

Vamzdžio įlinkio ir įtempimų skaičiavimas skysčio greičio pulsacijos atveju

Rimantas DIDŽGALVIS (KŽŪU), Antanas SUDINTAS (KTU),

Irena TIKNEVIČIENĖ (KTU)

el. paštas: antanas.sudintas@fmf.ktu.lt

Šiame straipsnyje darbų [1] ir [2] pagrindu yra nagrinėjami skersiniai vamzdžio svyravimai pakankamai ilgų įgriuvų atveju. Žemės sluoksnio nubyrėjimą nuo vamzdžio įvertiname kaip ir darbe [2] išraiška $\xi(t) = e^{-\lambda t}$. Esant pakankamai ilgai įgriuvai ir gana ryškiam vamzdžio įlinkiui, yra būtina įvertinti vamzdžio normalinius įtempimus. Šiuos įtempimus apibrėžianti jėga, kuri veikia vamzdžio ašies kryptimi, priklauso nuo žemės sluoksnio poveikio vamzdžiui. Sluoksnio poveikio įtempimo jėgai charakterį įvertinsime išraiška $Re^{\lambda(t-T)}$, čia λ – koeficientas, sąlygojamas grunto reologinių savybių, T – per einamojo proceso (žemės byrėjimo) trukmė, R – grunto apkrovos dydis.

Be to, dėl tam tikrų hidraulinės tėkmės vamzdyje sąlygų pasikartojimų (vietinių kliūčių, nuosėdų vamzdyje ir pan.) galimos tekančio skysčio greičio pulsacijos. Vidutinio greičio ir pagreičio kitimą galima įvertinti taip

$$\begin{aligned}\omega &= \bar{\omega} + u \sin pt, \\ \omega' &= up \cos pt;\end{aligned}\tag{1}$$

$\bar{\omega}$ – pastovus vidutinis skysčio greitis vamzdyje,

ω' – skysčio pulsacijos pagreitis,

u – pulsacijos amplitudė,

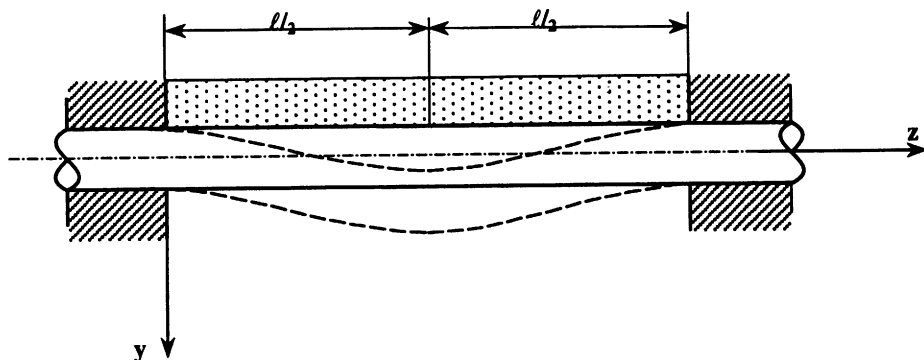
p – pulsacijos dažnumas.

Tais atvejais, kada dėl įgriuvos ir veikiančios žemės (grunto) apkrovos įlinkusiame vamzdyje kyla tekančio skysčio greičio pulsacijos (žr. 1 pav.), susidaro sudėtingos, padidinto intensyvumo dinaminės apkrovos.

Įvertinus, kad

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} + \omega^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{d\omega}{dt},\end{aligned}\tag{2}$$

vamzdžio svyravimų lygtis esant šioms apkrovoms užrašomos taip:



1 pav.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = -h\xi(t) \frac{\partial y}{\partial t} - (m_V + m_z \xi(t)) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Re^{\lambda(t-T)} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - m_{SK} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} + \omega^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{d\omega}{dt} \right). \quad (3)$$

Čia

$$I = I_{VS} + I_z \xi(t), \quad (4)$$

 I_{VS} – užpildyto skysčiu vamzdžio inercijos momentas, m_z – grunto sluoksnio ant vamzdžio ilgio vieneto momentu $t = 0$ masė, m_V – vamzdžio ilgio vieneto masė, ω – skysčio greitis, m_{SK} – vamzdžio ilgio vienetui tekančio skysčio masė, h – grunto klampumo koeficientas $h = g(\lambda)$, I_z – grunto sluoksnio skerspjūvio inercijos momentas.Ištačius $\zeta(t) = e^{-\lambda t}$, (1), (2) ir (4) į (3), lygtį užrašome taip:

$$E (I_{VS} + I_z e^{-\lambda t}) \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + h e^{-\lambda t} \frac{\partial y}{\partial t} + (m_V + m_z e^{-\lambda t}) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Re^{\lambda(t-T)} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + m_{SK} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2(\bar{\omega} + u \sin pt) \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial t} + (\bar{\omega} + u \sin pt)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + up \cos pt \frac{\partial y}{\partial z} \right) = 0. \quad (5)$$

Pakankamai kieto grunto atveju vamzdžio galai gali būti laikomi kietai įtvirtintais, todėl sprendinio $y(z; t)$ pradinės ir kraštinės sąlygos užrašomos taip:

$$\begin{aligned} y(z, 0) = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} &= q(z), \\ y(0, t) = y(l, t) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z=\ell} = 0. \quad (7)$$

Sprendinį, tenkinantį (7) kraštines sąlygas, užrašome taip:

$$y = \sin^2 \frac{\pi z}{\ell} \cdot f(t). \quad (8)$$

Tada $q(z) = q_0 \cdot \sin^2 \frac{\pi z}{\ell}$, kur $q_0 = f'(0)$.

Funkciją $f(t)$ apskaičiuosime Galerkinio-Bubnovo būdu intervale $z \in [0; \ell]$. Atlikus integravimo veiksmus, funkcijai $f(t)$ apskaičiuoti užrašoma tokia diferencialinė lygtis

$$\begin{aligned} & (m_V + m_{SK} + m_z e^{-\lambda t}) \ddot{f} + h e^{-\lambda t} \dot{f} \\ & + \left(\frac{8}{3} \frac{\pi^4}{\ell^2} E I_{VS} + \frac{8}{3} \frac{\pi^4}{\ell^2} E I_z e^{-\lambda t} + \frac{4}{3} \pi^2 R e^{\lambda(t-T)} \right. \\ & \left. - \frac{4}{3} \pi^2 m_{SK} (\bar{\omega}^2 + 2\bar{\omega}u \sin pt) + \frac{u^2}{2} (1 - \cos pt) \right) f = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Funkcijas $e^{-\lambda t}$, $e^{\lambda t}$, $\sin pt$ ir $\cos pt$ (9) lygtyje pakeičiame laipsninėmis eilutėmis ir diferencialinę lygtį užrašome taip:

$$\begin{aligned} & \left(m_V + m_{SK} + m_z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k t^k}{k!} \right) \ddot{f} + h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k t^k}{k!} \dot{f} \\ & + \left(\frac{8}{3} \frac{\pi^4}{\ell^2} E I_{VS} + \frac{8}{3} \frac{\pi^4}{\ell^2} E I_z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k t^k}{k!} + \frac{4}{3} \pi^2 R e^{-\lambda T} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} \right. \\ & \left. - \frac{4}{3} \pi^2 m_{SK} \left(\bar{\omega}^2 + 2\bar{\omega}u \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{u^2}{2} - \frac{u^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2p)^{2k} t^{2k}}{(2k)!} \right) \right) f = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

(10) diferencialinės lygties koeficientai yra laipsninės eilutės, konverguojančios intervale $|t| < \infty$, o tuo pačiu ir intervale $[0; T]$. Todėl sprendinį patogiau yra ieškoti skleidžiant jį Makloreno eilute:

$$f(t) = q_0 t + \sum_{k=2}^{\infty} C_k t^k. \quad (11)$$

Diferencijuojame (11) du kartus

$$\begin{aligned} f'(t) &= q_0 + \sum_{k=2}^{\infty} k C_k t^{k-1}, \\ f''(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) C_k t^{k-2}, \end{aligned}$$

ir visas tris išraiškas įrašome į (10) lygtį. Atlikus algebrinius veiksmus, koeficientai C_k apskaičiuojami taip:

$$C_2 = -\frac{hq_0}{2m}, \quad m = m_V + m_{SK} + m_z;$$

$$C_3 = -\frac{1}{6m} \left(2C_2(h - m_z\lambda) - hq_0\lambda + \frac{8}{3}\frac{\pi^4}{\ell^2}q_0(EI_{VS} + EI_z) + \frac{4}{3}\pi^2 Re^{-\lambda T}q_0 - \frac{4}{3}\pi^2 m_{SK}\bar{\omega}^2 q_0 \right);$$

$$C_4 = -\frac{1}{12m} \left[(3h - 6\lambda m_z)C_3 + \left(m_z\lambda^2 - 2h\lambda + \frac{8}{3}\frac{\pi^4}{\ell^2}(EI_{VS} + EI_z) + \frac{4}{3}\pi^2 Re^{-\lambda T} - \frac{4}{3}\pi^2 m_{SK}\bar{\omega}^2 \right) C_2 + \left(\frac{h\lambda^2}{2!} - \frac{8}{3}\frac{\pi^4}{\ell^2}EI_z \cdot \lambda + \frac{4}{3}\pi^2 Re^{-\lambda T} \cdot \lambda - \frac{8}{3}\pi^2 m_{SK}\bar{\omega} \cdot up \right) q_0 \right];$$

$$C_5 = -\frac{1}{20m} \left[(4h - 12\lambda m_z)C_4 + \left(3m_z\lambda^2 - 3h\lambda + \frac{8}{3}\frac{\pi^4}{\ell^2}(EI_{VS} + EI_z) + \frac{4}{3}\pi^2 Re^{-\lambda T} - \frac{4}{3}\pi^2 m_{SK}\bar{\omega}^2 \right) C_3 + \left(h\lambda^2 - \frac{8}{3}\frac{\pi^4}{\ell^2}EI_z\lambda + \frac{4}{3}\pi^2 Re^{-\lambda T}\lambda - \frac{8}{3}\pi^2 m_{SK}\bar{\omega} \cdot up \right) C_2 + \left(-\frac{h\lambda^3}{3!} + \frac{8}{3}\frac{\pi^4}{\ell^2}EI_z\frac{\lambda^2}{2} + \frac{4}{3}\pi^2 Re^{-\lambda T}\frac{\lambda^2}{2} - \frac{4}{3}\pi^2 m_{SK}u^2 \cdot p^2 \right) q_0 \right].$$

Aukštesnių eilių koeficientams C_{n+2} ($n = 4, 5, 6, \dots$) apskaičiuoti yra gauta tokia formulė

$$C_{n+2} = -\frac{1}{m(n+2)(n+1)} \left[m_z \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (n+2-k)(n+1-k)\lambda^k}{k!} C_{n+2-k} + h \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n+1-k)\lambda^k}{k!} C_{n+1-k} + (-1)^n \frac{h\lambda^n}{n!} q_0 + \frac{8}{3}\frac{\pi^4}{\ell^2} EI_{VS} C_n + \frac{8}{3}\frac{\pi^4}{\ell^2} EI_z \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} C_{n-k} + \frac{8}{3}\frac{\pi^4}{\ell^2} EI_z \frac{(-1)^{n-1} \lambda^{n-1}}{(n-1)!} q_0 + \frac{4}{3}\pi^2 Re^{-\lambda T} \left(q_0 \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^k}{k!} C_{n-k} \right) - \frac{4}{3}\pi^2 m_{SK}\bar{\omega}^2 C_n + \frac{8}{3}\pi^2 m_{SK}\bar{\omega} u \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} p^{2k+1} C_{n-1-2k} + \frac{(-1)^i \alpha(n) p^{n-1}}{(n-1)!} q_0 \right) \right]$$

$$+\frac{2}{3}m_{SK}\pi^2u^2\left(\sum_{k=0}^{n-j}\frac{(-1)^{k+1}(2p)^{2k+2}}{(2k+2)!}C_{n-2-2k}+(-1)^{j+1}\beta(n)\frac{(2p)^{n-1}}{(n-1)!}q_0\right)\Bigg];$$

$$n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots \quad \alpha(n) = \begin{cases} 0, & \text{kai } n \text{ nelyginis,} \\ 1, & \text{kai } n \text{ lyginis,} \end{cases}$$

$$i = 4, 4, 5, 5, 6, 6, \dots$$

$$j = 4, 5, 5, 6, 6, 7, \dots \quad \beta(n) = \begin{cases} 0, & \text{kai } n \text{ lyginis,} \\ 1, & \text{kai } n \text{ nelyginis.} \end{cases}$$

(5) diferencialinės lygties sprendinys bus

$$y = \left(q_0 t + \sum_{k=2}^{\infty} C_k t^k \right) \sin^2 \frac{\pi z}{\ell}.$$

Išvada. Sudarytas įlenkto vamzdžio su tekančiu skysčiu matematinis modelis skysčio pulsacijos atveju. Išsprendus diferencialinę lygtį, yra gauta analitinė sprendinio išraiška, kurią patogų panaudoti vamzdžio normalinių įtempimų apskaičiavimui, esant įvairiems apkrovos dydžiams ir tėkmės greičio pulsacijoms. Gauti rezultatai leidžia tiksliai įvertinti vamzdžio mechaninį resursą sudėtingų apkrovų atvejais.

Literatūra

- [1] R. Didžgalvis, A. Sudintas, Vamzdžių su tekančiu skysčiu įlenkio ir normaliųjų įtempimų skaičiavimas staigos skersinės apkrovos atveju, *LMD mokslo darbai*, Vilnius, 423–425 (1998).
- [2] R. Didžgalvis, A. Sudintas, I. Tiknevičienė, Vamzdžio su tekančiu skysčiu įlenkio ir įtempimų skaičiavimas kintamos grunto apkrovos atveju, *LMD mokslo darbai*, Vilnius, 444–449 (1999).

Calculation of pipe bend and tension in case of fluid velocity pulsation

R. Didžgalvis, A. Sudintas, I. Tiknevičienė

The mathematical model of a bend pipe with a flowing fluid at a fluid pulsation was created. By solving differential equations, an analytical expression of solution is received, which may be well used for calculation of normal tension of the pipe at different ground load quantities and flow velocity pulsation. The received results allow a more precise evaluations of mechanical resource of the pipe at the complicated loads.