

Automatinio valdymo sistemos matematinio modelio tyrimas

Jonas RIMAS (KTU)

el. paštas: jonas.rimas@mf.ktu.lt

Nagrinėsime lygtį:

$$Dx(t) = B_0x(t) + B_1(t - \tau) + z(t); \quad (1)$$

čia D – apibendrinto diferencijavimo operatorius (taikomas apibendrintoms funkcijoms), $B_0 = -\kappa E$, E – vienetinė septintosios eilės matrica, κ – koeficientas, $B_1 = \frac{\kappa}{2}B$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$x(t)$ – ieškoma vektorinė funkcija, τ – pastovus vėlinimas, $z(t)$ – vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių sąlygų.

(1) lygtis yra ryšio tinklo tarpusavio sinchronizacijos sistemos, sudarytos iš 7-nių sujungtų į žiedą generatorių, matematinis modelis. Jos sprendinys gali būti užrašytas taip [1]:

$$x(t) \div \sum_{l=0}^L (A^{-1}B_1e^{-p\tau})^l A^{-1}Z(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau,$$

čia $A = pE - B_0$, $A^{-1} = \frac{1}{p + \kappa}E$, $Z(p) \div z(t)$.

Panaudoję (2) pažymėjimą, turime

$$x(t) \div \sum_{l=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{1}{(p + \kappa)^{l+1}} e^{-pl\tau} B^l Z(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau. \quad (3)$$

Iš (3) išplaukia

$$h(t) = (h_{ij}(t)) \div \sum_{l=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{1}{(p + \kappa)^{l+1}} e^{-p\tau} B^l, \quad 0 < t < (L+1)\tau; \quad (4)$$

čia $h(t)$ – synchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matrica, $h_{ij}(t)$ ($i, j = \overline{1,6}$) – i -tojo generatoriaus virpesio fazės reakcija į j -tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį.

Rasime pereinamųjų funkcijų išraiškas. Tuo tikslu apskaičiuosime matricos B l -tąjį laipsnį. Skaičiavimus atliksime pasinaudoję formule

$$B^l = T J^l T^{-1}; \quad (5)$$

čia J – matricos B Žordano forma. Matricas J ir T rasime, jei žinosime matricos B tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius. Tikrines reikšmes rasime išsprendę charakteristinę lygtį

$$|B - \lambda E| = 0. \quad (6)$$

Pažymėkime

$$D_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & & & 1 \\ 1 & a & 1 & & \\ & 1 & a & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & a & 1 \\ 1 & & & & 1 & a \end{vmatrix}, \quad \Delta_n(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & 1 & & 0 \\ & 1 & a & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & a & 1 \\ & & & 1 & a \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Tada

$$|B - \lambda E| = D_7(-\lambda). \quad (8)$$

Iš (7) išplaukia

$$D_n(a) = a\Delta_{n-1}(a) - 2\Delta_{n-2}(a) - 2(-1)^n \quad (9)$$

ir

$$\Delta_n(a) = a\Delta_{n-1}(a) - \Delta_{n-2}(a) \quad (\Delta_2(a) = a^2 - 1, \Delta_1(a) = a). \quad (10)$$

Išsprendę (10) skirtuminę lygtį, randame $\Delta_n(a) = U_n\left(\frac{a}{2}\right)$,

$$D_n(a) = U_n\left(\frac{a}{2}\right) - U_{n-2}\left(\frac{a}{2}\right) - 2(-1)^n; \quad (11)$$

čia $U_n(x)$ yra n -tojo laipsnio antrojo tipo Čebyševio daugianaris.

Pasinaudoję lygybe $T_n(x) = \frac{1}{2} [U_n(x) - U_{n-2}(x)]$ [3], turime

$$D_n(a) = 2 \left[T_n\left(\frac{a}{2}\right) - (-1)^n \right]; \quad (12)$$

čia $T_n(x)$ yra n -tojo laipsnio pirmojo tipo Čebyševio daugianaris.

Visi daugianario $T_n(x)$ nuliai yra intervale $[-1, 1]$ ir gali būti surasti naudojantis formule

$$x_{nk} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Tai išplaukia iš žinomos lygybės

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (14)$$

Remdamiesi (8), (12) ir (13) išraiškomis, užrašome (6) charakteristinės lygties šaknis (matricos B tikrines reikšmes) [3]:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2 \cos \frac{\pi}{7} \quad (l_1 = 2), & \lambda_3 &= -2 \cos \frac{3\pi}{7} \quad (l_3 = 2), \\ \lambda_5 &= 2 \cos \frac{2\pi}{7} \quad (l_5 = 2), & \lambda_7 &= 2 \quad (l_7 = 1); \end{aligned}$$

čia l_i yra tikrinės reikšmės λ_i kartotinumai.

Paprastajai tikrinei reikšmei λ_7 matricoje J atitiks viena Žordano ląstelė $J_1(\lambda_7)$. Kartotinei tikrinei reikšmei λ_i ($i = 1, 3, 5$) matricoje J atitiks dvi Žordano ląstelės $J_1(\lambda_i)$, nes rangas $r(B - \lambda_i E) = 5$ ir $n - r(B - \lambda_i E) = 2$, $i = 1, 3, 5$ (čia n – matricos B eilė) [2]. Įvertinę tai užrašome matricos B Žordano formą:

$$J = \begin{pmatrix} -a & & & & & & \\ & -a & & & & & \\ & & -b & & & & \\ & & & -b & & & \\ & & & & c & & \\ & 0 & & & & c & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix};$$

čia pažymėta

$$a = 2 \cos \frac{\pi}{7}, \quad b = 2 \cos \frac{3\pi}{7}, \quad c = 2 \cos \frac{2\pi}{7}. \quad (15)$$

Remdamesi lygybe $J = T^{-1}BT$, randame

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -a & -1 & -b & -1 & c & 1 \\ a & ac & b & -ab & -c & cb & 1 \\ -ac & -ac & ab & ab & -cb & -cb & 1 \\ ac & a & -ab & b & cb & -c & 1 \\ -a & -1 & -b & -1 & c & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} c & -b & -b & c & -a & 2 & -a \\ -a & c & -b & -b & c & -a & 2 \\ -a & c & c & -a & -b & 2 & -b \\ -b & -a & c & c & -a & -b & 2 \\ -b & -a & -a & -b & c & 2 & c \\ c & -b & -a & -a & -b & c & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Randame matricos B l -tąjį laipsnį ($l = 1, 2, 3, \dots$).

$$B^l = TJ^lT^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}; \quad (16)$$

čia

$$\begin{aligned} a_1(l) &= 2(-a)^l + 2(-b)^l + 2c^l + 2^l, \\ a_2(l) &= (-a)^l(-a) + (-b)^l(-b) + c^lc + 2^l, \\ a_3(l) &= (-a)^lc + (-b)^l(-a) + c^l(-b) + 2^l, \\ a_4(l) &= (-a)^l(-b) + (-b)^lc + c^l(-a) + 2^l. \end{aligned} \quad (17)$$

Įstatę (16) į (4) ir atlikę reikiamus pertvarkymus, randame sinchronizacijos sistemos perei-

namųjų funkcijų matricą

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_4 & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_4 & h_3 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_4 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ h_4 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_3 & h_4 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_2 \\ h_2 & h_3 & h_4 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \end{pmatrix};$$

čia

$$h_1(t) = e^{-\kappa t}(t) + g_1(t), \quad h_i(t) = g_i(t), \quad i = 2, 3, 4,$$

$$g_i(t) = \frac{1}{7} \sum_{l=1}^L a_i(l) \left(\frac{\kappa}{2}\right)^l \frac{(t-l\tau)^l}{l!} e^{-\kappa(t-l\tau)} 1(t-l\tau),$$

$$i = \overline{1, 4}, \quad 0 < t < (L+1)\tau;$$

$1(t)$ – vienietinė funkcija, $a_i(l)$ ($i = \overline{1, 4}$) – žr. (17) išraišką.

Gautos tikslios analizinės pereinamųjų funkcijų išraiškos gali būti panaudotos sistemos dinamikai tirti, jos statistinėms charakteristikoms skaičiuoti, perdavimo funkcijoms ir dažninėms charakteristikoms rasti.

Literatūra

- [1] J.Z. Rimas, Issledovanie dinamiki sistem vzaimnoj synchronizacii, *Radiotekhnika*, T32, 2, 3–9 (1977).
- [2] R. Horn, Ch. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge university press (1986).
- [3] S. Paškovskij, *Vyčislitelnyje primenenija mnogočlenov i riadov Čebyševa*, Maskva (1983).

Investigation of the mathematical model of the automatic control system

J. Rimas

The mathematical model of the mutual synchronisation system composed of 7 joined into a ring oscillators is investigated. The precise analytical expressions of the elements of the step responses matrix of the system are obtained.