

Maksimumų su atsitiktiniu komponentių skaičiumi asimptotiniai tyrimai

Algimantas AKSOMAITIS (KTU)

el. paštas: aksoma@fmf.ktu.lt

1. Įvadas

Tarkime, turime dvi atsitiktinių dydžių sekas:

$\{X_j, j \geq 1\}$ – nepriklausomų su $P(X_j \leq x) = F(x)$

ir

$\{N_n, n \geq 1\}$ – įgyjančių tik sveikas neneigiamas reikšmes. Atsitiktiniai dydžiai X_j ir N_n su visais $j \geq 1$ ir $n \geq 1$ yra nepriklausomi.

Pažymėkime:

$$Z_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad Z_{N_n} = \max(X_1, \dots, X_{N_n})$$

Tarkime, kad yra tokia realiųjų skaičių seka $\{u_n, n \geq 1\}$, su kuria

$$\tau_n = n(1 - F(u_n)) \rightarrow \tau, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad (*)$$

kai $n \rightarrow \infty$.

Tada ([2])

$$P(Z_n \leq u_n) \rightarrow e^{-\tau}, \quad (1)$$

kai $n \rightarrow \infty$.

Jeigu dar

$$A_n(x) = P\left(\frac{N_n}{n} \leq x\right) \rightarrow A(x), \quad (2)$$

kai $n \rightarrow \infty$, tai ([4])

$$P(Z_{N_n} \leq u_n) \rightarrow \Psi(\tau); \quad (3)$$

čia

$$\Psi(\tau) = \int_0^\infty e^{-\tau x} dA(x).$$

Sąryšiai (1), (2) ir (3) apibūdina taip vadinamą perkėlimo teoremą.

Teorema (perkėlimo). *Jei yra (1) ir (2), tai yra ir (3) ([4]).*

Konvergavimo greičiai (1) sąryšyje yra tirti [2] ir [4] darbuose. Greičių įverčiai (3) sąryšyje, kai $u_n = u_n(x)$ ir $\tau = \tau(x)$ priklauso nuo parametro x , buvo pateikti [1] ir [3]. Ten normavimas yra arba tiesinis $u_n(x) = xb_n + a_n$ ($b_n > 0, a_n \in R$) arba – netiesinis. Apie konvergavimo greičių įverčius, esant (*) sąlygai, straipsnio autorius skaitė pranešimą 7-toje Vilniaus tikimybių teorijos ir matematinės statistikos konferencijoje. Yra pateiktos pranešimo tezės ([4]). Šiame straipsnyje mes praplečiame ir patiksliname tų tezių teiginius.

2. Rezultatų formuluotė ir įrodymas

Pateikiame teoremą, iš kurios išplaukia konvergavimo greičio įvertis perkėlimo teoremoje.

Teorema. *Tarkime, yra (*) ir (2) sąlygos ir $A(+0) = 0$. Tada*

$$|P(Z_{N_n} \leq u_n) - \Psi(\tau)| \leq |F^n(u_n) - e^{-\tau}| \alpha_n(\tau) + \tau \left| \int_0^\infty (A_n(nx) - A(x)) e^{-\tau x} dx \right|$$

čia

$$\alpha_n(\tau) = \int_0^\infty x \max \left(F^{n(x-1)}(u_n), e^{-\tau(x-1)} \right) dA_n(nx).$$

Įrodymas.

$$|P(Z_{N_n} \leq u_n) - \Psi(\tau)| \leq \left| P(Z_{N_n} \leq u_n) - Me^{-\frac{\tau N_n}{n}} \right| + \left| Me^{-\frac{\tau N_n}{n}} - \Psi(\tau) \right| = \Delta_{N_n}^{(1)} + \Delta_{N_n}^{(2)}.$$

Panaudoję pilnosios tikimybės formulę, gauname:

$$\begin{aligned} \Delta_{N_n}^{(1)}(\tau) &\leq \sum_{j \geq 1} \left| F^j(u_n) - e^{-\frac{\tau j}{n}} \right| P(N_n = j) \\ &= \sum_{j \geq 1} \left| (F^n(u_n))^{\frac{j}{n}} - e^{-\frac{\tau j}{n}} \right| P\left(\frac{N_n}{n} = \frac{j}{n}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Kadangi

$$\left| (F^n(u_n))^{\frac{j}{n}} - e^{-\frac{\tau j}{n}} \right| \leq \frac{j}{n} \max \left(F^{n(\frac{j}{n}-1)}(u_n), e^{-\tau(\frac{j}{n}-1)} \right) |F^n(u_n) - e^{-\tau}|,$$

tai iš (4), gauname:

$$\begin{aligned} \Delta_{N_n}^{(1)}(\tau) &\leq |F^n(u_n) - e^{-\tau}| \sum_{j \geq 1} \frac{j}{n} \max \left(F^{n(\frac{j}{n}-1)}(u_n), e^{-\tau(\frac{j}{n}-1)} \right) P \left(\frac{N_n}{n} = \frac{j}{n} \right) \\ &= |F^n(u_n) - e^{-\tau}| \int_0^\infty x \max \left(F^{n(x-1)}(u_n), e^{-\tau(x-1)} \right) dA_n(nx). \end{aligned} \quad (5)$$

Toliau:

$$\begin{aligned} \Delta_{N_n}^{(2)} &= \left| M e^{-\frac{\tau N_n}{n}} - \Psi(\tau) \right| \\ &= \left| \sum_{j \geq 1} e^{-\frac{\tau j}{n}} P(N_n = j) - \Psi(\tau) \right| = \left| \int_0^\infty e^{-\tau x} dA_n(nx) - \Psi(\tau) \right| \\ &= \left| \int_0^\infty e^{-\tau x} d(A_n(nx) - A(x)) \right| = \tau \left| \int_0^\infty (A_n(nx) - A(x)) e^{-\tau x} dx \right|. \end{aligned} \quad (6)$$

Iš (5) ir (6) gauname teoremos teiginį.

Tokiu būdu, turėdami konvergavimo greičių įverčius (1) ir (2) sąryšiuose

$$|P(Z_n \leq u_n) - e^{-\tau}| \leq \Delta_n^{(1)}(\tau)$$

ir

$$|A_n(nx) - A(x)| \leq \Delta_n^{(2)}(x),$$

gauname konvergavimo greičio įvertį perkėlimo teoremoje.

Pavyzdys. Tarkime, kad

$$P(X_j \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0, \quad x \geq 0$$

ir

$$P(N_n = j) = \frac{1}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Imdami $u_n = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{\tau}{n}$, gauname:

$$F^n(u_n) = \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n.$$

Tada

$$|F^n(u_n) - e^{-\tau}| \leq \frac{\tau^2 e^{-\tau}}{2(n-1)} \leq \frac{2e^{-2}}{n-1}.$$

Kadangi $A(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$ ir

$$\Delta_{N_n}^{(2)}(\tau) \leq \frac{\tau}{n} \int_0^\infty e^{-\tau x} dx = \frac{1}{n},$$

tai aproksimavimo paklaida

$$\left| P(Z_{N_n} \leq u_n) - \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \right|$$

perkėlimo teoremoje yra eilės $1/n$.

Literatūra

- [1] Я. Галамбош, *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, Москва, Наука (1984).
- [2] M.R. Leadbetter *et al.*, *Extremes and related properties of random sequences and processes*, New York, Heidelberg, Berlin (1986).
- [3] A. Aksomaitis, The nonuniform estimation of the convergence rate in the transfer theorem for extremal values, *Lith. Math. Journal*, 2, 219–223 (1987).
- [4] A. Aksomaitis, Rates of convergence in the transference theorems for the extrema values, *22nd. European Meeting of statisticians*, Vilnius, TEV, Abstracts, p.114 (1998).

Asymptotical analysis of maxima with a random number of component variables

A. Aksomaitis

Estimates of the convergence rate in the transference theorem are presented. They generalize and make more precise results obtained in [2] and [3].