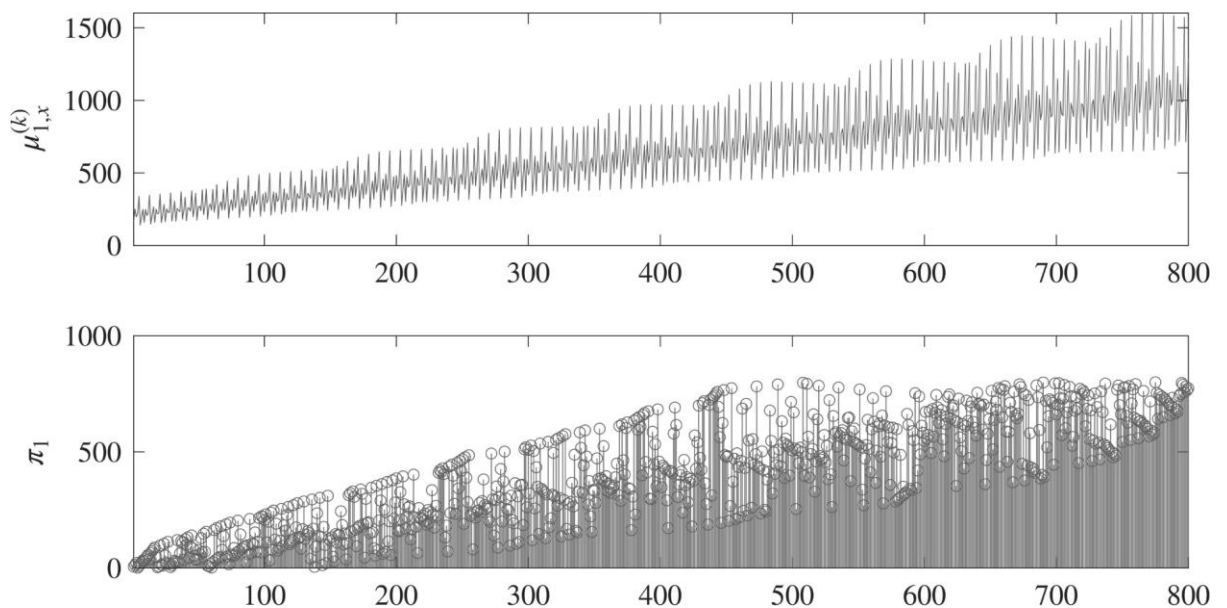


7 pav. Naudojamos chaotinės sekos (raktai) signalo šifravimui

Sekos pasižymi akivaizdžiu chaotiškumu, vizualiai sunku išvengti periodiškumą ar pasikartojančias struktūras, taip patvirtinamas šių sekų tinkamumas permutacijos raktų naudojimui, nes tokios sekos užtikrina aukštą elementų išmaišymo lygį.

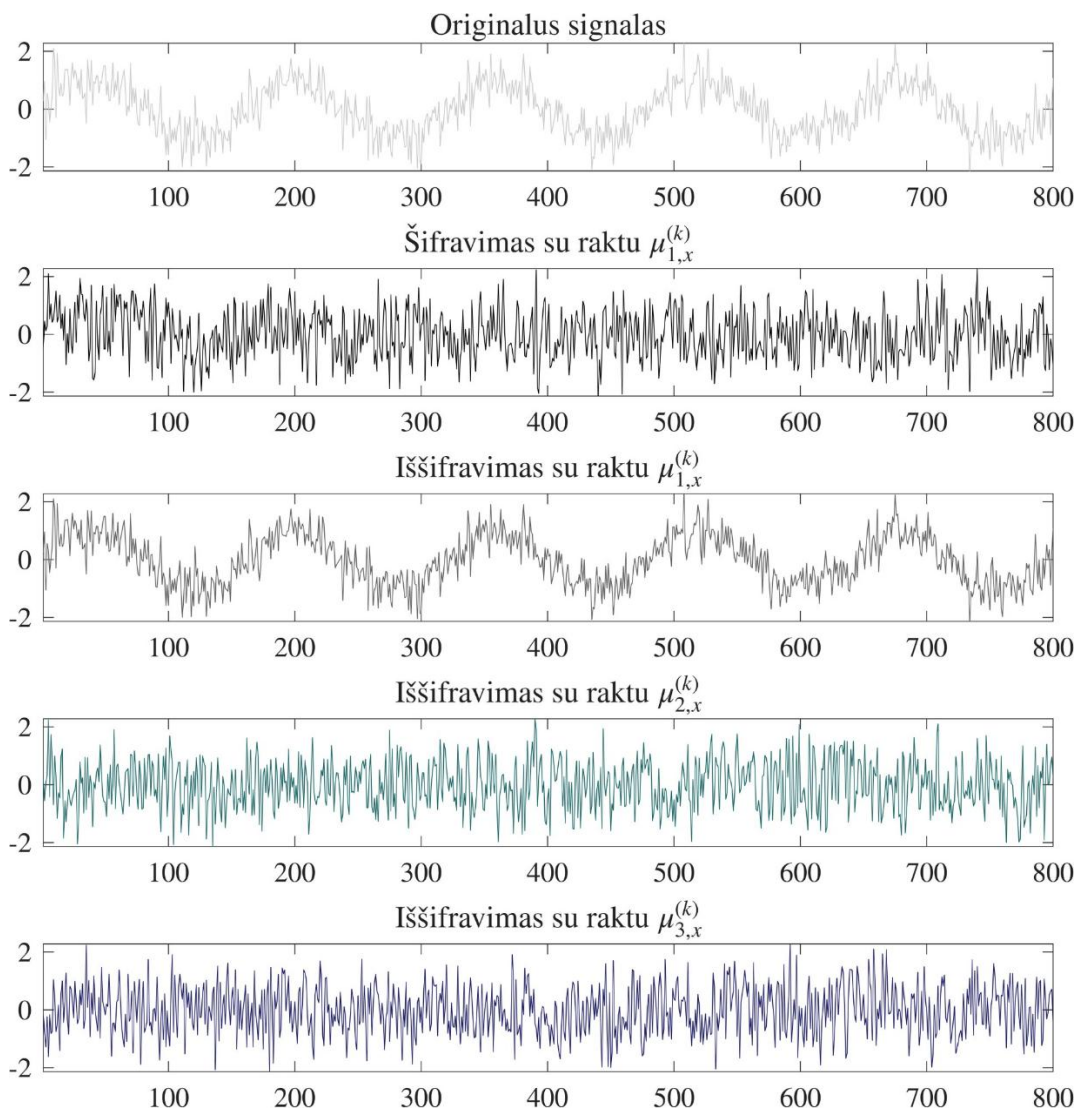
Tarkime, pasirinktas teisingas raktas yra $\mu_{1,x}^{(k)}$ ir atliekami trys iššifravimo bandymai: su teisingu raktu $\mu_{1,x}^{(k)}$ (signalas pilnai atkuriamas), su neteisingais raktais $\mu_{2,x}^{(k)}$ ir $\mu_{3,x}^{(k)}$ (signalas nėra atkuriamas). Tai parodo algoritmo priklausomybę nuo rakto.

Toliau atliekama teisingo rakto signalo permutacija, 8 pav. pateiktas originalus signalas ir jo permutuota versija.



8 pav. Teisingo rakto transformacija taikant chaotiškai generuotą permutaciją

Remiantis gautomis permutacijomis, atliekamas visas užšifravimo ir iššifravimo ciklas. 9 pav. pateikiami rezultatai naudojant visus tris raktus.



9 pav. Signalų užšifravimo ir iššifravimo rezultatai naudojant chaotiškai generuotas permutacijas

Pirmoje diagramos dalyje pavaizduotas originalus signalas S , kuris sudarytas iš sinusinės funkcijos ir atsitiktinio triukšmo. Šis signalas pasižymi aiškia struktūra ir periodiškumu. Antroje dalyje pateiktas užšifruotas signalas S' , gautas pritaikius permutaciją π_1 , sugeneruotą iš sekos $\mu_{1,x}^{(k)}$. Matome, kad signalas praranda bet kokią akivaizdžią struktūrą ir tampa vizualiai panašus į atsitiktinį triukšmą. Tai rodo, kad permutacija efektyviai sunaikina gretimų reikšmių koreliaciją.

Trečioje dalyje pavaizduotas iššifravimas naudojant teisingą raktą $\mu_{1,x}^{(k)}$. Šiuo atveju signalas atkuriamas tiksliai ir sutampa su originaliu signalu. Atkurtos tiek signalo formos, tiek statistinės savybės. Ketvirtoje dalyje pateiktas iššifruotas signalas naudojant neteisingą raktą $\mu_{2,x}^{(k)}$. Kadangi ši permutacija nesutampa su šifravimui naudota permutacija, signalas neatkuriamas ir išlieka iškraipytas. Jo forma nesutampa su originaliu signalu, o struktūrinės savybės nėra atkuriamos. Penktoje dalyje pateiktas iššifravimas naudojant kitą neteisingą raktą $\mu_{3,x}^{(k)}$. Rezultatas analogiškas ankstesniam atvejui – signalas neatkuriamas, o reikšmės išsidėsčiusios netvarkingai. Tai patvirtina metodo jautrumą naudojamam raktui.

Taigi šis pavyzdys aiškiai parodo, kad permutacija efektyviai paslepia pradinio signalo struktūrą, iššifravimas yra galimas tik naudojant identišką raktą, tad net ir nedidelis rakto pasikeitimas lemia

visišką iššifravimo nesėkmę. Tai patvirtina, kad nagrinėjamas metodas pasižymi stipria priklausomybe nuo rakto ir gali būti taikomas saugaus duomenų transformavimo uždaviniuose.

Signalų atkūrimo tikslumas vertinamas naudojant vidutinės kvadratinės paklaidos (MSE) kriterijų:

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s_i - \hat{s}_i)^2; \quad (3.5.6)$$

čia s_i – originalus signalas; \hat{s}_i – atkurtas signalas. Gautos MSE reikšmės, pateiktos 3 lentelėje, patvirtina eksperimento rezultatus. Naudojant teisingą raktą gauta $\text{MSE} = 0$, todėl signalas atkuriamas tiksliai, naudojant neteisingus raktus gautos MSE reikšmės rodo, kad atkurtas signalas iš esmės tampa atsitiktinis, o paklaida artėja prie originalaus signalo dispersijos.

3 lentelė. MSE reikšmės skirtingiems atkūrimo raktams

Atkūrimo raktas	MSE reikšmė
$\mu_{1,x}^{(k)}$	0
$\mu_{2,x}^{(k)}$	1,45
$\mu_{3,x}^{(k)}$	1,44

Taigi šis metodas gali būti naudojamas kaip išankstinis duomenų apdorojimas ir papildomas saugumo algoritmas. Svarbu pažymėti, kad skirtingi hierarchiniai sluoksniai $\mu_{1,x}^{(k)}, \mu_{2,x}^{(k)}, \mu_{3,x}^{(k)}$ generuoja skirtingo sudėtingumo sekas, kurios atspindi Arnoldo liežuvių hierarchinę struktūrą – tai suteikia papildomą laisvės laipsnį kuriant daugiasluoksnes šifravimo schemas.

Išvados

1. Išanalizavus netiesinių diskretinių sistemų, apskritiminio iteracinio modelio ir Arnoldo liežuvių atliktus tyrimus, nustatyta, kad Arnoldo liežuviai aprašo fazinės sinchronizacijos sritis parametru erdvėje ir sudaro svarbų instrumentą sinchronizacijos bei rezonanso reiškiniams tirti. Parodyta, kad šių sričių struktūra yra ne atsitiktinė, o sistemiškai organizuota, atspindinti racionaliųjų dažnių santykių hierarchiją.
2. Ištyrus trupmeninės eilės modelius ir Caputo išvestinės taikymą diskretinėse sistemose, nustatyta, kad trupmeninė atmintis ir nelokalumas iš esmės keičia sistemų dinamiką. Caputo trupmeninis standartinis iteracinis modelis leidžia įtraukti visos sistemos istorijos įtaką, dėl šios priežasties modifikuojamos stabilumo savybės, bifurkacijų scenarijai ir fazinės sinchronizacijos sąlygos.
3. Išnagrinėjus matricinių iteracinių modelių savybes, nustatyta, kad jie išplečia klasikinių diskretinių sistemų analizę į daugiamates struktūras. Parodyta, kad idempotentinių matricių atveju modelio dinaminis sudėtingumas išlieka analogiškas skaliariniam atvejui, tuo tarpu nulpotentinės matricos sukuria tarpusavyje susietą, hierarchinę dinamiką, atsirandančią dėl aukštesnės eilės narių sąveikos.
4. Suformulavus Caputo trupmeninį matricinį standartinį modelį, išvesta efektyvi skaičiavimo schema pagalbiniais parametrams $\mu_{j,x}^{(k)}$, kurioje mažėjančių faktorialų išraiškos pakeistos iteratyviai apskaičiuojamais koeficientais. Tai leidžia praktiškai modeliuoti ir efektyviai atlikti skaitinius tyrimus sistemoms su atmintimi ir algebrine struktūra.
5. Atlikus skaitinius tyrimus, nustatyta, kad trupmeninės atminties ir nulpotentinės algebros sąveika lemia sudėtingesnę Arnoldo liežuvių struktūrą nei klasikiniuose modeliuose. Parodyta, kad nulpotentinių matricių hierarchiniai sluoksniai generuoja daugiasluoksnes Arnoldo liežuvių struktūras, kurių algebrinis sudėtingumas didėja pereinant nuo $\mu_{1,x}^{(k)}$ iki $\mu_{3,x}^{(k)}$ – reiškinys, neturintis analogo skaliariniame iteraciniame modelyje.
6. Įvertinus hierarchinių lygmenų įtaką sistemos dinaminiam sudėtingumui, nustatyta, kad skirtingi lygmenys pasižymi nevienodu algebriniu sudėtingumu, o tas pats parametru plokštumos taškas gali priklausyti skirtingoms dinaminėms sritims, priklausomai nuo nagrinėjamo lygmens. Tai rodo, kad hierarchinis indeksas j yra esminis parametras, lemiantis sistemos elgseną. Ši savybė išnaudota praktiniame taikyme, parodant, kad skirtingi hierarchiniai sluoksniai gali būti naudojami kaip nepriklausomi raktai signalų šifravimo schemose.

Literatūros sąrašas

1. STROGATZ, S.H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Chapman and Hall/CRC, 2024.
2. OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge university press, 2002.
3. PIKOVSKY, A. M., Rosenblum and J. Kurths. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, 2001.
4. PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications*. elsevier, 1998.
5. TARASOV, V.E. *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. Springer Science & Business Media, 2011.
6. NAVICKAS, Z., SMIDTAITE, R., VAINORAS, A. and RAGULSKIS, M. The Logistic Map of Matrices. *Discrete Cont Dyn-B*, 2011, vol. 16, no. 3. pp. 927–944.
7. SMIDTAITE, R. and RAGULSKIS, M. Spiral Waves of Divergence in the Barkley Model of Nilpotent Matrices. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, vol. 159. pp. 112158. Available from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S096007792200368X> ISSN 0960-0779. DOI 10.1016/j.chaos.2022.112158.
8. ORINAITĖ, U., ŠMIDTAITĖ, R. and RAGULSKIS, M. Arnold Tongues of Divergence in the Caputo Fractional Standard Map of Nilpotent Matrices. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control.*, 2025, vol. 30. pp. 1–18.
9. DEVANEY, R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. CRC press, 2018.
10. ALLIGOOD, K.T., SAUER, T.D., YORKE, J.A. and CRAWFORD, J.D. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, 1997.
11. GUKENHEIMER, J. and HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations. Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag, NY, 1983.
12. MAY, R.M. Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics. *Nature*, 1976, vol. 261, no. 5560. pp. 459–467.
13. FEIGENBAUM, M.J. Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations. *Journal of Statistical Physics*, 1978, vol. 19, no. 1. pp. 25–52.
14. KANEKO, K. Overview of Coupled Map Lattices. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 1992, vol. 2, no. 3. pp. 279–282.
15. OTT, E., GREBOGI, C. and YORKE, J.A. Controlling Chaos. *Physical Review Letters*, 1990, vol. 64, no. 11. pp. 1196.
16. JENSEN, M.H., BAK, P. and BOHR, T. Complete Devil's Staircase, Fractal Dimension, and Universality of Mode-Locking Structure in the Circle Map. *Physical Review Letters*, 1983, vol. 50, no. 21. pp. 1637.

17. VI, A. Small Denominators and Problems of Stability of Motion in Classical and Celestial Mechanics. *Hamiltonian Dynamical Systems: A Reprint Selection*, 1987, vol. 18, no. 6. pp. 260.
18. TARASOV, V.E. and EDELMAN, M. Fractional Dissipative Standard Map. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2010, vol. 20, no. 2.
19. JÁNOSI, D. and KÁROLYI, G. Macroscopic Transport in Mixed Phase Space Hamiltonian Systems and the Role of a Distinct Time-Scale for the Power-Law Decay. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2024, vol. 34, no. 8.
20. CHIRIKOV, B.V. A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems. *Physics Reports*, 1979, vol. 52, no. 5. pp. 263–379.
21. LICHTENBERG, A.J. and LIEBERMAN, M.A. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer Science & Business Media, 2013.
22. REICHL, L. The Transition to Chaos: Conservative Classical and Quantum Systems Springer, 2021 *Area-Preserving Maps*, pp. 47–97.
23. MCGUINNESS, M., HONG, Y., GALLETLY, D. and LARSEN, P. Arnold Tongues in Human Cardiorespiratory Systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2004, vol. 14, no. 1. pp. 1–6.
24. ALRADDADI, I. The Asymmetric Periodically Forced Van Der Pol Oscillator. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2025, vol. 18, no. 1. pp. 5787.
25. QIAN, M., WANG, J. and ZHANG, X. Resonant Regions of Josephson Junction Equation in Case of Large Damping. *Physics Letters A*, 2008, vol. 372, no. 20. pp. 3640–3644.
26. DE SOUZA, S.L., BATISTA, A.M. and CALDAS, I.L. Arnold Tongues Replace Period-Doubling Cascades in a Memristor Circuit. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2025, vol. 35, no. 9.
27. WU, X., et al. Unveiling the Complexity of Arnold's Tongues in a Breathing-Soliton Laser. *Science Advances*, 2025, vol. 11, no. 12. pp. eads3660.
28. FELICIO, C.C. and RECH, P.C. Arnold Tongues and the Devil's Staircase in a Discrete-Time Hindmarsh–Rose Neuron Model. *Physics Letters A*, 2015, vol. 379, no. 43-44. pp. 2845–2847.
29. SANCHEZ, P.G.L., et al. Arnold Tongue Entrainment Reveals Dynamical Principles of the Embryonic Segmentation Clock. *Elife*, 2022, vol. 11. pp. e79575.
30. PLANAT, M. *Nonlinear Structure of Phase Motion from the Study of Differential Equations Near Resonant Tori*. Springer, 2005.
31. ZAKS, M.A. and PIKOVSKY, A. Frequency Locking Near the Gluing Bifurcation: Spin-Torque Oscillator Under Periodic Modulation of Current. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2016, vol. 335. pp. 33–44.
32. RUHUNUSIRI, W.S. and GOREE, J. Synchronization Mechanism and Arnold Tongues for Dust Density Waves. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2012, vol. 85, no. 4. pp. 046401.

33. SKRYABIN, D.V., FAN, Z., VILLOIS, A. and PUZYREV, D.N. Threshold of Complexity and Arnold Tongues in Kerr-Ring Microresonators. *Physical Review A*, 2021, vol. 103, no. 1. pp. L011502.
34. BOROVKOVA, E.I., et al. *Experimental Observation of Arnold Tongues in the Analysis of the Signal from Contour of the Autonomous Regulation of Heart Rate and Respiration*. IEEE, 2019.
35. KILBAS, A.A., SRIVASTAVA, H.M. and TRUJILLO, J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. elsevier, 2006.
36. EDELMAN, M. Fractional Maps and Fractional Attractors. Part II: Fractional Difference Caputo A-Families of Maps. *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, 2015, vol. 4, no. 4. pp. 391–402.
37. EDELMAN, M. Universal Fractional Map and Cascade of Bifurcations Type Attractors. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2013, vol. 23, no. 3.
38. EDELMAN, M. Nonlinear dynamics and complexity Springer, 2013 *Fractional Maps as Maps with Power-Law Memory*, pp. 79–120.
39. ORINAITE, U., TELKSNIENE, I., TELKSNIYS, T. and RAGULSKIS, M. How does the Fractional Derivative Change the Complexity of the Caputo Standard Fractional Map. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2024, vol. 34, no. 07. pp. 2450085.
40. GOODRICH, C. and PETERSON, A.C. *Discrete Fractional Calculus*. Springer, 2015.
41. ATICI, F.M. and ELOE, P. Discrete Fractional Calculus with the Nabla Operator. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations [Electronic Only]*, 2009, vol. 2009. pp. Paper No. 3, 12 p., electronic only.
42. HORN, R.A. and JOHNSON, C.R. *Matrix Analysis*. Cambridge university press, 2012.
43. NAVICKAS, Z., RAGULSKIS, M., VAINORAS, A. and SMIDTAITE, R. The Explosive Divergence in Iterative Maps of Matrices. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, vol. 17, no. 11. pp. 4430–4438.
44. SMIDTAITE, R., NAVICKAS, Z. and RAGULSKIS, M. Clocking Divergence of Iterative Maps of Matrices. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, vol. 95. pp. 105589.
45. LU, G., SMIDTAITE, R., HOWARD, D. and RAGULSKIS, M. An Image Hiding Scheme in a 2-Dimensional Coupled Map Lattice of Matrices. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2019, vol. 124. pp. 78–85. Available from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S096007791930147X> ISSN 0960-0779. DOI 10.1016/j.chaos.2019.04.038.
46. SMIDTAITE, R., LU, G. and RAGULSKIS, M. Image Entropy for the Identification of Chimera States of Spatiotemporal Divergence in Complex Coupled Maps of Matrices. *Entropy*, 2019, vol. 21, no. 5 ISSN 1099-4300. DOI 10.3390/e21050523.
47. SMIDTAITE, R., RAGULSKIENE, J., BIKULCIENE, L. and RAGULSKIS, M. Hyper Coupled Map Lattices for Hiding Multiple Images. *Complexity*, 2023, vol. 2023, no. 1. pp. 8831078. Available from: <https://doi.org/10.1155/2023/8831078> DOI 10.1155/2023/8831078.

48. SMIDTAITE, R. and RAGULSKIS, M. Finite-Time Divergence in Chialvo Hyperneuron Model of Nilpotent Matrices. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2024, vol. 179. pp. 114482. Available from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S096007792400033X> ISSN 0960-0779. DOI 10.1016/j.chaos.2024.114482.
49. TARASOV, V.E. and ZASLAVSKY, G.M. Fractional Equations of Kicked Systems and Discrete Maps. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2008, vol. 41, no. 43. pp. 435101. Available from: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/43/435101> ISSN 1751-8121; 1751-8113. DOI 10.1088/1751-8113/41/43/435101.
50. TARASOV, V.E. Discrete Map with Memory from Fractional Differential Equation of Arbitrary Positive Order. *Journal of Mathematical Physics*, 2009, vol. 50, no. 12.
51. EDELMAN, M. Fractional Standard Map: Riemann–Liouville Vs. Caputo. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, vol. 16, no. 12. pp. 4573–4580.
52. PETKEVIČIŪTĖ-GERLACH, D., ŠMIDTAITĖ, R. and RAGULSKIS, M. Intermittent Bursting in the Fractional Difference Logistic Map of Matrices. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2022, vol. 32, no. 01. pp. 2230002.
53. AIGNER, M. *Combinatorial Theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
54. LU, G., LANDAUSKAS, M. and RAGULSKIS, M. Control of Divergence in an Extended Invertible Logistic Map. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2018, vol. 28, no. 10. pp. 1850129.
55. UZDILA, E., TELKSNIENE, I., TELKSNYS, T. and RAGULSKIS, M. Finite-Time Stabilization of Unstable Orbits in the Fractional Difference Logistic Map. *Fractal and Fractional*, 2023, vol. 7, no. 8. pp. 570.
56. RAGULSKIS, M. and NAVICKAS, Z. The Rank of a Sequence as an Indicator of Chaos in Discrete Nonlinear Dynamical Systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, vol. 16, no. 7. pp. 2894–2906.
57. KURAKIN, V.L., KUZMIN, A.S., MIKHALEV, A.V. and NECHAEV, A.A. Linear Recurring Sequences Over Rings and Modules. *Journal of Mathematical Sciences*, 1995, vol. 76, no. 6. pp. 2793–2915.
58. LANDAUSKAS, M., NAVICKAS, Z., VAINORAS, A. and RAGULSKIS, M. Weighted Moving Averaging Revisited: An Algebraic Approach. *Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 36, no. 4. pp. 1545–1558.
59. LANDAUSKAS, M. and RAGULSKIS, M. A Pseudo-Stable Structure in a Completely Invertible Bouncer System. *Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 78, no. 3. pp. 1629–1643.
60. TIMOFEJEVA, I., LAUKAITIS, G., RINKEVICIUS, Z. and RAGULSKIS, M. Finite-Time Stabilization of the Fractional Model of the Driven Dissipative Nonlinear Pendulum. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2022, vol. 32, no. 04. pp. 2250056.
61. APARNA, H. and MADHUMITHA, J. Combined Image Encryption and Steganography Technique for Enhanced Security using Multiple Chaotic Maps. *Computers and Electrical Engineering*, 2023, vol. 110. pp. 108824.

62. ZHANG, R. and XIAO, D. A Secure Image Permutation–substitution Framework Based on Chaos and Compressive Sensing. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 2020, vol. 16, no. 3. pp. 1550147720912949.
63. FRIDRICH, J. Symmetric Ciphers Based on Two-Dimensional Chaotic Maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1998, vol. 8, no. 06. pp. 1259–1284.
64. WANG, X. and SU, Y. Color Image Encryption Based on Chaotic Compressed Sensing and Two-Dimensional Fractional Fourier Transform. *Scientific Reports*, 2020, vol. 10, no. 1. pp. 18556.
65. ZHANG, L.Y., HU, X., LIU, Y., WONG, K. and GAN, J. A Chaotic Image Encryption Scheme Owing Temp-Value Feedback. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, vol. 19, no. 10. pp. 3653–3659.