

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

ANDRIUS KRIŠČIŪNAS

GREITAI KONVERGUOJANČIŲ
SKAITINIŲ ALGORITMŲ SUKŪRIMAS
TRUMPŲJŲ BANGŲ TYRIMUI

Daktaro disertacija
Fiziniai mokslai, informatika (09P)

2017, Kaunas

Disertacija rengta 2012–2017 metais Kauno technologijos universiteto Informatikos fakulteto Taikomosios informatikos katedroje.

Mokslinis vadovas:

Prof. habil. dr. Rimantas Barauskas (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika, 09P).

Interneto svetainės, kurioje skelbiama disertacija, adresas:

<http://ktu.edu>

Redagavo:

Inga Nanartonytė (leidykla „Technologija“)

© A. Kriščiūnas, 2017

ISBN 978-609-02-1351-3

Leidinio bibliografinė informacija pateikiama Lietuvos nacionalinės Martyno Mažvydo bibliotekos Nacionalinės bibliografijos duomenų banke (NBDB)

TURINYS

SANTRUMPOS	5
SIMBOLIAI	6
ĮVADAS.....	8
1. TRUMPUJŲ BANGŲ BAIGTINIŲ ELEMENTŲ MODELIAI.....	11
1.1. Baigtinių elementų metodo raida ir taikymo sritys	12
1.2. Tampriųjų trumpųjų bangų modeliavimas baigtinių elementų metodu ...	13
1.3. Tampriojo kontinuumo baigtiniai elementai	14
1.4. Baigtiniai elementai, skirti akustinėms ir tampriosioms bangoms modeliuoti.....	15
1.4.1. Vienmačiai baigtiniai elementai, skirti tampriosioms bangoms simuliuoti.....	15
1.4.2. Dvimačiai baigtiniai elementai, skirti tampriosioms bangoms simuliuoti.....	16
1.4.3. Dvimačiai baigtiniai elementai, skirti akustinėms bangoms simuliuoti.....	17
1.5. Tampriojo kontinuumo baigtinių elementų modelių neslopinamieji tikriniai virpesiai.....	18
1.6. Bangų sklidimo modeliavimas diskrečiuosiuose tinkleliuose, fazinio greičio paklaidų problema	19
1.6.1. Simuliuojamo impulso atvaizdavimo būdai	20
1.6.2. Skaitinės dispersijos įvertinimo būdai.....	21
1.6.3. Skaitinės dispersijos priklausomybė nuo impulso dažnių spektro	22
1.7. Sutelktosios, konsistentinės ir apibendrintosios masių matricos, jų įtaka skaičiavimo tikslumui.....	23
1.8. Skaitinio integravimo schemas, skirtos trumpųjų bangų modeliavimo uždaviniams spręsti, ir įstrižaininės masių matricos prasmė	25
1.9. Skaitinės dispersijos minimizavimas koreguojant tikrines formas ir modifikuojant skaitinio integravimo schemas	25
1.10. Aukštesniosios eilės elementų sudarymas per modų sintezę	26
1.11. Pirmojo skyriaus išvados.....	28
2. BAIGTINIŲ ELEMENTŲ MATRICŲ SINTEZĖS ALGORITMAI.....	30
2.1. Mažiausios fazinės paklaidos vienmačių elementų matricų sintezę atliekant tikrinių dažnių ir formų korekcijas	30
2.1.1. Tikslų funkcijos minimizavimas gradientinio nusileidimo metodu ..	32
2.1.2. Pradinio elemento sudarymas.....	33
2.1.3. Tikrinių dažnių paklaidų minimizavimas.....	34
2.2. Mažiausios fazinės paklaidos elementų matricų sintezė dvimatėms akustinėms struktūroms	36
2.2.1. Dvimačio sintezuotojo elemento sudarymas	37
2.2.2. Simetrinės modos dvimačiame akustinių bangų baigtinių elementų modelyje ir sintezuotojo elemento sudarymas.....	38
2.2.3. Sintezės rezultatas dvimatei akustinei bangai	39

2.3. Mažiausios fazinės paklaidos elementų matricų sintezė dvimatėms tampriosioms struktūroms	41
2.3.1. Puasono koeficiento įtaka dvimačių tamprųjų baigtinių elementų tikrinių dažnių paklaidoms	42
2.3.2. Sintezės rezultatas dvimatei tampriajai bangai.....	43
2.4. Antrojo skyriaus išvados	44
3. MODELIŲ, SURINKTŲ IŠ SINTEZUOTŲJŲ ELEMENTŲ, KONVERGAVIMO TYRIMAS	46
3.1. Modelių konvergavimo nehomogeninėse ir šakotose vienmatėse struktūrose tyrimas	46
3.1.1. Bangos sklidimo analizė.....	46
3.1.2. Šakota nehomogeninė struktūra	49
3.1.3. Modelių palyginimas pagal tinklelio retumą	50
3.1.4. Skaičiavimo išteklių poreikio palyginimas	52
3.2. Modelių konvergavimo dvimatėse nehomogeninėse struktūrose tyrimas	55
3.2.1. Impulso sklidimo analizė.....	55
3.2.2. Nehomogeninė struktūra	58
3.2.3. Baigtinių elementų modelių iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų palyginimas tinklelio retumo aspektu.....	59
3.2.4. Baigtinių elementų modelių iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų palyginimas skaičiavimo išteklių poreikio aspektu	61
3.3. Modelių konvergavimo dvimačiuose tampruosiuose modeliuose tyrimas	62
3.4. Trečiojo skyriaus išvados	65
4. PRAKTINIS TAIKYMAS	67
4.1. Skysčio pereinamųjų procesų modeliavimas šakotose konstrukcijose.....	67
4.1.1. Vamzdyno tėkmės matematinis modelis	67
4.1.2. Baigtinių elementų modelio sudarymas	68
4.1.3. Skysčio pereinamųjų procesų modeliavimas dideliuose vamzdynuose	69
4.1.4. Slėgio impulso modeliavimas arterinio medžio fragmente	72
4.1.5. Sintezuotųjų elementų pritaikymas atliekant trumpųjų bangų modeliavimą pereinamiesiems slėgio virpesiams vamzdyne apskaičiuoti	74
4.2. Ultragarso bangų sklidimo nehomogeninėse akustinėse terpėse apskaičiavimas.....	77
4.3. Ketvirtojo skyriaus išvados	78
BENDROSIOS IŠVADOS.....	79
LITERATŪRA.....	81
AUTORIAUS MOKSLINIŲ PUBLIKACIJŲ DARBO TEMA SĄRAŠAS.....	89

SANTRUMPOS

1D modelis – vienmatis modelis

2D modelis – dvimatis modelis

Arterinis medis – arterijų tinklinė struktūra

BE – baigtiniai elementai

BEM – baigtinių elementų metodas

BSM – baigtinių skirtumų metodas

DLDI – diferencialinės lygties dalinės išvestinės

ECG – elektrokardiograma

PDL – paprastosios diferencialinės lygtys

PPG – fotopletizmograma

PPE – pradinio priartėjimo elementas, kurio modos yra keičiamos sintezės metu

PS – pavyzdinės srities baigtinių elementų modelis

PSL – pulso sklidimo laikas

SE – sintezuotieji elementai su koreguotomis elemento modomis

SE_{xx} – sintezuotieji elementai, kur tikrinių dažnių paklaida minimizuota pirmųjų *xx* % srities, sudarytos iš sintezuotųjų elementų

STE – tradiciniai baigtiniai elementai su sutelktosiomis masių matricomis

TD – baigtinių elementų modelio tikriniai dažniai

TF – baigtinių elementų modelio tikrinės formos

SIMBOLIAI

a – svorinis koeficientas

A – skerspjūvio plotas

$\{\mathbf{a}^y\}$ – tikrinių formų korekcijos vektorius

$[\mathbf{a}^y]$ – tikrinių formų korekcijos matrica

a_l – skaitinis įvertis – bangos plotis

a_m – skaitinis įvertis – bangos amplitudė

a_n – skaitinis įvertis – triukšmų amplitudė

$[\mathbf{A}^T]$ – diferencialinis operatorius

$\{\mathbf{a}^\omega\}$ – tikrinių dažnių korekcijos vektorius

$[\mathbf{B}]$ – geometrinė, arba įtempių, matrica

β_k^l – svertinis k -tosios elemento formos koeficientas tarp konsistentinės ir sutelktosios formos funkcijų

$[\mathbf{C}]$ – BE modelio slopimo matrica

$[\mathbf{C}^e]$ – BE slopimo matrica

$[\mathbf{D}]$ – tamprumo konstantų matrica

dT – impulso žadinimo laikas

E – Jungo modulis

e_ω – įvertis, leidžiantis palyginti BE modelius skaitinės dispersijos požiūriu

f – dažnis

f_i – i -tosios Furjė spektro komponentės amplitudė

$\{\mathbf{F}(t)\}$ – išorinių jėgų vektorius, veikiantis baigtinių elementų modelį laiko momentu t

$\{\mathbf{F}^e(t)\}$ – išorinių jėgų vektorius, veikiantis baigtinį elementą laiko momentu t

h – vamzdžio sienelės storis

$[\mathbf{I}]$ – vienetinė matrica

$[\mathbf{Y}]$ – tikrinių formų matrica

$\{\tilde{y}_1\}$ – pakoreguota i -toji tikrinė forma

$\{y_i\}$ – i -toji tikrinė forma

y_{i0j} – tiksli i -toji tikrinė forma

k – standumo koeficientas

$[\mathbf{K}]$ – BE modelio standumo matrica

\tilde{K} – ekvivalentinis skysčio tūrinis modulis

k_a – simetriškumo koeficientas

$[\mathbf{K}^e]$ – BE standumo matrica

$[\mathbf{K}_{1D}^{SE0}]$ – bematis vienmatis sintezuotasis elementas

$[\mathbf{K}_{1D}^{SE}]$ – vienmatis sintezuotasis elementas, įvertinantis realios medžiagos mechanines konstantas

$[\mathbf{K}_{2D}^{SE0}]$ – bematis dvimatis sintezuotasis elementas

$[\mathbf{K}_{2D}^{SE}]$ – dvimatis sintezuotasis elementas, įvertinantis realios medžiagos mechanines konstantas

L – ilgis

$[\mathbf{M}]$ – BE modelio masių matrica
 $[\mathbf{M}_c]$ – konsistentinė masių matrica
 $[\mathbf{M}_{cl}]$ – apibendrintoji masių matrica
 $[\mathbf{M}^e]$ – BE masių matrica
 $[\mathbf{M}_l^e]$ – sutelktoji masių matrica
 μ – skysčio dinaminės klampos koeficientas
 $[\mathbf{N}^e(x)]$ – baigtinio elemento formos funkcijų matrica, kur x – elemento mazgų koordinatės
 P_b – pradinės slėgio reikšmės
 $\{\mathbf{P}^e\}$ – BE slėgių vektorius
 p_s – periodų skaičius
 $\{\mathbf{Q}^e\}$ – BE išorinių jėgų vektorius
 ρ – medžiagos tankis
 Re – Reinoldso skaičius
 S_U^e – elemento paviršiaus plotas, per kurį jį veikia išorinės jėgos
 t – laikas
 $[\mathbf{T}]$ – posūkio matrica
 $\{\mathbf{t}_U(\mathbf{x}_S)\}$ – BE paviršiuje veikiančios jėgos pokytis per tam tikrą laiką
 $\{\mathbf{U}\}$ – BE modelio poslinkių vektorius
 $\{\mathbf{U}^e\}$ – BE poslinkių vektorius
 $\{\dot{\mathbf{U}}\}$ – BE modelio pirmoji ir antroji poslinkių laiko išvestinės
 $\{\dot{\mathbf{U}}^e\}$ – BE pirmoji ir antroji poslinkių laiko išvestinės
 $\{\ddot{\mathbf{U}}\}$ – BE modelio antroji poslinkių laiko išvestinė
 $\{\ddot{\mathbf{U}}^e\}$ – BE antroji poslinkių laiko išvestinė
 $\{\hat{\mathbf{U}}^{(i)}\}$ – i -tasis baigtinių elementų modelio tikrinis vektorius / tikrinis virpesys
 ν – Puasono koeficientas
 V_e – baigtinio elemento tūris
 v_i – išilginės bangos greitis
 v_s – skersinės bangos greitis
 v_{st} – bangos sklidimo greitis
 $w_e^{(n)}$ – skysčio debitas i -tajame baigtiniame elemente
 ω_i – i -toji baigtinių elementų modelio tikrinė reikšmė / tikrinis dažnis
 $\tilde{\omega}_i$ – pakoreguotas i -tasis tikrinis dažnis
 ω_{i0} – tikslus i -tasis tikrinis dažnis

IVADAS

Bangų sklidimą tampriosiose ir akustinėse terpėse tenka modeliuoti sprendžiant daugybę inžinerinių uždavinių, tarp kurių mechaninių konstrukcijų reakcijos į dinaminį žadinimą apskaičiavimas, ultragarso matavimų schemų ir rezultatų analizės algoritmų projektavimas ir testavimas, pavojingų slėgio impulsų sklidimo vamzdynuose prognozavimas ir trūkio vietos aptikimas pagal sklindančios bangos požymius, seisminių bangų sklidimo Žemės gelmėse ir paviršiuje apskaičiavimas ir kt.

Iš pirmo žvilgsnio minėtus bangų sklidimo procesus modeliuoti nesudėtinga. Dažnai jie išreiškiami tiesinėmis kontinuumo mechanikos lygtimis, kurios gali būti skaitiškai išspręstos diskretizuojant erdvėje bei laiko intervale ir taikant baigtinių skirtumų metodą (BSM), baigtinių elementų metodu (BEM) paremtas arba kombinuotąsias skaitines schemas. BEM formuluotės tampriosioms bangoms modeliuoti žinomos jau nuo 1960–1970 metų. Jų matematiniai principai išliko iš esmės nepakitę iki šiol. Skaitiniai bangų sklidimo algoritmai pritaikyti tiek universaliose BEM programinės įrangos sistemose (*ANSYS*, *MSC*, *ABACUS*, *COMSOL* ir kt.), tiek specializuotose bangų sklidimui modeliuoti skirtose programose (*WAVE2000*, *WAVE3000*).

Skaitiniai bangų sklidimo modeliai iš principo yra matematiškai ir programiškai nesudėtingi, tačiau turi jiems būdingą silpnąją vietą. Tai sunkiai atpažįstamos skaičiavimo paklaidos, kurios susidaro panaudojus bent kiek retesnį erdvės tinklelį. Gerai žinoma, kad objekto, kuriame modeliuojamas bangos sklidimas, erdvės tinklelis turėtų būti ne retesnis nei 17–20 BE modeliuojamos bangos ilgyje. Skaičiuotojai praktikai iš patirties žino, kad tai labai nekonservatyvus (nors dažnai literatūroje minimas) įvertis, ir pasirenka dar smulkesnį – maždaug 30 BE bangos ilgyje – tinklelį. Pernelyg reto tinklelio nulemtos paklaidos pavojingos tuo, kad jas labai sunku atpažinti analizuojant gautus skaitinius sprendinius. Dažnai paklaidų dedamosios vizualiai nesiskiria nuo įprastinių konstrukcijoje sklindančių bangų. Jos pasireiškia kaip aukštesniojo dažnio bangos, sklindančios pagrindinės bangos priekyje arba gale. Tokio pobūdžio bangos gali būti ir tikrovėje generuojamos dėl terpės geometrinių nehomogeniškumų, kuriuos savo kelyje sutinka pagrindinė banga. Taip pat jos gali kilti dėl tuo pat metu sužadintų aukštesniojo dažnio paviršinių bangų atspindžių ir pan. Tačiau tokio pobūdžio modelyje stebimų bangų priežastimi gali būti ir skaitinės paklaidos. Kartais jos populiariai vadinamos skaitiniu triukšmu arba difrakcija nuo tinklelio mazgų. Tačiau esmė visada ta pati – nepakankamas tinklelio smulkumas. Kokį jį reikėtų parinkti, iš anksto numatyti nelengva. Sužadinant bet kurią bangą, dalyvauja ne tik pagrindinė, bet ir visos harmoninės jos komponentės. Skaitines paklaidas gali sugeneruoti bet kuri iš jų. Vienintelė universali priemonė skaitinėms paklaidoms atpažinti yra BE modelio pateikiamo sprendinio konvergavimo analizė sulyginant kelias to paties proceso realizacijas, gautas su skirtingo smulkumo modelio tinkleliais.

Labai tankaus tinklelio poreikis kelia problemų, kai tiriamos srities matmenys yra gerokai didesni už joje sklindančių bangų ilgį. Iš čia kyla trumposios bangos sąvoka, kuri daugiau susijusi su bangos sklidimo modeliais diskrečiais tinkleliais

pateiktose srityse nei su absoliučiaisiais geometriniais dydžiais. Banga laikoma trumpąja tada, kai jos ilgis daug kartų mažesnis už viso modelio būdinguosius geometrinis matmenis. Pavyzdžiui, reikia išspręsti plokščių bangų sklidimo plieninėje 10×10 cm dydžio plokštelėje uždavinį, kai žadinamų skersinių bangų dažnis yra 10 Mhz (ultragarso bangos). Esant ~ 3000 m/s bangos greičiui ir atitinkamai 0,03 mm bangos ilgiui, išilgai plokštelės tilptų ~ 300 bangos ilgių, o tinklelio žingsnių tektų parinkti $\sim 0,1$ mm. Taip būtų tenkinama 20–30 tinklelio žingsnių bangos ilgyje sąlyga. Vadinasi, modelio mazgų skaičius netgi tokio palyginti nesudėtingo uždavinio atveju turėtų būti $\sim 10000 \times 10000$. Skaitiškai reikėtų spręsti $\sim 10^8$ lygčių sistemą, kai banga akustinė, ir $\sim 20^8$ lygčių sistemą, kai banga tamprioji.

Taigi viena svarbiausių problemų, kylančių skaitiškai modeliuojant trumpųjų bangų sklidimą, yra itin didelis skaičiavimo išteklių poreikis. Sukūrus aukštesniosios eilės baigtinius elementus, užtikrinančius sprendinio konvergavimą esant 2–3 kartus retesniai tinkleliui, sprendžiamo uždavinio matmenys gali sumažėti 10–30 kartų. Šiame darbe siekiama sukurti naujus, greičiau konverguojančius baigtinius elementus akustinių ir tampriųjų bangų skaitiniams modeliams.

Tyrimo objektas – aukštesniosios tikslumo eilės baigtiniai elementai, skirti tampriųjų ir akustinių trumpųjų bangų sklidimo baigtinių elementų modelių paklaidoms sumažinti.

Tyrimo tikslas – sukurti algoritmus aukštesniosios tikslumo eilės tampriojo ir akustinio kontinuumo baigtinių elementų sintezei, kurie leistų gerokai sumažinti skaičiavimo išteklių poreikį sklindančios bangos modeliavimui inžineriškai priimtiniu tikslumu, ir ištirti gautų elementų savybes taikant juos homogeninėse ir nehomogeninėse struktūrose.

Tyrimo uždaviniai

Tyrimo tikslui pasiekti iškelti šie uždaviniai:

1. Išanalizuoti BE modeliuose atsirandančių fazinio greičio paklaidų kilmę ir žinomus šių paklaidų minimizavimo būdus.
2. Taikant modų sintezės metodą, pagal optimaliai pakoreguotas modas sintezuoti vienmačius (1D) ir dvimačius (2D) mažiausios fazinės paklaidos baigtinius elementus, kurių masių matrica yra įstrižaininė.
3. Ištirti sintezuotaisiais elementais paremtų bangos sklidimo modelių konvergavimą nehomogeniniuose ir šakotuose 1D tinkluose.
4. Ištirti sintezuotaisiais elementais paremtų akustinių ir tampriųjų bangų modelių konvergavimą nehomogeniniuose sudėtingos geometrinės formos 2D tinkluose.
5. Verifikuoti sukurtus baigtinius elementus ir ištirti iš jų sukurtų modelių privalumus ir našumą, palyginant su iš įprastinių baigtinių elementų sudarytais modeliais.

Darbo mokslinis naujumas

Darbe sukurtas naujas algoritmas, leidžiantis optimaliai koreguotų modų sintezės būdu apskaičiuoti baigtinius elementus, iš kurių surinkti modeliai turi daug platesnį artimų tiksliams tikrinių dažnių ruožą nei modeliai, gauti iš iki šiol žinomų baigtinių elementų. Nors iš principo koreguotų modų sintezės būdas aukštosios tikslumo eilės baigtiniams elementams gauti buvo pritaikytas jau anksčiau, šiame darbe gautų elementų masių matricos yra įstrižaininės ir tinkamos naudoti išreikštinio dinaminio modeliavimo (angl. *explicit dynamics*) skaitinėse schemose.

Darbo praktinė vertė

Kitaip nei įprastiniai modų sintezės būdu gauti elementai, šiame darbe sukurti elementai gali būti tiesiogiai panaudoti išreikštinio dinaminio modeliavimo programinėje įrangoje. Taikomieji skaičiavimai buvo atlikti tiriant realius bangų sklidimo principu veikiančius ultragarso matavimų modelius.

Darbo rezultatų aprobavimas

Disertacijos tema paskelbti 6 moksliniai straipsniai, 2 iš jų – Mokslinės informacijos instituto (ISI) pagrindinio sąrašo leidiniuose, turinčiuose citavimo indeksą. Disertacijos tema atliktų tyrimų rezultatai buvo pristatyti 4 mokslinėse konferencijose Lietuvoje ir užsienyje.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, keturios dalys, išvados, literatūros šaltinių ir darbo tema paskelbtų mokslinių publikacijų sąrašai. Darbo apimtis yra 90 puslapių. Tekste panaudotos 58 formulės, 55 paveikslai ir 2 lentelės. Rengiant disertaciją remtasi 108 literatūros šaltiniais.

1. TRUMPŲJŲ BANGŲ BAIGTINIŲ ELEMENTŲ MODELIAI

Baigtinių elementų metodu (BEM) atliekama fizikinės elgsenos matematiniais modeliais grįsta objektų ir sistemų skaitinė analizė siekiant pavaizduoti jų veikimą virtualiojoje realybėje. Taikant BEM tiriama sudėtingos geometrinės formos sritis suskaidoma į daug mažų baigtinių elementų (BE). *Baigtinio elemento* negalima tapatinti su *diferencialiniu elementu*. Aprašant kūnų fizikinę elgseną, diferencialinis elementas yra parinktos koordinačių sistemos ašių kryptis atitinkanti reguliarios formos nykstamai maža dalelė, kuriai užrašomas nagrinėjamą reiškinį nusakantis fizikos dėsnis. Matematiškai pereinant prie ribos, kai diferencialinio elemento dydis artėja prie nulio, gaunama nagrinėjamą kūną išreiškianti diferencialinė lygtis dalinėmis išvestinėmis (DLDI).

Baigtinis elementas yra baigtinio dydžio, t. y. ne nykstamai maža, kūno dalis. BE geometrinė forma neprivalo būti reguliari. Dažniausiai tai daugiakampis arba daugiasienis, vienareikšmiškai aprašomas jo viršūnių (mazgų) pozicijomis.

Kiekvieno BE fizikinė elgsena yra išreiškiamą tokia pačia DLDI, kaip ir visas kūnas. Taikant BEM, kiekviename baigtiniame elemente DLDI svertinių netekčių metodu pakeičiama jos silpnąja formuluote, o gautos išraiškos pertvarkomos naudojantis Grino formulėmis. Galiausiai BE apytiksliai išreiškiamas algebrinių arba paprastųjų diferencialinių lygčių (PDL) sistema, atitinkančia konkretaus BE geometrinę formą ir jame galiojančias fizikines konstantas. Lygčių sistemos kintamieji yra nagrinėjamą fizikinį procesą išreiškiančių būvio ir poveikio kintamųjų reikšmės BE mazguose. Po to, laikant kūną iš BE sudaryta konstrukcija, visų BE lygtys sujungiamos į konstrukcijos lygčių sistemą, taikant fundamentalius būvio kintamųjų reikšmių darnos ir poveikių pusiausvyros dėsnius.

BEM galima tirti konstrukcijų statinę pusiausvyrą, kai kintamųjų priklausomybė nuo laiko nenagrinėjama, arba atlikti dinaminę analizę skaitiškai integruojant PDL sistemą laike. Kuo smulkesni BE, tuo didesnių matmenų yra lygčių sistemos ir tuo tiksliau modelis leidžia aprašyti realų objektą. Tačiau didelių matmenų sistemų sprendimas reikalauja didesnių skaičiavimo išteklių.

Į BEM teorijos bei taikymo vystymąsi galima žvelgti dviem aspektais. Viena vertus, siekiama BE konstrukcijos lygčių pavidalu pateikti įvairiausios fizikinės prigimties uždavinius. Svarbią vietą užima susietieji uždaviniai, kai vieno proceso metu vienas kitą veikia keletas skirtingų fizikinių reiškinų. Kitas aspektas yra metodo tikslumo gerinimas ne smulkinant tinklę, o taikant sudėtingesnį ir racionalesnį kintamųjų aproksimavimą BE užimamoje srityje. Esant dabartinei kompiuterių greitaveikai, dideliems atminties ištekliams ir tobulai vidinei architektūrai, dažnai linkstama eiti paprasčiausiu keliu ir tikslumo siekti vien smulkinant tinklę, neskiriant pakankamai dėmesio matematiškai sudėtingesnėms aproksimacijoms ir aukštesniųjų eilių BE. Vis dėlto tam tikrais atvejais to nepakanka ir kompiuterio išteklių ribotumas sumažina metodo taikymo galimybes. Taip atsitinka, pavyzdžiui, atliekant dinaminę analizę bangų, kurių ilgis daug kartų mažesnis už būdinguosius modelio matmenis (trumpųjų bangų), sklidimui apskaičiuoti. Tokio BE modelio tinklelio žingsnis turi būti itin mažas, dėl to BE modelio lygčių skaičius ir atitinkamai skaičiavimo išteklių

poreikis gali gerokai viršyti turimas technines galimybes. Todėl atliekami tyrimai siekiant racionalizuoti skaičiavimo schemas ir sumažinti kompiuterio išteklių poreikį.

1.1. Baigtinių elementų metodo raida ir taikymo sritys

Pirmieji darbai, kuriuose aprašytas BEM, pasirodė dar XX a. viduryje (Courant, 1943; Hrennikoff, 1941). Plačiau šis metodas imtas taikyti XX a. antrojoje pusėje, kai buvo sukurtos pirmosios BE analizės programos *NASTRAN*, *ANSYS* ir kt. Nors sprendžiami uždaviniai buvo santykinai nedidelių matmenų, tačiau jau ir tuo metu taikant BEM buvo analizuojami seisminiai procesai (Lysmer, Udaka, Tsai ir Seed, 1975), šilumos mainų uždaviniai (Zienkiewicz, 1981), skysčių dinamika (Chung, 1978) ir kt. Dabar kompiuterių našumas yra šimtus kartų didesnis nei pirmųjų kompiuterių, tačiau BEM spęstinių uždavinių poreikiai didėja dar greičiau. Nors iš principo šiuolaikinis BEM leidžia išspręsti beveik bet kokiais fizikiniais reiškiniais ir jų kombinacijomis aprašomus uždavinius, analizės detalumas vis dėlto apribojamas turimų kompiuterio išteklių. Apžvelgiant naujausius tyrimus, susijusius su BEM taikymu, matoma, kad jis taikomas bene visose inžinerijos srityse, kur nagrinėjami vis didesnės geometrinės apimties modeliai ar pereinama į vis aukštesnį detalumo lygį. Kaip pavyzdį galima paminėti metodo taikymą statybų inžinerijoje, kai sudaromas trimatis BE modelis visam tiriamam objektui (Clementi, Gazzani, Poiani ir Lenci, 2016; Stavroulaki *et al.*, 2015), ar nanotechnologijose (Eltaher, Alshorbagy ir Mahmoud, 2013; Mahmoud, Eltaher, Alshorbagy ir Meletis, 2012), kai molekuliniai ryšiai pakoreguoja įprastinėje kontinuumo mechanikoje taikomus principus.

Lietuvoje BEM pradėtas taikyti praėjusio amžiaus antrojoje pusėje. Metodo taikymo pradininkai buvo A. Čyras ir S. Maciulevičius, kurie specializavosi statybinės mechanikos srityje (~1970–1975 m.). Jau ~1980 metais pradėti nagrinėti ir virpančių sistemų modeliai (Ragulskis, 1988; Баранскас, Кульветис ir Рагульскис, 1984). 1992 m. R. Barauskas savo habilitaciniame darbe (Barauskas, 1992) pristatė BEM taikymo galimybes projektuojant sudėtingas mechanines sistemas. BEM buvo taikomas mechaninėms sistemoms projektuoti įvertinant tampriąsias vibracijas, t. y. buvo nagrinėjami priverstinių kietojo kūno tampriųjų vibracijų ir aktyviųjų vibruojančių sistemų uždaviniai. Vėliau buvo nagrinėjami BE modeliai tampriosioms vibrosmūginėms sistemoms analizuoti ir optimizuoti (Barauskas ir Ostaševičius, 1998). Taip pat daug dėmesio buvo skiriama BE modelio našumo optimizavimui. Buvo atliekama virpesiams simuliuoti skirtų BE modelių analizė, pateikta metodologija, skirta modelio laisvės laipsniams sumažinti (Barauskas, 1994). Vėliau pristatytas sutelktųjų masių matricių panaudojimas atliekant trumpųjų bangų modeliavimą (Daniulaitis ir Barauskas, 1998).

Tuo pat metu Lietuvoje buvo vykdomi ir kiti tyrimai BEM tematika: 1992 m. atlikti sklandytuvo sparno atsparumo analizės tyrimai (Petkevičius, Senkus, Šajauka ir Tamošiūnas, 1993), atliktas sukietėjusių medžiagų įtempimų ir deformacijų matematinis modeliavimas (Fedaravičius ir Volkovas, 1993), vykdyti tyrimai biomechanikos srityje (Gaidys, Gaidytė ir Danielytė, 1999) ir kt.

XXI a. Lietuvoje BEM pradėtas taikyti kur kas plačiau, tam daugiau įtakos turėjo 2004 m. R. Barausko, R. Balevičiaus ir R. Kačianausko išleista knyga „Baigtinių elementų metodo pagrindai“ (Barauskas, Balevičius ir Kačianauskas,

2004). Ja remtasi rengiant skirtingų technologijos mokslų kryptių disertacijas BEM tematika. Matavimų inžinerijoje (Stanionis, 2005) buvo nagrinėjamas praktinis BEM taikymas horizontaliesiems Žemės plutos judesiams modeliuoti. Statybos inžinerijoje BEM panaudotas plieninėms konstrukcijoms modeliuoti (Blaževičius, 2015; Rasiulis, 2007), mechanikos inžinerijoje (Augustinavičius, 2014; Mačiūnas, 2011) BEM taikytas skaitiniam mikropozicionavimo sistemų tyrimui ir inžinerinių konstrukcijų geometriniam optimizavimui siekiant greitai suprojektuoti pigią ir kartu racionalią bei patvarią konstrukciją. BEM taip pat nagrinėtas informatikos inžinerijos (Krušinskienė, 2007; Patasius, 2010) bei informatikos mokslo kryptių disertacijose (Baronas, 2014; Rimavičius, 2010). Informatikos inžinerijoje BEM taikytas žmogaus stovėsenai (Krušinskienė, 2007) ir kraujo tėkmei kraujagyslėse modeliuoti (Patasius, 2010). Informatikos krypties (Rimavičius, 2010) darbe nagrinėta metodika, skirta sudėtingam baigtinių elementų modeliui pakeisti suprastintu, kurio fizikinė elgsena mechaninio poveikio metu būtų kiek galima panašesnė į išeities modelio fizikinę elgseną. Kitame darbe (Baronas, 2014) baigtiniai elementai panaudoti daugiasluoksniui biojutiklių modeliavimui.

1.2. Tamprųjų trumpųjų bangų modeliavimas baigtinių elementų metodu

Banga vadinama trumpąja, jeigu jos ilgis yra daug kartų mažesnis už būdinguosius kūno, kuriame ji sklinda, geometrinius matmenis (Zienkiewicz ir Taylor, 2005). Tokie bangos sklidimo uždaviniai sutinkami įvairiose srityse, pvz., tiriant informacijos perdavimą šviesolaidiniuose tinkluose (Mafi, 2012; Wright, Christodoulides ir Wise, 2015), lazerinėse technologijose (Cho, Na, Thomy ir Vollertsen, 2012; Takenaka, Iino, Nagatani ir Hosokawa, 2014), ultragarso matavimų modeliuose (Guo ir Vavilov, 2013; Rodriguez-Martin, Laguela, Gonzalez-Aguilera ir Arias, 2014), seisminiuose procesuose (Huang, Zhao ir Du, 2017; Singh *et al.*, 2016). Kompiuteriu modeliuojant trumpąsias bangas gauti rezultatai leidžia dar projektavimo stadijoje suprasti kuriamų fizikinių sistemų savybes (Zhang *et al.*, 2015), patikrinti kuriamus matavimo ir defektų nustatymo algoritmus (Fierro, Ciampa, Ginzburg, Onder ir Meo, 2015; Kleiza ir Verkėlis, 2011; Vappou *et al.*, 2015), nustatyti tiriamų sistemų mechaninius rodiklius (Fan, 2010; Yu, Ratsessepp, Rajagopal ir Fan, 2016).

BEM imlumas skaičiavimo ištekliams lemia, kad esant galimybei ieškoma analitinių sprendinių (Gresil, Yu ir Giurgiutiu, 2013) ar kaip alternatyva taikomas kraštinių elementų metodas ir modelio diskretizavimas atliekamas tik atskirų konstrukcijos objektų kraštinėse (Kaminski, 2013). Tiek kraštinių elementų metodas, tiek BEM turi savų privalumų ir trūkumų (Klimpke, 2003), todėl kartais modeliui sudaryti naudojamos abiejų metodų kombinacijos (Aimi1, Diligenti1, Frangi2 ir Guardasoni1, 2013; Warszawski, Soares ir Mansur, 2008). Siekiant sumažinti skaičiavimo apimtį naudojamos ir paties BEM modifikacijos. Bangų sklidimui modeliuoti konstrukcijoje, sudarytoje iš skirtingas savybes turinčių medžiagų (Feng, Wang ir Liu, 2016; Tavakol, Mahnama ir Naghdabadi, 2016), taikomas daugiaskalis modeliavimas (Calneryte ir Barauskas, 2016; Casadei, 2012). Tam tikrais atvejais, kai bandinio geometrinės ir mechaninės savybės viena kryptimi nekinta (Hayashi, 2004), bangos modeliavimui atlikti gali būti naudojama standartinio BE modelio ir analitinės išraiškos kombinacija, kai BE modelis yra išreiškiamas žemesniosios dimensijos

elementais, o bangos sklidimas – banginiu skaičiumi, kampiniu dažniu ir deformacija skerspjūvyje (Ahmad, Vivar-Perez ir Gabbert, 2013; Marzani ir Bartoli, 2009). Tačiau dėl savo universalumo standartinis BEM išlieka vienu plačiausiai taikomų metodų.

Sudarant BE modelius, dažnai dėl sprendžiamos užduoties specifikos nagrinėjamą konstrukciją užtenka aproksimuoti vienmačiu ar dvimačiu BE modeliu (Bognet, Bordeu, Chinesta, Leygue ir Poitou, 2012; Ramazani, Mukherjee, Quade, PrahI ir Bleck, 2013). Skaičiavimo apimčiai sumažinti pagal uždavinio pobūdį suprastinamos pradinės matematinės-fizikinės lygtys (Barauskas, Kriščiūnas ir Blažauskas, 2016) ar įvedamos bangos neatspindėjimo sąlygos (Kouroussis, Van Parys, Conti ir Verlinden, 2014). Tačiau dėl BE modelio tinklėlio tankumo priklausomybės nuo modelyje norimos simuliuoti bangos ilgio (Ihlenburg ir Babuska, 1995) lygčių skaičius trumpųjų bangų BE modelyje išlieka didelis, kaip ir skaičiavimo išteklių poreikis šioms lygtims spręsti.

1.3. Tampriojo kontinuumo baigtiniai elementai

Taikant BEM, galutinė modelio išraiška visada yra konstrukcijos algebrinių arba paprastųjų diferencialinių lygčių sistema. Ji gali būti gaunama dviem būdais. Kai kuriais atvejais konstrukcija suvokiama kaip iš anksto žinomų konstrukcinių elementų, kurių elgsena išreiškta algebrinėmis lygtimis, gautomis taikant įprastinius medžiagų mechanikos metodus (santvarų strypai, sijos, plokštės ir pan.), visuma. Kitais atvejais analizuojami kontinualūs kūnai (turintys be galo daug laisvės laipsnių), kurių fizikinė elgsena išreiškta atitinkamomis diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis. Taikant BEM, jų užimama sritis matematiškai suskaidoma į BE ir interpretuojama kaip iš minėtų BE sudaryta konstrukcija. Pritaikius svertinių netikčių metodą ir Grino formules, baigtinio elemento lygčių pavidalas gaunamas toks pat, kaip ir įprastinių konstrukcinių elementų. Todėl ir galutinės modelių lygčių sistemos yra vienodo pavidalo. Joms spręsti taikomi tokie patys metodai ir analizės strategijos.

Palyginti su kitais skaitinės analizės metodais, BEM pranašumas yra konstrukcijų ir kontinuumo modelių aprašo bendrumas, lengvai inžineriškai suvokiama modelio analogija su tirama sistema ir BE išreiškiančių lygčių analogija su fundamentinių fizikos dėsnių matematinėmis išraiškomis.

BEM daug metų buvo ir yra taikomas daugybei inžinerinių skaičiavimų. Įsigalėjus kompiuterinėms skaičiavimo technologijoms, BE modelių sudarymo būdai buvo standartizuoti ir unifikuoti. Formaliai ši skaitinė technologija tapo tam tikru šablonu, kuriame dominuoja formalūs euristiniai principai ir loginiai ryšiai, o matematinėmis savybėmis nusakomi tik kiekybiniai ryšiai. Standartizuotoms struktūroms apibūdinti sukurtas specialus terminas „standartinė diskrečioji sistema“ (Zienkiewicz ir Taylor, 2005). Jis dažnai vartojamas kaip baigtinių elementų konstrukcijos sistemos sinonimas.

BEM gautų dinamikos modelių konstrukcijos lygčių pavidalas užrašomas taip:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}(t)\}; \quad (1)$$

čia $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$ ir $[\mathbf{K}]$ – masių, slopimo ir standumo matricos; $\{\mathbf{U}\}$ – mazgų poslinkių vektorius; $\{\dot{\mathbf{U}}\}$ ir $\{\ddot{\mathbf{U}}\}$ – pirmoji ir antroji poslinkių laiko išvestinės (t. y. mazgų greičiai ir pagreičiai); $\{\mathbf{F}(t)\}$ – konstrukcijos mazgus veikiančios išorinės jėgos.

Jeigu energijos nuostoliai dėl terpės klampumo maži, slopinimas gali būti nevertinamas priimant $[\mathbf{C}] = 0$:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}(t)\}. \quad (2)$$

Visuminį BE modelį išreiškiančios (1) konstrukcijos lygčių sistemos matricos gaunamos surenkant jas iš atskirus BE išreiškiančių matricų. Lauko kintamųjų pasiskirstymas kiekvieno elemento tūryje nusakomas interpoliuojant parinktoje funkcijų bazėje. Šios funkcijos yra tolydžios elemente, tačiau galioja tik jo užimamame tūryje. Todėl jos vadinamos diskrečiai tolydžiomis funkcijomis (formos funkcijomis). Konstrukcijos lygčių surinkimo procedūra ir taikomas modelio lygčių sistemos sprendimo metodas nepriklauso nuo konkretaus tiriamo objekto arba konkrečių naudojamų BE.

Kontinualiąsias modelio savybes atspindi tik pavienio BE savybės. Jo lygčių pavidalas yra panašus į visos konstrukcijos lygčių pavidalą:

$$[\mathbf{M}^e]\{\ddot{\mathbf{U}}^e\} + [\mathbf{K}^e]\{\mathbf{U}^e\} = \{\mathbf{F}^e(t)\}; \quad (3)$$

čia

$$[\mathbf{M}^e] = \rho \int_{V_e} [\mathbf{N}^e(x)]^T [\mathbf{N}^e(x)] dV, \quad (4.1)$$

$$[\mathbf{K}^e] = \int_{V_e} ([\mathbf{B}])^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV, \quad (4.2)$$

$$\{\mathbf{F}^e(t)\} = \int_{S_U^e} [\mathbf{N}^e(x_S)]^T \{\mathbf{t}_U(x_S)\} dS; \quad (4.3)$$

čia V_e – elemento tūris, S_U^e – elemento paviršiaus plotas, kuriame jį veikia išorinės paviršinės jėgos, ρ – medžiagos tankis, $[\mathbf{D}]$ – tamprumo konstantų matrica, $[\mathbf{N}^e(x)]$ – formos funkcijų matrica, $[\mathbf{B}] = [\mathbf{A}^T][\mathbf{N}^e(x)]$ – geometrinė matrica, $[\mathbf{A}^T]$ – diferencijavimo operatorius, susiejantis tiriamo lauko kintamuosius su lauko gradientu arba deformacijomis, $\{\mathbf{t}_U(x_S)\}$ – BE paviršiuje veikiančios jėgos pokytis per tam tikrą laiką.

1.4. Baigtiniai elementai, skirti akustinėms ir tampriosioms bangoms modeliuoti

Nuo sudaromo BE modelio dimensijų ir BE fizikinės prasmės priklauso ir elemento matricos.

1.4.1. Vienmačiai baigtiniai elementai, skirti tampriosioms bangoms simuliuoti

Sudarant vienmačius baigtinius elementus, kurie bendruoju atveju gali būti suprantami kaip tamprus strypelio konstrukcijos elementas, tamprumo konstantų matrica $[\mathbf{D}]$ sudaroma iš vieno elemento, t. y. strypelio tamprumo (standumo) koeficiento k , kuris lygus:

$$k = \frac{AE}{L}; \quad (5)$$

čia A – strypelio skerspjūvio plotas, E – strypelio Jungo modulis, L – strypelio ilgis. Esant tiesinėms elemento formos funkcijoms $[\mathbf{N}^e(x_S)] = [1 - \frac{x}{L}; \frac{x}{L}]$, kur L – elemento ilgis, ir suintegravus (4) lygtis gaunamos vienmačio tampriojo baigtinio elemento matricos:

$$[\mathbf{M}^e] = \frac{\rho AL}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

$$[\mathbf{K}^e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

kur bangos sklidimo greitis vienmačiame (1D) tampriajame modelyje yra lygus

$$v_{st} = \sqrt{E/\rho}. \quad (7)$$

1.4.2. Dvimačiai baigtiniai elementai, skirti tampriosioms bangoms simuliuoti

Tampriųjų struktūrų modeliavimas priskiriamas prie vektorinio lauko uždavinių klasės, kur kiekvieno srities taško (BE modelio mazgo) būvį išreiškia keletas nepriklausomų kintamųjų. Dvimačio tampriojo BE atveju būvio kintamieji atitinka poslinkius x ir y kryptimis. Deformuojantis tampriai medžiagai atsiranda skersinių deformacijų. Jos skiriasi priklausomai nuo medžiagos savybių ir gali būti nusakomos Puasono koeficientu ν . Puasono koeficientas veikia ir tamprumo konstantų matricą. Dvimačių tūrinių tampriųjų baigtinių elementų tamprumo konstantų matrica yra:

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1 + \nu) \times (1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2 \times \nu)/2 \end{bmatrix}; \quad (8)$$

čia trečioji matricos eilutė nurodo šlyties modulį. Tampriųjų BE geometrinė matrica yra lygi:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} & \frac{\partial N_7}{\partial y} & \frac{\partial N_7}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad (9)$$

čia šlyties deformacija įvertinama taip pat trečiojoje matricos eilutėje; $N_{1...8}$ – elemento formos funkcijos. Priklausomai nuo medžiagos savybių galima apskaičiuoti skersinių ir išilginių bangų greitį:

$$v_i = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}, \quad (10.1)$$

$$v_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\mu)}}; \quad (10.2)$$

čia v_i ir v_s yra atitinkamai išilginės ir skersinės bangos greitis.

1.4.3. Dvimačiai baigtiniai elementai, skirti akustinėms bangoms simuliuoti

Sprendžiant akustikos uždavinį, siekiama rasti slėgio pasiskirstymą ir kitimą tiriamoje srityje (Ihlenburg, 2006). Paprastai akustikos uždavinys formuluojamas skystose terpėse ir yra atskiras bendrojo spūdžiųjų skysčių dinamikos uždavinio atvejis, kur esminis suprastinimas kyla iš to, kad skysčio judėjimas vyksta tik dėl dalelių mažų virpesių tampriai deformuojantis skysčiui. Todėl kiekvienos dalelės poslinkis nuo jos pusiausvyros padėties yra labai mažas. Matematiškai aprašant akustikos uždavinį, galimi du skirtingi priėjimai suprastinant deformuojamo kietojo kūno arba spūdžiųjų skysčių dinamikos uždavinių formuluotes.

Sprendžiant akustikos uždavinį, suprastinant tampraus deformuojamo kietojo kūno uždavinio formuluotę pakanka priimti, kad tampraus deformuojamo kūno šlyties modulis yra lygus nuliui. Esant mažiems dalelių poslinkiams, tokio kūno fizikinė elgsena nesiskirtų nuo idealaus skysčio, t. y. jo sluoksniai liestine kryptimi galėtų laisvai pasislinkti vienas kito atžvilgiu. Gaunama vektorinio lauko uždavinio formuluotė, nes būvio kintamasis yra kiekvieno terpės taško poslinkių vektorius ir slėgis kiekviename terpės taške apskaičiuojamas imant išilginių įtempių komponentų aritmetinį vidurkį. Nors taikant tokį suprastinimą nekyla problemų apskaičiuojant virpesius ir bangas išreikštiniais metodais, tačiau skaičiavimo išteklių poreikio požiūriu formuluotė nėra ekonomiška, nes, pvz., 2D modeliuose akustinės srities mazgai turi 2 laisvės laipsnius, o pagal fizikinę prasmę pakaktų vieno, t. y. slėgio reikšmės mazge.

Skaičiavimo išteklių poreikio požiūriu suprastinant spūdžiųjų skysčių dinamikos uždavinio formuluotės naudojimas sudarant akustinius baigtinius elementus yra kur kas ekonomiškesnis. Skysčių dinamikoje naudojami lauko kintamieji yra greitis ir slėgis, ir nors bendruoju atveju tai vektorinio lauko uždavinys, tačiau jį galima suprastinti į skaliarinio lauko uždavinį, kai apskaičiuojamas tik slėgis. Tokių elementų tamprumo konstantų matrica yra

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \quad (11)$$

ir geometrinė matrica

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Bangos greitis apskaičiuojamas taip pat, kaip vienmatės tampriosios bangos greitis.

1.5. Tampriojo kontinuumo baigtinių elementų modelių neslopinamieji tikriniai virpesiai

Priimant, kad laiko momentu t konstrukcijos neveikia jokios išorinės jėgos ($\{\mathbf{F}(t)\} = 0$), (2) lygtis įgauna pavidalą:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{U}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = 0. \quad (13)$$

(13) lygtis išreiškia konstrukcijos neslopinamuosius tikrinius virpesius. Akivaizdu, kad $\{\mathbf{U}(t)\} = 0$ yra šios lygties sprendinys, nusakantis nedeformuotos konstrukcijos rimties būseną. Tačiau šis sprendinys nėra vienintelis. Jeigu egzistuoja dar ir kitokie, nenuliniai, periodiniai sprendiniai $\{\mathbf{U}(t)\} = 0$, tenkinantys šią lygtį, jie nusako konstrukcijos tikrinius virpesius, t. y. tokius periodinius virpesius, kurie galimi neveikiant išorinėms jėgoms. Šie periodiniai virpesiai gali būti išreikšiami taip:

$$\{\mathbf{U}\} = \{\widehat{\mathbf{U}}\} \cos \omega t; \quad (14)$$

čia ω – konstrukcijos virpesių kampinis dažnis. Diferencijuojant (14) lygtį du kartus pagal laiką ir įstačius į (13), gaunama algebrinė lygtis:

$$([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])\{\widehat{\mathbf{U}}\} = 0. \quad (15)$$

Nenulinis (15) lygties sprendinys $\{\widehat{\mathbf{U}}\} \neq 0$ gaunamas tik tada, kai (15) lygties koeficientų matrica yra išsigimusi, t. y. kai

$$\det([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]) = 0. \quad (16)$$

Tai yra n -tojo laipsnio netiesinė lygtis, kur n – konstrukcijos laisvės laipsnių skaičius. Bendruoju atveju n -tojo laipsnio algebrinė lygtis (16) turi n šaknų, kurios vadinamos (15) lygties tikrinėmis reikšmėmis arba, kitaip tariant, konstrukcijos, išreikštos (13) lygtimi, virpesių tikriniais dažniais. Jeigu $[\mathbf{M}]$ ir $[\mathbf{K}]$ būtų bet kokios, tikrinės reikšmės ω_i galėtų būti tiek realios, tiek kompleksinės. Tačiau iš tikrųjų konstrukcijos matricos visada būna simetrinės ir teigiamai apibrėžtos (George, 1994) ir, kaip įrodoma matricų teorijoje, jų tikrinės reikšmės yra visada realios ir teigiamos (Wilkinson, 1965).

I (15) lygtį įrašius bet kurią reikšmę ω_i ir išsprendus ją, būtų gaunamas nenulinis vektorius $\{\mathbf{U}^{(i)}\}$, kuriuo nusakomos konstrukcijos virpesių amplitudės. Kadangi esant $\omega = \omega_i$ (15) sistemos koeficientų matrica yra išsigimusi, vektoriaus reikšmė $\{\mathbf{U}^{(i)}\}$ nėra vienintelė. Ji nustatoma pastovaus daugiklio tikslumu ir nusako santykinės konstrukcijos mazgų amplitudes. Taigi, i (15) lygtį paeiliui įrašius tikrines reikšmes $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, kiekvienai jų būtų gauti atitinkami vektoriai, vadinami (15) lygties tikriniais vektoriais arba konstrukcijos tikrinėmis formomis.

Konstrukcijos tikriniai virpesiai apibūdinami tiek tikriniu dažniu, tiek tikrine forma. Ši reikšmių pora vadinama konstrukcijos moda. Apskaičiavus konstrukcijos modas, bet kokį jos laisvųjų virpesių dėsnį galima išreikšti kaip tikrinių virpesių superpoziciją pavidalu:

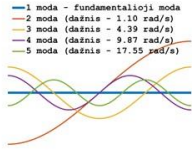
$$\{\mathbf{U}(t)\} = \sum_{i=1}^n (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) \{\mathbf{U}^{(i)}\}; \quad (17)$$

čia $a_i, b_i, i = 1, \dots, n$ – konstantos, kurias reikia nustatyti iš pradinių sąlygų, t. y. iš parinktų visų konstrukcijos poslinkių ir greičio reikšmių pradinio laiko momentu. Arba, kitais žodžiais tariant, BE modeliu galima išreikšti tik tokius virpesius, kurie yra to modelio modų superpozicija.

1.6. Bangų sklidimo modeliavimas diskrečiuosiuose tinkleliuose, fazinio greičio paklaidų problema

Atliekant kompiuterinį bangų modeliavimą atsiranda dviejų rūšių dispersija – mechaninė ir skaitinė (Moser, Jacobs ir Qu, 1999). Mechaninė dispersija atsiranda dėl natūralių procesų, kai bangos atskiros komponentės sklinda skirtingu faziniu greičiu ir impulso forma bėgant laikui kinta. Atliekant trumpųjų bangų modeliavimą, kai slopimas nėra vertinamas, impulsui sklindant vientisa terpe mechaninės dispersijos nelieka ir sklindančio impulso forma turi nepakisti (Ihlenburg ir Babuska, 1995). Tačiau atliekant bangų modeliavimą BE modeliuose visada generuojamos ir skaitinės paklaidos, kurių elgsena primena mechaninę dispersiją (1 pav.).

Pirmosios $n = 5$ tiesaus strypelio modos (rezonansinės deformacijos)

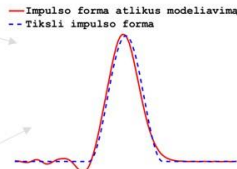
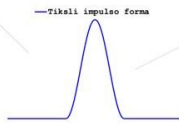


Bet koks sužadintas impulsas gali būti išreikštas kaip BE modelio modų svorinė suma

Dėl modelio diskretizavimo skirtinga moda virpantis mazgas juda nevienodu greičiu (skaitinė dispersija)

Atlikus simuliaciją ir impulsui nusklidus tam tikrą atstumą dėl besikaupiančių paklaidų impulso forma iškraipoma (pastebima skaitinė dispersija)

Tiesiame strypelyje sužadinto impulso forma

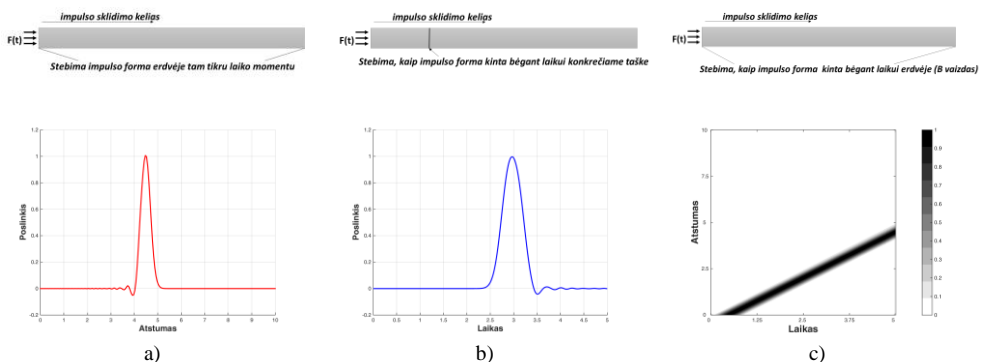


1 pav. Pirmosios tiesaus strypelio modos ir skaitinės dispersijos vaizdas

BE modelyje atsirandančias paklaidas lemia tai, kad dėl skaitinių paklaidų skirtinga moda virpantis mazgas juda nevienodu greičiu, t. y. kad BE modelio tikrinės modos yra netikslios, ir kiekviena moda generuoja paklaidas, kurios einant laikui kaupiasi, ir atliekant modeliavimą tam tikru laiko tarpu impulso forma kinta.

1.6.1. Simuliuojamo impulso atvaizdavimo būdai

Sklindantį impulsą galima atvaizduoti daugybe būdų, tačiau dažniausiai modeliuojant BE metodu impulsas atvaizduojamas trimis būdais: impulso forma pateikiama erdvėje tam tikru laiko momentu (2 pav., a); impulso forma stebima laiko ir poslinkių ašyje pasirinktame taške (2 pav., b); impulso formos kitimas tam tikru laiko tarpu stebimoje erdvėje parodomas impulso amplitudę atvaizduojant skirtingo intensyvumo juoda spalva (2 pav., c). Ultragarసుiniuose matavimuose trečiasis būdas atitinka B vaizdą (B-scan).



2 pav. a) Impulso forma stebima erdvėje tam tikru laiko momentu; b) stebimas impulso formos kitimas tam tikrame laiko ir poslinkių erdvės taške; c) stebima, kaip impulso forma kinta erdvėje bėgant laikui

Atsižvelgiant į sprendžiamą uždavinį pasirenkamas ir impulso atvaizdavimo būdas, pvz., nagrinėjant impulso sklidimą tiesiame strypelyje dažnai impulso forma atvaizduojama tam tikru laiko momentu visame strypelyje. Esant kompleksinei tiriamo kūno geometrijai, kai signalo analizė atliekama jam perėjus pro tam tikrą kliūtį, pvz., nehomogeniškumą, dažniausiai nagrinėjamas impulso formos kitimas tam tikrame erdvės taške. Impulso formos kitimo erdvėje tam tikru laiko tarpu atvaizdavimas skirtingo intensyvumo juoda spalva daugiausia taikomas atliekant ultragarsinius matavimus. Impulsą atvaizduojant laiko intervale ir erdvėje, kur kas sunkiau pamatyti jo iškraipymus, pvz., 2 pav. *a* ir *b* dalyse pastebima dispersija, kuri pasireiškia šiuokšlėmis, sklindančiomis paskui impulsą, o *B* vaizde ji nematoma. Norint *B* vaizde atvaizduoti santykinai nedidelius impulso nuokrypius, gali būti naudojama netiesinė spalvos intensyvumo skalė (Kriščiūnas ir Barauskas, 2016).

1.6.2. Skaitinės dispersijos įvertinimo būdai

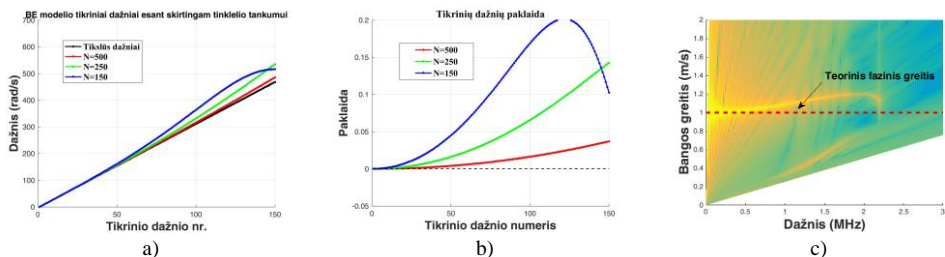
Skaitinė dispersija gali būti suprantama kaip skaičiavimo tikslumas, kuris atliekant bangų modeliavimą BE metodu dažniausiai yra laikomas priimtiniu, kai tenkinama konvergavimo sąlyga smulkinant BE modelio tinklelį ir mažinant skaitinio integravimo žingsnį. Tai yra gaunamas modeliavimo rezultatas, artimas tam, kuris gaunamas esant 2 kartus smulkesniam tinkleliui ir 2 kartus mažesniai skaitinio integravimo žingsniui. Dažniausiai daugiausia dėmesio yra skiriama tinkamo tinklelio BE modelio parinkimui, nes nuo tinklelio retumo tiesiogiai priklauso modelio laisvės laipsnių skaičius, modelio matricų dimensijos ir pats skaitinio integravimo žingsnis. Taip pat, esant sudėtingesnėms užduotims, ne visada galima atlikti skaičiavimus su 2 kartus smulkesniu tinkleliu, todėl taikomi alternatyvūs būdai įvertinti skaitinę dispersiją tinkamam tinkleliui parinkti ar tikslumo požiūriu palyginti BE modelius, sudarytus iš skirtingų elementų.

Vienas iš būdų įvertinti skaitinę dispersiją BE modeliuose yra modelio tikrinių dažnių kvadratinės paklaidos palyginimas kaip atskaitos tašką imant tikslus arba artimus tiksliams modelio tikrinius dažnius. Tiesaus strypelio tikriniai dažniai gali būti apskaičiuojami pagal (18) formulę:

$$\omega_{i0} = \frac{\pi(i-1)}{l\sqrt{\frac{E}{\rho}}}; \quad (18)$$

čia ω_{i0} – tikslus *i*-tasis tikrinis dažnis, *l* – strypelio ilgis, *E* – Jungo modulis, ρ – medžiagos tankis.

Jei tikslų tikrinių dažnių apskaičiuoti negalima, artimi tiksliams tikriniai dažniai gali būti randami išsprendus tikrinių reikšmių uždavinį esant tos pačios geometrinės formos BE modeliui su daug kartų tankesniu tinkleliu. 3 pav. *a* dalyje pateiktas tiesaus strypelio pirmųjų *N* tikslų tikrinių dažnių, apskaičiuotų pagal (18) lygtį, palyginimas su tokį patį strypelį atvaizduojančio BE modelio, surinkto pagal (2) lygtis, tikriniais dažniais esant skirtingam tinklelio retumui. Modelio tikriniai dažniai apskaičiuoti išsprendus tikrinių reikšmių uždavinį (16).



3 pav. Konstrukcijos, surinktos iš skirtingo skaičiaus elementų, tikriniai dažniai (a) ir tikrinių dažnių paklaidų kreivės (b)

Iš 3 pav. a dalies matoma, kad tik pirmieji BE modelio tikriniai dažniai yra artimi tiksliesiems ir, neturint galimybės jų apskaičiuoti pagal analitinę išraišką (pvz., esant nehomogeniškumui ar sudėtingai geometrinei formai), jie gali būti imami kaip atskaitos taškas, t. y. naudojami artimi tiksliesiems tikriniai dažniai.

Tikrinių dažnių paklaida gali būti gaunama:

$$r = \frac{\omega_i - \omega_{i0}}{\omega_i}; \quad (19)$$

kur ω_i – konstrukcijos i -tasis tikrinis dažnis. 3 pav. b dalyje pavaizduotos tikrinių dažnių paklaidos, kai modeliui sudaryti panaudojamas skirtingas skaičius elementų. Tačiau toks skaitinės dispersijos įvertinimo metodas praktikoje taikomas tik nedideliams BE modeliams, nes susiduriama su problemomis ne tik ieškant tikslių modelio tikrinių dažnių, bet ir apskaičiuojant paties modelio tikrinius dažnius, nes norint juos rasti tenka spręsti tikrinių reikšmių uždavinį (16), kuris reikalauja didelių skaičiavimo išteklių. Todėl modelių dispersinėms kreivėms nustatyti yra taikomi ir metodai, paremti impulso modeliavimo analize (De Marchi, Marzani, Speciale ir Viola, 2010; De Marchi, Marzani, Caporale ir Speciale, 2009; Hayward ir Hyslop, 2006). Vienas iš būdų gauti dispersines kreives yra panaudoti 2D Furjė transformaciją. Modeliavimo rezultatai, pateikti B vaizde, iš poslinkių ir laiko erdvės paverčiami į fazinio greičio ir dažnių erdvę, kur galima stebėti, kaip skirtingais dažniais sklindančios impulso komponentės sklinda skirtingu greičiu (3 pav., c).

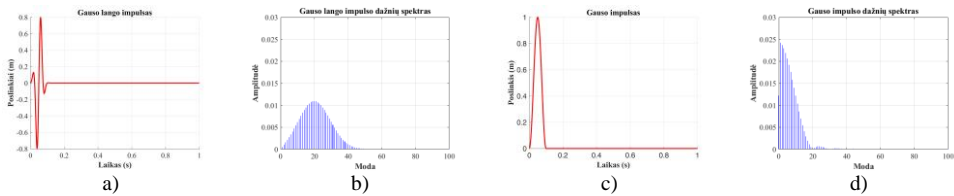
1.6.3. Skaitinės dispersijos priklausomybė nuo impulso dažnių spektro

Praktikoje pasitaiko įvairiausių dažnių ir formų signalų, kuriuos modeliuoti prireikia sprendžiant skirtingas užduotis. Dažniausiai, atliekant matavimus ar signalais perduodant informaciją, impulso forma yra parenkama tokia, kad jį apdoroti būtų galima kiek įmanoma paprasčiau. Pvz., atliekant ultragarsinius matavimus, dažnai nagrinėjamas Gauso lango impulsas (Arora ir Mulaveesala, 2014), kurio forma gali būti išreiškiama:

$$u(t) = e^{-a(t-b)^2} \sin(2\pi ft); \quad (20)$$

čia $a = k_a f \sqrt{-\frac{2 \ln 0,1}{p_s}}$, $b = 2p_s/3f$, p_s – periodų skaičius, k_a – simetriškumo koeficientas, f – dažnis (Kazys, Mazeika, Barauskas, Jasiuniene ir Daniulaitis, 2002).

Tokio impulso dažnių spektro amplitudžių vertės yra pasiskirsčiusios Gauso skirstiniu, ir impulso analizė gali būti atliekama dažnių srityje. Analogiškai, atliekant bangų modeliavimą, impulso forma gali būti parenkama tokia, kad impulso dažnių spektras būtų kaip galima siauresnis. Tačiau ne visada galima parinkti norimą impulso formą, ypač tada, kai norima modeliuoti sistemų atsaką į tam tikrus gamtoje vykstančius procesus, pvz., modeliuoti seisminius procesus. 4 pav. pateiktas skirtingų impulsų formų ir dažnių spektrų palyginimas.



4 pav. Skirtingų impulsų formų ir dažnių spektrų palyginimas: a) ir c) Gauso ir Gauso lango impulsų formos; b) ir d) Gauso ir Gauso lango impulsų dažnių spektrai

4 pav. *a* ir *b* dalyse pateikti Gauso lango impulso forma ir jo dažnių spektras, o 4 pav. *c* ir *d* dalyse – Gauso impulso forma ir dažnių spektras. Čia Gauso impulsas išreikštas:

$$u(t) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{dT/2} \times t\right), \text{ kai } 0 < t \leq dT, \quad (21.1)$$

$$u(t) = 0, \text{ kai } dT > t > T; \quad (21.2)$$

čia dT – impulso žadinimo laikas.

Iš 4 pav. pateikto pavyzdžio matoma, kaip, skiriantis impulsui, skiriasi ir jo dažnių spektro amplitudžių verčių pasiskirstymas. Kadangi BE modelio fazinės paklaidos atsiranda dėl skirtingomis modomis sklindančio impulso generuojamų skirtingų paklaidų, todėl šis pasiskirstymas gali lemti, kad skirtingo impulso modeliavimas BE modelyje generuos skirtingas fazines paklaidas, ir parenkant BE modelio tinklę turi būti atsižvelgiama ir į modeliuojamo impulso formą.

1.7. Sutelktosios, konsistentinės ir apibendrintosios masių matricos, jų įtaka skaičiavimo tikslumui

Siekiant sumažinti skaitinę dispersiją BE modeliuose, dar 1982 m. buvo pastebėtas ryšys tarp BE modelio tikrinių dažnių paklaidų ir konsistentinės bei sutelktosios masių matricos naudojimo surenkant modelio masių matricą (Mullen ir Belytschko, 1982). Sutelktoji masių matrica gaunama elemento masių matricos reikšmės sutelkiant masių įstrižainėje, t. y. priimama aproksimacija, kad masė BE sutelkta ne visame elemente (konsistentinis masių matricos pavidalas), o elemento mazguose. Vienmačio elemento, aprašyto (6) sutelktąją masių matricą, išraiška yra:

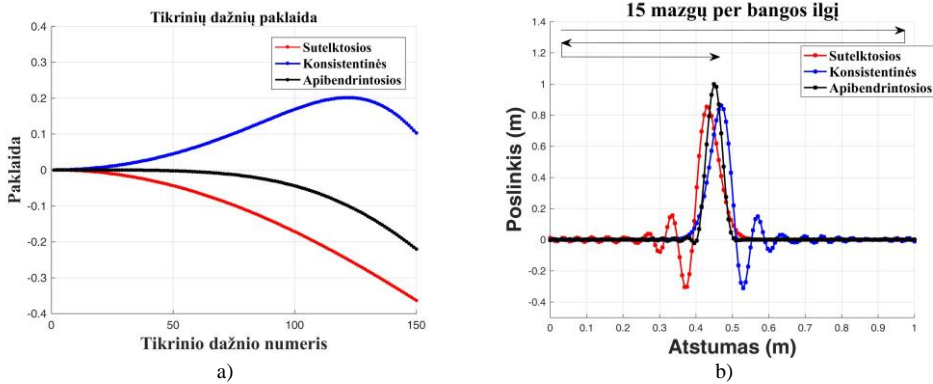
$$[\mathbf{M}_l^e] = \rho \int_{V_e} [\mathbf{N}^e(x)]^T [\mathbf{N}^e(x)] dV \approx \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Nuo modeliui surinkti naudojamų elementų masių matricių priklauso ir fazinės paklaidos: modeliuose su sutelktosiomis masių matricėmis aukštesniosios harmonikos sklinda lėčiau, o su konsistentinėmis masių matricėmis – lėčiau.

Paprasčiausias būdas minimizuoti skaitinę dispersiją BE modeliuose – naudoti apibendrintąją masių matricę, kuri apskaičiuojama imant svertinę sumą tarp sutelktosios ir konsistentinės masių matricos (Daniulaitis ir Barauskas, 1998):

$$[\mathbf{M}_{cl}] = a[\mathbf{M}_c] + (1 - a)[\mathbf{M}_l]; \quad (23)$$

čia a – svorinis koeficientas. 5 pav. a dalyje pateiktos dažnių paklaidos, kai modeliams surinkti naudotos konsistentinės, sutelktosios ir apibendrintosios elementų masių matricos, esant svoriniam koeficientui $a = 0,5$.



5 pav. Modelių, surinktų naudojant sutelktąsias, konsistentines ir apibendrintąsias masių matricias, palyginimas: a) tikrinių dažnių paklaidų palyginimas; b) fazinių paklaidų, kurias generuoja sklindanti banga, palyginimas

Naudojant apibendrintąsias masių matricias, kur kas ilgesniame modelio žemųjų dažnių diapazone tikrinės paklaidos yra artimos tiksloms (5 pav., a). Tai akivaizdžiai matoma ir analizuojant impulso sklidimo fazines paklaidas: fazinės paklaidos modelyje su konsistentinėmis ir apibendrintosiomis masių matricėmis yra panašios, vienos jų generuojamos už sklindančio impulso, kitos – prieš jį. Modelių su apibendrintosiomis masių matricėmis paklaidos išlieka mažos esant tam pačiam modelio diskretizavimo žingsniui (5 pav., b). Tačiau modelių, surinktų iš elementų su konsistentinėmis ar apibendrintosiomis masių matricėmis, masių matricos yra neįstrižaininės, todėl esant didelėms matricių dimensijomis dėl reikalingos masių matricos inversijos modelis gali būti sunkiai pritaikomas išreikštinėms skaitinio integravimo schemoms. Tad bangoms modeliuoti dažniausiai naudojami modeliai su sutelktosiomis masių matricėmis (Nakahata, Sugahara, Barth, Kohler ir Schubert, 2016; Wu, 2006).

1.8. Skaitinio integravimo schemas, skirtos trumpųjų bangų modeliavimo uždaviniams spręsti, ir įstrižaininės masių matricos prasmė

Atliekant dinaminę konstrukcijų analizę, BE modelio konstrukcijos lygtys skaitiškai integruojamos laike naudojant išreikštines arba neišreikštines skaitinio integravimo schemas. Neišreikštinėje analizėje nagrinėjami poslinkiai (priklausomai nuo sprendžiamo uždavinio, poslinkius gali atitikti slėgiai, temperatūra ir kt.) kiekviename žingsnyje yra apskaičiuojami pagal poslinkius, apskaičiuotus praeitame žingsnyje. Tokios schemas vadinamos Eulerio integravimo schemomis ir yra besąlygiškai stabilios, nes, nepriklausomai nuo pasirinkto integravimo žingsnio, sprendinys išlieka stabilus. Tačiau jos turi trūkumą – tiesiogiai skaičiuojant poslinkius reikia apskaičiuoti atvirkštinę standumo matricą, kuri bendruoju atveju yra neįstrižaininė ir jos dimensijos yra $N \times N$, kur N – laisvės laipsnių skaičius modelyje.

Atliekant išreikštinę analizę vietoje poslinkių skaičiuojama poslinkio antroji išvestinė pagal laiką (pagreitis), pagal kurią kiekvienoje iteracijoje yra atnaujinamos greičių ir poslinkių reikšmės, taip išvengiant standumo matricos inversijos. Tačiau skaičiuojant pagreičius yra reikalinga masių matricos inversija, todėl, esant didelių dimensijų modeliams, surenkant modelio masių matricą naudojamos sutelktosios elementų masių matricos. Taip modelio masių matrica išlieka įstrižaininė ir jos inversiją galima atlikti kiekvienam įstrižainės elementui atskirai. Tačiau tokios schemas yra santykinai stabilios ir priklauso nuo skaitinio integravimo žingsnio, kuris turi būti parenkamas labai mažas. Nors BE modelio masių matricos yra juostinės ir jų atvirkštinėms matricoms apskaičiuoti galima panaudoti nuo išankstinių sąlygų priklausomus algoritmus (Smolarski, 2006), modeliuojant bangas paprastai naudojami modeliai su sutelktosiomis masių matricomis (Nakahata *et al.*, 2016; Wu, 2006).

1.9. Skaitinės dispersijos minimizavimas koreguojant tikrines formas ir modifikuojant skaitinio integravimo schemas

Paprastai naudojant retesnę tinklę platesnis tikslis dažniams artimas tikrinių dažnių diapazonas gaunamas, kai manipuluojama BE integravimo taškais, BE modeliui sudaryti naudojami aukštesniosios eilės elementai ar modifikuojamos skaitinio integravimo schemas. Pastaruoju metu atlikta nemažai šios krypties tyrimų. Viename iš mokslinių darbų (Yue ir Guddati, 2005) nustatyta, jog žemosios eilės 4 mazgų kvadratinių BE masių matricos sudarymui formos funkcijoms integruoti naudojamų Gauso ar Gauso ir Lobato integravimo taškų pakeitimas leidžia minimizuoti skaitinę dispersiją. Sudarant aukštesniosios eilės elementus geresnis modelių konvergavimas galimas panaudojant apibendrintąsias masių matricas (Mirbagheri, Nahvi, Parvizian ir Düster, 2015) ir esant nevienodam atstumui tarp vidinių elementų taškų, kur optimaliam išsidėstymui parinkti gali būti panaudojamos Lobato ar Čiobyševo abscisės (Žak ir Krawczuk, 2011). Minimizuoti 1D aukštesniosios eilės elementų matricų įstrižainės juostos plotį galima panaudojant šabloną, kur sujungiami skirtingo tipo minimizavimo parametrai, pvz., skirtingų formos funkcijų kombinacijos ir elemento vidinių taškų padėtys (Khajavi, 2014). Sudarant 2D BE modelius naudojant trikampių elementus geresnis modelio konvergavimas pasiekiamas perstumiant formos funkcijų integravimo taškus nuo jų

įprastinių pozicijų (Li, He, Zhang, Liu ir Li, 2016). Skaitinį triukšmą, atsirandantį simuliuojant bangą, nufiltruoti galima papildomame skaitinio integravimo žingsnyje įvertinat atsirandančią skaitinę dispersiją (Noh ir Bathe, 2013). Siekiant minimizuoti skaitinę dispersiją apibendrintųjų masių matricų panaudojimas gali būti sujungiamas su dviejų pakopų išreikštine skaitinio integravimo schema, kur atliekamas skaitinės dispersijos filtravimas.

Taip pat yra sprendimų, kai skaitinė dispersija minimizuojama išlaikant įstrižaininę masių matricą (Hansson ir Sandberg, 1997; Haug ir Pan, 1998; He, Li, Liu, Li ir Cheng, 2016; Jensen, 1998; Zuo, Li, Zhai ir Xie, 2014); šiuo atveju taikoma nestandartinė masių matricos sutelkimo procedūra.

Dažnai retesnis BE modelio tinklelis ir mažesnis laisvės laipsnių skaičius modelyje nereiškia, kad, palyginti su pirmosios eilės BE su sutelktosiomis masių matricomis, skaičiavimo išteklių poreikis bus tikrai mažesnis, nes šis poreikis priklauso ir nuo modelio matricų juostos pločio (Farmaga, Shmigelskyi, Spiewak ir Ciupinski, 2011) bei kitų skaičiavimų, kuriuos reikia atlikti modeliavimo metu, pvz., atliekant triukšmo filtravimą, atsiranda papildomų skaičiavimo sąnaudų dėl filtravimo procedūros. Naudojant apibendrintąją ir aukštesniosios eilės masių matricą dėl sunkiai atliekamos masių matricos inversijos negalima naudoti išreikštinių skaitinio integravimo schemų didelių dimensijų modeliams. Netgi naudojant aukštesniosios eilės elementus su įstrižainine masių matrica standumo matricos juostos plotis modeliuose yra platesnis, dėl to reikia didesnės kompiuterio atminties ir aritmetinių veiksmų. Esant nevienodam masių pasiskirstymui tarp vidinių aukštesniosios eilės elemento mazgų, norint užtikrinti tikslumą ir stabilumą skaitinio integravimo žingsnis turi būti mažesnis. Tačiau atliekamuose tyrimuose dažniausiai visapusiškai nevertinamas skaičiavimo išteklių poreikis ir pateikiama tik tam tikra koncepcija vienam iš rezultatų pasiekti, pvz., retesnis modelio tinklelis, panaudojant aukštesniosios eilės elementus.

1.10. Aukštesniosios eilės elementų sudarymas per modų sintezę

Modų sintezė yra koncepcija, kuri leidžia kompleksinę struktūrą atvaizduoti naudojant mažesnę laisvės laipsnių skaičių (Jie, Xin ir Gangtie, 2015). Daugeliu atveju formuojamos konstrukcijos modelis yra sudaromas iš lygčių, tiesiogiai išreiškiančių visą modelį. Tačiau ne visada galima sudaryti lygtis, kurios išreikštų visą modelį, o sudarant konstrukciją iš atskirų sričių, sudarytų taikant modų sintezę, modelio konvergavimas nėra geras. Nagrinėjami keli metodai skirtingoms sritims sujungti (Qiu, Ying ir Williams, 1997; Rozenblum, 1985). Tam tikru atveju modų sintezė gali būti taikoma baigtinių elementų matricoms apskaičiuoti (Barauskas ir Barauskiene, 2004). Realios simetrinės BE modelio matricos $[M]$ ir $[K]$ užtikrina, kad išsprendus tikrinių reikšmių uždavinį (16) gaunama n struktūrinių modų $\omega_i, \{y_i\}, i = 1, \dots, n$. Fundamentaliosios struktūrinių modų savybės užtikrina, kad modelio matricos $[M]$ ir $[K]$ gali būti išreikštos per normalizuotas modelio tikrines formas ir tikrinius dažnius:

$$[M] = ([Y]^T)^{-1}[Y]^{-1}, \quad (24.1)$$

$$[K] = ([Y]^T)^{-1}[\text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)][Y]^{-1}; \quad (24.2)$$

čia $[Y] = [\{y_1\}, \{y_2\}, \dots, \{y_n\}]$ yra tikrinių formų matrica. Viename darbe (Barauskas ir Barauskiene, 2004) buvo pristatytas skaitinės dispersijos minimizavimo vienmačiame skaliariniame lauke metodas. Jį taikant pagerėjimas gaunamas BE modelius surenkant iš aukštesniosios eilės sintezuotųjų elementų; elementai išreiškiami per pakoreguotas virpesių modas:

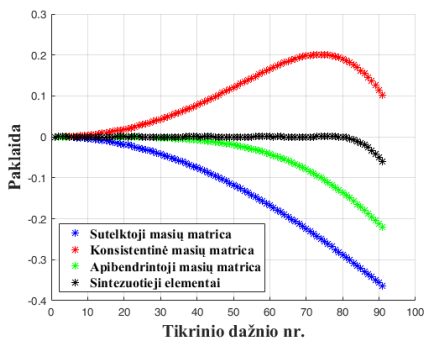
$$[\{\tilde{y}_1\}, \dots, \{\tilde{y}_n\}] = \{\mathbf{a}_1^y \times \mathbf{y}_1\}, \dots, \{\mathbf{a}_n^y \times \mathbf{y}_n\}, \quad (25.1)$$

$$[\text{diag}(\tilde{\omega}_1^2, \tilde{\omega}_2^2, \dots, \tilde{\omega}_n^2)] = [\text{diag}(a_1^\omega \omega_1^2, a_2^\omega \omega_2^2, \dots, a_n^\omega \omega_n^2)]; \quad (25.2)$$

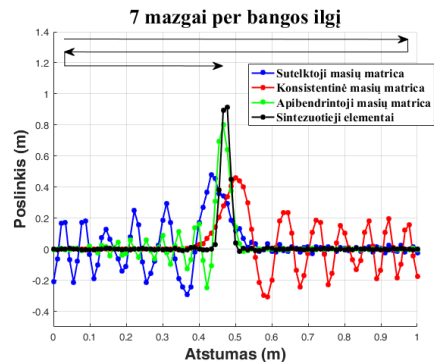
čia $\{\mathbf{a}^\omega\}$ ir $\{\mathbf{a}^y\}$ yra svoriniai koeficientai, taikomi sintezuojamo elemento tikriniam dažniams ir tikrinėms formoms. Reikiamos korekcijos apskaičiuojamos minimizuojant tikslo funkciją:

$$\min_{\{\mathbf{a}^y\}, \{\mathbf{a}^\omega\}, \beta_k^l} \Psi = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left(\frac{\tilde{\omega}_i - \omega_{i0}}{\omega_{i0}} \right)^2; \quad (26)$$

čia $\tilde{\omega}_i$ – konstrukcijos, surinktos iš sintezuotųjų elementų, i -tasis tikrinis dažnis, ω_{i0} – tikslus i -tasis tikrinis dažnis, β_k^l – svartinis k -tosios elemento formos koeficientas tarp konsistentinės ir sutelktosios formos funkcijos. Paklaida minimizuojama pirmųjų $\tilde{N} < N$ tikrinių dažnių, kur N – konstrukcijos modų skaičius. Gaunama, kad ~90 % modelio tikrinių dažnių yra artimi tiksliesiems ir impulsas išlaiko formą, kai yra 7 mazgai per bangos ilgį.



a)



b)

6 pav. Modelių, surinktų naudojant sintezuotuosius elementus ir tradicinius elementus su sutelktosiomis, konsistentinėmis ir apibendrintosiomis masių matricomis, palyginimas:

a) tikrinių dažnių paklaidų palyginimas; b) fazinės paklaidos, kurias generuoja sklindanti banga

Viename straipsnyje (Barauskas, 2005) metodas išplėstas į 2D homogeninį skaliarinį lauką, kai sintezuojami 2D kvadratiniai *elementai*. Tačiau dėl neįstrižaininės masių matricos metodas sunkiai pritaikomas, kai modeliavimą norima atlikti naudojant išreikštines skaitinio integravimo schemas.

1.11. Pirmojo skyriaus išvados

Atlikus žinomų trumpųjų bangų BE modelių analizę, prieita prie šių išvadų:

1. Trumpųjų bangų modeliai taikomi įvairiose inžinerijos srityse, pvz., lazerinėms technologijoms, ultragarsiniams matavimams, šviesolaidžiams, seisminei analizei ir pan.
2. Daugeliu praktinių atvejų trumpųjų bangų modeliavimas reikalauja didelių, kartais netgi nepasiekiamų, skaičiavimo išteklių.
3. Sklindančių bangų BE modeliai išreiškiami bendrosiomis konstrukcijų dinamikos lygtimis. Jos gali būti pateiktos standartiniu pavidalu arba būti pertvarkytos į normaliąsias koordinates. Todėl bangos ir virpesiai konstrukcijoje visada gali būti išreikšti kaip konstrukcijos modų superpozicija.
4. Tiek BEM, tiek baigtinių skirtumų metodais gautuose skaitiniuose modeliuose pasireiškia skaitinės paklaidos, kurios priklauso nuo erdvės diskretizavimo smulkumo ir nuo simuliuojamų signalų dažnių spektrų. Svarbi paklaidų kategorija yra skaitinė dispersija, t. y. paklaidos, pasireiškiančios ne visai tinkamais skirtingo dažnio harmoninių komponentų sklidimo greičiais.
5. Tampriųjų ir akustinių bangų BE modelių konvergavimo ir tikslumo rodikliai gaunami geresni, kai taikomos apibendrintosios masių matricos, kaip alternatyva įprastoms įstrižaininėms bei konsistentinėms matricoms. Kiekybinis rodiklių pagerėjimo matas glaudžiai susijęs su tiksliais dažniams artimų konstrukcijos tikrinių dažnių ruožo praplėtimu. Deja, iki šiol žinomuose modeliuose tam panaudojamos neįstrižaininės masių matricos. Tokiu atveju nepavyksta panaudoti privalumų, kuriuos galėtų teikti išreikštinės skaitinio integravimo schemas.
6. Minimizuoti skaitinę dispersiją BE modeliuose galima naudojant aukštesniosios eilės elementus, kuriems sudaryti panaudojamos skirtingų formos funkcijų kombinacijos, keičiamas elemento mazgų išdėstymas, ar modifikuojant skaitinio integravimo schemas, kur papildomuose žingsniuose yra įvertinami ir nufiltruojami skaitiniai triukšmai. Tačiau dažnais atvejais gaunama neįstrižaininė masių matrica, filtruojant triukšmą neišlaikoma impulso amplitudė arba esant įstrižaininei masių matricai masė elemente pasiskristo netolygiai ir tai trumpina skaitinio integravimo žingsnį.
7. Aukštesniosios eilės BE galima sudaryti tiesiogiai per konstrukcijos virpesių modas, kurių korekcijos leidžia minimizuoti tikrinių dažnių paklaidas, galiausiai gaunant elementą su neįstrižainine masių matrica, tačiau modelio, surinkto iš sintezuotųjų elementų, net ~90 % pirmųjų dažnių yra artimi tiksliais.

Kadangi sudarant BE per konstrukcijos virpesių modas, nors ir neišlaikant įstrižaininės masių matricos, gaunami beveik visi modelio dažniai artimi tiksliais, tolesnis skaitinės dispersijos minimizavimas paremtas matricų sinteze. Siekiama sudaryti baigtinius elementus su įstrižainine masių matrica, kur kaip galima platesniame dažnių diapazone modelio tikrinių dažnių paklaidos išliktų artimos tikslioms. Tada modelis būtų tinkamas išreikštinėms skaitinio integravimo schemoms,

kurios naudojamos simuliuojant trumpąsias bangas. Numatomi šie tolesni darbo uždaviniai:

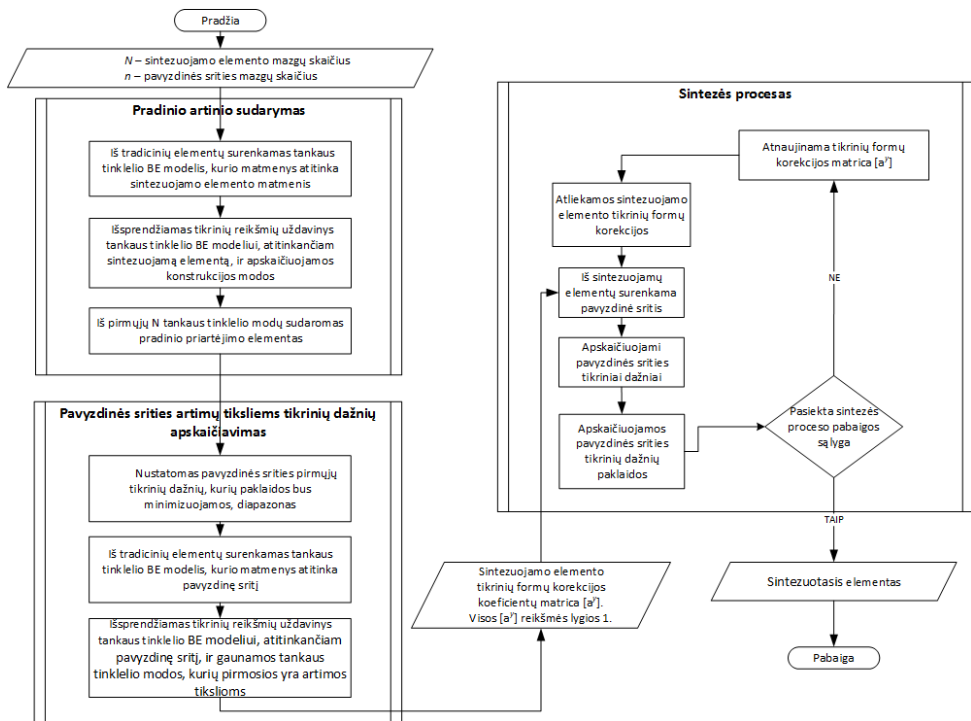
1. Taikant modų sintezės metodą, pagal koreguotas modas sintezuoti 1D ir 2D mažiausios fazinės paklaidos baigtinius elementus, kurių masių matrica yra įstrižaininė.
2. Atlikti modelių konvergavimo tyrimą nehomogeninėse ir šakotose 1D konstrukcijose naudojant sintezuotuosius elementus.
3. Atlikti modelių konvergavimo tyrimą nehomogeniniuose sudėtingos geometrinės formos 2D baigtinių elementų modeliuose, sudarytuose iš sintezuotųjų elementų.
4. Verifikuoti elementus ir ištirti iš jų sukurtų modelių privalumus ir našumą, palyginant su iš įprastinių baigtinių elementų sudarytais modeliais.

2. BAIGTINIŲ ELEMENTŲ MATRICŲ SINTEZĖS ALGORITMAI

2.1. Mažiausios fazinės paklaidos vienmačių elementų matricų sintezė atliekant tikrinių dažnių ir formų korekcijas

Baigtinio elemento ar konstrukcijos, surinktos iš baigtinių elementų, matricos gali būti apskaičiuojamos iš žinomų tikrinių formų ir tikrinių dažnių pagal (24) lygtis. Jei būtų žinomos tikslios konstrukcijos modos, tada konstrukcijos, išreikštos per tikslias modas, visų dažnių paklaidos būtų artimos 0. Tačiau kai konstrukcija yra sudėtingos geometrinės formos, dažniausiai negalima apskaičiuoti tikslų konstrukcijos modų, todėl toks metodas nėra patogus. O konstrukcijos, surinktos iš elementų, kurie sudaryti tiesiogiai per (24) lygtis, tikrinių dažnių paklaidos yra didelės. (24) lygčių panaudojimas įgauna praktinę reikšmę, kai elemento ar srities matricos atliekant tikrinių formų ir tikrinių dažnių korekcijas yra sintezuojamos taip, kad iš jų surinktos konstrukcijos tikrinių dažnių paklaidos išliktų mažos kaip galima platesnį tikrinių dažnių diapazoną (Barauskas ir Barauskiene, 2004). Tokie elementai vadinami sintezuotaisiais elementais (SE).

Siekiant suformuoti SE su įstrižainine masių matrica, kurios masės visuose mazguose pasiskirsčiusios tolygiai, atliekant sintezę keičiama tik standumo matrica, o sintezuotųjų elementų masių matrica nekeičiama ir išlieka tokia pati, kaip sintezuotąjį elementą atitinkančios struktūros, surinktos iš pirmosios eilės elementų įstrižainine masių matrica (tradicinių elementų, STE). Vienmatės (1D) konstrukcijos atveju, kai tikslūs tikriniai dažniai yra žinomi, sudarant SE atliekamos tik tikrinių formų korekcijos. 7 pav. pateikiama sintezės proceso schema.



7 pav. Vienmačio sintezuotojo elemento sudarymo schema

Pradinio elemento masių matrica surenkama iš STE masių matricos, o standumo matrica – iš artimų tiksliams tikrinių formų ir tikrinių dažnių. Artimas tiksliams tikrines formas ir tikrinius dažnius galima apskaičiuoti sprendžiant tikrinių reikšmių uždavinį sintezuotąjį elementą atitinkančiai struktūrai su tankiu tinkleliu, arba, esant tiesiam strypeliui, tikriniai dažniai gali būti apskaičiuojami pagal (18), o tikrinės formos – pagal (27.1) lygtį:

$$y_{i0j} = \sin\left(\frac{2 \times pi \times (i - 1)}{l/(j \times L)}\right); \quad (27.1)$$

čia l – strypelio ilgis, L – ilgis tarp mazgų, y_{i0j} – tiksli i -toji tikrinė forma. Sintezuotasis elementas gaunamas sprendžiant optimizavimo uždavinį, kuriame elemento tikrinės formos yra šiek tiek pakeičiamos taip, kad konstrukcijos, surinktos iš sintezuotųjų elementų, tikrinių dažnių paklaidos būtų mažos kaip galima platesnį tikrinių dažnių diapazoną $\tilde{N} \leq N$, kur \tilde{N} – sintezuojamų dažnių skaičius, N – konstrukcijos, sudarytos iš sintezuotųjų elementų, dažnių skaičius. Tikslų funkcija išreiškiama:

$$\min_{[a^y]} \Psi = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left(\frac{\hat{\omega}_i - \omega_{i0}}{\omega_{i0}} \right)^2; \quad (28)$$

čia $[\mathbf{a}^y]$ yra tikrinių formų korekcijos reikšmių matrica. Tikrinių formų korekcijos atliekamos:

$$\begin{aligned} & [\{\tilde{\mathbf{y}}_{11}, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{1n}\}, \dots, \{\tilde{\mathbf{y}}_{n1}, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{nn}\}] \\ & = \{\tilde{\mathbf{y}}_{11} \times \mathbf{a}_{11}^y, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{1n} \times \mathbf{a}_{1n}^y\}, \dots, \{\tilde{\mathbf{y}}_{n1} \times \mathbf{a}_{n1}^y, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{nn} \\ & \quad \times \mathbf{a}_{nn}^y\}; \end{aligned} \quad (29)$$

čia kiekvienas j -tasis i -tosios formos narys yra padauginamas iš atitinkamos reikšmės iš matricos $[\mathbf{a}^y]$. Korekcijos atliekamos visoms tikrinėms formoms, išskyrus kietojo kūno modas, kurios atitinka nulinį dažnį.

2.1.1. Tikslų funkcijų minimizavimas gradientinio nusileidimo metodu

Tikslų funkcija (28) gali būti minimizuota taikant įvairius metodus. Kadangi tikslų funkcijos gradientas gali būti išreikštas analitiniu pavidalu, tikslų funkcijos minimumui rasti taikomas gradientinio nusileidimo metodas (Kelley, 1999).

Gradientas $\frac{\delta\Psi}{\delta[\mathbf{a}^y]}$ išreiškiamas panaudojant tikslų funkcijos variaciją:

$$\delta\Psi = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\omega}_i - \hat{\omega}_{i0}}{\hat{\omega}_{i0}\hat{\omega}_i} \delta\hat{\omega}_i^2, \quad (30.1)$$

$$\delta\hat{\omega}_i^2 = \{\tilde{\mathbf{y}}_i\}^T \left(\frac{\partial[\hat{\mathbf{K}}]}{\partial\alpha} - \hat{\omega}_i^2 \frac{\partial[\hat{\mathbf{M}}]}{\partial\alpha} \right) \{\tilde{\mathbf{y}}_i\}. \quad (30.2)$$

Kadangi masių matrica nekeičiama ir yra įstrižaininė, priimama, kad $\frac{\partial[\hat{\mathbf{M}}]}{\partial\alpha} = 0$. Tada iš (30.1) ir (30.2) gradientas $\frac{\delta\Psi}{\delta\mathbf{a}_{ij}^y}$ išreiškiamas taip:

$$\frac{\delta\Psi}{\delta\mathbf{a}_{ij}^y} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\hat{\omega}_i - \hat{\omega}_{i0}}{\hat{\omega}_{i0}\hat{\omega}_i} \{\tilde{\mathbf{y}}_i\}^T \left(\frac{\partial[\hat{\mathbf{K}}]}{\partial\mathbf{a}_{ij}^y} \right) \{\tilde{\mathbf{y}}_i\}; \quad (31)$$

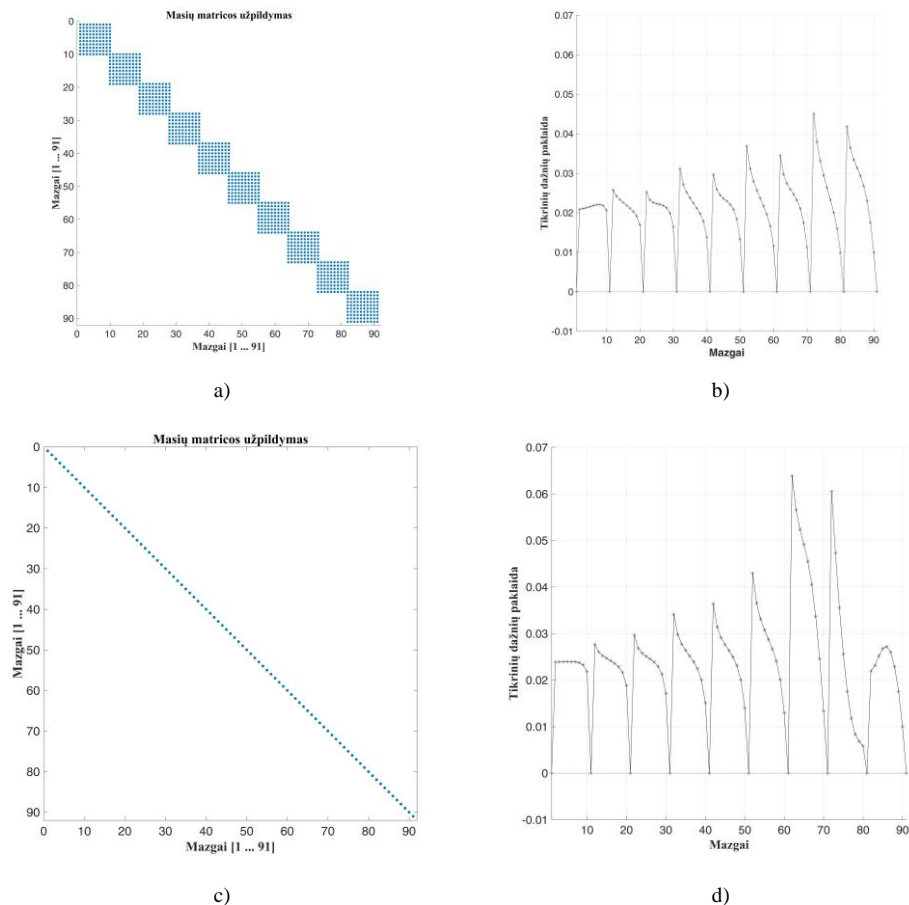
kur $[\hat{\mathbf{K}}]$ yra surenkama kiekvieno skaitinio integravimo metu iš sintezuotųjų elementų, apskaičiuotų praėjusiam optimizavimo žingsnyje. Išvestinė $\frac{\partial[\hat{\mathbf{K}}]}{\partial\mathbf{a}_{ij}^y}$ išreiškiamas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\hat{\mathbf{K}}]}{\partial\mathbf{a}_{ij}^y} = & - \left(\{\mathbf{a}^y\}^T [\tilde{\mathbf{Y}}]^T \right)^{-1} \left([0, \dots, 0, y_{ij}, 0, \dots, 0] [\hat{\mathbf{K}}] [\tilde{\mathbf{Y}}] \{\mathbf{a}^y\} \right. \\ & \left. + \{\mathbf{a}^y\}^T [\tilde{\mathbf{Y}}]^T [\hat{\mathbf{K}}] [0, \dots, 0, y_{ij}, 0, \dots, 0] \right) \left(\{\mathbf{a}^y\} [\tilde{\mathbf{Y}}] \right)^{-1}; \end{aligned} \quad (32)$$

čia $[\tilde{\mathbf{Y}}]$ yra srities, surinktos iš sintezuotųjų elementų, tikrinių formų matrica; y_{ij} – i -tasis j -tosios tikrinės formos narys.

2.1.2. Pradinio elemento sudarymas

BE modelio, surinkto iš 10 mazgų baigtinių elementų, sudarytų pagal (24) lygtis, kuriam sudaryti panaudotos artimos tiksloms modos, masių matricos užpildymas ir tikrinių dažnių paklaidos pateiktos 8 pav. *a* ir *b* dalyse. Modelis sudarytas iš 10 elementų (91 laisvės laipsnis). Iš 8 pav. *c* ir *d* dalių matoma, jog vietoje (24.2) lygtimi apskaičiuotos masių matricos imant konstrukcijos, atitinkančios sintezuotąjį elementą, surinktos iš tradicinių elementų, masių matricą, modelių tikrinių dažnių paklaidos išlieka panašios.



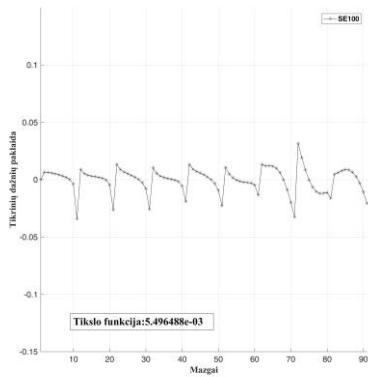
8 pav. Tikrinių dažnių priklausomybės nuo masių matricos tipo palyginimas: a) ir c) konstrukcijos masių matricos užpildymas iš 10 SE su neįstrižainine (a) ir įstrižainine (c) masių matrica; b) ir d) konstrukcijos tikrinių dažnių paklaidų kreivė, kai modelis surinktas iš neįstrižaininės (b) ir įstrižaininės (d) masių matricos

Toliau, atliekant elemento sintezę, kaip pradinis elementas naudojamas elementas, kurio standumo matrica apskaičiuota pagal artimas tiksloms tikrines modas (24.1), o masių matrica imama įstrižaininė ir sintezės metu keičiama tik standumo matrica.

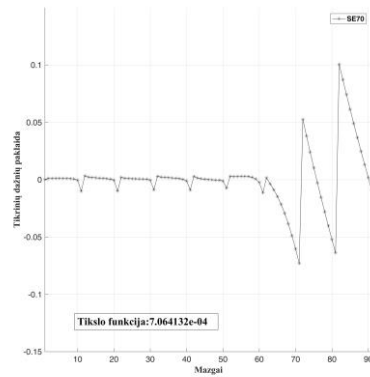
2.1.3. Tikrinių dažnių paklaidų minimizavimas

Kaip buvo pademonstruota 2.1.3 skyriuje, sintezuotojo elemento laisvės laipsnių skaičius gali būti pasirenkamas laisvai ir, kuo jis yra didesnis, tuo geresnis modelio, surinkto iš sintezuotųjų elementų, konvergavimas. Tačiau kuo daugiau laisvės laipsnių elemente, tuo jį sunkiau panaudoti sudarant norimos geometrinės formos BE modelį.

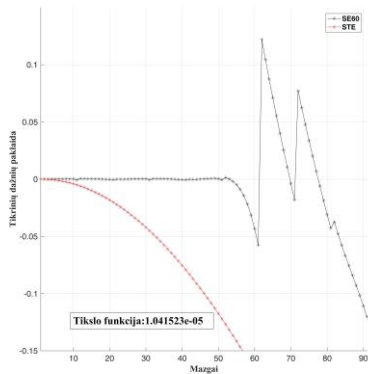
Šiame skyriuje 1D sintezuotajam elementui sudaryti parenkamas 10 mazgų elementas, kurio tikslūs tikriniai dažniai minimizuojami srityje, surinktoje iš 10 elementų. 9 pav. pateiktos modelio, surinkto iš sintezuotųjų elementų, kur skirtingas pirmųjų tikrinių dažnių skaičius \tilde{N} buvo minimizuotas: a) $\tilde{N} = 91$ (100 %), b) $\tilde{N} = 63$ (~70 %), c) $\tilde{N} = 54$ (~60 %), d) $\tilde{N} = 45$ (~50 %), tikrinių dažnių paklaidų kreivės. Toliau šie elementai atitinkamai vadinami SE100, SE70, SE60, SE50.



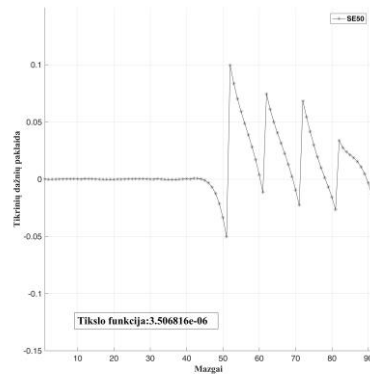
a)



b)



c)



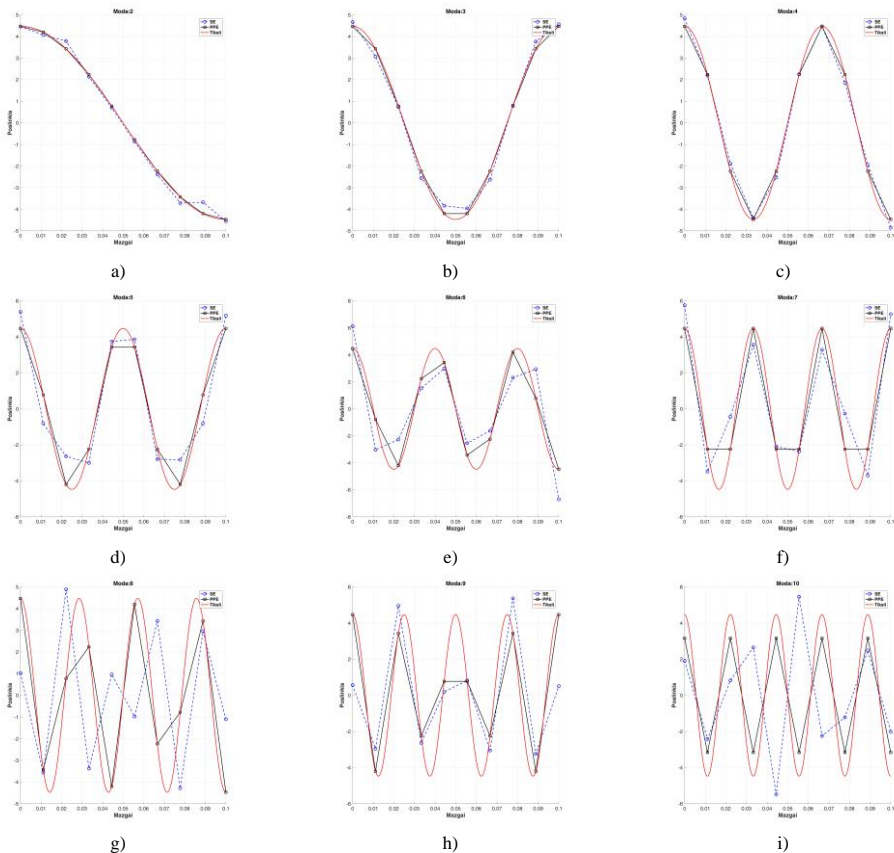
d)

9 pav. Tikrinių dažnių paklaidų kreivės, kai minimizuotos tikrinių dažnių paklaidos skirtingam dažnių diapazonui: a) SE100 – 100 %; b) SE70 – 70 %; c) SE60 – 60 %; d) SE50 – 50 %

Tikrinių dažnių paklaidų kreivės, pateiktos 9 pav., gali būti palyginamos su 8 pav. *d* dalimi, kur matoma, jog paklaida priklauso nuo dažnių diapazono, kurio

tikrinių dažnių paklaidos yra minimizuojamos sintezės metu. Atliekant visų dažnių minimizavimą, kai $\tilde{N} = N$, pagerėjimo beveik negaunama. Tačiau pasirinkus mažesnę \tilde{N} mažos dažnių paklaidos gaunamos beveik visame sintezuojamų dažnių diapazone. Kuo sintezuojamų dažnių diapazonas mažesnis, tuo geresni rezultatai yra gaunami. Toliau kaip SE naudojami elementai su minimizuotomis pirmųjų 60 % tikrinių dažnių paklaidomis, kur $\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left(\frac{\hat{\omega}_i - \omega_{i0}}{\omega_{i0}} \right)^2 \approx 10^{-5}$. 9 pav. c dalyje palygintos modelio iš SE ir modelio, surinkto iš STE naudojant tokį patį diskretizavimo žingsnį (raudona linija), tikrinių dažnių paklaidos.

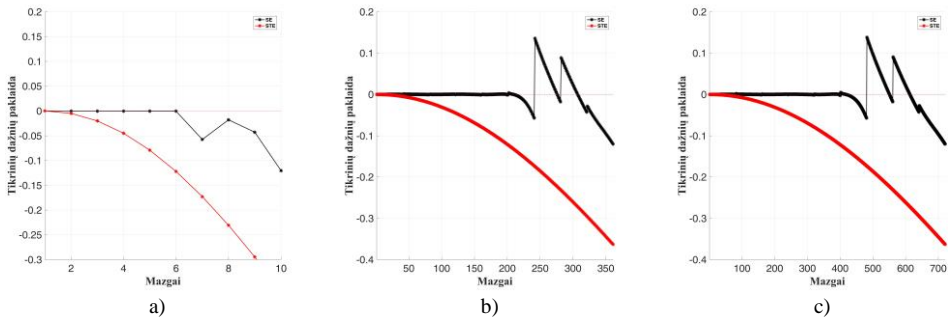
Taigi modifikacijos, apibrėžtos koeficientais $[a^j]$, kuriomis atliekamos tikrinių formų korekcijos, užtikrina platesniame modelio tikrinių dažnių diapazone artimus tiksliais tikrinius dažnius. 10 pav. pateiktos tikslios ir 10 mazgų tiesaus elemento tikrinės formos. Lyginant formas matoma, jog pirmųjų tikrinių formų kontūras išlieka artimas tiksliam, o aukštesnėms formoms atliekamos kur kas didesnės modifikacijos, taip išgaunant geresnes modelio, surinkto iš sintezuotųjų elementų, konvergavimo savybes.



10 pav. Elemento tikrinių formų palyginimas

Svarbi tiriamų modelių savybė, kad procentiškai sintezuotojo elemento artimų tiksliais tikrinių dažnių diapazonas nepriklauso nuo bendro konstrukcijos laisvės

laipsnių skaičiaus. Apytiksliai tikrinių dažnių paklaidos išlieka tokios pat tiek nagrinėjant vieną SE, tiek sritį, kurioje buvo minimizuojami tikriniai dažniai sudarant sintezuotąjį elementą, tiek daug didesnę sritį, surinktą iš SE. Todėl aukščiausias artimas tiksliesiems modeliui tikrinis dažnis parodo dažnių spektro, kuriame modeliavimą bangolaidyje galima atlikti su mažomis fazinėmis paklaidomis, plotį. 11 pav. pateiktos modelių tikrinių dažnių paklaidos esant skirtingam laisvės laipsnių skaičiui: a) $N = 10$; b) $N = 361$; c) $N = 721$. Vadinas, gautas SE gali būti naudojamas skirtingo dydžio bangolaidžių struktūroms sudaryti ir gali būti suprantamas kaip dinaminis, greitai konverguojantis aukštesniosios eilės elementas su įstrižainine masių matrica.



11 pav. 1D modelio tikrinių dažnių paklaidų palyginimas, kai modelis surinktas iš skirtingo skaičiaus elementų: a) $N = 10$; b) $N = 361$; c) $N = 721$

Sintezės metu sudarytas elementas nepriklauso nuo mechaninių konstantų ir gali būti naudojamas kaip šablonas aukštesniosios eilės elementams sudaryti. Sintezuotojo elemento masių matrica surenkama kaip tradicinių elementų, o standumo matrica apskaičiuojama pagal (33) lygtį:

$$[\mathbf{K}_{1D}^{SE}] = \frac{EA}{L} [\mathbf{K}_{1D}^{SE0}]; \quad (33)$$

čia $[\mathbf{K}_{1D}^{SE0}]$ – bėmatis (sintezės metu priimta, kad mechaninės konstantos lygios 1) sintezuotasis elementas; $[\mathbf{K}_{1D}^{SE}]$ – fizikinę prasmę turintis sintezuotasis elementas. Iš (33) lygties matoma, kad sintezę užtenka atlikti vieną kartą šablonui $[\mathbf{K}_{1D}^{SE0}]$ sudaryti, o pagal (33) lygtį gali būti sudaryti skirtingas mechanines savybes apibūrinantys sintezuotieji elementai.

2.2. Mažiausios fazinės paklaidos elementų matricių sintezė dvimatėms akustinėms struktūroms

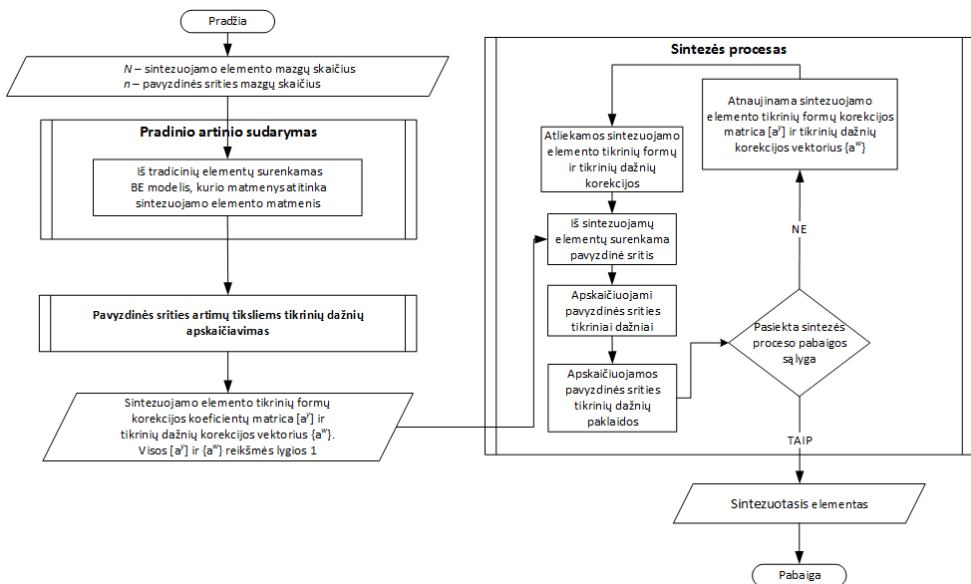
Bendruoju atveju sintezės algoritmas nepriklauso nuo modelio dimensijų ir gali būti pritaikomas tiek 2D, tiek 3D BE modeliams, kaip pateikta 2.1 skyriuje. Tačiau, pereinant į aukštesniąsias dimensijas, atsiranda problemų dėl skaičiavimo išteklių, kurie reikalingi pačiam elementų sintezei atlikti, o tai 1D modelio atveju didelės reikšmės neturėjo. Taip yra todėl, kad, pvz., pereinant iš 1D konstrukcijos į 2D konstrukciją, skirtą akustinei bangai simuliuoti, sintezės optimizavimo parametru skaičius matricioje $[\mathbf{a}^y]$ išauga kvadratu esant tam pačiam SE mazgų skaičiui viena

kryptimi. Taip pat atliekant optimizavimą kiekviename optimizavimo žingsnyje visiems parametrms a_{ij}^y gradientui apskaičiuoti reikia surinkti matricas $[\mathbf{K}]$, kurių dimensija padidėja kvadratu.

Toliau šiame skyriuje analizuojamas sintezės procesas, jo optimizavimas ir rezultatai 2D modelyje, kai kaip SE sudaromas 5×5 mazgų kvadratinis elementas, kur tikrinių dažnių paklaidos minimizuojamos kvadratinėje pavyzdinėje srityje, surinktoje iš 25 elementų. Remiantis 2.1.2 skyriuje atliktais eksperimentais sintezės metu minimizuojamos pirmųjų 25 % pavyzdinės srities tikrinių dažnių paklaidos.

2.2.1. Dvimačio sintezuotojo elemento sudarymas

Kvadratinio dvimačio baigtinio elemento ar konstrukcijos modas galima apskaičiuoti naudojantis analitinėmis formulėmis, tačiau bendruoju atveju šias modas apskaičiuoti yra gana sudėtinga arba nėra įmanoma. Siekiant pademonstruoti, kad sintezės algoritmas nėra priklausomas nuo pradinio elemento sudarymo, 2D modelio atveju kaip pradinio priartėjimo elementas imama konstrukcija, surinkta iš tradicinių elementų; sintezės metu atliekant konstrukcijos modų korekcijas sudaromas sintezuotasis baigtinis elementas. 12 pav. pateikta dvimačio elemento sintezės schema.



12 pav. Dvimačio sintezuotojo elemento sudarymo schema

Kadangi pradinio priartėjimo elemento tikriniai dažniai nėra tikslūs, todėl tikslo funkcija papildoma tikrinių dažnių korekcijos vektoriumi ir galutinė tikslo funkcija įgauna šią formą:

$$\min_{[a^y], \{a^n\}} \Psi = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left(\frac{\hat{\omega}_i - \omega_{i0}}{\omega_{i0}} \right)^2. \quad (34)$$

Gradientas $\{\mathbf{a}^y\}$ apskaičiuojamas taip pat, o vektoriaus $\{\mathbf{a}^\omega\}$ nariams gradientas apskaičiuojamas kaip ir (31), kur

$$\frac{\delta\Psi}{\delta a_i^\omega} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\omega}_i - \hat{\omega}_{i0}}{\hat{\omega}_{i0}\hat{\omega}_i} \{\tilde{\mathbf{y}}_i\}^T \left(\frac{\partial[\hat{\mathbf{K}}]}{\partial a_i^\omega} \right) \{\tilde{\mathbf{y}}_i\}; \quad (35)$$

čia

$$\frac{\partial[\hat{\mathbf{K}}]}{\partial a_i^\omega} = (\{\mathbf{a}^y\}^T [\tilde{\mathbf{Y}}]^T)^{-1} (\text{diag}[0, \dots, 0, \omega_i^2, 0, \dots, 0]) (\{\mathbf{a}^y\} [\tilde{\mathbf{Y}}])^{-1}. \quad (36)$$

Kaip matoma iš (35) lygties, dažnių korekcijų yra tik tiek, kiek laisvės laipsnių sintezuojamame elemente, taigi dažnių pridėjimas, palyginti su tikrinių formų korekcijų koeficientų matrica $\{\mathbf{a}^y\}$, didelės įtakos skaičiavimo apimtims neturi.

2.2.2. Simetrinės modos dvimačiame akustinių bangų baigtinių elementų modelyje ir sintezuotojo elemento sudarymas

Kvadratinis 5×5 mazgų pradinis elementas surenkamas iš pirmosios eilės tradicinių skaliarinio lauko elementų su sutelktosiomis masių matricomis, kurios išreiškiamos:

$$[\mathbf{M}^e] = \frac{\rho \times S^e}{4} [\mathbf{I}], \quad (37.1)$$

$$[\mathbf{K}^e] = E \times S^e [\mathbf{B}]^T [\mathbf{B}]; \quad (37.2)$$

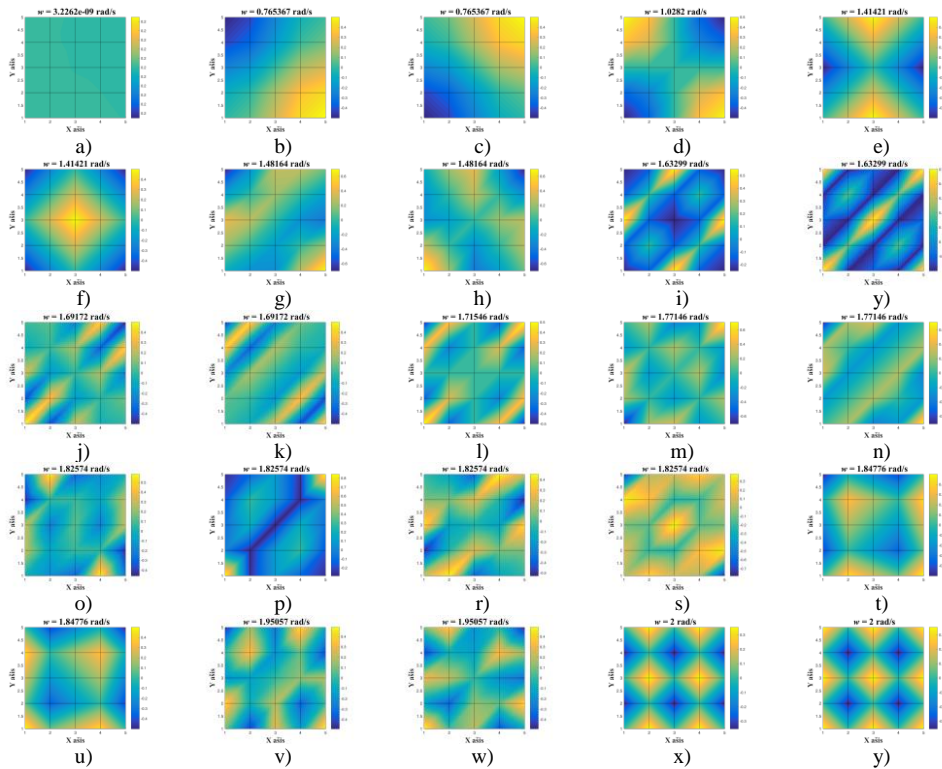
čia S^e – elementų plotas, $[\mathbf{I}]$ ir $[\mathbf{B}]$ yra vienetinė ir įtempių matrica. Pradinio 5×5 mazgų elemento modos pateiktos 13 pav.

Vienmačio modelio atveju visos BE modelio modos yra skirtingos, o aukštesniosiose dimensijose atsiranda simetrinės modos, kurios atitinka tą patį tikrinį dažnį ir kurių tikriniai vektoriai yra ortogonalūs. Sintezės metu korekcijos koeficientai gali būti skaičiuojami tik vienos simetrinės modos, o kita moda yra gaunama atlikus modos pasukimą 90° , kur

$$\{\tilde{\mathbf{y}}_{s2}\} = [\mathbf{T}]\{\tilde{\mathbf{y}}_{s1}\}, \quad (38.1)$$

$$\tilde{\omega}_{s2} = \tilde{\omega}_{s1}; \quad (38.2)$$

čia $s1, s2$ – simetrinių modų numeriai, $[\mathbf{T}]$ – posūkio matrica.

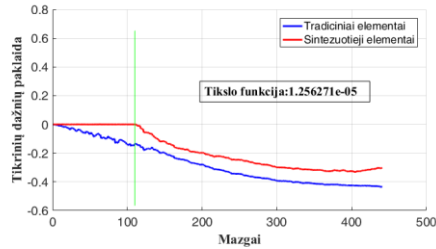


13 pav. Pradinio 5×5 mazgų elemento modos

Iš 13 pav. matoma jog 5×5 mazgų BE elemente šios modos yra simetrinės: 3 ir 4, 7 ir 8, 11 ir 12, 14 ir 15, 20 ir 21, 22 ir 23. Sintezės metu atliekant pirmųjų simetrinių modų korekcijas atskirai gaunamas greitesnis sintezės proceso konvergavimas, o aukštesniųjų modų korekcijos konvergavimo greičiui reikšmingos įtakos neturi. Todėl sintezės metu pirmųjų dviejų simetrinių modų korekcijos atliekamos atskirai, likusioms simetrinių modų poroms korekcijos yra skaičiuojamos tik vienai modai, o kita yra gaunama pagal (38) išraiškas. Taip vietoje 24 (1 moda – kietojo kūno moda) lieka 19 modų, kurioms atliekamos korekcijos, ir korekcijos koeficientų skaičius yra sumažinamas nuo 625 iki 494.

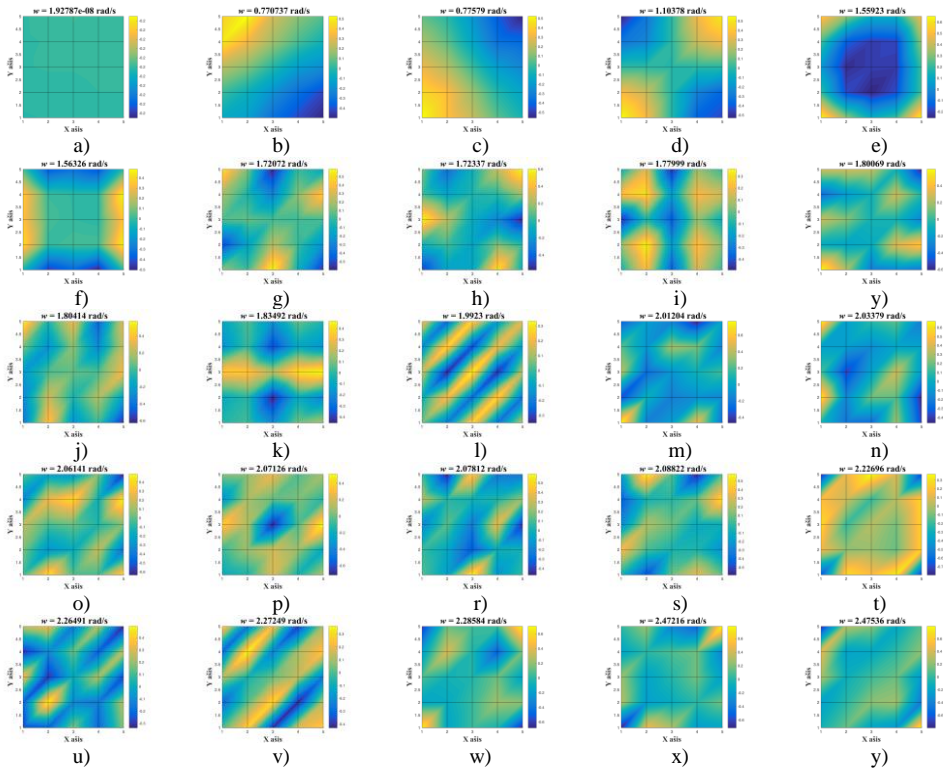
2.2.3. Sintezės rezultatas dvimatei akustinei bangai

Sudarant 2D sintezuotąjį baigtinį elementą, kaip pradinis elementas naudojama 5×5 mazgų konstrukcija, surinkta iš tradicinių elementų. Atliekant elemento sintezę, minimizuojama tikrinių dažnių paklaida modelio, surinkto iš 25 sintezuotųjų elementų; artimi tiksliesiems dažniai gaunami išsprendus tikrinių reikšmių uždavinį BE modeliui su 5 kartus tankesniu tinkleliu. Sintezės rezultatai, kai minimizuota 25 % pirmųjų tikrinių dažnių, pateikti 14 pav.



14 pav. Konstrukcijos, surinktos iš 2D sintezuotųjų ir tradicinių elementų, tikrinių dažnių paklaidų kreivė

Iš 14 pav. matoma, jog tikslo funkcijos reikšmė $\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left(\frac{\hat{\omega}_i - \omega_{i0}}{\omega_{i0}} \right)^2 \approx 1,26 \cdot 10^{-5}$ yra artima sintezės rezultatams, kai sintezuojamas vienmatis elementas (žr. 2.1.3 sk.). Sintezuoto elemento modos pateiktos 15 pav.



15 pav. Sintezuotojo 5×5 mazgų elemento modos

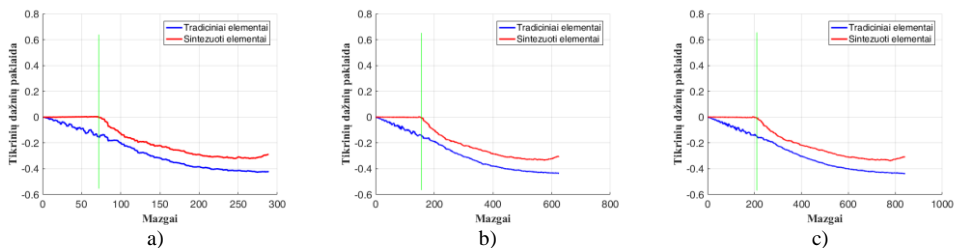
Kadangi dėl skaičiavimo apimčių aukštesniosios eilės 2D elementų suformuoti nėra galimybės, 2D modelio atveju toliau nagrinėjamas 5×5 mazgų sintezuotasis elementas. Kaip ir 1D modelio atveju, sintezės metu suformuotas elementas

nepriklauso nuo mechaninių konstantų, t. y. jis gali būti naudojamas kaip šablonas aukštesniosios eilės elementui sudaryti:

$$[\mathbf{K}_{2D}^{SE}] = E \times [\mathbf{K}_{2D}^{SE0}]. \quad (39)$$

Tokio modelio masių matrica yra įstrižaininė ir išlieka tokia pati, kaip elemento konstrukciją atitinkančios struktūros, surinktos iš tradicinių elementų.

Svarbu, jog, kaip ir 1D modelio atveju, modelio, surinkto iš SE, tikrinių dažnių diapazonas, procentiškai artimas tiksliams, išlieka toks pat, nepriklausomai nuo modelio elementų skaičiaus (16 pav.), taigi iš SE gali būti sudarytos įvairių geometrinių formų ir dydžių struktūros.



16 pav. 2D modelio tikrinių dažnių paklaidų palyginimas, kai modelis surinktas iš skirtingo skaičiaus elementų: a) $N = 289$; b) $N = 625$; c) $N = 841$

2.3. Mažiausios fazinės paklaidos elementų matricų sintezė dvimatėms tampriosioms struktūroms

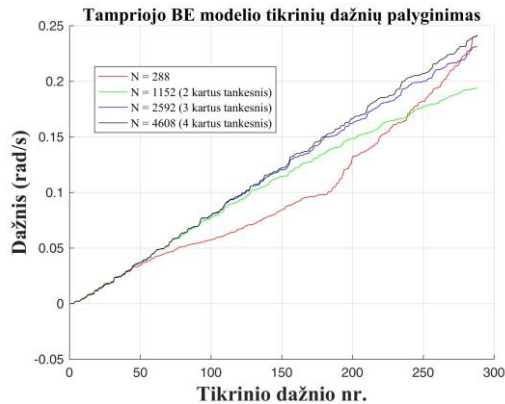
Tampriųjų baigtinių elementų sintezės procesas, kurio metu elemento modų korekcijos atliekamos formuojant geresnes konvergavimo savybes turinčius BE, algoritmo požiūriu beveik nesiskiria nuo dvimačių akustinių elementų sintezės proceso (12 pav.). Nuo sintezuojamo elemento laisvės laipsnių skaičiaus ir srities, kurioje yra minimizuojami tikriniai dažniai, priklauso ir sintezuotojo elemento savybės, t. y. kuo daugiau laisvės laipsnių sudaro sintezuojamą elementą, tuo platesnis tikrinių dažnių diapazonas gali būti minimizuotas, ir atitinkamai kuo didesnė yra pavyzdinė sritis, naudojama tikriniams dažniams minimizuoti, tuo tikslo funkcijos reikšmė (tikrinių dažnių paklaidos) lengviau minimizuojama. Tačiau skaičiavimo išteklių poreikis dvimačio tampriojo BE sintezei atlikti yra kur kas didesnis, palyginti su dvimačiais akustiniais elementais, t. y. viename mazge vietoje vieno laisvės laipsnio atsiranda du, o tai tiek pat mazgų turinčio elemento matricų dimensijas praplečia 2 kartus.

Atsižvelgiant į skaičiavimo išteklių poreikį ir prieinamą techninę įrangą, sintezuojamo tampriojo baigtinio elemento mazgų skaičius ir minimizuojamų dažnių diapazonas parinktas santykinai mažas, t. y. 4×4 mazgų elementas minimizuojant pirmųjų 6,2 % tikrinių dažnių diapazono paklaidas srities, surinktos iš 8×8 sintezuotųjų elementų. Artimi tiksliai tikriniai dažniai randami išsprendus tikrinių reikšmių uždavinį (16) pavyzdinės srities BE modeliui, surinktam iš tradicinių elementų su 8 kartus tankesniu tinkleliu. Šiuo atveju sintezuojamo elemento laisvės

laipsnių skaičius – 32, pavyzdinės srities – 1250, tankaus modelio, naudojamo tikriniais dažniams, artimiems tiksliams, rasti, – 74 498.

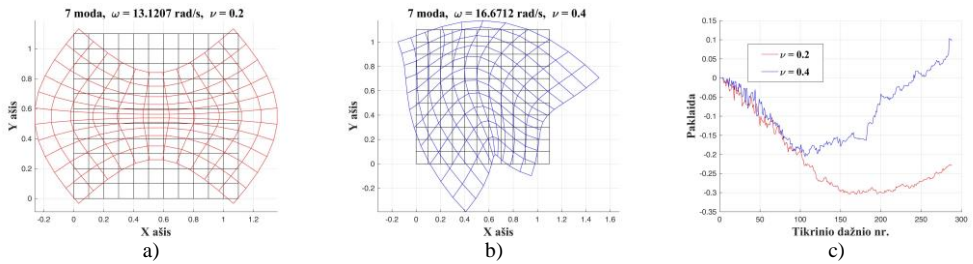
2.3.1. Puasono koeficiento įtaka dvimačių tampriųjų baigtinių elementų tikrinių dažnių paklaidoms

Kaip ir 1D ar 2D akustinių BE, tampriųjų BE artimi tiksliams tikriniai dažniai gali būti gaunami išsprendus tikrinių reikšmių uždavinį tokios pačios dimensijos modeliui su kur kas tankesniu tinkleliu (17 pav.).



17 pav. 2D tampriojo BE modelio tikriniai dažniai esant skirtingam modelio tinklelio tankumui

Kadangi šiame pavyzdyje modeliams sudaryti naudotos sutelktosios masių matricos, reto tinklelio modelio dažnių kreivė yra žemiau tankaus tinklelio modelio dažnių kreivės (priešingai nei 3 pav., a), t. y. impulsas aukštesniosiose harmonikose skinda lėčiau, nei turėtų, taip sukeldamas skaitinius triukšmus, kurie seka paskui simuliuojamą impulsą ir kaupiasi. Tačiau nors 1D ar 2D akustinių elementų normalizuotos modos nepriklausė nuo fizikinių konstantų, sudarant tampriuosius BE modelius nuo įtempių matricoje naudojamos Puasono koeficiento reikšmės priklauso tiek modelio tikrinių modų forma, tiek dažnis. Toliau palyginta BE modelio 7-oji moda, kai Puasono koeficientas $\nu = 0,2$ ir $\nu = 0,4$, esant toms pačioms Jungo modulio ir tankio ($E = 1, \rho = 1$) reikšmėms (18 pav., a, b). Taip pat palyginta, kaip nuo Puasono koeficiento priklauso modelio tikrinių dažnių paklaidos (18 pav., c).

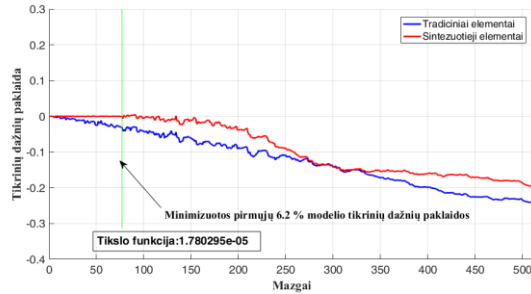


18 pav. Tampriojo BE modelio 7 modos (*a*, *b*) ir tikrinių dažnių paklaidų (*c*) palyginimas esant skirtingam Puasono koeficientui

Sudaryti 1D ar 2D akustiniai sintezuotieji BE yra universalūs ir gali būti naudojami kaip šablonai konkrečių fizikinių savybių baigtiniams elementams sudaryti. Taip yra todėl, kad normuotos modos nepriklauso nuo fizikinių konstantų, t. y. tankio ir Jungo modulio. Tačiau, kaip matoma 18 pav., tai negalioja aukštesniosios dimensijos tampriesiems elementams, ir jiems sintezė turi būti atliekama parinkus konkrečią μ reikšmę, kuri bendruoju atveju nusako medžiagos savybes. Sudarant sintezuotąjį tampriosios bangos elementą Puasono koeficiento reikšmė parinkta $\mu = 0,3435$, kuri atitinka aliuminio medžiagos Puasono koeficiento reikšmę.

2.3.2. Sintezės rezultatas dvimatei tampriajai bangai

Sintezės procesas dvimačiam tampriajam baigtiniam elementui sudaryti yra toks pat, kaip ir akustiniam elementui, kurio vizualizacija pateikta 12 pav. Pradinis elementas sudaromas surenkant 4×4 mazgų pradinio priartėjimo elementą; sintezės metu minimizuojamos pavyzdinės sritys, surinktos iš sintezuotųjų elementų, tikrinių dažnių paklaidos. Vienintelis skirtumas, kad tampriojo elemento atveju atsiranda trys kietojo kūno modos, kurios sintezės metu yra nekeičiamos. Taip pat siekiant sumažinti skaičiavimo apimtį visoms simetrinėms modoms korekcijos koeficientai buvo skaičiuojami tik vienai modai, kita simetrinė moda buvo pasukama 90° kampu. Taip vietoje 32 modų sintezės metu korekcijos koeficientai buvo skaičiuojami 22 modoms, t. y. 7 modų poros yra simetrinės (4 ir 5, 10 ir 11, 13 ir 14, 19 ir 20, 21 ir 22, 26 ir 27, 30 ir 31). Sintezės rezultatai, kai minimizuota pirmųjų $6,2\%$ modelio tikrinių dažnių paklaidų, pateikti 19 pav.



19 pav. Konstrukcijos, surinktos iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų, pirmųjų 512 modelio tikrinių dažnių paklaidų kreivė

Atliekant tikrinių dažnių ir formų korekcijas, tikslo funkcijos reikšmė minimizuota iki $\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left(\frac{\hat{\omega}_i - \omega_{i0}}{\omega_{i0}} \right)^2 \approx 1,8 \cdot 10^{-5}$. Kaip ir akustinės bangos, elemento standumo matricą galima naudoti kaip šabloną, Jungo modulį iškeliant prieš sintezuotąjį elementą. Tačiau kadangi sintezuotasis elementas priklauso nuo Puasono koeficiento, o skirtingų medžiagų Puasono koeficientas skiriasi, skirtingų medžiagų sintezuotieji elementai turi būti sudaromi atskirai.

2.4. Antrojo skyriaus išvados

1. Atliekant aukštesniosios eilės elemento konstrukcijų modų korekcijas, galima sudaryti baigtinius elementus su įstrižainine masių matrica ir platesniu artimų tiksliais tikrinių dažnių diapazonu.
2. Vienmačiam modeliui sudaryti 10 mazgų sintezuotieji elementai. Iš jų surinkto modelio pirmųjų 60 % tikrinių dažnių paklaidos išlieka mažos. Tačiau pereinant į aukštesnias dimensijas sintezės procesas tampa labai brangus skaičiavimo išteklių prasme, todėl sudaryti tokių pačių elementų, kaip vienmačio modelio atveju, nėra galimybės.
3. Pademonstruota, kad pasinaudojant simetrinių modų savybėmis galima sumažinti modų korekcijos koeficientų skaičių, taip sumažinant skaičiavimo išteklius, kurių reikia sintezei atlikti. Sudarytas 5×5 mazgų kvadratinis 2D akustinis sintezuotasis elementas ir 4×4 mazgų tamprusis elementas. Modelių, surinktų iš tokių elementų, pirmųjų 25 % (akustiniuose modeliuose) ir 6,2 % (tampruosiuose modeliuose) tikrinių dažnių paklaidos išlieka mažos.
4. Nustatyta, kad modeliai, surinkti iš vienmačių ir dvimačių sintezuotųjų elementų, turi savybę išlaikyti tam tikrą procentą artimų tiksliais tikrinių dažnių, nepriklausomai nuo modelyje naudojamų elementų skaičiaus, o tai lemia, kad sintezuotasis elementas gali būti naudojamas kaip universalus elementas sudarant baigtinių elementų modelius.
5. Vienmačiai ir dvimačiai akustiniai sintezuotieji elementai nepriklauso ir nuo fizikinių konstantų, taigi jie gali būti panaudojami sudarant BE skirtingas mechanines savybes turinčioms medžiagoms. Tačiau dvimačių tamprųjų elementų atveju nuo Puasono koeficiento priklauso ir elemento

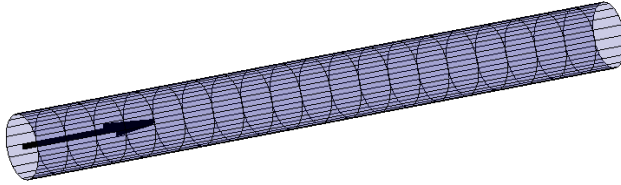
tikrinių formų geometrinės savybės bei tikriniai dažniai, todėl sintezės metu gauti elemento korekcijų koeficientai gali būti panaudoti medžiagoms, kurių Puasono koeficientas toks pat, kaip ir sintezės metu sudaromo elemento. Tai yra medžiagoms, kurių Puasono koeficientas yra skirtingas, turi būti sudaromi skirtingi elementai.

3. MODELIŲ, SURINKTŲ IŠ SINTEZUOTŲJŲ ELEMENTŲ, KONVERGAVIMO TYRIMAS

3.1. Modelių konvergavimo nehomogeninėse ir šakotose vienmatėse struktūrose tyrimas

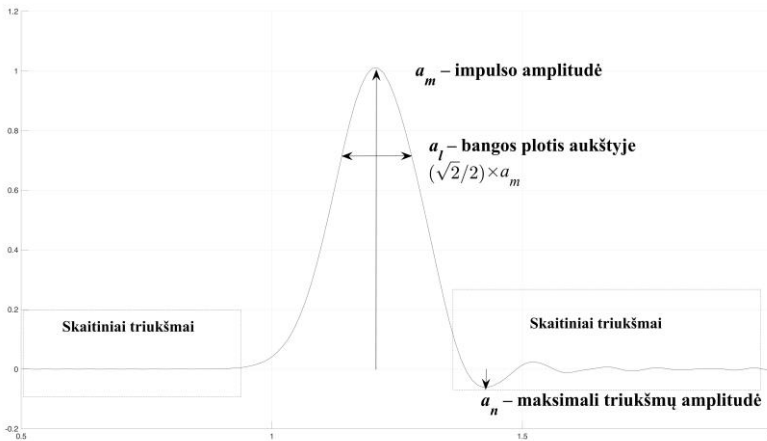
3.1.1. Bangos sklidimo analizė

Tariama, kad modeliavimas atliekamas tiesiame bangolaidyje. Kairėje pusėje sužadintas (21) impulsas sklinda bangolaidžiu (20 pav.).



20 pav. Bangolaidžio geometrinė forma

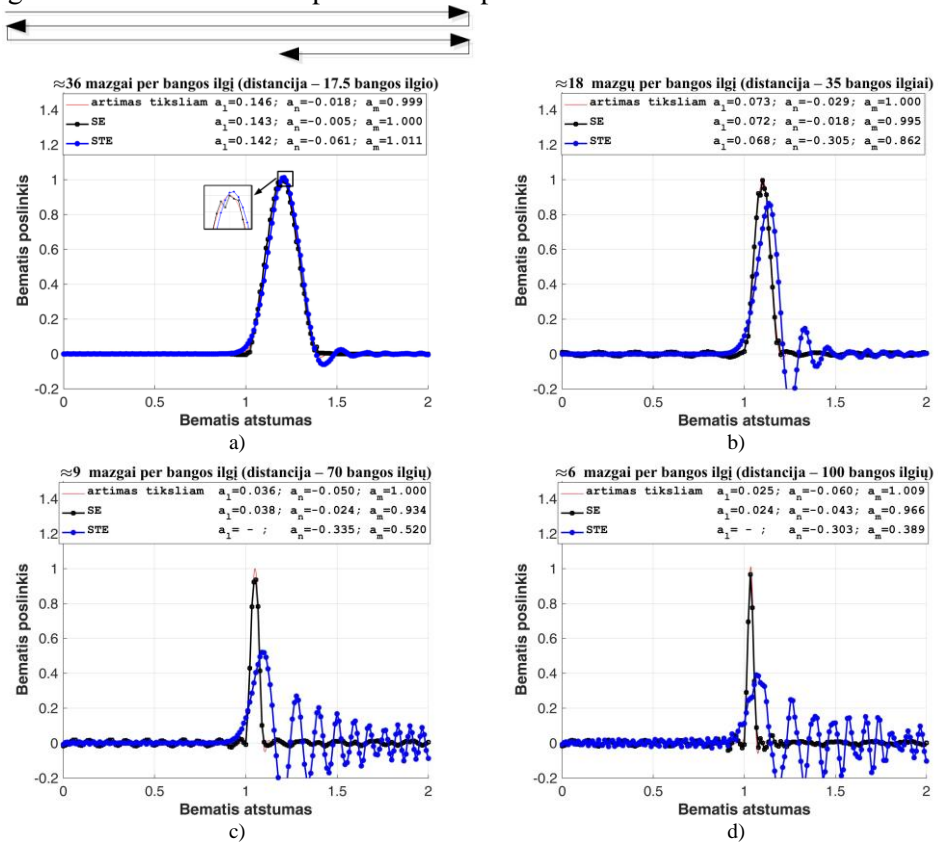
Teoriškai impulsas turėtų sklirti modelyje garso greičiu nepakeisdamas formos. Kad būtų įvertintas dėl skaitinės dispersijos modeliavimo metu atsirandantis impulso iškraipymas, naudojami šie įverčiai: bangos amplitudė a_m aukščiausiam taške, maksimalioji skaitinių triukšmų amplitudė a_n ir bangos plotis a_l aukštyje $\frac{\sqrt{2}}{2} a_m$. Esant nulinei skaitinei dispersijai impulso $a_n = 0$, $a_m = 1$. 21 pav. pateikta grafinė įverčių a_n , a_l ir a_m interpretacija.



21 pav. Grafinė a_n , a_l ir a_m įverčių interpretacija

Bangos modeliavimo analizei atlikti sudaromas tiesaus vienmačio bangolaidžio modelis iš 20 sintezuotųjų elementų, kurių kiekvieno ilgis $l_e = 0,1$. Atliekant analizę naudojamos realios fizikinės prasmės neturinčios mechaninės konstantos $A = 1$, $E = 1$, $\rho = 1$. Tradicinių BE matricos apskaičiuojamos pagal (6.1) ir (22) lygtis, o

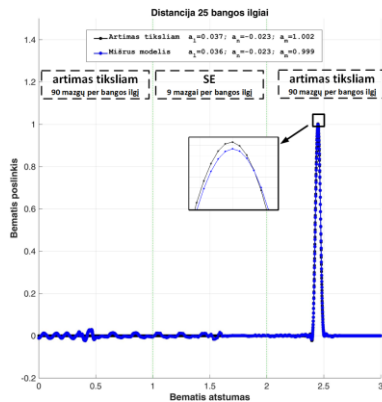
sintezuotųjų elementų masių matrica surenkama iš tradicinių elementų masių matricos, kuri apskaičiuojama pagal (6.1), o standumo matrica – pagal (33) lygtį, kur vietoje $[K_{1D}^{SE0}]$ imama 2.1 skyriuje sudaryto 10 mazgų elemento standumo matrica su minimizuotais 60 % pirmųjų tikrinių dažnių (SE60). Bematis bangos greitis modelyje $C = 1$. Modeliavimas atliekamas laiko periodą $T = 7$ s, ir impulsas nusklinda distanciją $S = 7$. Gauti rezultatai lyginami su rezultatais, gautais tankaus tinklelio (~90 mazgų per bangos ilgį) modelyje, sudarytame iš tradicinių elementų, atliekant analogišką modeliavimą. Toliau rezultatai, gauti atliekant modeliavimą tokiame modelyje, vadinami artimais tiksliais. Modeliavimo rezultatai esant skirtingam signalo žadinimo laikui ΔT pateikiami 22 pav.



22 pav. Modeliavimo rezultatų palyginimas praėjus 7 s: a) $\Delta T = 0,4$, 36 mazgai per bangos ilgį, pulsas nusklidęs per 17,5 bangos ilgiu; b) $\Delta T = 0,2$, 18 mazgų per bangos ilgį, pulsas nusklidęs per 35 bangos ilgius; c) $\Delta T = 0,1$, 9 mazgai per bangos ilgį, pulsas nusklidęs per 70 bangos ilgių; d) $\Delta T = 0,07$, 6 mazgai per bangos ilgį, pulsas nusklidęs per 100 bangos ilgių

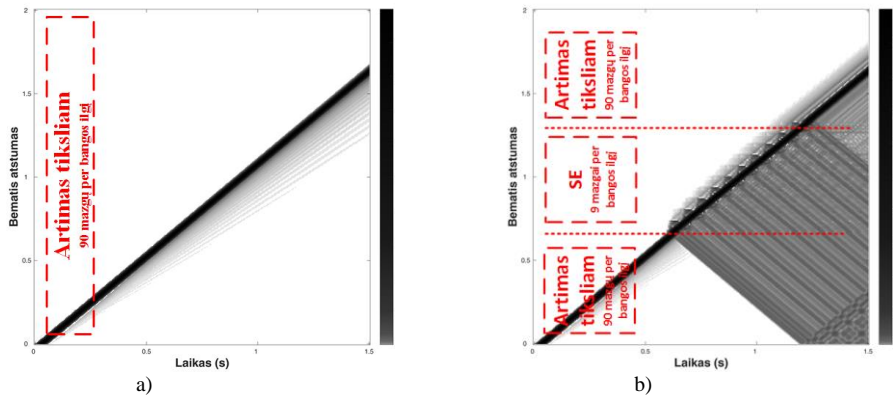
Iš pateiktų rezultatų aiškiai matoma, jog visais atvejais modelių, sudarytų iš sintezuotųjų elementų, paklaidos yra mažesnės nei modelių, sudarytų iš tradicinių elementų. Netgi esant 6 mazgams per bangos ilgį modelyje, sudarytame iš sintezuotųjų elementų, sklindantis impulsas išlaiko formą ir tiriami paklaidų įverčiai

yra mažesni nei 10 %, o modelio, sudaryto iš tradicinių elementų, impulsas dėl skaitinės dispersijos yra išsisklaidęs beveik per pusę bangolaidžio (22 pav., *d*). Tačiau reikia atkreipti dėmesį, kad esant tankiam tinkleliui mažas sklindančio impulso formos iškraipymas atsiranda modelyje iš sintezuotųjų elementų (22 pav., *a*). Jis pasireiškia dėl pirmųjų sintezuotojo elemento tikrinių formų korekcijų ir yra matomas vidiniuose elemento mazguose. Tačiau šios paklaidos išnyksta, kai modeliui surinkti naudojami sintezuotieji ir tradiciniai elementai (23 pav.). Tai paaiškinti galima taip: tiek tinkelis iš SE elementų, tiek daug tankesnis tinkelis iš tradicinių elementų užtikrina, kad visos impulso harmonikos sklįstų artimu tiksliam greičiu ir impulsas sklįstų tinkamai. Impulso formos iškraipymas SE tinkelyje atsiranda dėl tikrinių formų korekcijų, kurios atliekamos sintezės metu, tačiau jis yra pašalinamas, kai impulsas pereina į tradicinių elementų tinkelį.



23 pav. Bangos sklidimas modelyje iš SE ir STE

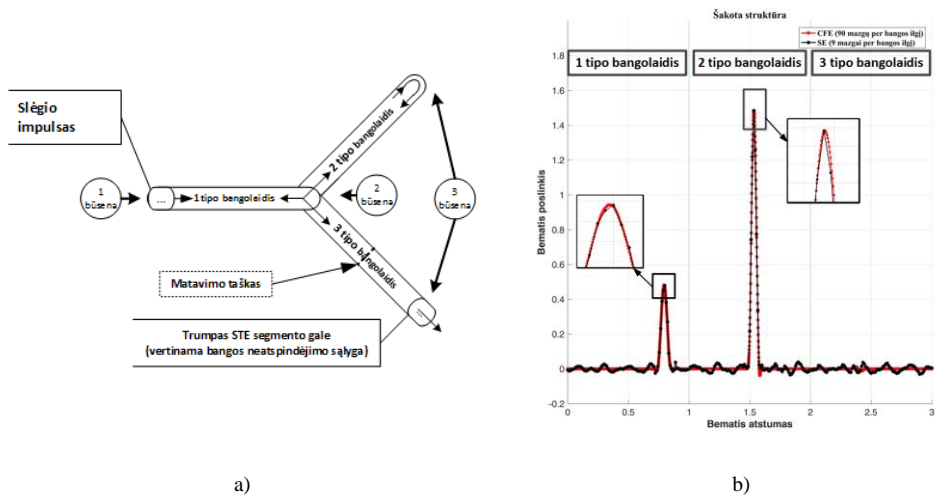
Impulso sklidimo B vaizdai (*B-scan*) pateikti 24 pav. Horizontalioji ašis atitinka modeliavimo laiką, vertikalioji – impulso nusklistą atstumą. Pilka spalva atvaizduojama poslinkių amplitudė. Kadangi skaitiniai triukšmai modeliuojant nesiekia 3 % pradinio impulso amplitudės, netiesinė spalvų skalė naudojama impulso amplitudei atvaizduoti. Iš 24 pav. matoma, kad impulsų generuojamos paklaidos skiriasi, t. y. tinkelyje iš STE triukšmai generuojami šalia impulso, o tinkelyje iš SE jie pasiskirsto per visą bangolaidį.



24 pav. Modeliavimo B vaizdai

3.1.2. Šakota nehomogeninė struktūra

Šiame skyriuje analizuojamas impulso sklidimas šakotoje nehomogeninėje struktūroje. Lyginami impulso modeliavimo rezultatai tankaus tinklelio modelyje iš tradicinių elementų ir reto tinklelio modelyje iš sintezuotųjų elementų. Pavyzdinis modelis sudaromas iš 3 tipų bangolaidžių, kurių skerspjūvio skersmuo yra $D_1 = 0,1$, $D_2 = 0,08$ ir $D_3 = 0,05$, tankis $\rho_1 = 0,8$, $\rho_2 = 1,2$, $\rho_3 = 1$, Jungo modulis $K_{1,2,3} = 1$ ir elemento ilgis $L_{1,2,3} = 1$. Modelio geometrinė forma pateikiama 25 pav. a dalyje.



25 pav. a) Šakotos nehomogeninės struktūros geometrinė forma; b) modeliavimo rezultatai šakotoje nehomogeninėje struktūroje

Modeliuoti pradama sužadinant impulsą (21) pirmo segmento kairėje pusėje, esant $\Delta T = 0,1$ s, $\Delta U = 1$ (25 pav., a, 1 būseną). Praėjus ~ 1 s bangos impulsas pasiekia atšakas ir iš dalies atsispindėjęs pereina į antrą ir trečią segmentus

(25 pav., *a*, 2 būsenai). Praėjus ~ 2 s impulsas atsispindi nuo antrojo segmento galo, o trečiojo segmento gale įvertinama gerai žinoma bangos neatspindėjimo sąlyga (Wolf ir Song, 1997), kur

$$\sqrt{\frac{K}{\rho}} \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta t} = 0. \quad (40)$$

Modeliavimo rezultatams (esant modeliams iš SE ir iš STE) palyginti buvo sudaryti du BE modeliai: modelis iš SE su ~ 9 mazgais per bangos ilgį ir modelis iš STE su 10 kartų tankesniu tinkleliu (~ 90 mazgų per bangos ilgį). Tikslus bangos greitis kiekviename segmente priklauso nuo mechaninių konstantų ir yra pateiktas 1 lentelėje. Standartinis bangos neatspindėjimo sąlygos įvertinimas negalimas tiesiogiai SE (Kriščiūnas ir Barauskas, 2013), tačiau tai galima atlikti pridendant trumpą STE prieš įvertinant bangos neatspindėjimo sąlygą. 25 pav. *b* dalyje pateikti modeliavimo rezultatai praėjus 2,55 s (pasibaigus 3 būsenai, 25 pav., *a*). Galima apibendrinti, kad tik nereikšmingi skirtumai tarp modeliavimo rezultatų yra tada, kai modeliavimas atliekamas modelyje iš sintezuotųjų elementų ir modelyje iš tradicinių elementų su 10 kartų tankesniu tinkleliu. Abiejuose modeliuose skaitinė dispersija gali būti palyginama kaip $\sim 0,04$ amplitudės triukšmai. Tikslios įverčių a_m, a_n, a_l reikšmės pateikiamos 1 lentelėje.

1 lentelė. Įverčių a_m, a_n, a_l reikšmės skirtingose šakotos struktūros atkarpose

<i>Bangolaidžio tipas</i>	Modelio elementų tipas	Mazgų per bangos ilgį	a_m	a_n	a_l
<i>1 tipas</i>	SE60	8,3	0,480	0,038	0,042
	STE	82,2	0,481	0,010	0,041
<i>2 tipas</i>	SE60	10,2	1,484	0,039	0,037
	STE	100,6	1,484	0,037	0,034
<i>3 tipas</i>	SE60	9	–	0,038	–
	STE	90	–	0,012	–

3.1.3. Modelių palyginimas pagal tinklelio retumą

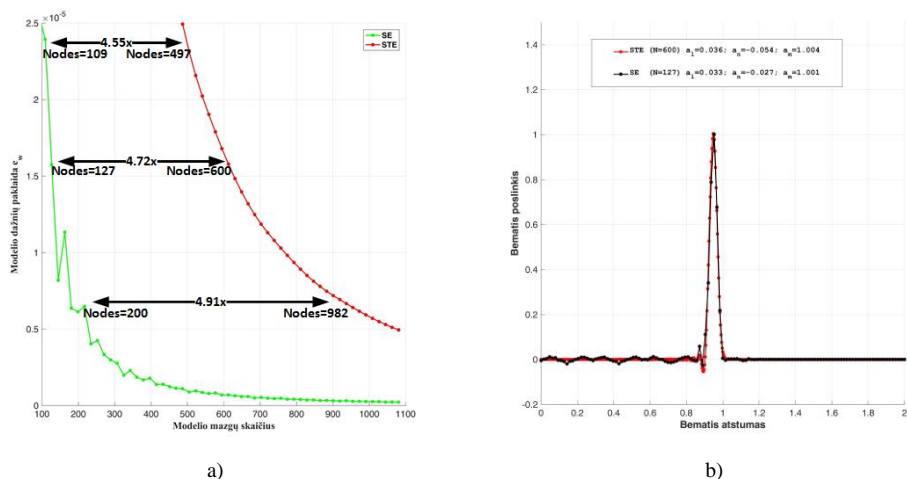
Kaip buvo parodyta 1.6.3 skyriuje, nuo simuliuojamo impulso priklauso ir BE modelio tinklelio diskretizavimo žingsnis, kurio reikia norimam modeliavimo tikslumui užtikrinti. Tai yra diskretieji modeliai visada generuoja fazines paklaidas,

taigi modelio diskretizavimo žingsnis turi būti parenkamas atsižvelgiant į modelio dimensijas, norimą simuliuoti impulsą ir modeliavimo laiką.

Šiame skyriuje iš STE ir SE sudaryti modeliai lyginami diskretizavimo žingsnio (tinklelio retumo) aspektu modeliuojant pasirinktą impulsą. Impulsui atvaizduoti reikiamus dažnius ir jų amplitudes apibrėžia Furjė spektras. (19) formulė nurodo BE modelio tikrinių dažnių paklaidų absoliutines vertes. Sujungus šiuos dydžius gaunamas įvertis:

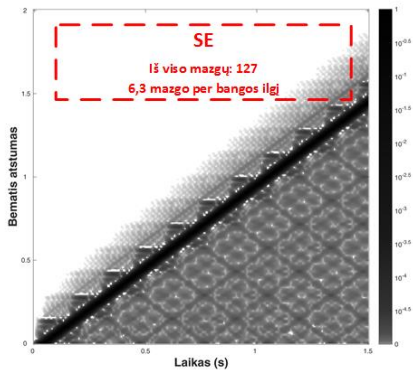
$$e_{\omega} = \sum_1^N f_i \left(\frac{\hat{\omega}_i - \hat{\omega}_{i0}}{\hat{\omega}_{i0}} \right)^2 ; \quad (41)$$

čia f_i – i -tosios Furjė spektro komponentės amplitudė. Kadangi esant vienmačiam tiesiam strypeliui BE modelio modos atitinka Furjė spektrą, galima priimti, kad kai įvertis e_{ω} lygus dviem skirtingiems modeliams, modelių fazinės paklaidos yra vienodos. 26 pav. pateiktas įvertis e_{ω} modelių, sudarytų iš SE ir STE naudojant skirtingą mazgų skaičių: $100 \leq N \leq 1100$.

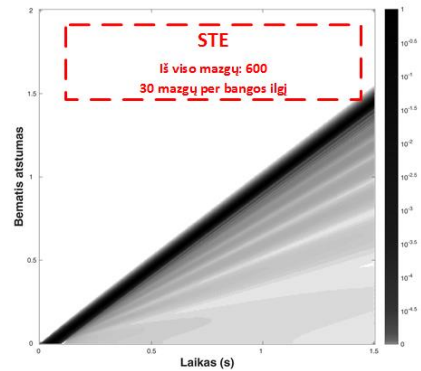


26 pav. a) Modelių, surinktų iš skirtingų elementų, įverčio e_{ω} palyginimas;
 b) modeliavimo rezultatai, kai modelio iš SE diskretizavimo žingsnis $\sim 4,5$ karto retesnis, palyginti su modeliu iš STE

26 pav. matoma, jog modeliuose iš SE įverčio e_{ω} reikšmė yra tokia pati esant daugiau nei $\sim 4,5$ karto retesniame tinkleliui, palyginti su modeliu iš STE. Impulso sklidimas palygintas 26 pav. b dalyje. Modelis iš SE yra surenkamas su $\sim 4,7$ karto retesniu tinkleliu: $N_{SE} = 127$, o $N_{STE} = 600$. Modeliavimo rezultatų įverčiai a_l , a_n ir a_m skiriasi mažiau nei 1 %. Modeliavimo rezultatų B vaizdai (B-scan) pateikiami 27 pav.



a)



b)

27 pav. Modelių, surinktų iš skirtingų elementų, modeliavimo rezultatų B vaizdai, kai modelio iš SE (a) diskretizavimo žingsnis $\sim 4,5$ karto retesnis, palyginti su modeliu iš STE (b)

3.1.4. Skaičiavimo išteklių poreikio palyginimas

Atliekant elemento sintezę, tenka išspręsti baudos funkcijos (28) minimizavimo uždavinį. Tai gana nemažai išteklių reikalaujantis procesas, tačiau gautos SE matricos gali būti naudojamos kaip universalios. Konkrečiam 1D bangolaidžiui reikia parinkti tik plotą ir medžiagos fizikines savybes išreiškiančius daugiklius prie SE matricų. Šiame skyriuje lyginamas skaičiavimo išteklių poreikis esant iš STE ir SE sudarytiems modeliams, kuris yra nusakomas atminties, reikalingos saugoti BE modelio matricoms ir vektoriams viename skaitinio integravimo žingsnyje, dydžiu ir skaičiumi veiksmų, kuriuos turi atlikti procesorius per vieną skaitinio integravimo žingsnį, kai integravimas vykdomas centrinių skirtumų metodu.

Lyginant reikia įvertinti, kad modelio iš SE tinklėlis gali būti retesnis, tačiau jo standumo matricos juosta bendruoju atveju yra platesnė ir lygi sintezuotojo elemento mazgų skaičiui (Farmaga *et al.*, 2011). Priklausomai nuo reikalaujamo tikslumo ir nuo simuliuojamo signalo dažnių spektro abiejų modelių mazgų skaičius gali būti skirtingas. Palyginimui naudojamas 3.1.3 skyriuje minėtas signalas, kai modelio, sudaryto iš 10 mazgų SE, tinklėlis galėjo būti 4,7 karto retesnis nei modelio iš STE. Tada tokio paties tikslumo modelio, nesvarbu, ar sudaryto iš sintezuotųjų, ar iš tradicinių elementų, mazgų skaičius N ir standumo matricos juostos pločio W priklausomybės yra tokios:

$$N_{STE} = 4,7 \times N_{SE}, \quad (42)$$

$$W_{STE} = \frac{W_{SE}}{5} = 2. \quad (43)$$

Naudojama atmintis

Modeliavimo metu reikia saugoti vektorius $\{\dot{\mathbf{U}}\}$, $\{\mathbf{U}\}$ ir matricas $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{K}]$ iš (2) lygties. Priimama, kad visiems skaičiams saugoti yra skiriamas vienodas bitų kiekis b , tada vektoriams $\{\dot{\mathbf{U}}\}$, $\{\mathbf{U}\}$ saugoti reikiamas atminties kiekis bus lygus $3 \times N \times b$, matricai $[\mathbf{M}]$ – atminties kiekis, lygus $N \times b$ (pakanka saugoti matricos įstrižainę), ir bangą modeliuojant vienmatėje konstrukcijoje matricai $[\mathbf{K}]$ saugoti reikiamas atminties kiekis bus lygus $\left(\frac{N \times W + 2 \times N - W}{2}\right) \times b$ (matrica $[\mathbf{K}]$ yra simetriška, saugomas viršutinis trikampis). Visa reikiama atmintis O_{mem} apskaičiuojama pagal formulę:

$$O_{mem} = \left(4N + \frac{N \times W + 2 \times N - W}{2}\right) \times b. \quad (44)$$

Skaičiuojant naudojamos atminties kiekį modeliuose iš STE ir SE, į (44) formulę vietoje N atitinkamai įrašoma (42) lygties dešinioji arba kairioji pusė ir atitinkamai vietoje W – reikšmės $W_{STE} = 2$ arba $W_{SE60} = 10$. Išsprendus (44) lygtį gaunama, kad $O_{mem_STE} \approx 2,83 \times O_{mem_SE60}$. Vadinasi, atmintis, kurios reikia skaitinio integravimo metu, modeliuose su SE60 yra ~65 % mažesnė nei modeliuose su tradiciniais elementais.

Veiksmų skaičius

Atliekant skaitinį integravimą centrinių skirtumų metodu, viename integravimo žingsnyje reikia išspręsti (45)–(47) lygtis:

$$\{\ddot{\mathbf{U}}\} = [\mathbf{M}]^{-1}((-1) \times [\mathbf{K}] \times \{\mathbf{U}\}), \quad (45)$$

$$\{\dot{\mathbf{U}}\} = \{\dot{\mathbf{U}}\} + dt \times \{\ddot{\mathbf{U}}\}, \quad (46)$$

$$\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{U}\} + dt \times \{\dot{\mathbf{U}}\}. \quad (47)$$

(15.1) masių matricos inversijai tiek modeliuose iš tradicinių elementų, tiek modeliuose iš SE reikiamų veiksmų skaičius bus lygus N , nes matrica yra įstrižaininė, be to, veiksmas gali būti iškeltas prieš skaitinio integravimo ciklą. Priimama, kad matricų daugyba atliekama tradicinių matricų daugybos algoritmu. Įvertinant, kad matrica $[\mathbf{K}]$ yra juostinė, (45) lygčiai išspręsti reikės $2 \times (N \times W - N - W)$ veiksmų. (46), (47) lygtyse esančių veiksmų skaičius yra vienodas ir lygus $2 \times N$. Bendras reikiamų veiksmų skaičius O_{st} yra apskaičiuojamas pagal (48) lygtį:

$$O_{st} = 5N \times W - 3W. \quad (48)$$

Analogiškai į (48) lygtį įrašius N ir W reikšmes, gaunama, kad $O_{st_standart} \approx 1,44 \times O_{st_SE60}$. Vadinasi, veiksmų, atliekamų viename skaitinio integravimo

žingsnyje, skaičius modeliuose su SE yra maždaug 30 % mažesnis nei STE modeliuose.

Praktiškai skaičiavimo išteklių poreikis priklauso ne tik nuo operacijų skaičiaus, bet ir nuo kompiuterio architektūros, operacinės sistemos ir pan. Siekiant iširti skaičiavimo išteklių panaudojimą praktiškai, atliekamas skaitinis eksperimentas. Ultragarstinės išilginės bangos modeliuojamos vienmačiame aliuminio strypelyje ir palyginama skaičiavimų trukmė esant modeliui iš SE ir modeliui iš STE su 4,7 karto retesniu tinkleliu (30 mazgų per bangos ilgį modelyje iš STE ir 6,36 mazgo modelyje iš SE). Modeliuojama tol, kol impulsas nusklinda per visą bangolaidį, taigi modeliavimo laikas priklauso nuo bangolaidžio ilgio: kuo ilgesnis bangolaidis, tuo ilgiau atliekamas modeliavimas. Skaitinis eksperimentas atliekamas naudojant *Matlab R2015a* programinę įrangą (PI), retąsias simetrines standumo ir masių matricas kompiuteryje su *Core i7-4790 CPU @ 3.60 GHz* procesoriumi (32 GB operatyvioji atmintis) ir *64-bit Windows 7* operacine sistema. Dėl mažų skaitinių triukšmų *Matlab* ne visada standumo matricą atpažįsta kaip simetrinę, todėl jos simetrizacija atliekama prieš pradėdant modeliuoti (Andreassen ir Andreassen, 2014). Fizikinės BE modelio konstantos yra $E = 71,788 \text{ MPa}$, $\rho = 2780 \text{ kg/m}^3$, bangos greitis 5081 m/s , pulso žadinimo laikas $40 \mu\text{s}$ ir skaitinio integravimo žingsnis $0,4 \mu\text{s}$. Priklausomai nuo bangolaidžio ilgio kinta modeliavimo laikas, skaitinio integravimo žingsnių skaičius ir skaičiavimo laikas, kol banga nusklinda per visą bangolaidį. Palyginimo rezultatai pateikti 2 lentelėje.

2 lentelė. Modeliavimo laiko priklausomybė nuo bangolaidžio ilgio

Bangolaidžio ilgis (m)	Modeliavimo laikas (ms)	Skaitinio integravimo žingsniai	Modelis iš STE		Modelis iš SE60		Pagerėjimas (%)
			Mazgų sk.	Skaičiavimo laikas (s)	Mazgų sk.	Skaičiavimo laikas (s)	
10	1,97	4920	1476	0,158	316	0,083	47
20	3,94	9839	2952	0,551	622	0,305	45
50	9,84	24598	7380	3,366	1567	1,571	53
100	19,68	49197	14759	13,607	3124	6,907	49
200	39,58	98394	29518	56,966	6256	23,982	58

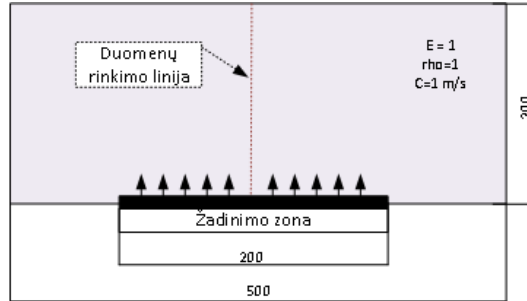
Rezultatai 2 lentelėje rodo, kad skaičiavimo laiko pagerėjimas atliekant modeliavimą yra didesnis nei atliekant aritmetinių operacijų palyginimą. Taip pat

modeliuose iš SE dėl retesnio tinklelio mažesnis skaitinio integravimo žingsnis užtikrina skaitinės integravimo schemos stabilumą.

3.2. Modelių konvergavimo dvimatėse nehomogeninėse struktūrose tyrimas

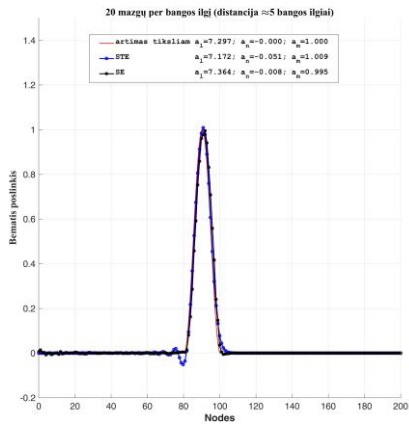
3.2.1. Impulso sklidimo analizė

Impulso sklidimo 2D modelyje analizei atlikti sudaromas stačiakampis BE modelis, kurio geometrinė forma pateikta 28 pav.

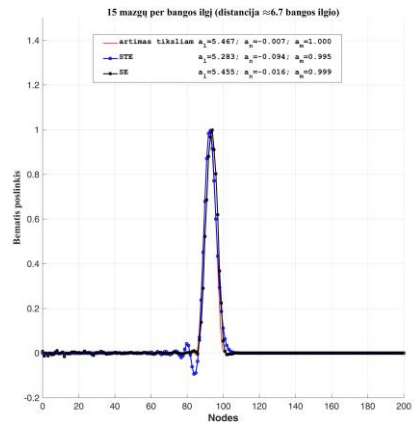


28 pav. 2D modelio geometrinė forma

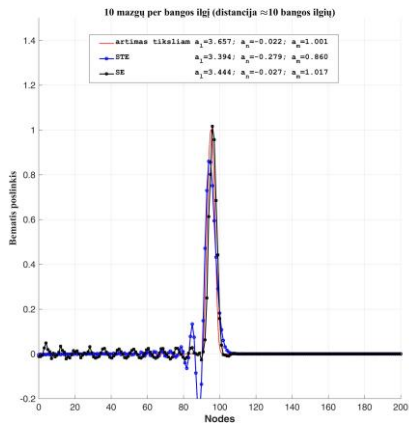
Modelio matmenys yra 500×200 m, analizei atlikti naudojamos realios fizikinės prasmės neturinčios mechaninės konstantos $E = 1$ ir $\rho = 1$. Bangos greitis $C = 1$ m/s. Impulso žadinimo zonoje žadinamas (21) impulsas ir modeliavimas atliekamas 100 s. Impulso sklidimo analizei atlikti sudaromi du vienodo retumo tinklelio BE modeliai iš tradicinių ir sintezuotųjų elementų, kur atstumas tarp gretimų mazgų $L = 1$, ir artimas tiksliam modelis su 5 kartus retesniu tinkleliu ($L = 0,2$). Tradicinių BE matricos apskaičiuojamos pagal (37) lygtis. Sintezuotųjų elementų masių matrica surenkama iš tradicinių elementų masių matricos. Standumo matrica gaunama pagal (39) lygtį, kurioje vietoje $[K_{2D}^{SE0}]$ naudojama 2.2 skyriuje sudaryto 5×5 mazgų elemento standumo matrica su minimizuotais 25 % pirmųjų tikrinių dažnių (SE25). Modeliavimo rezultatai duomenų rinkimo linijoje esant skirtingam žadinimo laikui modeliuose, surinktuose iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų, pateikti 29 pav.



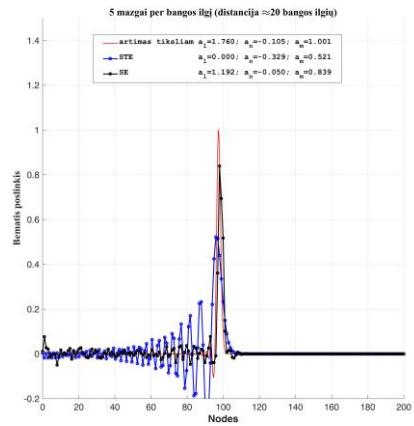
a)



b)



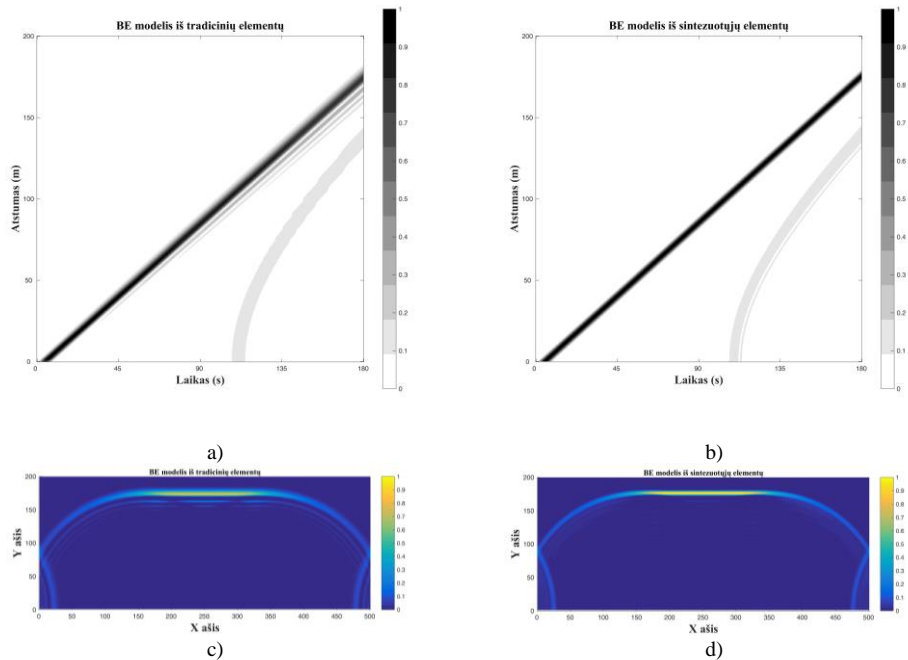
c)



d)

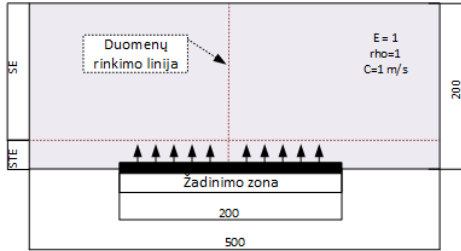
29 pav. Modeliavimo rezultatų palyginimas praėjus 100 s: a) $\Delta T = 20$, 20 mazgų per bangos ilgį, pulsas nusklidęs per 5 bangos ilgius; b) $\Delta T = 15$, 15 mazgų per bangos ilgį, pulsas nusklidęs per 6,7 bangos ilgio; c) $\Delta T = 10$, 10 mazgų per bangos ilgį, pulsas nusklidęs per 10 bangos ilgių; d) $\Delta T = 5$, ≈ 5 mazgai per bangos ilgį, pulsas nusklidęs per 20 bangos ilgių

Kaip ir 3.1 skyriuje, 29 pav. pateiktos įverčių a_n , a_l ir a_m reikšmės esant skirtingam mazgų skaičiui, tenkančiam per bangos ilgį. Iš rezultatų matoma, jog, nepriklausomai nuo elementų skaičiaus per bangos ilgį, skaitinė dispersija dvimačiame modelyje iš sintezuotųjų elementų mažesnė, palyginti su modeliu iš tradicinių elementų. Modelyje iš tradicinių elementų, esant 10 mazgų per bangos ilgį, impulso amplitudė yra artima tiksliai. Panašus rezultatas gaunamas modelyje, surinktame iš tradicinių elementų, esant ~ 20 mazgų per bangos ilgį. Toliau pateikti modeliavimo B vaizdai ir modelio įtempių laukai, kai modeliavimas atliktas 180 s impulsą žadinant 10 s (30 pav.).

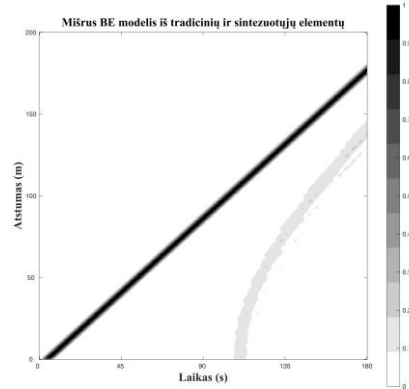


30 pav. Modeliavimo rezultatų palyginimas praėjus 180 s modeliuose, surinktuose iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų: a) ir b) modeliavimo B vaizdai; c) ir d) modelių įtempio laukai

Kaip matoma iš modeliavimo rezultatų, struktūra, surinkta iš sintezuotųjų elementų, gerai perneša energiją, tačiau, kaip ir 1D modelio atveju, dėl modifikuotų formos funkcijų vidiniuose mazguose gali ne visai tiksliai atvaizduoti impulso formą. Taip pat 2D modelio atveju parenkant kinematinę žadinimą zonoje, surinktoje iš SE, gali atsirasti nedidelių skaitinių triukšmų. Tačiau ši problema nesunkiai išsprendžiama BE surenkant iš tradicinių ir sintezuotųjų elementų kombinacijos ir signalo žadinimą atliekant zonoje, surinktoje iš tradicinių elementų. 31 pav. pateikta modelio, surinkto iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų, geometrinė forma ir modeliavimo rezultatų B vaizdas.



a)



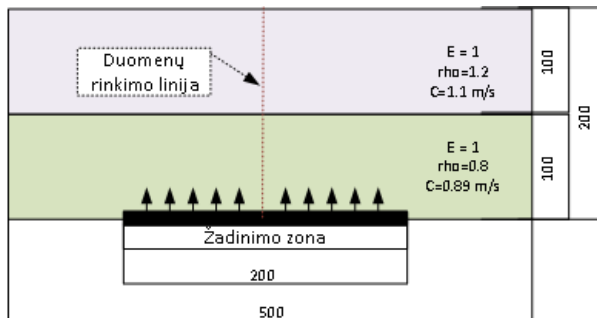
b)

31 pav. a) Modelio, surinkto iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų, geometrinė forma; b) modeliavimo rezultatų B vaizdas

Iš modeliavimo rezultatų matoma, kad, impulsui pereinant iš vieno tinklelio į kitą, skaitinių triukšmų beveik nėra ir BE modelis gali būti surinktas iš tradicinių ir sintezuotųjų elementų kombinacijos. Skirtingų elementų kombinacija yra svarbi, nes, esant sudėtingai geometrinei formai, ne visada galima BE modelį surinkti iš kvadratinėjų aukštesniosios eilės elementų. Taikant minėtąjį modelio surinkimo būdą galima panaudoti tiek tradicinius elementus norimos geometrinės formos modeliui sudaryti, tiek sintezuotuosius elementus švaresniam impulso sklidimui retesniame tinklelyje išgauti.

3.2.2. Nehomogeninė struktūra

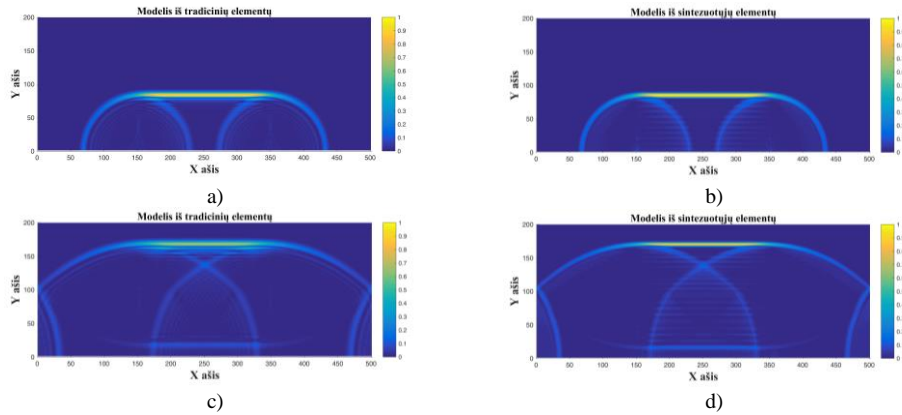
Nehomogeninės struktūros analizei atlikti sudaromi du tokio pat retumo BE modeliai iš tradicinių ir sintezuotųjų elementų (32 pav.).



32 pav. 2D nehomogeninės struktūros BE modelio geometrija

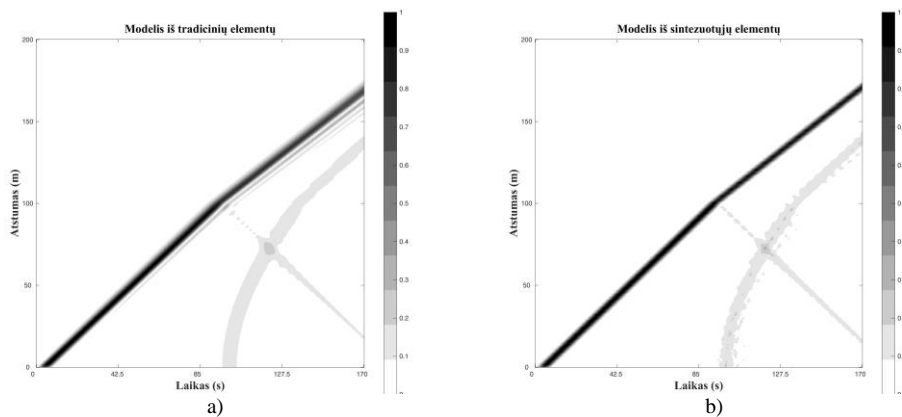
Impulsas žadinamas terpėje, kurios mechaninės konstantos $E = 1$ ir $\rho = 0,8$, bangos greitis $C = 1,118$ m/s. Impulsas, nusklidęs atstumą, lygų 100 m, iš dalies atsispindi ir pereina į terpę, kurios konstantos $E = 1$ ir $\rho = 1,2$, bangos greitis $C =$

0,912 m/s. Atstumas tarp BE modelių mazgų $L = 1$. Modelių įtempio laukai atlikus modeliavimą 80 s ir 170 s pateikti 33 pav.



33 pav. BE modelių iš tradicinių (a, c) ir sintezuotųjų (b, d) elementų įtempio laukai praėjus 80 s (a, b) ir 170 s (c, d)

Iš 33 pav. matoma, jog modelyje iš sintezuotųjų elementų skaitiniai triukšmai yra kur kas mažesni nei modelyje iš SE elementų, o nehomogeniškumas, kai impulsas iš dalies atsispindėdamas pereina iš vienos terpės į kitą, papildomų triukšmų nesukelia. Tai gerai matoma analizuojant modelio B vaizdą (*B-scan*), kur modeliavimo rezultatai duomenų rinkimo linijoje yra pateikiami poslinkių ir laiko erdveje (34 pav.).



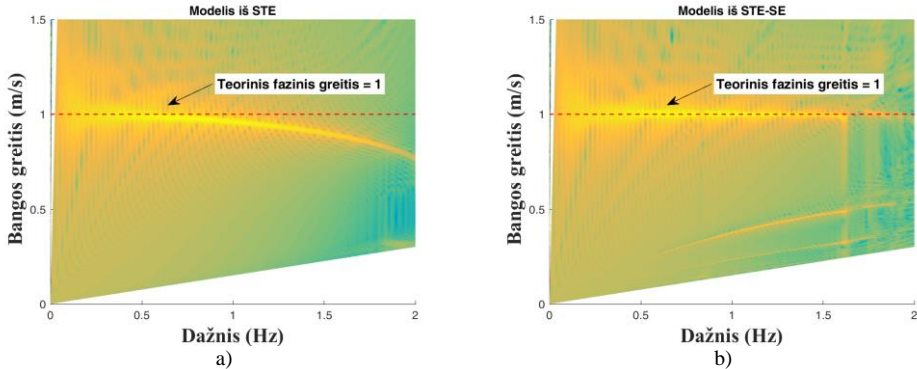
34 pav. Modeliavimo B vaizdai, kai 2D nehomogeninės struktūros BE modelis surinktas iš: a) tradicinių elementų; b) sintezuotųjų elementų

3.2.3. Baigtinių elementų modelių iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų palyginimas tinklelio retumo aspektu

Skaitinės dispersijos palyginimas naudojantis (19) lygtimi aukštesniosios dimensijos modeliams yra sunkiai pritaikomas, nes turi būti žinomi tikslūs modelio tikriniai dažniai, kurie bendruoju atveju apskaičiuojami išsprendus tikrinių reikšmių

uždavinių tokios pačios dimensijos modeliui su kur kas tankesniu tinkleliu. Esant didesnės dimensijos modelių matricoms, tai yra sunkiai įmanoma, todėl modelių dispersinėms kreivėms nustatyti yra taikomi metodai, paremti impulso modeliavimo analize (De Marchi *et al.*, 2009; De Marchi *et al.*, 2010; Hayward ir Hyslop, 2006).

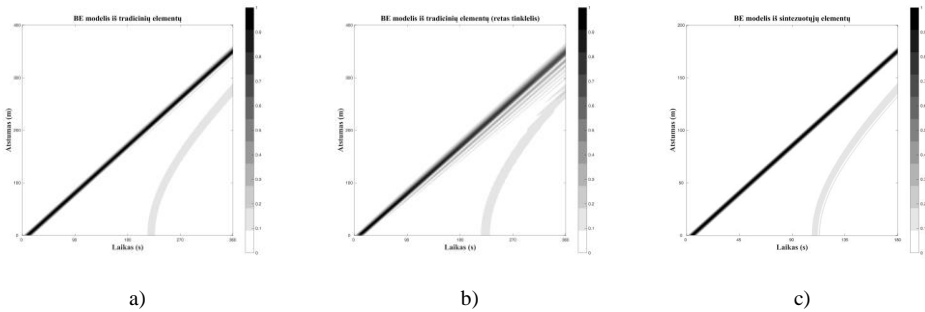
Šiame skyriuje skaitinei dispersijai 2D modelyje apskaičiuoti naudojami 3.2.1 skyriuje atlikto modeliavimo rezultatai (buvo lyginamas impulso sklidimas tokio pat retumo tinklelio modeliuose, surinktuose tik iš tradicinių elementų ir iš tradicinių bei sintezuotųjų elementų (30 pav.). Dispersinės kreivės gaunamos taikant 2D Furjė transformaciją, kai modeliavimo rezultatai perkeliama iš poslinkių ir laiko erdvės į fazinio greičio ir dažnių erdvę (35 pav.).



35 pav. 2D modelio dispersinės kreivės, apskaičiuotos iš modeliavimo rezultatų

Modelyje teorinis bangos sklidimo greitis, apskaičiuotas pagal (7) lygtį, yra lygus 1 m/s. Iš dispersinių kreivių matoma, jog modelyje iš tradicinių elementų impulso sklidimo greitis artimas tiksliam ir yra iki $\sim 0,65\text{Hz}$, o esant aukštesniesiems dažniams impulso greitis yra lėtesnis nei teorinis. Modelyje iš sintezuotųjų elementų impulso sklidimo greitis išlieka artimas tiksliam – iki $\sim 1,6\text{Hz}$, – vadinasi, naudojant tokio pat retumo tinklelį modelyje iš SE gali būti simuliuojamas $\sim 2,5$ karto platesnio dažnių diapazono impulsas, palyginti su modeliu iš STE, arba atitinkamai modelio iš SE tinklelis gali būti 2,5 karto retesnis, palyginti su modeliu iš STE.

36 pav. pateikti modeliavimo stačiakampėje konstrukcijoje, kurios geometrinė forma 2 kartus didesnė, nei pavaizduota 28 pav., t. y. 1000×400 , rezultatai. Modeliuojama žadinant (21) impulsą pasirinkus žadinimo laiką $dT = 10$ s. Rezultatams palyginti sudaromi du reto tinklelio BE modeliai iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų ir vienas modelis su 2,5 karto smulkesniu tinkleliu. 360 s trukmės modeliavimo rezultatų B vaizdai pateikti 34 pav.

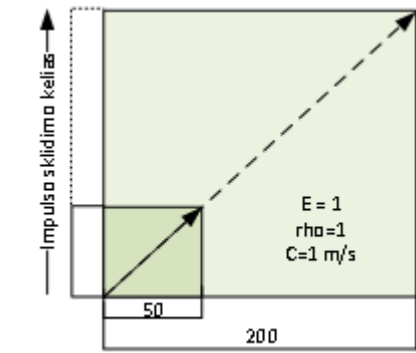


36 pav. 2D modelio dispersinės kreivės, apskaičiuotos iš modeliavimo rezultatų

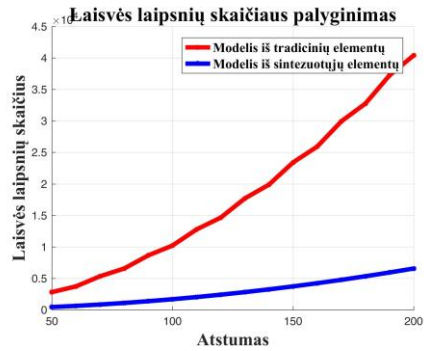
Iš 36 pav. matoma, kad rezultatai modelyje iš SE su 2,5 karto retesniu tinkleliu ir modelyje iš tradicinių elementų yra panašūs, o naudojant tokio pat retumo tinklelį iš tradicinių elementų skaitiniai triukšmai kur kas didesni.

3.2.4. Baigtinių elementų modelių iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų palyginimas skaičiavimo išteklių poreikio aspektu

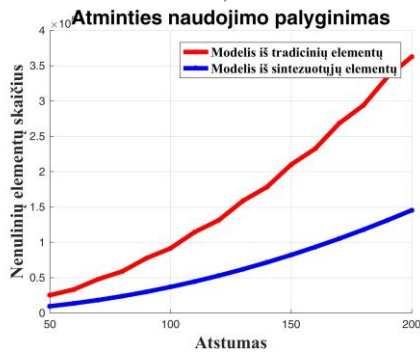
Skaičiavimo išteklių poreikio aspektu modeliai lyginami įvertinant skaičiavimo išteklių poreikio sumažėjimą dėl platesnio artimų tiksliams tikrinių dažnių spektro ir padidėjimą dėl platesnės juostos standumo matricos. Remiantis 2.3.3 skyriuje atliktu modelių tinklelių palyginimu, priimama, kad modelio iš SE tinklelis gali būti 2,5 karto retesnis nei modelio iš tradicinių elementų. Skaičiuojama sudarant kvadratinės konstrukcijos BE modelius iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų. Palaipsniui didinant kraštinės ilgį lyginamas modelių laisvės laipsnių skaičius, reikiama kompiuterio atmintis ir modeliavimo laikas, kol banga nusklinda nuo vienos kraštinės iki kitos (37 pav., a). Skaičiuojant kompiuterio atmintį, naudojamą BE modeliui saugoti, sumuojami vektorių $\{\mathbf{U}\}$, $\{\mathbf{U}\}$ ir $\{\mathbf{U}\}$ naudojama atmintis, masių matricos $[\mathbf{M}]$ įstrižainė ir standumo matricos $[\mathbf{K}]$ viršutinio trikampio įstrižainės (standumo matrica yra simetrinė) nenuliniai elementai. Modeliuojama priimant, kad bangos ilgis ir bangos sklidimo greitis konstrukcijoje lygus 1. Skaitinio integravimo žingsnis – 0,01. Eksperimentas atliekamas naudojant retąsias matricas su tokia pat technine ir programine įranga, kaip ir 1D konstrukcijoje (3.1.4 skyrius). Palyginimo rezultatai pateikiami 37 pav.



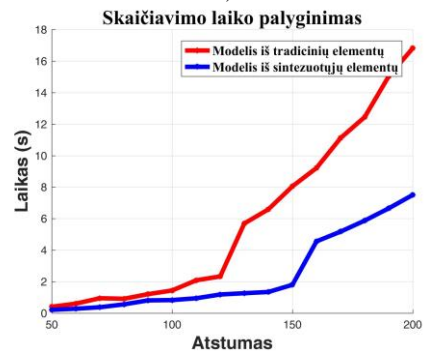
a)



b)



c)



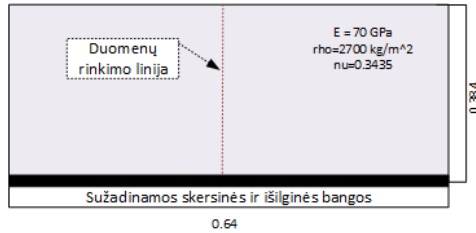
d)

37 pav. BE modelių, surinktų iš SE ir STE elementų, palyginimas skaičiavimo išteklių poreikio aspektu, kai modelyje iš SE gali būti naudojamas 2,5 karto retesnis tinklelis: a) grafinė palyginimo interpretacija; b) laisvės laipsnių skaičiaus palyginimas; c) kompiuterio atminties palyginimas; d) skaičiavimo išteklių poreikio palyginimas

Iš 37 pav. matoma, kad visais lyginamais aspektais modelis, surinktas iš SE, yra pranašesnis. Jame laisvės laipsnių skaičius yra ~6 kartus mažesnis, palyginti su modeliu iš STE. Dėl skaičiavimams naudojamų retųjų matricių reikia atmintis yra ~2,3 karto mažesnė. Skaičiavimo apimtys priklauso nuo naudojamos atminties kiekio, ir modelio dimensijai pasiekus 200×200 m skaičiavimo pagreitinėjimas yra artimas kompiuterio atminties sumažėjimui, t. y. ~2,3 karto.

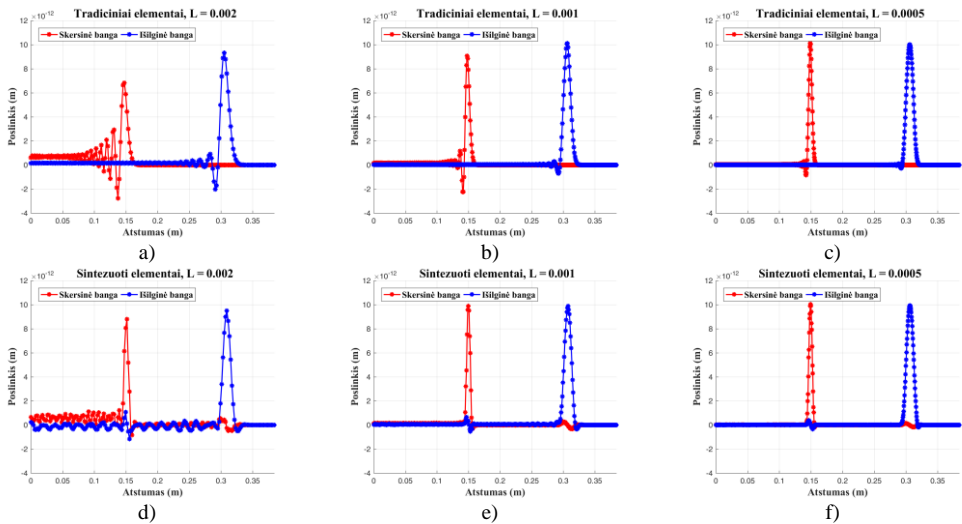
3.3. Modelių konvergavimo dvimačiuose tampriuosiuose modeliuose tyrimas

Sudaryti dvimačiai tamprieji sintezuotieji elementai verifikuojami ir palyginami BE modelyje, kurio geometrinė forma pateikta 38 pav.



38 pav. Tampriojo BE geometrinė forma

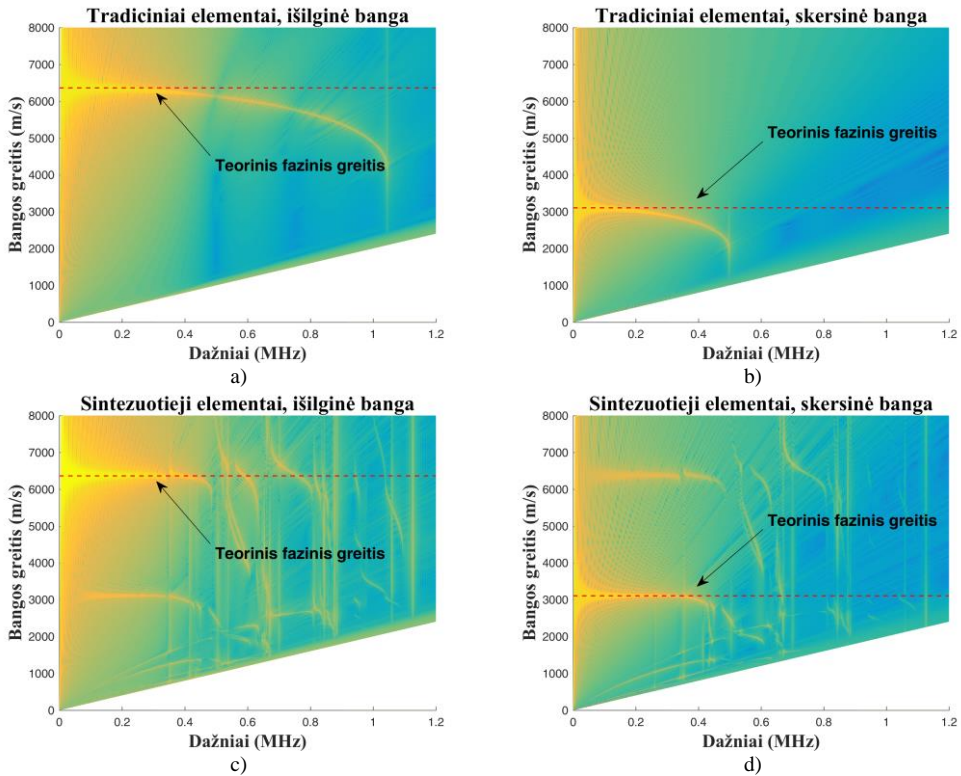
Verifikuoti modeliui parinkti aliuminio fizikiniai parametrai: $E = 70 \text{ GPa}$ ir $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$; atitinkamai skersinių ir išilginių bangų greičiai: $v_i = 6362 \text{ m/s}$ ir $v_s = 3106 \text{ m/s}$. Siekiant išvengti atspindžių ir palyginti modelių konvergavimą, impulsas (21) modeliuojamas $0,384 \times 0,64 \text{ m}$ plokštelėje; parinktas impulso žadinimo laikas $dT = 4 \mu\text{s}$, modeliavimo laikas $T = 50 \mu\text{s}$, žadinamo impulso amplitudė $dU = 1 \cdot 10^{-11}$. Atlikus modeliavimą, duomenų rinkimo linijos atspindžiai dar nėra pasiekę ir impulso forma turi būti tokia pati, kaip ir sužadinto impulso. Esant skirtingo tinklelio modeliams, konvergavimo tyrimas smulkinant tinklelį pateiktas 39 pav. BE modeliai surinkti iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų. BE ilgis 2, 1 ir 0,5 mm, BE modelių laisvės laipsnių skaičiai atitinkamai ~124, 492 ir 1971 tūkstantis.



39 pav. Impulso sklidimo konvergavimo tyrimas modeliuose, sudarytuose iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų, esant skirtingam modelio tinklelio retumui: a), b), c) modelis iš tradicinių elementų; d), e), f) modelis iš sintezuotųjų elementų

Iš 39 pav. matoma, jog modelyje, surinktame iš sintezuotųjų elementų, modeliavimo rezultatai yra kur kas geresni. Jame esant 1 mm elemento ilgiui impulso amplitudė beveik nepakinta, o modelyje iš tradicinių elementų paklaidos, sekančios paskui impulsą, skersinėje bangoje atsiranda net ir esant 2 kartus smulkesniam tinkleliui, t. y. kai elemento ilgis lygus 0,5 mm. Tačiau reikėtų atkreipti dėmesį, kad tiek skersinė, tiek išilginė sklindanti banga modelyje, surinktame iš sintezuotųjų

elementų, generuoja nedideles paklaidas, kurios pereina kitos rūšies bangai. Šios paklaidos galimai atsiranda dėl sintezės metu atliktų tikrinių formų korekcijų, tačiau jos yra santykinai nedidelės ir priklauso nuo priešingos bangos amplitudės, tai leidžia jas nesunkiai pašalinti atliekant signalo analizę.

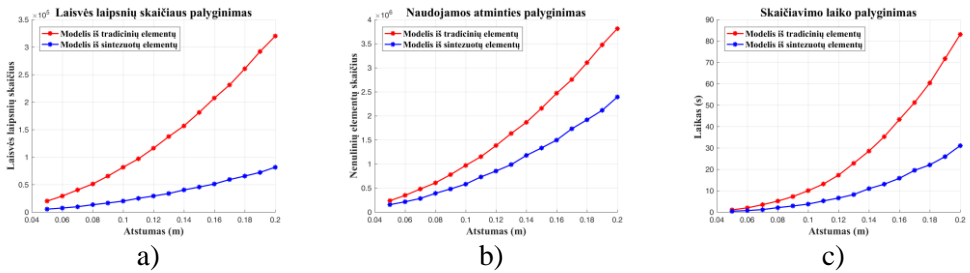


40 pav. Tiksinių dažnių paklaidų kreivių palyginimas, kai tamprusis BE modelis surinktas iš tradicinių ir (a, b) sintezuotųjų elementų (c, d)

Lyginant tiksinių dažnių paklaidų kreives (40 pav.) matoma, kad modeliuose iš standartinių elementų tiksinių dažnių paklaidos sklindant skirtingo tipo bangoms skiriasi, t. y. išilginė banga platesnį dažnių diapazoną sklinda artimu tiksliam faziniu greičiu, o skersinės bangos artimas tiksliams tiksinių dažnių diapazonas yra kur kas retesnis. Tai leidžia paaiškinti, kodėl 39 pav. a–c dalyse atliekant skersinės ir išilginės bangos modeliavimą modelyje iš tradicinių elementų generuojamos paklaidos skiriasi. Modeliuojant tampriąsias bangas, tinkamo smulkiškumo turi būti parenkamas toks, kad skaitinė dispersija būtų pašalinta tiek skersinėms, tiek išilginėms bangoms.

Analizuojant modelių iš sintezuotųjų elementų (40 pav., c, d) dispersines kreives matoma, kad abiejų bangų tipų dispersinės kreivės išlieka vienodos ir artimų tiksliams tiksinių dažnių diapazonas yra platesnis, palyginti su modeliu iš tradicinių elementų (40 pav., a, b), ir pagal skersinės bangos artimų tiksliams tiksinių dažnių diapazoną galima priimti, kad, surenkant tamprųjį BE modelį iš sintezuotųjų elementų, tinkamas gali būti parinktas ~2 kartus retesnis nei surenkant modelį iš tradicinių elementų (SE – ~0,4 MHz; STE – 0,2 MHz).

41 pav. tamprieji BE modeliai lyginami skaičiavimo išteklių poreikio aspektu atliekant tokį patį eksperimentą, kaip lyginant akustinius modelius (žr. 3.2.4 skyrių).



41 pav. Tampriųjų BE modelių palyginimas skaičiavimo išteklių poreikio aspektu, kai modelis iš SE surinktas naudojant 2 kartus retesnę tinklą: a) laisvės laipsnių skaičiaus palyginimas; b) naudojamos atminties palyginimas; c) skaičiavimo laiko palyginimas

Iš 41 pav. matoma, kad netgi sudarant santykinai mažą sintezuotąjį elementą (4×4 mazgų, o 1D atveju sudarytas 10 mazgų elementas) sintezuotųjų elementų panaudojimas leidžia tampriuosiuose BE realiai sumažinti bangai modeliuoti reikiamus išteklius: naudojama atmintis sumažinama iki $\sim 1,5$ karto, skaičiavimo laikas – iki 3 kartų.

3.4. Trečiojo skyriaus išvados

- Skaitiniais eksperimentais nustatyta, kad iš sintezuotųjų elementų gali būti sudarytos vienmatės šakotos ar dvimatės kompleksinės geometrinės formos nehomogeninės struktūros. Parodyta, kad 1D ir 2D atveju BE modelį galima surinkti iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų kombinacijos, o tai leidžia sudaryti šakotas nehomogenines vienmatis struktūras, kur įvertinama bangos neatspindėjimo sąlyga, ar kompleksinės geometrinės formos 2D nehomogeninius BE modelius.
- Lyginant BE modelius, surinktus iš 10 eilės 1D sintezuotųjų elementų, su modeliais iš tradicinių elementų tinklelio retumo ir skaičiavimo išteklių poreikio aspektais, nustatyta, jog modeliuose iš SE:
 - tinklelis gali būti iki 4,7 karto retesnis;
 - atliekant skaitinį integravimą naudojamos atminties kiekis yra ~ 65 % mažesnis;
 - aritmetinių operacijų atliekama ~ 30 % mažiau;
 - skaičiavimai atliekami ~ 2 kartus greičiau.
- Atliekant dvimačių elementų sintezę dėl didelių skaičiavimo išteklių, reikalingų sintezės metu, sudaryti tik 5×5 mazgų kvadratiniai akustiniai ir 4×4 mazgų tamprieji baigtiniai elementai atitinkamai su minimizuotomis pirmųjų 25 % ir 6,2 % tikrinių dažnių paklaidomis.
- Atliekant impulso modeliavimą 2D tampriuosiuose modeliuose, surinktuose iš sintezuotųjų elementų, dėl atliktų konstrukcijos modų korekcijų papildomai atsiranda nedidelės (~ 2 % modeliuojamo impulso amplitudės) paklaidos, tačiau jų vieta yra nuspėjama ir šios paklaidos gali būti pašalinamos atliekant signalo analizę.

5. Nustatyta, kad netgi su santykinai nedidelių dimensijų dvimačiais elementais modelio tinklelis gali būti 2–2,5 karto retesnis, palyginti su tradiciniais elementais, ir panaudojant tiek akustinius, tiek tampriuosius sintezuotuosius dvimačius elementus galima sumažinti BE modeliui saugoti reikiamą kompiuterio atmintį ir modeliuojant bangą atliekamo skaičiavimo apimtį.

4. PRAKTINIS TAIKYMAS

4.1. Skysčio pereinamųjų procesų modeliavimas šakotose konstrukcijose

Baigtinių elementų metodas skysčio pereinamiesiems procesams modeliuoti iš vamzdžių sudarytose heterogeninėse struktūrose buvo visada patrauklus dėl galimybės realizuoti modelį, visiškai atitinkantį realią sistemą. Tokių sistemų modeliavimo poreikis kyla iš labai skirtingų inžinerinių problemų. Pavyzdžiui, sistemų modeliavimas taikomas pavojingiems slėgio impulsams vamzdynuose prognozuoti (Fell ir O'Rourke, 2014; Sreejith *et al.*, 2004) ar pulso bangos sklidimui kraujotakos arteriniame medyje apskaičiuoti siekiant palengvinti įvairių ligų diagnozavimą (Smith, Dawes ir Galland, 2016; Taylor, Hughes ir Zarins, 1998). Pastaruoju metu sparčiai plėtojami sudėtingi trimačiai BE modeliai, leidžiantys įvertinti kietojo kūno ir skysčio tarpusavio sąveiką (Xiao, Humphrey ir Figueroa, 2013). Tačiau tokie modeliai yra specializuoti ir dėl skaičiavimo išteklių poreikio modeliavimui atlikti tinkamesni tik lokalioms problemoms spręsti, o bangoms modeliuoti plačiai naudojami vienmačiai modeliai (Reymond, Merenda, Perren, Rüfenacht ir Stergiopulos, 2009; Vardoulis, Papaioannou ir Stergiopulos, 2013). Sudėtingesniems lokaliems efektams sujungti per kraštines sąlygas taikomas vienmačio ir trimačio modelių sujungimas (Blanco, Feijóo ir Urquiza, 2007; Quarteroni, Veneziani ir Vergara, 2016).

4.1.1. Vamzdyno tėkmės matematinis modelis

Matematinė vienmačių baigtinių elementų forma labai priklauso nuo iš pagrindinių lygčių rinkinio pasirinkto transformacijos tipo. BE, skirti tampriosioms bangoms modeliuoti, aprašyti 1.4.1 skyriuje, kurie bendroju atveju atitinka tiesaus strypelio konstrukciją, negali būti tiesiogiai pritaikomi, jei norima atlikti slėgio bangos sklidimo modeliavimą vamzdyne, įvertinant jame tekančio skysčio tėkmę ir spūdumą. Šiame skyriuje vamzdyno tėkmė aprašyta *vienmatės spūdaus skysčio tėkmės modeliu*, kai nagrinėjamas vidutinis tėkmės greitis vamzdžio skerspjūvyje (Barauskas *et al.*, 2016). Nagrinėjamas ekvivalentinis skysčio tūrinis modulis, leidžiantis integraliai įvertinti ne tik skysčio spūdumą, bet ir jį talpinančio vamzdžio tamprumą radialiajam išsiplėtimui, kuris apskaičiuojamas:

$$\tilde{K} = K \left(1 + \frac{KD}{hE} \right)^{-1}; \quad (49)$$

čia K – skysčio tūrinis modulis; D – vamzdžio skersmuo; E – vamzdžio Jungo modulis; h – vamzdžio sienelės storis.

Nusistovėjusios tėkmės slėgiai ir greičiai apskaičiuojami iš diferencialinės lygties:

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{v^2}{\tilde{K}} \right) \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{f v |v|}{D} + g \sin a = 0; \quad (50)$$

čia D – vamzdžio sienelės ilgis, v – skysčio tėkmės greitis, a – vamzdžio kampas su horizontale, g – laisvojo kritimo pagreitis, $f = \frac{0,3614}{Re}$ – trintis, kur Reinoldso skaičius $Re = \frac{\rho D |v|}{\mu}$ (μ – skysčio dinaminės klampos koeficientas).

Pereinamieji slėgio virpesiai apskaičiuojami pagal lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{\delta^2 p}{\delta t^2} + \frac{f}{D} |v| \frac{\delta p}{\delta t} - \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \frac{\delta^2 p}{\delta x^2} = 0, & (51.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta v}{\delta t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\delta p}{\delta x} - \frac{f |v|}{D} - g \sin a. & (51.2) \end{cases}$$

(51) lygtys visiškai atitinka visus įprastus vamzdynų skaičiavimus, kur slėgio bangos sklidimo greitis daug kartų didesnis už vamzdyje tekančio vandens greitį. Nepaisant to, šios lygtys puikiai tinka realizuoti BE modeliui.

4.1.2. Baigtinių elementų modelio sudarymas

Esant nusistovėjusiai tėkmei, skysčio slėgis ir tėkmės greitis kiekviename vamzdyno taške yra pastovus ir nepriklausomas nuo laiko ir baigtinio elemento standumo matrica išreiškiama:

$$[\mathbf{K}_T^e] = \sqrt{\frac{D}{2fL|C|} \left(A^2 \rho - \frac{w_e^2}{\tilde{K}} \right)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Siekiant gauti tikslus nusistovėjusios tėkmės rezultatus, atliekamos Niutono ir Rafsono iteracijos, nežinomos debitų reikšmės BE modelyje yra atnaujinamos su kiekviena Niutono ir Rafsono iteracija $w_e^{(n)} = w_i^{(n-1)}$; čia n – iteracijos numeris.

Pereinamieji slėgio virpesiai elementui išreiškiami lygtimis:

$$\begin{cases} \{[\mathbf{M}^e]\{\dot{\mathbf{P}}^e\} + [\mathbf{C}^e(\dot{\mathbf{P}}^e, \mathbf{P}^e)]\{\dot{\mathbf{P}}^e\} + [\mathbf{K}^e(\mathbf{P}^e)]\{\mathbf{P}^e\} + \{\mathbf{Q}^e\}\} = 0, & (53.1) \\ \dot{v}_e = G & (53.2) \end{cases}$$

čia $\{\mathbf{P}^e\}$ – slėgių vektorius, $\{\mathbf{Q}^e\}$ – išorinių jėgų vektorius. Kitos (37) lygčių sistemos matricos ir G^e apskaičiuojami pagal lygtis:

$$[\mathbf{M}^e] = \frac{AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (54.1)$$

$$[\mathbf{C}^e] = \frac{ALf|v_e|}{2D} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (54.2)$$

$$[\mathbf{K}^e] = \frac{A\tilde{K}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (54.3)$$

$$\{\mathbf{Q}^e\} = A\tilde{K} \left(\frac{p^*}{L} - \frac{f v_e |v_e|}{2D} - g \sin a \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (54.4)$$

$$G^e = \frac{v_e \dot{p}_1 + \dot{p}_2}{\bar{K}} - \frac{p_2 - p_1}{\rho_0 L} - \frac{f}{D} \frac{v_e |v_e|}{2} - g \sin a^2. \quad (54.5)$$

Iš (53) lygčių sistemos pirmoji lygtis (53.1) yra įrašoma į konstrukcijos lygtį ir sprendžiama visai vamzdyno sistemai, o (53.2) lygtis yra sprendžiama kiekvienam elementui atskirai. Lygtyse reikėtų atkreipti dėmesį į tai, kad nėra jokių algebrinių sąryšių, kurie užtikrintų tėkmės debitų balanso sąlygą mazguose su gretimais elementais. Tačiau esant beveik nespūdiems skysčiams, kaip, pvz., šiluminių trasų vamzdynuose, iškraipymas yra itin mažas ir į jį galima neatsižvelgti.

Reikėtų atkreipti dėmesį ir į tai, kad nusistovėjusios tėkmės pradinės sąlygos, apskaičiuotos remiantis tik (53.2) lygtimi, taip pat turi tenkinti (53.1) lygtį. Tai gali sukelti skaitines paklaidas, kurios atitinka skaitinę dispersiją atliekant slėgio impulso modeliavimą. Lengviausias būdas išvengti šių triukšmų yra modeliavimas tam tikrame laiko intervale neatliekant papildomo slėgio žadinimo. Dėl slopimo narių po tam tikro laiko modelis nusistovi į pusiausvyros padėtį ir parinktos debitų bei slėgių sąlygos visiškai tenkina viena kitą. Tokia nusistovėjusi būseną yra priimama kaip pradinė sąlyga pereinamųjų virpesių modeliavimui atlikti.

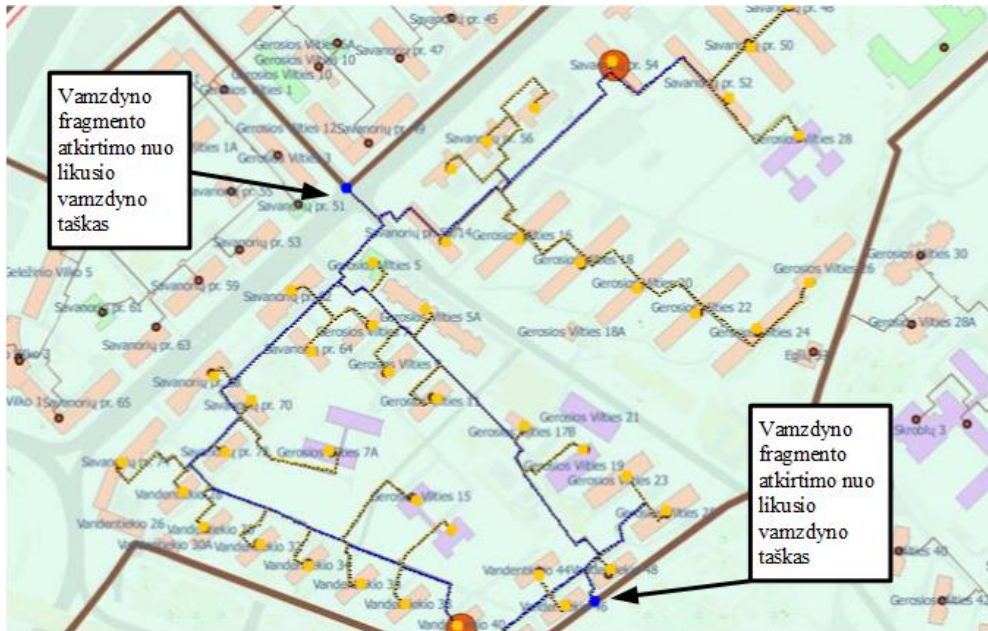
Vamzdyno atkirtimo taškuose bangos neatspindėjimo sąlygą galima įvertinti lygtimi:

$$\sqrt{\frac{\bar{K}}{\rho}} \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta p}{\delta t} = 0, \quad (55)$$

kuri atitinka 3.1.2 skyriuje nagrinėtą (40) lygtį (sudarant BE modelį iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų buvo tiriama bangos neatspindėjimo sąlygos realizacija šakotoje nehomogeninėje struktūroje).

4.1.3. Skysčio pereinamųjų procesų modeliavimas dideliuose vamzdynuose

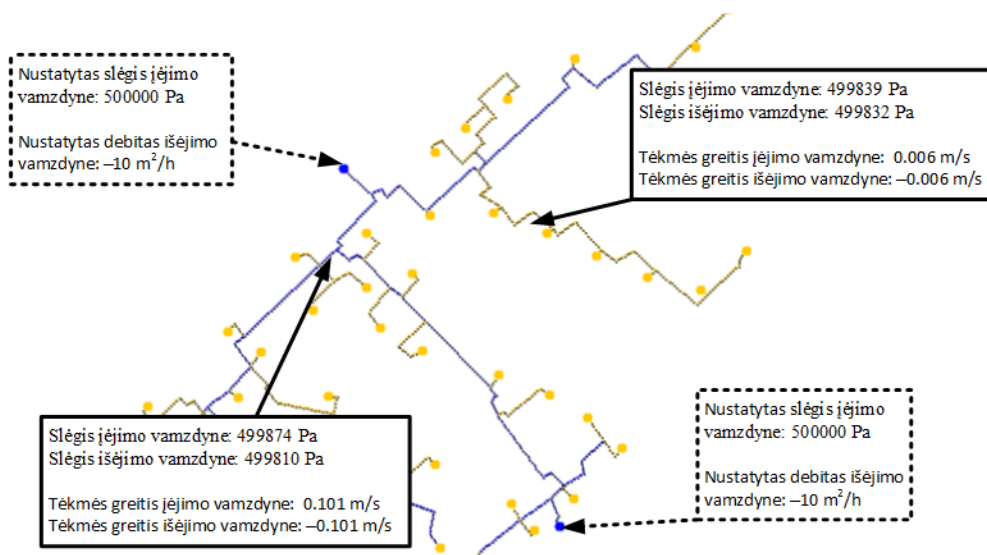
Sudarytą vienmatį vamzdyno tėkmės modelį galima pritaikyti įvairiuose inžineriniuose sprendimuose. Toliau nagrinėjamas slėgio impulso kryčio modeliavimas šiluminių trasų vamzdyno BE modelyje. Skaitiniam pereinamųjų procesų modeliavimui atlikti pasirinktas Vilniaus miesto šiluminių trasų vamzdyno fragmentas. Jis pateiktas 42 pav.



42 pav. Vilniaus miesto šiluminių trasų vamzdyno fragmentas, kuriame atliekamas slėgio bangos modeliavimas

Šiluminį vamzdyną sudaro tiekimo ir grįžtamoji dalis. Per tiekimo dalį į pastatus atiteka skystis, per grįžtamąją – išteka. Paprastai pastatuose vykstantys procesai yra sudėtingi, ir šių procesų analizei galėtų būti sudaromi atskiri BE modeliai, kurių kiekvieną pasinaudojant kraštinėmis sąlygomis būtų galima atkirsti nuo pagrindinio vamzdyno. Šiame eksperimente apsiribojama pereinamųjų procesų vamzdyne modeliavimu, todėl vietoje pastatų analizuojami tik prie jų esantys imtuvai, kurie jungia tiekimo ir grįžtamąsias vamzdyno dalis, o pastato tėkmės ir slėgio nuostoliai įvertinami ekvivalentiniuose imtuvų BE, kurie sudaromi pagal tas pačias lygtis, kaip ir kiti vamzdyno elementai. Ekvivalentiniai BE 42 pav. pavaizduoti geltonais skrituliukais, kurių skersmuo $diam = 0,5$ m ir sienelės storis $Ls = 0,003$ m. Sudarant vamzdyną naudojami dviejų tipų vamzdžiai, kurių skersmuo $diam_1 = 0,1$ m, $diam_2 = 0,5$ m ir sienelės storis $Ls_1 = 0,0035$ m, $Ls_2 = 0,0063$ m. Mėlynos spalvos vamzdžiai atitinka pirmojo tipo ($diam_1, Ls_1$), geltonos – antrojo tipo ($diam_2, Ls_2$) vamzdžius. Mėlynais skrituliukais vaizduojami mazgai su nustatytais slėgiais arba tėkmės debitais. Šiame modelyje kaip pradiniai duomenys vamzdyno atkirtimo taškuose parenkami slėgiai $P = 500\,000$ Pa tiekimo vamzdyne ir neigiami debitai $w = -10$ m²/h grįžtamajame. Statinei analizei atlikti naudojamos fizikinės konstantos: $E = 2,1^{11}$ N/m², $K = 2,2^9$ N/m², $\rho = 995$ kg/m³ ir $\mu = 5,47^{-4}$ N × s/m².

Iš pateiktų geometrinių ir kitų pradinių duomenų sudarius BE modelį ir atlikus statinę analizę, gaunamas modelis, kurio kiekviename baigtiniame elemente apibrėžiami tėkmės greičiai ir slėgiai (43 pav.).



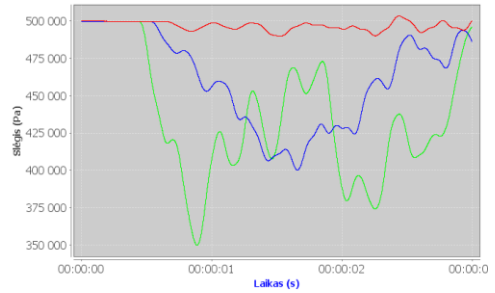
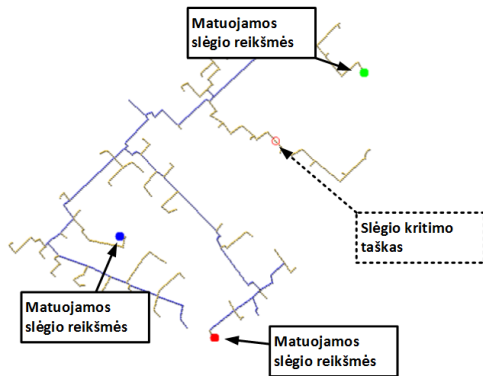
43 pav. Vamzdyno fragmento BE modelis atlikus statinę analizę ir apskaičiavus nusistovėjusią tėkmę. Punktyriniame komentare pateiktos nustatytos kraštinės sąlygos, tiesios linijos komentare – slėgio reikšmės ir tėkmės greitis atsitiktinai parinktuose įėjimo ir išėjimo vamzdyno taškuose

Atsitiktiniuose taškuose pamatavus slėgį ir tėkmės greitį matoma, kad yra tenkinamos slėgio reikšmių darnos ir debitų balanso sąlygos vamzdyno konstrukcijos mazguose. Slėgio reikšmės tolygiai pasiskirsto ir yra artimos nustatytoms reikšmėms $P_b \approx 500\,000$ Pa, o nustatytas neigiamas debitas išėjimo vamzdyne garantuoja, kad tėkmė vamzdyne yra iš įėjimo į išėjimo vamzdyną.

Slėgio impulso kryčiui simuliuoti naudojama analitinė funkcija, kurios išraiška:

$$P(t) = \frac{(P_b - dP \times (1 - \cos(\frac{\pi}{T} \times t)))}{2}; \quad (56)$$

čia dP – slėgio kritis, $t = 0 \dots dT$. Atliekant slėgio kryčio modeliavimą, pasirinktame taške (44 pav., a) nustatomas $dP \approx 100\,000$ Pa slėgio kritis, kuris įvyksta per $\Delta T = 0,1$ s. Modeliavimo rezultatai pateikiami 44 pav. b dalyje. Paveiksle matoma, kaip skirtingais laiko momentais slėgio kritis pasiekia skirtingus vamzdyno taškus.



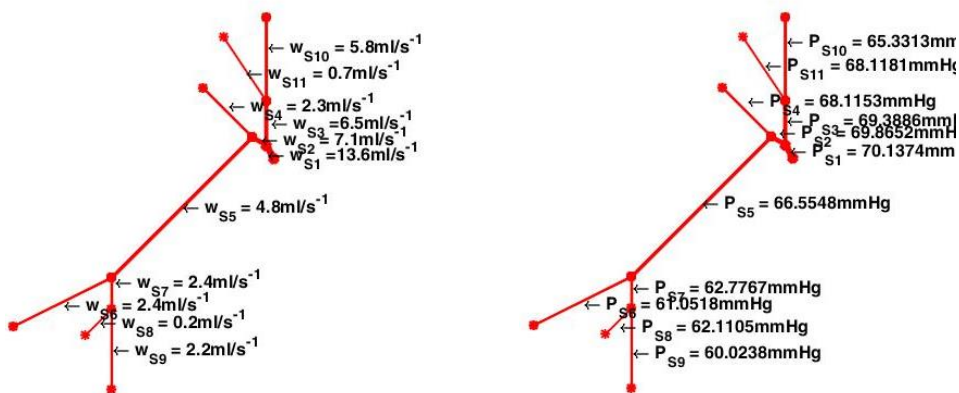
44 pav. a) Vamzdyno fragmento BE modelis, kur pavaizduotas slėgio kritimo taškas ir slėgio matavimo vamzdyne taškai; b) slėgio kitimas vamzdyne matavimo taškuose

4.1.4. Slėgio impulso modeliavimas arterinio medžio fragmente

Visiškai išspręsti kraujotakos modeliavimo problemai reikia tūrinių trimačių baigtinių elementų modelių. Tačiau dėl duomenų trūkumo išlieka keblu šiuose modeliuose parinkti tikslius fizikinius parametrus, ir pats modelis pritaikomas prie konkretaus individo. Todėl trimačiai modeliai dažniausiai yra naudojami tik lokaliems sprendiniams rasti, o vienmačiai modeliai yra vienas iš priimtinausių būdų modeliuoti slėgio sklidimą arterinių kraujagyslių medyje (Van De Vosse ir Stergiopulos, 2011), nes jie leidžia gauti tėkmės ir slėgio sprendinių aproksimacijas, įvertinant tik didžiausią įtaką sprendiniams turinčių parametų rinkinį.

Šiame skyriuje sudaryto vienmačio vamzdyno tėkmės modelio (4.1.1–4.1.2 skyriai) verifikavimas modeliuojant kraujotakos sistemą yra atliekamas arterinio medžio fragmente modeliuojant slėgio bangos impulsą ir modeliavimo rezultatus lyginant su duomenimis, gautais iš konkretaus individo ECG (elektrokardiograma) ir PPG (fotopletizmograma) signalų.

Eksperimentas atliekamas sudarant arterinio medžio fragmento (dešinio peties ir rankos) BE modelį (Patasius *et al.*, 2017), kurio geometrinė forma ir fizikinės konstantos parenkamos atsižvelgiant į subjekto fizinius duomenis (amžius – 25 m., ūgis – 1,87 m, svoris – 76 kg) ir darbuose (Alastruey, Parker ir Sherwin, 2012; Reymond *et al.*, 2009) pateiktus arterinio medžio geometrinius ir mechaninius parametrus. Analizuojamą kraujotakos medžio fragmentą sudaro 11 kraujagyslių: *Brachiocephalic* (S1), *R. subclavian* (S2), *R. common carotid* (S3), *R. vertebral* (S4), *R. brachial* (S5), *R. radial* (S6), *R. ulnar A* (S7), *R. interosseous* (S8), *R. ulnar B* (S9), *R. internal carotid* (S10) ir *R. external carotid* (S11). Kaip kraštinės sąlygos S1 kraujagyslės pradžioje nustatomas slėgis $p_{S1} = 70,25$ mmHg, o atitinkamai S4, S6, S8, S9, S10 ir S11 kraujagyslėse nustatomi tėkmės debitai: $w_{S4} = 6,5$ ml/s, $w_{S6} = 2,4$ ml/s, $w_{S8} = 0,2$ ml/s, $w_{S9} = 2,2$ ml/s ir $w_{S10} = 5,8$ ml/s. Atlikus nusistovėjusios tėkmės analizę pagal numatytas sąlygas visuose kraujotakos medžio taškuose apskaičiuoti tėkmės debitai (45 pav., a) ir slėgiai (45 pav., b).

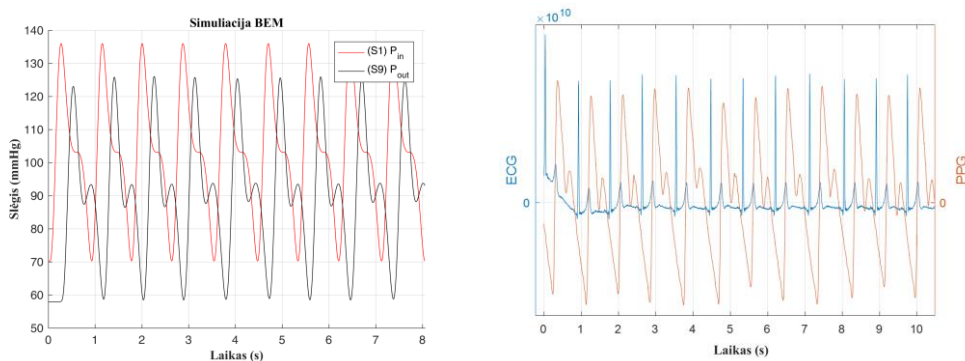


45 pav. Arterinio medžio fragmente apskaičiuoti tėkmės debitai (a) ir slėgiai (b)

Slėgio pulso forma gaunama iš analitinės funkcijos:

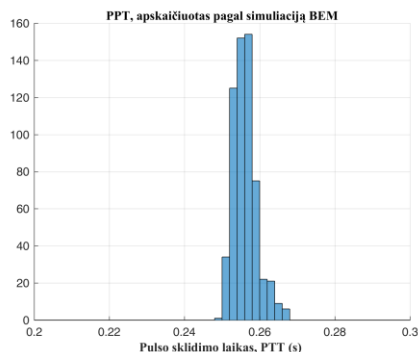
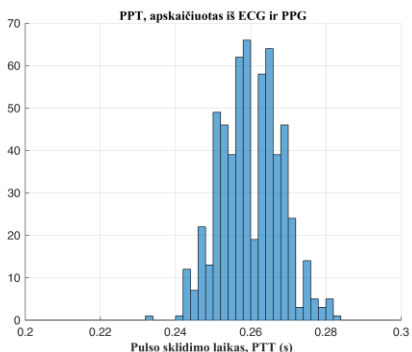
$$u(t) = 1 + \sin\left(T2\pi t - \frac{4\pi}{15}\right) + \sin\left(T2\pi t - \frac{4\pi}{15}\right), \text{ kur } t = 0 \dots T. \quad (57)$$

Atliekant slėgio bangos modeliavimą, periodiškai S1 kraujagyslėje yra žadinamas (53) impulsas; signalo žadinimo laikas T yra apskaičiuojamas pagal ECG signalą; S10, S1, S4, S6, S8, S9 kraujagyslių galuose yra įvertinama bangos neatspindėjimo sąlyga. 46 pav. a dalyje pateikti sinchronizuoti ECG ir PPG signalai, o 46 pav. b dalyje – modeliavimo rezultatai S1 kraujagyslės pradžioje ir S9 kraujagyslės pabaigoje.



46 pav. a) ECG ir PPG signalų fragmentai; b) modeliavimo rezultato fragmentas

Modeliavimo rezultatai su eksperimentiniais duomenimis palyginami atliekant pulso sklidimo laiko (PPT) palyginimą tarp S1 kraujagyslės pradžios ir S9 kraujagyslės galo (47 pav.).



47 pav. Pulso sklaidimo laikas, apskaičiuotas pagal: a) elektrokardiogramą (ECG) ir fotopletizmogramą (PPG), b) modeliavimo rezultatus

Iš 47 pav. matoma, kad vidutinės pulso sklaidimo laiko reikšmės, gautos atliekant modeliavimą ir analizuojant ECG ir PPG signalus, yra artimos (vidutinė kvadratinė paklaida tarp signalų yra 0,0037 s).

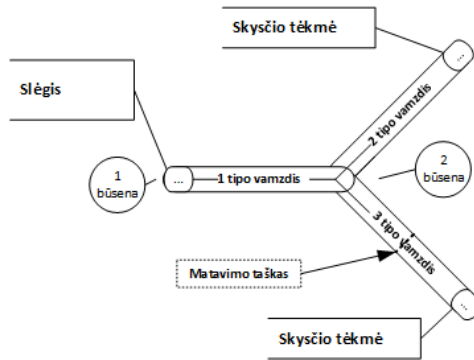
4.1.5. Sintezuotųjų elementų pritaikymas atliekant trumpųjų bangų modeliavimą pereinamiesiems slėgio virpesiams vamzdyne apskaičiuoti

Atliekant 1D elementų sintezę (žr. 2.1 skyrių) priimta, kad slopimas yra labai mažas ir jo galima nevertinti. Sudarant BE modelį, skirtą pereinamiesiems slėgio procesams vamzdyne ar arteriniame medyje modeliuoti, slopimas nėra lygus 0 ir priklauso nuo skysčio tėkmės greičio bei kitų mechaninių savybių. Tačiau tai netrukdo sintezuotųjų elementų panaudoti sudarant BE modelį, kur elemento standumo matrica apskaičiuojama:

$$[\mathbf{K}^e] = \frac{A\tilde{K}}{L} [\mathbf{K}_{1D}^{SE0}]; \quad (58)$$

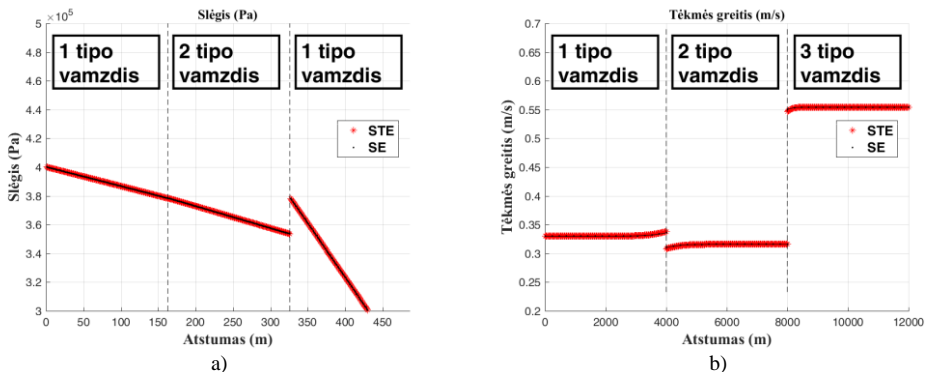
čia $[\mathbf{K}_{1D}^{SE0}]$ – 2.1 skyriuje apskaičiuoto sintezuotojo BE standumo matrica.

Sintezuotųjų elementų tinkamumas patikrinamas atliekant modeliavimą nehomogeninėje šakotoje struktūroje, surinktoje iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų. Struktūros galuose kaip pradinės sąlygos nustatomi slėgis ir vandens tėkmės debitai; pagal juos skaičiuojama nusistovėjusi tėkmė vamzdyne (48 pav.).



48 pav. Šakota nehomogeninė vamzdyno forma

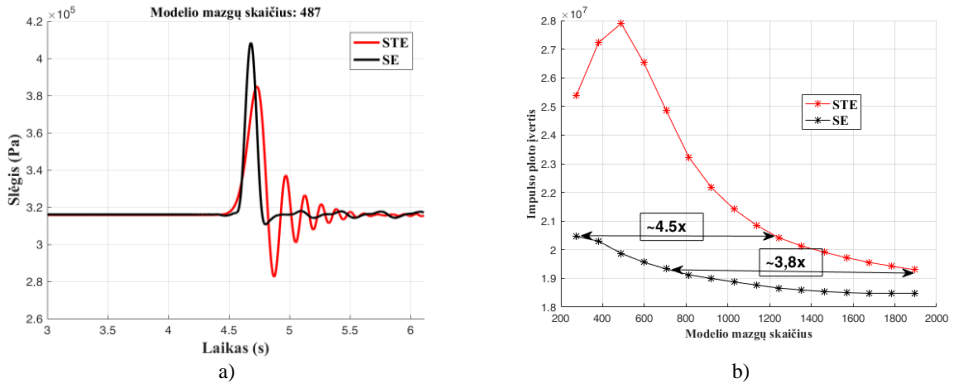
Mechaninės konstantos naudojamos tokios pat, kaip ir simuliuojant pereinamuosius slėgio virpesius vamzdyne (4.1.3 skyrius): $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $K = 2,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, $\rho = 995 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,045 \cdot 10^{-3} \text{ N} \times \text{s/m}^2$; skirtingų vamzdžių skersmuo atitinkamai yra $D_1 = 0,1 \text{ m}$, $D_2 = 0,08 \text{ m}$, $D_3 = 0,1 \text{ m}$, o sienelių storis yra $h_1 = 0,0035 \text{ m}$, $h_2 = 0,003 \text{ m}$, $h_3 = 0,0025 \text{ m}$. Kaip kraštinė sąlyga pirmojo tipo vamzdžio kairėje pusėje parenkamas pradinis slėgis $P = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, o antrojo ir trečiojo tipo vamzdžių dešinėje pusėje nustatomi tėkmės debitai $w_{1,2} = 10 \text{ m}^2/\text{val}$. Kiekvieno segmento ilgis modelyje $L_s = 4000 \text{ m}$. Kaip sintezuotieji elementai naudojami 10 mazgų elementai, todėl modelyje iš sintezuotųjų elementų tėkmės greitis pagal (53.2) lygtį apskaičiuojamas ne tarp mazgų, o visam sintezuotajam elementui; slėgio reikšmės skaičiuojamos visiems sintezuotojo elemento mazgams. Nusistovėjusios tėkmės skaičiavimo rezultatai, gauti modelyje iš sintezuotųjų ir tradicinių elementų, kai atstumas tarp mazgų $L \approx 24,7 \text{ m}$, palyginti 49 pav.



49 pav. Nusistovėjusios tėkmės skaičiavimo rezultatai šakotoje nehomogeninėje struktūroje: a) slėgių pasiskirstymas; b) tėkmės greičiai

Modeliavimo metu priimamas supaprastinimas, kad skysčio tėkmės greitis per numatytą laiką nekinta, t. y. $\dot{v}_e = 0$. Jei būtų norima įvertinti ir tėkmės greičio pokytį, modelyje iš sintezuotųjų elementų tėkmės greitį reikėtų vertinti sudarant tankesnio

tinkelio BE modelį, nes tėkmės greičio impulso formos tikslumas priklauso ne nuo mazgų skaičiaus, o nuo elementų skaičiaus, kuris bendruoju atveju modelyje iš sintezuotųjų elementų yra mažesnis negu tradicinių elementų modelyje. Modeliuoti pradedama sužadinant (21) impulsą kairėje pirmojo tipo vamzdžio pusėje; jo amplitudė $dP = 1 \cdot 10^5$ Pa, impulso žadinimo laikas $dT = 0,2$ s. Slėgio pokyčiai trečiojo tipo vamzdžio viduryje impulsui nusklidus ~ 23 bangos ilgių, kai mazgų per bangos ilgį ~ 11 , yra palyginti 50 pav. a dalyje.



50 pav. a) Slėgio kitimas bėgant laikui stebimame šakotos nehomogeninės struktūros taške; b) modelių palyginimas tinkelio retumo aspektu

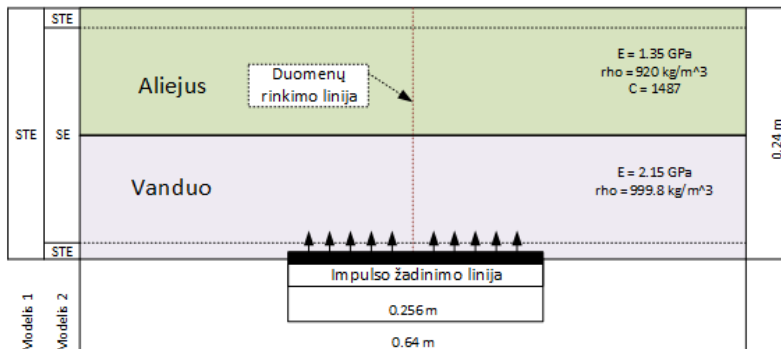
Modelyje iš tradicinių elementų stebint slėgio pokyčius pasirinktame taške matomos paklaidos, o atliekant modeliavimą modelyje iš sintezuotųjų elementų skaitinės dispersijos beveik nelieka (50 pav., a). 50 pav. b dalyje palygintas impulso modeliavimas BE modeliuose iš tradicinių ir sintezuotųjų elementų panaudojant skirtingo tankumo tinkelį ir naudojant tą patį skaitinio integravimo žingsnį. Įvertinamas sklindančios bangos suformuoto impulso plotas laiko intervale tarp 4 ir 4,5 s, t. y. kai per stebimą vietą prasklinda banga. Impulso ploto įvertis apskaičiuojamas pagal formulę:

$$e_i = \sqrt{\frac{t_{min}}{T} \sum_{i=0}^{T/t_{min}} \left(\sqrt{P(i \times t_{min}) - P_p} \right)^2}; \quad (59)$$

čia t_{min} – skaitinio integravimo žingsnis, P_p – slėgio reikšmė atlikus statinę analizę, $P(i \times t_{min})$ – slėgio reikšmė stebimame taške tam tikru laiko momentu. Iš rezultatų matoma, kad modelio konvergavimas, priklausomai nuo norimo tikslumo, modeliuose iš sintezuotųjų elementų yra kur kas geresnis (3,8–4,5 karto) ir yra artimas skaičiavimu paremtam modelių palyginimui, kai modeliai lyginami bematėje erdvėje pagal BE modelių tikrinių dažnių paklaidas ir simuliuojamo impulso dažnių spektro amplitudes.

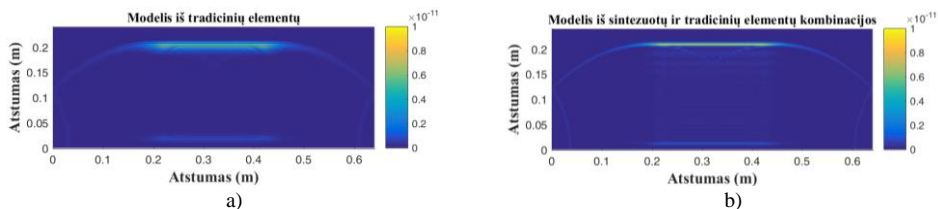
4.2. Ultragarso bangų sklidimo nehomogeninėse akustinėse terpėse apskaičiavimas

Akustinių bangų modeliavimui atlikti sudaroma 2D stačiakampė $0,64 \times 0,24$ m nehomogeninė struktūra. Panaudojant tradicinius ir kvadratinius $0,5 \times 0,5$ mm sintezuotuosius BE sudaromi du tokio paties tinklelio retumo modeliai. Tradicinių BE matricos apskaičiuojamos pagal (37) lygtis, sintezuotųjų elementų masės matrica apskaičiuojama pagal (37.1) lygtį, o standumo matrica – panaudojant (39) lygtį ir vietoje $[K^{SE0}]$ įrašius 2 skyriuje sudarytą 5×5 standumo elemento matricą. BE geometrinė forma pateikiama 51 pav.



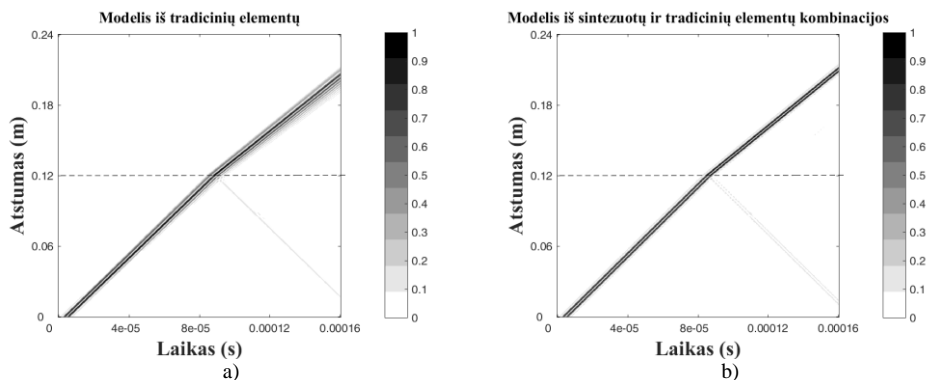
51 pav. Nehomogeninės struktūros 2D BE modelio, skirto akustinėms bangoms simuliuoti, geometrinė forma

Vandens terpėje ($E = 2,15$ GPa, $\rho = 999,8$ kg/m³, $C = 1466$ m/s) 10 μ s žadinamas Gauso lango impulsas (20). Sklisdamas impulsas iš dalies atsispindėdamas pereina į alyvą ($E = 1,35$ GPa, $\rho = 920$ kg/m³, $C = 1211$ m/s). Modelių įtempių palyginimas modeliavimą atlikus 160 μ s pateikiamas 52 pav.



52 pav. Modelių, surinktų iš skirtingų elementų, įtempiai atliekant akustinės bangos simuliaciją. BE modeliai, surinkti iš: a) tradicinių elementų; b) tradicinių ir sintezuotųjų elementų kombinacijos

Slopimas modelyje yra nevertinamas, todėl impulsas turėtų skliti tokios formos, koks buvo žadinamas. Tačiau dėl skaitinės dispersijos modelyje iš tradicinių elementų impulsas yra gerokai iškraipomas, o modelyje iš sintezuotųjų elementų skaitiniai triukšmai yra kur kas mažesni, tiek modelio nehomogeniškumas, tiek sintezuotųjų ir tradicinių elementų panaudojimas modelyje nesukelia jokių papildomų triukšmų. Tai gerai matoma analizuojant modelio B vaizdą, kur modeliavimo rezultatai duomenų rinkimo linijoje yra pateikiami poslinkių ir laiko erdvėje (53 pav.).



53 pav. Modeliavimo rezultatų BE modeliuose B vaizdai. BE modeliai, surinkti iš: a) standartinių elementų; b) tradicinių ir sintezuotųjų elementų kombinacijos

4.3. Ketvirtojo skyriaus išvados

1. Sudarytas vienmatis spūdaus skysčio tėkmės baigtinių elementų modelis, skirtas pereinamiesiems virpesiams vamzdyne simuliuoti. Skaitiniais eksperimentais nustatyta, kad sudarytas modelis gali būti pritaikomas skirtingiems inžineriniams sprendimams: slėgio bangos sklidimui šiluminiame vamzdyne ar slėgio bangos sklidimui kraujotakos arteriniame medyje.
2. Pademonstruota, kad 2 skyriuje sudaryti vienmačiai sintezuotieji baigtiniai elementai gali būti pritaikomi vienmačiame spūdaus skysčio BE modelyje, taip sumažinant skaičiavimo išteklių poreikį modeliavimui atlikti.
3. Skaitinio eksperimento metu, kai ultragarso impulsas simuliuojamas nehomogeninėje (aliejus ir vanduo) 2D struktūroje, pademonstruota, kad sintezuotieji akustiniai elementai gali būti pritaikyti simuliuojant testinius realių ultragarso matavimų atvejus, kad modelis gali būti surenkamas iš sintezuotųjų ir akustinių elementų kombinacijos ir tai leidžia sudaryti bet kokios geometrinės formos BE modelius.

BENDROSIOS IŠVADOS

1. Skaitiškai modeliuojant bangą BE modeliuose visada atsiranda skaitinių paklaidų, kurios priklauso nuo tinklelio diskretizavimo žingsnio ir simuliuojamo impulso dažnių spektro. Tradiciniai baigtinių elementų modeliai, gauti panaudojant sutelktąsias arba konsistentines masių matricas, generuoja panašaus dydžio, tačiau priešingų ženklų paklaidas. Iki šiol žinomi būdai sumažinti šias paklaidas yra paremti aukštesniosios eilės baigtiniais elementais arba kombinuotosiomis bei sintezuotosiomis masių matricomis. Deja, tokios masių matricos yra neįstrižaininės, todėl neleidžia visiškai panaudoti išreikštinių skaitinio integravimo schemų privalumų.

2. Taikant modų sintezės metodą sukurtas algoritmas, skirtas 1D ir 2D sintezuotiesiems baigtiniams elementams su įstrižaininėmis masių matricomis sudaryti. Sintezuotieji elementai sudaromi atliekant elemento virpesių modų korekcijas, kur modų korekcijos koeficientai yra tikslo funkcijos minimizavimo parametrai, o pati tikslo funkcija apibrėžia modelio, surinkto iš sintezuotųjų elementų, pirmųjų tikrinių dažnių paklaidas. Pademonstruota, kad didesnis sintezuojamo elemento laisvės laipsnių skaičius lemia geresnes sintezuotojo elemento konvergavimo savybes.

3. Ištyrus modelių konvergavimą 1D struktūrose pademonstruota, kad, BE modelį surenkant iš sintezuotųjų 10 mazgų elementų, pirmųjų ~60 % modelio tikrinių dažnių paklaidos būna labai mažos ($<10^{-6}$). Iš šių elementų galima sudaryti šakotą nehomogeninę struktūrą ir modelį surenkant kartu su tradiciniais elementais įvertinti bangos neatspindėjimo sąlygą.

4. Ištyrus modelių konvergavimą 2D struktūrose, nustatyta, kad skaičiavimo išteklių poreikis sintezės procesui gali būti sumažintas pasinaudojant simetrinių konstrukcijų modų savybėmis, ir atsižvelgiant į turimus skaičiavimo išteklius sudarytas 5×5 mazgų akustinis ir 4×4 mazgų kvadrato formos tamprūs elementas. Modelių, surinktų iš tokių elementų, pirmųjų 25 % (akustiniuose modeliuose) ir 6,2 % (tampruosiuose modeliuose) tikrinių dažnių paklaidos išlieka labai mažos. Nors atliekant impulso modeliavimą 2D tampruosiuose modeliuose, surinktuose iš sintezuotųjų elementų, dėl atliktų konstrukcijos modų korekcijų papildomai atsiranda nedidelės (~2 % modeliujamo impulso amplitudės) paklaidos, jų vieta yra nuspėjama ir šios paklaidos gali būti nesunkiai pašalinamos atliekant signalo analizę.

5. Sintezuotieji elementai verifikuoti atliekant skaitinius tyrimus. Sukurtas 1D spūdaus skysčio tėkmės baigtinių elementų modelis, skirtas pereinamiesiems virpesiams vamzdyne apskaičiuoti. 2D konstrukcijose buvo simuliuojami testiniai realių ultragarso matavimų atvejai. Atliekant skaitinius tyrimus nustatyta, kad sudaryti 10 mazgų 1D, 2D akustiniai (5×5 mazgų) ir 2D tamprieji (4×4 mazgų) sintezuotieji elementai leido panaudoti gerokai retesnius tinklelius (1D – 4,7 karto; 2D akustinis – 2,5 karto; 2D tamprūs – 2 kartus), išlaikant tokį patį sprendinio tikslumą. Tinklelio retumas verifikuojamas pagal konkretaus simuliuojamo impulso dažnių spektrą ir BE modelio tikrinių dažnių paklaidas atliekant pasirinkto impulso modeliavimą skirtingo retumo tinklelio modeliuose. Atliekant našumo testus nustatyta, kad panaudojus aukštesniosios eilės sintezuotuosius elementus gautas didesnis standumo matricos

juostos plotis didesnės reikšmės neturi ir visais atvejais yra sutaupoma kompiuterio atmintis, reikalinga BE modeliui saugoti, ir sumažinamos skaičiavimo, atliekamo modeliuojant bangą, apimtys.

LITERATŪRA

1. Ahmad, Z. A. B., Vivar-Perez, J. M., & Gabbert, U. (2013). Semi-analytical finite element method for modeling of lamb wave propagation. *CEAS Aeronautical Journal*, 4(1), 21–33. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1007/s13272-012-0056-6>
2. Aimi¹, A., Diligenti¹, M., Frangi², A., & Guardasoni¹, C. (2013). Energetic BEM–FEM coupling for wave propagation in 3D multidomains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (March), 377–394.
3. Alastruey, J., Parker, K. H., & Sherwin, S. J. (2012). Arterial pulse wave haemodynamics. *11th International Conference on Pressure Surges*, 401–443. Retrieved from http://www2.imperial.ac.uk/ssherw/spectralhp/papers/PulseSurges_2012.pdf
4. Andreassen, E., & Andreasen, C. S. (2014). How to determine composite material properties using numerical homogenization. *Computational Materials Science*, 83, 488–495. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.commatsci.2013.09.006>
5. Arora, V., & Mulaveesala, R. (2014). Pulse compression with Gaussian weighted chirp modulated excitation for infrared thermal wave imaging. *Progress in Electromagnetics Research Letters*, 44 (November, 2013), 133–137. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.2528/PIERL13111301>
6. Augustinavičius, G. (2014). *Mikropozicionavimo sistemų taikant lanksčias jungtis tyrimai*. Daktaro disertacija. Vilnius: Vilniaus Gedimino technikos universitetas.
7. Barauskas, R. (1992). Dynamic analysis and synthesis of elastic structures with unilateral constraints. *Computer Methods and Application to Controlled Vibrational Systems*. Kaunas: Technologija.
8. Barauskas, R. (1994). Dynamic analysis of structures with unilateral constraints: Numerical integration and reduction of structural equations. , *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 (April 1993), 323–342.
9. Barauskas, R. (2005). On highly convergent 2D acoustic and elastic wave propagation models. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 22 (3), 225–233. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1002/cnm.810>
10. Barauskas, R., Balevičius, R., & Kačianauskas, R. (2004). *Baigtinių elementų metodo pagrindai*. Vilnius: Technika.
11. Barauskas, R., & Barauskiene, R. (2004). Highly convergent dynamic models obtained by modal synthesis with application to short wave pulse propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61 (14), 2536–2554. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1002/nme.1169>
12. Barauskas, R., Kriščiūnas, A., & Blažauskas, T. (2016). A finite element model in a form of structural dynamic equation for the transient analysis of pressure in pipelines. *Journal of Vibroengineering*, 18 (2), 1209–1226.
13. Barauskas, R., & Ostaševičius, V. (1998). *Tamprųjų vibrosmūginių sistemų analizė ir optimizavimas: kompiuteriniai metodai ir jų taikymas: monografija*. Kaunas: Technologija.
14. Baronas, D. (2014). *Computer Aided Modeling of Multilayer Biosensors and Optimization Based Processing of Amperometric*. Daktaro disertacija. Vilnius: Vilniaus universitetas.

15. Blanco, P. J., Feijóo, R. A., & Urquiza, S. A. (2007). A unified variational approach for coupling 3D-1D models and its blood flow applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 (41–44), 4391–4410. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.cma.2007.05.008>
16. Blaževičius, G. (2015). *Prisitaikomumo teorijos plėtotė optimizuojant plienines konstrukcijas / Extended shakedown theory on optimization of steel structures*. Daktaro disertacija. Vilnius: Vilniaus Gedimino technikos universitetas.
17. Bognet, B., Bordeu, F., Chinesta, F., Leygue, A., & Poitou, A. (2012). Advanced simulation of models defined in plate geometries: 3D solutions with 2D computational complexity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201–204, 1–12. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.cma.2011.08.025>
18. Calneryte, D., & Barauskas, R. (2016). Multi-scale evaluation of the linear elastic and failure parameters of the unidirectional laminated textiles with application to transverse impact simulation. *Composite Structures*, 142, 325–334. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.01.104>
19. Casadei, F. (2012). *Multiscale Analysis of Wave Propagation in Heterogeneous Structures*. Doctoral dissertation, Georgia Institute of Technology.
20. Cho, W.-I., Na, S.-J., Thomy, C., & Vollertsen, F. (2012). Numerical simulation of molten pool dynamics in high power disk laser welding. *Journal of Materials Processing Technology*, 212 (1), 262–275. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2011.09.011>
21. Chung, T. J. (1978). Finite element analysis in fluid dynamics. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 78, 44102.
22. Clementi, F., Gazzani, V., Poiani, M., & Lenci, S. (2016). Assessment of seismic behaviour of heritage masonry buildings using numerical modelling. *Journal of Building Engineering*, 8, 29–47. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.jobe.2016.09.005>
23. Courant, R. (1943). Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49 (1), 1–24. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1090/S0002-9904-1943-07818-4>
24. Daniulaitis, V., & Barauskas, R. (1998). Modelling techniques of ultrasonic wave propagation in solids. *Ultragarsas / Ultrasound*, 1 (1), 7–11.
25. De Marchi, L., Marzani, A., Caporale, S., & Speciale, N. (2009). Ultrasonic guided-waves characterization with warped frequency transforms. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 56 (10), 2232–2240. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1109/TUFFC.2009.1305>
26. De Marchi, L., Marzani, A., Speciale, N., & Viola, E. (2010). Dispersion compensation of Lamb waves with the warped frequency transform in passive monitoring techniques. *Ultrasonics Symposium (IUS), 2010 IEEE*, 133–136. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1109/ULTSYM.2010.5935873>
27. Eltaher, M. A., Alshorbagy, A. E., & Mahmoud, F. F. (2013). Vibration analysis of Euler-Bernoulli nanobeams by using finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 37 (7), 4787–4797. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.apm.2012.10.016>
28. Fan, Z. (2010). Applications of guided wave propagation on waveguides with

- irregular cross-section (June), 172. Retrieved from <https://workspace.imperial.ac.uk/nde/Public/Thesis-IC-Zheng-Fan-Final.pdf>
29. Farmaga, I., Shmigelskyi, P., Spiewak, P., & Ciupinski, L. (2011). Evaluation of computational complexity of finite element analysis. *2011 11th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM)*, 213–214.
 30. Fedaravičius, A., & Volkovas, V. (1993). *Sukietėjusių medžiagų įtempimų ir deformacijų matematinis modeliavimas bei birumo atstatymo metodo sukūrimas*. Daktaro disertacija. Kaunas: Kauno technologijos universitetas.
 31. Fell, B. V., & O'Rourke, M. J. (2014). Loss of pressure boundary through buckling-induced fracture in the ciudad nezahualcōyotl pipeline. *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice*, 5 (4), 1–9. Prieiga per doi: [http://doi.org/10.1061/\(ASCE\)PS.1949-1204.0000173](http://doi.org/10.1061/(ASCE)PS.1949-1204.0000173)
 32. Feng, Y., Wang, C.-H., & Liu, S.-X. (2016). Low dielectric constant of polymer based composites induced by the restricted polarizability in the interface. *Materials Letters*, 185 (August), 491–494. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.matlet.2016.09.062>
 33. Fierro, G. P. M., Ciampa, F., Ginzburg, D., Onder, E., & Meo, M. (2015). Nonlinear ultrasound modelling and validation of fatigue damage. *Journal of Sound and Vibration*, 343, 121–130. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.10.008>
 34. Gaidys, R., Gaidytė, A., & Danielytė, J. (1999). Baigtinių elementų metodas ir stomatognatinės sistemos biomechanikos analizė. *Biomedicininė inžinerija: Tarptautinės konferencijos pranešimų medžiaga*, 22, 66–69.
 35. George, A. (1973). Nested dissection of a regular finite element mesh. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10 (2), 345–363.
 36. Gresil, M., Yu, L., & Giurgiutiu, V. (2013). Predictive model of fatigue crack detection in thick bridge steel structures with piezoelectric wafer active sensors. *Proc. of SPIE Vol. 7983* (2), 79832Y–1. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1117/12.882137>
 37. Guo, X., & Vavilov, V. (2013). Crack detection in aluminum parts by using ultrasound-excited infrared thermography. *Infrared Physics and Technology*, 61 (May), 149–156. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.infrared.2013.08.003>
 38. Hayashi, T. (2004). Guided wave animation using semi-analytical finite element method. T. Hayashi Nagoya Institute of Technology, Nagoya, Japan. *Society*. Retrieved from ndt.net
 39. Hayward, G., & Hyslop, J. (2006). Determination of Lamb wave dispersion data in lossy anisotropic plates using time domain finite element analysis. Part II: Application to 2-2 and 1-3 piezoelectric composite transducer arrays. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 53 (2), 449–455. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1109/TUFFC.2006.1593384>
 40. Hansson, P., & Sandberg, G. (1997). Mass matrices by minimization of modal errors. *International Journal for Numerical ...*, 40 (April), 4259–4271. Retrieved from [http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19971130\)40:22%3C4259::AID-NME262%3E3.0.CO;2-P/abstract](http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/(SICI)1097-0207(19971130)40:22%3C4259::AID-NME262%3E3.0.CO;2-P/abstract)
 41. Haug, E. J., & Pan, W. (1998). Optimal inertia lumping from modal mass matrices for structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163 (1–4), 171–191. Prieiga per doi: [http://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00011-5](http://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00011-5)
 42. He, Z. C., Li, E., Liu, G. R., Li, G. Y., & Cheng, A. G. (2016). A mass-redistributed

- finite element method (MR-FEM) for acoustic problems using triangular mesh. *Journal of Computational Physics*, 323, 149–170. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.07.025>
43. Hrennikoff, A. (1941). Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method. *Journal of Applied Mechanics*.
 44. Huang, J., Zhao, M., & Du, X. (2017). Non-linear seismic responses of tunnels within normal fault ground under obliquely incident P waves. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 61, 26–39. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.tust.2016.09.006>
 45. Ihlenburg, F. (2006). *Finite element analysis of acoustic scattering* (Vol. 132). Springer Science & Business Media.
 46. Ihlenburg, F., & Babuska, I. (1995). Dispersion analysis and error estimation of Galerkin finite element methods for the Helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 (December 1994), 3745–3774. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1137/040605278>
 47. Ihlenburg, F., & Babuska, I. (1995). Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number part I: the h-p version of the FEM. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 30 (9), 9–37. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1137/S0036142994272337>
 48. Yu, X., Ratassepp, M., Rajagopal, P., & Fan, Z. (2016). Anisotropic effects on ultrasonic guided waves propagation in composite bends. *Ultrasonics*, 72, 95–105. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.ultras.2016.07.016>
 49. Yue, B., & Guddati, M. N. (2005). Dispersion-reducing finite elements for transient acoustics. *Journal of the Acoustical Society of America*, 118 (4), 2132–2141. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1121/1.2011149>
 50. Jensen, M. (1998). High convergence order finite elements with lumped mass matrix. *International Journal for Numerical Methods in ...*, 39 (January 1995), 1879–1888. Prieiga per doi: [http://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19960615\)39:11<1879::AID-NME933>3.0.CO;2-2](http://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19960615)39:11<1879::AID-NME933>3.0.CO;2-2)
 51. Jie, C., Xin, G., & Gangtie, Z. (2015). A simultaneous iterative procedure for the Kron's component modal synthesis approach. *Proceedings of the 2011 American Control Conference* (March), 990–1013. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1002/nme>
 52. Kaminski, M. (2013). Boundary element method. In *IUTAM/IACM/IABEM Symposium on Advanced Mathematical and Computational Mechanics Aspects of the Boundary Element Method: held in Cracow, Poland, 31 May-3 June 1999* (pp. 145).
 53. Kazys, R., Mazeika, L., Barauskas, R., Jasiuniene, E., & Daniulaitis, V. (2002). Evaluation of diffraction errors in precise pulse-echo measurements of ultrasound velocity in chambers with waveguide. *Ultrasonics*, 40 (1–8), 853–858. Prieiga per doi: [http://doi.org/10.1016/S0041-624X\(02\)00226-3](http://doi.org/10.1016/S0041-624X(02)00226-3)
 54. Kelley, C. T. (1999). Back Matter. In *Iterative Methods for Optimization* (pp. 161–180). Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1137/1.9781611970920.bm>
 55. Khajavi, R. (2014). General templates for n-noded bar elements based on reduced representations and numerical dispersion reduction by optimized finite elements. *Applied Mathematics and Computation*, 233, 445–462. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.amc.2014.02.022>
 56. Kleiza, V., & Verkelis, J. (2011). Modified fiber optic system for monitoring the

- railgun rail deflections. *Acta Physica Polonica A*, 119 (2), 271–273.
57. Klimpke, B. (2003). A hybrid magnetic field solver using a combined finite element / Boundary element field solver. *Technology*.
 58. Kouroussis, G., Van Parys, L., Conti, C., & Verlinden, O. (2014). Using three-dimensional finite element analysis in time domain to model railway-induced ground vibrations. *Advances in Engineering Software*, 70, 63–76. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.advensoft.2014.01.005>
 59. Kriščiūnas, A., & Barauskas, R. (2013). Minimization of errors caused by numerical dispersion in finite element models of wave propagation. *Information and Software Technologies: 19th International Conference, ICIST*.
 60. Kriščiūnas, A., & Barauskas, R. (2016). Highly convergent finite elements with diagonal mass matrix for short wave pulse propagation simulation. *Information Technology and Control*, 45 (3), 308–320.
 61. Krušinskienė, R. (2007). *Struktūrinių modelių taikymas žmogaus stovėsenai tirti*. Daktaro disertacija. Kaunas: Kauno technologijos universitetas.
 62. Li, E., He, Z. C., Zhang, Z., Liu, G. R., & Li, Q. (2016). Stability analysis of generalized mass formulation in dynamic heat transfer. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 69 (4), 287–311. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1080/10407790.2015.1104215>
 63. Lysmer, J., Udaka, T., Tsai, C., & Seed, H. B. (1975). *FLUSH - a computer program for approximate 3-D analysis of soil-structure interaction problems. PB-259332; EERC-75-30 TRN: 77-010608*.
 64. Mačiūnas, D. (2013). *Daugiakriteris globalus sijynų optimizavimas genetiniais algoritmais*. Daktaro disertacija. Vilnius: Vilniaus Gedimino technikos universitetas.
 65. Mafi, A. (2012). Pulse propagation in a short nonlinear graded-index multimode optical fiber. *Journal of Lightwave Technology*, 30 (17), 2803–2811. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1109/JLT.2012.2208215>
 66. Mahmoud, F. F., Eltahir, M. A., Alshorbagy, A. E., & Meletis, E. I. (2012). Static analysis of nanobeams including surface effects by nonlocal finite element. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 26 (11), 3555–3563. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1007/s12206-012-0871-z>
 67. Marzani, A., & Bartoli, I. (2009). High frequency waves propagating in octagonal bars: A low cost computation algorithm. *Algorithms*, 2(1), 227–246. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.3390/a2010227>
 68. Mirbagheri, Y., Nahvi, H., Parviziyan, J., & Düster, A. (2015). Reducing spurious oscillations in discontinuous wave propagation simulation using high-order finite elements. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(7), 1640–1658. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.06.022>
 69. Moser, F., Jacobs, L. J., & Qu, J. (1999). Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method. *NDT & E International*, 32 (4), 225–234. Prieiga per doi: [http://doi.org/10.1016/S0963-8695\(98\)00045-0](http://doi.org/10.1016/S0963-8695(98)00045-0)
 70. Mullen, R., & Belytschko, T. (1982). Dispersion analysis properties of finite element semi-discretizations of the two-dimensional wave equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18, 1–29.
 71. Nakahata, K., Sugahara, H., Barth, M., Kohler, B., & Schubert, F. (2016). Three dimensional image-based simulation of ultrasonic wave propagation in

- polycrystalline metal using phase-field modeling. *Ultrasonics*, 67, 18–29. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.12.013>
72. Noh, G., & Bathe, K. J. (2013). An explicit time integration scheme for the analysis of wave propagations. *Computers and Structures*, 129, 178–193. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.compstruc.2013.06.007>
 73. Patasius, M. (2010). *Akies dugno vaizdų automatinė analizė*. Daktaro disertacija. Kaunas: Kauno technologijos universitetas.
 74. Patasius, M., Krisciunas, A., Rapalis, A., Barauskas, R., Janusauskas, A., Calneryte, D., & Neciunas, A. (2017). Exploration of modelling of blood flow through the arterial tree using phase error reducing finite element model. *Biomedical engineering*, 2016, 20 (1).
 75. Petkevičius, K., Senkus, V., Šajauka, A., & Tamošiūnas, J. (1993). Sklandytuvo LAK-17 sparno atsparumo analizė. *Mechaninė technologija : Mokslo darbai*, 21, 35–45.
 76. Qiu, J.-B., Ying, Z.-G., & Willams, F. W. (1997). Exact modal synthesis techniques using residual constraint modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 (13), 2475–2492. Prieiga per doi: [http://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970715\)40:13<2475::AID-NME176>3.0.CO;2-L](http://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970715)40:13<2475::AID-NME176>3.0.CO;2-L)
 77. Quarteroni, A., Veneziani, A., & Vergara, C. (2016). Geometric multiscale modeling of the cardiovascular system, between theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 302, 193–252. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.cma.2016.01.007>
 78. Ragulskis, K. M. (1988). *Vibromotors for Precision Microrobots*. CRC Press.
 79. Ramazani, A., Mukherjee, K., Quade, H., Prah, U., & Bleck, W. (2013). Correlation between 2D and 3D flow curve modelling of DP steels using a microstructure-based RVE approach. *Materials Science and Engineering A*, 560, 129–139. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.msea.2012.09.046>
 80. Rasiulis, K. (2007). *Plieninių antžeminių cilindrinų vertikaliųjų talpyklų sienelės geometrinių nuokrypių analizė ir vertinimas*. Daktaro disertacija. Vilnius: Vilniaus Gedimino technikos universitetas.
 81. Reymond, P., Merenda, F., Perren, F., Rüfenacht, D., & Stergiopoulos, N. (2009). Validation of a one-dimensional model of the systemic arterial tree. *American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology*, 297 (1), H208–H222. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1152/ajpheart.00037.2009>
 82. Rimavičius, V. (2010). *Synthesis and Coupling of Finite Element Models of Different Resolution Levels*. Daktaro disertacija. Kaunas: Kauno technologijos universitetas.
 83. Rodriguez-Martin, M., Lagueta, S., Gonzalez-Aguilera, D., & Arias, P. (2014). Cooling analysis of welded materials for crack detection using infrared thermography. *Infrared Physics and Technology*, 67, 547–554. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.infrared.2014.09.025>
 84. Rozenblum, G. (1985). Modal synthesis: generalization of Macneal's method. Theoretical basis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48 (2), 139–154.
 85. Singh, A., Eken, T., Mohanty, D. D., Saikia, D., Singh, C., & Ravi Kumar, M. (2016). Significant seismic anisotropy beneath southern Tibet inferred from splitting of direct S-waves. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 250, 1–11. Prieiga per doi:

<http://doi.org/10.1016/j.pepi.2015.11.001>

86. Smith, L. A., Dawes, P. J., & Galland, B. C. (2016). The use of pulse transit time in paediatric sleep studies: a systematic review. *Sleep Medicine Reviews*. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.smr.2016.11.006>
87. Smolarski, D. C. (2006). Diagonally-stripped matrices and approximate inverse preconditioners. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 186 (2), 416–431. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.cam.2005.02.012>
88. Sreejith, B., Jayaraj, K., Ganesan, N., Padmanabhan, C., Chellapandi, P., & Selvaraj, P. (2004). Finite element analysis of fluid-structure interaction in pipeline systems. *Nuclear Engineering and Design*, 227 (3), 313–322. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2003.11.005>
89. Stanionis, A. (2005). *Žemės plutos horizontaliųjų judesių Ignalinos atominės elektrinės tyrimas geodeziniais metodais*. Daktaro disertacija. Vilnius: Vilniaus Gedimino technikos universitetas.
90. Stavroulaki, M. E., Riveiro, B., Drosopoulos, G. A., Solla, M., Koutsianitis, P., & Stavroulakis, G. E. (2015). Modelling and strength evaluation of masonry bridges using terrestrial photogrammetry and finite elements. *Advances in Engineering Software*, 101, 136–148. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2015.12.007>
91. Taylor, C. A., Hughes, T. J. R., & Zarins, C. K. (1998). Finite element modeling of blood flow in arteries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 158 (1–2), 155–196. Prieiga per doi: [http://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)80008-X](http://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)80008-X)
92. Takenaka, M., Iino, T., Nagatani, A., & Hosokawa, Y. (2014). Nanoscale bending movement of biological micro-object induced by femtosecond laser impulse and its detection by atomic force microscopy. *Applied Physics Express*, 7 (8). Prieiga per doi: <http://doi.org/10.7567/APEX.7.087002>
93. Tavakol, M., Mahnama, M., & Naghdabadi, R. (2016). Shock wave sintering of Al/SiC metal matrix nano-composites: A molecular dynamics study. *Computational Materials Science*, 125, 255–262. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.commatsci.2016.08.032>
94. Van De Vosse, F. N., & Stergiopoulos, N. (2011). Pulse wave propagation in the arterial tree. *Annu. Rev. Fluid Mech*, 43, 467–99. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122109-160730>
95. Vappou, J., Hou, G. Y., Marquet, F., Shahmirzadi, D., Grondin, J., & Konofagou, E. E. (2015). Non-contact, ultrasound-based indentation method for measuring elastic properties of biological tissues using harmonic motion imaging (HMI). *Phys Med Biol*, 60 (7), 2853–2868. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1088/0031-9155/60/7/2853>
96. Vardoulis, O., Papaioannou, T. G., & Stergiopoulos, N. (2013). Validation of a novel and existing algorithms for the estimation of pulse transit time: advancing the accuracy in pulse wave velocity measurement. *Am J Physiol*, 304 (11), H1558–H1567. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1152/ajpheart.00963.2012>
97. Warszawski, A., Soares, D., & Mansur, W. J. (2008). A FEM–BEM coupling procedure to model the propagation of interacting acoustic–acoustic/acoustic–elastic waves through axisymmetric media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 (45–48), 3828–3835. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.cma.2008.03.005>

98. Wilkinson, J. H. (1965). The Algebraic Eigenvalue Problem. *Journal of Hospital Infection*, 12 (4), 331–333. Prieiga per doi: [http://doi.org/10.1016/0195-6701\(88\)90078-3](http://doi.org/10.1016/0195-6701(88)90078-3)
99. Wolf, J. P. & Song, C. (1997). Finite-element modelling of unbounded media. *Simulation Practice and Theory*. Prieiga per doi: [http://doi.org/10.1016/S0928-4869\(97\)84249-8](http://doi.org/10.1016/S0928-4869(97)84249-8)
100. Wright, L. G., Christodoulides, D. N., & Wise, F. W. (2015). Controllable spatiotemporal nonlinear effects in multimode fibres. *Nature Photonics*, 9 (5), 306–310. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1038/nphoton.2015.61>
101. Wu, S. R. (2006). Lumped mass matrix in explicit finite element method for transient dynamics of elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (44–47), 5983–5994. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.cma.2005.10.008>
102. Xiao, N., Humphrey, J. D., & Figueroa, C. A. (2013). Multi-scale computational model of three-dimensional hemodynamics within a deformable full-body arterial network. *Journal of Computational Physics*, 244, 22–40. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.09.016>
103. Žak, A., & Krawczuk, M. (2011). Certain numerical issues of wave propagation modelling in rods by the spectral finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47 (9), 1036–1046. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/j.finel.2011.03.019>
104. Zhang, L., Liu, K., Zhong, H., Zhang, J., Li, Y., & Fan, D. (2015). Effect of initial frequency chirp on Airy pulse propagation in an optical fiber. *Optics Express*, 23 (3), 2566. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1364/OE.23.002566>
105. Zienkiewicz, O. C. (1981). Finite element methods in thermal problems. *Numerical Methods in Heat Transfer*, 1, 1–25.
106. Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (2005). *The Finite Element Method*. Prieiga per doi: <http://doi.org/10.1016/B978-0-08-098356-1.00013-8>
107. Zuo, Z., Li, S., Zhai, C., & Xie, L. (2014). Optimal lumped mass matrices by minimization of modal errors for beam elements. *Journal of Vibration and Acoustics*, 136 (2), 21015. Retrieved from <http://dx.doi.org/10.1115/1.4026247>
108. Бараускас, Р. А., Кульветис, Г. П., & Рагульскис, К. М. (1984). *Расчет и проектирование вибродвигателей*. Машиностроение.

AUTORIAUS MOKSLINIŲ PUBLIKACIJŲ DARBO TEMA SĄRAŠAS

Straipsniai *Web of Science* duomenų bazės leidiniuose, turinčiuose citavimo indeksą

1. Kriščiūnas, A., & Barauskas, R. Highly Convergent Finite Elements with Diagonal Mass Matrix for Short Wave Pulse Propagation Simulation. *Information Technology and Control*. 2016, 45 (3), 308–320.
2. Barauskas, R., Kriščiūnas, A., & Blažauskas, T. A Finite Element Model in a Form of Structural Dynamic Equation for the Transient Analysis of Pressure in Pipelines. *Journal of Vibroengineering*. 2016, 18 (2), 1209–1226.

Straipsniai *Web of Science* duomenų bazės leidiniuose, neturinčiuose citavimo indeksą

1. Prikšaitis, J., Mažeika, L., Barauskas, R., Žukauskas, E., & Kriščiūnas, A. Influence of the Numerical Dispersion Effects in the Modelling of Ultrasonic Measurements. *Physics Procedia*. 2015, 70, 532–536.
2. Kriščiūnas, A., & Barauskas, R. Minimization of Numerical Dispersion Errors in Finite Element Models of Non-homogeneous Waveguides. In *ICIST*. 2013, October, 357–364.

Kitų tarptautinių duomenų bazių leidiniuose (periodiniuose leidiniuose ir vienkartinuose straipsnių rinkiniuose bei konferencijų pranešimų medžiagoje) paskelbti straipsniai

1. Kriščiūnas, A., Barauskas, R., Mažeika, L., & Fyleris, T. Minimization of Numerical Dispersion Errors in 2D Finite Element Models of Short Acoustic Wave Propagation. In *International Conference on Information and Software Technologies*. 2016, October, 745–752. Springer International Publishing.

Kituose recenzuojamuose mokslo leidiniuose paskelbti straipsniai

Konferencijų pranešimų medžiagoje paskelbti straipsniai

1. Patasius, M., Kriščiūnas, A., Rapalis, A., Barauskas, R., Janusauskas, A., Calneryte, D., & Neciunas, A. Exploration of Modelling of Blood Flow Through the Arterial Tree Using Phase Error Reducing Finite Element Model. *Biomedical Engineering*. 2016, 20 (1).

SL344. 2017-06-22, 11.25 leidyb. apsk. I. Tiražas 12 egz. Užsakymas 202.
Išleido Kauno technologijos universitetas, K. Donelaičio g. 73, 44249 Kaunas
Spausdino leidyklos „Technologija“ spaustuvė, Studentų g. 54, 51424 Kaunas