

Nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių k -ojo maksimumo ribinis skirstinys

Arvydas JOKIMAITIS (KTU)

el. paštas: aksoma@mf.ktu.lt

Sakykime, $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su skirstinio funkcija

$$F_j(x) = P(X_j < x) \quad \forall j \geq 1.$$

Apibrėžkime atsitiktinį dydį

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Pažymėkime

$$m_n(x) = \max_{1 \leq j \leq n} (1 - F_j(a_n + b_n x)),$$
$$u_n(x) = \sum_{j=1}^n (1 - F_j(a_n + b_n x)),$$

čia $\{a_n\}$ ir $\{b_n > 0\}$ – centravimo ir normavimo konstantų sekos.

Suformuluosime gerai žinomą rezultatą (žiūr. [2]).

1 teorema. *Tarkime, tenkinama sąlyga*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(x) = 0 \quad \forall x. \quad (1)$$

Tam, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \quad (2)$$

kiekviename funkcijos $H(x)$ tolydumo taške (čia $H(x)$ – neišsigimusi skirstinio funkcija) būtina ir pakankama, kad egzistuotų riba

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) > 0. \quad (3)$$

Be to

$$H(x) = e^{-u(x)}.$$

Sudarykime n pirmųjų atsitiktinių dydžių sekos $\{X_n\}$ narių variacinę eilutę

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}.$$

Kai $k > 1$ yra fiksuotas sveikasis teigiamas skaičius, o $n \rightarrow \infty$, atsitiktinį dydį $X_{n-k+1:n}$ vadinsime k -uoju maksimumu.

Šiame darbe rasime tiesiškai normuoto k -ojo maksimumo ribinį skirstinį. Pažymėsime, kad vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių k -ųjų ekstremaliųjų reikšmių ribiniai skirstiniai yra nagrinėti visoje eilėje darbų (žr. [1], [3] ir kt.).

Suformuluosime pagrindinį rezultatą.

2 teorema. *Tarkime, tenkinamos (1) ir (2) lygybės. Visiems x , tokiems, kad $0 < H(x) < 1$, teisinga lygybė*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) = H_{(k)}(x).$$

Čia

$$H_{(k)}(x) = H(x) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(u(x))^i}{i}.$$

Irodymas. Pažymėkime $a_n + b_n x = x_n$. Turime

$$P(X_{n-k+1:n} < x_n) = \sum_{i=0}^{k-1} P(A_i), \quad (4)$$

čia $A_i = \{\text{tarp } X_1, \dots, X_n \text{ yra lygiai } i \text{ atsitiktinių dydžių, nemažesnių už } x_n\}$.

Turime

$$P(A_0) = P(Z_n < x_n) = \prod_{j=1}^n F_j(x_n).$$

Atsižvelgę į teoremos sąlygas, gauname

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_0) = H(x) = e^{-u(x)}. \quad (5)$$

Toliau turime

$$P(A_1) = \sum_{i_1=1}^n (1 - F_{i_1}(x_n)) \prod_{j:j \neq i_1}^n F_j(x_n) = \prod_{j=1}^n F_j(x_n) \sum_{i_1=1}^n \frac{(1 - F_{i_1}(x_n))}{F_{i_1}(x_n)}.$$

Kadangi tenkinama (1) sąlyga, tai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{i_1}(x_n) = 1, \quad i_1 = 1, 2, \dots$$

Atsižvelgę į teoremos sąlygas, o taip pat į (3) lygybę, iš čia gauname

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n F_j(x_n) \sum_{i_1=1}^n (1 - F_{i_1}(x_n)) = H(x)u(x). \quad (6)$$

Toliau turime

$$\begin{aligned} P(A_2) &= \sum_{i_1, i_2: i_1 \neq i_2}^n (1 - F_{i_1}(x_n))(1 - F_{i_2}(x_n)) \prod_{j: j \neq i_1, i_2}^n F_j(x_n) \\ &= \prod_{j=1}^n F_j(x_n) \sum_{i_1, i_2: i_1 \neq i_2}^n \frac{(1 - F_{i_1}(x_n))(1 - F_{i_2}(x_n))}{F_{i_1}(x_n)F_{i_2}(x_n)}. \end{aligned}$$

Atsižvelgę į (1) sąlygą, gauname

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n F_j(x_n) \sum_{i_1, i_2: i_1 \neq i_2}^n (1 - F_{i_1}(x_n))(1 - F_{i_2}(x_n)) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n F_j(x_n) \left\{ \left(\sum_{j=1}^n (1 - F_j(x_n)) \right)^2 - \sum_{j=1}^n (1 - F_j(x_n))^2 \right\}. \end{aligned}$$

Atsižvelgę į (1) ir (3) sąlygas, turime

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (1 - F_j(x_n))^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(x)u_n(x) = 0$$

visiems x tokiems, kad $u(x) < \infty$. Iš čia, atsižvelgę į teoremos sąlygas, gauname

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_2) = H(x) \frac{(u(x))^2}{2}. \quad (7)$$

Galiausiai analogiškai parodome, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_{k-1}) = H(x) \frac{(u(x))^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (8)$$

Atsižvelgę į (4) ir (5)–(8) lygybes, gauname

$$P(X_{n-k+1:n} < x_n) = H(x) \left(1 + u(x) + \frac{(u(x))^2}{2} + \dots + \frac{(u(x))^{k-1}}{(k-1)!} \right).$$

Teorema įrodyta.

Pavyzdys. Tarkime,

$$F_j(x) = 1 - \frac{\lambda_j}{x}, \quad x > \lambda_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Parenkame centravimo ir normavimo konstantas

$$a_n = 0, \quad b_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Jei parametrai $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ yra tokie, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{1 \leq j \leq n} \lambda_j}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = 0,$$

tai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(x) = 0, \quad \forall x > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Taikydami 1 teoremą gauname, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < b_n x) = e^{-\frac{1}{x}}, \quad x > 0.$$

Taikydami 2 teoremą, gauname k -ojo maksimumo ribinį skirstinį

$$H_{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i! x^i}, \quad x > 0.$$

Literatūra

- [1] J. Galambos, *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, Wiley, New York (1978).
- [2] E. Pancheva, Limit theorems for extreme order statistics under nonlinear normalization, *Lecture Notes Math.*, 1155, 284–309 (1985).
- [3] R. -D. Reiss, *Approximate Distributions of Order Statistics*, Springer, New York (1989).

Limit distribution for the k -th maxima of nonindentically distributed random variables

A. Jokimaitis

In this paper the limit distribution for k th maxima of independent nonidentically distributed random variables is obtained.