

Ekstremumų Kramerio transformacijų asimptotinė analizė

Algimantas AKSOMAITIS (KTU)

el. paštas: algimantas.aksomaitis@ktu.lt

1. Įvadas

Sakykime, yra dvi atsitiktinių dydžių (a.d.) sekos: $\{X_j, j \geq 1\}$ – nepriklausomieji a.d. su tolydžiąja skirstinio funkcija $F(x) = P(X_j \leq x)$; $\{N_n, n \geq 1\}$ – a.d., įgyjantieji tik sveikas teigiamas reikšmes su skirstinio funkcija $A_n(x) = P(N_n \leq x)$. A.d. X_j ir N_n su visais $j \geq 1$ ir $n \geq 1$ yra nepriklausomi.

Pažymėkime:

$$Z_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad W_n = \min(X_1, \dots, X_n).$$

Šias struktūras normalizuojame Kramerio transformacijomis [2]:

$$\tilde{Z}_n = n(1 - F(Z_n)), \quad \tilde{W}_n = nF(W_n).$$

Tada

$$P(\tilde{W}_n \leq x) = P(\tilde{Z}_n \leq x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, \quad 0 \leq x \leq n, \quad (1)$$

ir netolygusis konvergavimo greičio įvertis [3]

$$0 \leq \Delta_n(x) = P(\tilde{W}_n \leq x) - (1 - e^{-x}) = e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2 e^{-x}}{2(n-1)}$$

bei tolygusis

$$\sup_x \Delta_n(x) \leq \frac{2e^{-2}}{n-1}.$$

Mus domins struktūrų su atsitiktinių komponentių skaičiumi, normalizuotų Kramerio transformacijomis,

$$\tilde{W}_{N_n} = nF(W_{N_n}), \quad \tilde{Z}_{N_n} = n(1 - F(Z_{N_n}))$$

asimptotinis elgesys, kai $n \rightarrow \infty$.

Netiesinio normalizavimo bendrieji atvejai yra tirti, pavyzdžiui, [4], [5] ir [1] darbuose. Konkretaus normalizavimo (Kramerio transformacijos) atveju gausime tikslėsius įverčius negu [1] darbe.

2. Teiginių formuluotė ir įrodymas

TEOREMA.

• Jeigu $P\left(\frac{N_n}{n} \leq x\right) \rightarrow A(x)$, kai $n \rightarrow \infty$, tai

$$P(\tilde{W}_{N_n} \leq x) \rightarrow \Psi(x) = 1 - \int_0^\infty e^{-xz} dA(z).$$

• Jeigu $A(+0) = 0$ ir $\frac{x}{n} = q < 1$, tai

$$\begin{aligned} \Delta_{N_n}(x) = P(\tilde{W}_{N_n} \leq x) - \Psi(x) &\leq \frac{x^2}{2n(1-q)} \int_0^\infty ze^{-xz} dA_n(nz) \\ &+ x \int_0^\infty (A(z) - A_n(nz))e^{-xz} dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Iš teoremos išplaukia šie teiginiai:

1 teiginys. Netolygusis įvertis (2) galioja ir maksimumų struktūrai $\tilde{Z}_{N_n} = n(1 - F(Z_{N_n}))$.

2 teiginys. $I_n^{(2)}(x) \leq \frac{x^2}{2n(1-q)} \cdot \frac{MN_n}{n}$ (žiūr. (3)).

3 teiginys. Jeigu yra tolygusis įvertis $\sup_z (A(z) - A_n(nz)) \leq \delta_n$, tai $I_n^{(1)}(x) \leq \delta_n$ (žiūr. (3)).

Teoremos įrodymas. Panaudoję pilnosios tikimybės formulę, gauname:

$$P(\tilde{W}_{N_n} \leq x) = 1 - \sum_k \left(\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{\frac{k}{n}} \right)^n P(N_n = k) = 1 - \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{nz} dA_n(nz).$$

Skaičiuodami ribą, gauname teoremos pirmosios dalies įrodymą:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{W}_{N_n} \leq x) = \Psi(x) = 1 - \int_0^\infty e^{-xz} dA(z).$$

Toliau:

$$\begin{aligned} \Delta_{N_n}(x) &= \int_0^\infty e^{-xz} dA(z) - \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{nz} dA_n(nz) \\ &= \int_0^\infty e^{-xz} d(A(z) - A_n(nz)) + \int_0^\infty \left(e^{-xz} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{nz} \right) dA_n(nz) \\ &= I_n^{(1)}(x) + I_n^{(2)}(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Pradžioje įvertiname $I_n^{(2)}(x)$. Turime:

$$0 \leq e^{-xz} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{nz} = z \int_{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}^{e^{-x}} t^{z-1} dt \leq ze^{-xz} \left(\ln e^{-x} - \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right)$$

$$= ze^{-xz} \frac{x^2}{2n} \left(1 + \frac{2x}{3n} + \frac{2x^2}{4n^2} + \dots \right) \leq \frac{e^{-xz} z x^2}{2n(1-q)}. \quad (4)$$

Tokiu būdu

$$I_n^{(2)}(x) \leq \frac{x^2}{2n(1-q)} \int_0^\infty ze^{-xz} dA_n(nz). \quad (5)$$

Pertvarkome dėmenį $I_n^{(1)}(x)$:

$$I_n^{(1)}(x) = \int_0^\infty (A_n(nz) - A(z)) de^{-xz} = x \int_0^\infty (A(z) - A_n(nz)) e^{-xz} dz. \quad (6)$$

Iš (5), (6) ir (3) išplaukia teoremos antrosios dalies įrodymas.

3. Pavyzdys

Tarkime, kad

$$P(N_n = k) = \frac{1}{n}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Tada

$$A_n(nx) = x - \frac{\{nx\}}{n},$$

čia $\{x\}$ – skaičiaus x trupmeninė dalis.

$$A(x) - A_n(nx) = \frac{\{nx\}}{n} \leq \frac{1}{n}; \quad I_n^{(1)}(x) \leq \frac{1}{n}; \quad I_n^{(2)}(x) \leq \frac{x^2}{4n(1-q)} \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

4. Spęstini uęzdaviniai

1. Bendrosios skirstinio funkcijos $P(\widehat{W}_{N_n} < x, \widehat{Z}_{N_n} < y)$ asimptotinė analizė.
2. k -tųjų ekstremaliųjų reikšmių

$$\widetilde{X}_{k,n} = nF(X_{k,n}) \quad \text{ir} \quad \widetilde{X}_{n-k+1,n} = n(1 - F(X_{n-k+1,n}))$$

asimptotinė analizė. Jų bendrųjų skirstinių analizė.

Literatūra

1. A. Aksomaitis, Rate of convergence in the transference max-limit theorem, in: *Prob. Theory and Math. Stat. Proceedings*, VSPITEV (1994), pp. 1–4.
2. H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press (1946).
3. M.R. Leadbetter et al., *Extreme and Related Properties of Random Sequences and Processes*, New York, Heidelberg, Berlin (1986).
4. E. Pantcheva, Limit theorems for extreme order statistics under non-linear normalization, in: *Lect. Notes Math.*, Bd 1155-3 (1986), pp. 289–309.
5. В.М. Золоторев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, Наука, Москва (1986).

SUMMARY

A. Aksomaitis. Asymptotical analysis of Cramer's transforms for extrema

Asymptotic of normalized extrema of independent identically distributed random variables is analyzed. Normalization – Cramer's transforms [2].

Keywords: extremes, Cramer's transforms, rate of convergence.