

## Nepriklausomų atsitiktinių dydžių minimumo tankio konvergavimo greitis

Arvydas JOKIMAITIS (KTU)

el. paštas: aksoma@jmf.ktu.lt

Sakykime, kad  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  – nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių (a.d.) su pasiskirstymo funkcija  $F(x)$  ir tankiu  $F'(x) = p(x)$  seka.

Apibrėžkime a.d.

$$W_n = \min(X_1, \dots, X_{n+1}).$$

Sakykime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos  $\{\alpha_n, n \geq 1\}$  ir  $\{\beta_n > 0, n \geq 1\}$ , kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nF(\alpha_n + \beta_n x) = u(x) > 0.$$

Tuomet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n < \alpha_n + \beta_n x) = 1 - e^{-u(x)} = L(x) \quad (1)$$

visuose funkcijos  $L(x)$  tolydumo taškuose. Čia  $L(x)$  – neišsigimusi pasiskirstymo funkcija.

Tarkime, kad skirstinys  $L$  turi tankį  $L'$ , o skirstinys  $F$  tenkina Mizeso sąlygas (žr. [1], [3]). Tada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{W_n}(x) = L'(x), \quad (2)$$

čia

$$p_{W_n}(x) = (n+1)\beta_n p(\alpha_n + \beta_n x)(1 - F(\alpha_n + \beta_n x))^n$$

– a.d.  $(W_n - \alpha_n)/\beta_n$  tankis.

Šiame darbe gausime netolygų konvergavimo greičio įvertį (2) lygybėje. Pažymėsime, kad yra pasirodę keletas publikacijų, kuriose tiriamas maksimumo tankio konvergavimo greitis. Darbe [2] yra gautas tolygusis konvergavimo greičio įvertis lokalinėje maksimumo tankio teoremoje, darbe [1] konvergavimo greitis tirtas taikant metriką  $L_p$ , o darbe [4] yra gautas netolygusis konvergavimo greičio įvertis.

Pažymėkime

$$\begin{aligned} z_n(x) &= nF(\alpha_n + \beta_n x), \\ v_n(x) &= z_n(x) - u(x), \\ u_n(x) &= (n+1)\beta_n p(\alpha_n + \beta_n x). \end{aligned}$$

**Teorema.** Tarkime, tenkinamos (1) ir (2) lygtys. Visiems  $x$ , kuriems  $|v_n(x)| \leq \log 2$ , teisingas konvergavimo greičio įvertis

$$|p_{W_n}(x) - L'(x)| \leq u_n(x) \Delta_n(x) + (1 - L(x)) |u_n(x) - u'(x)|.$$

Čia

$$\Delta_n(x) = \frac{z_n^2(x) e^{-z_n(x)}}{2(n-1)} + (1 - L(x)) (|v_n(x)| + \theta v_n^2(x)), \quad 0 < \theta < 1.$$

*Irodymas.* Turime

$$\begin{aligned} |p_{W_n}(x) - L'(x)| &= |(n+1)\beta_n p(\alpha_n + \beta_n x) (1 - F(\alpha_n + \beta_n x))^n \\ &\quad - e^{-u(x)} u'(x)| \leq u_n(x) |(1 - F(\alpha_n + \beta_n x))^n - e^{-u(x)}| \\ &\quad + e^{-u(x)} |u_n(x) - u'(x)|. \end{aligned} \quad (3)$$

Turime

$$\begin{aligned} &|(1 - F(\alpha_n + \beta_n x))^n - e^{-u(x)}| \\ &\leq |(1 - F(\alpha_n + \beta_n x))^n - e^{-z_n(x)}| + |e^{-z_n(x)} - e^{-u(x)}| \end{aligned} \quad (4)$$

Kadangi

$$0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2 e^{-x}}{2(n-1)},$$

jei  $0 \leq x \leq n$ , tai

$$|(1 - F(\alpha_n + \beta_n x))^n - e^{-z_n(x)}| \leq \frac{z_n^2(x) e^{-z_n(x)}}{2(n-1)}. \quad (5)$$

Kadangi

$$e^{-y} - e^{-x} = e^{-x} \left( (x-y) + \theta (x-y)^2 \right), \quad 0 < \theta < 1,$$

jei  $x - y \leq \log 2$ , tai

$$\left| e^{-z_n(x)} - e^{-u(x)} \right| \leq e^{-u(x)} (|v_n(x)| + \theta v_n^2(x)), \quad 0 < \theta < 1, \quad (6)$$

jei  $|v_n(x)| \leq \log 2$ .

Atsižvelgę į (5) ir (6) nelygybes, iš (4) nelygybės gauname

$$\left| (1 - F(\alpha_n + \beta_n x))^n - e^{-u(x)} \right| \leq \Delta_n(x). \quad (7)$$

Iš (3) ir (7) nelygybių gauname teoremos įvertį.

Teorema įrodyta.

**Pavyzdys 1.** Tarkime, kad

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0.$$

Parinkę centravimo ir normavimo konstantas

$$\alpha_n = 0, \quad \beta_n = \frac{1}{n\lambda},$$

gauname

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(W_n < \frac{x}{\lambda n}\right) &= 1 - e^{-x}, \quad x > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} p_{W_n}(x) &= e^{-x}, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Gausime konvergavimo greičio įvertį (8) lygybėje.

Turime

$$\begin{aligned} \left(1 - F\left(\frac{x}{\lambda n}\right)\right)^n - e^{-x} &\equiv 0, \\ |u_n(x) - u'(x)| &= \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} - 1\right|. \end{aligned}$$

Iš čia išplaukia, kad

$$|p_{W_n}(x) - e^{-x}| \leq \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} - 1\right| e^{-x}.$$

**Pavyzdys 2.** Tarkime, kad

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad p(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 1.$$

Parinkę centravimo ir normavimo konstantas

$$\alpha_n = 1, \quad \beta_n = \frac{1}{n},$$

gauname

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n < 1 + x/n) &= 1 - e^{-x}, \quad x > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} p_{W_n}(x) &= e^{-x}, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Ivertinsime konvergavimo greitį (9) lygybėje. Turime

$$z_n(x) = \frac{nx}{n+x}, \quad v_n(x) = -\frac{x^2}{n+x}, \quad u_n(x) - u'(x) = \frac{n(n+1)}{(n+x)^2} - 1.$$

Iš čia gauname

$$|p_{W_n}(x) - e^{-x}| \leq \frac{n(n+1)}{(n+x)^2} \Delta_n(x) + e^{-x} \left| \frac{n(n+1)}{(n+x)^2} - 1 \right|,$$

čia

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= \left( \frac{nx}{n+x} \right)^2 \exp\left(-\frac{nx}{n+x}\right) \frac{1}{2(n-1)} \\ &\quad + e^{-x} \left( \frac{x^2}{n+x} + \theta \frac{x^4}{(n+x)^2} \right), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

## Literatūra

- [1] L. de Haan, S.I. Resnick, Local limit theorems for sample extremes, *Ann. Probab.*, **10**, 396–413 (1982).
- [2] E. Omey, Rates of convergence for densities in extreme value theory, *Ann. Probab.*, **16**, 479–486 (1988).
- [3] T.J. Sweeting, On domains of uniform local attraction in extreme value theory, *Ann. Probab.*, **13**, 196–205 (1985).
- [4] A. Aksoymaitis, A. Jokimaitis, Скорость сходимости для плотности распределения максимума независимых случайных величин, *Liet. Mat. Rink.*, **37**, 133–138 (1997).

## The convergence rate for density of minima of independent random variables

A. Jokimaitis

In this paper the nonuniform estimate of the convergence rate for density of minima of independent identically distributed random variables is obtained.