



Kauno technologijos universitetas

Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Matematinių metodų taikymas edukaciniams procesams ir jų rezultatams tirti

Baigiamasis magistro studijų projektas

Gabija Pranaitytė

Projekto autorė

Doc. dr. Bronė Narkevičienė

Vadovė

Kaunas, 2025



Kauno technologijos universitetas

Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Matematinių metodų taikymas edukaciniams procesams ir jų rezultatams tirti

Baigiamasis magistro studijų projektas

Taikomoji matematika (6211AX006)

Gabija Pranaitytė

Projekto autorė

Doc. dr. Bronė Narkevičienė

Vadovė

Doc. dr. Mindaugas Kavaliauskas

Recenzentas

Kaunas, 2025



Kauno technologijos universitetas

Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Gabija Pranaitytė

Matematinių metodų taikymas edukaciniams procesams ir jų rezultatams tirti

Akademinio sąžiningumo deklaracija

Patvirtinu, kad:

1. baigiamąjį projektą parengiau savarankiškai ir sąžiningai, nepažeisdama(s) kitų asmenų autoriaus ar kitų teisių, laikydamasi(s) Lietuvos Respublikos autorių teisių ir gretutinių teisių įstatymo nuostatų, Kauno technologijos universiteto (toliau – Universitetas) intelektinės nuosavybės valdymo ir perdavimo nuostatų bei Universiteto akademinės etikos kodekse nustatytų etikos reikalavimų;
2. baigiamajame projekte visi pateikti duomenys ir tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti teisėtai, nei viena šio projekto dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar elektroninių šaltinių, visos baigiamojo projekto tekste pateiktos citatos ir nuorodos yra nurodytos literatūros sąrašė;
3. įstatymų nenumatytų piniginių sumų už baigiamąjį projektą ar jo dalis niekam nesu mokėjęs (-usi);
4. suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo ar kitų asmenų teisių pažeidimo faktui, man bus taikomos akademinės nuobaudos pagal Universitete galiojančią tvarką ir būsiu pašalinta(s) iš Universiteto, o baigiamasis projektas gali būti pateiktas Akademinės etikos ir procedūrų kontrolieriaus tarnybai nagrinėjant galimą akademinės etikos pažeidimą.

Gabija Pranaitytė

Patvirtinta elektroniniu būdu

Pranaitytė, Gabija. Matematinų metodų taikymas edukaciniams procesams ir jų rezultatams tirti. Magistro studijų baigiamasis projektas / vadovė doc. dr. Bronė Narkevičienė; Kauno technologijos universitetas, Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas.

Studijų kryptis ir sritis (studijų krypties grupė): Taikomoji matematika (Matematikos mokslai).

Reikšminiai žodžiai: edukaciniai procesai, pasiekimai, matematinis raštingumas, antrinė duomenų analizė, matematinis modeliavimas.

Kaunas, 2025. 61 p.

Santrauka

Švietimo tyrimų rezultatų paaiškinamumui tobulinti ir įrodymais pagrįstai švietimo politikai formuoti reikalingi matematiniai metodai, galintys atsižvelgti į sudėtingas socialinių sistemų ir edukacinių procesų kintamųjų sąveikas. Vis dėlto trūksta griežtos, teoriškai ir matematiškai pagrįstos edukacinių procesų rezultatų – mokinių pasiekimų – analizės. Todėl šio tyrimo tikslas – sukurti matematinį modelį, galintį kiekybiškai paaiškinti edukacinių procesų įtaką mokinių matematikos pasiekimams. Tyrimo uždaviniai yra atlikti mokslinės literatūros, kurioje tyrinėjami veiksniai, turintys įtakos aukštiems matematikos pasiekimams, analizę; susisteminti švietimo tyrimuose naudojamus matematinius metodus pasiekimų modeliavimui; kiekybiškai įvertinti trūkstamų reikšmių užpildymo metodus pagal jų įtaką statistinių išvadų patikimumui ir pagrįstumui modeliuojant matematikos pasiekimus; sukurti matematinį modelį, atskleidžiantį sąryšį tarp edukacinių procesų ir matematikos pasiekimų; interpretuoti modelio parametrus ir metodologinio išplėtimo galimybes. Tyrime naudojami mokslinės literatūros analizės ir antrinės tarptautinio tyrimo PISA 2022 m. Lietuvos mokinių pasiekimų duomenų analizės metodai. Dėl PISA tyrimo dizaino savybių esminė duomenų analizės dalis yra trūkstamų reikšmių užpildymas. Tarp trūkstamų reikšmių užpildymo metodų daugkartinis priskyrimas grandininėmis lygtimis (MICE) geriausiai atspindėjo pradinis duomenų pasiskirstymus. Atlikus matematinį modeliavimą buvo sukurtas modelis aprašantis sąsają tarp matematikos pasiekimų ir jiems statistiškai reikšmingą įtaką turinčių veiksnių. Modelyje naudojami kintamieji, atrinkti pagal Gagné diferencijuotą gabumo-talentingumo modelį. Pagal sukurtą aiškinamąjį matematinį modelį, nustatyta, kad mokinio lygmens veiksniai, visų pirma ekonominė, socialinė ir kultūrinė padėtis bei matematikos saviveiksmingumas, yra pagrindiniai matematikos pasiekimams įtaką turintys veiksniai, o mokyklos lygmens poveikis taip pat pasirodė esąs reikšmingas, ypač minėtų veiksnių atžvilgiu. Pagrindinis empirinio tyrimo modelio apribojimas – COVID-19 pandemijos duomenų rinkimo kontekstas, todėl tolimesni tyrimai galėtų modelį patikrinti pritaikant jį, pavyzdžiui, PISA 2025 m. duomenims ar tobulinant jo metodologiją taikant kitokius matematinius metodus jo kūrimo procese.

Pranaitytė, Gabija. Application of Mathematical Methods for Researching Educational Processes and Their Outcomes. Master's Final Degree Project / supervisor assoc. prof. dr. Bronė Narkevičienė; Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Kaunas University of Technology.

Study field and area (study field group): Applied Mathematics (Mathematical Sciences).

Keywords: Educational processes, achievement, mathematical literacy, secondary data analysis, mathematical modelling.

Kaunas, 2025. 61 p.

Summary

Improving educational research and evidence-based education policymaking requires mathematical tools that can take into account the complex interactions between social systems and educational process variables. However, there is a lack of rigorous, theoretically and mathematically sound analysis of educational process outcomes – student achievement. Therefore, the aim of this research is to create a mathematical model capable of quantitatively explaining the influence of educational processes on students' mathematics achievement. The research objectives are: to analyze scientific literature exploring factors influencing high mathematics achievement; to systematize mathematical methods used in educational research for achievement modeling, highlighting their advantages and disadvantages; to quantitatively evaluate missing data imputation methods based on their influence on the reliability and validity of statistical inferences when modeling mathematics achievement; to create a mathematical model revealing the relationship between educational processes and mathematics achievement; to interpret the model parameters and possibilities for methodological expansion. The research employs methods of scientific literature analysis and secondary analysis of the PISA 2022 Lithuanian student achievement data. Due to the design features of the PISA study, a crucial part of the data analysis is missing data imputation. Among the missing data imputation methods, multiple imputation by chained equations (MICE) best reflected the original data distributions. Following mathematical modeling, a model was created describing the relationship between mathematics achievement and statistically significant influencing factors. The model uses variables selected according to Gagné's Differentiated Model of Giftedness and Talent. According to the developed explanatory mathematical model, it was determined that student-level factors, primarily economic, social, and cultural status, and mathematics self-efficacy, are the main factors influencing mathematics achievement, while school-level effects also proved to be significant, especially for the aforementioned factors. The main limitation of the empirical research model is the context of data collection during the COVID-19 pandemic; therefore, further research could test the model by applying it, for example, to PISA 2025 data or by improving its methodology using different mathematical methods in its development process.

Turinys

Lentelių sąrašas	7
Paveikslų sąrašas	8
Įvadas	9
1. Mokslinės literatūros apžvalga.....	11
1.1. Švietimo tyrimų paradigmu, teorijos ir matematinio modeliavimo sąsaja.....	11
1.1.1. Kiekybinis modeliavimas švietimo tyrimuose	11
1.1.2. Edukacinių procesų konstruktai: konceptualizacija ir operacionalizacija.....	12
1.1.3. Pagrindiniai pasiekimų modeliai ir veiksniai, turintys įtakos pasiekimams.....	13
1.2. Didelės apimties švietimo duomenų matematinės savybės.....	16
1.2.1. Pagrindinės švietimo duomenų rinkinių charakteristikos.....	16
1.2.2. Hierarchinės struktūros ir priklausomybės	17
1.2.3. Matavimo modeliai ir latentiniai kintamieji	18
1.2.4. Trūkstamos reikšmės duomenyse ir jų šalinimas	19
1.3. Matematiniai modeliai edukacinių procesų rezultatų modeliavimui.....	20
1.3.1. Ryšių modeliavimo metodai ir jų išplėtimas	20
1.3.2. Mašininio mokymosi ir dirbtinio intelekto metodai.....	22
1.3.3. Pažangūs pasiekimų matematiniai modeliai.....	22
1.3.4. Matematiniai metodai, naudojami didelės apimties švietimo duomenų rinkiniams.....	24
1.4. Apibendrinimas	27
2. Duomenys ir tyrimo metodai.....	28
2.1. Tyrimo duomenys ir imtis	28
2.2. Kintamieji ir jų sąveikos.....	31
2.3. Matematinio modeliavimo procesas	34
2.3.1. Trūkstamų reikšmių užpildymas	34
2.3.2. Matematinis pasiekimų modeliavimas	36
2.4. Programinė įranga	39
3. Tyrimo rezultatai ir jų aptarimas	40
3.1. Trūkstamų duomenų reikšmių užpildymo metodų lyginamosios analizės rezultatai.....	40
3.2. Matematinis pasiekimų modelis	42
3.3. Matematinio pasiekimų modelio parametrų įvertinimas ir prielaidų tikrinimo rezultatai	44
Išvados	51
Literatūros sąrašas	52
Priedas. Kintamųjų, įtrauktų į matematinį pasiekimų modelį, aprašymas	62

Lentelių sąrašas

1 lentelė. Dažniausiai naudojami metodai 2000-2018 m. PISA tyrime, adaptuota pagal [102]	25
2 lentelė. Tyrimų, publikuotų <i>Web of Science</i> , naudojančių PISA 2022 duomenis, apibendrinimas	25
3 lentelė. Sluoksniavimo kintamieji Baltijos šalims PISA 2022 m. tyrime [65]	29
4 lentelė. Sąveikos, turinčios įtaką mokinių matematikos pasiekimams ir jų pagrindimas arba hipotetinis poveikis.....	33
5 lentelė. Pagrindiniai statistiniai įverčiai ir regresijos koeficientai po užpildymo	40
6 lentelė. Kategorinių kintamųjų skaitinės charakteristikos po trūkstamų reikšmių užpildymo	41
7 lentelė. Pradiniai modelio kintamieji	43
8 lentelė. Galutiniai modelio reikšmingi kintamieji po žingsninės regresijos, $p < 0.05$	44
9 lentelė. Top 3 didžiausi ir mažiausi ESCS ir MATHEFF kintamųjų kryčių koeficientai pagal mokyklas.....	45
10 lentelė. Galutinio modelio koeficientų reikšmės.....	45

Paveikslų sąrašas

1 pav. Miuncheno gabumo modelis, adaptuota iš [29]	14
2 pav. Diferencijuotas gabumo-talentingumo modelis (DMGT), adaptuota iš [35]	14
3 pav. Kintamųjų <i>PV1MATH</i> , ..., <i>PV10MATH</i> vidurkio histograma.....	31
4 pav. Mišrių tiesinių modelių poveikis grupėje (fiksiuoti efektai; bendra regresijos kreivė), ir tarp grupių (atsitiktiniai efektai; kreivės skirtingose grupėse) [127].....	37
5 pav. ANXMAT kintamojo pasiskirstymas pradiniuose duomenyse ir viename pilnai užpildytame duomenų rinkinyje naudojant skirtingus trūkstamų reikšmių užpildymo metodus.....	41
6 pav. Modelio liekamosios paklaidos	47
7 pav. Modelio liekamųjų paklaidų tankis	48
8 pav. Mokyklos laisvojo nario liekamųjų paklaidų grafikai: histograma ir Q-Q grafikas	48
9 pav. ESCS liekamųjų paklaidų grafikai: histograma ir Q-Q grafikas.....	49
10 pav. MATHEFF liekamųjų paklaidų grafikai: histograma ir Q-Q grafikas.....	49

Įvadas

Socialiniams mokslams, įskaitant švietimo tyrimus, būdingas sudėtingumas kyla iš dinamiškos kultūrinių, ekonominių ir socialinių kintamųjų sąveikos ir nuolatinės visuomenės ir individo raidos. Socialinės sistemos pasižymi dideliu kintamumu įvairiomis aplinkybėmis ir laikotarpiais, o toks kintamumas gali trukdyti patikimai formuluoti ir patvirtinti hipotezes, pagrįsti intervencijas ir jas nuosekliai taikyti praktikoje. Dėl tokio kompleksiško reikia taikyti ir kurti sudėtingesnius matematinius metodus, kuriais būtų galima įvertinti daugialypę edukacinių procesų kintamųjų sąveiką, ypač atsižvelgiant į tai, kad švietimo politikoje vis populiarėja duomenimis pagrįstų sprendimų priėmimas [1–3].

Švietimo duomenų savitumas ir švietimo tyrimų specifika gali apriboti įprastinių duomenų analizės metodų taikymą ar veiksmingumą šioje srityje [4], todėl švietimo duomenų analizės galimybių plėtrai reikalingas tarpdisciplininis požiūris. Tam reikia neapsiriboti vien tik duomenimis pagrįstais metodais, tačiau integruoti kokybines išvalgas, socialinių mokslų (pvz., sociologijos ar psichologijos) teorinius modelius ir taikyti kiekybinius metodus, pritaikytus konkrečioms švietimo problemoms spręsti ir duomenų struktūroms įvertinti.

Plačiai nagrinėjama švietimo tyrimų tema – mokinių matematikos pasiekimai, kurie yra loginio mąstymo pagrindas. Edukacinių procesų, skatinančių aukštus matematikos pasiekimus, tyrimas yra svarbus kuriant tikslines intervencines priemones ir formuojant veiksmingą švietimo politiką. Matematikos pasiekimai matuojami įvairiomis priemonėmis, pavyzdžiui, akademiniiais pažymiais, karjeros pasirinkimais ir plataus masto tarptautiniais vertinimais, o pastariuosiuose yra vertingos reprezentatyvios imtys aiškinamajai analizei. Tačiau dėl sudėtingos šių tarptautinių tyrimų struktūros ir dizaino dažnai tenka taikyti specializuotus analizės metodus.

Šio **projekto tikslas** – sukurti matematinį modelį, galintį kiekybiškai paaiškinti edukacinių procesų įtaką mokinių matematikos pasiekimams.

Tiksliui pasiekti keliama tokie **uždaviniai**:

1. atlikti mokslinės literatūros, kurioje tyrinėjami veiksniai, turintys įtakos aukštiems matematikos pasiekimams, analizę;
2. susisteminti švietimo tyrimuose naudojamus matematinius metodus pasiekimų modeliavimui;
3. kiekybiškai įvertinti trūkstančių reikšmių užpildymo metodus pagal jų įtaką statistinių išvadų patikimumui ir pagrįstumui modeliuojant matematikos pasiekimus;
4. sukurti matematinį modelį, atskleidžiantį sąryšį tarp edukacinių procesų ir matematikos pasiekimų;
5. interpretuoti modelio parametrus ir metodologinio išplėtimo galimybes.

Tyrimo objektas: Veiksniai, turintys įtakos mokinių matematikos akademiniams pasiekimams.

Tyrimo metodai:

- mokslinės literatūros analizė;
- antrinė duomenų analizė.

Tyrimo naujumas ir originalumas grindžiamas tarpdisciplininio požiūriu į matematikos, pasiekimų modeliavimą, atlikta pasiekimų matematinių modelių teorine analize, kintamųjų atsirinkimu remiantis teoriniu aukštų pasiekimų modeliu, ir statistinio modelio, atsižvelgiančio į turimų švietimo

duomenų ypatumus, sukūrimą. Tyrime pateikiama išsami, matematiniais metodais pagrįsta mokinių matematikos pasiekimus lemiančių veiksnių PISA tyrimo duomenų analizė. Ji atlikta remiantis naujausiais reprezentatyviais Lietuvos mokinių duomenimis. Atliktas tyrimas prisideda užpildant spragą, pastebimą nacionaliniuose švietimo tyrimuose, kuriuose daugiausia dėmesio skiriama aprašomajai statistikai arba atskiriems pasiekimų aspektams.

Projekto struktūra. Baigiamąjį projektą sudaro įvadas, trys skyriai: mokslinės literatūros apžvalga, tyrimo duomenys ir metodai, tyrimo rezultatai ir jų aptarimas bei išvados. Mokslinės literatūros apžvalgoje pateikiama sąvokų, naudojamų švietimo tyrimuose, apžvalga, išryškinama matematinių metodų taikymo nauda bei aptariami matematinio modeliavimo metodai. Duomenų ir metodų dalyje aptariami naudojami duomenys ir jų specifika bei empiriniame tyrime pasirinkti naudoti matematiniai metodai. Rezultatų skyrelyje pristatomas modelis, aprašantis sąsają tarp matematikos pasiekimų ir jiems statistiškai reikšmingą įtaką turinčių veiksnių bei empirinio tyrimo rezultatai.

1. Mokslinės literatūros apžvalga

1.1. Švietimo tyrimų paradigų, teorijos ir matematinio modeliavimo sąsaja

1.1.1. Kiekybinis modeliavimas švietimo tyrimuose

Švietimo tyrimuose nagrinėjama daug sričių, tarp jų: mokymas(is), edukacinės technologijos, ugdymo psichologija, socialinis ir emocinis mokymasis, švietimo politika, švietimo ekonomika, specialusis ugdymas, įtraukusis ugdymas, vertinimas ir įsivertinimas, mokymo programos, mokytojų rengimas ir profesinis tobulėjimas, ankstyvosios vaikystės ugdymas, suaugusiųjų švietimas ir mokymasis visą gyvenimą, STEM švietimas, kalbų ir raštingumo ugdymas, menų ugdymas, švietimo vadyba ir administravimas ir kt. [5, 6]. Esminis šias įvairias sritis jungiantis elementas yra *edukaciniai procesai* – veiksmų, vedančių prie išsilavinimo įgijimo, visuma [7].

Pagal duomenų surinkimo ir analizės metodologiją švietimo tyrimus galima suskirstyti į tris tipus [8, 9]:

1. **Kokybinis tyrimas** – tipas, kuriam būdingas lankstus ir duomenimis paremtas tyrimo metodas, nestruktūrotų duomenų naudojimas, subjektyvumo vaidmens pabrėžimas tyrimo procese, išsamus kelių natūraliai susiklosčiusių atvejų tyrimas ir verbalinių, o ne statistinių metodų taikymas [10]. Kokybinių tyrimų pavyzdžiai yra atvejo tyrimas [11], etnografinis tyrimas [9]. bei istorinis, dokumentinis tyrimas [8].
2. **Kiekybinis tyrimas** – tipas, kuriame tyrimų rezultatai (duomenys) apibendrinami naudojant skaičius [9]. Kiekybinių tyrimų pavyzdžiai yra aprašomasis, eksperimentinis priežastinis-palyginamasis, koreliacinis tyrimai [8, 9],
3. **Mišrių metodų tyrimas** (angl. *Mixed Methods Research*) – kokybinių ir kiekybinių tyrimų tipų derinimas ir naudojimas kartu, remiantis prielaida, kad abiejų tipų taikymas kartu leidžia geriau suprasti tyrimo(-ų) klausimus ir problematiką nei bet kuris iš šių metodų atskirai [8].

Matematiniai metodai yra daugiausia taikomi kiekybiniuose tyrimuose. Kiekybiniai švietimo tyrimai tradiciškai grindžiami pagrindiniais statistiniais metodais, pirmiausia hipotezių tikrinimu, tiesine regresine analize ir jų neparametriniais atitikmenimis [12]. Švietimo mokslinių tyrimų vadovėliuose [8, 9] daugiausia dėmesio skiriama šiems pagrindiniams metodams, kurie, nors ir yra būtini, dažnai pasirodo nepakankami sudėtingiems švietimo aplinkoje stebimiems reiškiniams atskleisti – socialinių mokslų sistemos retai būna deterministinės, o sąvokos, naudojamos reiškiniams apibrėžti, dažnai nėra objektyviai ir tiksliai apibrėžtos arba turi abstrakčių bruožų [13]. Šį metodologinį iššūkį pabrėžia maži švietimo tyrimuose esantys regresijos modelių efekto dydžiai palyginus su kitų disciplinų modeliais [12]. Nepaisant to, matematinio modeliavimo metodus socialiniuose moksluose galima suskirstyti į tris kategorijas: teorija grįsti modeliai, duomenimis grįsti modeliai, ir skaičiavimais grįsti modeliai [13]. *Teorija grįsti modeliai* – modeliai, kuriuose daromos teorija ar praktine patirtimi pagrįstos prielaidos apie kintamuosius ir tarp jų esančius ryšius, tuomet sudaromas modelis ir įvertinami jo skaitiniai parametrai. *Duomenimis grįsti modeliai* – modeliai, kuriuose sąryšiai tarp kintamųjų konstruojami naudojant statistinius ar skaičiavimo metodus pagal tam tikrus duomenis. *Skaičiavimais grįsti modeliai* – modeliai, kuriuose sąryšiai tarp kintamųjų nėra apibendrinami į agreguotą paaiškinimą, bet kiekvienas individas ar duomuo modeliuojamas atskirai. Geriausiai žinomi skaičiavimais grįsti modeliai yra agentų modeliai (angl. *Agent-Based Modelling*, ABM).

Kiekviena iš šių modeliavimo paradigų turi privalumų. Teorija grįsti modeliai naudingi tikrinant pripažintų teorijų ar koncepcinių sistemų hipotezes empiriškai. Tačiau pastaruoju metu dideliems

duomenų rinkiniams analizuoti daugiausia naudojami duomenimis grįsti modeliai, empirinei analizei naudojantys statistinius metodus arba skaičiavimais grįsti modeliai, siūlantys būdą įtraukti individualumą į analizę. Nors skaičiavimų modeliai gali gerai atskleisti sudėtingus reiškinius iš mikro-lygmens taisyklių, dėl iššūkių, susijusių su jų teorine specifikacija ir griežtu empiriniu patvirtinimu [13], jie gali būti mažiau tinkami uždaviniams, orientuotiems į dėsningumą ir tendencijų analizę, spręsti. Kita vertus, duomenimis pagrįsti metodai dažnai yra pamatas praktiniams sprendimams priimti ir intervencijoms taikyti. Todėl pagrindinis šio magistro baigiamojo projekto dėmesys yra skiriamas jiems. Empiriškai pagrįsti apibendrinimai, gauti atlikus duomenų analizę (-es), gali tapti pagrindu parametrizuojant tikroviškesnius agentais grįstus modelius [14].

1.1.2. Edukacinių procesų konstruktai: konceptualizacija ir operacionalizacija

Apibūdinant reiškinius socialiniuose moksluose svarbios dvi apibrėžtys – sąvoka ir konstruktas. *Sąvoka* (angl. *concept*) apibūdina apibendrintas objektų, įvykių, žmonių savybes. *Konstruktas* (angl. *construct*) yra dar abstraktesnė apibrėžtis, skirta paaiškinti ar identifikuoti tam tikrą reiškinį. Vienadimensiniai konstruktai yra sąvokos, o daugiadimensiniai konstruktai yra kelių susijusių sąvokų kombinacija (pvz., rašytiniai komunikaciniai gebėjimai yra daugiadimensinis konstruktas, apimantis žodyną, sintaksę, skyrybą ir kt.). Matematinis modeliavimas švietimo srityje remiasi tiksliai apibrėžtais kintamaisiais. Kai kuriuos kintamuosius, pavyzdžiui, amžių ar lankomumą, galima tiesiogiai išmatuoti, tačiau daugelis pagrindinių švietimo sąvokų ir (ar) konstrukčių, pavyzdžiui, mokinių motyvacija, pasitikėjimas savimi ar kūrybinis mąstymas, yra abstraktūs ir jų negalima tiesiogiai stebėti. Norint pereiti nuo abstrakčių idėjų iki išmatuojamų duomenų, reikia dviejų dedamųjų: konceptualizavimo ir operacionalizavimo.

Konceptualizavimas – tai pradinis abstrakčios sąvokos ar konstrukto apibrėžimo etapas, suteikiant jam tikslią teorinę reikšmę [15]. Jis apima pagrindinės idėjos ir (ar) konstrukto dimensijų išreiškimą. Pavyzdžiui, apibrėžiant motyvaciją gali būti įtraukiamos tokios dimensijos kaip akademinis saviveiksmingumas, akademinė savivoka, susidomėjimas, tikslai ir t.t. Tačiau nemažas iššūkis kyla dėl to, kad skirtingos teorijos arba skirtingi tyrėjai gali skirtingai suprasti ir apibrėžti tą pačią sąvoką ar konstruklą. Pavyzdžiui, tyrime [16], kuriame buvo analizuojama gerai žinoma motyvacijos, fiziologinės psichologijos, gyvūnų elgsenos ir įvadinės psichologijos literatūra, nustatytos 98 skirtingos motyvacijos apibrėžtys.

Kai konstruktas yra aiškiai apibrėžiamas, kitas žingsnis yra *operacionalizavimas*, kurio metu abstrakti apibrėžtis paverčiama konkrečiais, išmatuojamais kintamaisiais [17] – indikatoriais. Šis procesas iš teorinio lygmens persikelia į empirinį [17], nurodant tikslus įrankius, priemones ar rodiklius, naudojamus konstruktui kiekybiškai įvertinti [18, 19]. Pavyzdžiui, akademinio saviveiksmingumo (angl. *self-efficacy*) dimensija gali būti operacionalizuojama naudojant tokius teiginius kaip „žinau, kad galiu išlaikyti egzaminą, jei per semestrą įdėsiu pakankamai darbo“, „paprastai man pavyksta išspręsti sudėtingas akademines užduotis, jei pakankamai stengiuosi“ [20] ir kt. naudojant Likerto skalę. Pagrindinis operacionalizavimo tikslas yra sumažinti matavimo paklaidą [21], t.y. neatitikimą tarp stebimo matavimo ir teorinio „tikrojo rezultato“ konstrukto. Kokybiškas operacionalizavimas, užtikrinantis validumą (matas tiksliai atspindi numatytą konstruklą) ir patikimumą (matas duoda pastovius rezultatus), yra svarbus empirinių tyrimų rezultatų kokybei ir pakartojamumui [22].

Tačiau abstrakčių konstrukčių, ypač paplitusių švietimo ir socialiniuose moksluose, matavimas turi iššūkių. Dažnai sunku teigti, kad egzistuoja vienintelis, galutinis „tikrasis rezultatas“ sudėtingoms

sąvokoms dėl joms būdingo abstraktumo [21], todėl konstrukto matavimo elementų tikslumas ir formuluotės turi didelę įtaką atsakymams ir tikslumui. Dažnai pasitaikanti problema yra tai, kad tam tikros teiginių formuluotės gali būti netinkamos – per sudėtingai ir (ar) neaiškiai pateiktos, dviprasmiškos, jautrios šališkumui.

Operacionalizavimo metu gali atsirasti matavimo paklaidos. Vienas iš paklaidų šaltinių yra skalės (intervalų, santykių, tvarkos ir vardų) pasirinkimas, nes skalė turi įtakos renkant statistinius metodus duomenų analizei. Nors dėl vienodų intervalų kiekybinei analizei labiausiai tinka intervalinės arba santykinės skalės, švietimo ir socialinių mokslų tyrimuose dažnai naudojamos tvarkos skalės (pvz., Likerto skalė). Pagrindinis trūkumas joje yra tas, kad atstumai tarp kategorijų tvarkos skalėje gali būti nevienodi, tačiau statistinė analizė dažnai atliekama darant prielaidą, kad jie yra vienodi. Vis dėlto, P. Davidsson'as [21] siūlo neteikti pirmenybės statistikai priimtinesnei intervalei ar santykių skalėms, jei jos neturi turinio pagrįstumo (t.y. svarbos konstruktui) – svarbiausia sumažinti bendrą matavimo paklaidą. Dar viena matavimo problema yra netolygus validumas (matavimo invariantiškumas), t.y. kad ta pati matavimo priemonė gali nevienodai gerai atspindėti tą patį reiškinių ar konstrukto visose aplinkybėse, pvz., skirtinguose regionuose, šalyse, socialiniuose ar kultūriniuose kontekstuose. Dėl šių skirtumų pastebėti rezultatų skirtumai gali būti ne tikrieji esminiai skirtumai, o metodo trūkumai [21].

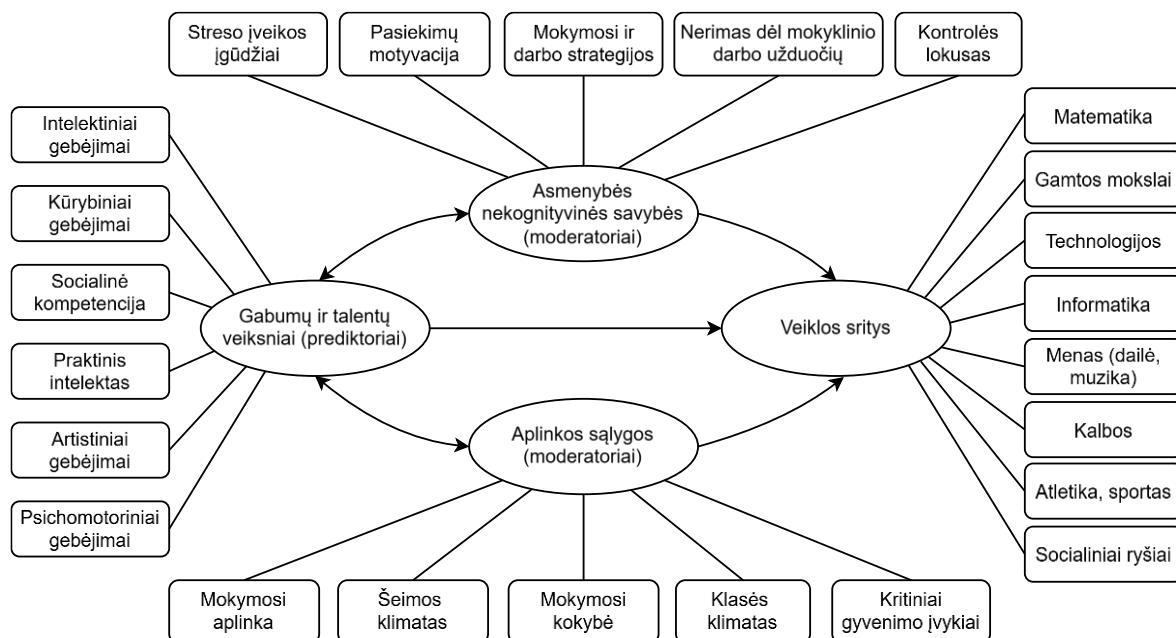
1.1.3. Pagrindiniai pasiekimų modeliai ir veiksniai, turintys įtakos pasiekimams

Viena iš plačiausiai tyrinėjamų švietimo temų yra akademiniai pasiekimai [5, 23–25], kurie gali būti laikomi edukacinių procesų rezultatu. J. Hattie [26], apibendrinęs 2100 meta-analizių, susijusių su tuo, kokie veiksniai turi įtakos akademiniams pasiekimams, rado virš 350 reikšmingų veiksnių. Norint ištirti tokį platų veiksnių spektrą, svarbus tvirtas teorinis pagrindas. Pasiekimų teorijos, kuriose nagrinėjami sąryšiai tarp konstrukto, padeda tą padaryti atrenkant pagrindinius kintamuosius ir paaiškinant jų sąveikos mechanizmus.

Tiriant (aukštus) pasiekimus, verta atsižvelgti į konkrečias potencialo formas, kurios gali lemti tokius rezultatus. Daugelis mokslininkų mano, kad pirmiausia aukštus pasiekimus nulemia *gabumai*. Gabumas – tai individo nepaprastų pasiekimų vienoje ar keletoje sričių potencialas [61, p. 9], kuris gali pasireikšti arba nepasireikšti pastebimais rezultatais. Gabumai yra pasiekimų pagrindas, iš kurio dėl vidinių savybių ir aplinkos poveikio laikui bėgant vystosi talentas(-ai). Gerai žinomi yra F. Gagné diferencijuotas gabumo-talentingumo modelis (angl. *Differentiated Model of Giftedness and Talent*, DMGT) [28], antroji šio modelio versija DMGT 2.0 bei integracinis talentų ugdymo modelis (angl. *Integrative Model of Talent Development*, IMTD), K. Heller'io [27, 29, 30] Miuncheno modelis (angl. *Munich Model of Giftedness*). Tačiau aukšti pasiekimai gali būti stipriai nulemiami tam tikrų neįgimtų veiksnių. Tiriant pasiekimus matematikoje, plačiai nagrinėjamos motyvacijos, saviveiksmingumo (angl. *self-efficacy*) ir mokymo(si) aplinkos teorijos [31–34]. Kadangi šiame baigiamajame projekte tiriami pasiekimai ir jiems įtaką turintys veiksniai, toliau apžvelgiami du modeliai – Miuncheno gabumo modelis ir diferencijuotas gabumo-talentingumo modelis – kuriuose aiškiai aptariamas gabumų, aplinkos ir pasiekimų priežastinis ryšys.

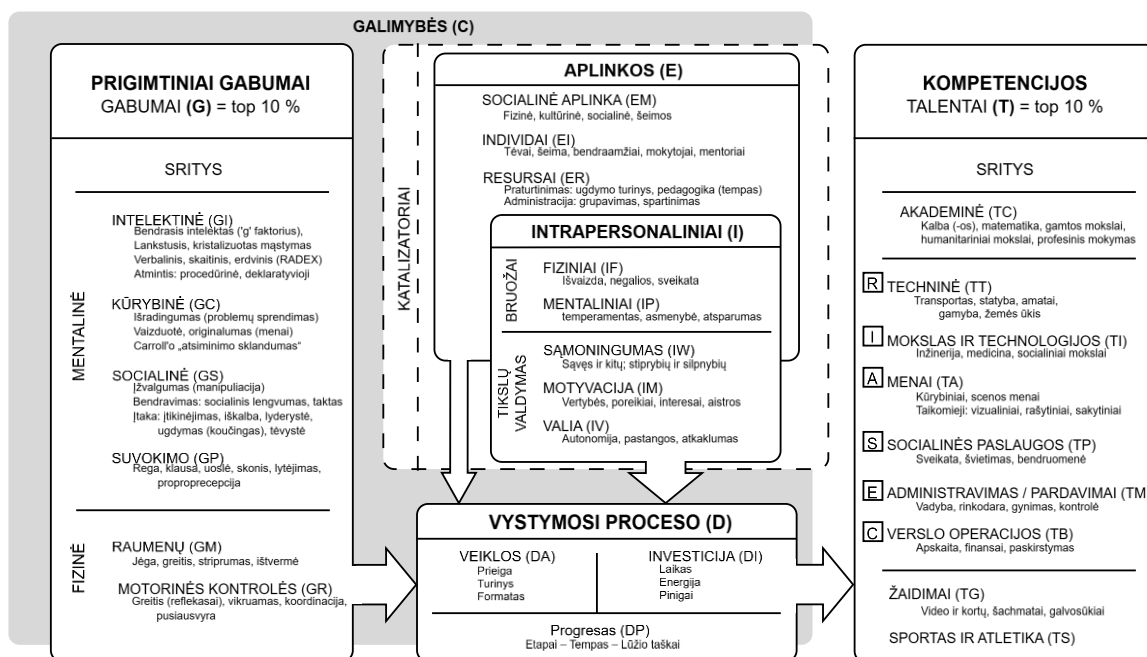
Miuncheno gabumo (toliau – MG) modelis [29] yra daugiafaktorinė tipologinė sistema, pagal kurią gabumai suvokiami ne kaip vientisas konstruktas, o kaip sąveikaujančių kintamųjų tinklas. Jame išskiriami gabumų prediktoriai, apimantys kognityvinius gebėjimus (intelektinius, kūrybinius, meninius), socialinę kompetenciją, praktinį intelektą, muzikalumą ir psichomotorinius įgūdžius.

Perėjimą nuo potencialo (prediktorių) prie rezultatų (kriterijų) moderuoja dvi veiksmų grupės: nekognityvinės asmenybės savybės (streso valdymas, motyvacija, mokymosi strategijos, atsiskaitymų nerimas, kontrolės lokusas) ir aplinkos sąlygos (mokymo(si) aplinka, šeimos klimatas, mokymo(si) kokybė, klasės klimatas, kritiniai gyvenimo įvykiai). Kintamųjų sąveika MG modelyje pavaizduota 1 pav.



1 pav. Miuncheno gabumo modelis, adaptuota iš [29]

Diferencijuotas gabumo-talentingumo modelis (DMGT) [35] detalai atvaizduoja, kaip nuo prigimtinių gabumų pereinama prie kompetencijų (žr. 2 pav.).



2 pav. Diferencijuotas gabumo-talentingumo modelis (DMGT), adaptuota iš [35]

Šiame modelyje išskiriami gabumai (G), kurie apibrėžiami kaip išskirtiniai prigimtiniai gabumai mentalinėse ir (arba) fizinėse srityse, ir talentai (T), sistemingai ugdomi konkrečiose srityse (pvz.,

mokslo, meno, sporto). Modelio esmė – vystymosi procesas (D), konceptualizuotas kaip gabumų transformavimas į talentus per veiklą, investicijas ir progresą. Šią transformaciją moderuoja dvi pagrindinės katalizatorių grupės: intrapersonaliniai (I) veiksniai, apimantys bruožus ir tikslo(-ų) valdymą ir aplinkos (E) veiksniai, apimantys socialinę aplinką, svarbius individus ir turimus resursus. Šių komponentų (G, D, I, E) sąveika ir jas nulemiančių galimybių (C) įtaka lemia talentų vystymąsi. Tiek DMGT, tiek MG modeliuose yra tarpininkaujantis vidinių ir aplinkos veiksnių vaidmuo ugdant talentus įvairiose srityse. Tačiau DMGT dėmesys skiriamas raidos procesui, kurio metu gabumai, veikiami katalizatorių, virsta talentais, o MG modelyje naudojama moderavimo ir kriterijų sistema ir juose esančių kintamųjų sąveika. DMGT pranašesnis aiškumu ir išsamumu, o MG modelis – stipriu psichometrinio patvirtinimu ir praktine identifikavimo struktūra.

Modeliuojant pasiekimų ar talentų raišką svarbu susitelkti į tam tikrą sritį, nes veiksniai, turintys įtakos pasiekimams ir jų sąveika gali skirtis priklausomai nuo srities. Viena iš svarbių pasiekimo modeliavimo sričių yra matematika, kadangi tai yra universalus mokslas, lavinantis kritinio ir loginio mąstymo įgūdžius ir gali būti laikomas šalies švietimo sistemos kokybės rodikliu [36]. Moksliniame diskurse yra daug diskusijų, kaip apibrėžti mokinių matematikos pasiekimus. Dažnai aukšti pasiekimai yra apibrėžiami skaitiniais kriterijais, tokiais kaip pažymiai matematikos ir (ar) gamtos mokslų dalykuose [37–39], tam tikrų diagnostinių ar standartizuotų testų rezultatai [32, 40], egzaminų rezultatai [41]. Tačiau yra ir kitų apibrėžimų, pvz., mokinių tolimesnė karjera matematikos srityje, sėkmingos studijos aukštojoje mokykloje matematikos ar gamtos mokslų kryptyse [42]. Pasiekimus matematikoje nulemia įvairių veiksnių, aplinkybių ir žmogaus savybių sąveika. Pasak C. P. Benbow ir O. Arjmand'o [42], kurie atliko 7-8 klasėje identifikuotų matematikai gabių mokinių longitudinalinį tyrimą, aukštiesiems matematikos pasiekimams įtakos turi dvi dedamosios: aukšti gebėjimai ir edukacinės patirtys (aplinka). Vienas iš įtakingiausių psichologų matematinių gebėjimų tyrimų srityje buvo V.A. Kruteckij, kuris XX a. šeštajame-septintajame dešimtmetyje atliko matematinių gebėjimų tyrimus, o jo darbai padarė įtaką kelioms ateinančioms mokslininkų kartoms [43–47]. V. A. Kruteckij nagrinėjo klausimą, ar matematiniai gebėjimai yra įgimti, ar įgyti bei kokiais požymiais jie pasižymi. Jis padarė išvadą, kad matematiniai gebėjimai nėra įgimti, o veikiau įgyti per gyvenimą, remiantis tam tikrais polinkiais ir (arba) savybėmis, kurios dažnai matomos matematikos srityje gabumus turinčiuose žmonėse [43, p. 361]:

1. dažnas (bet nebūtinai) ankstyvas matematinių gebėjimų susiformavimas, dažnai nepaisant nepalankių sąlygų;
2. didelis susidomėjimas ir polinkis į matematiką, dažnai atsirandantis ankstyvame amžiuje;
3. didelis gebėjimas dirbti matematikos srityje ir palyginus nedidelis nuovargis intensyviai mokantis matematikos;
4. matematinis mąstymas – išskirtinis polinkis suvokti reiškinius per matematinius ryšius.

Aplinkos įtakos svarbai aukštiesiems pasiekimams plačiąja prasme pritaria ir Gagné [48]. Jis teigia, kad sėkmingos intervencinės priemonės pagreitina mokinių gabumų vystymąsi ir padeda pasiekti daug geresnių rezultatų vienoje ar keliose veiklos srityse, pavyzdžiui, kalbų, matematikos ir gamtos mokslų [48]. C. P. Benbow ir O. Arjmand [42], kalbėdami apie edukacines patirtis, turinčias įtakos mokinių aukštų pasiekimų realizavimui, pamini, kad įtakos mokinių pasiekimams matematikoje turi bendrojo lavinimo matematikos ugdymo programa, išklaustyta matematikos ir gamtos mokslų kursų skaičius, dalyvavimas diagnostiniuose matematikos pasiekimų testuose, dalyvavimas matematikos konkursuose, universitetinio lygmens kursų lankymas besimokant mokykloje.

Pasiekimų modeliai ir jiems įtaką darantys veiksniai dažnai tiriama empiriškai, naudojant švietimo duomenis. Specifinės šių duomenų matematinės savybės, ypač didelės apimties vertinimuose, iš esmės lemia analitinius metodus, todėl sekančiame skyriuje nagrinėjami šie duomenų ypatumai.

1.2. Didelės apimties švietimo duomenų matematinės savybės

1.2.1. Pagrindinės švietimo duomenų rinkinių charakteristikos

Kiekvieną dieną visame pasaulyje gaunama šimtai milijonų švietimo duomenų [49]. Švietimo duomenų padidėjimą lemia vis didėjantis švietimo administravimo ir mokymo(si) sistemų skaitmenizavimas, ypač perėjimas prie virtualių mokymosi aplinkų. Skaitmenizavimas bei duomenų kaupimo ir saugojimo pažanga, galimybė integruoti didelius, heterogeninius skirtingo formato ir smulkumo duomenų rinkinius iš įvairių šaltinių išplečia ugdymo procesų analizės galimybes [4].

Švietimo duomenys gaunami iš įvairių platformų, sistemų ir veiklų mokymosi ekosistemoje. Šaltiniai, daugiausia generuojantys švietimo duomenų, yra mokymosi valdymo sistemos (angl. *Learning Management System*, LMS), kurios yra centriniai kursų teikimo ir administravimo centrai internete daugelyje švietimo įstaigų [50]; studentų ir (ar) mokinių informacinės sistemos (angl. *Student Information System*, SIS), t.y. administracinės duomenų bazės, tvarkančios pagrindinius mokinių ir (ar) studentų duomenis; pažangios mokymo(si) sistemos (angl. *Intelligent Tutoring System*, ITS) – adaptyvios sistemos, sukurtos imituoti mokytojus teikiant suasmenintas ir nuoseklias instrukcijas ir tiesioginį grįžtamąjį ryšį; masiniai atviri internetiniai kursai (angl. *Massive Open Online Course*, MOOC); apklausos ir klausimynai; įstaigų ir agentūrų renkami duomenys [1].

Dėl didelio susidomėjimo mokinių pasiekimų palyginimu tarp šalių ir didelio masto įgyvendinimo vis daugiau dėmesio skiriama tarptautiniams didelės apimties vertinimams (angl. *International Large-Scale Assessments*, ILSA). Gera žinoma ILSA tyrimai yra TIMMS (angl. *Trends in International Mathematics and Science Study*) ir PIRLS (angl. *Progress in International Reading Literacy Study*), kuriuos organizuoja Tarptautinė švietimo pasiekimų vertinimo asociacija (angl. *Association for the Evaluation of Educational Achievement*, IEA) bei PISA (angl. *Programme for International Student Assessment*), kuri organizuoja Ekonominio bendradarbiavimo ir plėtros organizacija (EBPO, angl. *Organisation for Economic Co-operation and Development* – OECD).

ILSA gaunami svarbūs empiriniai duomenys, nes yra renkami didelėse, dažnai nacionaliniu mastu reprezentatyviose imtyse [51]. Naudojant sudėtingus matematinius metodus, reikalingus tokiems duomenų rinkiniams analizuoti, galima empiriškai patikrinti, pavyzdžiui, teorinius matematinės kompetencijos modelius, o gautos išvados dažnai prisideda prie ugdymo politikos ir praktikos sprendimų [51, 52].

Švietimo duomenys, tarp jų ir ILSA duomenys, pasižymi skirtingomis struktūrinėmis ir laiko charakteristikomis, kurios daro didelę įtaką analitinių metodų pa(si)rinkimui. Svarbi duomenų *struktūra*; švietime dažniausiai pasitaiko hierarchinė, t.y. kai duomenų taškai yra sugrupuoti pagal tam tikrus lygmenis (pvz., mokiniai klasėse, klasės mokyklose ir pan.). Svarbus ir *kontekstas*, kurį sudaro įvairūs laiko veiksniai (dienos laikas, semestras, metai), pedagoginiai veiksniai (mokymo planas, konkreti užduotis) ir socialinė aplinka. *Laiko matmenys* taip pat turi savų ypatumų, tarp jų [4]:

- *smulkumas*: nuo stambių apibendrinimų (pvz., semestro pažymiai, užduočių įvertinimai) iki smulkių įvykių (pvz., renkami duomenys milisekundžių ar sekundžių intervalais);

- *ilgaamžiškumas*, kai duomenys renkami daugiau nei vieną kartą, pvz., įtraukiant kelias mokymosi sesijas, savaites, mokslo metus.

Be anksčiau aptartos įvairovės ir struktūrinio sudėtingumo, švietimo duomenų generavimo greitis ir apimtis irgi yra svarbi ypatybė. Dėl to didžioji dalis naujesnių švietimo duomenų priklauso platesniam „didžiųjų duomenų“ (angl. *Big Data*) analizės kontekstui. Šiuo metu aktyviai tyrinėjamos švietimo didžiųjų duomenų taikymo galimybės, įskaitant prognozavimą (mokinių rezultatus, įsidarbinimą, nedarbą ir finansavimą), rekomendacijas (kursų, vadovų ir darbų) ir vertinimą (mokinių akademinių rezultatų, mokinių psichologijos, mokinių elgesio ir mokytojų mokymo) [49]. Dėl didelio duomenų kiekio didėja ir mokslinių publikacijų skaičius šioje srityje. Ypač išaugo švietimo srities publikacijų su raktiniais žodžiais „mokymosi analitika“ (angl. *Learning Analytics*), „mašininis mokymasis“ (angl. *Machine Learning*), „dirbtinis intelektas“ (angl. *Artificial Intelligence*), „duomenų mokslas“ (angl. *Data Science*) ir „natūralios kalbos apdorojimas“ (angl. *Natural Language Processing*) kiekis [53].

1.2.2. Hierarchinės struktūros ir priklausomybės

Didelės apimties švietimo tyrimai kaip PISA ir TIMSS pasižymi hierarchine (arba daugiapakope) struktūra. Duomenys renkami iš mokinių, kurie yra sugrupuoti arba suskirstyti į imties vienetų, pavyzdžiui, mokyklas arba klases, kurios pačios yra suskirstytos į šalis ar tam tikrus regionus. Pavyzdžiui, tipiniame PISA cikle mokinių duomenys (1 lygis) yra suskirstyti į mokyklas (2 lygis), kurios yra suskirstytos į šalis (3 lygis) [54], todėl to paties aukštesnio lygmens vieneto (pvz., tos pačios mokyklos mokinių) stebėjimai gali būti panašesni vienas į kitą konkrečių rezultatų (pvz., pasiekimų rezultatų ar požiūrio) atžvilgiu dėl bendro poveikio bendriems veiksniams (pvz., mokyklos politikos, mokymo kokybės, bendraamžių grupės ypatybių, socialinio-ekonominio konteksto ir pan.) nei stebėjimai iš skirtingų vienetų.

Homogeniškumo laipsnis grupėse kiekybiškai dažnai vertinamas tarpklasiniu koreliacijos koeficientu (angl. *intraclass correlation coefficient*, ICC) [55]. ICC parodo, kokią dalį visos rezultato kintamojo dispersijos sudaro skirtumai tarp aukštesnio lygio vienetų. Matematiškai, dviejų lygių struktūros ICC (pvz., mokiniai i mokyklose j) galima apibrėžti taikant dispersijos dalių modelį $y_{ij} = \mu + u_j + e_{ij}$, kur y_{ij} – priklausomas kintamasis, μ yra bendras vidurkis, u_j yra atsitiktinis poveikis, susijęs su mokykla j (su dispersija σ_u^2) ir e_{ij} yra mokinio i mokykloje j liekamoji paklaida (su dispersija σ_e^2). Tuomet ICC gaunamas pagal formulę [55, 56]:

$$\rho = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_e^2}, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad (1.2.1)$$

čia ρ yra ICC reikšmė, σ_u^2 reiškia dispersiją tarp mokyklų, o σ_e^2 yra mokyklos (mokinio lygmens) dispersija.

Švietimo tyrimuose ICC reikšmės pasiekimų rezultatams mokyklos lygmeniu paprastai svyruoja nuo 0.10 iki 0.25 [57], t.y. grupavimo poveikis yra nežymus. O jei ρ reikšmės yra didelės, paklaidos koreliuoja, t.y. svarbus grupavimo lygis, o tokiu atveju yra pažeidžiama nepriklausomumo prielaida [58], kuri yra esminė daugeliui standartinių statistinių modelių, pavyzdžiui, paprastųjų mažiausių kvadratų (angl. *Ordinary Least Squares*) regresijai. Be to, dėl paklaidų iškraipymo padidėja statistinių testų kriterijų statistikos reikšmės (pvz., t vertės, F vertės) ir atitinkamai padidėja I tipo klaidų (klaidingai teigiamų rezultatų) tikimybė, kai tikrinamas nepriklausomų kintamųjų reikšmingumas,

ypač tų, kurie matuojami grupės lygmeniu arba kurių poveikis skirtingose grupėse gali skirtis [58, 59]. Taigi išvados, padarytos remiantis modeliais, kuriuose neatsižvelgiama į šią priklausomybės struktūrą, gali būti nepatikimos. Analizuojant hierarchinius duomenis, pavyzdžiui, PISA ar TIMSS, reikia taikyti statistinius metodus, specialiai sukurtus apdoroti įdėtinėms (angl. *nested*) struktūroms. Standartiškai tokie uždaviniai sprendžiami naudojant daugiapakopius modelius (angl. *Multi-Level Modelling*, MLM), hierarchinius tiesinius modelius (angl. *Hierarchical Linear Modelling*, HLM) arba mišrių efektų modelius [58]. Pavyzdžiui, MLM suskirsto dispersiją į dalis, atitinkančias kiekvieną hierarchijos lygį (pvz., mokinys, mokykla, šalis), ir atitinkamai pakoreguoja standartines paklaidas, kad būtų atsižvelgta į stebėjimų nepriklausomybę klasteriuose ir leidžia tirti ryšius tiek hierarchijos viduje, tiek tarp hierarchijos lygmenų [58, 60].

1.2.3. Matavimo modeliai ir latentiniai kintamieji

Didelį iššūkį analizuojant didelės apimties švietimo duomenis lemia tai, kad daugelis pagrindinių dominančių konstrukto nėra tiesiogiai stebimi (žr. 1.1.2 skyrelį). Operacionalizuoti kintamieji matematiniame modeliavime dažnai vadinami latentiniais kintamaisiais. Jie išvedami iš stebimų duomenų, pavyzdžiui, mokinių atsakymų į testo klausimus ar teiginių vertinimo tvarkos ar intervalų skalėse.

Latentinių kintamųjų išvedimo iš stebimų kintamųjų procesas iš esmės yra susijęs su matavimo paklaida. Remiantis klasikine testų teorija, stebimas rezultatas (X) modeliuojamas kaip nepastebimo tikrojo kintamojo (T), rodančio faktinį latentinio kintamojo lygį, ir atsitiktinės paklaidos (ε) suma. Šis ryšys matematiškai išreiškiamas taip [61]:

$$X = \beta T + \varepsilon, \quad (1.2.2)$$

čia β – faktoriaus (arba faktorių, jei tai vektorinė forma) koeficientas. Ignoruojant matavimo paklaidą modelio įvertiniai gali būti neteisingi, ypač įvertinant koreliacijos ir (ar) regresijos koeficientus. Šiai problemai spręsti taikomi *matavimo modeliai*, t.y. kiekvienam latentiniam faktoriui sukurti faktorinės analizės (angl. *factor analysis*, FA) modeliai [61]. Dažnai socialiniuose moksluose konstrukto iš klausimynų (pvz., požiūriams, įsitikinimams vertinti) matuoti naudojama tiek tiriamoji (angl. *exploratory factor analysis*, EFA), tiek patvirtinamoji (angl. *confirmatory factor analysis*, CFA) faktorinė analizė. FA modeliuose daroma prielaida, kad stebimą kintamųjų koreliaciją galima paaiškinti jų bendru ryšiu su mažesniu skaičiumi veiksnių [62, 63]. Kita vertus, ILSA duomenyse, tokiuose kaip PISA ar TIMSS, kognityviniams vertinimams naudojami atsakų į testo užduotis teorijos (angl. *Item Response Theory* – IRT) modeliai. IRT modeliuoja konkretaus atsakymo į vertinimo elementą tikimybę kaip netiesinę individo latentinio bruožo lygio (θ) ir konkretaus teiginio (ar klausimo) parametru (pvz., sudėtingumo, diskriminacijos, spėjimo) funkciją [64]. Vietoj struktūrinių lygčių modeliavime ir faktorinėje analizėje vertinamų regresijos parametru, apibūdinančių stebimų kintamųjų ir latentinio kintamojo ryšį, įvertinimo, atsakų į testo užduotis teorijoje modeliuojama konkretaus atsako į elementą (teiginį, klausimą) tikimybė, priklausanti nuo latentinio požymio lygio.

Pavyzdžiui, PISA tyrimuose diskrečių kintamųjų klausimynų pavertimui tolydziais latentiniais kintamaisiais naudojami dviejų parametru logistinis modelis (angl. *two-parameter logistic model*, 2PLM) binariniais elementais ir generalizuotas dalinės atsakomybės modelis (angl. *generalized partial credit model*, GPCM) elementams su daugiau nei dviem pasirinkimais [65].

2PLM modelyje [65] teigiama, kad teisingo atsakymo į elementą i tikimybė priklauso tik nuo skirtumo tarp mokinio v savybių lygio θ_v ir elemento b_i sudėtingumo. Be to, kiekvieno elemento atveju šio skirtumo ir atsakymo tikimybė priklauso nuo papildomo elemento diskriminacijos parametro a_i :

$$P(x_{vi} = 1 | \theta_v, b_i, a_i) = \frac{\exp(Da_i(\theta_v - b_i))}{1 + \exp(Da_i(\theta_v - b_i))} \quad (1.2.3)$$

čia D yra konstanta.

GPCM yra panašus į 2PLM ir yra naudojamas kai atsakymų į elementą yra daugiau nei du (pvz., tvarkos skalė) [65]. Jei elementas i turi $m_i + 1$ kategorijų (atsakymų variantų), tikimybė gauti tam tikrą atsakymą k ($k = 0, 1, 2, \dots, m_i$) taikant GPCM, gali būti užrašyta taip:

$$P(x_{vi} = k | \theta_v, b_i, a_i, d_i) = \frac{\exp\{\sum_{r=0}^k Da_i(\theta_v - b_i + d_{ir})\}}{\sum_{u=0}^{m_i} \exp\{\sum_{r=0}^u Da_i(\theta_v - b_i + d_{ir})\}} \quad (1.2.4)$$

čia d_{ir} – elemento kategorijos slenkstis arba žingsnio parametras, kuriam galioja $\sum_{r=1}^{m_i} d_{ir} = 0$ ir $d_{i0} = 0$.

1.2.4. Trūkstamos reikšmės duomenyse ir jų šalinimas

Tarkime, kad turime $n \times p$ dydžio duomenų matricą Y . Tada apibrėžkime tokio paties dydžio matricą R , kurios r_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$ elementas rodo, ar matricos Y j -tojo stulpelio i -tosios eilutės elementas y_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$ yra netuščias. T.y. jei y_{ij} yra stebimas (turi reikšmę), tai $r_{ij} = 1$, o jei y_{ij} reikšmės trūksta, tai $r_{ij} = 0$. Stebimus ir nestebimus duomenis suskirstykime į dvi dalis: stebimi duomenys žymimi Y_{obs} , o atitinkamų elementų matricoje R reikšmės $r_{ij} = 1$, o trūkstami duomenys žymimi Y_{mis} , ir turi elementus y_{ij} , kur visi $r_{ij} = 0$. Pagal [66] kiekvienas duomuo duomenų rinkinyje turi tam tikrą tikimybę būti praleistas. Procesas, kuris valdo šias tikimybes, vadinamas trūkstamų duomenų mechanizmu (angl. *missing data mechanism*) arba atsako mechanizmu (angl. *response mechanism*) [67]. Šio proceso modelis vadinamas trūkstamų duomenų modeliu (angl. *missing data model*) arba atsako modeliu (angl. *response model*). Pažymėkime visą duomenų rinkinį $Y = (Y_{\text{obs}}, Y_{\text{mis}})$. Tegu ψ apima trūkstamų duomenų modelio parametrus. Tada bendroji trūkstamų duomenų modelio išraiška yra [67]:

$$\Pr(R | Y_{\text{obs}}, Y_{\text{mis}}, \psi), \quad (1.2.5)$$

kuri rodo konkretų trūkstamų duomenų matricos R struktūros tikimybę, atsižvelgiant į stebimus duomenis Y_{obs} , trūkstamus duomenis Y_{mis} ir trūkstamumą reguliuojančius modelio parametrus ψ .

Egzistuoja trys pagrindiniai trūkstamų duomenų reikšmių dėsningumai: visiškai atsitiktinai trūkstamos reikšmės (angl. *Missing Completely at Random*, MCAR), atsitiktinai trūkstamos reikšmės (angl., *Missing At Random*, MAR) ir neatsitiktinai trūkstamos reikšmės (angl. *Missing Not At Random*, MNAR).

Visiškai atsitiktinai trūkstamos reikšmės (angl. *Missing Completely At Random*, MCAR) yra tos, kurių atsiradimo priežastis nesusijusi su duomenimis. Matematiškai, trūkstami duomenys laikomi MCAR, jei

$$\Pr(R = 0|Y_{\text{obs}}, Y_{\text{mis}}, \psi) = \Pr(R = 0|\psi), \quad (1.2.6)$$

t.y. tikimybė, kad tam tikra reikšmė yra trūkstama, priklauso tik nuo parametrų ψ . Paprasčiausias būdas apdoroti MCAR tipo duomenis yra išimti trūkstamų reikšmių eilutes (ar stulpelius) ir dirbti tik su pilnais duomenimis. Tada analizė gali būti nešališka ir parametrai atitikti tikruosius populiacijos parametrus. Tačiau praktikoje MCAR dažnai yra nerealistiška prielaida [67, 68].

Trūkstami duomenys laikomi atsitiktinai trūkstamais (angl. *Missing At Random*, MAR), jeigu praleidimo tikimybė gali priklausyti nuo stebimos informacijos, įskaitant bet kokius tyrimo dizaino ypatumus:

$$\Pr(R = 0|Y_{\text{obs}}, Y_{\text{mis}}, \psi) = \Pr(R = 0|Y_{\text{obs}}, \psi). \quad (1.2.7)$$

MAR atvejuje tikimybė, kad tam tikros reikšmės trūksta, priklauso tik nuo stebimų duomenų, o ne nuo pačios trūkstamos reikšmės. Kadangi MAR tipo trūkstamų reikšmių buvimo tikimybė yra susijusi tik su duomenų stebimais kintamaisiais, kartais MAR dar yra vadinama „ignoruojamu trūkstamumu“ (angl. *ignorable missingness*). MCAR yra specialus MAR atvejis [68]. Tačiau, priešingai nei MCAR, MAR atveju duomenų eilučių (stulpelių) su trūkstamomis reikšmėmis panaikinimas gali privesti prie neteisingų išvadų. To galima išvengti taikant daugkartinį užpildymą (angl. *Multiple Imputation*, MI) arba visiško informacijos maksimalaus tikėtimumo (angl. *Full Information Maximum Likelihood*, FIML) metodą, jei teisingai yra parenkamas statistinis modelis [69]. Vis tik, MAR pagrįstumą ne visada pavyksta įrodyti [70], o jei tikrasis trūkstamų reikšmių pasiskirstymas yra neatsitiktinis, tai parametrų įverčiai ir išvados irgi gali būti neteisingos.

Jei trūkstamų reikšmių buvimo tikimybės negalima paaiškinti, trūkstami duomenys laikomi trūkstami neatsitiktinai (angl. *Missing Not At Random*, MNAR) ir trūkstamumo tikimybė taip pat priklauso nuo nestebimos informacijos, įskaitant Y_{mis} [67]:

$$\Pr(R = 0|Y_{\text{obs}}, Y_{\text{mis}}, \psi) = \Pr(R = 0|Y_{\text{obs}}, Y_{\text{mis}}, \psi) \quad (1.2.8)$$

MNAR dar kitaip yra vadinama „neignoruojamu trūkstamumu“ (angl. *nonignorable missingness*) [71]. Atliekant psichologinius testus, MNAR dažnai atsiranda, kai neatsakoma į klausimus, pavyzdžiui, tiriamiesiems neužpildant klausimyno dėl to, kad to nenori daryti, jiems klausimas atrodo per sunkus ar jie nežino atsakymo [68]. Kai duomenyse yra MNAR trūkstamų reikšmių, dauguma standartinių trūkstamų reikšmių tvarkymo metodų, įskaitant duomenų išbraukimą, vidurkio, modos, medianos, FIML, MI ir pan. metodus [71–73], duoda iškreiptus parametrų įverčius. Norint tinkamai tvarkyti MNAR reikšmes, reikia modeliuoti patį trūkstamų reikšmių mechanizmą [74] arba atlikti išsamią jautrumo analizę [75], t.y. kokią įtaką išvadoms daro įvairios prielaidos dėl trūkstamų reikšmių atsiradimo nežinojimo. Vis tik pastaraisiais metais bandoma kurti universalius MNAR trūkstamų reikšmių priskyrimo metodus, pvz., Mislevy-Wu metodas [76], kuriame trūkstamumas modeliuojamas kaip atskiras latentinis kintamasis.

1.3. Matematiniai modeliai edukacinių procesų rezultatų modeliavimui

1.3.1. Ryšių modeliavimo metodai ir jų išplėtimas

Atsižvelgus į trūkstamas reikšmes ir atsirinkus tinkamus kintamuosius, vienas iš pagrindinių naudojamų statistinių metodų edukaciniams procesams tirti yra ryšių modeliavimas, kuriuo siekiama suprasti, kiekybiškai įvertinti ir prognozuoti kintamųjų ryšius. Tai apima įvairių regresijos ir

koreliacijos modelių taikymą ir hipotezių tikrinimą, t.y. prielaidų ar teiginių apie populiacijos parametrus įvertinimą, iš kurių galima daryti išvadas remiantis imties duomenimis. Dažnai naudojami metodai yra koreliacinė analizė (Pearson'o, Spearman'o, Kendall'o ir kt. koreliacijos koeficientai), regresinė analizė (tiesinė regresija: paprastoji ir daugialypė; logistinė regresija; Puasono regresija; kvantilinė regresija) bei hierarchinis modeliavimas [8, 9, 77–79].

Pavyzdžiui, Ker ir kt. [80] sukūrė dviejų pakopų regresijos modelį, apibrėžiantį gamtos mokslų pasiekimus ir pritaikė jį TIMMS duomenims. Modelio pirmo (individo) lygmens lygtis:

$$Y = \beta_0 + \beta_1(\text{namų edukaciniai ištekliai}) + \beta_2(\text{mokiniai patyrę patyčias mokykloje}) + \beta_3(\text{mokiniam patinka mokytis gamtos mokslų}) + \beta_4(\text{mokiniai pasitiki savo gamtos mokslų žiniomis}) + \beta_5(\text{mokiniai vertina gamtos mokslus}) + \beta_6(\text{saviveiksmingumas naudojantis kompiuteriu}) + e. \quad (1.3.1)$$

Antrojo (mokyklos) lygmens lygtys:

$$\beta_0 = \gamma_{00} + \gamma_{01}(\text{mokymą riboja mokinių poreikiai}) + \gamma_{02}(\text{mokytojai pabrėžia gamtos mokslų tyrimus}) + \gamma_{03}(\text{mokymas siejamas su ankstesne mokinių patirtimi}) + \gamma_{04}(\text{mokytojas skatina mokinių saviraišką}) + \gamma_{05}(\text{tradiciniai metodai}) + \gamma_{06}(\text{mokiniai dirba mišrių gebėjimų grupėse}) + \gamma_{07}(\text{mokiniai dirba vienodų gebėjimų grupėse}) + \gamma_{08}(\text{mokyklos sudėtis pagal mokinių kilmę}) + u_0; \quad (1.3.2)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \gamma_{10} + u_1 \\ \beta_2 &= \gamma_{20} + u_2 \\ \beta_3 &= \gamma_{30} + u_3 \\ \beta_4 &= \gamma_{40} + u_4 \\ \beta_5 &= \gamma_{50} + u_5 \\ \beta_6 &= \gamma_{60} + u_6, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

kur Y yra atsako kintamasis; $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_6$ yra pirmo lygio regresijos koeficientai; e yra pirmo lygio paklaida; $\gamma_{00}, \gamma_{10}, \dots, \gamma_{60}$ yra antro lygio fiksuotųjų efektų regresijos koeficientai; $u_0, u_1, \dots, u_6$ yra 2 lygio atsitiktiniai efektai, susiję su pirmo lygio konstantomis ir posvyriais.

Prie regresijos metodų galima priskirti ir tam tikrus latentinių ir kompleksinių struktūrų modelius, kaip struktūrinių lygčių modeliavimas (angl. *Structural Equation Modelling*, SEM), kelių analizė, faktorinė analizė (tiriamoji ir patvirtinamoji), (daugiapakopiai) struktūrinių lygčių modeliai, latentinės augimo kreivės modeliai [81, 82]. Šių metodų pagrindinis trūkumas yra tai, kad dažnai ryšiai, esantys tarp kintamųjų socialinėse sistemose, nebūtinai yra tiesiniai. Be to, norint patikimai įvertinti modelį, reikia tinkamo imties dydžio, ypač daugiapakopiuose modeliuose, turinčiuose aukštesnius lygmenis (pvz., mokyklos). Parametrų įvertinimo metodai (didžiausio tikėtino, riboto didžiausio tikėtino, Bajeso) pasižymi skirtingomis savybėmis ir reikalavimais.

Regresijos metodai sudaro svarbų ir plačiai naudojamą kiekybinių švietimo tyrimų priemonių rinkinį, ypač tikrinant iš anksto nustatytas hipotezes ir įvertinant teorinius konstruktus. Šių metodų vertė ta,

kad jais galima gauti struktūrizuotas, interpretuojamas išvalgas apie sąsajas ir galimus priežastinius ryšius. Tačiau aptarti apribojimai, susiję su tiesiškumu, duomenų kompleksiskumu ir patikimumo įvertinimo sudėtingumu, rodo, kad nors šie metodai svarbūs, jie ne visada gali modeliuoti visus švietimo reiškinius, ypač tuos, kurie susiję su netiesinėmis sąveikomis, todėl yra poreikis taikyti įvairesnį metodų spektrą. Tam pastaruoju metu daug naudojami mašininio mokymosi ir dirbtinio intelekto metodai.

1.3.2. Mašininio mokymosi ir dirbtinio intelekto metodai

Mašininio mokymosi ir dirbtinio intelekto matematiniai modeliai švietime dažnai siejasi su sąvoka *švietimo duomenų gavyba*. Švietimo duomenų gavyba (angl. *educational data mining, EDM*) – tarpdisciplininis švietimo, kompiuterių mokslo ir statistikos laukas. Enciklopediniame kompiuterijos žodyne terminas *duomenų gavyba* apibrėžiama kaip „duomenų išgavimas iš duomenų bazės, saityno arba kitokios didelės kompiuterinės duomenų saugyklos panaudojant asociacijos, statistikos, klasifikacijos, segmentavimo, įvairius euristicinius metodus.“ [89]. EDM yra nauja tyrimų sritis, kurioje daugiausia dėmesio skiriama matematinių ar skaičiavimo metodų kūrimui ir taikymui analizuojant unikalius duomenų rinkinius, gaunamus švietimo kontekste, o jos tikslas – gilinti mokinių mokymosi procesų supratimą, nustatyti mokymosi aplinkos ypatumus, kurie gerina mokymosi rezultatus, ir sistemingai tirti bei aiškinti sudėtingus švietimo reiškinius [4]. Švietimo duomenų gavybos metodai ypač praverčia didelių duomenų rinkinių analizei [90], siekiant rasti galimai paslėptus dėsningumus [91].

Pačius dirbtinio intelekto metodus galima apibrėžti kaip algoritmus, kurie analizuoja duomenis, modeliuoja dėsningumus, išskiria prognozuojančius veiksnus ir priima savarankiškus sprendimus [92]. Dirbtinio intelekto modeliai švietimo tyrimuose ypač išpopuliarėjo po 2020 m., ir dažnai naudojami tose situacijose, kai duomenys nebūna tradiciškai struktūruoti arba juos sunku struktūruoti į statistinei analizei tinkamą formą [93], pvz., vaizdo, garso įrašai ir tekstiniai formatai. Tarp naudojamų metodų švietime yra dirbtiniai neuroniniai tinklai (angl. *Artificial Neural Networks, ANN*), konvoliuciniai neuroniniai tinklai (angl. *Convolutional Neural Networks, CNN*); rekurentiniai neuroniniai tinklai (angl. *Reccurent Neural Networks, RNN*) ir grafiniai neuroniniai tinklai (angl. *Graph Neural Networks, GNN*) [92, 94–96].

Pasiekimų modeliavime populiarėja paaiškinamasis dirbtinis intelektas (angl. *eXplainable AI – XAI*), kadangi dažnai dirbtinio intelekto modelių prognozavimo galia prarandama paaiškinamumo sąskaita. XAI metodais siekiama sušvelninti „juodosios dėžės“ (angl. „black box“) problemą metodais, kuriais siekiama išgauti iš modelio paaiškinamas prognostines išvalgas. Daugiausia vartojami metodai – SHAP (angl. *SHapley Additive exPlanations*) ir LIME (angl. *Local Interpretable Model-agnostic Explanations*) [97–99].

Tačiau taikant skirtingus XAI metodus kartais gali būti nustatomi prieštaringi tos pačios prognozės svarbos reitingai, todėl gali kilti problemų dėl paaiškinimų stabilumo [100]. Be to, išlieka „juodosios dėžės“ problema, nes nėra metodų, galinčių suteikti paaiškinimą, kaip kintamieji veikia tarpusavyje ir kokio tipo ryšys egzistuoja tarp priklausomų ir nepriklausomų kintamųjų.

1.3.3. Pažangūs pasiekimų matematiniai modeliai

Vienas iš naujesnių būdų modeliuoti mokinių pasiekimus, ypač jų kaitą laike, yra naudojant netiesines dinamines sistemas [12, 83–85]. Pavyzdžiui, P. Y. Uzun ir kt. [85] sukūrė matematinį trupmeninės

eilės diferencialinių lygčių sistemos modelį, kuriame modeliuojama aukštus, vidutinius ir žemus pasiekimus turinčių mokinių kaita laike. Modelyje P, K, I yra atitinkamai mokinių, kurių pasiekimai bet kuriuo metu t yra aukštesni už vidutinius, mokinių, kurių pasiekimai vidutiniai ir mokinių, kurių pasiekimai žemesni už vidutinius, skaičius, o $N = P + K + I$ yra visos populiacijos individų skaičius. Tada sistema yra

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \mu - \beta PK - \mu P + \alpha I, & P(t_0) &= P_0 \\ \frac{dK}{dt} &= \beta PK - \mu K - \delta(1 - \gamma)K, & K(t_0) &= K_0 \\ \frac{dI}{dt} &= \delta(1 - \gamma)K - (\mu + \alpha)I, & I(t_0) &= I_0\end{aligned}\quad (1.3.4)$$

Čia β žymi mokinių, patiriančių neigiamą mokytojų požiūrį, intensyvumą; μ – mokinių, turinčių akademinę motyvaciją, intensyvumą; γ – mokinių, turinčių aukštą saviveiksmingumą, intensyvumą; δ – mokinių, turinčių žemą savivertę, intensyvumą ir α – mokinių, turinčių teigiamą šeimos požiūrį, intensyvumą.

Trupmeniniai operatoriai gali tiksliau apibūdinti sistemos elgseną dėl savo atminties savybių, todėl modelis buvo paverstas trupmeninės eilės diferencialinėmis lygtimis pagal Caputo apibrėžimą

$${}_a^C D_t^v f(t) = \frac{1}{\Gamma(v - n)} \int_a^t \frac{f^n(\tau)}{(t - \tau)^{v+1-n}} d\tau \quad (1.3.5)$$

kur $n - 1 < v \leq n, n \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{R}$ yra funkcijos $f(t)$ diferencialinio integralo trupmeninė eilė, o Γ apibrėžia Gama funkciją:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (1.3.6)$$

Tada modelis (1.3.4) atrodo taip:

$$\begin{aligned}{}_0^C D_t^\alpha P(t) &= \mu - \beta PK - \mu P + \alpha I, \\ {}_0^C D_t^\alpha K(t) &= \beta PK - \mu K - \delta(1 - \gamma)K, \\ {}_0^C D_t^\alpha I(t) &= \delta(1 - \gamma)K - (\mu + \alpha)I,\end{aligned}\quad (1.3.7)$$

su pradinėmis sąlygomis $P(t_0) = P_0, K(t_0) = K_0, I(t_0) = I_0$

Šią lygtį galima patobulinti įtraukiant stochastinius kintamuosius:

$$\begin{aligned}dP(t) &= [\mu - \beta P(t)K(t) - \mu P(t) + \alpha I(t)]dt + \sigma_1 P(t)dB_1(t), \\ dK(t) &= [\beta P(t)K(t) - \mu K(t) - \delta(1 - \gamma)K(t)]dt + \sigma_2 K(t)dB_2(t), \\ dI(t) &= [\delta(1 - \gamma)K(t) - (\mu + \alpha)I(t)]dt + \sigma_3 I(t)dB_3(t).\end{aligned}\quad (1.3.8)$$

Stochastinėje akademinių pasiekimų modelio versijoje įvedami stochastiniai parametrai σ_1, σ_2 ir σ_3 , kurie rodo atsitiktinumo tankį, turintį įtakos mokinių skaičiaus pokyčio tempams kiekvienoje akademinių pasiekimų grupėje, o B – Wiener'io procesas.

Tyrimo išvadose teigiama, kad sukurtas matematinis modelis gali būti vertinga priemonė, padedanti suprasti mokyklų akademinių pasiekimų dinamiką ir nustatyti pagrindinius veiksnius, darančius įtaką mokinių sėkmei ar nesėkmei. Modelis gali padėti mokykloms sutelkti dėmesį į atitinkamus kintamuosius (individualius, šeimos ir mokyklos), kad būtų galima parengti prevencines ir intervencines priemones, skirtas akademiniams pasiekimams gerinti. Autoriai taip pat pabrėžė matematinio modeliavimo metodo taikymo naujumą sprendžiant socialinių mokslų problemą ir pasiūlė būsimų tyrimų kryptis, pavyzdžiui, patobulinti modelį, įtraukiant išsamesnes mokinių pasiekimų kategorijas ir įtaką darančius veiksnius.

Trupmeninės eilės diferencialinėmis lygtimis galima matuoti ir galimų intervencijų sėkmingumą. Pavyzdžiui A. Yusuf ir kt. [84] modeliavo mokinių pasiekimų kaitą trupmeninės eilės epidemiologiniu modeliu naudojant optimalios kontrolės strategiją, kurios tikslas yra minimizuoti prastesnių nei vidutiniškai ir silpnų mokinių skaičių naudojant tam tikrą išlaidų funkciją. Atlikus skaitinį modeliavimą nustatyta, kad įgyvendinant šias valdymo strategijas veiksmingai sumažinama žemesnių už vidurkį gebėjimus turinčių mokinių dalis, o vidutinių gebėjimų mokinių dalis padidėja. Tyrime išryškėja dalinio modeliavimo ir optimalaus valdymo, kaip įrankių, panaudojimo galimybės siekiant suprasti ir pagerinti mokymosi rezultatus.

Vienas iš naujausių metodų švietimo tyrimuose – topologinė duomenų analizė (angl. *Topological Data Analysis*, TDA). Topologinė duomenų analizė yra algoritmas, leidžiantis tyrėjams nustatyti dėsningumus ir ryšius daugiamačiuose duomenyse, kurių galima nepastebėti taikant įprastus statistinius metodus [86]. TDA gali išsaugoti didelės apimties duomenų formą ir struktūrą, todėl yra ypač vertingas analizuojant, pavyzdžiui, mokinių pasiekimų rodiklius, įsitraukimą ir mokymosi elgseną vienu metu. Šis metodas ypač naudingas nustatant mokinių pogrupius, kurių mokymosi trajektorijos panašios, ir suprantant tarpusavyje susijusius veiksnius, darančius įtaką mokymosi rezultatams [87]. Pavyzdžiui, tiriant gabius mokinius, TDA sėkmingai nustatė atskiras mokinių grupes pagal jų kognityvinius profilius ir atskleidė nuoseklius dėsningumus atliekant įvairių tipų psichometrinius testus [88]. Metodas taip pat yra atsparus įvairiems imčių dydžiams, o tai gali praversti tiriantiems specializuotas švietimo populiacijas, kai sunku arba neįmanoma gauti didelės imties.

Nors pažangūs matematiniai metodai, tokie kaip netiesinės dinaminės sistemos ir topologinė duomenų analizė, įžvalgoms gauti gali būti naudingesni palyginus su tradiciniais metodais, praktinis šių ir kitų matematinių modelių įgyvendinimas ir patvirtinimas priklauso nuo duomenų prieinamumo ir savybių. Sekančiame skyriuje apžvelgiami metodai, dažnai taikomi dideliems duomenų kiekiams apdoroti.

1.3.4. Matematiniai metodai, naudojami didelės apimties švietimo duomenų rinkiniams

ILSA duomenų bazės yra patrauklios tyrėjams dėl jų naudingumo ir prieinamumo pasiekimų prognozavimui ir (ar) įvairių reiškinių matematiniam modeliavimui dėl jų apimties, periodiškumo ir standartizuotumo [101]. Viena sisteminė apžvalgos tyrime [102] apžvelgus 1461 mokslines publikacijas, tyrinėjančias 2000-2018 m. PISA duomenis, nustatyti 1059 naudojami matematiniai metodai. Dauguma dažniausiai naudojamų metodų turi regresijos pagrindus (žr. 1 lentelę).

1 lentelė. Dažniausiai naudojami metodai 2000-2018 m. PISA tyrime, adaptuota pagal [102]

Duomenų analizės metodas	Dažnis	%
Regresija (tiesinė, logistinė, kvantilinė, daugiapakopė, žingsninė, retoji ir t. t.)	409	38.7
Hierarchiniai (generalizuoti) tiesiniai modeliai	112	10.6
Struktūrinis lygčių modeliavimas	92	8.7
Tiriamoji/patvirtinamoji faktoriinė analizė	48	4.5
Koreliacija	45	4.2
Švietimo duomenų gavyba (pasirinkimų medžiai, atsitiktiniai miškai, neuroniniai tinklai, atraminių vektorių mašinos)	29	2.7
Mediacijos analizė	27	2.5
Duomenų aprėpties analizė (angl. <i>Data Envelopment Analysis</i>)	19	1.8
MANCOVA / ANCOVA / ANOVA	18	1.7
Atsakų į testo užduotis teorijos modeliai	18	1.7

Vienas iš naujausiai pasirodžiusių didžiųjų duomenų rinkinių yra EBPO PISA 2022 m. tyrimo rezultatai. EBPO 2024 m. išleido techninį vadovą [65], kuriame yra aprašyti duomenys ir pateikta instrukcija, kaip jais naudotis. Dauguma šio duomenų rinkinio analizių buvo atlikta naudojant švietimo duomenų gavybos ir mašininio mokymosi metodus (žr. 2 lentelę).

2 lentelė. Tyrimų, publikuotų *Web of Science*, naudojančių PISA 2022 duomenis, apibendrinimas

Šaltinis / mokslinis tyrimas	Tyrimo problema/tikslas	Imtis	Matematinė tyrimo metodologija
„Uncovering student profiles. An explainable cluster analysis approach to PISA 2022“ [101].	Nustatyti ir apibūdinti penkiolikmečių mokinių profilius remiantis PISA 2022 duomenimis ir atskleisti šių profilių sąsajas su tokiais veiksniais kaip IRT prieinamumas ir naudojimas, lytis, akademiniai rezultatai ir mokymosi lūkesčiai	Mokiniai iš Ispanijos n=30800	Duomenų apdorojimas; dimensijų mažinimas; klasterizacija; klasifikavimas; požymių svarbos analizė.
„Interpretable Machine Learning Models for PISA Results in Mathematics“ [103].	Paversti išsamų švietimo duomenų rinkinį praktiškai pritaikomomis įžvalgomis, kuriomis galima pagrįsti politiką ir pedagogiką, taip skatinant mokinių rezultatų gerinimą akademinėje aplinkoje.	Mokiniai iš Ispanijos n = 30800.	Duomenų apdorojimas; dimensijų mažinimas; dvejetainis klasifikavimas; parametų paieška; ansamblinis mokymasis; modelių patikimumo vertinimas; požymių svarbos analizė;
„Emotional Control in Education: Insights From High-Achievers in PISA 2022“ [104].	Nustatyti ir išanalizuoti pagrindinius veiksnius, kurie prisideda prie gerų rezultatų pasiekusių mokinių emocinės kontrolės.	Mokiniai iš Singapūro n = 6606.	Aprašomoji statistinė analizė; daugiamatės regresijos modeliavimas; regresijos modelio patikimumo vertinimas.
„A decade of PISA: student perceived instructional quality and mathematics achievement across	Pateikti išsamią skirtingų švietimo sistemų analizę, tiriant mokinių suvokimo apie mokymo kokybę poveikį jų matematikos	Mokiniai iš Belgijos, Danijos, Suomijos, Prancūzijos, Vokietijos, Nyderlandų,	Aprašomoji statistinė analizė; struktūrinių lygčių modeliavimas su tinkamumo rodikliais;

Šaltinis / mokslinis tyrimas	Tyrimo problema/tikslas	Imtis	Matematinė tyrimo metodologija
European countries“ [105].	pasiekimams, atsižvelgiant į socioekonominę situaciją	Norvegijos, Portugalijos, Švedijos ir Ispanijos. 2012 m.: n = 75718 2022 m.: n = 89361.	matavimų invariantiškumo vertinimas; modelio patikimumo vertinimas.
„Applying Machine Learning and SHAP Method to Identify Key Influences on Middle-School Students’ Mathematics Literacy Performance“ [106].	Nustatyti esminius veiksnius, darančius įtaką vidurinės mokyklos mokinių matematiniam raštingumui	Mokiniai iš Hong Kongo, Makau, Taivano, Singapūro, Japonijos, P. Korėjos n = 34968.	Duomenų apdorojimas; regresijos modeliavimas; modelio patikimumo vertinimas; požymių svarbos analizė/
„Do School Activities Foster Creative Thinking? An Analysis of PISA Results“ [107].	Ištirti ryšį tarp kūrybinio mąstymo testo rezultatų ir dalyvavimo mokyklos veikloje dažnumo	54 OECD šalių mokiniai.	Dimensijų mažinimas; faktorinė analizė; koreliacinė analizė; daugiamatės regresijos modeliavimas;
„Predictive insights into U.S. students’ mathematics performance on PISA 2022 using ensemble tree-based machine learning models“ [108].	Pateikti inovatyvias įžvalgas, kaip naudoti ML modelius, kad būtų galima nustatyti prognozuojančius veiksnius, labiausiai susijusius su mokinių matematikos pasiekimais.	Mokiniai iš JAV n = 4552.	Duomenų apdorojimas; pasiekimų prognozavimas ansamblių modeliais; modelio tinkamumo vertinimas; kintamųjų svarbos išskyrimas; požymių svarbos analizė
„Unlocking mathematics success: Global lessons on student achievement, teacher satisfaction, and school environments“ [109].	Ištirti veiksnius, darančius įtaką matematikos rezultatams, mokytojų pasitenkinimui ir mokyklos aplinkai šešiose šalyse.	Mokiniai iš Makao, Hong Kongo, Australijos, Malaizijos, Sakartvelo, Kolumbijos n = 45184.	Aprašomoji statistika; kintamųjų atranka žingsnine regresija; dviejų lygių hierarchinis tiesinis modeliavimas.

Dauguma šių tyrimų detalai neaptaria ar nepaaiškina teorinių pagrindų arba juose egzistuoja pastebimas siūlomų teorinių modelių ir jų empirinio įgyvendinimo neatitikimas, kuris atsiranda dėl to, kad analitinis dėmesys sutelkiamas į tiesioginius priežastinius ryšius, o ne į teoriškai pagrįstą veiksmų tarpusavio ryšių modeliavimą.

Antrinės duomenų analizės pagrindu Lietuvoje PISA duomenys yra tyrinėti nedaug. Daugiausia apsiribojama pagrindinių tyrimo(-ų) rezultatų pristatymais [110]. Nors 2020 m. buvo paskelbta lyginamoji analizė, kurioje nagrinėjamos Lietuva ir kaimyninės šalys [111], tačiau joje ir kituose nacionaliniuose tyrimuose [112, 113] daugiausia taikyti įprastiniai statistiniai metodai, tokie kaip procentinių dalių, tendencijų atvaizdavimas, tiesinės regresijos modelių, faktorinės analizės ir Stjudento t-testai nepriklausomoms imtims. Naujausioje 2022 m. PISA duomenų analizėje [114] nagrinėjamas tik matematinio nerimo kintamasis ir jo tiesioginė įtaka matematikos pasiekimams taikant tiesinę regresiją. Sudėtingi daugiapakopio modeliavimo metodai, kurie yra būtini norint tinkamai analizuoti hierarchinės struktūros PISA duomenis, Lietuvos kontekste taikyti retai. Paminėtinas magistro darbas [115], kuriame naudotas hierarchinis tiesinis modeliavimas 2009 m.

PISA duomenims tirti. Darbe nustatyta, kad 32 % Lietuvos penkiolikmečių matematinio raštingumo rezultatų dispersijos teko mokyklos lygmens veiksniams.

1.4. Apibendrinimas

Modeliuoti švietimo reiškinius, pavyzdžiui, matematikos pasiekimus, gali būti sudėtinga. Pagrindiniai iššūkiai kyla dėl dinamiško socialinių sistemų pobūdžio, sunkumų tiksliai apibrėžti ir išmatuoti abstrakčius konstruktus (pvz., saviveiksmingumą, motyvaciją) ir specifinių statistinių švietimo duomenų savybių (hierarchinės struktūros, latentiniai kintamieji, matavimo paklaidos).

Nors egzistuoja daug teorinių modelių pasiekimams paaiškinti (pavyzdžiui, Gagné DMGT ir Heller'io MG modelis) ir yra įvairių kiekybinių metodų (regresija, MLM, SEM, dirbtinio intelekto ir dinamiinių sistemų metodų), išlieka metodologinė spraga: daugelyje empirinių tyrimų, ypač tų, kurie atliekami remiantis didelės apimties tyrimais, pavyzdžiui, PISA, dažnai trūksta tvirto teorinio pagrindo arba sudėtingi teoriniai ryšiai tinkamai neįtraukiami į statistinius modelius. Dėl to analizėse daugiausia dėmesio skiriama tiesioginiams prognozavimo ryšiams, o ne įvairių kintamųjų tarpusavio ryšio ir poveikio tyrimui. Verta atlikti empirinius tyrimus, kuriuose būtų operacionalizuojami teorinių modelių dalys, ypač modeliuose su sąryšiais, pavyzdžiui, DMGT, taikant tinkamus statistinius metodus bei naudojant dabartinius didelės apimties duomenis (pavyzdžiui, PISA 2022), siekiant patikrinti modeliavimo tikslumą, tinkamumą ir suprasti veiksnių, darančių įtaką aukštiems matematikos pasiekimams, sąveiką.

2. Duomenys ir tyrimo metodai

2.1. Tyrimo duomenys ir imtis

Šiame darbe tirti pasirinkti 2022 m. PISA tyrimo duomenys. Duomenys yra atviri, juos galima rasti svetainėje <https://www.oecd.org/en/data/datasets/pisa-2022-database.html>. PISA yra kas trejus metus vykdomas tarptautinis penkiolikmečių tyrimas, kurio metu vertinama, kiek mokiniai yra įgiję žinių ir įgūdžių norint visapusiškai dalyvauti socialiniame ir ekonominiame gyvenime, atsižvelgiant ne tik įgytas žinias, bet ir jų gebėjimą pritaikyti nepažįstamose situacijose tiek mokykloje, tiek už jos ribų [54]. PISA pasižymi unikalumu dėl [54, 116]:

1. orientacijos į švietimo politiką, siejant mokinių mokymosi rezultatų duomenis su mokinių kilme, požiūriu į mokymąsi;
2. mokinių kompetencijos sąvokos, kuri apibrėžta vertinant mokinių gebėjimus analizuoti, pagrįsti ir bendrauti nustatant, aiškinant ir sprendžiant užduotis įvairiose situacijose;
3. svarbos „mokymuisi visam gyvenimui“, kuris įvertinamas apklausiant mokinius apie jų motyvaciją mokytis, įsitikinimus apie save ir mokymosi strategijas;
4. tyrimo aprėpties – 2022 m. tyrime dalyvavo 37 EBPO šalys ir 44 šalys partnerės.

Politikai visame pasaulyje naudojami PISA rezultatai, kad galėtų įvertinti savo šalies mokinių žinias ir įgūdžius, palyginti juos su kitų dalyvaujančių šalių mokinių žiniomis ir įgūdžiais, nustatyti švietimo ir (arba) mokymosi rezultatų gerinimo kriterijus ir suprasti savo švietimo sistemų stipriąsias ir silpnąsias puses [116]. Kiekviename PISA cikle išsamiai tiriama viena sritis. 2022 m., 2012 m. bei 2003 m., pagrindinis dėmesys buvo skirtas matematikai, 2000, 2009 ir 2018 m. – skaitymui, o 2006 ir 2015 m. – gamtos mokslams [54]. Iš viso 2022 m. tyrime dalyvavo apie 690 000 moksleivių iš 81 šalies, o reprezentuojama populiacija – apie 29 milijonai penkiolikmečių [65].

Šiame darbe pasirinkta Lietuvos imtis, kurioje yra 7257 mokinių iš 292 mokyklų.

Kadangi tyrimo dėmesys skiriamas matematikai, tai šiame projekte bus tiriami mokinių matematikos pasiekimai. Matematikos srityje PISA matuoja matematinį raštingumą, kuris apibrėžiamas taip [116 p. 22]:

Matematinis raštingumas – tai asmens gebėjimas matematiškai mąstyti, formuluoti, taikyti ir interpretuoti matematiką sprendžiant užduotis įvairiomis realaus pasaulio aplinkybėmis. Jis apima sąvokas, procedūras, faktus ir priemones reiškiniams aprašyti, paaiškinti ir numatyti. Tai padeda žmonėms suvokti, kokią vaidmenį matematika atlieka pasaulyje, ir priimti pagrįstus vertinimus bei sprendimus, kurių reikia konstruktyviems, įsitraukusiems ir mąstantiems XXI a. piliečiams.

Matematinis raštingumas vertinamas, užduodant klausimus, susijusius su [116]:

- *matematinio mąstymo ir problemų sprendimo procesais*, apibūdinančiais paaiškinimus, ką asmenys daro, kad susietų problemos kontekstą su matematika ir taip išspręstų užduotį.
 - Matematinis mąstymas (tiek dedukcinis, tiek indukcinis) apima situacijų vertinimą, strategijų pasirinkimą, loginių išvadų darymą, sprendimų kūrimą ir aprašymą bei suvokimą, kaip tuos sprendimus galima pritaikyti. Matematinis mąstymas yra matematinio raštingumo pagrindas, kurį padeda formuoti mokyklinėje matematikoje mokomi reiškiniai: kiekybės, skaičių sistemų ir jų algebrinių savybių supratimas; abstrakcijos ir simbolinio vaizdavimo galios suvokimas; matematinių struktūrų ir jų dėsningumų matymas; funkcinių ryšių tarp dydžių atpažinimas; matematinio modeliavimo kaip realaus pasaulio (pvz., fizinių, biologinių, socialinių, ekonominių ir

elgsenos mokslų) suvokimas; sklaidos (statistikoje) supratimas. Kalbant apie problemų sprendimą, PISA tyrime apibrėžiamos trys procesų kategorijos: matematinis situacijų formulavimas, matematinių sąvokų, faktų, procedūrų ir samprotavimų naudojimas, matematinių rezultatų interpretavimas, taikymas ir įvertinimas;

- *turiniu*, įtraukiančiu keturias kategorijas (pokyčiai ir ryšiai; kiekis; erdvė ir forma; neapibrėžtumai ir duomenys) ir susijusiu tipinėmis nacionalinių mokyklinės matematikos mokymo programų turinio kryptimis, pavyzdžiui, skaičiais, algebra, funkcijomis, geometrija ir duomenų tvarkymu;
- *kontekstu* (asmeniniu, profesiniu, visuomeniniu ir moksliniu), į kurį patenka užduotys.

PISA tyrime taikomas matricinės atrankos (angl. *matrix sampling*) metodas [65, 116]. Kiekvienas mokinys gavo atsitiktinį konkretaus konstrukto elementų poaibį (pvz., 5 elementai iš 10), o kiti mokinio atsakymai yra aproksimuojami naudojant atsako į testo klausimus teorijos (IRT) metodus duomenų apdorojimo metu. Tai reiškia, kad nagrinėjant duomenis reikia atsižvelgti į trūkstamų reikšmių kiekį ir jų įsistatymą.

Sudarant mokinių imtį buvo naudojamas dviejų etapų sluoksniuotos (stratifikuotos) imties planas [65]. Pirmojo etapo imties vienetą sudarė atskiros mokyklos, kuriose mokosi 15 metų mokiniai arba kurios gali turėti tokių mokinių vertinimo metu. Mokyklos buvo sistemingai atrenkamos iš išsamaus nacionalinio visų PISA reikalavimus atitinkančių mokyklų sąrašo su tikimybėmis, kurios buvo proporcingos dydžiui, priklausančiam nuo apskaičiuoto mokykloje besimokančių 15 metų amžiaus mokinių, atitinkančių PISA reikalavimus, skaičiaus. Prieš atrenkant mokyklas, jos buvo suskirstytos į tarpusavyje nesusijusias grupes pagal mokyklos charakteristikas, vadinamas tiesioginiais sluoksniais (angl. *explicit strata*). Tiesioginio sluoksniavimo (stratifikacijos) pavyzdžiai: valstybės regionai, kalbos. Taip pat buvo taikomas netiesioginis sluoksniavimas (angl. *implicit strata*), kuris yra mokyklų rūšiavimas kiekviename tiesioginiame sluoksnyje naudojant tam tikrus netiesioginio sluoksniavimo kintamuosius. Netiesioginės stratifikacijos kintamųjų pavyzdžiai yra mokyklos tipas, urbanizacija, mokyklos dydis arba mažumų sudėtis.

Sluoksniavimas PISA tyrime buvo naudojamas siekiant:

1. padidinti imties sudarymo efektyvumą patikimesniems įverčiams gauti;
2. taikyti tinkamus imties sudarymo būdus;
3. užtikrinti, kad į imtį būtų įtrauktos visos populiacijos dalys;
4. užtikrinti tinkamą konkrečių tikslinės populiacijos grupių atstovavimą imtyje.

Sluoksniavimo kriterijai Baltijos šalims yra 3 lentelėje. Joje skliausteliuose žymimas kategorijų skaičius kiekvieno kintamojo atžvilgiu.

3 lentelė. Sluoksniavimo kintamieji Baltijos šalims PISA 2022 m. tyrime [65]

Šalis	Tiesioginio sluoksniavimo kintamieji	Netiesioginio sluoksniavimo kintamieji
Lietuva	Mokyklos kalba (5); Mokyklos vieta - lietuvių kalba (4), kitomis kalbomis (1); Mokyklos tipas - lietuvių kalba (4), kitų kalbų (1); Tikrumo atrankos	Mokyklos kalba 2 (4); Mokyklos vieta (5); Mokyklos tipas (5); Mokyklos tipas 2 (2)
Latvija	Urbanizacija (4)	Mokyklos tipas/lygis (4)
Estija	Kalba (3); Tikrumo atrankos	Mokyklos tipas (3); Miestietiškas (2); Apskritis (15); Finansavimas (2)

3 lentelėje esančios tikrumo atrankos (angl. *certainity selections*) yra mokyklos, kurios tikrai įtrauktos į PISA imtį. Taip atsitinka tiesioginiame sluoksnyje (stratoje), kai mokyklos dydžio matas atitinka arba viršija tam konkrečiam sluoksniui apskaičiuotą imties intervalą [65]. Kai tokios mokyklos nustatomos ir atrenkamos, jos pašalinamos iš imties, o atranka tęsiama likusioms to sluoksnio mokykloms.

Dar vienas svarbus duomenų analizės aspektas – imties svoriai. Nors mokiniai, įtraukti į galutinę PISA imtį konkrečioje šalyje, buvo atrinkti atsitiktine tvarka, jų atrankos tikimybės skiriasi. Siekiant užtikrinti, kad kiekvienas dalyvaujantis mokinyt tinkamai atspindėtų teisingą mokinių skaičių visoje PISA populiacijoje, į analizę turi būti įtraukti svoriai, siekiant kontroliuoti kiekvieno dalyvaujančio vieneto proporcingą indėlį į bendrą populiacijos įvertį [65].

Mokyklos i mokinio j svorį (W_{ij}) sudaro du baziniai svoriai – mokyklos (angl. *school*) bazinis svoris mokyklos vidaus (angl. *within-school*) bazinis svoris ir keturi koregavimo koeficientai:

$$W_{ij} = \{[(w_{1i} \cdot t_{1i}) \cdot f_{1i}] \cdot (w_{2ij} \cdot f_{2ij})\} \cdot t_{2ij}, \quad (2.1.1)$$

čia w_{1i} (mokyklos bazinis svoris) – mokyklos i įtraukimo į imtį tikimybės atvirkštinis dydis;

t_{1i} – mokyklos bazinio svorio apkarpyimo (angl. *trimming*) koeficientas, naudojamas netikėtai didelėms w_{1i} reikšmėms sumažinti;

f_{1i} – koregavimo koeficientas, skirtas kompensuoti kitų mokyklų, kurios yra šiek tiek panašios į i mokyklą (kurių nedalyvavimas dar nekompensuotas dėl pakaitinių mokyklų dalyvavimo), nedalyvavimą;

w_{2ij} (mokyklos vidaus bazinis svoris) – mokinio j atrankos tikimybės iš pasirinktos i mokyklos atvirkštinis dydis;

f_{2ij} – koregavimo koeficientas, skirtas kompensuoti mokinių nedalyvavimą toje pačioje mokyklos neatsakymo grupėje ir tiesioginiame sluoksnyje, ir, jei leidžia imties dydis, toje pačioje aukšto/žemo lygio ir lyties kategorijoje;

t_{2ij} – mokinio svorio mažinimo koeficientas, naudojamas mokinių, kurių visų ankstesnių svorio komponentų sandaugos reikšmės yra itin didelės, svoriams sumažinti.

Detalesnį svorio ir jame esančių koeficientų sudarymo ir apskaičiavimo aprašymą galima rasti 2022 m. PISA tyrimo techniniame vadove [65].

PISA parametrų įverčių imties dispersijoms įvertinti taikoma subalansuoto pakartotinio pakartojimo (angl. *balanced repeated replication*, BRR) metodologija. Pagal šią metodiką atsižvelgiama į įverčių dispersiją, atsirandančią dėl mokyklų ir mokinių atrankos. Specifinis BRR metodas, taikomas PISA, vadinasi Fay metodas [65]. Šaliai, kurioje mokinių imtis buvo atrinkta ne iš visų mokyklų, o iš mokyklų imties, BRR buvo įgyvendintas taip [65]:

1. Mokyklos buvo suporuotos pagal tiesioginį ir netiesioginį sluoksniavimą ir imties sudarymo tvarką.
2. Kiekviename variaciniame sluoksnyje viena mokykla atsitiktinai buvo sunumeruota kaip 1, kita – kaip 2, ir taip buvo apibrėžtas mokyklos variacinis vienetas.
3. Šie variaciniai sluoksniai ir variaciniai vienetai (1, 2), priskirti mokyklos lygmeniu, buvo prijungti prie atitinkamos mokyklos atrinktų mokinių duomenų.
4. Tegu tam tikros statistikos įvertis iš visos mokinių imties žymimas X^* . Jis buvo apskaičiuotas naudojant visos imties svorius.

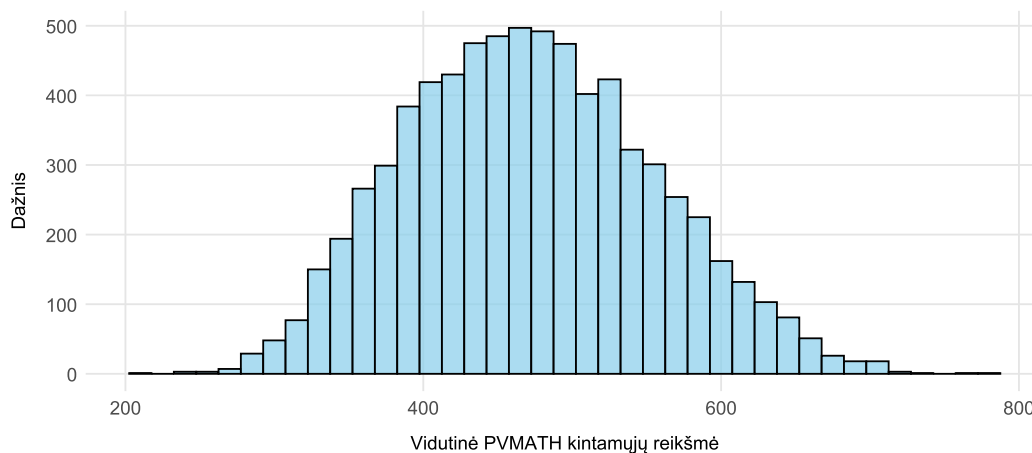
5. Sukurtas 80 pakartojimų įverčių rinkinys X_t^* ($t = 1, \dots, 80$). Kiekvienas iš šių pasikartojančių įverčių buvo sudarytas padauginus vienos iš dviejų kiekvienos stratos mokyklų tyrimo svorius iš 1.5, o likusios mokyklos svorius - iš 0.5. Kurioms mokykloms buvo taikomi padidinti svoriai, o kurioms – sumažinti, buvo nustatyta sistematiškai, remiantis 80 eilės Hadamardo matricos H elementais, kurių reikšmės yra +1 ir -1, o $HH^T = I$.
6. Tada BRR metodo dispersijos įvertis apskaičiuojamas pagal šią formulę:

$$V_{\text{BRR}}(X^*) = 0.05 \sum_{t=1}^{80} \{(X_t^* - X^*)\}. \quad (2.1.2)$$

Atlikus empirinio modeliavimo tyrimus nustatyta, kad BRR metodas yra nešališkas ir nuoseklus paprastiems statistiniams įverčiams (t. y. vidurkiams, gautiems iš paprastų imčių planų), taip pat, kad jis turi įverčių asimptotinę nuoseklumą. Todėl atliekant statistinę analizę, privalu atsižvelgti į šiuos svorius.

2.2. Kintamieji ir jų sąveikos

Matematikos pasiekimai (raštingumas) yra apibrėžiamas naudojant 10 tikėtinų reikšmių kintamųjų $PV1MATH, \dots, PV10MATH$. Šie kintamieji yra šio tyrimo priklausomi kintamieji, o jų reikšmės svyruoja daugiausia tarp 200-800. Šių kintamųjų suvidurkintą pasiskirstymą Lietuvos imtyje galima matyti 3 pav.



3 pav. Kintamųjų $PV1MATH, \dots, PV10MATH$ vidurkių histograma

Nekognityvinėje dalyje PISA tyrime iš apklausų skalių yra sudaromi kontekstiniai latentiniai kintamieji. Pirmiausia jie apdorojami IRT metodais, specifiskai 2PLM (1.2.3 formulė) ir GPLM (1.2.4 formulė), iš kurių kuriais aproksimuojami parametrai. Tada, remiantis šiais parametrais ir mokinio atsakymais, skalės nustatymo procesas sukuria kiekvieno asmens latentinio kintamojo svertinį tikėtinumo įvertį (angl. *Weighted Likelihood Estimate*, WLE). Tada šie įverčiai standartizuojami ir sudaroma skalė, kurios vidurkis yra 0, o standartinis nuokrypis yra 1. Jei skalei sudaryti WLE metodas netinka, kuriamas *indeksas* aritmetiškai transformuojant arba perkoduojant vieną ar daugiau skalės elementų. Remiantis Gagné [35] modeliu iš 208 išvestų ar tolydžių kintamųjų buvo atrinkti 54 kintamieji (detalius jų aprašymus žr. priede), galimai turintys įtakos matematikos pasiekimams. Dėl trūkstamų reikšmių buvimo, galutinei analizei nuspręsta naudoti kintamuosius,

kurių trūkstamų reikšmių yra mažiau nei 30 %. Darbe naudoti 35 kintamieji atspindi individualiems mokiniams būdingas savybes, požiūrį, elgesį ir suvokimą:

- Mokinių praeitis ir demografiniai duomenys:
 1. ESCS – ekonominės, socialinės ir kultūrinės padėties indeksas (2022 m.);
 2. GRADE – mokinio klasės santykinis įvertinimas, palyginti su modaliniu įvertinimu šalyje;
 3. SMRATIO – indeksas: mokinių ir matematikos mokytojų santykis;
 4. STRATIO – mokinio ir mokytojo santykis;
 5. PROPSUPP – personalo dalis pedagoginei pagalbai.
- Su matematika susijęs elgesys ir įsitikinimai:
 6. ANXMAT – matematikos nerimo indeksas;
 7. COGACMCO – kognityvinis aktyvinimas matematikoje: matematinio mąstymo skatinimas;
 8. COGACRCCO – kognityvinis aktyvinimas matematikoje: samprotavimo skatinimas;
 9. EXPO21ST – susipažinimas su matematiniu mąstymu ir XXI a. matematikos užduotimis;
 10. EXPOFA – susipažinimas su formaliosios ir taikomosios matematikos užduotimis;
 11. FAMCON – indeksas: susipažinimas su matematinėmis sąvokomis;
 12. MATHEFF – matematikos saviveiksmingumas: formalioji ir taikomoji matematika – atsakymo parinktys pakeistos 2022 m.;
 13. MATHEF21 – matematikos saviveiksmingumas: matematiniai samprotavimai ir 21-ojo amžiaus įgūdžiai;
 14. MATHPERS – pastangos ir atkaklumas matematikoje;
 15. TEACHSUP – indeksas: mokytojo pagalba matematikoje.
- Bendrosios kognityvinės ir psichologinės nuostatos:
 16. CREATEFF – kūrybinis saviveiksmingumas;
 17. CREATOP – kūrybiškumas ir atvirumas intelektui;
 18. CURIOAGR – smalsumas;
 19. EMOCOAGR – emocijų kontrolė;
 20. FEELSAFE – saugumo jausmas;
 21. IMAGINE – vaizduotė ir nuotykių troškimas;
 22. INFOSEEK – informacijos ieškojimas apie būsimą karjerą;
 23. PERSEVAGR – atkaklumas;
 24. STRESAGR – atsparumas stresui.
- Socialinė ir emocinė patirtis:
 25. BELONG – indeksas: priklausymo jausmas;
 26. BULLIED – mokinio patyčių patirtis;
 27. FAMSUP – šeimos parama;
 28. RELATST – mokinių ir mokytojų santykių kokybė (pagal mokinius).
- Mokyklos ir klasės klimatas:
 29. DISCLIM – indeksas: drausminis klimatas;
 30. NEGSCCLIM – neigiamas mokyklos klimatas;
 31. OPENCUL – atvirumo kultūra / klimatas;

32. STUBEHA – indeksas: su mokiniais susijusius veiksniai, turintys įtakos mokyklos klimatui.

– Mokyklos ir mokytojų kintamieji:

33. EDULEAD – švietimo lyderystė;

34. ENCOURPG – mokyklos skatinimas įtraukti tėvus ar globėjus;

35. MTTRAIN – matematikos mokytojų pasirengimas.

Visi šie kintamieji, išskyrus GRADE, yra tolydūs.

Modeliuojant kintamuosius svarbu atsižvelgti į jų sąveikas, todėl jos irgi buvo įtrauktos modeliavimui. Šias sąveikas ir jų hipotetinių moderuojančių poveikį galima rasti 4 lentelėje.

4 lentelė. Sąveikos, turinčios įtaką mokinių matematikos pasiekimams ir jų pagrindimas arba hipotetinis poveikis

Sąveikos terminas	Hipotetinis moderuojantis poveikis arba pagrindimas
A. ESCS sąveikos	
ESCS * ANXMAT	Neigiamas matematinio nerimo (ANXMAT) poveikis pasiekimams gali būti didesnis mokiniams su žemu ESCS (dėl mažesnių išteklių).
ESCS * FAMSUP	Šeimos paramos (FAMSUP) veiksmingumas gali skirtis priklausomai nuo ESCS lygio.
B. Kognityvinės ir psichologinės nuostatos	
ANXMAT * MATHEFF	Matematinis saviveiksmingumas (MATHEFF) gali sušvelninti neigiamą matematinio nerimo (ANXMAT) poveikį pasiekimams; žemas saviveiksmingumas gali sustiprinti nerimo poveikį.
ANXMAT * MATHEFF21	Matematinis saviveiksmingumas (MATHEFF21) gali sušvelninti neigiamą matematinio nerimo (ANXMAT) poveikį pasiekimams; žemas saviveiksmingumas gali sustiprinti nerimo poveikį.
PERSEVAGR * MATHEF	Atkaklumas (PERSEVAGR) atliekant sudėtingas užduotis gali būti veiksmingesnis, jei mokiniai taip pat turi aukštą saviveiksmingumą (MATHEF) toms užduotims atlikti.
PERSEVAGR * ANXMAT	Atkaklumas (PERSEVAGR) gali padėti mokiniams dirbti nepaisant nerimo dėl matematikos (ANXMAT).
BELONG * BULLIED	Stiprus priklausymo jausmas (BELONG) gali sušvelninti neigiamas psichologines ar akademines patyčių (BULLIED) pasekmes.
CURIOAGR * COGACMCO	Smalsūs mokiniai (CURIOAGR) gali gauti daugiau naudos arba labiau įsitraukti į kognityvinio aktyvinimo strategijas (COGACMCO).
EMOCOAGR * ANXMAT	Geresnė emocinė kontrolė (EMOCOAGR) gali padėti mokiniams veiksmingiau valdyti matematinį nerimą (ANXMAT).
STRESAGR * ANXMAT	Didesnis atsparumas stresui (STRESAGR) gali apsaugoti mokinius nuo neigiamo matematinio nerimo (ANXMAT) poveikio.
C. Mokyklos ir klasės klimatas	
TEACHSUP * DISCLIM	Teigiamas mokytojų paramos (TEACHSUP) poveikis gali sustiprėti esant teigiamam drausmės klimatui (DISCLIM); parama gali būti mažiau veiksminga, jei aplinka destruktivi.
FEELSAFE * BULLIED	Neigiamas patyčių (BULLIED) poveikis pasiekimams gali sustiprėti, jei mokiniai mokykloje apskritai jaučiasi nesaugūs (FEELSAFE).
D. Mokinių savybės ir aplinka	
ANXMAT * TEACHSUP	Mokytojo parama (TEACHSUP) gali būti naudinga mažinant matematinį nerimą (ANXMAT) arba sušvelninant jo neigiamą poveikį pasiekimams.
MATHEFF * COGACMCO	Mokiniai, kurių matematikos saviveiksmingumas yra didesnis (MATHEFF), gali būti imlesni kognityvinį aktyvumą skatinančioms mokymo strategijoms (COGACMCO).

Sąveikos terminas	Hipotetinis moderuojantis poveikis arba pagrindimas
PERSEVAGR * TEACHSUP	Mokytojo parama (TEACHSUP) gali didinti mokinių atkaklumą (PERSEVAGR) arba atkaklumas gali turėti didesnę įtaką pasiekimams, kai mokiniai jaučia paramą.
BELONG * TEACHSUP	Mokytojo parama (TEACHSUP) gali prisidėti prie mokinio priklausymo jausmo (BELONG); teigiamas priklausymo poveikis gali būti stipresnis, kai mokytojas teikia didelę paramą.
INFOSEEK * FAMSUP	Šeimos parama (FAMSUP) gali paskatinti arba palengvinti informacijos apie karjerą paiešką (INFOSEEK).
EMOCOAGR * RELATST	Geresnė emocinė kontrolė (EMOCOAGR) gali pagerinti mokinių ir mokytojų santykius (RELATST) arba geri santykiai gali padėti mokiniams reguliuoti emocijas mokykloje.
E. Mokymo praktika ir mokyklos ištekliai	
EXPOFA * FAMCON	Tikėtina, kad formalių ir taikomųjų matematikos užduočių (EXPOFA) poveikio nauda rezultatams priklauso nuo to, ar mokiniai žino pagrindines matematikos sąvokas (FAMCON). Poveikis, kai su jomis nesusipažįstama, gali būti žalingas.
STRATIO * TEACHSUP	Suvokiamą mokytojų paramą (TEACHSUP) ir jos veiksmingumą gali lemti mokinių ir mokytojų santykis (STRATIO); mažesnis santykis gali būti veiksmingesnis.
MTTRAIN * COGACMCO	Matematikos mokytojų pa(si)rengimo kokybė (MTTRAIN) gali turėti įtakos tam, ar mokytojai (veiksmingai) naudoja kognityvinio aktyvinimo strategijas (COGACMCO).

2.3. Matematinio modeliavimo procesas

Matematinio modeliavimo procesas susideda iš dviejų dalių:

1. trūkstamų reikšmių šalinimas (arba užpildymas);
2. latentinių ryšių modeliavimas.

Kiekviename iš šių etapų taikomi skirtingi matematiniai metodai. Toliau detaliau aprašomi šie metodai kiekvienai daliai atskirai.

2.3.1. Trūkstamų reikšmių užpildymas

Norint pagrįstai taikyti statistinius metodus ir tinkamai interpretuoti rezultatus PISA tyrime, svarbu suprasti trūkstamų reikšmių tipus ir jų atsiradimo šaltinius. Dėl netinkamo trūkstamų duomenų tvarkymo, gali būti gaunami netinkami įverčiai [117].

PISA tyrime yra dviejų tipų kintamieji – kognityviniai ir nekognityviniai (kontekstiniai) kintamieji [65]. *Kognityviniai kintamieji* yra, pavyzdžiui, matematikos raštingumo (pasiekimų) galimos reikšmės (angl. *Plausible Values* – PV). Šių kintamųjų trūkstumai daugiausia yra tyrimo dizaino aspektas (angl. *Missing By Design* – MBD), kadangi ne visi testų klausimai yra pateikiami tam pačiam mokiniui, todėl šių duomenų trūkumas laikomas atsitiktinai trūkstamu (MAR). Pasiekimų kintamųjų kūrimui PISA naudojamas trijų žingsnių procesas.

1. įvertinami kiekvienos srities elementų parametrai, kad būtų galima sudaryti palyginamas skales įvairiose šalyse (ekonomikose), naudojant vienmatį IRT modelį, aprašytą GPCM ir 2PLM formulėse 1.2.3 skyrelyje;
2. įvertinami regresijos koeficientai (Γ) ir liekamųjų dispersijų-kovariacijos matrica (Σ), naudojant pirmame žingsnyje įvertintus elementų parametrus kaip tikruosius įverčius;
3. iš posteriorinių gebėjimų pasiskirstymų, naudojant įvertintus Γ ir Σ , kiekvienam mokiniui kiekvienoje srityje parenkama dešimt tikėtinų pasiekimų įverčių.

Trečiame žingsnyje, remiantis Bajeso teorema, pasiekimų posteriorinis pasiskirstymas, atsižvelgiant į stebėtus atsakymus į klausimus ir kovariates (kontekstinę informaciją), apskaičiuojamas taip:

$$P(\theta_v | \mathbf{x}_v, \mathbf{y}_v, \Gamma, \Sigma) \propto P(\mathbf{x}_v | \theta_v, \mathbf{y}_v, \Gamma, \Sigma) P(\theta_v | \mathbf{y}_v, \Gamma, \Sigma) = P(\mathbf{x}_v | \theta_v) P(\theta_v | \mathbf{y}_v, \Gamma, \Sigma) \quad (2.3.1)$$

čia $\mathbf{x}_v$ – mokinio v atsakymai į klausimus, $\mathbf{y}_v$ – kovariatės.

Tačiau gali būti ir dar du kognityvinių kintamųjų trūkstumų šaltiniai [118] – nepasiekti elementai (angl. *non-reached items*), t.y. testo gale mokinio nepasiektos užduotys, arba trūkstami elementai (angl. *missing items*), t.y. klausimai, į kuriuos mokinytis tiesiog neatsakė. Istoriškai PISA tyrime pastarieji du trūkstumų šaltiniai buvo laikomi neteisingais atsakymais, tačiau nuo 2015 m. mokinio nepasiektų užduočių dalis yra naudojama kaip latentinio modelio prognozuojamasis kintamasis [117], nes nepasiektos užduotys nebūtinai rodo, kad mokinytis nemoka jų atlikti. Pasiekimų kintamiesiems PISA naudoja papildomus metodus, kad užpildytų trūkstamas reikšmes, todėl duomenų rinkinyje kognityvinių kintamųjų trūkstumų reikšmių nėra.

Tyrimų, kuriuose pateikiami klausimynai, duomenyse *nekognityvinių kintamųjų* (dar kitaip vadinamų kontekstinių kintamųjų) trūkstamos reikšmės gali atsirasti dėl dviejų priežasčių [65, 119]:

1. elemento (angl. *item*) neatsakymas – tyrimo dalyvio (mokinio, mokytojo ar kt.) neatsakymas į konkrečius klausimus klausimynuose;
2. vieneto (angl. *unit*) neatsakymas – konkretaus tyrimo dalyvio visiškas nedalyvavimas apklausoje.

Neatsakymus į nekognityvinius klausimus gali lemti keletas veiksnių, tarp jų respondento motyvacija atsakyti į klausimą ir didėjantis nuovargis [120] bei klausimų ypatybės, pavyzdžiui, jų formatas, ilgis, išdėstymo tvarka, kompleksiskumas [121, 122]. PISA 2018 m. tyrime vidutinė neatsakymo į klausimą tikimybė klausimyno pradžioje buvo 2 %, o gale – 11 % [123].

Nekognityviniai kintamieji PISA gali būti MAR arba MNAR. MAR atveju gali būti laikoma, pavyzdžiui, tikimybė, kad mokinytis nepraneš tėvų pajamų dydžio, kuri gali būti susijusi su tėvų išsilavinimo lygmeniu (kitu stebimu nekognityviniu kintamuoju). MAR atvejis taip pat yra grindžiamas tyrimo metodologija – matricine atranka, todėl šiame darbe bus trūkstamoms reikšmėms užpildyti naudojami vidurkio, modos, daugkartinio užpildymo grandininėmis lygtimis (angl. *Multiple Imputation by Chained Equations*, MICE), k-artimiausių kaimynų (angl., *k-Nearest Neighbor*, kNN), missForest atsitiktinio miško (angl. *random forest*, RF) metodai.

- MICE parametrai: $m = 10$, $\text{maxit} = 15$, tolydžiųjų kintamųjų jų modelis: pmm (predictive mean matching), binarinių – logreg, tvarkos skalės – polyreg;
- missForest parametrai $\text{ntree} = 200$, $\text{maxit} = 15$;
- kNN parametras – kaimynų skaičius $k = \sqrt{N}$, Gower'io atstumas.

Šių metodų efektyvumas yra vertinamas tikrinant, kaip duomenys su užpildytais reikšmėmis atspindi kintamųjų skaitines charakteristikas – vidurkį ir standartinį nuokrypį. Dėl to, kad duomenis reikia imputuoti daug kartų ir pritaikyti atrankos svorius, sunku palyginti skirstinius.

Tačiau PISA duomenų rinkiniui būdinga hierarchinė struktūra (mokiniai mokyklose), todėl į tai reikia atsižvelgti užpildant trūkstamas reikšmes. Standartiniai užpildymo metodai gali netinkamai priklausomybes, atsirandančias dėl suskirstymo į grupes nors ir būti veiksmingi vieno lygio duomenims, todėl atliekant tolesnę daugiapakopę analizę gali atsirasti šališkų parametrų įverčių arba neteisingų standartinių paklaidų. Todėl pagrindiniam modeliavimo etapui buvo atsižvelgta į modelių tinkamumą ir visų duomenų analizei pasirinktas jungtinio daugiapakopio modeliavimo metodas,

atsižvelgiantis į hierarchinę duomenų struktūrą, tačiau naudojantis tą patį metodinį mechanizmą, aprašytą viršuje ir geriausiai veikiančią PISA duomenims.

2.3.2. Matematinis pasiekimų modeliavimas

Dėl duomenų trūkstamumo, kuriant latentinius kintamuosius ir modelius įverčiai ir įvairių statistikų rezultatai skaičiuojami m užpildytų duomenų rinkinių. Rezultatai (parametrų įverčiai), gauti atlikus m analizes, apibendrinami taikant Rubino taisyklės [124] – skaičiuojant bendrą parametro įvertį $\hat{\theta}$ bei dispersijas užpildyto duomenų rinkinio viduje (angl. *within*) σ_W^2 ir tarp (angl. *between*) užpildytų duomenų rinkinių σ_B^2 [125]:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i, \quad (2.3.2)$$

$$\sigma_W^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m SE_i^2, \quad (2.3.3)$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\theta_i - \hat{\theta})^2}{m - 1}, \quad (2.3.4)$$

čia SE_i – standartinė paklaidos užpildytame duomenų rinkinyje i . Bendra dispersija σ_{Total}^2 randama pagal formulę [125]:

$$\sigma_{\text{Total}}^2 = \sigma_W^2 + \sigma_B^2 + \frac{\sigma_B^2}{m}. \quad (2.3.5)$$

Šie sklaidos rodikliai (σ_W^2 , σ_B^2 , σ_{Total}^2) dažnai nėra vertinami tiesiogiai, o naudojami statistikoms ir p reikšmėms rasti.

Pačiam modelio kūrimui naudotas daugiapakopis modeliavimas (angl. *Multi-Level Modelling*, MLM). Darbe naudotas tiesinis dviejų lygmenų mišrių efektų modelis. Šis modelis pasirinktas todėl, kad yra taikomas stebėjimų grupavimo pagal aukštesnius vienetų poveikiui matuoti, o nagrinėjamuose duomenyse yra mokinių grupavimas pagal mokyklas. Paprasti regresijos modeliai hierarchiniuose duomenyse gali turėti koreliuotas paklaidas, iškreiptus parametrų (pvz., regresijos koeficientų) standartinių paklaidų įverčius ir iš to gaunamas neteisingas išvadas interpretuojant kintamųjų svarbą priklausomo kintamo modeliavimui [126]. Be to, kai duomenys atrenkami imties būdu, imties vienetas kaip grupavimo kintamasis gali būti laikomas atsitiktiniu (mišriu) poveikiu. Tiesinio pobūdžio modeliai yra tipiškai paprasčiau interpretuojami, o netiesiškumą juose galima įgyvendinti įtraukiant kintamųjų sąveikas ar transformacijas (pavyzdžiui, pridedant tam tikro kintamojo kvadratinę reikšmę kaip atskirą kintamąjį). Be to, priešingai nei mašininio ar dirbtinio intelekto metodai, kurie dabar dažnai naudojami tokiems duomenims modeliuoti ir paaiškinti, tiesiniams daugiapakopiams modeliams yra lengviau įgyvendinti ir pritaikyti tyrimo dizaino ypatumus, pavyzdžiui tikėtinų reikšmių agregavimą, atsižvelgimą į imties svorius ir BRR metodologiją – esmines PISA tyrimo dizaino dalis.

Mišrūs modeliai apima fiksuotus ir atsitiktinius efektus. *Fiksuoti efektai* yra nekintantys parametrai, pavyzdžiui, bendra regresijos kreivė ar laisvasis narys β_0 . *Atsitiktiniai efektai* yra parametrai, kurie yra laikomi atsitiktiniais dydžiais. Pavyzdžiui, daugialypėje regresijos lygtyje:

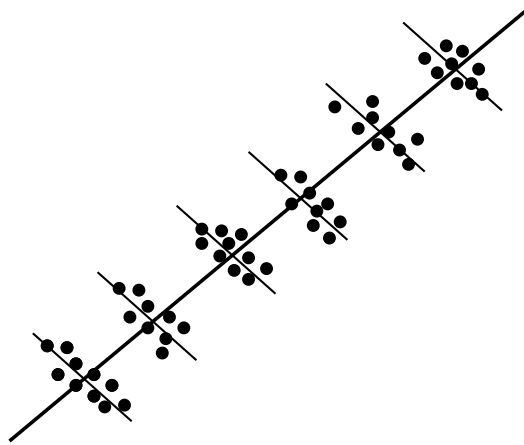
$$Y = \beta_0 + \beta X + \epsilon \quad (2.3.6)$$

parametrai $\beta = [\beta_1, \dots, \beta_n]^T$ gali būti laikomi atsitiktiniais dydžiais, iš kurių kiekvienas β_m ($m = 1, \dots, n$) yra pasiskirstęs Gauso skirstiniu su vidurkiu μ_m ir standartiniu nuokrypiu σ_m :

$$\beta_m \sim \mathcal{N}(\mu_m, \sigma_m). \quad (2.3.7)$$

Taigi tiek duomenys yra atsitiktiniai dydžiai, tiek parametrai yra atsitiktiniai kintamieji (viename lygyje), bet fiksuoti kitame, aukščiausiame, lygyje [127].

Mišrių ir fiksuotų efektų vizuali reprezentacija tiesiniame modelyje yra 4 pav.



4 pav. Mišrių tiesinių modelių poveikis grupėje (fiksuoti efektai; bendra regresijos kreivė), ir tarp grupių (atsitiktiniai efektai; kreivės skirtingose grupėse) [127]

Apibendrintą dviejų lygmenų tiesinį mišrių efektų modelį matematiškai galima išreikšti dviem etapais [126–128]. Tegu Y_{ij} – stebinio i ($i = 1, \dots, n_j$) priklausomojo kintamojo reikšmė grupėje j ($j = 1, \dots, J$) ir tegu X_{pij} – pirmo lygmens p -tojo ($p = 1, \dots, P$) nepriklausomo kintamojo stebiniui i grupėje j reikšmė, o $X_{0ij} = 1$. Tada pirmo lygmens modelis išreiškiamas taip:

$$Y_{ij} = \sum_{p=0}^P \beta_{pj} X_{pij} + e_{ij}, \quad (2.3.8)$$

čia β_{pj} – p -tojo ($p = 1, \dots, P$) nepriklausomo kintamojo stebiniui i grupėje j koeficientas (β_{0j} yra laisvasis narys); e_{ij} – atsitiktinė paklaida stebiniui i grupėje j . Daroma prielaida, kad šios paklaidos pasiskirsčiusios normaliai, t.y. $e_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$, kur σ_e^2 yra paklaidų dispersija.

Antrojo lygmens modelis aprašo, kaip pirmo lygmens koeficientai β_{pj} kinta grupėse. Kiekvienas β_{pj} gali būti modeliuojamas kaip grupės (antro) lygmens nepriklausomų kintamųjų W_{qj} ($q = 1, \dots, Q$) funkcija ir grupės lygmens atsitiktiniu efektu u_{pj} :

$$\beta_{pj} = \gamma_{p0} + \sum_{q=1}^Q \gamma_{pq} W_{qj} + u_{pj}, \quad (2.3.9)$$

čia γ_{p0} yra vidutinis X_{pij} efektas visoms grupėms (laisvasis β_{pj} narys); γ_{pq} – fiksuoti efektai, parodantys, kaip antro lygmens nepriklausomi kintamieji W_{qj} paveikia atitinkamus koeficientus β_{qj} ; u_{pj} – atsitiktinis (mišrus) grupės j poveikis p -ajam koeficientui, rodantis grupės j koeficiento β_{pj} nuokrypį, gautą įvertinus likusius lygties narius γ (paklaidos atitikmuo antram lygmeniui). Daroma prielaida, atsitiktinių efektų vektorius j -tajai grupei $\mathbf{u}_j = [u_{0j}, u_{1j}, \dots, u_{pj}]^T$ yra pasiskirstęs daugiamačiu Gauso pasiskirstymu $\mathbf{u}_j \sim N(0, G)$, kur G yra $(P+1) \times (P+1)$ atsitiktinių efektų kovariacijos matrica.

Įsistatę (2.3.9) į (2.3.8) gauname:

$$Y_{ij} = \sum_{p=0}^P \left(\gamma_{p0} + \sum_{q=1}^Q \gamma_{pq} W_{qj} + u_{pj} \right) X_{pij} + e_{ij}. \quad (2.3.10)$$

Išskleidę (2.3.10) galime modelį pakeisti iš lygmenų struktūrinės formos į efektų (fiksuotų ir mišrių) struktūrinę formą:

$$Y_{ij} = \underbrace{\left(\sum_{p=0}^P \gamma_{pj} X_{pij} + \sum_{p=0}^P \sum_{q=1}^Q \gamma_{pq} W_{qj} X_{pij} \right)}_{\text{Fiksuoti efektai}} + \underbrace{\left(\sum_{p=0}^P u_{pj} X_{pij} + e_{ij} \right)}_{\text{Atsitiktiniai efektai}}. \quad (2.3.11)$$

Sandauga $W_{qj} X_{pij}$ atspindi sąveiką tarp pirmo ir antro lygmenų nepriklausomų kintamųjų.

Mišrių efektų modelių tinkamumui įvertinti naudojami du determinacijos koeficientai – ribinis (angl. *marginal*) ir sąlyginis (angl. *conditional*), kurie skaičiuojami įvertinant modelio dispersijas [129]. Tarkime, kad $\sigma_F^2 = \text{var}(\beta X)$ – fiksuotų efektų dalies dispersija, σ_A^2 – atsitiktinių efektų dalies dispersija, apskaičiuojama suvidurkinant matricos G pagrindinės įstrižinės elementus, $\sigma_E^2 = \sigma_e^2$ – (pirmo lygmens) paklaidų dispersija. Tada ribinis determinacijos koeficientas R_m^2 , parodantis, kokią visos dispersijos dalį paaiškina tik fiksuoti efektai, apskaičiuojamas pagal formulę:

$$R_m^2 = \frac{\sigma_F^2}{\sigma_F^2 + \sigma_A^2 + \sigma_E^2}. \quad (2.3.12)$$

Sąlyginis determinacijos koeficientas R_c^2 , parodantis, kokią visos dispersijos dalį paaiškina fiksuoti ir atsitiktiniai efektai, apskaičiuojamas pagal formulę:

$$R_c^2 = \frac{\sigma_F^2 + \sigma_A^2}{\sigma_F^2 + \sigma_A^2 + \sigma_E^2}. \quad (2.3.13)$$

2.4. Programinė įranga

Tyrime naudota programinė įranga R ir joje esančios specializuotos bibliotekos duomenų tvarkymui, trūkstamų reikšmių priskyrimui ir statistiniam modeliavimui. Duomenys buvo tvarkomi ir vizualizuojami daugiausia naudojant `tidyverse` ekosistemą.

Trūkstamiems duomenims tvarkyti daugiamatė imputacija (užpildymas) grandininėmis lygtimis buvo atlikta naudojant biblioteką `mice`, artimiausių kaimynų metodui naudota `VIM` biblioteka, o atsitiktinio miško metodui – `missForest` biblioteka. Be to, hierarchiniam daugiapakopiam daugkartiniam priskyrimui buvo naudojama biblioteka `jomo`, kurios algoritmai remiasi tuo pačiu mechanizmu, kaip `mice`, t.y. Gibbs'o atranka [67]. Taip pat naudota biblioteka `mitml`, kurioje siūlomos priemonės trūkstamų reikšmių užpildymo procesui valdyti ir analizių rezultatams sujungti.

Statistiniam modeliavimui tiesiniai mišrių efektų modeliai buvo pritaikyti naudojant paketą `lme4`. Kadangi PISA tyrimas naudoja specifinį tyrimo dizainą – tikėtinas reikšmes bei svorius mokiniams – tinkamam statistikų ir skaitinių rezultatų apskaičiavimui buvo naudojama biblioteka `survey` ir `BIFIEsurvey`.

3. Tyrimo rezultatai ir jų aptarimas

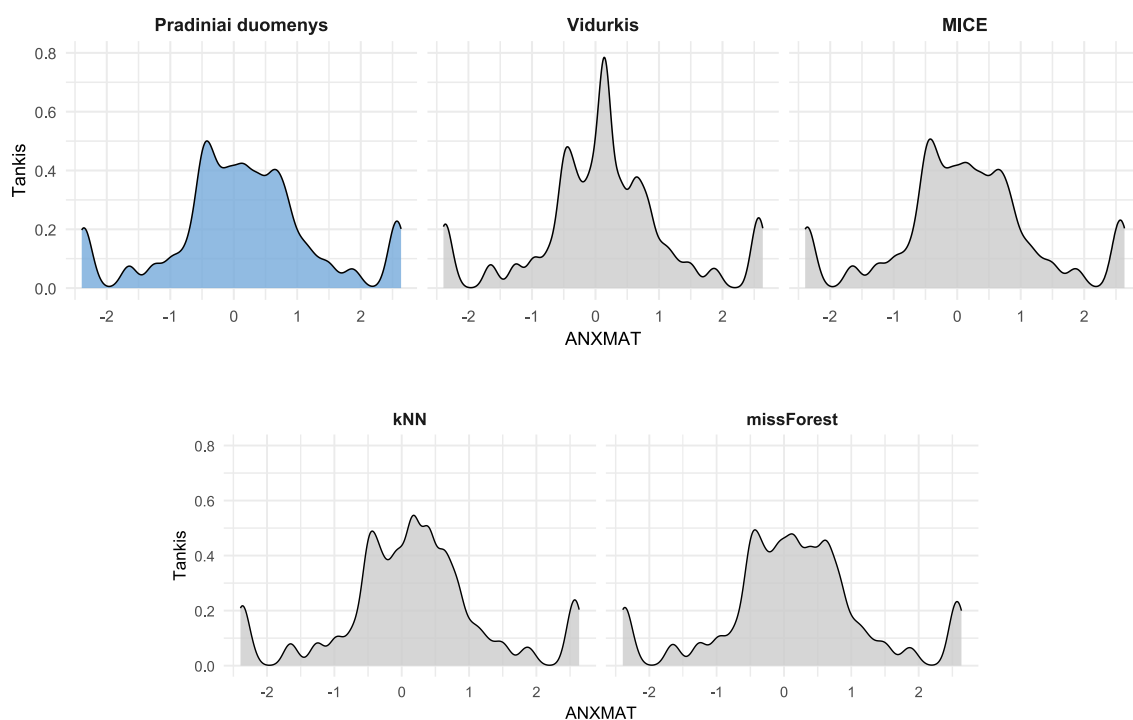
3.1. Trūkstatų duomenų reikšmių užpildymo metodų lyginamosios analizės rezultatai

Trūkstatų reikšmių užpildymo metodų rezultatus galima rasti 5 lentelėje. Daugkartinio užpildymo metodams (missForest, MICE), kontekstinė informacija buvo suteikta tik šiame skyrelyje minimais kintamaisiais. Taip pat buvo paskaičiuotas vienmatės regresijos koeficientas $PV1MATH = \beta_0 + \beta X$, čia X yra vienas iš keturių kintamųjų (ESCS, ANXMAT, MATHEFF, BELONG).

5 lentelė. Pagrindiniai statistiniai įverčiai ir regresijos koeficientai po užpildymo

Kintamasis			ESCS	ANXMAT	MATHEFF	BELONG
Trūkstatų reikšmių skaičius			234	694	631	204
Originalūs įverčiai		M	0.058	0.155	-0.43	-0.12
		SD	0.85	1.151	1.13	0.906
Užpildymo metodas	Vidurkis	M	0.058	0.153	-0.43	-0.12
		SD	0.837	1.092	1.079	0.893
		β^*	0.322	-0.34	0.478	0.091
	missForest	M	0.054	0.163	-0.45	-0.12
		SD	0.838	1.1	1.088	0.894
		β^*	0.325	-0.35	0.491	0.093
	MICE	M	0.06	0.151	-0.44	-0.12
		SD	0.849	1.149	1.132	0.905
		β^*	0.323	-0.34	0.486	0.09
	kNN	M	0.055	0.165	-0.45	-0.13
		SD	0.838	1.096	1.082	0.894
		β^*	0.324	-0.35	0.488	0.094

Lentelėje M yra vidurkis, o SD – standartinis nuokrypis. Palyginus pradinių duomenų skaitines charakteristikas su trūkstatų reikšmių užpildymo metodų išvestimis MICE metodas yra pastoviausias ir išlaiko panašias vidurkio bei sklaidos charakteristikas. Tačiau duomenys nėra būtinai normaliai pasiskirstę, todėl verta į rezultatus atsižvelgti vizualiai. Pavyzdžiui, ANXMAT kintamojo pasiskirstymas yra 5 pav.



5 pav. ANXMAT kintamojo pasiskirstymas pradinuose duomenyse ir viename pilnai užpildytame duomenų rinkinyje naudojant skirtingus trūkstamų reikšmių užpildymo metodus.

Paveikslėlyje matyti, kad ir čia MICE metodas išlieka panašiausias su pradiniu duomenų skirstiniu; didelių panašumų su pradine imtimi turi ir missForest atsitiktinio miško metodas.

Papildomai analizei pasirinkti kategoriniai kintamieji:

- MATHPREF – mokinio (pomėgio) pirmenybė matematikai, o ne kitiems pagrindiniams dalykams (kalboms, gamtos mokslams);
- ST270Q01JA – kaip dažnai mokytojas domisi kiekvieno mokinio mokymusi. Likerto skalėje: 1 – labai dažnai; 4 – (beveik) niekada.

Ir tarp šių kintamųjų MICE metodas geriausiai išlaiko proporcijas (žr. 6 lentelę), todėl tolimesnėje analizės dalyje nuspręsta naudoti jį.

6 lentelė. Kategorinių kintamųjų skaitinės charakteristikos po trūkstamų reikšmių užpildymo

Kintamasis		MATHPREF		ST270Q01JA			
Trūkstamų reikšmių skaičius		572		447			
Kategorija		Taip	Ne	1	2	3	4
Originali proporcija (%)		0.863	0.136	0.194	0.311	0.35	0.146
Metodas, proporcija (%)	Moda	0.876	0.124	0.188	0.288	0.389	0.135
	RF	0.875	0.125	0.196	0.313	0.35	0.141
	MICE	0.866	0.134	0.199	0.309	0.348	0.144
	KNN	0.876	0.124	0.189	0.315	0.361	0.135

3.2. Matematinis pasiekimų modelis

Remiantis dviejų lygmenų tiesinio mišrių efekto modelio lygtimis iš 2.3.2 skyrelio, koncepcinė dviejų lygmenų (mokinio ir mokyklos) matematinių pasiekimų modelio specifikacija atrodo taip:

$$PVMATH_{ij} = \text{Fiksuoti efektai}_{ij} + \text{Atsitiktiniai efektai}_{ij} + e_{ij}, \quad (3.2.1)$$

čia $PVMATH_{ij}$ bendras $PV1MATH, \dots, PV10MATH$ įvertinimas, gautas įvertinus parametrus pagal Rubino taisyklės ir remiantis PISA gairėmis [65] dėl tikėtinų reikšmių skaičiavimo.

Fiksuotų efektų dalis randama taip:

$$\begin{aligned} \text{Fiksuoti efektai}_{ij} = & \gamma_{00} + \sum_p \gamma_p (\text{Pirmo lygmens veiksnys}_p)_{ij} + \\ & + \sum_k \gamma_q (\text{Antro lygmens veiksnys}_q)_j + \\ & + \sum_s \gamma_s (\text{Sąveika}_s)_{ij}, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

čia γ_{00} yra bendrasis laisvasis narys;

$(\text{Pirmo lygmens veiksnys}_p)_{ij}$ – p -tasis 1 lygio mokinio i mokykloje j nepriklausomas kintamasis; γ_p yra jų atitinkami fiksuoti koeficientai;

$(\text{Antro lygmens veiksnys}_q)_j$ – q -tasis mokyklos j 2 lygio nepriklausomas kintamasis; γ_q yra jų atitinkami fiksuoti koeficientai;

$(\text{Sąveika}_s)_{ij}$ – s -tasis mokinio i mokykloje j sąveikos kintamasis iš 4 lentelės; γ_s yra jų atitinkami fiksuoti koeficientai.

Atsitiktinių efektų dalyje pasirinkta papildomai įtraukti du kintamuosius, potencialiai turinčius įtaką regresijų kreivių kryptį. Pasirinkti du kintamieji pagal Spearman'o koeficientą daugiausia koreliuojantys su matematikos pasiekimas. Atsitiktinių efektų dalis atrodo taip:

$$\text{Atsitiktiniai efektai}_{ij} = u_{0j} + u_{1j} \text{ESCS}_{ij} + u_{2j} \text{MATHEFF}_{ij}, \quad (3.2.3)$$

čia ESCS_{ij} ir MATHEFF_{ij} yra atitinkamų nepriklausomų kintamųjų reikšmės mokiniui i mokykloje j ; u_{0j} atsitiktinis mokyklos j laisvojo nario nuokrypis nuo bendrojo laisvo nario γ , rodantis mokyklos j poveikį matematikos pasiekimams, kontroliuojant visus prognozuojančius veiksnus; u_{1j} yra atsitiktinis ESCS nuokrypis mokykloje j nuo vidutinio ESCS (kuris yra vienas iš fiksuotų efektų pirmojo lygmens veiksmių) nuokrypio. Jis parodo, kaip skiriasi ESCS ir matematikos pasiekimų ryšys skirtingose mokyklose; u_{2j} yra atsitiktinis MATHEFF nuokrypio nuokrypis mokykloje j nuo vidutinio MATHEFF (kuris yra vienas iš fiksuotų efektų pirmojo lygmens veiksmių) nuokrypio.

Modelio prielaidos:

1. Mokinio lygmens liekanos yra nepriklausomos ir vienodai pasiskirsčiusios Gauso skirstiniu:

$$r_{ij} \sim N(0, \sigma_r^2), \quad (3.2.4)$$

čia σ_r^2 yra mokinio lygmens sklaidos dispersija.

2. Mokyklos lygmens atsitiktiniai efektai: Atsitiktiniai efektai kiekvienai mokyklai j (u_{0j}, u_{1j}, u_{2j}) yra pasiskirstę pagal daugiamačią (trimatį) Gauso skirstinį:

$$\begin{pmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \\ u_{2j} \end{pmatrix} \sim MVN \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, G \right), \quad (3.2.5)$$

čia G yra 3x3 atsitiktinių efektų kovariacijos matrica 2 (mokyklos) lygmenyje:

$$G = \begin{pmatrix} \sigma_{u0}^2 & \sigma_{u01} & \sigma_{u02} \\ \sigma_{u01} & \sigma_{u1}^2 & \sigma_{u12} \\ \sigma_{u02} & \sigma_{u12} & \sigma_{u2}^2 \end{pmatrix}, \quad (3.2.6)$$

čia: σ_{u0}^2 – atsitiktinių laisvųjų narių dispersija tarp mokyklų;

σ_{u1}^2 – atsitiktinių ESCS krypčių (angl. *slopes*) dispersija tarp mokyklų;

σ_{u2}^2 – MATHEFF krypčių dispersija tarp mokyklų;

σ_{u01} – atsitiktinių laisvųjų narių ir atsitiktinių ESCS krypčių kovariacija;

σ_{u02} – atsitiktinių laisvųjų narių ir atsitiktinių MATHEFF krypčių kovariacija;

σ_{u12} – ESCS atsitiktinių krypčių ir MATHEFF atsitiktinių krypčių kovariacija.

3. Individo (mokinio) lygmens liekanos e_{ij} nepriklauso nuo mokyklos lygmens atsitiktinių efektų u_{0j}, u_{1j}, u_{2j} .
4. Nepriklausomi kintamieji tarpusavyje nekoreliuoja (nėra multikolinearumo).

Kaip aptarta 2.2 skyrelyje, modelyje yra pirmo ir antro lygmens kintamieji, jų tam tikros sąveikos. Į modelį papildomai nuspręsta įtraukti tam tikrų kintamųjų vidurkių reikšmes kaip antro lygmens kintamuosius, nes tai gali atskleisti papildomos informacijos apie pasiekimus. Pavyzdžiui, 42 43 vidutinė ESCS reikšmė galėtų atspindėti vietovės, kurioje yra mokykla, ekonominį kontekstą, kuris dažnai skiriasi priklausomai nuo to, ar mokykla yra kaime ar mieste. Tokių kintamųjų kaip BELONG ar BULLIED vidurkiai taip pat gali parodyti bendrą mokyklos socialinį klimatą. Visi kintamieji, įtraukti į pradinį modelį, yra 7-oje lentelėje.

7 lentelė. Pradiniai modelio kintamieji

Kintamojo tipas	Kintamieji
Atsitiktiniai efektai (kryptys)	MATHEFF, ESCS
Pirmo lygmens kintamieji	ANXMAT, I(ANXMAT^2), BELONG, I(BELONG^2), BULLIED, I(BULLIED^2), COGACMCO, COGACRCO, I(COGACRCO^2), CREATEFF, CREATOP, CURIOAGR, I(CURIOAGR^2), DISCLIM, EMOCOAGR, ESCS, EXPO21ST, EXPOFA, I(EXPOFA^2), FAMCON, FAMSUP, I(FAMSUP^2), FEELSAFE, I(FEELSAFE^2), GRADE, IMAGINE, I(IMAGINE^2), INFOSEEK, I(INFOSEEK^2), MATHEF21, MATHEFF, MATHPERS, I(MATHPERS^2), PERSEVAGR, RELATST, SCHSUST, I(SCHSUST^2), STRESAGR, TEACHSUP, I(TEACHSUP^2)

Kintamojo tipas	Kintamieji
Antro lygmens kintamieji	EDULEAD, ENCOURPG, MTTRAIN, NEGSCLIM, OPENCUL, PROPSUPP, SMRATIO, STRATIO, STUBEHA, School_Avg_ESCS, School_Avg_TEACHSUP, School_Avg_DISCLIM, School_Avg_BELONG, School_Avg_BULLIED, School_Avg_FEELSAFE, School_Avg_RELATST
Sąveikos	ESCS * ANXMAT, ESCS * FAMSUP, ANXMAT * MATHEFF, ANXMAT * MATHEF21, PERSEVAGR * MATHEF, PERSEVAGR * ANXMAT, BELONG * BULLIED, CURIOAGR * COGACMCO, EMOCOAGR * ANXMAT, STRESAGR * ANXMAT, TEACHSUP * DISCLIM, FEELSAFE * BULLIED, ANXMAT * TEACHSUP, MATHEFF * COGACMCO, PERSEVAGR * TEACHSUP, BELONG * TEACHSUP, INFOSEEK * FAMSUP, EMOCOAGR * RELATST, EXPOFA * FAMCON, STRATIO * TEACHSUP, MTTRAIN * COGACMCO

3.3. Matematinio pasiekimų modelio parametrų įvertinimas ir prielaidų tikrinimo rezultatai

Pradinis modelis buvo modifikuojamas tol, kol visi statistiškai nereikšmingi kintamieji buvo išimti. Tam buvo taikyta atbulinė žingsninė regresija, atmetant kintamuosius po vieną pagal didžiausią p reikšmę. Išlikę modelio kintamieji pavaizduoti 8 lentelėje.

8 lentelė. Galutiniai modelio reikšmingi kintamieji po žingsninės regresijos, $p < 0.05$

Kintamojo tipas	Kintamieji
Atsitiktiniai efektai (kryptys)	MATHEFF, ESCS
Pirmo lygmens kintamieji	ANXMAT, I(ANXMAT ²), I(BELONG ²), I(BULLIED ²), COGACMCO, COGACRCO, I(COGACRCO ²), CREATEFF, CURIOAGR, I(CURIOAGR ²), , ESCS, EXPO21ST, I(EXPOFA ²), FAMCON, FAMSUP, I(FAMSUP ²), I(FEELSAFE ²), GRADE, IMAGINE, INFOSEEK, I(INFOSEEK ²), MATHEF21, MATHEFF, MATHPERS, I(MATHPERS ²), SCHSUST, I(SCHSUST ²), STRESAGR, I(TEACHSUP ²)
Antro lygmens kintamieji	EDULEAD, STRATIO, School_Avg_ESCS, School_Avg_DISCLIM, School_Avg_BELONG
Sąveikos	ANXMAT:MATHEFF, FAMSUP:INFOSEEK, ANXMAT:STRESAGR, ANXMAT:TEACHSUP, COGACMCO:MATHEFF

Siekiant pagrįsti atsitiktinių efektų pasirinkimus, buvo lyginamas paprastesnis modelis tik su atsitiktiniais mokyklų laisvaisiais su sudėtingesniu modeliu, į kurį įtraukti socialinio, ekonominio ir kultūrinio statuso (ESCS) ir mokinių matematikos saviveiksmingumo (MATHEFF) kintamieji. Tikimybių santykio testas (angl. *Likelihood Ratio Test*) parodė, kad modelis su papildomais atsitiktiniais efektais statistiškai reikšmingai tinka geriau ($\chi^2(5) = 101.99, p < 0.001$). Modelyje su MATHEFF ir ESCS atsitiktiniais efektais mažesnis Akaikės informacijos kriterijus (AIC; 80244 ir 80336) ir Bajeso informacijos kriterijus (BIC; 80589 ir 80646), todėl gautas modelis geriau atspindi Lietuvos švietimo kontekste esantį heterogeniškumą.

Vertinant šiuos kintamuosius kaip fiksuotus efektus, matyti, kad jie yra vidutiniškai reikšmingi teigiami matematikos pasiekimų prognozės veiksniai Lietuvoje (MATHEFF – 18.811, ESCS – 14.192), tačiau jų įtaka skirtingose ugdymo įstaigose nėra vienoda (žr. 9 lentelę). MATHEFF atveju mokyklai būdingi nuolydžiai smarkiai svyravo nuo šiek tiek neigiamo ryšio (-1.481) vienose mokyklose iki labai stipraus teigiamo ryšio (33.438) kitose mokyklose. Tai rodo, kad saviveiksmingumas lemia aukštesnius pasiekimų rezultatus skirtingu dydžiu priklausomai nuo

mokyklos konteksto. ESCS poveikis tarp mokyklų taip pat labai skirtingas – kai kuriose mokyklose ryšys tarp mokinių socialinės, ekonominės ir kultūrinės situacijos ir matematikos pasiekimų yra stiprus (28.078), o kai kuriose mokyklose net pastebimas poveikio pasikeitimas iš teigiamo į neigiamą (-4.185).

9 lentelė. Top 3 didžiausi ir mažiausi ESCS ir MATHEFF kintamųjų kryčių koeficientai pagal mokyklas

Kintamasis			
ESCS		MATHEFF	
Mokyklos ID	Krypties koeficientas	Mokyklos ID	Krypties koeficientas
44000237	-4.185	44000237	-1.481
44000148	-4.076	44000031	-0.596
44000031	-2.272	44000253	0.316
44000264	25.646	44000288	31.157
44000081	26.232	44000076	31.825
44000266	28.078	44000085	33.439

Efektų skirtumus tarp mokyklų galima įvertinti sklaida – mokyklų laisvojo nario dispersija yra lygi 544.33, o kryčių koeficientų kintamųjų ESCS ir MATHEFF dispersijos yra atitinkamai 72.84 ir 69.28. Teigiamos koreliacijos yra tarp atsitiktinių laisvųjų narių ir ESCS (0.35) ir MATHEFF (0.70), taip pat tarp pačių ESCS ir MATHEFF kryčių (0.35). Toks kintamumas rodo, kad universalių intervencinių priemonių gali nepakakti, todėl reikia taikyti į aplinkybes atsižvelgiančias intervencines strategijas ir svarbu nustatyti bei mokytis iš mokyklų, kuriose veiksmingiau užtikrinami aukšti matematikos pasiekimai nepriklausomai nuo mokinių socio-ekonominės padėties ar tikėjimo savimi, ir mokytis iš jų. O didelė mokyklos lygmens ESCS ir MATHEFF kryčių koeficientų dispersija yra svarbi modelio ypatybė, nes heterogeniškumas išlieka ir po to, kai modelyje atsižvelgiama į mokyklos charakteristikas (žr. 8 lentelės antro lygmens kintamuosius). Tikėtina, kad be vidutinės mokyklos kintamųjų įtakos, kiti PISA tyrime nematuojami mokyklos lygmens veiksniai (mokyklos aplinkos skirtumai) lemia ESCS ir MATHEFF sąsają su matematikos pasiekimais.

Kiekvienam likusiam modelio kintamajam buvo paskaičiuota jo koeficiento reikšmė, standartinė paklaida bei reikšmingumo statistika. Papildomai prielaidų tikrinimui paskaičiuotas multikolinearumo vertinimo rodiklis VIF (žr. 10 lentelę).

10 lentelė. Galutinio modelio koeficientų reikšmės

Kintamojo koeficientas γ	Koef. Reikšmė	St. paklaida	t reikšmė	p reikšmė	VIF
γ_{00} (laisvasis narys)	495.959	8.694	57.049	0.000	–
ANXMAT	-13.460	0.707	-19.026	0.000	1.332
ANXMAT:MATHEFF	-2.953	0.465	-6.347	0.000	1.335
ANXMAT:STRESAGR	2.377	0.515	4.614	0.000	1.260
ANXMAT:TEACHSUP	-1.257	0.527	-2.385	0.017	1.190
COGACMCO	-5.389	0.925	-5.828	0.000	1.606
COGACMCO:MATHEFF	1.112	0.565	1.969	0.049	1.183
COGACRCO	3.440	0.876	3.928	0.000	1.461

Kintamojo koeficientas γ	Koef. Reikšmė	St. paklaida	t reikšmė	p reikšmė	VIF
CREATEFF	-8.803	0.783	-11.249	0.000	1.381
CURIOAGR	4.581	0.858	5.340	0.000	1.259
EDULEAD	-3.151	1.919	-1.641	0.046	1.016
ESCS	14.192	1.089	13.028	0.000	1.119
EXPO21ST	-3.292	0.799	-4.118	0.000	1.212
FAMCON	1.737	0.630	2.758	0.006	1.245
FAMSUP	-2.926	0.721	-4.056	0.000	1.222
FAMSUP:INFOSEEK	2.492	0.506	4.925	0.000	1.042
GRADE	23.387	2.657	8.802	0.000	1.029
I(ANXMAT^2)	1.448	0.383	3.783	0.000	1.357
I(BELONG^2)	-1.719	0.443	-3.880	0.000	1.090
I(BULLIED^2)	-1.618	0.497	-3.258	0.001	1.066
I(COGACRCO^2)	-1.475	0.408	-3.614	0.000	1.225
I(CURIOAGR^2)	-1.096	0.385	-2.849	0.004	1.083
I(EXPOFA^2)	-2.730	0.484	-5.645	0.000	1.144
I(FAMSUP^2)	-2.984	0.497	-6.003	0.000	1.172
I(FEELSAFE^2)	-2.432	0.716	-3.395	0.001	1.110
I(INFOSEEK^2)	-2.029	0.346	-5.862	0.000	1.070
I(MATHPERS^2)	-1.298	0.462	-2.807	0.005	1.290
I(SCHSUST^2)	-1.501	0.392	-3.826	0.000	1.161
I(TEACHSUP^2)	-1.361	0.469	-2.900	0.004	1.255
IMAGINE	3.154	0.787	4.009	0.000	1.316
INFOSEEK	-4.720	0.590	-8.001	0.000	1.095
MATHEF21	-2.364	0.992	-2.382	0.017	1.570
MATHEFF	18.811	1.036	18.148	0.000	1.505
MATHPERS	2.899	0.885	3.276	0.001	1.461
School_Avg_BELONG	16.759	5.341	3.138	0.002	1.208
School_Avg_DISCLIM	11.439	3.745	3.055	0.002	1.222
School_Avg_ESCS	38.510	3.267	11.788	0.000	1.302
SCHSUST	1.912	0.699	2.737	0.006	1.205
STRATIO	1.165	0.538	2.166	0.031	1.687
STRESAGR	-1.970	0.784	-2.511	0.012	1.252

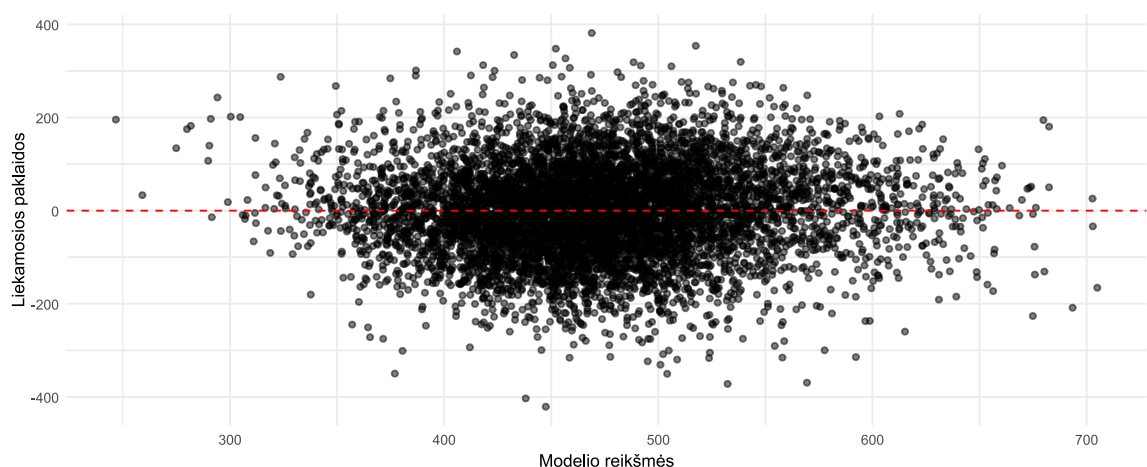
Modelyje aukštesnis mokinių ekonominis, socialinis ir kultūrinis statusas (ESCS: 14.19) ir didesnis matematikos saviveiksmingumas atliekant formalias ir taikomasias užduotis (MATHEFF: 18.81) buvimas aukštesnėje santykinėje klasėje (GRADE: 23.39) yra daugiausia susiję su geresniais matematikos rezultatais. Mokyklos lygmens veiksniai taip pat pasižymėjo reikšmingais ir dideliais poveikiais: aukštesnis mokyklos ESCS vidurkis (38.51), mokytojų paramos vidurkis (11.44) ir drausminis klimatas (16.76) koreliavo su geresniais mokinių matematikos rezultatais. Tačiau yra ir nenuoseklių teorijai rezultatų, pavyzdžiui, mažesnis priklausymo jausmas (BELONG: -1.72) ir mažesnis kūrybinis saviveiksmingumas (CREATEFF: -8.80) buvo susiję su geresniais matematikos rezultatais. Gali būti, kad šiems ryšiams įtakos turi kiti moderuojantys veiksniai arba kiti kintamieji,

kurių modelyje nėra. Keletas kintamųjų, pavyzdžiui, matematinis nerimas (ANXMAT: -13.46, $I(\text{ANXMAT}^2)$: 1.448) ar kognityvinė aktyvacija (COGACRCO: 3.44, $I(\text{COGACRCO}^2)$: -1.48), turėjo statistiškai reikšmingus netiesinius ryšius, tad jų poveikis matematikos pasiekimams nėra pastovus jų galimų reikšmių intervale. Modelyje yra statistiškai reikšmingų sąveikų, tačiau jų įtaka rezultatams palyginti yra nedidelė. Gali būti, kad šiame tyrime rezultatus stipriai moderuoja su COVID-19 susiję veiksniai, kadangi tyrimas vyko šios pandemijos laikotarpio pabaigoje (2022 m.). Tačiau Lietuvos atveju šių kintamųjų negalima įvertinti, nes jie nebuvo renkami arba jų trūkstamų reikšmių kiekis yra per didelis.

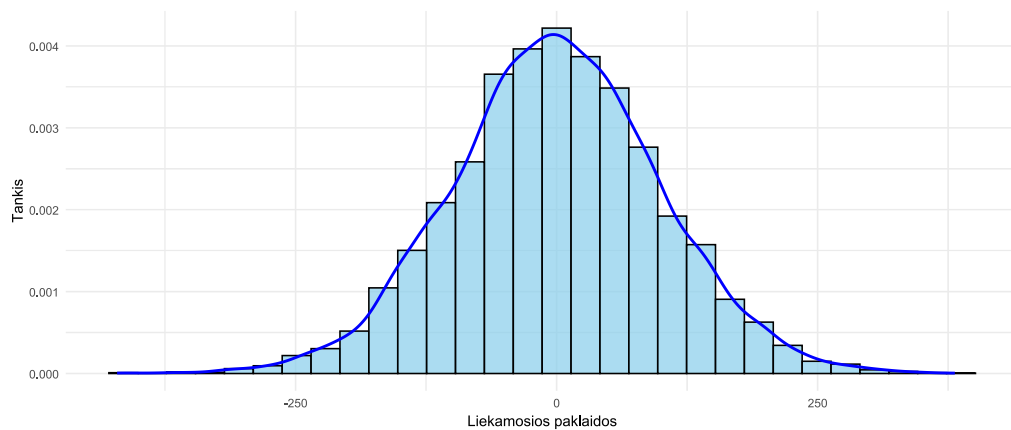
Ribinis modelio determinacijos koeficientas $R_m^2 = 0.305$, o sąlyginis $R_c^2 = 0.349$, t.y. šis modelis paaiškina 34.9 % visos pasiekimų dispersijos), iš kurių 30.5 % tenka fiksuotiems efektams. Atlikus paprastą daugialypę tiesinę regresiją, determinacijos koeficientas yra daug didesnis – $R^2 = 0.55$. Tačiau toks sklaidos lygio paaiškinimas yra neteisingas, nes paprastas daugialypės tiesinės regresijos modelis neatsižvelgia į duomenų hierarchinę struktūrą, kuri gali dirbtinai padidinti koreliaciją tarp grupių, nes stebėjimai tuose pačiuose aukštesnio lygmens vienetuose (mokyklose) pagal tam tikrus kintamuosius gali būti priklausomi.

Vidutinė modelio kvadratinė paklaida (RMSE) yra 55.397, o liekanų standartinis nuokrypis (σ) – 101.881. Tarpklasinės koreliacijos koeficientas ($\text{ICC} = 0.056$) rodo, kad 5.6 % dispersijos atsiranda dėl mokyklos lygmens. Įvertinus praeitų tyrimų rezultatus, pavyzdžiui, matematinio raštingumo Lietuvoje tyrimą naudojant PISA 2009 m. duomenis [115], šiame tyrime gauta dispersijos dalis yra daug mažesnė (5.6 % palyginus su 32 %). Tam gali būti keletas paaiškinimų, pavyzdžiui COVID-19 duomenų rinkimo kontekstas, kitų kintamųjų įtraukimas, švietimo sistemos raida ar pasikeitusi mokinių karta. Vis tik, šiame ir 2009 m. duomenis analizuojančiame tyrime gauta ta pati išvada, kad mokinio socialinė, ekonominė ir kultūrinė padėtis yra labai svarbus prediktorius matematiniams pasiekimams.

Tikrinant modelio prielaidas gauta, kad dauguma jų yra tenkinamos. Pavyzdžiui, visi VIF yra mažesni už 2, o tai reiškia, kad multikolinearumas tarp kintamųjų yra nedidelis. Modelio liekamosios paklaidos vizualiai pasiskirstę normaliai (6-7 pav.).

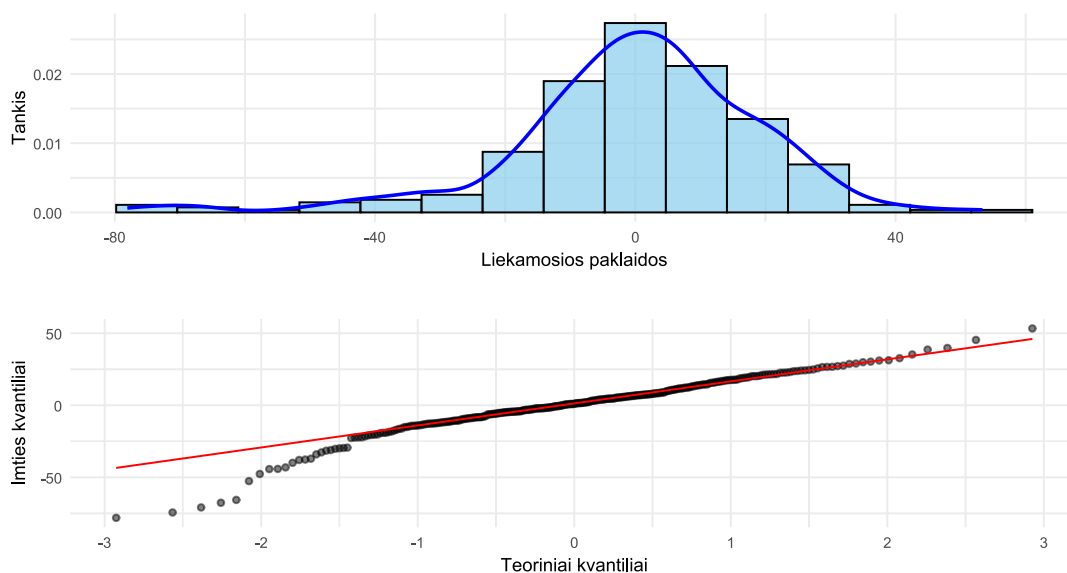


6 pav. Modelio liekamosios paklaidos

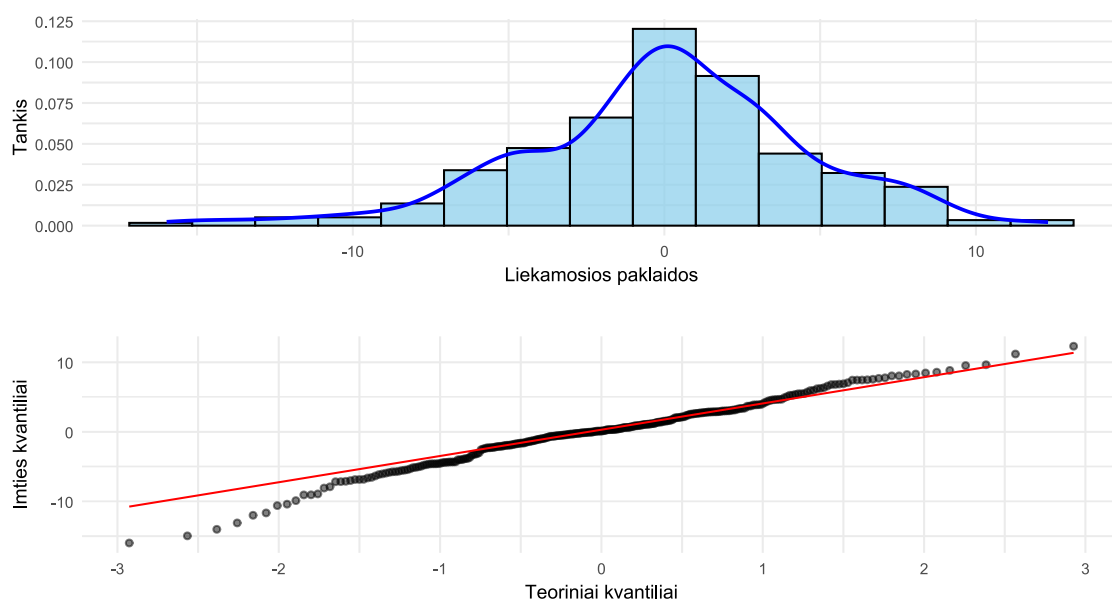


7 pav. Modelio liekamųjų paklaidų tankis

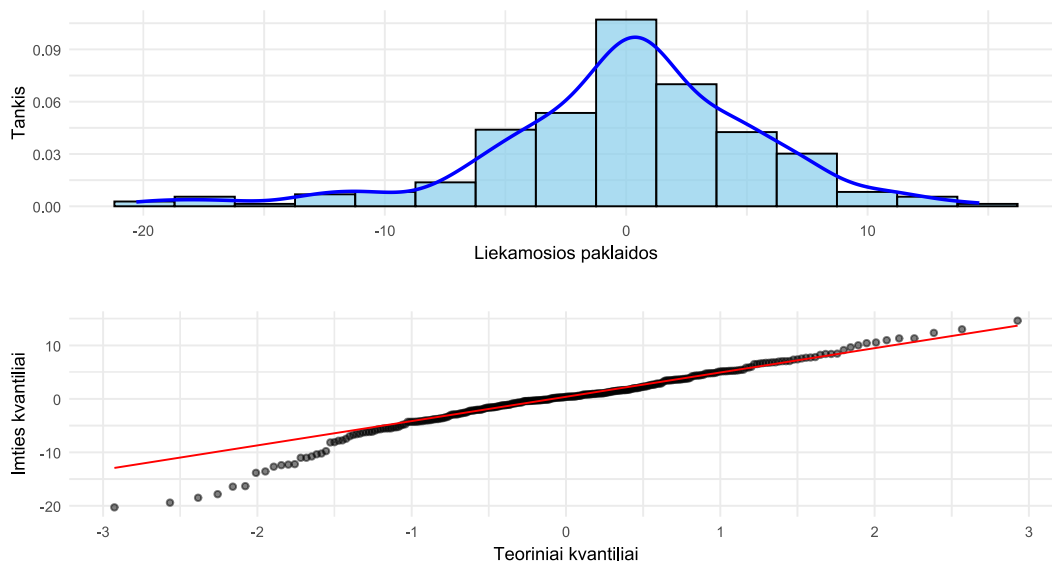
Tačiau vertinant modelyje esančių kryptių kintamųjų (mokyklos laisvojo nario, ESCS, MATHEFF) paklaidas, jų pasiskirstymai nėra normalūs (8-10 pav.).



8 pav. Mokyklos laisvojo nario liekamųjų paklaidų grafikai: histograma ir Q-Q grafikas



9 pav. ESCS liekamųjų paklaidų grafikai: histograma ir Q-Q grafikas



10 pav. MATHEFF liekamųjų paklaidų grafikai: histograma ir Q-Q grafikas

Modelio tobulinimo galimybės. Modelyje neįtraukus šių kintamųjų kaip galimų antrą lygmenį moderuojančių veiksnių, modelio sąlyginis determinacijos koeficientas sumažėja iki 0.24. Gali būti, kad priklausomybės yra netiesinės, tačiau kuriant modelį svarbu rasti balansą tarp kompleksiško ir paaiškinamumo, o įvedant netiesinius ryšius šiuo atveju padarytų modelį daug sunkiau interpretuojamą. Nepaisant to, modelį galima tobulinti keliais būdais. Pirmia, galima naudoti kitus trūkstatų reikšmių užpildymo metodus, kurie galėtų tiksliau įvertinti trūkstatas reikšmes, tačiau tai gali pareikalaus daug didesnių skaičiavimo resursų. Antra, vietoj PISA išvestų rodiklių galima būtų naudoti savo sukurtus kintamuosius. Pavyzdžiui, gautus kuriant matavimų modelį ar taikant kompleksiškesnius IRT metodus, Bajeso statistiką. Modelį taip pat galima praplėsti dar vienu

lygmeniu, pavyzdžiui, šalies, kadangi šalyje vyraujanti švietimo politika irgi gali reikšmingai prisidėti prie matematikos pasiekimų. Alternatyviai galima modeliuoti ir padaryti lyginamąją analizę tarp šalių ar palyginimus su ankstesnių metų rezultatais, nes tam tikri (bet ne visi) kintamieji PISA tyrime matuojami kiekvienais metais.

Išvados

1. Pasiekimams matematikoje turi daugelis veiksnių. Aukštų pasiekimų pamatas – gabumai, tačiau jų vystymuisi ir pasiekimams turi įtakos asmens vidiniai veiksniai, tokie kaip motyvacija, saviveiksmingumas bei pastangos ir aplinkos veiksniai, tokie kaip mokymosi aplinka, šeimos ir mokyklos klimatas.
2. Mokslinės literatūros apžvalga parodė, kad pasiekimams modeliuoti dažnai naudojami regresijos modeliai, mašininio ir dirbtinio mokymosi metodai, tačiau pastaruoju metu yra taikomi kompleksiškesni metodai, tokie kaip netiesiniai dinaminiai modeliai ar topologinė duomenų analizė.
3. Kadangi tiriamuose duomenyse figūruoja trūkstamos reikšmės, tyrime buvo ištirti trūkstamų reikšmių užpildymo metodai. Nustatyta, kad daugkartinio priskyrimo grandininėmis lygtimis (MICE) metodas geriausiai atspindėjo pradinį duomenų skirstinį, tačiau visiško šio metodo pranašumo negalima nustatyti dėl to, kad neįmanoma patikrinti su tikroju pasiskirstymu. Todėl, pritaikius duomenų užpildymo metodus, į vėlesnę analizę įtraukiamos galimos dėl užpildymo metodų atsiradusios paklaidos, įvertinant atsiradusią duomenų sklaidą tarp skirtingų užpildytų duomenų rinkinių ir jų viduje.
4. Matematiniam pasiekimų modelyje kintamieji buvo atrinkti remiantis Gagné diferencijuoto gabumo-talentingumo modelio katalizatorių dalimi, o pats modelis buvo kuriamas remiantis dviejų lygmenų tiesiniu maišytų efektų modeliu, netiesines priklausomybes įvertinant kvadratiniais nariais ar sąveikomis (sandaugomis) tarp skirtingų kintamųjų.
5. Nustatyta, kad labiausiai matematikos pasiekimus nulemia mokinio lygmens veiksniai (ypač ekonominė, socialinė, kultūrinė padėtis bei matematikos saviveiksmingumas), tačiau reikšmingas ir mokyklos lygmens poveikis.
6. Vienas iš esminių tyrimo rezultatų nuoseklumo apribojimų yra tai, kad duomenys buvo rinkti COVID-19 pandemijos metu, todėl išvadas reiktų patikrinti su ateinančio PISA 2025 tyrimo duomenimis.
7. Ateities tyrimai galėtų patobulinti modelį:
 - taikant alternatyvius metodus duomenų analizės etapuose, pavyzdžiui, kitokius duomenų užpildymo metodus ar generalizuotus maišytų efektų modelius;
 - modeliuojant kitų šalių duomenis;
 - įtraukiant papildomus hierarchinius lygmenis (pvz., regiono, šalies).

Literatūros sąrašas

1. YAĞCI, M. Educational data mining: prediction of students' academic performance using machine learning algorithms. *Smart Learning Environments*. 2022, vol. 9, nr. 1, p. 11. ISSN 2196-7091. Prieiga per: doi:10.1186/s40561-022-00192-z.
2. MARQUES QUEIROGA, E.; E. SARMAHO SIQUEIRA; C. DOS SANTOS PORTELA; T. DAMASCENO CORDEIRO; I. IBERT BITTENCOURT; ir kt. Data-Driven Strategies for Achieving School Equity: Insights From Brazil and Policy Recommendations. *IEEE Access*. 2024, vol. 12, p. 101646–101659. ISSN 2169-3536. Prieiga per: doi:10.1109/ACCESS.2024.3422822.
3. BAKONIS, E.; D. SURVUTAITĖ; ir B. ŠETKUS. *Edukacijos tyrimais grįstos švietimo politikos formavimas*. Vilnius: Lietuvos Vyriausybės Švietimo, mokslo ir sporto ministerija, Nacionalinė švietimo agentūra, 2022. 59 p. ISBN 978-609-8275-50-6. Prieiga per: [https://www.ibiblioteka.lt/\[žiūrėta 2025-05-20\]](https://www.ibiblioteka.lt/[žiūrėta 2025-05-20]).
4. ROMERO, C. ir S. VENTURA. Data mining in education. *WIREs Data Mining and Knowledge Discovery*. 2013, vol. 3, nr. 1, p. 12–27. ISSN 1942-4787, 1942-4795. Prieiga per: doi:10.1002/widm.1075.
5. HUANG, C.; C. YANG; S. WANG; W. WU; J. SU; ir kt. Evolution of topics in education research: a systematic review using bibliometric analysis. *Educational Review*. 2020, vol. 72, nr. 3, p. 281–297. ISSN 0013-1911, 1465-3397. Prieiga per: doi:10.1080/00131911.2019.1566212.
6. KARAMELAS, K. Trends on Science Education Research Topics in Education Journals. *European Journal of Science and Mathematics Education*. 2021, vol. 9, nr. 1, p. 1–12. ISSN 2301-251X. ERIC Number: EJ1293296.
7. PETERS, R. S. What is an Educational Process? In: *The Concept of Education (International Library of the Philosophy of Education Volume 17)*. 1-asis leid. London: Routledge, 1967, p. 1–17. ISBN 978-0-203-86107-3. Prieiga per: <https://doi.org/10.4324/9780203861073>.
8. COHEN, L.; L. MANION; ir K. MORRISON. *Research methods in education*. eighth edition. London New York: Routledge, 2018. 916 p. ISBN 978-1-315-45653-9.
9. LODICO, M. G.; D. T. SPAULDING; ir K. H. VOEGTLE. *Methods in educational research: from theory to practice*. 2. ed. San Francisco, Calif: Jossey-Bass, 2010. Research methods for the social sciences. 516 p. ISBN 978-0-470-43680-6.
10. HAMMERSLEY, M. *What is Qualitative Research?* London: Continuum/Bloomsbury, 2013. 125 p. ISBN 978-1-84966-606-0. Prieiga per: <http://www.bloomsbury.com/uk/what-is-qualitative-research-9781849666091/> [žiūrėta 2024-11-24].
11. GERRING, J. What Is a Case Study and What Is It Good for?. *American Political Science Review*. 2004, vol. 98, nr. 2, p. 341–354. ISSN 1537-5943, 0003-0554. Prieiga per: doi:10.1017/S0003055404001182.
12. STAMOVLASIS, D. Bifurcation and Hysteresis Effects in Student Performance: The Signature of Complexity and Chaos in Educational Research. *Complicity: An International Journal of Complexity and Education*. 2014, vol. 11, nr. 2. ISSN 17105668. Prieiga per: doi:10.29173/cmplet22964 [žiūrėta 2024-11-28].
13. HUMPHREYS, P. Mathematical Modeling in the Social Sciences. In: *The Blackwell Guide to the Philosophy of the Social Sciences*. John Wiley & Sons, Ltd, 2003, p. 166–184. ISBN 978-0-470-75648-5. Prieiga per: doi:10.1002/9780470756485.ch7 [žiūrėta 2025-04-14].
14. ROSENBERG, L.; G. WILLCOX; D. ASKAY; L. METCALF; ir E. HARRIS. Amplifying the Social Intelligence of Teams Through Human Swarming. In: *2018 First International Conference*

- on *Artificial Intelligence for Industries (AI4I)*. 2018, p. 23–26. Prieiga per: doi:10.1109/AI4I.2018.8665698 [žiūrėta 2025-04-16].
15. HOX, J. J. From Theoretical Concept to Survey Question. In: *Survey Measurement and Process Quality*. John Wiley & Sons, Ltd, 1997, p. 47–69. ISBN 978-1-118-49001-3. Prieiga per: doi:10.1002/9781118490013.ch2 [žiūrėta 2025-04-24].
 16. KLEINGINNA, P. R. ir A. M. KLEINGINNA. A categorized list of motivation definitions, with a suggestion for a consensual definition. *Motivation and Emotion*. 1981, vol. 5, nr. 3, p. 263–291. ISSN 1573-6644. Prieiga per: doi:10.1007/BF00993889.
 17. S.LEWIS-BECK, M.; A. BRYMAN; ir T. F. LIAO. Conceptualization, Operationalization, and Measurement. In: *The SAGE Encyclopedia of Social Science Research Methods*. Sage Publications, Inc., 2004, p. 162–165. ISBN 978-1-4129-5058-9. Prieiga per: doi:10.4135/9781412950589 [žiūrėta 2025-04-24].
 18. EMMERICH, K.; N. BOGACHEVA; M. BOCKHOLT; ir V. WENDEL. Operationalization and Measurement of Evaluation Constructs. In: R. Dörner; S. Göbel; M. Kickmeier-Rust; M. Masuch; ir K. Zweig, red. , *Entertainment Computing and Serious Games: International GI-Dagstuhl Seminar 15283, Dagstuhl Castle, Germany, July 5-10, 2015, Revised Selected Papers*. Cham: Springer International Publishing, 2016, p. 306–331. ISBN 978-3-319-46152-6. Prieiga per: doi:10.1007/978-3-319-46152-6_13 [žiūrėta 2025-04-24].
 19. ADCOCK, R. ir D. COLLIER. Measurement Validity: A Shared Standard for Qualitative and Quantitative Research. *American Political Science Review*. 2001, vol. 95, nr. 3, p. 529–546. ISSN 0003-0554, 1537-5943. Prieiga per: doi:10.1017/S0003055401003100.
 20. VAN ZYL, L. E.; J. KLIBERT; R. SHANKLAND; E. W. K. SEE-TO; ir S. ROTHMANN. The General Academic Self-Efficacy Scale: Psychometric Properties, Longitudinal Invariance, and Criterion Validity. *Journal of Psychoeducational Assessment*. 2022, vol. 40, nr. 6, p. 777–789. ISSN 0734-2829. Prieiga per: doi:10.1177/07342829221097174.
 21. DAVIDSSON, P. Operationalization Issues. In: P. Davidsson, red. , *Researching Entrepreneurship: Conceptualization and Design*. Cham: Springer International Publishing, 2016, p. 155–193. ISBN 978-3-319-26692-3. Prieiga per: doi:10.1007/978-3-319-26692-3_6 [žiūrėta 2025-04-24].
 22. HAUCKE, M.; R. HOEKSTRA; ir D. VAN RAVENZWAALJ. When numbers fail: do researchers agree on operationalization of published research?. *Royal Society Open Science*. 2021, vol. 8, nr. 9, p. 191354. ISSN 2054-5703. Prieiga per: doi:10.1098/rsos.191354.
 23. NYLANDER, E. ir J. TAN. Typifying educational research in Singapore and Sweden: a comparative bibliometric approach based on topics 2000–2020. *International Journal of Comparative Education and Development*. 2022, vol. 24, nr. 3/4, p. 125–143. ISSN 2396-7404. Prieiga per: doi:10.1108/IJCED-12-2021-0128.
 24. MEMISEVIC, H.; I. BISCEVIC; S. HADZIC; ir A. KUDUZOVIC. Exploring Current Trends in Education: A Review of Research Topics in the Problems of Education in the 21st Century Journal. *Problems of Education in the 21st Century*. 2023, vol. 81, nr. 2, p. 258–268. ISSN 1822-7864. ERIC Number: EJ1379601.
 25. CHEN, X.; G. YU; G. CHENG; ir T. HAO. Research topics, author profiles, and collaboration networks in the top-ranked journal on educational technology over the past 40 years: a bibliometric analysis. *Journal of Computers in Education*. 2019, vol. 6, nr. 4, p. 563–585. ISSN 2197-9995. Prieiga per: doi:10.1007/s40692-019-00149-1.
 26. HATTIE, J. *Visible Learning: The Sequel*. 1st edition. London; New York: Routledge, 2023. 512 p. ISBN 978-1-032-46203-5.

27. HELLER, K. A. Individual (Learning and Motivational) Needs versus Instructional Conditions of Gifted Education. *High Ability Studies*. 1999, vol. 10, nr. 1, p. 9–21. ISSN 1359-8139. Prieiga per: doi:10.1080/1359813990100102.
28. GAGNE, F. *A Differentiated Model of Giftedness and Talent. Year 2000 Update*. 2000. Prieiga per: <https://eric.ed.gov/?id=ED448544> [žiūrėta 2025-03-07]. ERIC Number: ED448544.
29. HELLER, K. A.; C. PERLETH; ir T. K. LIM. The Munich Model of Giftedness Designed to Identify and Promote Gifted Students. In: R. J. Sternberg ir J. E. Davidson, red. , *Conceptions of Giftedness*. 2-asis leid. Cambridge University Press, 2005, p. 147–170. ISBN 978-0-521-83841-2. Prieiga per: doi:10.1017/CBO9780511610455.010 [žiūrėta 2025-03-07].
30. PERLETH, C. ir K. A. HELLER. The Munich Longitudinal Study of Giftedness. In: R. F. Subotnik ir K. D. Arnold, red. , *Beyond Terman: contemporary longitudinal studies of giftedness and talent*. Norwood, NJ: Ablex Publishing, 1994, p. 77–114. Creativity research. ISBN 978-1-56750-011-0.
31. ECCLES, J. S. ir A. WIGFIELD. From expectancy-value theory to situated expectancy-value theory: A developmental, social cognitive, and sociocultural perspective on motivation. *Contemporary Educational Psychology*. 2020, vol. 61, p. 101859. ISSN 0361-476X. Prieiga per: doi:10.1016/j.cedpsych.2020.101859.
32. PRAST, E. J.; E. VAN DE WEIJER-BERGSMA; M. MIOČEVIĆ; E. H. KROESBERGEN; ir J. E. H. VAN LUIT. Relations between mathematics achievement and motivation in students of diverse achievement levels. *Contemporary Educational Psychology*. 2018, vol. 55, p. 84–96. ISSN 0361-476X. Prieiga per: doi:10.1016/j.cedpsych.2018.08.002.
33. CLEARY, T. J. ir A. KITSANTAS. Motivation and Self-Regulated Learning Influences on Middle School Mathematics Achievement. *School Psychology Review*. 2017, vol. 46, nr. 1, p. 88–107. ISSN null. Prieiga per: doi:10.1080/02796015.2017.12087607.
34. KVEDERE, L. Mathematics Self-efficacy, Self-concept and Anxiety Among 9th Grade Students in Latvia. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. 2014, vol. 116, p. 2687–2690. ISSN 1877-0428. Prieiga per: doi:10.1016/j.sbspro.2014.01.636.
35. GAGNÉ, F. The Differentiated Model of Giftedness and Talent. In: , *Systems and Models for Developing Programs for the Gifted and Talented*. 2-asis leid. New York: Routledge, 2023, p. 165–192. ISBN 978-1-003-41942-6. Prieiga per: doi:10.4324/9781003419426-7 [žiūrėta 2025-03-17].
36. DOZ, D. ir B. AND BREGANT. Factors affecting students' performance on national assessments of mathematics in Italy: a random forest approach. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*. 2024, vol. 31, nr. 5–6, p. 325–352. ISSN 0969-594X. Prieiga per: doi:10.1080/0969594X.2025.2457687.
37. SADLER, P. M.; G. SONNERT; Z. HAZARI; ir R. TAI. The Role of Advanced High School Coursework in Increasing STEM Career Interest. *Science Educator*. 2014, vol. 23, nr. 1, p. 1–13. ISSN 1094-3277. ERIC Number: EJ1034751.
38. SIČIŪNIENĖ, V. ir J. DARGYTĖ. Gabių matematikai vaikų ugdymo pagrindinėje mokykloje tyrimas. *Lietuvos matematikos rinkinys*. 2010, vol. 51. ISSN 2335-898X, 0132-2818. Prieiga per: doi:10.15388/LMR.2010.28 [žiūrėta 2025-03-09].
39. ŠIMELIONIENĖ, A. ir G. GINTILIENĖ. 17–18 metų mokinių aukštų lietuvių kalbos ir matematikos mokymosi pasiekimų veiksniai. *Specialusis ugdymas*. 2010, nr. 2, p. 137–148. ISSN 1392-5369.

40. SIEGLER, R. S.; G. J. DUNCAN; P. E. DAVIS-KEAN; K. DUCKWORTH; A. CLAESSENS; ir kt. Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*. 2012, vol. 23, nr. 7, p. 691–697. ISSN 0956-7976. Prieiga per: doi:10.1177/0956797612440101.
41. FORGASZ, H. J. ir J. C. HILL. FACTORS IMPLICATED IN HIGH MATHEMATICS ACHIEVEMENT. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 2013, vol. 11, nr. 2, p. 481–499. ISSN 1573-1774. Prieiga per: doi:10.1007/s10763-012-9348-x.
42. BENBOW, C. P. ir O. ARJMAND. Predictors of high academic achievement in mathematics and science by mathematically talented students: A longitudinal study.. *Journal of Educational Psychology*. 1990, vol. 82, nr. 3, p. 430–441. ISSN 1939-2176, 0022-0663. Prieiga per: doi:10.1037/0022-0663.82.3.430.
43. KRUTECKIJ, V. A. *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1976. Survey of recent East European mathematical literature. 417 p. ISBN 978-0-226-45485-6.
44. LEIKIN, R. When practice needs more research: the nature and nurture of mathematical giftedness. *ZDM – Mathematics Education*. 2021, vol. 53, nr. 7, p. 1579–1589. ISSN 1863-9704. Prieiga per: doi:10.1007/s11858-021-01276-9.
45. ÖZDEMİR, A.; Y. SIPAHI; ir A. K. BAHAR. The Past, Present, and Future of Research on Mathematical Giftedness: A Bibliometric Analysis. *Gifted Child Quarterly*. 2024, vol. 68, nr. 3, p. 206–225. ISSN 0016-9862. Prieiga per: doi:10.1177/00169862241244717.
46. PARISH, L. Defining Mathematical Giftedness. In: *Proceedings of the 37th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Mathematics Education Research Group of Australasia, 2014, p. 509–516. Prieiga per: <https://acuresearchbank.acu.edu.au/item/8q459/defining-mathematical-giftedness> [žiūrėta 2025-03-11].
47. SRIRAMAN, B.; K.-H. LEE; AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY; ir TAEHAN SUHAKHOE, Redaktorius. *The elements of creativity and giftedness in mathematics*. Rotterdam ; Boston: Sense Publishers, 2011. Advances in creativity and giftedness, v. 1. 231 p. ISBN 978-94-6091-438-6.
48. GAGNÉ, F. Giftedness and Talent: Reexamining a Reexamination of the Definitions. *Gifted Child Quarterly*. 1985, vol. 29, nr. 3, p. 103–112. ISSN 0016-9862. Prieiga per: doi:10.1177/001698628502900302.
49. BAI, X.; F. ZHANG; J. LI; T. GUO; A. AZIZ; ir kt. Educational Big Data: Predictions, Applications and Challenges. *Big Data Research*. 2021, vol. 26, p. 100270. ISSN 2214-5796. Prieiga per: doi:10.1016/j.bdr.2021.100270.
50. CONIJN, R.; C. SNIJDERS; A. KLEINGELD; ir U. MATZAT. Predicting Student Performance from LMS Data: A Comparison of 17 Blended Courses Using Moodle LMS. *IEEE Transactions on Learning Technologies*. 2017, vol. 10, nr. 1, p. 17–29. ISSN 1939-1382. Prieiga per: doi:10.1109/TLT.2016.2616312.
51. REISS, K.; A. OBERSTEINER; A. HEINZE; U. ITZLINGER-BRUNEFORTH; ir F.-L. LIN. Large-Scale Studies in Mathematics Education Research. In: H. N. Jahnke ir L. Hefendehl-Hebeker, red. , *Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research*. Cham: Springer International Publishing, 2019, p. 249–278. ISBN 978-3-030-11069-7. Prieiga per: doi:10.1007/978-3-030-11069-7_10 [žiūrėta 2025-04-29].
52. JOHANSSON, S. International large-scale assessments: what uses, what consequences?. *Educational Research*. 2016, vol. 58, nr. 2, p. 139–148. ISSN 0013-1881. Prieiga per: doi:10.1080/00131881.2016.1165559.

53. MCFARLAND, D. A.; S. KHANNA; B. W. DOMINGUE; ir Z. A. PARDOS. Education Data Science: Past, Present, Future. *AERA Open*. 2021, vol. 7, p. 23328584211052055. ISSN 2332-8584. Prieiga per: doi:10.1177/23328584211052055.
54. PISA 2022 Results (Volume I). [interaktyvus]. Prieiga per: https://www.oecd.org/en/publications/pisa-2022-results-volume-i_53f23881-en.html [žiūrėta 2025-04-29].
55. USTUN, U.; Cansiz ,Mustafa; Ozdemir ,Ertugrul; ir N. AND CANSIZ. Student and school-level factors to predict science literacy for two top-performing countries in PISA 2015: Finland and Singapore. *International Journal of Science Education*. 2022, vol. 44, nr. 4, p. 579–603. ISSN 0950-0693. Prieiga per: doi:10.1080/09500693.2022.2037167.
56. MONDAL, D.; S. VANBELLE; A. CASSESE; ir M. J. CANDEL. Review of sample size determination methods for the intraclass correlation coefficient in the one-way analysis of variance model. *Statistical Methods in Medical Research*. 2024, vol. 33, nr. 3, p. 532–553. ISSN 0962-2802. Prieiga per: doi:10.1177/09622802231224657.
57. HEDGES, L. V. ir E. C. HEDBERG. Intraclass Correlation Values for Planning Group-Randomized Trials in Education. *Educational Evaluation and Policy Analysis*. 2007, vol. 29, nr. 1, p. 60–87. ISSN 0162-3737. Prieiga per: doi:10.3102/0162373707299706.
58. TABACHNICK, B. G. ir L. S. FIDELL. *Using multivariate statistics*. Seventh edition. New York, NY: Pearson, 2019. Always learning. 832 p. ISBN 978-0-13-479054-1.
59. BARCIKOWSKI, R. S. Statistical Power with Group Mean as the Unit of Analysis. *Journal of Educational Statistics*. 1981, vol. 6, nr. 3, p. 267–285. ISSN 0362-9791. Prieiga per: doi:10.2307/1164877.
60. RAUDENBUSH, S. ir A. S. BRYK. *Hierarchical linear models: applications and data analysis methods*. 2. ed., [Nachdr.]. Thousand Oaks, Calif.: Sage Publ, 2010. Advanced quantitative techniques in the social sciences, 1. 485 p. ISBN 978-0-7619-1904-9.
61. ČEKANAČIUS, V. *Statistika ir jos taikymai (III dalis)*. Vilnius: TEV, 2011. 240 p. ISBN 978-9955-879-91-6.
62. KORHONEN, P.; K. NORDHAUSEN; ir S. TASKINEN. A Review of Generalized Linear Latent Variable Models and Related Computational Approaches. *WIREs Computational Statistics*. 2024, vol. 16, nr. 6, p. e70005. ISSN 1939-0068. Prieiga per: doi:10.1002/wics.70005.
63. BARTHOLOMEW, D.; M. KNOTT; ir I. MOUSTAKI. *Latent Variable Models and Factor Analysis: A Unified Approach*. 1-asis leid. Wiley, 2011. Wiley Series in Probability and Statistics. ISBN 978-0-470-97192-5. Prieiga per: doi:10.1002/9781119970583 [žiūrėta 2025-04-30].
64. EMBRETSON, S. E. ir S. P. REISE. *Item response theory for psychologists*. New York: Psychology Press, 2013. Multivariate applications book series. 1 p. ISBN 978-0-8058-2818-4. Prieiga per: doi:10.4324/9781410605269.
65. OECD. *PISA 2022 Technical Report*. OECD, 2024. PISA. ISBN 978-92-64-92890-9. Prieiga per: doi:10.1787/01820d6d-en [žiūrėta 2025-04-02].
66. RUBIN, D. B. Inference and missing data. *Biometrika*. 1976, vol. 63, nr. 3, p. 581–592. ISSN 0006-3444. Prieiga per: doi:10.1093/biomet/63.3.581.
67. BUUREN, S. van. *Flexible imputation of missing data*. Second edition. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018. Chapman and Hall/CRC interdisciplinary statistics series. 415 p. ISBN 978-1-138-58831-8.
68. HE, Y.; G. ZHANG; ir C.-H. HSU. *Multiple imputation of missing data in practice: basic theory and analysis strategies*. Boca Raton, FL ; Abingdon, Oxon: CRC Press, 2022. 1 p. ISBN 978-0-429-53097-5.

69. SCHAFER, J. L. ir J. W. GRAHAM. Missing data: Our view of the state of the art.. *Psychological Methods*. 2002, vol. 7, nr. 2, p. 147–177. ISSN 1939-1463, 1082-989X. Prieiga per: doi:10.1037/1082-989X.7.2.147.
70. KRISTMAN, V. L.; M. MANNO; ir P. CÔTÉ. Methods to Account for Attrition in Longitudinal Data: Do They Work? A Simulation Study. *European Journal of Epidemiology*. 2005, vol. 20, nr. 8, p. 657–662. ISSN 0393-2990, 1573-7284. Prieiga per: doi:10.1007/s10654-005-7919-7.
71. SACHSE, K. A.; N. MAHLER; ir S. POHL. When Nonresponse Mechanisms Change: Effects on Trends and Group Comparisons in International Large-Scale Assessments. *Educational and Psychological Measurement*. 2019, vol. 79, nr. 4, p. 699–726. ISSN 0013-1644. Prieiga per: doi:10.1177/0013164419829196.
72. SLIPETZ, L. R.; Falk ,A.; ir T. R. AND HENRY. Missing Data in Discrete Time State-Space Modeling of Ecological Momentary Assessment Data: A Monte-Carlo Study of Imputation Methods. *Multivariate Behavioral Research*. n.d., vol. 0, nr. 0, p. 1–16. ISSN 0027-3171. Prieiga per: doi:10.1080/00273171.2025.2469055.
73. HUGHES, R. A.; J. HERON; J. A. C. STERNE; ir K. TILLING. Accounting for missing data in statistical analyses: multiple imputation is not always the answer. *International Journal of Epidemiology*. 2019, vol. 48, nr. 4, p. 1294–1304. ISSN 1464-3685. Prieiga per: doi:10.1093/ije/dyz032.
74. LITTLE, R. ir D. RUBIN. *Statistical Analysis with Missing Data, Third Edition*. 1-asis leid. Wiley, 2019. Wiley Series in Probability and Statistics. ISBN 978-0-470-52679-8. Prieiga per: doi:10.1002/9781119482260 [žiūrėta 2025-05-10].
75. LEURENT, B.; M. GOMES; R. FARIA; S. MORRIS; R. GRIEVE; ir kt. Sensitivity Analysis for Not-at-Random Missing Data in Trial-Based Cost-Effectiveness Analysis: A Tutorial. *PharmacoEconomics*. 2018, vol. 36, nr. 8, p. 889–901. ISSN 1170-7690, 1179-2027. Prieiga per: doi:10.1007/s40273-018-0650-5.
76. ROBITZSCH, A. On the Treatment of Missing Item Responses in Educational Large-Scale Assessment Data: An Illustrative Simulation Study and a Case Study Using PISA 2018 Mathematics Data. *European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education*. 2021, vol. 11, nr. 4, p. 1653–1687. ISSN 2254-9625. Prieiga per: doi:10.3390/ejihpe11040117.
77. SAQR, M. ir S. LÓPEZ-PERNAS, Redaktorius. *Learning Analytics Methods and Tutorials: A Practical Guide Using R*. Cham: Springer Nature Switzerland, 2024. ISBN 978-3-031-54463-7. Prieiga per: doi:10.1007/978-3-031-54464-4 [žiūrėta 2024-12-20].
78. VAN DUSEN, B. ir J. NISSEN. Modernizing use of regression models in physics education research: A review of hierarchical linear modeling. *Physical Review Physics Education Research*. 2019, vol. 15, nr. 2, p. 020108. ISSN 2469-9896. Prieiga per: doi:10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.020108.
79. MARTÍNEZ-FLÓREZ, G.; R. TOVAR-FALÓN; ir C. BARRERA-CAUSIL. Dichotomous Proportional Hazard Regression Model: A Case Study on Students' Dropout. *Mathematics*. 2024, vol. 12, nr. 14, p. 2170. ISSN 2227-7390. Prieiga per: doi:10.3390/math12142170.
80. KER, H.-W.; Y.-H. LEE; ir S.-M. HO. The impact of home resources, students' attitudes toward learning, and instructional strategies on science achievement. *Science Education*. 2023, vol. 107, nr. 6, p. 1383–1398. ISSN 1098-237X. Prieiga per: doi:10.1002/sce.21804.
81. BERGER, N.; E. MACKENZIE; ir K. HOLMES. Positive attitudes towards mathematics and science are mutually beneficial for student achievement: a latent profile analysis of TIMSS 2015. *The Australian Educational Researcher*. 2020, vol. 47, nr. 3, p. 409–444. ISSN 2210-5328. Prieiga per: doi:10.1007/s13384-020-00379-8.

82. OECD. *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD, 2013. PISA. ISBN 978-92-64-19052-8. Prieiga per: doi:10.1787/9789264190511-en [žiūrėta 2021-12-11].
83. DORIA, F. A., Redaktorius. *The limits of mathematical modelling in the social sciences: the significance of Gödel's incompleteness phenomenon*. London: World Scientific Publishing Europe Ltd, 2017. 1 p. ISBN 978-1-78634-315-4.
84. YUSUF, A.; S. QURESHI; U. T. MUSTAPHA; S. S. MUSA; ir T. A. SULAIMAN. Fractional Modeling for Improving Scholastic Performance of Students with Optimal Control. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*. 2022, vol. 8, nr. 1, p. 37. ISSN 2199-5796. Prieiga per: doi:10.1007/s40819-021-01177-1.
85. UZUN, P. Y.; K. UZUN; ir İ. KOCA. The effect of fractional order mathematical modelling for examination of academic achievement in schools with stochastic behaviors. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*. 2023, vol. 13, nr. 2, p. 244–258. ISSN 2146-5703, 2146-0957. Prieiga per: doi:10.11121/ijocta.2023.1366.
86. BOYD, E. A.; K. B. LAZAR; ir S. MOYSEY. Big data to support geoscience recruitment: Novel adoption of topological data analysis in geoscience education. *GSA Bulletin*. 2023, vol. 136, nr. 3–4, p. 1458–1468. ISSN 0016-7606. Prieiga per: doi:10.1130/B36889.1.
87. VITTORIETTI, M.; O. GIAMBALVO; V. G. GENOVA; ir F. AIELLO. A new measure for the attitude to mobility of Italian students and graduates: a topological data analysis approach. *Statistical Methods & Applications*. 2023, vol. 32, nr. 2, p. 509–543. ISSN 1613-981X. Prieiga per: doi:10.1007/s10260-022-00666-x.
88. FARRELLY, C. M. *Topological Data Analysis for Data Mining Small Educational Samples with Application to Studies of the Gifted*. Prieiga per: doi:10.31234/osf.io/3rafk [žiūrėta 2024-12-13].
89. DAGIENĖ, V.; G. GRIGAS; ir T. JEVSİKOVÁ. *Enciklopedinis kompiuterijos žodynas*. IV leidimas. Vilnius: TEV, 2023. ISBN 978-9955-680-19-2. Prieiga per: <http://www.ims.mii.lt/EK%5%bd/> [žiūrėta 2025-04-13].
90. BATOOL, S.; J. RASHID; M. W. NISAR; J. KIM; H.-Y. KWON; ir kt. Educational data mining to predict students' academic performance: A survey study. *Education and Information Technologies*. 2023, vol. 28, nr. 1, p. 905–971. ISSN 1573-7608. Prieiga per: doi:10.1007/s10639-022-11152-y.
91. ADEKITAN, A. I. ir O. SALAU. The impact of engineering students' performance in the first three years on their graduation result using educational data mining. *Heliyon*. 2019, vol. 5, nr. 2. ISSN 2405-8440. Prieiga per: doi:10.1016/j.heliyon.2019.e01250 [žiūrėta 2025-04-14].
92. CHEN, L.; P. CHEN; ir Z. LIN. Artificial Intelligence in Education: A Review. *IEEE Access*. 2020, vol. 8, p. 75264–75278. ISSN 2169-3536. Prieiga per: doi:10.1109/ACCESS.2020.2988510.
93. MCFARLAND, D. A.; S. KHANNA; B. W. DOMINGUE; ir Z. A. PARDOS. Education Data Science: Past, Present, Future. *AERA Open*. 2021, vol. 7, p. 23328584211052055. ISSN 2332-8584. Prieiga per: doi:10.1177/23328584211052055.
94. LUAN, H.; P. GECZY; H. LAI; J. GOBERT; S. J. H. YANG; ir kt. Challenges and Future Directions of Big Data and Artificial Intelligence in Education. *Frontiers in Psychology*. 2020, vol. 11, p. 580820. ISSN 1664-1078. Prieiga per: doi:10.3389/fpsyg.2020.580820.
95. MILANA, M.; U. BRANDI; S. HODGE; ir T. HOGGAN-KLOUBERT. Artificial intelligence (AI), conversational agents, and generative AI: implications for adult education practice and research. *International Journal of Lifelong Education*. 2024, vol. 43, nr. 1, p. 1–7. ISSN 0260-1370. Prieiga per: doi:10.1080/02601370.2024.2310448.

96. BETTAYEB, A. M.; M. ABU TALIB; A. Z. SOBHE ALTAYASINAH; ir F. DAKALBAB. Exploring the impact of ChatGPT: conversational AI in education. *Frontiers in Education*. 2024, vol. 9. ISSN 2504-284X. Prieiga per: doi:10.3389/feduc.2024.1379796 [žiūrėta 2025-01-09].
97. SWAMY, V.; B. RADMEHR; N. KRICO; M. MARRAS; ir T. KÄSER. Evaluating the Explainers: Black-Box Explainable Machine Learning for Student Success Prediction in MOOCs. 2022, p. 98. Prieiga per: doi:10.5281/zenodo.6852964 [žiūrėta 2025-04-30].
98. GUNASEKARA, S. ir M. SAARELA. Explainable AI in Education: Techniques and Qualitative Assessment. *Applied Sciences*. 2025, vol. 15, nr. 3, p. 1239. ISSN 2076-3417. Prieiga per: doi:10.3390/app15031239.
99. An Explainable AI-based Approach for Predicting Undergraduate Students Academic Performance. *ResearchGate*. 2025. Prieiga per: doi:10.1016/j.array.2025.100384 [žiūrėta 2025-04-30].
100. *Applied Full Stack Data Science*. [interaktyvus]. Prieiga per: <https://endtoenddatascience.com/chapter3-applied-data-science-theory> [žiūrėta 2025-04-30].
101. ALVAREZ-GARCIA, M.; M. ARENAS-PARRA; ir R. IBAR-ALONSO. Uncovering student profiles. An explainable cluster analysis approach to PISA 2022. *Computers & Education*. 2024, vol. 223, p. 105166. ISSN 0360-1315. Prieiga per: doi:10.1016/j.compedu.2024.105166.
102. ZHENG, J.; Cheung ,Kwok-cheung; ir P. AND SIT. Insights from Two Decades of PISA-related Studies in the New Century: A Systematic Review. *Scandinavian Journal of Educational Research*. 2024, vol. 68, nr. 3, p. 371–388. ISSN 0031-3831. Prieiga per: doi:10.1080/00313831.2022.2148273.
103. GÓMEZ-TALAL, I.; L. BOTE-CURIEL; ir J. LUIS ROJO-ÁLVAREZ. Interpretable Machine Learning Models for PISA Results in Mathematics. *IEEE Access*. 2025, vol. 13, p. 27371–27397. ISSN 2169-3536. Prieiga per: doi:10.1109/ACCESS.2025.3538585.
104. PONGSOPHON, P. Emotional Control in Education: Insights From High-Achievers in PISA 2022. *Psychology in the Schools*. 2025, vol. 62, nr. 5, p. 1488–1498. ISSN 1520-6807. Prieiga per: doi:10.1002/pits.23401.
105. LIU, X.; K. Y. HANSEN; M. VALCKE; ir J. DE NEVE. A decade of PISA: student perceived instructional quality and mathematics achievement across European countries. *ZDM – Mathematics Education*. 2024, vol. 56, nr. 5, p. 859–891. ISSN 1863-9704. Prieiga per: doi:10.1007/s11858-024-01630-7.
106. HUANG, Y.; Y. ZHOU; J. CHEN; ir D. WU. Applying Machine Learning and SHAP Method to Identify Key Influences on Middle-School Students' Mathematics Literacy Performance. *Journal of Intelligence*. 2024, vol. 12, nr. 10, p. 93. ISSN 2079-3200. Prieiga per: doi:10.3390/jintelligence12100093.
107. HERNÁNDEZ-RAMOS, J. ir R. ARAYA. Do School Activities Foster Creative Thinking? An Analysis of PISA Results. *Education Sciences*. 2025, vol. 15, nr. 2, p. 133. ISSN 2227-7102. Prieiga per: doi:10.3390/educsci15020133.
108. ZHU, L.; H. YOU; M. HONG; ir Z. FANG. Predictive insights into U.S. students' mathematics performance on PISA 2022 using ensemble tree-based machine learning models. *International Journal of Educational Research*. 2025, vol. 130, p. 102537. ISSN 0883-0355. Prieiga per: doi:10.1016/j.ijer.2025.102537.
109. WU, Y. Unlocking mathematics success: Global lessons on student achievement, teacher satisfaction, and school environments. *INTERNATIONAL ELECTRONIC JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION*. 2025, vol. 20, nr. 2, p. em0817. ISSN 1306-3030. Prieiga per: doi:10.29333/iejme/15900. Web of Science ID: WOS:001439932900010.

110. EBPO PISA (2022) - Švietimo, mokslo ir sporto ministerija. [interaktyvus]. Prieiga per: <https://smsm.lrv.lt/lt/teisine-informacija-1/ti-tyrimai-ir-analizes/tarptautiniai-tyrimai-ir-apzvalgos/tarptautiniai-svietimo-tyrimai/ebpo-pisa-2018/> [žiūrėta 2025-05-19].
111. ZABULIONIS, A. *Tarptautinio švietimo tyrimo OECD PISA Lietuvos ir kaimyninių šalių duomenų tikslinė antrinė analizė*. Vilnius: Lietuvos Respublikos švietimo, mokslo ir sporto ministerija, Nacionalinė švietimo agentūra, 2020. Prieiga per: <https://www.nsa.smsm.lt/wp-content/uploads/2021/06/EBPO-PISA-2018-antrine-analize.pdf> [žiūrėta 2025-05-19].
112. KRISTINSSON, K.; R. NEDZINSKAITĖ; ir I. MINELGAITĖ SNAEBJORNSSON. Societal Cultural Dimensions and GDP as Predictors of Educational Leadership and School Autonomy Indicators' in PISA. *Pedagogika*. 2018, vol. 131, nr. 3, p. 233–251. ISSN 1392-0340, 2029-0551. Vytauto Didžiojo Universitetas.
113. DUKYNAITĖ, R. ir J. DUDAITĖ. Mokinių priklausymo mokyklai jausmas: namų įtaka. *Pedagogika*. 2017, vol. 125, nr. 1, p. 143–157. ISSN 2029-0551, 1392-0340. Prieiga per: doi:10.15823/p.2017.11.
114. JAKAITIENĖ, A.; L. RINGIENĖ; ir R. ŽELVYS. *Nerimas dėl matematikos: 2012–2022 m. PISA tyrimo ciklo duomenų lyginamoji analizė*. Nacionalinė švietimo agentūra, 2025.
115. VAIČIŪNAITĖ, D. Lietuvos mokinių raštingumo analizė, naudojant tarptautinio tyrimo PISA 2009 m. duomenis. 2014. Prieiga per: <https://epublications.vu.lt/object/elaba:2150081/> [žiūrėta 2025-05-19].
116. OECD. *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. OECD, 2023. PISA. ISBN 978-92-64-91529-9. Prieiga per: doi:10.1787/dfe0bf9c-en [žiūrėta 2025-05-18].
117. ROBITZSCH, A. On the Treatment of Missing Item Responses in Educational Large-Scale Assessment Data: An Illustrative Simulation Study and a Case Study Using PISA 2018 Mathematics Data. *European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education*. 2021, vol. 11, nr. 4, p. 1653–1687. ISSN 2174-8144. Prieiga per: doi:10.3390/ejihpe11040117.
118. ROSE, N.; M. von DAVIER; ir B. NAGENGAST. Modeling Omitted and Not-Reached Items in IRT Models. *Psychometrika*. 2017, vol. 82, nr. 3, p. 795–819. ISSN 0033-3123, 1860-0980. Prieiga per: doi:10.1007/s11336-016-9544-7.
119. YAN, T. ir R. CURTIN. The Relation Between Unit Nonresponse and Item Nonresponse: A Response Continuum Perspective. *International Journal of Public Opinion Research*. 2010, vol. 22, nr. 4, p. 535–551. ISSN 0954-2892. Prieiga per: doi:10.1093/ijpor/edq037.
120. BOWLING, N. A.; A. M. GIBSON; J. W. HOUP; ir C. K. BROWER. Will the Questions Ever End? Person-Level Increases in Careless Responding During Questionnaire Completion. *Organizational Research Methods*. 2021, vol. 24, nr. 4, p. 718–738. ISSN 1094-4281. Prieiga per: doi:10.1177/1094428120947794.
121. KMETTY, Z. ir Á. AND STEFKOVICS. Assessing the effect of questionnaire design on unit and item-nonresponse: evidence from an online experiment. *International Journal of Social Research Methodology*. 2022, vol. 25, nr. 5, p. 659–672. ISSN 1364-5579. Prieiga per: doi:10.1080/13645579.2021.1929714.
122. DENSCOMBE, M. Item non-response rates: a comparison of online and paper questionnaires. *International Journal of Social Research Methodology*. 2009, vol. 12, nr. 4, p. 281–291. ISSN 1364-5579. Prieiga per: doi:10.1080/13645570802054706.
123. MARCQ, K. ir J. AND BRAEKEN. Where nonresponse is at its loudest: Cross-country and individual differences in item nonresponse across the PISA 2018 student questionnaire. *International Journal of Testing*. 2025, vol. 25, nr. 1, p. 1–24. ISSN 1530-5058. Prieiga per: doi:10.1080/15305058.2024.2377550.

124. RUBIN, D. B. *Multiple Imputation for Nonresponse in Surveys*. 1-asis leid. Wiley, 1987. Wiley Series in Probability and Statistics. ISBN 978-0-471-08705-2. Prieiga per: doi:10.1002/9780470316696 [žiūrėta 2025-05-19].
125. HEYMANS, M. W. ir I. EEKHOUT. *Applied missing data analysis with SPSS and (R) Studio*. 2019. Prieiga per: <https://bookdown.org/mwheymans/bookmi/> [žiūrėta 2025-05-21].
126. GARSON, G. D. Fundamentals of Hierarchical Linear and Multilevel Modeling. In: *Hierarchical Linear Modeling: Guide and Applications*. SAGE Publications, Inc., 2013, p. 3–26. ISBN 978-1-4833-8445-0. Prieiga per: doi:10.4135/9781483384450 [žiūrėta 2025-05-23].
127. *Introduction to Linear Mixed Models*. [interaktyvus]. Prieiga per: <https://stats.oarc.ucla.edu/other/mult-pkg/introduction-to-linear-mixed-models/> [žiūrėta 2025-05-23].
128. *Multi-Level Modeling*. [interaktyvus]. Prieiga per: <https://www.publichealth.columbia.edu/research/population-health-methods/multi-level-modeling> [žiūrėta 2025-05-23].
129. NAKAGAWA, S. ir H. SCHIELZETH. A general and simple method for obtaining R² from generalized linear mixed-effects models. *Methods in Ecology and Evolution*. 2013, vol. 4, nr. 2, p. 133–142. ISSN 2041-210X. Prieiga per: doi:10.1111/j.2041-210x.2012.00261.x.

Priedas. Kintamųjų, įtrauktų į matematinį pasiekimų modelį, aprašymas

Kintamasis	Reikšmė	Paaiškinimas	DMGT dalis
ANXMAT	Indeksas: matematikos nerimas	Mokinių vertinimai, kaip pritaria teiginiams apie įvairius požiūrius į matematiką (pvz., „Aš dažnai nerimauju, kad matematikos pamokose man bus sunku“, „Jaučiu nerimą dėl nesėkmės matematikoje“).	IV
BELONG	Indeksas: priklausymo jausmas	Mokinių įvertinimai, kaip jie pritaria šešiems teiginiams (pvz., „Jaučiuosi kaip priklausantis mokyklai“, „Mokykloje jaučiuosi vienišas“).	IW
BSMJ	Indeksas: numatomas mokinio profesinis statusas (SEI)	Mokinių įvertinimai apie tai, kokį darbą jie tikisi dirbti būdami maždaug 30 metų.	IM
BULLIED	Mokinio patyčių patirtis (WLE)	Mokinių įvertinimai, kaip dažnai jie mokykloje patyrė įvairių patyčių per pastaruosius 12 mėnesių (pvz., „Kiti mokiniai tyčia paliko mane be reikalo“, „Kiti mokiniai iš manęs šaipėsi“).	EI
COGACMCO	Kognityvinis aktyvinimas matematikoje: matematinio mąstymo skatinimas, B versija (WLE)	Mokinių įvertinimai, kaip dažnai jų matematikos mokytoja(s) per einamuosius mokslo metus rodė įvairius matematikos samprotavimus skatinančius veiksmus (pvz., „Spręsdamas matematikos uždavinį mokytojas paprašė paaiškinti savo samprotavimus“, „Mokytojas paprašė mūsų apginti atsakymą į matematikos uždavinį“).	EI/ER
COGACRCO	Kognityvinis aktyvinimas matematikoje: samprotavimo skatinimas, B versija (WLE)	Mokinių įvertinimai, kaip dažnai jų matematikos mokytoja(s) per einamuosius mokslo metus rodė įvairias elgsenas, rodančias, kad skatina matematinį mąstymą (pvz., „Mokytojas paskatino mus „mąstyti matematiškai“, „Mokytojas paklausė, kaip skirtingos temos yra susijusios su didesne matematine idėja“).	EI/ER
COOPAGR	Bendradarbiavimas (susitarimas) (WLE)	Mokinių vertinimai, kaip jie pritaria teiginiams apie įvairius elgesius, rodančius bendradarbiavimą (pvz., „Aš gerai dirbu su kitais žmonėmis“, „Mane erzina, kai turiu eiti į kompromisus su kitais“).	EI/IW
CREATEFF	Kūrybinis saviveiksmingumas (WLE)	Mokinių įvertinimai apie tai, kaip jie pasitiki savimi, kai reikia atlikti įvairias kūrybinio mąstymo įgūdžius atspindinčias užduotis (pvz., „Kūrybinių idėjų mokykliniams projektams kūrimas“, „Naujų dalykų kūrimas“).	IP
CREATOP	Kūrybiškumas ir atvirumas intelektui TBD (WLE)	Mokinių vertinimai, kaip jie pritaria teiginiams apie jų pačių požiūrį į jų kūrybiškumą ir atvirumą intelektui (pvz., „Darymas ką nors kūrybingo man suteikia malonumo“, „Man patinka žaidimai, kurie meta iššūkį mano kūrybiškumui“).	IM/IV
CURIOAGR	Smalsumas (susitarimas) (WLE)	Mokinių vertinimai, kaip jie pritaria teiginiams apie įvairius smalsumą rodančius elgesius (pvz., „Man patinka žinoti, kaip viskas veikia“, „Aš esu smalsesnis nei dauguma pažįstamų žmonių“).	IM
CURSUPP	Indeksas: dabartinė tėvų / globėjų parama mokymuisi namuose	Tėvų įvertinimai, kaip dažnai jie ar kas nors kitas jų namuose teikia su švietimu susijusią pagalbą (pvz., „Aptaria, kaip gerai mano vaikui sekasi mokykloje“, „Pasikalba su mano vaiku apie bet kokias problemas, kurias jis gali turėti mokykloje“).	EI

Kintamasis	Reikšmė	Paaikškinimas	DMGT dalis
DISCLIM	Indeksas: drausminis klimatas	Mokinių įvertinimai, kaip dažnai jų matematikos pamokose pasitaikydavo įvairių situacijų (pvz., „Mokiniai neklauso, ką sakė mokytojas“, „Mokiniai blaškosi naudodami <skaitmeninius išteklius> (pvz., išmaniuosius telefonus, svetaines, programėles).	ER
EDULEAD	Švietimo lyderystė (WLE)	Mokyklų direktorių vertinimai, kaip dažnai jie ar kiti jų mokyklos vadovybės nariai per pastaruosius 12 mėnesių dalyvavo veikloje, susijusioje su ugdymo lyderyste (pvz., „Bendradarbiavimas su mokytojais sprendžiant klasės drausmės problemas“, „Tėvų ar globėjų informacijos apie mokyklos ir mokinių veiklą teikimas“).	ER
EMOCOAGR	Emocijų kontrolė (susitarimas) (WLE)	Mokinių vertinimai, kaip pritaria teiginiams apie įvairius elgesio būdus, rodančius emocinę kontrolę (pvz., „Aš kontroliuoju savo emocijas“, „Aš lengvai supykstu“).	IP
ENCOURPG	Mokyklos skatinimas įtraukti tėvus ar globėjus (WLE)	Mokyklų direktorių vertinimai, kaip dažnai jų mokyklos darbuotojai per paskutinius mokslo metus įtraukė tėvus ar globėjus į įvairius mokinių ugdymosi aplinkos aspektus (pvz., „Pakviesti tėvai ar globėjai savanoriškai dalyvauti mokyklos veikloje“, „Inicijuoti bendravimas su tėvais ar globėjais apie vaiko pažangą“).	EI
ESCS	Ekonominės, socialinės ir kultūrinės padėties indeksas (2022 m.)	ESCS balas buvo pagrįstas trimis rodikliais: aukščiausia tėvų profesija (HISEI), aukščiausiu tėvų išsilavinimu metais (PAREDINT) ir nuosavybes namuose (HOMEPOS).	ER
EXPO21ST	Susipažinimas su matematiniu mąstymu ir XXI a. matematikos užduotimis (WLE)	Mokinių įvertinimai, kaip dažnai jie susidūrė su įvairiomis matematikos užduotimis, susijusiomis su matematiniais samprotavimais ir 21-ojo amžiaus matematikos užduotimis mokykloje (pvz., „Matematinės informacijos ištraukimas iš diagramų, grafikų ar modeliavimo“, „Statistinės variacijos sąvokos naudojimas priimant sprendimą“).	EM/DA
EXPOFA	Susipažinimas su formaliosios ir taikomosios matematikos užduotimis (WLE)	Mokinių įvertinimai, kaip dažnai jie susidūrė su įvairiomis formaliosiomis ir taikomosios matematikos užduotimis mokykloje (pvz., „Skaiciavimas, kiek pabrangtų kompiuteris atskaičius mokesčius“, „Lygčių sprendimas, pvz., $2(x+3) = (x+3)(x-3)$ “).	EM/DA
EXPWB	Patirta gerovė (ankstesnę dieną) (WLE)	Mokinių atsakymai apie praėjusią dieną patirtą savijautą (pvz., „Ar vakar visą dieną su jumis buvo elgiamasi pagarbiai?“, „Ar daug šypsojaisi ar juokėsi vakar?“).	IF
FAMCON	Indeksas: susipažinimas su matematinėmis sąvokomis	Mokinių vertinimai, kaip jie susipažinę su įvairiomis matematinėmis sąvokomis, atitinkančiomis skirtingus matematinių įgūdžių ar supratimo lygius (pvz., „Daliklis“, „Eksponentinė funkcija“, „3 dimensijų geometrija“).	DA
FAMSUP	Šeimos parama (WLE)	Mokinių vertinimai, kaip dažnai jų tėvai ar kas nors kitas iš jų šeimos narių atlieka įvairius veiksmus, rodančius šeimos paramą (pvz., „Aptaria, kaip tau sekasi mokykloje“, „Praleidžia laiką tiesiog kalbėdami su jumis“).	EI

Kintamasis	Reikšmė	Paaškinimas	DMGT dalis
FAMSUPSL	Šeimos parama savarankiškam mokymuisi (WLE)	Mokinių įvertinimai, kaip dažnai kas nors iš jų šeimos teikė tam tikros rūšies mokymosi pagalbą (pvz., „Padeda man sudaryti mokymosi tvarkaraštį“, „Padeda man pasiekti mokymosi medžiagą internetu“), kol mokyklos pastatas buvo uždarytas dėl COVID-19.	EI
FEELLAH	Jausmai apie mokymąsi namuose (WLE)	Mokinių vertinimai, kaip jie pritaria teiginiams apie tai, kaip jie jaučiasi mokydami namuose (pvz., „Man patiko mokytis pačiam“, „Mano mokytojai buvo gerai pasiruošę dėstyti nuotoliniu būdu.“), kol mokyklos pastatas buvo uždarytas dėl COVID-19.	IV
FEELSAFE	Saugumo jausmas (WLE)	Mokinių įvertinimai, kaip jie pritaria keturiems teiginiams apie jų suvokiamą saugumą (pvz., „Jaučiuosi saugus pakeliui į mokyklą“, „Jaučiuosi saugus savo klasėse mokykloje“).	EM
GRADE	Mokinio klasės santykinis įvertinimas, palyginti su modaliniu įvertinimu šalyje	–	ER
GROSAGR	Augimo mąstysena (WLE)	Mokinių įvertinimai, kaip jie pritaria daugeliui teiginių, nurodančių jų mąstymą apie intelektą (pvz., „Jūsų intelektas yra kažkas, ko jūs negalite labai pakeisti“, „Kai kurie žmonės tiesiog nesiseka matematikoje, kad ir kaip sunkiai jie mokytųsi“).	IP
IMAGINE	Vaizduotė ir nuotykių troškimas TBD (WLE)	Mokinių įvertinimai, kaip jie pritaria teiginiams apie jų pačių nuomonę apie vaizduotę ir nuotykių troškimą (pvz., „Man sunku pasitelkti vaizduotę“, „Naujų idėjų kūrimas man teikia malonumą“).	IW
INFOSEEK	Informacijos ieškojimas apie būsimą karjerą (WLE)	Mokinių įvertinimai, ar jie ėmėsi įvairių galimų veiklų, kad sužinotų apie būsimas studijas ar darbo tipus (pvz., „atlikiau praktika“, „ieškojau informacijos apie karjerą internete“).	IV
LIFESAT	Mokinio pasitenkinimas gyvenimu įvairiose srityse (WLE)	Mokinių pasitenkinimo įvairiomis gyvenimo sritimis įvertinimai (pvz., „Jūsų sveikata“, „Kaimynystė, kurioje gyvenate“).	IF
MATHEF21	Matematikos saviveiksmingumas: matematiniai samprotavimai ir 21-ojo amžiaus įgūdžiai (WLE)	Mokinių įvertinimai, kaip jie pasitiki savimi, kai reikia atlikti įvairias matematines samprotavimo ir XXI amžiaus matematikos užduotis (pvz., „Matematinės informacijos ištraukimas iš diagramų, grafikų ar modeliavimų“, „Statistinės variacijos sąvokos naudojimas priimanč sprendimą“).	IP
MATHEFF	Matematikos saviveiksmingumas: formalioji ir taikomoji matematika (WLE)	Mokinių įvertinimai, kaip jie pasitiki savimi, kai reikia atlikti įvairias formalias ir taikomas matematikos užduotis (pvz., „Skaičiavimas, kiek pabrangtų kompiuteris atskaičius mokesčius“, „Lygčių sprendimas, pvz., $2(x+3) = (x+3)(x-3)$ “).	IP
MATHPERS	Pastangos ir atkaklumas matematikoje (WLE)	Mokinių įvertinimai, kaip dažnai jie elgėsi taip, kad matematikos pamokose dėjo pastangas ir atkaklumą (pvz., „Aktyviai dalyvavau grupinėse diskusijose per matematikos pamokas“, „Idėjau pastangų atlikdamas matematikos pamokų užduotis“).	IP
MTTRAIN	Matematikos mokytojų pasirengimas (WLE)	Mokyklų direktorių nuomonės apie tai, kuriose srityse jų mokyklose matematikos mokytojams buvo siūlomas kvalifikacijos tobulinimas (pvz., „Matematikos turinys“, „Matematikos mokymo programa“).	ER

Kintamasis	Reikšmė	Paaškinimas	DMGT dalis
NEGSCLIM	Neigiamas mokyklos klimatas (WLE)	Mokyklų direktorių vertinimai apie probleminio elgesio, kuris prisideda prie neigiamo mokyklos klimato jų mokykloje, mastą (pvz., „Keiksmazodžiai“, „Vandalizmas“).	EM/EI
OPENCUL	Atvirumo kultūra / klimatas (WLE)	Mokyklų direktorių vertinimai apie jų mokyklų mokinių orientaciją į atvirumą ir kūrybiškumą (pvz., „Dauguma mano mokyklos mokinių yra kūrybingi“, „Dauguma mano mokyklos mokinių mėgsta mokytis naujų dalykų“).	EM/EI
PARINVOL	Tėvų įsitraukimas (WLE)	Tėvų atsakymai į klausimus apie jų dalyvavimą vaiko mokymuose praėjusiais metais (pvz., „Savo iniciatyva aptariau su mokytoju apie vaiko pažangą“, „Dalyvavau numatytame tėvų susirinkime ar konferencijose“).	EI/DA
PASCHPOL	Indeksas: mokyklos politika dėl tėvų dalyvavimo	Tėvų vertinimai, kaip jie sutinka su teiginiais apie mokyklos politiką, susijusią su tėvų dalyvavimu (pvz., „Mano vaiko mokykla užtikrina veiksmingą mokyklos ir šeimos bendravimą“, „Mano vaiko mokykla įtraukia tėvus į mokyklos sprendimų priėmimo procesą“).	ER
PERSEVAGR	Atkaklumas (susitarimas) (WLE)	Mokinių vertinimai, kaip jie pritaria teiginiais apie įvairius elgesius, rodančius atkaklumą (pvz., „Atlieku užduotį, kol ji bus atlikta“, „Padaręs klaidų pasiduodu“).	IV
PQMCAR	Matematikos karjera (WLE)	Tėvų atsakymai į klausimus apie su matematika susijusią karjerą (pvz., „Ar kas nors iš jūsų šeimos narių (įskaitant jus) dirba ?“, „Ar jūsų vaikas domisi dirbti ?“).	EI/DA
PQMIMP	Tėvų požiūris į matematiką (WLE)	Tėvų vertinimai, kaip jie pritaria teiginiais apie matematinių žinių svarbą (pvz., „Dauguma darbų šiandien reikalauja tam tikrų matematikos žinių ir įgūdžių“, „Darbo rinkoje turėti geras matematikos žinias ir įgūdžius – privalumas“).	EI
PQSCHOOL	Indeksas: tėvų vertinama mokyklos kokybė	Tėvų įvertinimai, kaip jie pritaria teiginiais apie mokyklos kokybę (pvz., „Dauguma mano vaiko mokyklos mokytojų atrodo kompetentingi ir atsidadę“, „Mano vaiko mokykloje aukšti pasiekimų standartai“).	EM
PROPSUPP	Personalo dalis pedagoginei pagalbai	Pedagoginių ir nepedagoginių darbuotojų mokykloje santykis.	ER/DA
PSYCHSYM	Psichosomatiniai simptomai (WLE)	Mokinių vertinimai, kaip dažnai jie jautė skirtingus psichosomatinius simptomus (pvz., „galvos skausmas“, „skrandžio skausmas“).	IF
RELATST	Mokinių ir mokytojų santykių kokybė (WLE)	Mokinių vertinimai, kaip jie pritaria aštuoniems teiginiais (pvz., „Mano mokyklos mokytojai mane gerbia“, „Kai mano mokytojai klausia, kaip man sekasi, jie tikrai domisi mano atsakymu“).	EI
SCHAUTO	Mokyklos autonomija (WLE)	Mokyklos direktorių direktorių atsakymai, kam tenka pagrindinė atsakomybė už įvairius sprendimus ar veiklą jų mokykloje (pvz., „Mokytojų skyrimas ar samdymas“, „Mokytojų atlyginimų didinimo nustatymas“).	ER/DA
SCHSUST	Mokyklos veiksmas / veikla, skirta mokymuisi palaikyti (WLE)	Mokinių dažnumo vertinimai, kaip dažnai kas nors iš jų mokyklos atliko veiklą, padedančią palaikyti jų mokymąsi (pvz., „Atsiuntė man mokymosi medžiagą,	DI

Kintamasis	Reikšmė	Paaškinimas	DMGT dalis
		kad galėčiau mokytis savarankiškai“, „Tikrino, ar atlieku užduotis“).	
SDLEFF	Savarankiško mokymosi saviveiksmingumas (WLE)	Mokinių vertinimai, kaip užtikrintai jie jaučiasi atlikdami įvairias savarankiško mokymosi užduotis (pvz., „Savarankiškai susirasti mokymosi išteklių internete“, „Savarankiškai atlikti mokyklinį darbą“).	IV
SMRATIO	Indeksas: mokinių ir matematikos mokytojų santykis	Mokinių ir matematikos mokytojų skaičiaus mokykloje santykis.	ER/DA
SOCCON	Socialiniai ryšiai: lengvas bendravimas apie rūpesčius ir problemas (WLE)	Mokinių vertinimai, kaip lengva bendrauti apie savo rūpesčius ir problemas su įvairiais žmonėmis (pvz., „Tėvu“, „Broliu (-iais)“).	EI
SOCONPA	Socialiniai ryšiai: tėvai (WLE)	Mokinių vertinimai, kaip dažnai jų tėvai užsiima įvairia veikla (pvz., „Parodo, kad jiems rūpi“, „Skatina mane pačiam priimti sprendimus“).	EI
STRATIO	Mokinio ir mokytojo santykis	Mokinių ir mokytojų skaičiaus mokykloje santykis.	EM
STRESAGR	Atsparumas stresui (susitarimas) (WLE)	Mokinių vertinimai, kaip jie pritaria teiginiams apie įvairius elgesio būdus, rodančius atsparumą stresui (pvz., „Streso metu išlieku ramus“, „Aš lengvai susinervinu“).	IP
STUBEHA	Indeksas: su mokiniais susijusius veiksniai, turintys įtakos mokyklos klimatui	Direktorių vertinimai apie tai, kiek mokinių mokymuisi trukdo mokinių elgesys (pvz., „Mokinių pamokų praleidinėjimas“, „Mokinių alkoholio ar narkotikų vartojimas“).	EM
TEACHSUP	Indeksas: mokytojo pagalba matematikoje	Mokinių dažnumo vertinimai, kaip dažnai matematikos pamokose pasitaikė įvairios situacijos (pvz., „Mokytojas domisi kiekvieno mokinio mokymusi“, „Mokytojas suteikia papildomos pagalbos, kai mokiniams jos reikia“).	ER/DA