

Maksimumų ir minimumų bendrųjų skirstinių asimptotiniai tyrimai

Algimantas AKSOMAITIS (KTU)

el. paštas: aksoma@mf.ktu.lt

1. Įvadas

Sakykime, kad yra dvi a.d. sekos: $\{X_j, j \geq 1\}$ – nepriklausomi a.d. su $P(X_j \leq x) = F(x)$, $j \geq 1$ ir $\{N_n, n \geq 1\}$ – a.d., įgyjantieji tik sveikas teigiamas reikšmes su $P(N_n \leq x) = A_n(x)$, $n \geq 1$. Atsitiktiniai dydžiai X_j ir N_n su visais $j \geq 1$ ir $n \geq 1$ yra nepriklausomi.

Pažymėkime:

$$Z_n = \max(X_j, j = \overline{1, n}), \quad Z_{N_n} = \max(X_j, j = \overline{1, N_n}), \\ W_n = \min(X_j, j = \overline{1, n}), \quad W_{N_n} = \min(X_j, j = \overline{1, N_n}).$$

Tarkime, kad yra tokios realiųjų skaičių sekos: $\{u_n, n \geq 1\}$ ir $\{v_n, n \geq 1\}$, su kuriomis

$$\tau_n = n(1 - F(u_n)) \rightarrow \tau, \quad 0 \leq \tau < \infty, \\ \gamma_n = nF(v_n) \rightarrow \gamma, \quad 0 \leq \gamma < \infty,$$

kai $n \rightarrow \infty$.

Tada ([1], 1.8.2 teorema)

$$P(Z_n \leq u_n, W_n \leq v_n) \rightarrow G(\tau, \gamma), \quad \text{kai } n \rightarrow \infty; \quad (1)$$

čia

$$G(\tau, \gamma) = e^{-\tau}(1 - e^{-\gamma}).$$

Mus domins konvergavimo greičio įvertis (1) sąryšyje. Maksimumų konvergavimo greičio įvertis

$$|P(Z_n \leq u_n) - e^{-\tau}| \leq \Delta_n(\tau) \quad (2)$$

yra pateiktas [1] (2.4.2. teorema), o taip pat šio straipsnio (5) sąryšyje.

Toliau, tarkime, kad

$$A_n(nx) = P\left(\frac{N_n}{n} \leq x\right) \rightarrow A(x), \quad (3)$$

kai $n \rightarrow \infty$. Tada, esant (1) ir (3) sąlygoms, mes įrodysime, kad

$$\mathbf{P}(Z_{N_n} \leq u_n, W_{N_n} \leq v_n) \rightarrow \psi(\tau, \gamma), \quad (4)$$

kai $n \rightarrow \infty$. Pateiksime $\psi(\tau, \gamma)$ struktūrą ir ištirsime konvergavimo greitį (4) sąryšyje. Tai bus [3] publikacijos plėtinys bendrųjų skirstinių atveju.

2. Rezultatų formuluotė ir įrodymas

1 teorema.

$$\Delta_n(\tau, \gamma) = |\mathbf{P}(Z_n \leq u_n, W_n \leq v_n) - G(\tau, \gamma)| \leq \Delta_n(\tau) + \Delta_n(\tau, \gamma).$$

Įvertis $\Delta_n(\tau)$ pateiktas [1], o

$$\Delta_n(\tau, \gamma) \leq \frac{0,3}{n-1} + e^{-(\tau+\gamma)} (|\tau + \gamma - \tau_n - \gamma_n| + (\tau + \gamma - \tau_n - \gamma_n)^2),$$

jeigu tik

$$\tau + \gamma - \tau_n - \gamma_n \leq \ln 2.$$

2 teorema. Tarkime, kad yra (1) ir (3) sąlygos. Tada galioja (4) ir

$$\psi(\tau, \gamma) = \int_0^\infty e^{-\tau x} (1 - e^{-\gamma x}) dA(x).$$

Be to, galioja įvertis

$$\begin{aligned} \Delta_{N_n}(\tau, \gamma) &= |\mathbf{P}(Z_{N_n} \leq u_n, W_{N_n} \leq v_n) - \psi(\tau, \gamma)| \\ &\leq \Delta_n(\tau) \int_0^\infty x \rho_n(\tau, x) dA_n(nx) + \Delta_n(\tau, \gamma) \int_0^\infty x \rho_n(\tau, \gamma, x) dA_n(nx) \\ &\quad + \int_0^\infty \tilde{\Delta}_n(x) de^{-\tau x} (1 - e^{-\gamma x}); \end{aligned}$$

čia

$$\begin{aligned} \rho_n(\tau, x) &= \max \left(\left(1 - \frac{\tau_n}{n} \right)^{n(x-1)}, e^{-\tau(x-1)} \right), \\ \rho_n(\tau, \gamma, x) &= \max \left(\left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n} \right)^{n(x-1)}, e^{-(\tau+\gamma)(x-1)} \right), \\ \tilde{\Delta}_n(x) &= |A_n(nx) - A(x)|. \end{aligned}$$

1 teoremos įrodymas. Galioja sąryšiai

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \leq u_n, W_n \leq v_n) &= \begin{cases} F^n(u_n), & u_n \leq v_n, \\ F^n(u_n) - (F(u_n) - F(v_n))^n, & u_n > v_n \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^n, & \tau_n + \gamma_n \geq n, \\ \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^n, & \tau_n + \gamma_n < n. \end{cases} \end{aligned}$$

Mus domins atvejis, kai $u_n > v_n$, nes priešingu atveju ($u_n \leq v_n$) įvertis gaunamas identiškas (2) (mes jį pateiksime).

Turime:

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^n - G(\tau, \gamma) \right| &\leq \left| \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^n - e^{-\tau} \right| \\ &+ \left| e^{-(\tau + \gamma)} - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^n \right| \leq \Delta_n(\tau) + \tilde{\Delta}_n(\tau, \gamma). \end{aligned}$$

Pasinaudoję [1], (314 psl.), gauname:

$$\Delta_n(\tau) = \frac{0,3}{n-1} + e^{-\tau} (|\tau - \tau_n| + (\tau - \tau_n)^2), \quad (5)$$

kai $\tau - \tau_n \leq \ln 2$.

Ta pačia metodika, gauname, kad ir

$$\tilde{\Delta}_n(\tau, \gamma) = \frac{0,3}{n-1} + e^{-(\tau + \gamma)} (|\tau + \gamma - \tau_n - \gamma_n| + (\tau + \gamma - \tau_n - \gamma_n)^2),$$

kai

$$\tau + \gamma - \tau_n - \gamma_n \leq \ln 2.$$

2 teoremos įrodymas. Panaudoję pilnosios tikimybės formulę, gauname:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_{N_n} \leq u_n, W_{N_n} \leq v_n) &= \begin{cases} \sum_j \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^j \mathbf{P}(N_n = j), & u_n \leq v_n, \\ \sum_j \left(\left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^j - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^j \right) \mathbf{P}(N_n = j), & u_n > v_n, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^{nx} dA_n(nx), & u_n \leq v_n, \\ \left(\int_0^\infty \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^{nx} - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^{nx} \right) dA_n(nx), & u_n > v_n. \end{cases} \end{aligned}$$

Pakankamai dideliems n gausime, kad $u_n > v_n$ ir todėl

$$\mathbf{P}(Z_{N_n} \leq u_n, W_{N_n} \leq v_n) \rightarrow \int_0^{\infty} (e^{-\tau x} - e^{-(\tau+\gamma)x}) dA(x).$$

Taigi, ribinė funkcija

$$\psi(\tau, \gamma) = \int_0^{\infty} e^{-\tau x} (1 - e^{-\gamma x}) dA(x).$$

Toliau

$$\begin{aligned} \Delta_{N_n}(\tau, \gamma) &= \left| \int_0^{\infty} \left(\left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^{nx} - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^{nx} - e^{-\tau x} (1 - e^{-\gamma x}) \right) dA_n(nx) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} e^{-\tau x} (1 - e^{-\gamma x}) d(A_n(nx) - A(x)) \right| \\ &\leq \int_0^{\infty} \left| \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^{nx} - e^{-(\tau+\gamma)x} \right| dA_n(nx) \\ &\quad + \int_0^{\infty} |A_n(nx) - A(x)| de^{-\tau x} (1 - e^{-\gamma x}). \end{aligned} \quad (6)$$

Kadangi

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^{nx} - e^{-(\tau+\gamma)x} \right| &= \left| x \int_{e^{-(\tau+\gamma)}}^{\left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^n} t^{x-1} dt \right| \\ &\leq x \left| e^{-(\tau+\gamma)} - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^n \right| \rho_n(\tau, \gamma, x) \end{aligned}$$

ir analogiškai

$$\left| \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^{nx} - e^{\tau x} \right| \leq x \left| e^{-\tau} - \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^n \right| \rho_n(\tau, x),$$

tai, įstatę šiuos įverčius į (6), gauname teoremos įrodymą.

Literatūra

- [1] M.R. Leadbetter *et al.*, *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, New York, Heidelberg, Berlin (1986).
- [2] A. Aksomaitis, Rates of convergence in the transference theorems for the extrema values, *22nd European Meeting of Statisticians*, Vilnius, TEV, Abstracts (1998).
- [3] A. Aksomaitis, Maksimumų su atsitiktiniu komponentių skaičiumi asimptotiniai tyrimai, *LMD mokslo darbai*, III tomas, MII, 461–465 (1999).

Asymptotical investigations of the general distributions of the maxima and minima

A. Aksomaitis

The convergence rate estimations in the limit theorem of the general distribution functions of the extreme values are presented. There results extend theoretical prepositions of the published work [3].