

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

RASA ŠMIDTAITĖ

ANTROS EILĖS MATRICŲ STRUKTŪRINIAI  
DĖSTINIAI NETIESINIŲ SISTEMŲ  
TYRIMUOSE

Daktaro disertacija  
Fiziniai mokslai, informatika (09P)

2017, Kaunas

Disertacija rengta 2008–2017 metais Kauno technologijos universiteto Matematikos ir gamtos mokslų fakulteto Taikomosios matematikos katedroje. Mokslinius tyrimus rėmė Lietuvos mokslo taryba.

**Mokslinis vadovas:**

Prof. dr. Zenonas NAVICKAS (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09P).

Interneto svetainės, kurioje skelbiama disertacija, adresas:

<http://ktu.edu>

Redagavo:

Aurelija Gražina Rukšaitė (leidykla „Technologija“)

© R. Šmidkaitė, 2017

ISBN 978-609-02-1333-9

Leidinio bibliografinė informacija pateikiama Lietuvos nacionalinės Martyno Mažvydo bibliotekos Nacionalinės bibliografijos duomenų banke (NBDB)

# TURINYS

<b>IVADAS</b>	<b>6</b>
<b>1 LITERATŪROS APŽVALGA</b>	<b>9</b>
1.1 Idempotentai ir nulpotentai matricų struktūrinėje analizėje . . . . .	9
1.2 Chaotiniai iteraciniai modeliai . . . . .	10
1.3 Susietų iteracinių modelių tinkleliai . . . . .	14
1.4 Dvimačiai iteraciniai modeliai . . . . .	18
1.5 Elektrokardiografinių signalų analizės apžvalga . . . . .	19
1.5.1 Elektrokardiografija . . . . .	19
1.5.2 Vieno EKG signalo tyrimo metodai . . . . .	21
1.5.3 Ryšių tarp dviejų signalų tyrimas . . . . .	34
<b>2 ANTROS EILĖS MATRICŲ STRUKTŪRINIAI DĖSTINIAI</b>	<b>49</b>
2.1 Pagrindiniai antros eilės kvadratinių matricų apibrėžimai bei žymėjimai	49
2.2 Antros eilės idempotentai ir nulpotentai . . . . .	50
2.2.1 Antros eilės idempotentų ir nulpotentų savybės . . . . .	50
2.2.2 Antros eilės idempotentų ir nulpotentų aibė . . . . .	52
2.3 Antros eilės matricų dėstiniai . . . . .	54
2.3.1 Matricos $G$ sugeneruota idempotentų ir nulpotentų sistema . .	54
2.3.2 Elementarūs ir sudėtiniai idempotentai bei jų parametrinės iš- raiškos . . . . .	57
2.3.3 Matricos $X$ trijų komponentų dėstinys . . . . .	58
2.4 Antros eilės kvadratinių matricų rūšys ir jų savybės . . . . .	66
2.4.1 Idempotentinė ir nulpotentinė matricos . . . . .	66
2.4.2 Idempotentų ir nulpotentų parametrinės išraiškos . . . . .	68
2.5 Skyriaus išvados . . . . .	69
<b>3 MATRICINIAI ITERACINIAI MODELIAI</b>	<b>70</b>
3.1 Antros eilės matricinių iteracinių modelių savybės . . . . .	70
3.2 Antros eilės matricinis logistinis iteracinis modelis . . . . .	72
3.2.1 Pradinių sąlygų matrica, tikrinės reikšmės ir iteraciniai procesai	73
3.2.2 Skaitiniai eksperimentai . . . . .	77
3.3 Antros eilės matricinių iteracinių modelių sprendinių divergavimas . .	82
3.4 Skyriaus išvados . . . . .	86
<b>4 ELEKTROKARDIOGRAFINIŲ PARAMETRŲ TYRIMAS</b>	<b>89</b>
4.1 Dviejų sinchroninių signalų dinaminių sąsajų vertinimas . . . . .	89
4.2 Imtynininkų elektrokardiografinių duomenų analizė . . . . .	92
4.3 Koronarinės angioplastikos duomenys . . . . .	99
4.4 Ryšio tarp magnetinio žemės lauko ir širdies ritmo variabilumo tyrimas	100

4.5 Skyriaus išvados . . . . .	103
<b>IŠVADOS</b>	<b>104</b>
<b>PRAKTINĖ SVARBA</b>	<b>105</b>
<b>LITERATŪRA</b>	<b>106</b>
<b>MOKSLINIŲ PUBLIKACIJŲ DISERTACIJOS TEMA SĄRAŠAS</b>	<b>117</b>

## ŽENKLŲ, SIMBOLIŲ IR SANTRUMPŲ SARAŠAS

**I** – vienetinė matrica.

**⊖** – nulinė matrica.

$\lambda_1, \lambda_2$  – antros eilės kvadratinės matricos tikrinės reikšmės.

$\lambda_0$  – antros eilės kvadratinės matricos kartotinė tikrinė reikšmė, t. y.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ .

$\sigma_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{kai } k \neq l, \\ 1, & \text{kai } k = l, \end{cases}$  – Kronekerio delta ( $k, l = 1, 2$ ).

**D<sub>i</sub>** – matrica idempotentas; čia  $i = 1, 2$ .

**D** ir **D̄** – idempotentas ir jo jungtinis idempotentas, t. y. **D** + **D̄** = **I**.

**N** – matrica nulpotentas.

**N<sub>12</sub>, N<sub>21</sub>** – matricos nulpotentai, sugeneruoti neišsigimusios matricos, panaudojus tos matricos Bernšteino pjaustinius.

**S<sub>G</sub>** – idempotentų bei nulpotentų sistema, sugeneruota iš neišsigimusios matricos **G**.

**Tr X** – matricos **X** pėdsakas.

**det X** – matricos **X** determinantas.

**dsk X** – matricos **X** diskriminantas.

**rank X** – matricos **X** rangas.

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0$  – idempotento bei nulpotento bendrų parametrinių išraiškų parametrai.

$\beta_0 \in \mathbb{C}, \beta_0 \neq 0$  – elementaraus idempotento parametras.

$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{C}, \tilde{\beta} \neq 0$  – logistinio iteracinio modelio idempotento parametrai, dar vadinami matricos struktūriniais parametrais.

$\check{\alpha}, \check{\beta} \in \mathbb{C}, \check{\beta} \neq 0$  – logistinio iteracinio modelio nulpotento parametrai.

**X<sup>(n)</sup>, X<sup>(n+1)</sup>** –  $n$ -tosios ir  $n + 1$ -osios iteracijų matricos.

$x_{11}^{(n)}, x_{12}^{(n)}, x_{21}^{(n)}, x_{22}^{(n)}$  –  $n$ -tosios iteracijos antros eilės kvadratinės matricos elementai.

**f(X)** – funkcija, kurios kintamasis yra kvadratinė matrica.

$a$  – logistinio iteracinio modelio parametras ( $a \in \mathbb{R}$ ).

**X<sup>(0)</sup>** – matricinio iteracinio modelio pradinių sąlygų matrica.

$\lambda_0^{(n)}$  –  $n$ -tosios iteracijos matricos kartotinė tikrinė reikšmė.

$\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}$  –  $n$ -tosios iteracijos matricos tikrinės (skirtingos) reikšmės.

$\tilde{\lambda}$  – Liapunovo eksponentės skaitinis įvertis.

$\mu_0^{(n+1)}$  – nulpotentinės matricos  $n$ -tosios iteracijos apskaičiuojamas koeficientas.

**K** – apskritiminio iteracinio modelio parametras ( $K \in \mathbb{R}$ ).

**Ω** – apskritiminio iteracinio modelio parametras ( $\Omega \in \mathbb{R}$ ).

$i$  – menamas vienetas kompleksinių skaičių aibėje.

**ℝ** – realiųjų skaičių aibė.

**ℂ** – kompleksinių skaičių aibė.

**ℤ** – sveikųjų skaičių aibė.

## IVADAS

### Temos aktualumas

Nors netiesinių dinaminų sistemų tyrimų užuomazgos, siejamos su J. H. Poincare darbais, siekia XIX a., tačiau tokios sistemos vis dar yra svarbus ir didelio dėmesio sulaukiantis tyrimų objektas. Netiesinės dinaminės sistemos sutinkamos daugelyje mokslo sričių: matematikoje, fizikoje, biologijoje, ekonomikoje ir netgi psichologijoje. Dauguma mus supančių realių sistemų yra sudėtingos (kompleksinės), o jas apibūdinantys signalai – daugiakanaliai. Tokių signalų pavyzdžiai yra ne tik biomedicininiai, bet ir seismologiniai, lazerių ir kiti technikos ar gamtoje generuojami signalai. Nagrinėjant kompleksines sistemas, pavienių signalų tyrimas nėra pakankamas visos sistemos dinamikai aprašyti, tuomet reikia vertinti signalų vidinius bei tarpusavio sąryšius.

Dviejų signalų tarpusavio ryšiui vertinti dažniausiai taikomi standartiniai statistiniai metodai, tokie kaip koreliacija, kroskoreliacija, Grangerio priešastingumo testas, abipusė informacija ir kt. Statistinių dydžių skaičiavimams reikia sąlyginai daug duomenų, be to, daroma prielaida, kad vertinami dydžiai yra atsitiktiniai. Natūralu, kad, siekiant stebėti realių neatsitiktinių signalų dinamiką realiuoju laiku, tokie metodai nėra tinkami.

Kadangi širdies ir kraujagyslių ligos yra viena iš dažniausių mirties priežasčių, o kardiologijoje plačiausiai naudojamas neinvazinis tyrimas yra elektrokardiogramos registravimas, todėl labai svarbu mokėti laiku pastebėti menkiausius elektrokardiografinius pokyčius. Beveik prieš dešimtį metų lietuvių mokslininkai pasiūlė metodiką, skirtą signalų tarpusavio ryšio dinamikai nagrinėti. Pasiūlyta metodika, paremta matricų struktūriniu analize, davė gerus rezultatus atliekant elektrokardiografinių signalų parametru tyrimus ir buvo aprobuota daugybėje publikacijų ir projektų. Dėl minėtų priežasčių šiame darbe toliau plėtojama matricine analize paremtos elektrokardiografinių signalų tyrimo metodikos koncepcija. Ankstesniuose tyrimuose vertintos charakteristikos papildytos naujais matricos struktūrą nusakančiais įverčiais. Taip siekiama nustatyti, kaip dviejų signalų tarpusavio ryšį nusakančios kreivės forma (morfologija) ir kompleksiskumas susiję su fiziologiniais ir patologiniais procesais.

Struktūriniai matricų dėstiniai rado taikymo nišą ne tik kardiologijoje, bet ir iteraciniuose modeliuose. Skaliariniame iteraciniame modelyje kintamasis buvo pakeistas antros eilės kvadratine matrica. Taip buvo gauta modifikuota iteracinių modelių klasė, pasižyminti efektais, kurie nebūdingi skaliariniams modeliams ar jų plėtiniams. Buvo pastebėta, kad jeigu matricinio iteracinio modelio pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė, tuomet sistemos sprendiniai gali diverguoti. Esant idempotentinei matricai, toks elgesys neįmanomas. Matriciniai iteraciniai modeliai gali būti pritaikomi koduojant informaciją.

Nors aktualumą daugiausia lemia praktiniai taikymai, tačiau šio darbo pagrindas yra specifinės antros eilės matricų struktūros nusakymas. Remiantis matricų dėstiniais, buvo pasiūlyta signalų tarpusavio ryšius nagrinėjanti metodika, kuri pasižymi geromis savybėmis vertinant sportininkų fizinį pasirengimą ir atliekant klinikinius ty-

rimus. Matriciniai iteraciniai modeliai atskleidžia visiškai kitokias sistemos savybes nei nagrinėjami kitokie to paties iteracinio modelio plėtiniai. Minėti teiginiai nulemia šio disertacinio darbo aktualumą tiek teorine, tiek taikomąja prasme.

**Tyrimų objektas** – antros eilės matricių sekos, sugeneruotos matricinių iteracinių modelių bei matricių sekos, gautos sudarant jas iš elektrokardiogramos parametrų duomenų.

**Darbo tikslas** – išnagrinėti antros eilės matricių dėstinius (trijų, keturių komponentų), ištirti matricinius iteracinius modelius ir išplėsti reikšmingų matricos struktūrą nusakančių įverčių aibę bei pritaikyti juos elektrokardiografinių signalų dinamikos stebėsenai.

**Suformuluotiems tikslams pasiekti darbe yra sprendžiami tokie uždaviniai:**

*Teoriniai:*

- Sudaryti idempotentų ir nulpotentų sistemos generavimo schemą. Įvesti idempotentų ir nulpotentų parametrines išraiškas.
- Sukonstruoti antros eilės matricių struktūrinius dėstinius idempotentais bei nulpotentais ir išnagrinėti dėstinių savybes.
- Išvesti būtinas ir pakankamas sąlygas matricių iteracinių modelių sprendiniams diverguoti.

*Praktiniai:*

- Tęsti ir plėtoti ankstesnes (KTU biomedicinos inžinerijos, LSMU, Kardiologijos instituto, Sporto instituto bei LSU mokslininkų) metodikas, paremtas antros eilės matricių struktūriniu analize. Praplėsti matricos struktūrą nusakančių reikšmingų įverčių aibę ir pritaikyti elektrokardiografinių parametrų tarpusavio ryšio dinamikai tirti.

**Tyrimų metodai ir programinės priemonės:**

- Atliekant tyrimus plačiai naudojama matricių struktūrinės analizės teorija. Lyginamajai analizei atlikti panaudoti MATLAB paketo matematinės ir statistinės analizės metodai.
- Netiesinių dinaminų sistemų modeliai ir tyrimo metodai panaudoti matricių iteraciniams modeliams tirti.
- Matricių struktūrinė analizė pritaikyta elektrokardiografinių signalų sąsajų tyrimui atlikti.

**Darbo mokslinis naujumas ir praktinė svarba:**

- Disertacinio tyrimo metu buvo sudaryti *specialūs* antros eilės matricių dėstiniai iš nulpotentų ir idempotentų.
- Suformuota *modifikuota* matricinių iteracinių modelių klasė  $\mathbf{X}^{(n+1)} = f(\mathbf{X}^{(n)})$ , čia  $\mathbf{X}^{(n)}$  yra antros eilės matrica, o funkcija  $f$  – analizinė funkcija. Tokia modelių klasė atskleidžia savybes, kurios nėra būdingos nei vienmačiams iteraciniams modeliams ar jų plėtiniams, nei susietų iteracinių modelių tinkleliams.
- Dviejų elektrokardiografinių signalų tarpusavio ryšiui tirti pasiūlytos *naujos* charakteristikos, kurios leidžia pastebėti ir įvertinti kokybiškai naujus signa-

lo pokyčius. Šios metodikos taikomos žmogaus sveikatos būklei stebėti ir vertinti.

### **Ginti pateikiama:**

- *Specialūs* antros eilės matricių dėstiniai idempotentų bei nulpotentų tiesiniu dariniu.
- *Modifikuota* matricinių iteracinių modelių klasė  $\mathbf{X}^{(n+1)} = f(\mathbf{X}^{(n)})$ , kai  $\mathbf{X}^{(n)} \in \mathbb{R}_{2 \times 2}$ , o  $f$  – analizinė funkcija. Suformuluotos būtinos ir pakankamos sąlygos tokių iteracinių modelių sprendiniams diverguoti.
- *Nauji* įverčiai dviejų signalų tarpusavio ryšiui vertinti, paremti antros eilės matricių struktūrine analize. Šie įverčiai įgalina vertinti kokybiškai naujus elektrokardiografinio signalo pokyčius, palyginti su klasikine EKG analizės metodika.

### **Darbo rezultatų aprobavimas:**

Darbo tema pateikti 12 moksliniai straipsniai, iš jų 5 mokslinės informacijos instituto duomenų bazės (ISI) leidiniuose, turinčiuose citavimo indeksą, dvi publikacijos atspausdintos tarptautinėse ir 3 nacionalinėse leidyklose. Likusios 7 publikacijos pristatytos kitų tarptautinių duomenų bazių leidiniuose.

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti 7 tarptautinėse konferencijose: Lietuvoje vykusiose tarptautinėse konferencijose – Biomedicininė inžinerija 2008, 2009 ir 2011 m.; Electronics'2009 ir Electronics'2010; 3rd International Congress „Complex Systems in Medicine and Sport“; Lenkijoje vykusioje konferencijoje 4th International Forum „Science & Technology Days POLAND-EAST“. Taip pat rezultatai buvo pristatyti seminare Ilmenau technikos universiteto Biomedicininės inžinerijos ir informatikos institute (Ilmenau, Vokietija) 2010 m. lapkričio 23 d. dviejų mėnesių stažuotės, finansuotos Lietuvos mokslo tarybos projekto „Studentų mokslinės veiklos skatinimas“ lėšomis, metu. Skaitytas pranešimas „EKG tarpparametrinių sąsajų tyrimas“ 3-iojoje nacionalinėje mokslinėje konferencijoje „Mokslas – žmonių sveikatai“ (2010 m.). Disertacijos rezultatai eksponuoti mokslo festivalyje „KTU Erdvėlavis Žemė“ (2010 ir 2011 m.), kur pristatyti tyrimai, atlikti bendradarbiaujant su kolegomis iš Lietuvos sveikatos mokslų universiteto.

Disertacijos rezultatai buvo naudoti struktūrinių fondų projekto „Programos „Eureka“ mokslinių tyrimų ir technologinės plėtros projektų įgyvendinimas – EUREKA“ (VP1-3.1-ŠMM-06-V-01-003) paprojektyje „Angelas sargas išplėstai namų aplinkai (GUARANTEE)“ ir plėtros projektų centro projektų grupėje Nr. VP1-V-31-003 (7978) projekte „Arterinės hipotenzijos epizodų prognozavimo inovacinės sistemos technologinė plėtra“ (Nr. VP1-3.1-ŠMM-10-V-02-003).

**Darbo apimtis ir struktūra:** Daktaro disertaciją sudaro įvadas, 4 pagrindiniai skyriai, išvados, praktinė svarba, literatūros sąrašas ir publikacijų sąrašas. Disertacijos apimtis – 118 puslapių. Disertacijoje yra 40 paveikslų ir 208 šaltinių cituojamos literatūros aprašas.



# 1. LITERATŪROS APŽVALGA

## 1.1. Idempotentai ir nulpotentai matricių struktūrinėje analizėje

Matricių analizę galima skirstyti į dvi šakas. Pirmoji nagrinėja uždavinius, kuriuose matrica yra kintamasis. Prie šių uždavinių priskiriami normų skaičiavimas, konvergavimo tyrimas ir panašiai. Antroji šaka, vadinamoji matricių algebra, nagrinėja matricių struktūrą – tikrines reikšmes, tikrinius vektorius, dėstinius ir t. t. Būtent matricių struktūros nagrinėjimu paremti disertacijoje nagrinėjami uždaviniai – matricių dėstiniai idempotentais bei nulpotentais.

Idempotento bei nulpotento sąvokos siejamos su Benjamin Peirce<sup>1</sup> vardu. Peirce šias sąvokas pavartojo aprašydamas algebros elementus (Peirce, 1881). Idempotentais jis vadino elementus, kurie, keliami teigiamu sveikuoju laipsniu, išlieka invariantais, o nulpotentais – elementus, kuriuos keliant laipsniu gaunamas nulinis elementas. Matricių teorijoje idempotento ir nulpotento sąvokos yra analogiškos. Kvadratinę matricę  $\mathbf{D}$  vadiname *idempotentu* (pastovios galios matrica), jeigu  $\mathbf{D}^2 = \mathbf{D}$ . Kvadratinę matricę  $\mathbf{N}$  vadiname *nulpotentu* (matrica, netenkančia galios), jeigu  $\mathbf{N}^p = \mathbf{0}$ , mažiausią skaičių  $p$ , su kuriuo teisinga ankstesnė lygybė, vadiname nulpotento eile (Peirce, 1881).

Vienas iš nagrinėjamų uždavinių yra idempotentų ir nulpotentų bei jų darinių savybės (Baksalary et al., 2000; Baksalary et al., 2010; Seguins Pazzis, 2010; Hartwig et al., 1990; Özdemir et al., 2012; Özdemir et al., 2004; Özdemir et al., 2009; Sarduvan et al., 2008; Tian, 2011; Tian et al., 2006; Wright, 2011). Baksalary et al. (2000) aprašo visus galimus dviejų skirtingų  $n \times n$  formato idempotentų tiesinius darinius, kurie taip pat išlieka idempotentais. Idempotentai, gauti iš trijų  $n \times n$  formato idempotentų tiesinių darinių, aptariami Özdemir et al. (2004). Ne mažiau svarbūs atvejai, kai kelių matricių tiesinis darinys yra tripotentas, bendru atveju –  $t$ -potentas ar kitokios rūšies specialioji matrica (Özdemir et al., 2009; Sarduvan et al., 2008).

Be anksčiau minėtų savybių tyrimo, taip pat nagrinėjami specialiujų matricių ir jų tiesinių darinių rangai, pėdsakai, tikrinės reikšmės, determinantai (Tian et al., 2006). Dar 1992 m. įrodyta lygybė tarp idempotento rango ir pėdsako pastaraisiais metais vėl susilaukė net kelių autorių dėmesio – jie savybę pagrindė remdamiesi vien idempotento apibrėžimu (Baksalary et al., 2010; Wright, 2011).

Matricių dėstinių sudarymas taip pat ne mažiau aktualus (Özdemir et al., 2012; Tian, 2011). Svarbus uždavinys – išsiaiškinti, kokias kvadratinės matricas galima išdėstyti vien idempotentų tiesiniu dariniu. Nors šis klausimas nagrinėjamas jau seniai (Hartwig et al., 1990), tačiau aktualumas nemažėja (Seguins Pazzis, 2010). Tarkime, turime du komutatyvius  $n$ -tos eilės tripotentus  $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$  ir  $\mathbf{B}^3 = \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ , tuomet galima sudaryti matricę  $\mathbf{M} = a_0\mathbf{I}_n + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + b_1\mathbf{B} + b_2\mathbf{B}^2 + c_{11}\mathbf{AB} + c_{12}\mathbf{AB}^2 + c_{21}\mathbf{A}^2\mathbf{B} + c_{22}\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$ . Matriciai  $\mathbf{M}$  suformuojamas nesikertančių idempotentų dėstinys (angl. *disjoint idempotent decomposition* (DID)), susidedantis iš devynių komponentų (Tian, 2011). Pastarasis uždavinys apibendrintas Özdemir et al. (2012)

<sup>1</sup>Benjamin Peirce (1809–1880) – JAV matematikos ir astronomijos profesorius.

– nagrinėjama matrica, sudaryta iš  $m$  ( $m \geq 2$ ) skirtingų  $n$ -tos eilės komutatyvių tripotentų bei jų sandaugų tiesinio darinio. Šiuo atveju matricos dėstiny s sudarytas iš  $3^m$  nesikertančių  $n$ -tos eilės idempotentų.

Mūsų nagrinėjamas uždavinys yra antros eilės kvadratinų matricų išdėstymas idempotentų ar nulpotentų tiesiniu dariniu. Matricų struktūrinis skaidymas nėra naujas tyrimo objektas (Bernstein, 2009). Duotos matricos struktūros nusakymas idempotentais ir nulpotentais išplaukia iš Kelio ir Hamiltono teoremos.

**Keilio<sup>2</sup> ir Hamiltono<sup>3</sup> teorema.** Jeigu  $p_X(\lambda) = 0$  yra charakteringoji matricos  $X \in \mathbb{C}_{n \times n}$  lygtis, tuomet matrica  $X$  yra savosios charakteringosios lygties šaknis  $p_X(X) = \Theta$ .

Išsamesnė teorija – apibrėžimai, savybės bei teoremos aptariamoms antrame disertacijos skyriuje.

## 1.2. Chaotiniai iteraciniai modeliai

Pastaraisiais metais, sparčiai besivystant kompleksinių sistemų teorijai, didelis dėmesys skiriamas kardiosignalų chaotiškumo tyrimams (Glass, 1990; Glass, 2009; Govindan et al., 1998; Letellier, 2011; Wu et al., 2009; Zhao et al., 2008).

Klausimas, „ar normalus širdies aktyvumas yra chaotinis“, gvildenamas seniai, ir į jį vis dar nėra atsakyta (Campos et al., 2013; Freitas et al., 2009; Glass, 1990; Glass, 2009; Kamath, 2013). Visa prestižinio tarpdisciplininio netiesinių sistemų žurnalo „Chaos“ (vol. 19, no. 2, 2009) skiltis „Diskutuotini netiesinės dinamikos mokslo klausimai“ (angl. *Controversial Topics in Nonlinear Science*) buvo paskirta šiam klausimui. Įtraukus daugybę mokslininkų į šią diskusiją, buvo pastebėta, kad iš tiesų gal pats klausimas nėra tikslus, verčiau reiktų nagrinėti, „kokie ryšiai lemia sudėtingą kardioritmų struktūrą bei kaip tie ryšiai pasireiškia, atsiradus sveikatos sutrikimams“. Netiesinė dinamika turi gerus matematinius įrankius šioms problemoms spręsti (Glass, 2009). Nors pastaraisiais dešimtmečiais pavyko nemažai pasiekti aiškinantis aritmijų netiesinę dinamiką, tačiau klinikinis taikymas vis dar yra labai sudėtingas (Amano et al., 2014).

Kas tai yra chaosas? – tai netiesinis deterministinis tam tikros sistemos elgesys, pasireiškiantis keistais atraktoriais ar fraktalinėmis struktūromis sistemai evoliucionuojant.

Chaoso teorija pradėjo formotis dar 1960-aisiais. 1961 m. E. Lorenzas,<sup>4</sup> atlikdamas su orų prognoze susijusius skaičiavimus, pastebėjo vadinamąjį „drugelio efektą“. Siekdamas sumažinti skaičiavimo laiko sąnaudas, Lorenzas sugalvojo panaudoti dalį prieš tai atlikto tyrimo duomenų. Vėliau apžvelgęs gautus skaičius pastebėjo, jog gauti visai nauji rezultatai, nors skaičiavimai buvo analogiški prieš tai atliktiems. Išsamiau panagrinėjęs pastebėjo, jog skaičiai, kuriuos jis įvedė, buvo šiek tiek suapvalinti.

<sup>2</sup> Arthur Cayley (1821–1895) – anglų matematikas.

<sup>3</sup> William Rowan Hamilton (1805–1865) – airių kilmės fizikas, astronomas bei matematikas.

<sup>4</sup> Edward Norton Lorenz (1917–2008) – amerikiečių matematikas ir meteorologas bei chaoso teorijos pradininkas.

Buvo prieita prie išvados, kad ilgalaikė orų prognozė nėra įmanoma, nes menkiausi pradinių sąlygų pokyčiai sukelia didžiulius nuokrypius laikui bėgant. Nors Lorenzo atradimas buvo atsitiktinis, tačiau tai buvo chaoso mokslo pradžia (Ofulla, 2013).

Tai, ką Lorenzas tyrinėjo meteorologijoje, R. May<sup>5</sup> tyrinėjo ekologijoje. May darbas (apie 1970-uosius) padėjo suvokti bifurkacijos ir periodo dvigubėjimo koncepcijas. 1970-aisiais May tyrė, kaip vabzdžių populiacijos didėjimas priklauso nuo maitinimo. Mokslininkas pastebėjo, kad, esant tam tikroms kritinėms reikšmėms, jo sukurtam modeliui grįžti į pradinę būseną reikėdavo dvigubai daugiau laiko – periodas padvigubėjo. Po keleto periodo dvigubėjimo ciklų jo modelis tapdavo nenusipėjamas, panašiai, kaip ir vabzdžių populiacija tampa neprognozuojama. Po May atradimo tyrinėjant vabzdžius, matematikai išsiaiškino, kad periodo dvigubėjimas yra natūralus kelio į chaosą reiškinys daugelyje sistemų.

Vienas didžiausių indėlių į naująjį mokslą įnešusių mokslininkų buvo B. Mandelbrot<sup>6</sup>. 1982 m. Mandelbrot pradėjo vystyti fraktalų matematiką, panaudodamas personalinį kompiuterį. Terminą „fraktalas“ pats autorius pavartojo dar 1975 metais. Mandelbrot fraktalai padėjo aprašyti ir įsivaizduoti (ne paaiškinti) chaotinę elgesį (Ofulla, 2013).

Kita naujojo mokslo pradininkų buvo M. Feigenbaumas<sup>7</sup>. Feigenbaumas parodė, kad periodo dvigubėjimas yra normalus reiškinys, kai tvarka suyra ir atsiranda chaosas. Mokslininkas atrado dėsnį, būdingą visoms chaotinėms sistemoms, – tai konstanta, nusakanti skalių santykį tarp gretimų periodo dvigubėjimo taškų. Richardas J. Cohenas<sup>8</sup> su kolegomis medikais (Karagueuzian et al., 2013) pastebėjo, kad periodo dvigubėjimo bifurkacijos susijusios su gresiančiu širdies smūgiu. Šis atradimas chaoso teoriją padarė neatskiriama širdies ir kraujagyslių mokslo dalimi.

Paprasčiausi chaotinio elgesio modeliai yra chaotiniai iteraciniai modeliai. Iteracinių modelių taikymas neuronų dinamikai apžvelgtas išsamioje B. Ibarzo studijoje (Ibarz et al., 2011). Nors nuo pat pirmų Hodgkinso ir Huxley darbų (1952), kuriuose biologinių neuronų membranos potencialo kitimas ir jonų dinamika nusakoma diferencialinėmis lygtimis, lygiagrečiai buvo vystomi ir diskretiniai iteraciniai šių sistemų modeliai. Studijoje (Ibarz et al., 2011) atkreiptas dėmesys, kad netiesiniai iteraciniai modeliai yra puikiai tinkami biologiniams neuronams bei jų tinklams aprašyti. Buvo įvardinta keletas tokių neuronų modelių privalumų:

1. Iteraciniais sąryšiais paremti modeliai pasižymi skaičiavimo efektyvumu.
2. Iteraciniais sąryšiais paremti modeliai yra paprasti ir lankstūs. Keičiant vos keletą parametrų, galima gauti skirtingomis dinaminėmis savybėmis pasižyminčius modelius.
3. Iteraciniai modeliai yra paremti tam tikrais matematiniais metodais ir paradigmomis, kurie leidžia praplėsti modeliavimo galimybes.

---

<sup>5</sup>Robert May (1938) – australų mokslininkas (tyrimų sritis – teorinė ekologija).

<sup>6</sup>Benoit Mandelbrot (1924–2010) – prancūzų matematikas.

<sup>7</sup>Mitchell Jay Feigenbaum (1944) – fizikas-matematikas, įvedęs Feigenbaumo konstantą.

<sup>8</sup>Richard J. Cohen – Masačusetso technologijų instituto mokslininkas, medikas.

Galima paminėti dar keletą pavyzdžių, kai iteracinėmis lygtimis aprašomi modeliai yra priimtinesni nei diferencialinėmis lygtimis nusakomi šių sistemų matematiniai modeliai, ypač jei pagrindinis tyrimų tikslas yra kokybinis šių sistemų sprendinių tyrimas. Diskretinių iteracinių modelių sprendinių skaičiavimo efektyvumas didesnis ir rezultatų paklaidos mažesnės nei sprendinių, aprašytų diferencialinėmis lygtimis. Vienas tokių yra paprasta iteracine lygtimi aprašomas vertikalus mažo kamuoliuko šokinėjimas ant sinusoidiniu dėsniu judinamos plokštumos (Holmes, 1982; Okniński et al., 2012). Šokinėjančio kamuoliuko uždavinys, būdamas vienas pagrindinių netiesinės dinamikos modelių, randa platų pritaikymą ir kardiorespiracinių procesų aprašymuose (McGuinness et al., 2004).

Diskretaus laiko automobilio sekimo modelis nagrinėja eismo srautus (McCartney et al., 2010). Šis modelis skaičiavimo efektyvumu konkuruoja su analogiškais modeliais, aprašomais diferencialinėmis lygtimis.

Chaotinių iteracinių modelių sąrašas ilgas. Vienas iš klasifikacijos būdų yra modelių erdvės dimensija. Iš vienmačių dažniausiai nagrinjamų chaotinių iteracinių modelių galima paminėti šiuos: logistinis, „palapinės“ (angl. *tent map*), Bernulio (angl. *Bernoulli shift map*), Libivicho (angl. *Liebovitch map*), kitimų (angl. *intemittency map*), Čebyšovo (angl. *Chebyshev map*), Gausinis (angl. *Gaussian map*), sinusinis (angl. *sine map*), ICMIC (angl. *iterative chaotic map with infinite collapses* (ICMIC)), apskritiminis (angl. *Circle map*). Nors vienmačių chaotinių iteracinių modelių įvairovė didelė, tačiau biomedicinoje plačiausiai naudojami logistinis ir apskritiminis iteraciniai modeliai. EKG signalams simuliuoti dažniausiai taikomi apskritiminiai iteraciniai modeliai, o, siekiant įrodyti EKG signalo chaotiškumą, įvairūs sudėtingumą vertinantys matai lyginami su jau etaloniniu tapusio logistinio iteracinio modelio matais (Davidson et al., 2011; Zanin et al., 2012; Zaylaa et al., 2015).

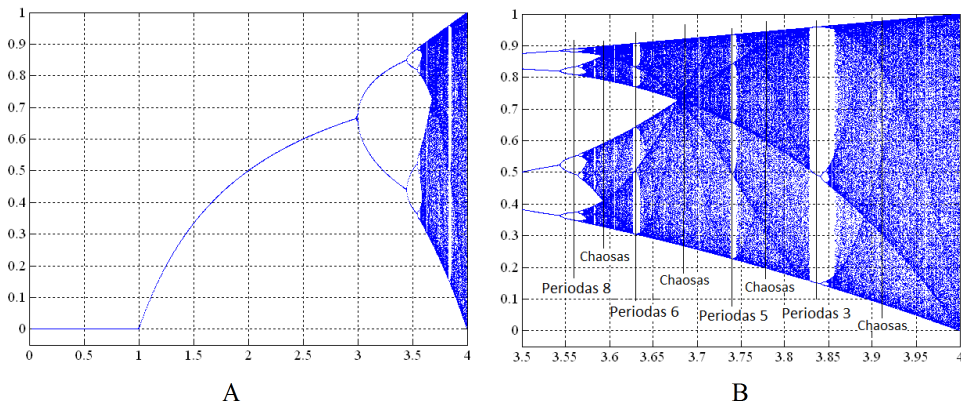
*Logistinis iteracinis modelis.* Vienas geriausiai išnagrinėtų ir turtingiausiu elgesiu pasižyminčių chaotinių modelių yra logistinis iteracinis modelis. Šis modelis – tai puikus pavyzdys, parodantis, kaip sudėtingą elgesį nusako labai paprasta netiesinė dinaminė lygtis (Gibson et al., 2013; May, 1976):

$$x^{(n+1)} = ax^{(n)}(1 - x^{(n)}); \quad (1)$$

čia  $n$  yra iteracijos numeris,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $a \in \mathbb{R}$  yra logistinio iteracinio modelio parametras,  $x^{(0)}$  – pradinė sąlyga (pradinė populiacija nuliniu laiko momentu). Literatūroje dažniausiai nagrinėjama  $0 \leq a \leq 4$ , o  $x^{(0)} \in [0, 1]$  (tuomet ir visos reikšmės  $x^{(n)} \in [0, 1]$ ). Logistinio iteracinio modelio dinamika, priklausomai nuo parametro  $a$  reikšmės, prasideda nuo vieno stabilaus fiksuoto taško  $x$  ( $x = 0$ , kai  $0 \leq a \leq 1$ ), pereina daugybę bifurkacijų, kol galiausiai po periodo dvigubėjimo bifurkacijų kaskados elgesys tampa chaotinis (1 pav.). Kai parametro reikšmė  $1 < a$ , egzistuoja du fiksuoti taškai:  $x = 0$  (nestabilus) ir  $x = 1 - \frac{1}{a}$  (stabilus), kai  $1 < a \leq 3$ . Pirmoji periodo dvigubėjimo bifurkacija atsiranda, kai  $a = 3$ . Fiksuotas taškas  $x = 1 - \frac{1}{a}$  tampa nestabilus. Toliau seka periodo dvigubėjimo bifurkacijų eilė, o parametro pokyčiai tarp

bifurkacijų mažėja.  $n$ -toji periodo dvigubėjimo bifurkacija įvyksta, kai  $a = \mu_n$ , tada  $(\mu_n - \mu_{n-1}) / (\mu_{n+1} - \mu_n) \rightarrow 4,669\ 201\ 609\dots$  – šis dydis vadinamas Feigenbaumo konstanta.

Parametro reikšmei esant  $a < 3,569\ 944\dots$ , įvyksta daugybė periodo dvigubėjimo bifurkacijų. Periodo dvigubėjimo bifurkacijų seka vadinama periodo dvigubėjimo kaskada, ir šis elgesys būdingas daugeliui dinaminių sistemų. Iškart po periodo dvigubėjimo kaskados prasideda chaosas. Chaotinius režimus skiria reguliarūs stabilių periodinių orbitų langai (1 pav.). Galiausiai, kai  $a = 4$ , periodas yra chaotinis, ir atraktorius išsiplečia, užpildydamas visą  $[0, 1]$  intervalą.



**1 pav.** Paveikslo A dalyje vaizduojama logistinio iteracinio modelio bifurkacijų diagrama (abscisių ašyje parametras  $a$ , ordinačių ašyje įgyjamos kintamojo reikšmės), paveikslo B dalyje vaizduojama bifurkacijų diagramos dalis, kurioje aiškiai matyti periodo dvigubėjimo momentai (Madhekar, 2011)

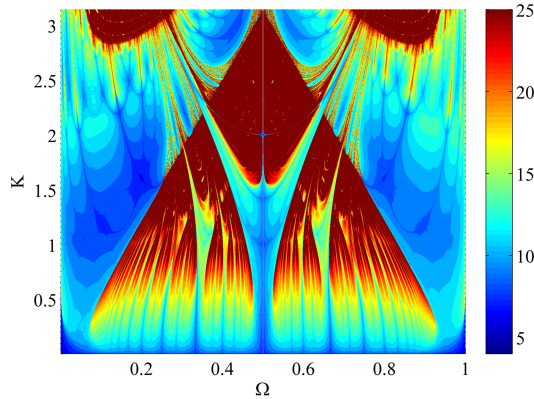
Logistinis iteracinis modelis yra išsamiai ištirtas literatūroje, todėl tapo etaloniškas. Nagrinėjant įvairių sričių (taip pat ir medicinoje) dinaminių sistemų elgesį, gauti rezultatai dažnai lyginami su logistiniu modeliu (Davidson et al., 2011). Straipsnyje (Zanin et al., 2012) perstatos entropijos analizė taikoma epilepsija sergančių pacientų duomenims, o gauti rezultatai lyginami su įvėčiais, gautais sugeneruotoms logistinio iteracinio modelio sekoms. Chaotiškumą vertinantys matai, skaičiuojami logistiniam iteraciniam modeliui, leidžia aptikti perėjimą iš periodinio atraktoriaus į chaotinį, o šių matų skaičiavimas širdies ritmo variabilumui siejamas su gyvybei pavojingų aritmijų atsiradimu (Karagueuzian et al., 2013).

*Apskritiminis iteracinis modelis.* Kita svarbi iteracinių modelių klasė yra apskritiminiai iteraciniai modeliai (angl. *circle maps*). Šie modeliai buvo pasiūlyti Kolmogorovo kaip supaprastintas mechaninių rotorių modelis. Apskritiminis iteracinis modelis nusakomas lygtimi:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x^{(n)}); \quad (2)$$

čia  $n$  yra iteracijos numeris,  $n = 0, 1, 2, \dots, K$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}$  – apskritiminio iteracinio modelio parametrai,  $x^{(0)}$  – pradinė sąlyga (kampas pradinio momentu),  $x^{(0)} \in [0, 1]$ .

Apskritiminiu modeliu, priklausomai nuo parametų  $K$  ir  $\Omega$ , gaunamos sritys, kai kintamojo fazė išlieka pastovi (angl. *phase-locking effects*). Šios sritys vadinamos Arnoldo<sup>9</sup> liežuviais (2 pav.).



**2 pav.** Apskritiminio iteracinio modelio pastovios fazės Arnoldo liežuviai.  $x$ -o ašis atitinka parametų  $0 \leq \Omega \leq 1$ , o  $y$ -o ašis  $0 \leq K \leq \pi$  (Ragulskis et al., 2011)

Širdies darbui aprašyti galima naudoti pavienius apskritiminius iteracinius modelius (Brandt et al., 1996; Courtemanche et al., 1989), o, siekiant sudaryti sudėtingesnę modelį, galima susieti kelis apskritiminius iteracinius modelius (Gidea et al., 2011). Apskritiminiai iteraciniai modeliai naudojami ir širdies aritmijoms modeliuoti – taip aptinkami elektrokardiografinių duomenų nuokrypiai ir diagnozuojamos širdies ligos (Brandt et al., 1996; Courtemanche et al., 1989; Gidea et al., 2011). Širdies aritmijos klasifikuojamos realiuoju laiku, pasitelkiant apskritiminius iteracinius modelius (Schiek et al., 2009).

Kita ne mažiau opi problema yra neinvazinis širdies ritmo reguliavimas, ypač svarbus gydant širdies ir kraujagyslių ligas. Žinoma, kad kvėpavimas daro įtaką širdies ritmui. Kvėpavimą žmogus gali kontroliuoti, o širdies ritmo – ne, todėl svarbus tyrimo objektas yra širdies ritmo ir kvėpavimo sinchronizacija. McGuinness et al. (2004) straipsnyje sinchronizacija tarp širdies ritmo ir kvėpavimo aprašyta apskritiminiu iteraciniu modeliu, o sinchronizacija tarp šių sistemų nusakoma Arnoldo liežuviais.

### 1.3. Susietų iteracinių modelių tinkleliai

Realaus pasaulio struktūros tai nėra aibė pavienių objektų. Dauguma realių sistemų yra kompleksinės – jas sudarančios dalys sąveikauja tarpusavyje. Siekiant matematiškai aprašyti realias sistemas, naudojami susietų iteracinių modelių tinkleliai (angl. *coupled map lattices* (CML)). Tokie modeliai įvardijami kaip paprastų ir patogių modelių klasė, tinkama apibūdinti sudėtingas laike ir erdvėje kintančias sistemas. Pagrindinės CML apibūdinančios savybės: diskretus laikas; diskreti erdvė (tinkleliai ar tinklai, sudaryti iš sujungtų mazgų); būseną nusakantis kintamasis yra realusis skaičius

<sup>9</sup> Vladimir Igorevich Arnold (1937–2010) – rusų matematikas.

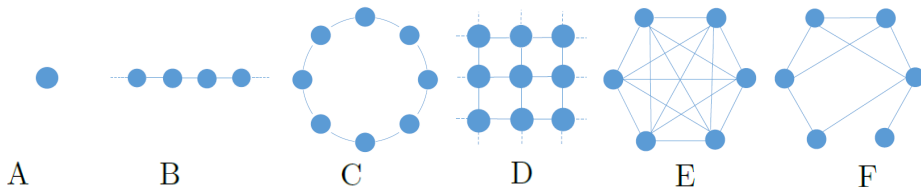
(skalio ar vektorius). CML galima apibrėžti kaip erdvėje išdėstytų elementų seką, kurioje kiekvieno elemento būseną priklauso ne tik nuo esamos būsenos, bet ir nuo keleto kaimyninių elementų būsenų.

Pirmą kartą susietų iteracinių modelių tinklėlis buvo aprašytas K. Kaneko (Kaneko, 1984), R. Kapralo (Waller et al., 1984) ir S. Kuznetsovo (Kuznetsov, 1983) beveik tuo pačiu metu. CML aprašo tam tikro lauko evoliuciją laike. Minėtas laukas gali būti suskaidytas į atskiras lokalias sistemas, dar kitaip vadinamas mazgais. Kiekvienas mazgas dažniausiai aprašomas iteraciniu modeliu. Mazgą su kitu ar keliais kitais mazgais sieja erdvinės sąsajos, kurios ir nulemia viso CML elgesį. Visa lokalių sistemų struktūra suformuoja susietų iteracinių modelių tinklėlį. Bet kuriuo laiko momentu nusakomos visos lokalių kintamųjų reikšmės. Šios reikšmės apibrėžia erdvinę lauko struktūrą (angl. *pattern*). CML dažniausiai daroma prielaida, kad visos lokalias sistemos yra vienodos ir kad erdvinė sąveika bet kurios lokalias sistemos su likusiu CML yra vienoda visame modelyje (González-Aguilar et al., 2015).

Nors CML pirmą kartą buvo aprašytas trijų skirtingų autorių trijose skirtingose šalyse panašiu laiku, tačiau šio modelio taikymo sritys skyrėsi. Kapralas CML naudojo fenomenams chemijoje aprašyti, Kuznetsovas CML taikė elektrinėms grandinėms modeliuoti. Kaneko taikymo sritis buvo daug platesnė. Kaneko CML įvardijo kaip naują galingą įrankį bet kokiai realios erdvėje išplėstai dinaminei sistemai tirti. Vienas pirmųjų ir geriausiai išnagrinėtų susietų iteracinių modelių tinklėlių yra Kaneko modelis, pristatytas dar 1985 m.:

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon) f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})]; \quad (3)$$

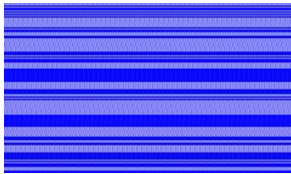
čia  $x_n^{(i)} \in \mathbb{R}$  yra  $i$ -tojo mazgo būseną laiko momentu  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  yra mazgo numeris, sąsajas tarp mazgų žymi  $\varepsilon \in [0, 1]$ , o  $f$  – iteracinis modelis. Iš (3) formulės išplaukia, kad kiekvieno mazgo būsenai įtaką daro du kiti kaimyniniai mazgai (3 pav. B dalis). Galimi ir kitokie mazgų susiejimo būdai modelyje (3 pav.). Priklausomai nuo tiriamos sistemos pobūdžio,  $\{x_{n+1}^{(i)}\}$  nusako cheminės koncentracijos, populiacijos tankio, greičio lauko (dalelės judėjimas skystyje) ar kt. erdvinę struktūrą (Kaneko, 2015).



**3 pav.** Paveikslo A dalyje vaizduojamas izoliuotas mazgas, B dalyje vaizduojamas mazgų susiejimas grandinės principu, C dalyje vaizduojama uždara grandinė, D dalyje pavaizduotas kiekvieno mazgo susiejimas su gretimais keturiais mazgais (gardelė), E dalyje vaizduojamas atvejis, kai kiekvienas mazgas susietas su visais kitais mazgais (pilnasis grafas), F dalyje pavaizduotas nepilnas grafas (kai kurie pilnojo grafo ryšiai tarp mazgų nutraukti)

Dėl paprastos formuluotės CML tapo erdvėje išplėstų netiesinių dinaminų sistemų paradigma. CML modeliai yra specialiai sudaryti taip, kad būtų nesudėtinga atlikti skaičiavimus kompiuteriu esant dideliems erdvės ir laiko domenams. Atlikti skaitiniai tyrimai keičiant tik  $f$  ir  $\varepsilon$  atskleidė dar nematytus efektus (Kaneko et al., 2014). Pagal pastebimus reiškinius išskiriamos CML kokybinės klasės. Pritaikius bene geriausiai išnagrinėtą pagal Kaneko modelį (3) sudarytą tinklą iš logistinių iteracinių sąryšių<sup>10</sup> (angl. *coupled logistic map*), t. y.  $f(x) = 1 - rx^2$ , buvo išskirtos kokybinės klasės (4 pav.) (Kaneko et al., 2014):

1. Sustingęs chaosas (angl. *frozen chaos*) – sritis suskaidoma į netolygiai pasiskirsčiusius klasterius. Šios atskiros sritys gali būti vadinamos atraktoriais. Priklausomai nuo pradinių sąlygų, keičiasi ir klasteriai.
2. Raštų išskyrimas (angl. *pattern selection*) – sritis suskaidoma į beveik vienodo dydžio klasterius. Klasterio dydis priklauso nuo parametrų.
3. Chaotinis defekto Brauno judėjimas (angl. *chaotic Brownian motion of defect*) –



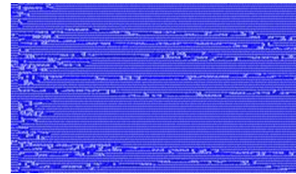
Sustingęs chaosas.

$$a = 3,569 \quad (r = 1,4), \quad \varepsilon = 0,1$$



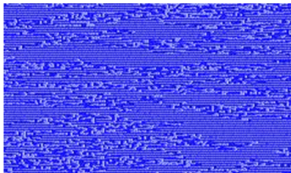
Raštų išskyrimas.

$$a = 3,8 \quad (r = 1,71), \quad \varepsilon = 0,4$$



Defekto trajektorijos,  
nusakomos Brauno judėjimu.

$$a = 3,8983 \quad (r = 1,85), \quad \varepsilon = 0,1$$



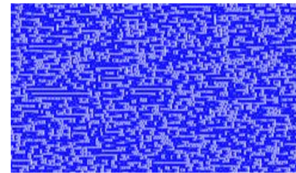
Defekto turbulencija.

$$a = 3,9292 \quad (r = 1,895), \quad \varepsilon = 0,1$$



Laikinis ir erdvinis mirgėjimas.

$$a = 3,8284 \quad (r = 1,75), \quad \varepsilon = 0,6$$



Chaosas laike ir erdvėje.

$$a = 4 \quad (r = 2), \quad \varepsilon = 0,3$$



Keliaujančios bangos.

$$a = 3,623 \quad (r = 1,47), \quad \varepsilon = 0,5$$

**4 pav.** Kokybinės klasės. Logistinio susieto iteracinio tinklelio, sudaryto pagal Kaneko modelį (3), kiekvieno mazgo būseną priklauso nuo gretimų dviejų mazgų būsenos, kokybinės klasės.  $x$ -o ašyje atidėti mazgai (erdvės kitimas, 200 mazgų), o  $y$ -o ašyje – iteracijos numeris (Kaneko et al., 2014)

<sup>10</sup>Tai kiek kitokia logistinio iteracinio modelio išraiška, gauta iš standartinės  $g(z) = az(1-z)$ , pakeitus  $r = \frac{a(a-2)}{4}$ , o  $x = \frac{2(2z-1)}{a-2}$ .

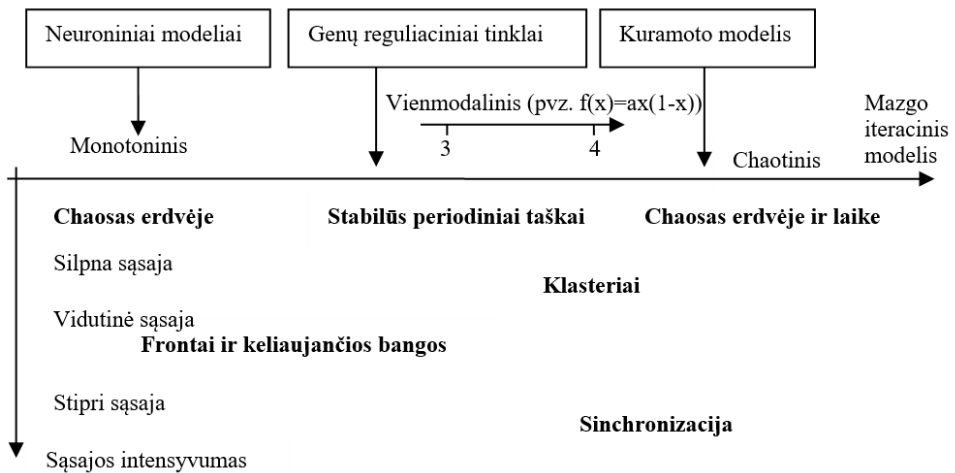


srityje atsiranda rašto pakitimų, ir jie kinta chaotiškai panašiai, kaip pagal Brauno dėsnį.

4. Defekto turbulencija (angl. *defect turbulence*) – sugeneruojama daugybė rašto defektų, ir jie susiduria tarpusavyje.
5. Laikinis ir erdvinis mirgėjimas (angl. *spatiotemporal intermittency*) – koherentinę būseną keičia chaotiniai mirgėjimai.
6. Chaosas laike ir erdvėje (angl. *fully developed spatiotemporal chaos*) – atskiros paveikslų sritys kinta chaotiškai ir nepriklausomai nuo gretimų sričių.
7. Keliaujančios bangos (angl. *travelling wave*) – klasterių banga lėtai keliauja sritimi.

CML sudaro lygčių sistema (lygčių skaičius lygus mazgų skaičiui (susietų ar nesusietų)), baigtinis skaičius kintamųjų, globalaus (pvz., pilnasis grafas) ar lokalaus susiejimo schema ir atitinkamas susiejimo sąlygų rinkinys.

CML gali būti klasifikuojami pagal sąsajos tarp mazgų parametro dydį. Susietų modelių tinklelių gautų fenomenų schematinis suskirstymas pateiktas 5 pav. (Chazottes et al., 2005). Schemoje vaizduojama, kaip nuo mazgų tarpusavio ryšio ir pasirinkto mazgo iteracinio modelio priklauso gaunamos CML kokybinės klasės bei kokie tokių modelių taikymai. Dauguma pastarųjų publikuotų CML darbų nagrinėja silpnai susietas sistemas (González-Aguilar et al., 2015). Silpną susietumo parametą turintys tinkleliai plačiai taikomi neuroniniuose tinklų modeliuose (Girardi-Schappo et al., 2013). Susietų iteracinių modelių tinklas su silpnu susiejimo parametru panaudotas genų reguliaciniams procesams nusakyti (Nen et al., 2013).



5 pav. Schematinis susietų iteracinių modelių tinklelių gautų fenomenų skirstymas (Chazottes et al., 2005)

Susietų iteracinių modelių tinklelių taikymas platus. Tokiais modeliais aprašomos situacijos nuo neuroninių tinklų iki skysčių dinamikos (Korinna et al., 2012; Takeuchi et al., 2011). Susietų iteracinių modelių tinkleliai jau senokai taikomi komplek-

sinių sistemų fizikai nusakyti (Ibarz et al., 2011; Kaneko, 2015). Vienas biologinių kompleksinių sistemų pavyzdžių yra širdis. Chaoso egzistavimas širdies raumenyne (miokarde) aptiriamas tiek eksperimentiniuose bandymuose, tiek modeliavimo uždaviniuose (Ferreira et al., 2011; Qu, 2011; Qu et al., 2014). Susietų diferencialinių lygčių modeliai dažnai naudojami generuoti širdies signalus (Das et al., 2013; Ryzhii et al., 2014; Vafaie et al., 2014), tačiau, siekiant supaprastinti skaičiavimus, galima diskretizuoti laiką – taikyti susietus iteracinius modelius. Kirichovo standartinis susietas iteracinis modelis panaudotas širdies modeliui kurti (Gidea et al., 2011). Keturių susietų iteracinių modelių tinkleliu aprašomas širdies ląstelės nervinio impulso perdavimo modelis (Pavlov et al., 2011). Chaoso atsiradimas siejamas su aritmių pradžia, o, siekiant normalizuoti širdies veiklą, sinchronizuojami virpesiai širdyje, pasitelkiant išorinius dirgiklius. Chaoso sinchronizacija širdies ląstelėse panaudojant susietus iteracinius modelius nagrinėjama Qu et al. (2014).

#### 1.4. Dvimačiai iteraciniai modeliai

Dvimačių iteracinių modelių išraiškos labai panašios į vienmačių, tik kintamieji jau yra du. Bendrai galėtume aprašyti taip:

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = f(x^{(n)}, y^{(n)}) \\ y^{(n+1)} = g(x^{(n)}, y^{(n)}) \end{cases}; \quad (4)$$

čia  $x^{(n)}, y^{(n)} \in \mathbb{R}$  yra sistemos būseną laiko momentu  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), o  $f$  ir  $g$  – iteraciniai modeliai.

Vienmačio logistinio iteracinio modelio, nusakomo (1) išraiška, plėtinių buvo pasiūlyta jau seniai. Su dviejose dimensijose naudojamu (priskiriamas prie vienmačių,  $x^{(n+1)} = a^{(n)}x^{(n)}(1 - x^{(n)})$ ,  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq a \leq 1$ ) logistiniu iteraciniu modeliu supažindinta Harikrishnan et al. (1989), dviejų parametų logistinis iteracinis modelis naudojamas automobilio sekimo modelyje (McCartney, 2009), keletas apibendrintų logistinių iteracinių modelių aprašoma Radwan (2013), kvantiniu logistiniu iteraciniu modeliu paremta paveikslėlio kodavimo schema aprašoma Akhshani et al. (2012), sudėtingas logistinis iteracinis modelis naudojamas fraktalams generuoti (Rani et al., 2009).

Dvimačiai iteraciniai modeliai naudojami daugelyje mokslo sričių. Eismo spūčių dinamikos modelis, paremtas dvimačiu iteraciniu modeliu, pristatomas McCartney et al. (2010). Ekonominėms problemoms spręsti pateikiamas patobulintas dirbtinės bičių kolonijos (angl. *artificial bee colony*) algoritmas panaudojant dvimatį Arnoldo katės iteracinį modelį (Secui, 2015). Apibendrintas dvimatis Bakerio iteracinis modelis panaudotas XOR problemai spręsti (Rogers et al., 2002). Patobulintas dvimatis chaotinis Arnoldo katės iteracinis modelis naudojamas skaitmeninio vandens ženklų algoritmui realizuoti (Bahi et al., 2011). Paveikslėliui koduoti (Gu et al., 2014) taikomas trimatis Arnoldo katės iteracinis modelis, o patobulintas DNR kodavimu bei dvimačiu logistiniu modeliu paremtas paveikslėlio kodavimo algoritmas pristatomas Zhang et al.

(2014). Medicininėms nuotraukoms (rentgenogramoms, tomogramoms ir kt.) koduoti siūlomas algoritmas, paremtas Arnoldo katės iteraciniu modeliu ir traktuojamas kaip tinkamas paveikslams koduoti realiuoju laiku (Fu et al., 2013). Dirbtiniai metaboliniai tinklai, paremti dvimačiais Arnoldo katės, Chirikovo bei Bakerio iteraciniais modeliais, panaudoti klinikinėje Parkinsono ligos diagnostikoje (Lones et al., 2013). Susieti tinkeliai, paremti apskritiminiu modeliu bei dvimačiu standartiniu modeliu, panaudoti elektrokardiografiniams signalams generuoti (Gidea et al., 2011).

## 1.5. Elektrokardiografinių signalų analizės apžvalga

Dauguma sudėtingų adaptyvių sistemų yra kompleksinės. Šios sistemos yra tiriamos ir charakterizuojamos jų generuojamais signalais (daugiakanaliais). Šiame skyriuje pateiksime pagrindines elektrokardiografinių signalų analizės metodikas ir metodus. Apžvelgsime vieno signalo bei dviejų signalų tarpusavio ryšio analizės metodus.

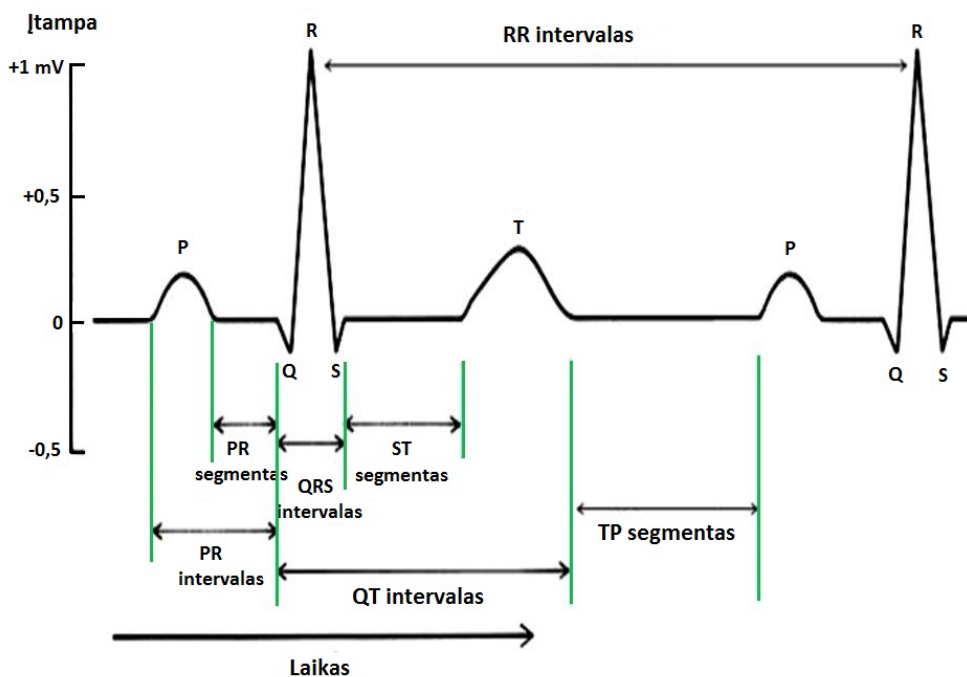
### 1.5.1. Elektrokardiografija

*Elektrokardiografija* yra širdies elektrinio aktyvumo signalų registravimas. Šis aktyvumas susijęs su širdį sudarančių raumeninių skaidulų elektriniu aktyvumu, todėl elektrokardiografija yra svarbus įrankis vertinant širdies darbą. Elektrokardiografija – tai metodas, kai specialiu prietaisu (elektrokardiografu) užrašoma širdies ląstelių sukurto suminio elektros lauko potencialo kitimo kreivė elektrokardiograma (EKG), pagal kurios ypatumus sprendžiama apie širdies veiklą.

Elektrokardiografiniai signalai nagrinėjami daugiau nei šimtmetį. Britų fiziologas Augustus D. Walleris aprašė pirmąją žmogaus EKG 1887 m. (Waller, 1887; Jenkins, 2014). Elektrokardiogramai registruoti Augustus D. Walleris panaudojo B. Lippmano 1873 m. sukurtą kapiliarinį elektrometrą. Nepaisant to, elektrokardiografijos pradininku laikomas W. Einthovenas, kuris 1902 m. užregistravo pirmą elektrokardiogramą, panaudodamas jautresnį styginį galvanometrą. 1924 m. W. Einthoveni buvo įteikta Nobelio premija už elektrokardiografijos išradimą bei vystymą. Nuo 1940 m. elektrokardiografija tapo įprastu širdies diagnostikos metodu (Jenkins, 2014).

Elektrokardiograma registruoja širdies elektrinio žadinimo ciklus. Žadinimas prasideda nerviniame sinusiniame mazge *sino atria* dešiniajame prieširdyje. Sinusinio mazgo impulsai sukelia prieširdžių susitraukimą, kurį apibūdina P dantelis EKG signale (6 pav.). Toliau impulsai sklinda prieširdžių skaidulomis į *atrio ventricular* mazgą, kuris kontroliuoja šio impulso perdavimą iš prieširdžių į skilvelius. Hiso ir Purkinjė skaidulomis nervinis impulsas perduodamas į apatines bei išorines skilvelių dalis. Skilvelių susitraukimas generuoja EKG signalo QRS kompleksą. Po maždaug 150 ms skilveliai repoliarizuojasi, dėl to atsiranda T banga (Gacek et al., 2011; Markienė, 2000; Marozas et al., 2008).

*Aukštadažnė kardiografija* (angl. *high-resolution*). Nustatyta, kad aukštų dažnių EKG signalo dedamosios, t. y. 100–1000 Hz dažnių srityje, suteikia naudingą širdies veiklos informaciją. Aukštadažniams signalams būdingos mažos amplitudės (apie 1  $\mu$ V), todėl dedamųjų išskyrimas galimas tik naudojant signalų apdorojimą.



6 pav. EKG signalas ir jo segmentai

Aukštadažnėje kardiografijoje didžiausias dėmesys kreipiamas į keletą kardiociklo signalo atkarpų, susijusių su Hiso pluoštu; PR segmentu; vėlyvąja QRS komplekso dalimi; ST segmentu, kuriame gali atsirasti vadinamieji „vėlyvieji potencialai“; QRS potencialais; P banga. Didžiausio klinikinio dėmesio susilaukę „vėlyvieji potencialai“ būdingi pacientams, kuriuos vargina širdies ritmo sutrikimai, todėl turi prognostinę vertę stebint infarktą patyrusių ligonių būklę (Marozas et al., 2008).

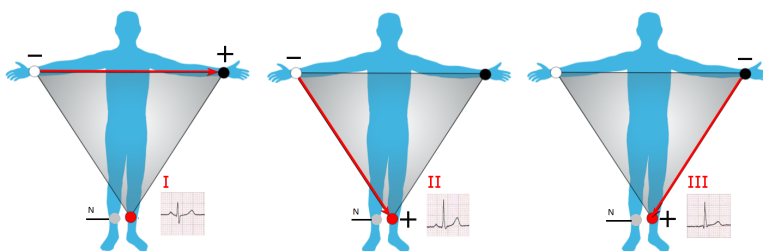
*Vaisiaus kardiografija.* Klinikinėje praktikoje vienas iš dažniausių dar iščiose esančio vaisiaus būklės stebėjimo įrankių yra vaisiaus elektrokardiograma. Ji registruojama paviršiniaisiais elektrodais, dedamais ant nėščiosios pilvo. Pagrindinė tokių signalų registravimo problema – stipri vaisiaus signalų interferencija su motinos elektrokardiogramos ir elektromiogramos signalais.

*Vektorinė elektrokardiografija* (angl. *vectorcardiography*). Elektrinio aktyvumo plitimas gali būti atvaizduojamas elektriniu dipoliu (vektoriumi), kurio kryptis ir modulis keičiasi erdvėje, priklausomai nuo laiko. Atvaizdavus šiuos vektorius per kardiociklą trimatėje erdvėje, gaunamas erdvinis širdies vaizdas (vektorių kilpa), o toks širdies aktyvumo registravimo metodas vadinamas vektorine elektrokardiografija. Vektorinė elektrokardiografija plačiai naudojama širdies ligų, tokių kaip prieširdžių virpėjimas, skilvelių priešlaikinis sujaudinimas (preeksitacija) bei priešlaikinė skilvelių repolarizacija, diagnostikoje (Lee et al., 2012).

*Elektrokardiogramos derivacijos.* Klinikinėje elektrokardiografijoje dažniausiai registruojama 12 derivacijų, kurių kiekviena vertina skirtingų širdies dalių elektrinį

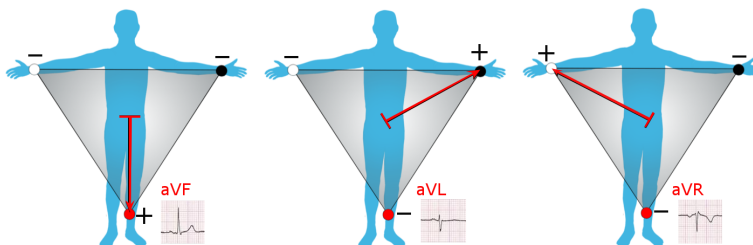
aktyvumą, ir šių derivacijų pakanka, norint užfiksuoti širdies patologijas.

Remiantis tradiciniu Einthoveno trikampiū, galimos standartinės derivacijos, žymimos I, II ir III (7 pav.). Šios trys derivacijos dar vadinamos galūnių derivacijomis, nes elektrodai tvirtinami ant galūnių – riešų ir čiurnų. Norint sumažinti trikdžius, naudojamas ir ketvirtas elektrodas (neutralus, sujungiamas su kardiografo korpusu ir įžeminamas). Pastarasis elektrodas tvirtinamas ant dešinės kojos čiurnos. Šios derivacijos yra bipolinės, kiekvienai jų registruoti naudojami du elektrodai.



7 pav. Standartinių Einthoveno derivacijų (I, II, III) elektrodų tvirtinimo vietos (Patchett, 2015)

Kita trijų derivacijų grupė vadinama sustiprintomis unipolinėmis galūnių derivacijomis, kurios žymimos aVF, aVL ir aVR. Bet kuriai šių derivacijų užrašyti naudojami visi trys elektrodai – matuojamas potencialų skirtumas tarp vieno elektrodo ir vidutinio potencialo tarp kitų dviejų Einthoveno taškų (8 pav.).



8 pav. Sustiprintų unipolinių derivacijų (aVF, aVL, aVR) elektrodų tvirtinimo vietos (Patchett, 2015)

Dar viena unipolinių derivacijų grupė vadinama krūtinės derivacijomis ir žymimos V1, V2, V3, V4, V5 ir V6. Šioms derivacijoms fiksuoti vienas elektrodas dedamas krūtinės srityje (kiekvienai derivacijai atitinkamoje krūtinės vietoje), o neigiamas poliūs gaunamas sujungus visus galūnių elektrodus per varžas lygiagrečiai ir dar prijungus ketvirtą, neutralų.

### 1.5.2. Vieno EKG signalo tyrimo metodai

Elektrokardiogramos analizė yra viena svarbiausių biosignalų interpretavimo problemų. Kadangi EKG registravimas yra neinvazinis metodas, todėl tai dažniausiai naudojamas įrankis kardiologijoje. Elektrokardiosignalas yra vienas daugiausiai

informacijos suteikiančių signalų ne tik apie širdies veiklą, bet ir apie bendrą kitų kūno sistemų būklę. Be to, EKG tyrimo metodai taip pat gali būti taikomi kitiems biomedicininiam signalams. Dėl šių priežasčių pastaraisiais dešimtmečiais EKG apdorojimo ir analizės metodams buvo skirtas didelis dėmesys (Blinowska et al., 2011; Gacek et al., 2011; Gupta et al., 2014).

Galutinis biomedicininis signalų analizės tikslas yra duotą signalą priskirti kokiam nors žinomai kategorijai ir, priklausomai nuo paciento būklės, priimti atitinkamą diagnostinį sprendimą. Žemiau aptarti analizės metodai naudojami tiek po vieną, tiek jungiant kelis metodus į sistemas ir taip siekiama atlikti EKG analizę vertinant kelių rūšių parametrus. Klasifikavimo uždavinys gali būti apibrėžtas kaip pradinių (įėjimo) duomenų suskirstymas į aiškias klases, remiantis reikšmingais iš tų duomenų išskirtais požymiais (Marozas et al., 2008).

EKG apdorojimo metodus galima suskirstyti į keletą grupių, tai: morfologinė analizė, entropijos, Liapunovo eksponencijų skaičiavimas, dimensijos, autokoreliacijos funkcija, dažnių analizė (Furjė), laiko-dažnių analizė (segmentinė Furjė analizė bei vilnelių transformacija).

*Morfologinė signalų analizė.* Žodis „morfologija“ yra sudarytas iš dviejų graikiškų žodžių: *morpho* (gr. *morph*) – forma, struktūra ir *logy* – mokslas. Taigi morfologinė signalų analizė yra metodas, pagrįstas signalo formos, amplitudės, dažnių tyrimu. Tokio tyrimo tikslas yra nustatyti, kaip signalų forma bei kitimas susiję su fiziologiniais ir patologiniais procesais. Galima sakyti, kad gydytojai, analizuodami popieriuje atspausdintas kardiogramas ar kitokius fiziologinius signalus, atlieka signalų morfologinę analizę (Marozas et al., 2008).

Norint detaliau atlikti EKG signalo formos analizę, reikia išskirti keletą signalo savybių arba parametrų. EKG signalų morfologinė analizė atliekama tokia seka:

1. EKG bangų, QRS kompleksų, P ir T bangų atpažinimas.
2. Bangų išsidėstymo ribų pažymėjimas.
3. Tarpbanginių intervalų trukmių vertinimas: RR, PQ, QT, ST, QQ ir PP.
4. Bangų morfologijos klasifikavimas.

Atskiri segmentų ar amplitudžių įverčių pasikeitimai siejami su įvairiomis širdies (ir kitomis) ligomis. Dažniausiai nagrinėjamos signalo dalys (Cadogan et al., 2015; Gupta et al., 2014; Singh et al., 2009):

1. Tiriamas QRS kompleksas (Foley et al., 2011; Greve et al., 2012; Rickard et al., 2012; Sipahi et al., 2012): koks yra skilvelių susitraukimo dažnis, ar QRS kompleksai išsidėstę reguliariais intervalais (jei ne, tai kokia to priežastis), ar QRS kompleksai toje derivacijoje yra vienodos formos, ar jų dydis ir forma normalūs.
2. Tiriamas P dantelis (Herreros et al., 2009; Martín García et al., 2012; Tang et al., 2012): ar pastebimas abipus vienareikšmis ryšys tarp QRS komplekso ir P dantelio, ar RR intervalo ilgis normalus, koks prieširdžių susitraukimų dažnis, ar P dantelis toje pačioje derivacijoje yra vienodos formos, ar P dantelio dydis ir forma normalūs.

3. Tiriama QRS kompleksai kiekvienoje derivacijoje (Madias, 2012; Mehta et al., 2010): ar QRS ašis normali, ar QRS plotis ir amplitudės normalios. Dažnai nagrinėjamos QRS kompleksų grupės, apibūdinančios tam tikras širdies zonas: II, III ir aVF derivacijų grupė (angl. *inferior leads*); V2, V3 ir V4 derivacijų grupė (angl. *anterior leads*); V4, V5 ir V6 derivacijų grupė (angl. *lateral precordial leads*); I ir aVL derivacijų grupė (angl. *high lateral leads*).
4. ST segmento tyrimas (Genzlinger et al., 2012; Mahmud et al., 2015; Smith, 2006): ar yra anomalijų (bazinės linijos pakilimo ar nusileidimo), ar pakitimai nerodo išemijos, infarkto ar hipotenzijos.
5. T dantelio tyrimas (Hong et al., 2015; Porthan et al., 2010; Shakibfar et al., 2012): ar forma normali, ar toje pačioje derivacijoje QRS kompleksai orientuoti ta pačia kryptimi, jeigu neorientuoti, tai ar nėra tai išemijos ar skilvelių laidumo sutrikimas, gal tai kalio trūkumas ar perteklius.
6. QT intervalo tyrimas (Haraoka et al., 2010; Shakibfar et al., 2012): ar intervalo ilgis didesnis nei pusė RR intervalo.

R dantelio, intervalo RR bei jam atvirkščio dydžio – širdies ritmo variabilumo (angl. *heart rate variability* (HRV)) – tyrimas yra vienas seniausių, ir tam skirtos ištisos studijos (ChuDuc et al., 2013; Glass, 2009; Goshvarpour et al., 2012; Graff et al., 2015; McGuinness et al., 2004; Scherptong et al., 2008). Nors šis procesas yra atsitiktinis (vis labiau diskutuojama „ar nėra chaotinis“), tačiau jam įtaką daro žmogaus fiziologinės ir funkcinės būsenos. Miegant širdies ritmas sulėtėja, o, esant fiziniam krūviui ar stresui, pagreitėja.

*Statistinė analizė.* Kitas elektrokardiografinių signalų morfologinės analizės būdas – vertinti šiuos signalus kaip stochastinius ir taikyti *statistinės analizės* įverčius: dispersiją, vidutinį kvadratinį nuokrypį, aukštesnių eilių momentus bei tokius euristinius parametrus, kaip nulinių (lygus 0) įgytų reikšmių kiekis, signalo posūkių skaičius ir kt. Dažniausiai statistiniai įverčiai skaičiuojami vertinant EKG parametrus: nagrinėjama, kaip dydžiai priklauso nuo stebimos derivacijos, lyties, amžiaus, ligos istorijos ir panašiai (Chantad et al., 2006; Scherptong et al., 2008). Morfologinę analizę taip pat galima atlikti EKG signalus lyginant su duomenų bazėse sukauptais elektrokardiografiniais signalais, registruotais pacientams, kuriems pasireiškia įvairūs širdies veiklos sutrikimai (Engin et al., 2007; Kutlu et al., 2012; Moody, 2005).

*Entropija.* Entropija (informacijos teorijoje) – tai skaitinis matas, parodantis atsitiktinio dydžio atsitiktinumą lygi (Blinowska et al., 2011; Gupta et al., 2014). Entropijos skaičiavimu pagrįsti metodai naudojami eilučių nereguliarumui tirti. Vertinant kardiosignalus entropijos skaičiuojamos siekiant identifikuoti širdies darbo pokyčius (Aktaruzzaman et al., 2014; Goshvarpour et al., 2012; Graff et al., 2015; Kong et al., 2011; Singh et al., 2010; Xie et al., 2011). Kuo entropija didesnė, tuo signalas (eilutė) yra sudėtingesnis (sunkiau prognozuojamas bei atsitiktinis) (Ott, 2002). Duomenų sekos reguliarumas nusakomas vienu realiuoju skaičiumi.

Informacijos teorijoje 1948 m. aprašyta *Shannono entropija* buvo skirta informacijos kiekiui žinutėje įvertinti (Shannon, 1948). Tegu diskretus atsitiktinis dydis  $X$

gali įgyti reikšmę  $x_i \in \Omega$ . Tikimybė, kad atsitiktinis dydis įgis  $x_i$  reikšmę, lygi  $p(x_i)$ . Tuomet atsitiktinio dydžio  $X$  informacija, susijusi su būsena  $x_i$ , lygi:

$$I(x_i) = -\log_2 p(x_i). \quad (5)$$

Iš (5) išraiškos matyti, kad kuo didesnė būsenos  $x_i$  tikimybė, tuo mažesnė informacija. Vieno diskretaus atsitiktinio dydžio  $X$  Shannono entropija:

$$H_S(X) = -\sum_{x_i \in \Omega} p(x_i) \log_2 p(x_i); \quad (6)$$

čia apibrėžiama, kad  $p(x_i) \log_2 p(x_i)$ , jeigu  $p(x_i) = 0$ . Atsitiktinio dydžio, kurio visų būsenų pasirodymo tikimybė yra vienoda, entropija bus didžiausia:  $p(x_i) = 1/m$ , čia  $m$  galimų būsenų skaičius, tuomet  $H_S(X) = \log_2 m$ . Shannono entropija įgyja reikšmes  $0 \leq H_S(X) \leq \log_2 m$  (Ott, 2002). Be Shannono entropijos, dar naudojama  $q$  eilės Renyi entropija (Rényi, 1970):

$$H_q = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^n p_i^q, \quad q \neq 1. \quad (7)$$

Shannono entropija yra atskiras Renyi entropijos atvejis. Singh et al. (2010) aprašoma, kaip Shannono bei dvi nesimetrinės entropijos (asimetrinė ir modifikuota (angl. *warped*)) naudojamos iš kelių rizikos parametrų (širdies ritmo variabilumo ir morfologinio variabilumo) nustatyti asmenis, kuriems po kažkurio laiko pasireiškia kardiovaskulinė mirtis. Goshvarpour et al. (2012) straipsnyje buvo tiriama meditaciją praktikuojančių moterų grupė – fiksuotas širdies ritmo variabilumas prieš meditaciją ir meditacijos metu. Šie duomenys buvo panaudoti Shannono entropijai apskaičiuoti ir panaudoti kaip įvesties duomenis keturiems skirtingiems klasifikatoriams, kurių keli net 92 proc. tikslumu suskirstė tiriamąsias į atitinkamas grupes.

Anksčiau nagrinėtos entropijos nusako vieno atsitiktinio dydžio entropiją. Stochastinio proceso entropija aprašoma analogiškai imant diskrečių atsitiktinių dydžių seką  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , iš kurių kiekvienas atitinkamai gali įgyti reikšmes iš aibių  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ :

$$H_n = -\sum_{x_1 \in \Omega_1} \dots \sum_{x_n \in \Omega_n} p(x_1, \dots, x_n) \log_2 p(x_1, \dots, x_n); \quad (8)$$

čia  $p$  yra daugiamatis tikimybinių  $n$  kintamųjų  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tankis.

Sistemos būsena tam tikru momentu,  $X_n$ , priklauso nuo prieš tai buvusių būsenų  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Nauja būsena pateikia tam tikrą kiekį naujos informacijos. Vidutinis naujos informacijos dydis, žinomas kaip *Kolmogorovo-Sinai* (KS) entropija (Frigg et al., 2011), yra naudingas parametras sistemos dinamikai nusakyti. Tarkime, sistemos fazinė erdvė turi  $d$  laisvės laipsnių ir yra padalinta į  $\varepsilon^d$  aplinkos hiperkubus, o sistemos būsenos stebimos  $\tau$  laiko intervalais. Tuomet KS entropija nusakoma:

$$H_{KS} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} (H_{n+1} - H_n). \quad (9)$$



Skaitmeniškai  $H_{KS}$  galima apskaičiuoti tik kai  $n$  yra baigtinis. Kintamųjų skaičiui  $n$  artėjant į begalybę, entropija  $H_n$  artėja į nulį. Taigi realaus pasaulio laiko eilutėms KS entropijos negalima apskaičiuoti norimu tikslumu (Costa et al., 2002). Realus pasaulio eilutėms buvo pasiūlytos KS entropijos aproksimacijos – apytikslė bei imties entropijos.

*Apytikslė entropija* (angl. *approximate entropy* (ApEn)) – tai vienas populiariausių matų laiko eilučių ir signalų sudėtingumui vertinti (Chen et al., 2009; Graff et al., 2015; Pan et al., 2011; Pincus, 1991; Richman et al., 2000).

Tarkime, duota laiko eilutė  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ , kurios ilgis lygus  $n$ . Pasirenkamas sveikasis teigiamas skaičius  $m$  bei teigiamas realusis skaičius  $r$ . Parametrai  $m$  ir  $r$  parenkami atsižvelgiant į taikymo sritį. Apytikslės entropijos skaičiavimo algoritmą (Pincus, 1991) galima suskaidyti į kelis etapus:

1. Sudaroma  $n - m$  vektorių, kurių komponentų skaičius lygus  $m$ , seka:

$$\vec{u}_m(i) = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}); \quad (10)$$

čia  $i = 1, 2, \dots, n - m + 1$ .

2. Apskaičiuojamas atstumas tarp dviejų vektorių  $\vec{u}_m(i)$  ir  $\vec{u}_m(j)$ :

$$d[\vec{u}_m(i), \vec{u}_m(j)] = \max_{k=1,2,\dots,m} |\vec{u}_m(i+k-1) - \vec{u}_m(j+k-1)|; \quad (11)$$

čia  $i = 1, 2, \dots, n - m + 1$ .

3. Kiekvienam  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n - m + 1$ ) suskaičiuojamas vektorių  $\vec{u}_m(j)$  kiekis  $n_{m,r}(i)$ , kai vektoriai tenkina sąlygą:

$$d[\vec{u}_m(i), \vec{u}_m(j)] \leq r; \quad (12)$$

čia  $d[\vec{u}_m(i), \vec{u}_m(j)] = \max_{k=1,2,\dots,m} (|x(i+k-1) - x(j+k-1)|)$ .

4. Kiekvienam  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n - m + 1$ ) suskaičiuojamos tikimybės:

$$C_{m,r}(i) = \frac{n_{m,r}(i)}{n - m + 1}. \quad (13)$$

5. Apskaičiuojamas dydis  $\Phi_{m,r}$ :

$$\Phi_{m,r} = \frac{1}{n - m + 1} \sum_{i=1}^{n-m+1} \ln C_{m,r}(i). \quad (14)$$

6. Tuomet vektoriaus ilgis  $m$  didinamas vienetu ir kartojami 1–5 žingsniai – skaičiuojami  $C_{m+1,r}(i)$  ir  $\Phi_{m+1,r}$ .

7. Apytikslė entropija apskaičiuojama:

$$ApEn(m, r, n) = \Phi_{m,r} - \Phi_{m+1,r}; \quad (15)$$

čia  $n$  – laiko eilutės ilgis,  $m$  (vektoriaus ilgis) ir  $r$  (tolerancijos parametras) iš anksto parinkti parametrai.

Literatūroje gausu mokslinių straipsnių, kuriuose apytikslė entropija naudojama kaip elektrokardiogramos parametrų dinamikos sudėtingumo matas ir įvardijama kaip vienas įrankių siekiant aptikti širdies ir kraujagyslių sutrikimus (Chen et al., 2009; Graff et al., 2015; Richman et al., 2000). Apytikslė entropija taip pat naudojama kaip papildoma EKG parametrų analizės netiesinė dinaminė charakteristika klasifikavimo uždaviniuose (Behnia et al., 2008; Graff et al., 2015). Tačiau buvo pastebėta keletas apytikslės entropijos trūkumų (Richman et al., 2000) – stipri priklausomybė nuo nagrinėjamo signalo ilgio (rekomenduojamas mažiausias eilutės ilgis 500 atskaitymų) ir vidinis nepastovumas (t. y. nagrinėjant dvi duomenų sekas, prie tam tikrų parametrų  $r$  ir  $m$  nustacių, kad vienos jų apytikslė entropija yra didesnė, rezultatas gali būti kitoks, kai pakeičiamos  $r$  ir  $m$  reikšmės). Paminėtinas dar vienas trūkumas – skaičiuojant atstumus tarp vektorių visada bus bent vienas vektorius, tenkinantis (12) sąlygą, todėl tikimybės  $C_{m,r}(i)$  niekada nebūna lygios nuliui – dėl šios priežasties apskaičiuota apytikslė entropija visuomet yra mažesnė negu iš tikrųjų (Richman et al., 2000).

*Imties entropija* (angl. *sample entropy* (SampEn)) – tai patobulinta apytikslė entropija. Siekdami panaikinti anksčiau minėtus apytikslės entropijos trūkumus, autoriai (Richman et al., 2000) pasiūlė apytikslės entropijos korekcijas. Imties entropijos skaičiavimo algoritmas labai panašus į apytikslės entropijos skaičiavimo algoritmą, tik 3 etape vektorius nelyginamas pats su savimi, t. y. kiekvienam  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-m+1$ ) tikrinami visi  $j$  ( $j \neq i$ ) ir skaičiuojamas vektorių  $\vec{u}_m(j)$  kiekis  $\hat{n}_{m,r}(i)$ , kol tenkinama (12) sąlyga. Funkcija  $\hat{\Phi}_{m,r}$  apibrėžiama:

$$\hat{\Phi}_{m,r} = \frac{1}{n-m+1} \sum_{i=1}^{n-m+1} \hat{C}_{m,r}(i); \quad (16)$$

čia skaičiuojamos tikimybės  $\hat{C}_{m,r}(i) = \frac{\hat{n}_{m,r}(i)}{n-m+1}$ .

Elektrokardiografinio signalo vertinimas naudojantis imties entropija analogiškas vertinimui naudojantis apytiksle entropija (Behnia et al., 2008; Chen et al., 2009; Graff et al., 2015; Pan et al., 2011), tačiau priklausomybė nuo parametrų  $n$  ir  $r$  yra kiek kitokia. Elektrokardiografinių duomenų kompleksiško tyrimuose plačiai taikomos abi paminėtos entropijos, tačiau kaip pagrindinis trūkumas įvardijama priklausomybė nuo parametrų  $r$  ir nagrinėjamo signalo ilgio  $n$  (Richman et al., 2000). Šaltiniuose (Alcaraz et al., 2009; Alcaraz et al., 2010) aprašomas imties entropijos panaudojimas nustatant pasikartojantį prieširdžių virpėjimą iš prieširdžių aktyvumą nusakančio signalo. Patobulinta imties entropija (įvedant neraišką priklausomumo funkciją (angl. *fuzzy membership function*)) naudojama identifikuoti skilvelių tachikardijas bei skilvelių virpėjimus (Kong et al., 2011). Siekiant imties bei apytikslę entropijas taikyti realiame laike, buvo pasiūlytas greitesnis skaičiavimo algoritmas (Pan et al., 2011).

Siekiant patobulinti imties entropijos skaičiavimą, buvo pasiūlyta Fuzzy entropija (Chen et al., 2009). Fuzzy entropijos skaičiavimo algoritmas yra labai panašus į imties entropijos skaičiavimą, tik panašumas tarp vektorių matuojamas naudojant neraišką funkciją (Xie et al., 2011). Kelių skirtingų rūšių entropijų įverčiai (apytikslė,

imties, Fuzzy) skaičiuojami siekiant pagal širdies ritmo variabilumo duomenis identifikuoti sergančiuosius lėtiniu širdies nepakankumu (Graff et al., 2015).

Daugiaskalė (angl. *multiscale*) entropija laiko eilutei  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$  skaičiuojama konstruojant laiko eilutes  $y_j^{(\tau)}$ , kurias nusako skalės parametras  $\tau$ :  $y_j^{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=(j-1)\tau+1}^{j\tau} x_i$ ,  $1 \leq j \leq \frac{N}{\tau}$ . Kai  $\tau = 1$ , tuomet gaunama pradinė laiko eilutė  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ . Analizė, atliekama skaičiuojant eilutės  $y_j^{(\tau)}$  imties entropiją keičiant skalės parametą  $\tau$ , vadinama daugiaskale entropine analize. Daugiaskalės fiziologinių laiko eilučių analizės panaudojimas aprašomas Costa et al. (2002).

Elektrokardiografinių signalų reguliarumui vertinti, be anksčiau minėtų entropijų, taip pat naudojamos spektrinė (normuota Shannono), Furjė (entropija skaičiuojama dažniams), vilnelių (angl. *wavelet*), perstatinių (angl. *permutation*), kontrolinė (angl. *control*) entropija.

*Liapunovo eksponentės*. Kitas dydis signalo sudėtingumui įvertinti yra Liapunovo eksponentės. Liapunovo eksponentės yra kiekybinis dinaminių sistemų chaotiškumo matas.

Tarkime, turime du pradinius taškus, esančius pakankamai arti vienas kito. Fazinėje erdvėje šie taškai gali nutolti vienas nuo kito eksponentiniu greičiu. Pažymėkime atstumą tarp pradinių taškų fazinėje erdvėje  $dx(0)$ , o atstumą tarp taškų laiko momentu  $t$  atitinkamai  $dx(t)$ . Tuomet Liapunovo eksponentė  $\lambda$  nusako atstumo tarp trajektorijų augimo greitį:

$$\frac{dx(t)}{dx(0)} = e^{\lambda t}, \quad (17)$$

kai  $t \rightarrow \infty$  arba

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{dx(t)}{dx(0)}. \quad (18)$$

Neigiama Liapunovo eksponentė reiškia, kad orbitos turi stabilų tašką. Nulinė eksponentė reiškia, kad orbitos išlaiko panašią padėtį ir turi stabilų atraktorių. Teigiama Liapunovo eksponentė reiškia, kad orbitos turi chaotinį atraktorių. Liapunovo eksponentės sėkmingai pritaikytos atliekant kardiosignalų tyrimus (Goshvarpour et al., 2012; Ubeyli, 2009; Ubeyli et al., 2004). EKG signalo Liapunovo eksponentės panaudotos kaip įvesties duomenys keturiems skirtingiems klasifikatoriams: Fišerio, kvadratiniam,  $k$  artimiausių kaimynų bei Parzeno (Goshvarpour et al., 2012). Elektrokardiografinių signalų pokyčiai matomi daline epilepsija sergantiems pacientams panaudojant Liapunovo eksponentes (Ubeyli et al., 2004). Liapunovo eksponentės panaudojamos EKG klasifikuoti, pasitelkiant daugiasluoksnius neuroninius tinklus (Ubeyli, 2009).

*Fraktalinės dimensijos*. Dar 1967 m. Mandelbrot pavartojo trupmeninės dimensijos sąvoką, aprašydamas Didžiosios Britanijos, Afrikos kranto linijos, sienos tarp Ispanijos ir Portugalijos linijos nereguliarumą (Mandelbrot, 1967). Dimensija yra įvertis, nusakantis, kaip tankiai fraktalas užima erdvę.

Fraktalinė dimensija pirmiausia buvo panaudota sudėtingoms geometrinėms formoms aprašyti, kai svarbiau įvardinti struktūrą, o ne bendrą paveikslą. Įprastoms geometrinėms figūroms fraktalinė dimensija lygi topologinei dimensijai, t. y. taško dimensija lygi 0, atkarpos lygi 1, paviršiaus lygi 2 ir t. t. Fraktalinė dimensija nebūtinai yra sveikasis skaičius, reiškiantis, kad aibė erdvę užpildo tankiau nei įprasta aibė. Fraktalinė dimensija yra įvertis, leidžiantis palyginti fraktalus. Galima paminėti keletą fraktalinių dimensijų signalams tirti: *box-counting*, informacijos, koreliacijos dimensijos. Nors klasikiniams fraktalams šios dimensijos sutampa, tačiau bendru atveju jos nėra vienodos.

*Box-counting* dimensija apskaičiuojama:

$$D_{box} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln n(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}; \quad (19)$$

čia  $\varepsilon$  – hiperkubo briaunos,  $n(\varepsilon)$  žymi mažiausią sveikąjį hiperkubų skaičių, reikalingą aibe padengti (briaunos ilgis  $\varepsilon$ ). Informacijos dimensija nusako vidutinį kiekį informacijos, reikalingą  $\varepsilon$  briaunos hiperkubui nusakyti.

*Koreliacijos dimensijos* sąvoka buvo pristatyta Grassbergerio ir Procaccia (Grassberger et al., 1983). Fraktalinio matmens  $\mu$  koreliacijos dimensija apskaičiuojama iš  $\mu$  atžvilgiu atsitiktinai pasiskirsčiusių taškų aibės. Tarkime, duota  $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$  aibė iš  $n$  taškų. Tuomet bet kokiam teigiamam skaičiui  $\varepsilon$  koreliacijos suma  $C(\varepsilon)$  apibrėžiama:

$$C(\varepsilon) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n H(\varepsilon - |x_i - x_j|); \quad (20)$$

čia  $|x_i - x_j|$  yra atstumas tarp taškų  $x_i$  ir  $x_j$  (priklausomai nuo metrinės erdvės), o  $H$  yra Heavisaido funkcija:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leq 0, \\ 1, & \text{kai } x > 0. \end{cases} \quad (21)$$

Sumoje (20) skaičiuojamas taškų porų  $(x_i, x_j)$ , tarp kurių atstumas mažesnis nei  $\varepsilon$ , skaičius. Kai  $\varepsilon$  artėja į nulį,  $C(\varepsilon)$  monotoniškai artėja prie nulio. Jeigu  $C(\varepsilon)$  mažėja kaip laipsninė funkcija, t. y.  $C(\varepsilon) \sim \varepsilon^D$ , tada  $D$  vadinama  $\mu$  koreliacijos dimensija. Formaliai koreliacijos dimensija apibrėžiama:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln C(\varepsilon, n)}{\ln \varepsilon}. \quad (22)$$

Skaičiuojant koreliacijos dimensiją reikia, kad turimų taškų skaičius  $n$  būtų didelis, todėl realiems signalams ne visada paprasta ją apskaičiuoti. Rekomenduojama, kad taškų skaičius būtų  $10^{\frac{D}{2}} \leq n \leq D^{42}$  (Gupta et al., 2014).

Kuo signalas sudėtingesnis, tuo didesnė koreliacijos dimensija. EKG aritmijų klasifikavimas pagal RR intervalo fraktalinės dimensijos įverčius aprašomas Mishra

et al. (2010). Acharya et al. (2005) tyrimas parodė, kad, vertinant širdies ritmo variabilumą, fraktalinė dimensija sumažėja esant širdies patologijai (Acharya et al., 2005). *Box-counting* dimensija skaičiuojama kaip vienas iš įverčių, padedantis nustatyti koronarinės arterinės ligos užuomazgas (Antanavičius et al., 2008).

*Autokoreliacijos funkcija.* Signalų autokoreliacija vertina signalo panašumą į savo paties fragmentus, esančius per tam tikrus laiko vėlinimus. Autokoreliacijos funkcija yra koreliacijos funkcija, apskaičiuota vienam signalui. Taigi atsitiktinio dydžio  $X$ , kurį apibūdina taškai  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ , autokoreliacijos funkcija nusakoma (Juozapavičius et al., 2011):

$$r_{XX}(d) = \frac{\sum_{i=1}^{n-d} (x_i - \bar{x}_{1,\dots,n-d})(x_{i+d} - \bar{x}_{d+1,\dots,n})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-d} (x_i - \bar{x}_{1,\dots,n-d})^2 \sum_{i=1}^{n-d} (x_{i+d} - \bar{x}_{d+1,\dots,n})^2}}; \quad (23)$$

čia  $d = 0, 1, \dots, [n/2]$ ,  $[n/2]$  žymi sveikąją skaičiaus dalį, empiriniai vidurkiai apskaičiuojami  $\bar{x}_{1,\dots,n-d} = \frac{1}{n-d} \sum_{i=1}^{n-d} x_i$  ir  $\bar{x}_{d+1,\dots,n} = \frac{1}{n-d} \sum_{i=1}^{n-d} x_{i+d}$ . Kitaip tariant, autokoreliacijos funkcija vėlinimams  $d$  vertina koreliaciją tarp iš to paties signalo dalių sudarytų vektorių  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-d})$  ir  $(x_{d+1}, x_{d+2}, \dots, x_n)$ , kai  $d = 0, 1, \dots, [n/2]$ . Autokoreliacijos funkcijai nėra prasmės skaičiuoti reikšmių, kai  $d > [n/2]$ , nes tokiose sekose beveik nebus bendrų laiko indeksų, o kai kurie autoriai netgi siūlo skaičiuoti tik  $d \leq [n/4]$  (Juozapavičius et al., 2011).

Autokoreliacijos funkcijos savybės (Juozapavičius et al., 2011; Meko, 2015):

1. Autokoreliacijos funkcija visada prasideda nuo  $r_{XX}(0) = 1$  ir dažniausiai, didėjant  $d$ , funkcija mažėja.
2. Jeigu tiriamam signalui būdingi periodiniai ar kvaziperiodiniai dariniai, tuomet autokoreliacijos funkcijos grafike išryškės to paties dažnio svyravimai, nes pradiniam signalui jie nebuvo akivaizdžiai matomi dėl triukšmo.
3. Jeigu autokoreliacijos funkcija staigiai mažėja ir reikšmės svyruoja apie nulį ( $|r_{XX}(d)| \leq 2/\sqrt{n}$ ) visame intervale, tuomet pradinio signalo reikšmės mažai priklauso nuo praeities reikšmių. Toks autokoreliacijos funkcijos elgesys būdingas triukšmams, atsitiktiniams tiriamiems signalams.
4. Stacionaraus signalo, kurio reikšmės tik tam tikrą laiką priklauso nuo buvusių signalo reikšmių, autokoreliacijos funkcijos reikšmės ne iš karto (kaip atsitiktinių signalų), tačiau per tam tikrą laiko tarpą priartėja prie nulio ir išlieka svyruojančios apie nulį.
5. Nestacionaraus signalo, kuris turi tendą, autokoreliacijos funkcija labai ilgai nepriartėja prie nulio. Tokiems signalams galima pirmiausia eliminuoti tendą ir tik tada skaičiuoti autokoreliaciją.

Elektrokardiografinio signalo artefaktai dažnai užteršia signalą, ir, prieš tai jų nepašalinus, negalima jokia tolimesnė analizė. Metodas, paremtas autokoreliacijos funkcija, procentilių analize bei grafų teorija, sėkmingai panaudotas EKG signalui apdoroti (Varon et al., 2012). Autokoreliacijos bei Hilberto transformacija paremtas metodas pritaikytas QRS kompleksui aptikti: autokoreliacijos funkcija apibrėžia vieno kardio ciklo trukmę, o Hilberto transformacija taikoma RR dantelio vietai signalo nustatytai

(Sahoo et al., 2014). Atliekant pacientų, kuriems pasireiškia miego apnėja, elektrokardiogramos tyrimą bei palyginimą su sveikų žmonių EKG, panaudojama autokoreliacijos funkcija – autokoreliacijos reikšmės labai lėtai artėja prie nulio miego apnėja sergantiems pacientams, vadinasi, šių pacientų EKG būdingas trendas, priešingai nei sveikų tiriamųjų širdies signalui (Das et al., 2011). Kulesa et al. (2003) straipsnyje buvo pastebėta, kad greičiau gęsta širdies patologijomis sergančių pacientų elektrografinių signalų autokoreliacijos funkcija nei sveikųjų.

*Furjė analizė.* 1807 m. Ž. B. Ž. Furjė<sup>11</sup> iškėlė hipotezę, kad bet kokios formos funkciją (signalą)  $x(t)$  intervale  $-\pi \leq t \leq \pi$  galima išskaidyti sinusų ir kosinusų, turinčių įvairius dažnius, suma:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt; \quad (24)$$

čia  $t$  žymi laiką,  $k$  – kampinis dažnis, skleidinio koeficientai  $a_0, a_k, b_k$  vadinami Furjė koeficientais. Daugelis praktikoje sutinkamų signalų nėra periodiniai bei stebėjimo intervalas  $0 \leq t \leq T$  nesutampa su intervalu  $-\pi \leq t \leq \pi$ , todėl tokiu atveju skleidinį reikia modifikuoti, kad jis turėtų ne periodą  $2\pi$ , o periodą, lygų  $T$ , – visas signalo stebėjimo intervalas traktuojamas kaip vienas periodas (Juozapavičius et al., 2011):

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_0 kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_0 kt); \quad (25)$$

čia  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Remiantis Oilerio formule  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ; čia  $i$  menamas vienetas, Furjė skleidinį galima apibrėžti kompleksinių funkcijų bazėje:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + c_{-k}) \cos(\omega_0 kt) + \sum_{k=1}^{\infty} i (c_k - c_{-k}) \sin(\omega_0 kt) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_0 kt}; \end{aligned} \quad (26)$$

čia  $c_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) vadinami kompleksiniais Furjė koeficientais, kurie apskaičiuojami:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega_0 kt} dt; \quad (27)$$

čia  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Integralus (27) ne visada galima tiksliai apskaičiuoti, tačiau galima skaitiniais integravimo metodais įvertinti apytiksliai. Nors  $c_k$  koeficientai yra kompleksiniai skaičiai, tačiau pats skleidinys yra realioji funkcija.

Signalo  $x(t)$  Furjė skleidinio (26) komponentų dariniai, turintys vienodą dažnį, vadinami harmonikomis:  $c_1 e^{i\omega_0 t} + c_{-1} e^{-i\omega_0 t}$  – pirmoji harmonika,  $c_2 e^{i2\omega_0 t} +$

<sup>11</sup> Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) – prancūzų matematikas ir fizikas.

$c_{-2}e^{-i2\omega_0 t}$  – antroji harmonika ir t. t. Signalu tyrimas, paremtas jo harmonikų tyrimu, vadinamas *spektrine*, arba *Furjė, analize*.

Kompleksinių Furjė koeficientų modulių seka (priklausomybė nuo dažnio  $k$ )

$$|c_k|, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

vadinama *amplitudžių spektru*. Amplitudžių spektras parodo, kokia yra kiekvienos signalo komponentės (harmonikos) įtaka bendroje komponentių sumoje. Koeficientų argumentų seka

$$\arg c_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

vadinama *fazių spektru*. Kartais dar nagrinėjama  $|c_k|^2$  priklausomybė nuo dažnio  $k$ , kuri vadinama *galios spektru*. Dažniausiai tiriant signalo spektrą skaičiuojamas amplitudžių spektras, fazių spektras rečiau, o atskirai realiųjų ir menamųjų Furjė koeficientų dalių spektrai nėra tokie informatyvūs ir dažniausiai nėra skaičiuojami (Juozapavičius et al., 2011).

Biosignalai apdorojami kompiuteriais arba skaitmeniniais įtaisais, todėl praktiškai naudojama diskrečioji Furjė transformacija. Tarkime, turime diskretų signalą  $x_0, \dots, x_j, \dots, x_{n-1}$ , o  $x_j$  registravimo momentai išsidėstę intervale  $t_j \in [t_0, t_n] = [0, 2\pi]$ , tuomet:

$$t_j = j\Delta t = j\frac{2\pi}{n}, x_j = x(t_j), j = 0, 1, \dots, n-1, \Delta t = \frac{2\pi}{n}.$$

Įrašius į Furjė skleidinio išraišką diskrečias laiko reikšmes  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ , gaunama  $n$  lygčių nežinomiems Furjė koeficientams rasti  $c_k$ . Taigi diskrečiam signalui Furjė skleidinys iš  $n$  komponentių su koeficientais  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ :

$$x_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{i\frac{2\pi}{n}kj}; \quad (28)$$

čia  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

Pertvarkius (28) išraišką, gaunama:

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-i\frac{2\pi}{n}jk}; \quad (29)$$

čia  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Visi Furjė koeficientai bendru atveju yra kompleksiniai skaičiai, tačiau galioja simetrija, t. y.  $c_k = \bar{c}_{n-k}$ , čia  $\bar{c}_{n-k}$  žymi  $c_{n-k}$  jungtinį kompleksinį skaičių. Amplitudžių spektras  $|c_k|$  yra simetriškas  $k = n/2$  atžvilgiu, t. y.  $|c_k| = |c_{n-k}|$ . Fazių spektras pasižymi antisimetrija  $\arg c_k = -\arg c_{n-k}$ , kai  $k = 1, \dots, n-1$ . Išraiška (29), kurią panaudojus apskaičiuojamas skaitmeninio signalo spektras, vadinama *diskrečiąja Furjė transformacija*. Išraiška, leidžianti iš spektro  $c_k$

atkurti skaitmeninį signalą  $x_0, \dots, x_j, \dots, x_{n-1}$ , vadinama *atvirkštine diskrečiąja Furjė transformacija*:

$$x_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{i \frac{2\pi}{n} jk}; \quad (30)$$

čia  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ . Pastebėsime, kad  $|c_k| = |c_{n-k}|$ .

Siekiant kuo geriau atlikti EKG signalo skaidymą kardiociklais, t. y. filtruoti triukšmą bei tiksliau aptikti RR dantelius, atliekama signalo spektrinė analizė taikant greitąją Furjė transformaciją, po pirminio apdorojimo signalas pateikiamas neuroniniam tinklui, o šiame tinkle identifikuojama liga (iš turimų ligų aprašų) (Gothwal et al., 2011). Triukšmai, atsirandantys dėl tiriamojo judėjimo, elektros linijos trikdžių, blogo elektrodų ir odos kontakto, mažina elektrokardiografinių signalų tikslumą, todėl triukšmus bandoma pašalinti iš signalo – triukšmams būdingi dažniai, kuriuos padeda nustatyti diskrečioji Furjė transformacija (Sadhukhan et al., 2014). Sveiko žmogaus elektrokardiografiniam signalui būdingas dažnių spektras tiriamas Bera et al. (2010).

*Jungtinė laiko-dažnių analizė.* Signalas aprašo priklausomybę nuo laiko, o spektrinė analizė (pvz., Furjė) aprašo dažninę signalo informaciją. Signalo spektras visiškai ignoruoja signalo dažnių kitimą laike. Laiko-dažnių analizei siūlomos segmentinė Furjė transformacija (angl. *short time Fourier transformation*), vilnelių transformacija (angl. *wavelet transform*), Wigner skirstinys, Gabor transformacija, trupmeninė Furjė transformacija (angl. *fractional Fourier transformation*).

Jungtinę laiko-dažnių analizę galima atlikti skaidant signalą į segmentus, tada tiriama, kad segmentuose esantis signalas yra kvazistacionarus, ir kiekvienam segmentui apskaičiuojami spektrai ir išdėstomi laiko skalėje. Tarkime, duotas diskretus signalas  $x_0, \dots, x_j, \dots, x_{n-1}$ . Daliname signalą į  $K$  vienodo ilgio intervalų (po  $m$  reikšmių; čia  $m \ll n$ ) ir kiekvienam  $k$ -ajam intervalui skaičiuojamas spektras  $c_k(\omega)$ :

$$c_k(\omega) = \sum_{j=0}^{m-1} x_j e^{-i\omega j}; \quad (31)$$

čia  $k = 1, 2, \dots, K$ ,  $i$  – menamas vienetas. Minėtu atveju signalo skaidymą į intervalus galima interpretuoti kaip signalo  $x$  daugybą iš slenkančio stačiakampio lango  $w(j - (k - 1)m)$ :

$$w(j - (k - 1)m) = \begin{cases} 1, & 0 \leq j \leq m - 1; \\ 0, & j > m; \end{cases} \quad (32)$$

čia  $k = 1, 2, \dots, K$ . Taigi, į (31) formulę įrašius (32) ir pertvarkius, gaunamas spektras, priklausantis nuo dažnio ir laiko:

$$c(\omega, t) = \sum_{j=0}^{m-1} x_j w(j - t) e^{-i\omega j}; \quad (33)$$



čia diskretus laikas  $t = (k - 1)m$ , o  $k = 1, 2, \dots, K$ . Išraiška (33) vadinama *segmentine Furjė transformacija*.

Taikant segmentinę Furjė transformaciją, susiduriama su neapibrėžtumu, kurio pasekmė yra ta, kad laiko ir dažnių skalės negali būti keičiamos kartu. Kuo ilgiau stebimas signalas (kiekvieno intervalo reikšmių skaičius didelis), tuo tiksliau bus įvertintas dažnis, tačiau kuo stebėjimo trukmė ilgesnė, tuo prasčiau bus matomas signalo dažninės sudėties kitimas (Marozas et al., 2008).

Bandant spręsti šią problemą, buvo pasiūlyta analizuojant skirtingus dažnius parinkti vis kitą skiriamąją gebą – buvo pritaikyta vilnelių transformacija (angl. *wavelet transform*). Taikant vilnelių transformaciją, panašiai kaip ir segmentinę Furjė transformaciją, signalas dauginamas iš funkcijos (šiuo atveju bangelės funkcijos) ir transformacija skaičiuojama skirtingiems laiko segmentams. Tačiau vilnelių transformacijoje bangelės funkcijos plotis pakeičiamas vykdant transformaciją kiekvienai spektro komponentei.

Tolydžioji vilnelių transformacija apibrėžiama per vilnelės funkciją  $\psi(t)$ :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right); \quad (34)$$

čia  $b$  – postūmis,  $a$  – mastelis ( $a \neq 0$ ),  $t$  – laikas, vilnelės funkcija tenkina sąlygą  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}(t) dt = 0$ . Kai  $|a| > 1$ , mastelis ištempia, o kai  $|a| < 1$ , – suspaudžia. Tuomet signalo  $x(t)$  tolydžioji vilnelės transformacija laiko-skalės erdvėje:

$$W_x(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{a,b}(t) dt. \quad (35)$$

Diskretiems signalams  $x_0, \dots, x_j, \dots, x_{n-1}$  generuojamas diskretus reikšmių tinklelis. Dažniausiai diskretizuojama  $b = kb_0 a_0^i$  ir  $a = a_0^i$  parenkant  $b_0 > 0$  ir  $a_0 > 1$  ir sugeneruojant taškų tinklelį, tuomet sveikiesiems skaičiams  $i$  ir  $k$  diskrečioji vilnelių transformacija (angl. *discrete wavelet transform* (DWT)) apibrėžiama:

$$x_j = \sum_i \sum_k w_x(i, k) \psi_{i,k}(j); \quad (36)$$

čia  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ , vilnelės koeficientai  $w_x(i, k) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \psi_{i,k}(j)$ , o  $\psi_{i,k}(j)$  diskretizuota vilnelės funkcija. Literatūroje dažnai nagrinėjamas dvejetainis tinklelis (angl. *dyadic grid*), kai parametrai parenkami  $b_0 = 1$  ir  $a_0 = 2$  (Giri et al., 2013):

$$\psi_{i,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^i}} \psi\left(\frac{t - kb_0 a_0^i}{a_0^i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^i}} \psi(2^{-i}t - k). \quad (37)$$

Išsami apžvalga atlikta Addison (2005), joje aptartas vilnelių panaudojimas EKG kompleksams bei danteliams nustatyti, aptikti EKG anomalijas bei aritmijas, visas

skyrius apžvalgoje skirtas vien širdies ritmo variabilumo tyrimui panaudojant vilnelių transformaciją. Pacientų, kuriems pasireiškia išeminės širdies ligos<sup>12</sup> simptomai, elektrokardiografinių signalų pokyčiai yra labai subtilūs ir sunkiai išskiriami, todėl pagal pasiūlytą metodologiją atliekamas signalo pirminis apdorojimas diskrečia vilnelių transformacija ir tik tada taikoma esminių komponenčių, tiesinė diskriminantinė ir nepriklausomų komponenčių analizė (Giri et al., 2013). Kryžminės vilnelių transformacijos taikymas EKG analizei bei klasifikavimui atlikti pristatomas Banerjee et al. (2014). Šiame straipsnyje kroskoreliacija skaičiuojama dviejų kardiociklų bangoms palyginti, tuomet abiem laiko eilutėms taikoma vilnelių transformacija ir tuomet atliekama kryžminė gauto skaidinio analizė.

### 1.5.3. Ryšių tarp dviejų signalų tyrimas

Ankstesniame skyriuje buvo aptartos pagrindinės vieno signalo tyrimo metodikos. Nors vieno signalo tyrimas nenuginčijamai svarbus, tačiau dažnai gamtoje sutinkamų (ypač fiziologinių) sistemų prigimtis nėra tokia paprasta. Dauguma sistemų yra sudėtingos (kompleksinės), todėl ir jų signalai yra sudėtiniai (daugiakanaliai) – keleto pavienių sinchroniškai gautų laiko eilučių tyrimas ne visada atskleidžia visą informaciją, todėl aktualus tokių signalų tarpusavio ryšio bei priklausomybės dinamikos stebėjimas.

Sparčiai besivystanti medicininė technika lėmė tai, jog šiuo metu turime prietaisų, leidžiančių sinchroniškai registruoti aktyvumo rodmenis net kelių to paties ar skirtingų individų fiziologinių sistemų. Dabartinės duomenų aibės susideda iš šimtų kanalų. Tai ypač būdinga elektroencefalogramoms (EEG), magnetoencefalogramoms (MEG), elektrokardiogramoms (EKG) bei elektromiogramoms (EMG). Daugiakanalių duomenų analizė nagrinėja tarpusavio ryšius ir leidžia geriau suprasti apie tiriamas sritis, tačiau tokia analizė yra sudėtinga. Be daugelio eksperimentinių ir skaičiavimo sunkumų, dažnai pasitaiko problema – kaip teisingai pritaikyti egzistuojančius matematinius įrankius. Šiame skyriuje pateiksime dažniausiai taikomus metodus dviejų signalų ryšiams vertinti.

*Koreliacijos koeficientai.* Kovariacijos ir koreliacijos koeficientai – tai skaitinės charakteristikos, įvertinančios dviejų atsitiktinių dydžių tiesinę priklausomybę. Atsitiktinių dydžių  $X$  ir  $Y$  kovariacija:

$$\text{Cov}_{XY} = M((X - MX)(Y - MY)); \quad (38)$$

čia  $M(X)$  žymi dydžio  $X$  vidurkį. Jeigu dydžiai nepriklausomi, tai  $\text{Cov}_{XY} = 0$ .

Tarkime, duotos dvi atsitiktinių dydžių imtys  $X$  ir  $Y$ , atitinkamai įgyjančios reikšmes  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$  ir  $y_1, \dots, y_i, \dots, y_n$ . Tada kovariacijos išraiška:

$$\text{Cov}_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}); \quad (39)$$

<sup>12</sup>Išeminė širdies liga (angl. *coronary artery disease* (CAD)) – tai kraujagyslių susiaurėjimas, dėl ko suprastėja kraujo ir deguonies tiekimas širdžiai.

čia  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  empirinis imties  $X$  vidurkis,  $\bar{y}$  empirinis imties  $Y$ . Jeigu imčių vidurkiai  $\mu$  ir  $\eta$  būtų tiksliai žinomi, tuomet kovariacija skaičiuojama  $\text{Cov}_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)(y_i - \eta)$ . Kovariacija nėra patogus matas, nes priklauso nuo matavimo skalės, pvz., jei skaičiuojama kovariacija matuojamo dydžio metrais ir paskui paverčiama centimetrais, tai kovariacijos skirsis. Pakeitus atsitiktinių dydžių  $X$  ir  $Y$  matavimo skalę, pasikeis ir kovariacija, nors dydžių tarpusavio priklausomybė ir nepasikeitė. Buvo įvestas matas, nepriklausomas nuo matavimo vienetų, – *koreliacijos koeficientas*:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}_{XY}}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}; \quad (40)$$

čia  $DX$  ir  $DY$  atitinkamai žymi atsitiktinių dydžių  $X$  ir  $Y$  dispersijas (Čekanavičius et al., 2000). Dažniausiai dviejų kintamųjų monotoniniams ryšiams vertinti naudojami trys koreliacijos koeficientai: Pirsono, Spirmano ir Kendalo.

Pirsono<sup>13</sup> koreliacijos koeficientas yra tiesinės sąveikos stiprumo įverčių (Juozapavičius et al., 2011):

$$\rho_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (41)$$

Skaičiuojant Pirsono koreliacijos koeficientą daroma prielaida, kad duomenys pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį. Pirsono koreliacijos koeficientas kinta  $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ . Kai kintamuosius sieja teigiamas monotoninis ryšys (abi kintamųjų reikšmės kartu arba didėja, arba mažėja),  $\rho_{XY} > 0$ , o kai neigiamas (vienas kintamasis didėja, kai kitas mažėja, ir atvirkščiai), tuomet  $\rho_{XY} < 0$ . Kai  $\rho_{XY} = 0$ , tuomet monotoninio ryšio tarp kintamųjų nėra arba nėra išvis jokių kintamųjų tarpusavio sąsajų, kai duomenys pasiskirstę pagal normalųjį dvimatį skirstinį. Jeigu imties skirstinys labai skiriasi nuo normaliojo, tada Pirsono koreliacijos koeficientas gali būti lygus nuliui, net ir tarpusavyje susijusiems kintamiesiems. Kai  $\rho_{XY} = 1$ , tuomet kintamuosius  $X$  ir  $Y$  sieja labai stiprus tiesinis ryšys, t. y.  $Y = k + bX$ ; čia  $k, b$  realieji skaičiai (Chok, 2010). Pirsono koreliacijos koeficientas yra jautrus išskirtims (ITRC, 2013).

Jeigu abejojama dėl duomenų skirstinio, rekomenduojama rinktis Spirmano<sup>14</sup> ranginį koreliacijos koeficientą. Spirmano ranginis koreliacijos koeficientas yra labai panašus į Pirsono koeficientą, tik skaičiuojamas kintamuosius rikiuojant ir vertinant jų pozicijas, o ne pačias reikšmes. Tarkime, kad duotos duomenų poros  $X$  ir  $Y$ :  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Atskirai  $X$  ir  $Y$  apskaičiuojami rangai kiekvienai sekai, pvz., didžiausią reikšmę turinčio  $x_i$  rangas bus 1, mažiausią reikšmę turinčio rangas bus  $n$ , o jeigu yra kelios vienodos reikšmės, tuomet skaičiuojamas aritmetinis

<sup>13</sup>Karl Pearson (1857–1936) – anglų statistikas.

<sup>14</sup>Charles Edward Spearman (1863–1945) – anglų psichologas, tačiau labiau žinomas dėl statistikos darbų.

rangų vidurkis. Spirmano koreliacijos koeficientas apskaičiuojamas:

$$r_S = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}; \quad (42)$$

čia  $d_i = \text{rank}(x_i) - \text{rank}(y_i) - i$ -tosios imties duomenų poros rangų skirtumas. Spirmano ranginis koreliacijos koeficientas įgyja reikšmes  $-1 \leq r_S \leq 1$ . Koeficientas  $r_S$  gali būti lygus 0, kaip ir Pirsono koeficientas, kai kintamieji susieti nemonotoniniu ryšiu, tačiau, priešingai nei Pirsono koeficientas, Spirmano koreliacija gali būti lygi 1 ne vien tiek tiesiniu, bet ir netiesiniu bet monotoniniu ryšiu susijusiems kintamiesiems (Chok, 2010).

Spirmano koreliacijos koeficientas nereikalauja ypatingo duomenų skirstinio. Šis ranginis koreliacijos koeficientas  $r_S$  yra alternatyva Pirsono koreliacijos koeficientui, kai siekiama sumažinti skaičiavimus, sumažinti jautrumą duomenų išskirtims arba sumažinti koreliacijos koeficiento jautrumą dėl duomenų, jeigu duomenų skirstinys nėra normalusis. Spirmano koreliacijos koeficientui apskaičiuoti rekomenduojama mažiau siai 18–20 stebinių imtis, tačiau įmanoma taikyti ir mažesnėms imtims (atitinkamai gaunamas mažiau statistiškai reikšmingas rezultatas). Kaip ir skaičiuojant Pirsono koreliacijos koeficientą, taip ir Spirmano koeficientui skaičiuoti reikalingas didesnis duomenų kiekis esant didelei duomenų sklaidai (ITRC, 2013).

Kitas ranginis ryšio matas yra Kendalo ranginis koreliacijos koeficientas. Pastarasis dar mažiau jautrus išskirtims nei Spirmano koreliacijos koeficientas. Kendalo koeficientu dažniausiai vadinamas Kendalo  $\tau$  koreliacijos koeficientas, kuris apskaičiuojamas:

$$\tau = \frac{n_{\text{suderint}} - n_{\text{nesuderint}}}{\frac{n(n-1)}{2}}; \quad (43)$$

čia  $n_{\text{suderint}}$  – suderintų porų skaičius,  $n_{\text{nesuderint}}$  – nesuderintų porų skaičius. Pora  $(x_i, y_i)$  ir  $(x_j, y_j)$ ,  $(i \neq j)$  yra suderinta, jeigu  $(x_i > x_j$  ir  $y_i > y_j)$  arba  $(x_i < x_j$  ir  $y_i < y_j)$ ; nesuderinta, jeigu  $(x_i < x_j$  ir  $y_i > y_j)$  arba  $(x_i > x_j$  ir  $y_i < y_j)$ . Iš viso galima sudaryti  $\frac{n(n-1)}{2}$  porų (Pukėnas, 2010). Kendalo  $\tau$  patogesnis (43) skaičiavimo būdas:

$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{sgn}(x_i - x_j) \text{sgn}(y_i - y_j)}{n(n-1)}; \quad (44)$$

čia

$$\text{sgn}(x_i - x_j) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x_i - x_j > 0, \\ 0, & \text{kai } x_i - x_j = 0, \\ -1, & \text{kai } x_i - x_j < 0. \end{cases} \quad (45)$$

Kendalo ranginis koreliacijos koeficiento kitimas  $-1 \leq r_\tau \leq 1$ . Šiuo koeficientu vertinamas monotoninis dviejų kintamųjų ryšys. Kendalo koreliacijos koeficientas gali būti lygus 1 dar kitokiais atvejais nei Spirmano koreliacijos koeficientas (Chok, 2010).

Širdies darbo sutrikimams nustatyti Pirsono koreliacijos koeficientas skaičiuojamas tarp laiko ir EKG signalo – ieškoma tiesinio ryšio. Jeigu Pirsono koreliacijos koeficientas statistiškai reikšmingas, tuomet randamas tiesinės regresijos modelis, po tokio apdorojimo EKG klasifikuojami (Bezerra et al., 2013). Tyrimas, kokią įtaką kūno masės indeksas turi suaugusių (amžius 20–45 metai) ir vidutinio amžiaus (amžius 46–60 metų) grupės žmonių reakcijai, pristatomas Nayak et al. (2014). Straipsnyje nagrinėjami širdies ritmo variabilumo, fiksuoto asmeniui sėdint ir staigiai atsistojus gavus komandą, ir kūno masės indekso duomenys bei analizuojamas Pirsono koreliacijos koeficientas, skaičiuojamas tarp minėtų dydžių. Pirsono koreliacijos koeficientai, skaičiuojami tarp širdies magnetinio rezonanso ir elektrokardiografinio signalų, skiriasi pacientams, kuriems nustatytos fiziologinės ir pataloginės hipertrofijos (Nethononda et al., 2008). Pagal Pirsono koreliacijos koeficientą tarp EKG ir kraujo spaudimo rodmenų vertinama širdies ir kraujagyslių sistemos būklė (Yeh et al., 2012). Spirmano koreliacijos koeficientas panaudotas vertinti, ar uždegiminio junginio *Interleukin 17*<sup>15</sup> susidarymą galima sieti su įvairiomis Čagaso<sup>16</sup> ligos formomis (Magalhães et al., 2013).

*Kroskovariacijos, kroskoreliacijos funkcijos, krosspektras, koherencija.* Ankstesniame skyriuje buvo nagrinėti atskiri kroskovariacijos bei kroskoreliacijos funkcijų atvejai – autokovariacija ir autokoreliacija (1.5.2 skyrių). Dviejų atsitiktinių procesų  $X$  ir  $Y$ , atitinkamai įgyjančių reikšmes  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$  ir  $y_1, \dots, y_i, \dots, y_n$  kroskovariacijos (angl. *cross-covariance*) funkcija apskaičiuojama:

$$CCov_{XY}(d) = \sum_{i=1}^{n-d} (x_i - \bar{x}_{1,\dots,n-d}) (y_{i+d} - \bar{y}_{d+1,\dots,n}); \quad (46)$$

čia  $d = 0, 1, \dots, [n/2]$ , operacija  $[n/2]$  žymi sveikąją skaičiaus dalį, empiriniai vidurkiai apskaičiuojami  $\bar{x}_{1,\dots,n-d} = \frac{1}{n-d} \sum_{i=1}^{n-d} x_i$  ir  $\bar{y}_{d+1,\dots,n} = \frac{1}{n-d} \sum_{i=1}^{n-d} y_{i+d}$ . Kadangi kroskovariacija, kaip ir kovariacija, priklauso nuo  $X$  ir  $Y$  matavimo skalių, todėl kroskovariacija dalinama iš imčių standartinių nuokrypių įverčių ir taip apibrėžtas įvertis vadinamas kroskoreliacijos (angl. *cross-correlation*) funkcija. Kroskoreliacijos funkcija nėra simetrinė  $X$  ir  $Y$  atžvilgiu, bendru atveju  $CCorr_{XY}(d) \neq CCorr_{YX}(d)$ . Kroskoreliacijos funkcija nagrinėja dviejų signalų panašumą, vieną iš jų stumiant laike tiek į kairę, tiek į dešinę kito signalo atžvilgiu:

$$CCorr_{XY}(d) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^{n-d} (x_i - \bar{x}_{1,\dots,n-d})(y_{i+d} - \bar{y}_{d+1,\dots,n})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-d} (x_i - \bar{x}_{1,\dots,n-d})^2 \sum_{i=1}^{n-d} (y_{i+d} - \bar{y}_{d+1,\dots,n})^2}}, & d \geq 0; \\ \frac{\sum_{i=1}^{n+d} (y_i - \bar{y}_{1,\dots,n+d})(x_{i-d} - \bar{x}_{-d+1,\dots,n})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+d} (y_i - \bar{y}_{1,\dots,n+d})^2 \sum_{i=1}^{n+d} (x_{i-d} - \bar{x}_{-d+1,\dots,n})^2}}, & d \leq 0; \end{cases} \quad (47)$$

<sup>15</sup>*Interleukin 17* (IL-17) – tai uždegiminis junginys, susidarantis suaktyvėjus  $CD4^+$  T ląstelėms. IL-17 susidarymas dažniausiai siejamas su uždegiminėmis bei autoimuninėmis ligomis.

<sup>16</sup>Čagaso liga – parazitinė liga, kurią sukelia tripanosoma. Liga gali būti ūminė arba lėtinė, pasireiškia galvos skausmais, aukšta temperatūra, pasireiškia funkciniai širdies sutrikimai, dažniausiai mirštama nuo širdies nepakankamumo.

čia  $|d| \leq [n/2]$ , empiriniai vidurkiai  $\bar{x}_{1,\dots,n-d}$  ir  $\bar{y}_{d+1,\dots,n}$ , kai  $d \geq 0$ , bei  $\bar{y}_{1,\dots,n+d}$  ir  $\bar{x}_{-d+1,\dots,n}$ , kai  $d \leq 0$ , apskaičiuojami kaip (46) formulėje. Nėra prasmės skaičiuoti kroskoreliacijos funkcijos reikšmių, kai  $|d| > [n/2]$ , o kai kurie autoriai netgi siūlo skaičiuoti tik  $|d| \leq [n/4]$ . Kroskoreliacijos funkcijos kitimo intervalas  $[-1, 1]$ .

Funkcijos  $\text{CCorr}_{XY}(d)$  argumento reikšmė  $d$ , su kuria funkcijos modulis didžiausias, parodo, per kiek vienetų laike antrąjį signalą reiktų pastumti pirmojo atžvilgiu, kad signalai būtų panašiausi. Jeigu  $\text{CCorr}_{XY}(d)$  įgyja didžiausią reikšmę, kai  $d = 0$ , vadinasi, duomenys neturi tarpusavio vėlinimo – yra panašiausi be postūmio laiko atžvilgiu (Juozapavičius et al., 2011).

Dviejų signalų krosspektras (angl. *cross-spectrum*) apibrėžiamas kaip kroskoreliacijos funkcijos  $\text{CCorr}_{fg}(\tau)$  Furjė transformacija:

$$S_{XY}(\omega) = \sum_{d=-\infty}^{\infty} \text{CCorr}_{XY}(d) e^{-i\omega d}; \quad (48)$$

čia  $i$  – menamas vienetas, kai  $i^2 = -1$ . Dydis  $S_{XY}(\omega)$  yra kompleksinis. Tuomet koherencijos (angl. *coherence*) funkcija apibrėžiama:

$$\gamma_{XY}(\omega) = \frac{S_{XY}(\omega)}{\sqrt{S_{XX}(\omega) S_{YY}(\omega)}}; \quad (49)$$

čia  $S_{XX}(\omega)$  bei  $S_{YY}(\omega)$  yra signalų autospektrai. Dydis  $\gamma_{XY}(\omega) \leq 1$ , nes  $S_{XY}(\omega) \leq \sqrt{S_{XX}(\omega) S_{YY}(\omega)}$ . Koherencija parodo dviejų signalų ryšį dažnių bei fazių srityse. Koherencijos kvadratas  $\gamma_{XY}^2(\omega)$  (angl. *coherence spectrum*) įvertina dažnio  $\omega$  spektrinę galią, bendrą abiem signalams. Dydis  $\gamma_{XY}^2(\omega)$  kinta nuo 0 iki 1, ir kuo didesnę reikšmę įgyja, tuo didesnis tiesinis ryšys yra tarp signalų  $X$  ir  $Y$ , esant dažniui  $\omega$ .

Siūlomas EKG klasifikavimo algoritmas, paremtas EKG duomenų transformacija į dažnių plokštumą panaudojant Furjė analizę, o kroskoreliacijos funkcija naudojama palyginti EKG su etaloniniu tam tikrą grupę atitinkančiu signalu. Elektrokardiografiniai signalai registruojami įvairiomis aplinkybėmis – patiriant baimę, rūkant, normaliomis sąlygomis ir panašiai. Skaičiuojamos kroskoreliacijos funkcijos kreivė įgyja skirtingą formą tiriamąjį signalą lyginant vis su kitu etaloniniu elektrokardiografiniu signalu (Shinwari et al., 2012). Chin et al. (2010) kroskoreliacijos funkcija panaudojama aritmijoms atpažinti. Kroskoreliacijos funkcija skaičiuojama tarp etaloninio (iš MIT-BIH duomenų bazės duomenų (Moody, 2005)) aritmiją atitinkančio ir tiriamojo EKG signalo duomenų. Panaši metodika – lyginimas skaičiuojant tiriamojo kroskoreliaciją su etalonu – naudojama ir vėlesniuose straipsniuose: priešlaikiniam skilvelio sujaudinimui<sup>17</sup> aptikti (Coll, 2013), kardiociklams (kompleksams, gautiems vieno dūžio metu) klasifikuoti (Dutta et al., 2010), normaliam ir aritmiškam EKG nustatyti (Ayub et al., 2012).

<sup>17</sup> Priešlaikinis skilvelio sujaudinimas (angl. *Premature ventricula contraction*) – tai ganėtinai dažnas sutrikimas, kai širdies dūžio (kardiociklo) pradžia Purkinjė skaidulų inicijuojama skilvelyje, o ne sinusiame mazge, kaip įprasta.

*Netiesinės koreliacijos koeficientas.* Netiesinės koreliacijos koeficientas (angl. *nonlinear correlation coefficient*) yra neparametrinės netiesinės regresijos koeficientas, aprašantis dydžio  $X$  priklausomybę nuo  $Y$  pačiu bendriausiu būdu, neapibrėžiant ryšio tipo tarp kintamųjų  $X$  ir  $Y$ . Pagrindinė mintis yra ta, kad jeigu dydis  $X$  yra funkcija nuo  $Y$ , tuomet dydžio  $Y$  reikšmė, nusakyta tam tikros dydžio  $X$  reikšmės, gali būti prognozuojama, remiantis netiesinės regresijos kreive. Tarkime, duotos dvi imtys  $X$  ir  $Y$ , atitinkamai įgyjančios reikšmes  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$  ir  $y_1, \dots, y_i, \dots, y_n$ , tuomet netiesinės koreliacijos koeficientas apskaičiuojamas:

$$h_{Y|X}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i)^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n (y_i)^2}; \quad (50)$$

čia  $f(x_j)$  yra netiesinės regresijos kreivės aproksimacija dalimis tiesine kreive (angl. *linear piecewise*). Praktikoje  $f(x_j)$  skaičiuojami iš taškų  $X$  ir  $Y$  išsibarstymo grafiko: dydžio  $X$  reikšmės suskaidomos į intervalus, kiekviename intervale apskaičiuojamas vidurio taškas  $\hat{x}_j$  bei vidutinė reikšmė  $\hat{y}_j$ . Regresijos kreivė gaunama sujungiant taškus  $(\hat{x}_j, \hat{y}_j)$  atkarpomis. Intervalai, į kuriuos skaidomos  $X$  reikšmės, nebūtinai turi būti vienodo ilgio, svarbu, kad kiekviename intervale būtų pakankamas kiekis reikšmių aproksimuojančiai kreivei apskaičiuoti.

Netiesinės koreliacijos koeficientas  $h_{Y|X}^2$  gali įgyti reikšmes nuo 0 (kai  $Y$  visiškai nepriklauso nuo  $X$ ) iki 1. Jeigu ryšys tarp šių dydžių yra tiesinis, tuomet  $h_{Y|X}^2 = h_{X|Y}^2$ , ir šis matas apytiksliai lygus tiesinės regresijos koeficiento kvadratai  $r_{xy}^2$ . Kai ryšys tarp dydžių  $X$  ir  $Y$  netiesinis, tada  $h_{Y|X}^2 \neq h_{X|Y}^2$ , o skirtumas  $\Delta h^2 = h_{X|Y}^2 - h_{Y|X}^2$  nusako netiesinio ryšio asimetrijos laipsnį. Analizuojant  $\Delta h^2$  taip pat galima įvertinti ryšio postūmį laiko atžvilgiu (Pereda et al., 2005).

*Grangerio priežastingumo testas.* Biomediciniųjų signalų analizėje priežastingumas tarp kelių kintamųjų yra itin svarbus. Kroskoreliacijos funkcija ir netiesinės koreliacijos koeficientas iš esmės gali įvertinti ryšio postūmį, tačiau vertinti priežastingumą iš postūmio laiko atžvilgiu nėra paprasta. Priežastingumo testas pirmiausia buvo pristatytas 1969 m. Grangerio<sup>18</sup> ekonomikos srityje. Grangeris priežastingumą (angl. *Granger causality*) tarp dviejų vienu metu matuotų signalų  $X$  ir  $Y$  apibūdino taip: jeigu signalą  $X$  galima geriau prognozuoti papildant modelio informaciją signalo  $Y$  praeities duomenimis nei naudojant tik signalo  $X$  informaciją, tuomet sakoma, kad signalas  $Y$  yra signalo  $X$  priežastis ( $Y$  nulemia signalą  $X$ ). Jeigu  $X$  daro įtaką  $Y$ , tuomet, panaudojus  $X$  praeities reikšmes  $Y$  regresijai, prognozė turėtų gautis tikslesnė nei naudojant tik  $Y$  reikšmes – tai gali būti įvertinama lyginant signalų vienmatį ir dvimatį autoregresinius modelius (angl. *autoregressive model (AR)*). Jeigu prognozuojame reikšmę  $x(t)$  naudodami tik ankstesnes  $X$  eilutės  $p$  reikšmių, tuomet gauname

<sup>18</sup>Clive Granger – matematikas ir ekonomistas, Nobelio premijos laureatas ekonomikos srityje.

prognozavimo paklaidą  $\varepsilon_x$ , o autoregresinis modelis užrašomas:

$$x(t) = \sum_{k=1}^p a_{xk} x(t-k) + \varepsilon_x(t); \quad (51)$$

čia  $a_{xk}$  – modelio parametrai, o  $p$  – modelio eilė.  $y(t)$  modelis aprašomas analogiškai:

$$y(t) = \sum_{k=1}^p a_{yk} y(t-k) + \varepsilon_y(t). \quad (52)$$

Vienmačiame modelyje prognozavimo paklaida priklauso tik nuo paties signalo praeities reikšmių, o dvimačiuose autoregresiniuose modeliuose jau nuo abiejų signalų praeities reikšmių:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^p a_{xyk} x(t-k) + \sum_{k=1}^p b_{xyk} y(t-k) + \varepsilon_{xy}(t), \\ y(t) &= \sum_{k=1}^p a_{yxk} y(t-k) + \sum_{k=1}^p b_{yxk} x(t-k) + \varepsilon_{yx}(t). \end{aligned} \quad (53)$$

Prognozavimo tikslumas abiejų tipų modeliuose įvertinamas pagal prognozavimo paklaidų dispersijas:

$$\begin{aligned} V_X &= \sigma^2(\varepsilon_x), & V_Y &= \sigma^2(\varepsilon_y), \\ V_{X|X,Y} &= \sigma^2(\varepsilon_{xy}), & V_{Y|Y,X} &= \sigma^2(\varepsilon_{yx}); \end{aligned} \quad (54)$$

čia  $\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2$  yra imties dispersija. Jeigu  $V_{X|X,Y} < V_X$ , tuomet  $Y$  nulemia signalą  $X$  Grangerio priežastingumo prasme, t. y. prognozavimo paklaida sumažėja, įtraukus kito signalo praeities reikšmes. Tuomet  $Y$  signalo poveikis signalui  $X$  – Grangerio priežastingumo įvertis apskaičiuojamas:

$$G_{Y \rightarrow X} = \ln \frac{V_X}{V_{X|X,Y}}. \quad (55)$$

Jeigu signalo  $Y$  praeities duomenys nepagerina signalo  $X$  prognozės, tuomet  $V_{X|X,Y} \approx V_X$ , o priežastingumo įvertis artimas nuliui. Jeigu signalo  $X$  prognozė pagerėja įtraukus  $Y$  praeities duomenis, tuomet dispersija  $V_{X|X,Y}$  sumažės, o Grangerio priežastingumo įvertis padidės. Priešingos krypties Grangerio priežastingumo įvertis,  $X \rightarrow Y$ , nusakomas analogiškai. Jeigu abu įverčiai  $G_{Y \rightarrow X}$  ir  $G_{X \rightarrow Y}$  yra dideli, tuomet sakoma, kad yra stiprus abipusis ryšys tarp signalų. Grangerio priežastingumo indeksas skaičiuojamas darant prielaidą, kad abi tiriamos sistemos yra tiesinės (AR modelių koeficientai skaičiuojami iš tiesinės regresijos), todėl (Freiwald et al., 1999) buvo pasiūlyta aproksimacija keisti lokaliai tiesiniu netiesiniu autoregresiniu modeliu (angl. *Local Linear Non-linear Autoregressive models* (LLNAR)) (Pereda et al., 2005).



Grangerio priežastingumo indeksas skaičiuojamas ryšiui rasti tarp sistolinio arterinio spaudimo ir širdies ritmo (vertinant su anestezija ir be jos) (Bassani et al., 2012). Autonominio širdies veiklos reguliavimo vertinimas gautas taikant Grangerio priežastingumo testą (Javorcka et al., 2013). Priežastingumo ryšiai tarp širdies susitraukimų dažnio ir sistolinio arterinio spaudimo bei kvėpavimo buvo tirti taikant Grangerio priežastingumo testą, vėliau tų pačių ryšių pokyčiai stebėti suvartojus paskirtus vaistus širdies veiklai gerinti (Porta et al., 2013).

*Informacijos teorija paremti metodai.* Galima sakyti, kad visi iki šiol minėti metodai turi vieną bendrą bruožą – bando nusakyti, ar bet kokią bendrą *informaciją* tarp dviejų laiko eilučių galima laikyti tarpusavio priklausomybe. Todėl tapo įprasta tokio ryšio egzistavimą tirti informacijos teorija pagrįstais metodais.

Centrinė informacijos teorijos ašis yra entropijos koncepcija. Vieno diskretaus atsitiktinio dydžio Shannono entropija buvo aptarta anksčiau (1.5.2 skyrių). Tarkime, turime du atsitiktinius dydžius  $X$  ir  $Y$ . Tada abipusė informacija (angl. *mutual information* (MI)) tarp šių kintamųjų apibrėžiama:

$$MI_{XY} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log_2 \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)}; \quad (56)$$

čia  $p(x_i, y_j)$  yra pilnoji tikimybė, kad atsitiktiniai dydžiai įgis  $X = x_i$  ir  $Y = y_j$  ( $i = 1, \dots, n$ ), logaritmo bazė 2, jei informacija matuojama bitais.  $MI$  nusako, kiek perteklinės informacijos gaunama iš signalo, iš anksto žinant visas kito signalo įgyjamąs reikšmes. Todėl jeigu ryšio tarp signalų nėra,  $p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j)$ , tuomet  $MI_{XY} = 0$  tada ir tik tada, kai  $X$  ir  $Y$  yra nepriklausomi. Priešingu atveju  $MI_{XY}$  bus teigiamas, įgyjantis didžiausią reikšmę esant vienodiems signalams (galima pakoreguoti, kad didžiausia reikšmė būtų lygi 1).  $MI$  yra simetrinis matas,  $MI_{XY} = MI_{YX}$ , todėl neteikia jokios informacijos, kuria kryptimi teka informacija.

$MI$  naudojamas tiriant ryšį tarp dirgiklio ir atsako į dirgiklį. Šiame kontekste, jeigu  $X$  yra dirgiklį nusakantis dydis, o  $Y$  nusako atsaką į dirgiklį, tuomet  $H_S(Y)$  yra atsako Shannono entropija. Sąlyginė entropija (angl. *conditional entropy*)  $H_S(Y|X)$  yra Shannono entropija, tik apibrėžta dydžiui  $Y$ , su sąlyga, kad dirgiklio reikšmės iš  $X$ . Tuomet  $MI$  nusakys atsako į dirgiklį atsitiktinumo sumažėjimą, kuris atsiranda dėl iš anksto žinomos informacijos apie dirgiklį  $X$ . Abipusė informacija gali būti apskaičiuojama pagal kitokią formulę:

$$MI_{XY} = H_S(Y) - H_S(Y|X) \quad (57)$$

arba  $MI_{XY} = H_S(X) + H_S(Y) - H_S(X, Y) = H_S(X) - H_S(X|Y)$ . Nors abipusės informacijos išraiška (56) nesudėtinga, tačiau realioms laiko eilutėms ją apskaičiuoti nėra labai paprasta. Norint apskaičiuoti tikimybes  $p$ , vienas siūlomų būdų yra histogramos sudarymas, tačiau čia susiduriama su tinkamų intervalų parinkimo problema – turi būti pakankamai duomenų kiekviename intervale, o intervalų ilgis nedidelis

(Quian Quiroga et al., 2002). Kitas siūlomas metodas paremtas (56) formule, histogramos nebrėžiamos, skaičiuojama  $k$ -artimiausių kaimynų entropija (Kraskov et al., 2004).

Pernešimo entropija (angl. *transfer entropy*) nėra simetrinis dydis, todėl  $T_{Y \rightarrow X}$  apskaičiuojama:

$$\begin{aligned} T_{Y \rightarrow X} &= - \sum_{x_{i+1}, x_i, y_i} p(x_i, x_{i+1}, y_i) \log_2 \frac{p(x_{i+1} | x_i, y_i)}{p(x_{i+1} | x_i)} \\ &= \sum_{x_{i+1}, x_i, y_i} p(x_i, x_{i+1}, y_i) \log_2 \frac{p(x_{i+1}, x_i, y_i) p(x_i)}{p(x_i, y_i) p(x_{i+1}, x_i)}, \end{aligned} \quad (58)$$

o  $T_{X \rightarrow Y}$  apskaičiuojama:

$$\begin{aligned} T_{X \rightarrow Y} &= - \sum_{y_{i+1}, y_i, x_i} p(y_{i+1}, x_i, y_i) \log_2 \frac{p(y_{i+1} | x_i, y_i)}{p(y_{i+1} | y_i)} \\ &= \sum_{y_{i+1}, y_i, x_i} p(y_{i+1}, x_i, y_i) \log_2 \frac{p(y_{i+1}, x_i, y_i) p(y_i)}{p(x_i, y_i) p(y_{i+1}, y_i)}. \end{aligned} \quad (59)$$

Pernešimo entropija  $T_{X \rightarrow Y}$  vertina, kiek sumažėja dydžio  $y_{i+1}$  atsitiktinumas, lyginant atvejus, kai  $y_{i+1}$  nusakomas panaudojus  $x_i$  ir  $y_i$  bei kai  $y_{i+1}$  nusakomas tik  $y_i$ , t. y. kaip pasikeičia  $y_{i+1}$  atsitiktinumas, papildomai panaudojant  $x_i$  duomenis.

Daugiamatė sąlyginė entropija naudojama širdies ir kraujagyslių bei širdies ir kvėpavimo sistemų reguliacijai vertinti (Faes et al., 2012). Abipusė informacija naudojama aritmiškiems kardiociklams išskirti ir nustatyti, kokiai rūšiai (straipsnyje tiriama keturios) aptikta aritmija priskiriama: tiriama, ar vieno širdies dūžio signalas normalus, ar atitinka vieną iš aritmijų. Abipusė informacija skaičiuojama tarp dydžių, kurių vienas nusako signalo prognozuojamą priskyrimą tam tikrai klasei, o kitas – tikrą turimo signalo klasę (Soufan et al., 2015). Xiong et al. (2011) aprašomas širdies ir kraujotakos sistemos modelis (suformuotos uždaros grandinės), paremtas elektrokardiografinio, kaip įėjimo duomenų, bei arterinio kraujo spaudimo, kaip išėjimo duomenų, signalų mėginiais. Siūlomas širdies ir kraujotakos modelis reaguoja į įvesties ir išieities duomenis ir adaptuojasi pagal juos, o abipusės informacijos funkcija naudojama modelio tinkamumui tirti (skaičiuojama tarp sumodeliuoto išėjimo signalo bei tikrojo) (Xiong et al., 2011).

*Dviejų procesų sinchronizacijos tyrimas. Fazių sinchronizacijos tyrimas.* Dviejų susietų netiesinių (užtriukšmintų ar chaotinių) osciliatorių fazės gali sinchronizuotis, net jei ir tų osciliatorių amplitudės lieka nekoreliuotos – tokia būseną vadinama fazių sinchronizacija (angl. *phase synchronization*). Sinchronizacija reiškia, kad galioja sukibusųjų fazių (angl. *phase locking*) sąlyga bet kokių laiko momentu  $t$ :

$$\varphi_{n,m}(t) = |n\varphi_x(t) - m\varphi_y(t)| \leq \text{const}; \quad (60)$$

čia  $\varphi_x(t)$  ir  $\varphi_y(t)$  – signalų fazės,  $\text{const}$  – konstanta. Kadangi realūs signalai dažnai yra užtriukšminti ir atsiranda atsitiktinių poslinkių per dydį  $2\pi$ , todėl sąlyga (60) tikrinama vertinant ciklinę santykinę fazę (angl. *cyclic relative phase*)  $\varphi'_{n,m}(t) = \varphi_{n,m}(t) \bmod 2\pi$  (santykinis fazių skirtumas aprėžtas intervale  $[0, 2\pi)$ ).

Vertinant dviejų signalų fazių sinchronizacijos laipsnį, galima paminėti tris pagrindinius įverčius. Pirmasis jų paremtas informacijos teorija ir sąlyginės tikimybės skaičiavimu. Norint apskaičiuoti sinchronizacijos įvertį, pirmiausia reikia rasti pasiskirstymą  $\eta$ . Sinchronizaciją  $n:m$  nusako skirstinys:

$$\eta = \phi_y \bmod 2\pi n \Big|_{\phi_x \bmod 2\pi m = \theta}; \quad (61)$$

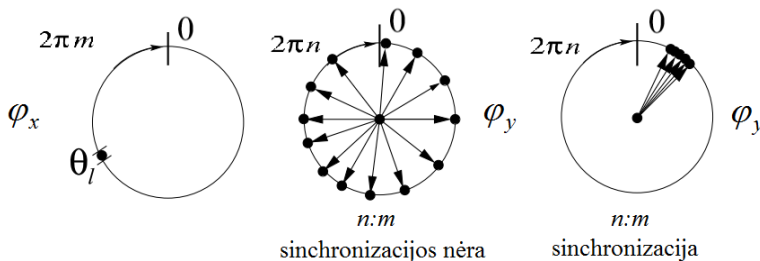
čia  $\phi_y \bmod 2\pi n$  žymi liekaną padalinus  $\phi_y$  iš  $2\pi n$ , kai  $n$  sveikasis skaičius. Skirstinyje fiksuojamos antrojo osciliatoriaus fazės, kai pirmasis įgyja fiksuotą fazę  $\phi_x \bmod 2\pi m = \theta$ . Abiejų osciliatorių fazės  $\varphi_x$  ir  $\varphi_y$  redukuojamos atitinkamai į  $[0, 2\pi m]$  ir  $[0, 2\pi n]$  intervalus (Rosenblum et al., 2001).

Norint sinchronizacijos įvertį apskaičiuoti realiai laiko eilutei, intervalas  $[0, 2\pi m]$  dalinamas į  $L$  atkarpų, kintamuoju  $\theta_l$  pažymimos  $\varphi_x \bmod 2\pi m$  reikšmės, kurios patenka į  $l$ -ąjį intervalą, o to intervalo visas taškų skaičius  $n_l$ . Tuomet apskaičiuojamos visos reikšmės  $\eta_{j,l}$ , kai  $j = 1, 2, \dots, n_l$ . Jeigu osciliatoriai nėra sinchronizuoti, tada  $\eta_{j,l}$  pasiskirsto tolygiai, o jeigu sinchronizuoti, tuomet skirstinys vienmodalinis (9 pav.). Tam įvertinti skaičiuojama  $l$ -ajam intervalui skaičiuojamas dydis:

$$r_l = \frac{1}{n_l} \sum_{j=1}^{n_l} e^{i(\eta_{j,l}/n)}; \quad (62)$$

čia  $i$  menamas vienetas,  $i^2 = -1$ . Visiškos sinchronizacijos atveju  $|r_l| = 1$ , o jeigu jokios priklausomybės nėra, tuomet  $r_l$  artimas nuliui. Siekiant pagerinti įvertį, randamas visų  $L$  intervalų įverčių vidurkis:

$$\lambda_{n,m} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |r_l|. \quad (63)$$



**9 pav.** Sinchronizacijos įvertis paremtas sąlygine tikimybe. Osciliatoriaus  $y$  fazė  $\varphi_y$ , redukuota į intervalą  $[0, 2\pi n]$ , stebima stroboskopiškai, t. y. kai osciliatoriaus  $x$  fazė  $\varphi_x$  patenka į sritį  $\theta_l$  iš intervalo  $[0, 2\pi m]$ . Jeigu sinchronizacijos nėra, tuomet stroboskopiškai stebima  $\varphi_y$ , pasiskirsčiusi po visą apskritimą, priešingu atveju svyruoja aplink konkrečią reikšmę. Suminis vektorius nurodys kiekybinį sinchronizacijos įvertį (adaptuota iš (Rosenblum et al., 2001))

Kiti du įverčiai aprašo ciklinę santykinę fazę  $\varphi'_{n,m}(t) = \varphi_{n,m}(t) \bmod 2\pi$ . Taigi antrasis įvertis vadinamas vidutine fazių koherencija (angl. *mean phase coherence*) arba sukibusių fazių įverčiu (angl. *phase locking value*):

$$\gamma_{n,m} = \sqrt{\left| \langle e^{i\varphi'_{n,m}(t)} \rangle \right|} = \sqrt{\langle \cos \varphi'_{n,m}(t) \rangle^2 + \langle \sin \varphi'_{n,m}(t) \rangle^2}; \quad (64)$$

čia operacija  $\langle \cdot \rangle$  žymi vidurkį laiko intervale. Šis dydis vertina, kaip santykinė fazė pasiskirsčiusi ant vienetinio apskritimo. Jeigu dviejų signalų fazės sinchronizuotos, tuomet santykinė fazė užims mažą vienetinio apskritimo dalį, o vidutinė fazių koherencija bus didelė. Priešingu atveju didelė santykinės fazės sklaida ant vienetinio apskritimo reiškia mažą vidutinę fazių koherenciją.

Trečiame įvirtyje nagrinėjamas  $\varphi'_{n,m}(t)$  skirstinys intervalą  $[0, 2\pi]$  dalijant į  $L$  atkarpų ir lyginant šį skirstinį su santykinių fazių skirstiniais, gautais iš dviejų nepriklausomų fazių laiko eilučių. Šis lyginimas atliekamas apskaičiuojant skirstinių Shannono entropijas:

$$\rho_{n,m} = \frac{I_{\max} - I_{\varphi}}{I_{\max}}; \quad (65)$$

čia  $I_{\varphi}$  – duotų fazių Shannono entropija,  $I_{\max}$  – nepriklausomų fazių Shannono entropija. Detaliau algoritmas aprašytas Pereda et al. (2005). Visi trys anksčiau minėti indeksai kinta nuo 0 (nekoreliuotų signalų) iki 1, esant stipriai fazių sinchronizacijai.

Fazių tyrimas dažnai taikomas vertinant širdies ir kvėpavimo sistemų sinchronizaciją (Kabir et al., 2011). Fazių sinchronizaciją tarp motinos ir vaisiaus širdies susitraukimų dažnio tiria Qianqian et al. (2013). Fazių sinchronizacijos tyrimas tarp EKG (širdies signalo) ir EEG (smegenų veiklos signalo) miego metu aprašytas Abdullah et al. (2012). Fazių sinchronizacijos tyrimas tarp EKG ir arterinio kraujo spaudimo aprašomas straipsnyje (Pachauri et al., 2012). Sinchronizaciją tarp širdies ir kraujagyslių sistemą aprašančių RR ir pulso keliavimo trukmės (angl. *pulse transit time* (PTT) laiko eilučių nagrinėja Liu et al. (2015).

*Sinchronizacija būsenų erdvėje.* Tegu duotos dvi sistemas apibūdinančios laiko eilutės  $x_1, \dots, x_n$  ir  $y_1, \dots, y_n$ . Suformuojami vektoriai  $\vec{x}_d = (x_d, \dots, x_{d-(m-1)\tau})$  ir  $\vec{y}_d = (y_d, \dots, y_{d-(m-1)\tau})$ , čia  $d = 1, 2, \dots, n$ ;  $m$  nusako dimensiją, o  $\tau$  – postūmį laike. Tegu vektorių  $\vec{x}_d$  ir  $\vec{y}_d$   $k$  artimiausių kaimynų laiko indeksai žymimi atitinkamai  $r_{d,j}$  ir  $s_{d,j}$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) (Pereda et al., 2005). Kiekvienam  $\vec{x}_d$  Euklidinio atstumo kvadrato vidurkis iki jo  $k$  artimiausių kaimynų apibrėžiamas:

$$R_d^{(k)}(X) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\vec{x}_d - \vec{x}_{r_{d,j}})^2, \quad (66)$$

o sąlyginis Euklidinio atstumo kvadrato vidurkis apibrėžiamas pakeičiant  $\vec{x}_d$   $k$  artimiausių kaimynų reikšmėmis  $\vec{x}_{s_{d,j}}$  (kai indeksai  $s_{d,j}$  žymi  $\vec{y}_d$  artimiausių kaimynų lai-

ko indeksus):

$$R_d^{(k)}(X|Y) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\vec{x}_d - \vec{x}_{s_{d,j}})^2. \quad (67)$$

Tarpusavio priklausomybės matas apibrėžiamas:

$$S^{(k)}(X|Y) = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^n \frac{R_d^{(k)}(X)}{R_d^{(k)}(X|Y)}. \quad (68)$$

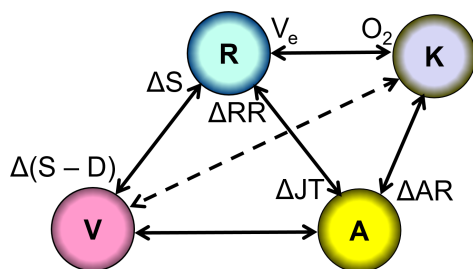
Artimos nuliui reikšmės nusako nepriklausomumą tarp  $X$  ir  $Y$ , o įgyjama didžiausia 1 reikšmė reiškia identišką sistemas. Iš šio dydžio seka kitas netiesinės tarpusavio priklausomybės matas:

$$H^{(k)}(X|Y) = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^n \log_2 \frac{R_d^{(k)}(X)}{R_d^{(k)}(X|Y)}. \quad (69)$$

Įvertis  $H^{(k)}(X|Y)$  artimas nuliui, kai  $X$  ir  $Y$  nepriklausomi, ir teigiamas, kai mažas atstumas tarp  $Y$  komponentių lemia mažus atstumus tarp atitinkamų  $X$  komponentių. Įvertis  $H$  ne toks jautrus triukšmui ir lengviau interpretuojamas nei įvertis  $S$ . Atvirktinės priklausomybės  $S(Y|X)$  ir  $H(Y|X)$  nėra lygios, atitinkamai  $S(X|Y)$  ir  $H(X|Y)$ , todėl galima vertinti informacijos kryptingumą. Pavyzdžiui,  $H(X|Y) > H(Y|X)$ , jeigu iš  $X$  išplaukia  $Y$ .

*Matricine analize paremti metodai.* Nors daug uždavinių medicinoje išspręsta remiantis tiesinių sistemų teorija, tačiau yra nemažai sudėtingų biologinių fenomenų, kurių paaiškinti ši teorija nėra pajėgi (Higgins, 2002). Todėl per pastarąjį šimtmetį netiesiniai metodai ir modeliai padeda suvokti, paaiškinti bei prognozuoti biologinius reiškinius tiek fiziologams, tiek medikams. Iš netiesinių metodų plačiai taikoma Liapunovo eksponentė (Goshvarpour et al., 2012; Ubeyli, 2009; Ubeyli et al., 2004), koreliacinės ir fraktalinės dimensijos (Mishra et al., 2010; Acharya et al., 2005; Antanavičius et al., 2008), entropijos (Aktaruzzaman et al., 2014; Goshvarpour et al., 2012; Graff et al., 2015; Kong et al., 2011; Singh et al., 2010; Xie et al., 2011). Šie metodai išsamiai aprašyti ankstesniuose skyriuose.

Greta klasikinių anksčiau minėtų netiesinių metodų buvo pasiūlyta matricių struktūrine analize grįsta metodologija. Ši metodologija paremta žmogaus organizmo, kaip kompleksinės sistemos, modeliu (10 pav.), kurį pristatė Vainoras (1996). Žmogaus, kaip kompleksinės sistemos, modelis buvo vystomas remiantis dar 1543 m. pristatyta A. Vezalijaus<sup>19</sup> koncepcija. Vesalius (1543) įvardijo žmogaus organizmą sudarančias sistemas, kurios pasižymi išskirtinėmis savybėmis. Šios sistemos apima visą žmogaus organizmą ir vadinamos holistinėmis: griaučių ir raumenų sistema (vykdančioji (V)), širdies ir kraujagyslių sistema (aprūpinančioji (A)) bei nervų sistema (reguliacinė (R)) (11 pav.). Be šių trijų sistemų, buvo paminėta kvėpavimo sistema. Visi žmogaus organizme vykstantys pokyčiai galimi dėl minėtų holistinių sistemų bei jų sąveikos.

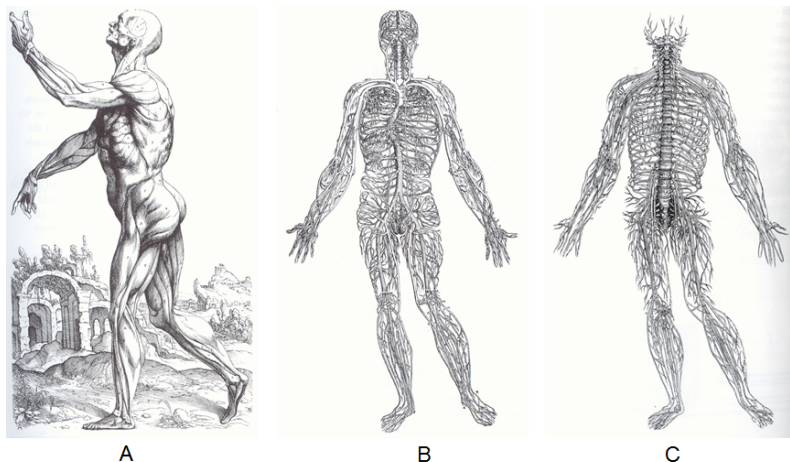


**10 pav.** Žmogaus organizmo, kaip kompleksinės sistemos, modelis (Vainoras, 1996)

Ryšius tarp kelių žmogaus organizmo sistemų ir jų atliekamų funkcijų galima nusakyti keletu būdų. Sudarant 10 pav. modelį buvo pasirinkti parametrai, kuriuos galima pamatuoti neinvaziniu būdu: S – sistolinis arterinio kraujo spaudimas, D – diastolinis arterinio kraujo spaudimas, RR – laiko intervalas tarp dviejų širdies dūžių, JT – laiko intervalas elektrokardiogramoje nuo taško J iki T bangos pabaigos,  $V_e$  – įkvėpto oro tūris per minutę,  $O_2$  – suvartoto deguonies tūris per minutę, AR – elektrokardiogramos R dantelio amplitudė,  $\Delta$  – reiškia tam tikro parametro pokytį.

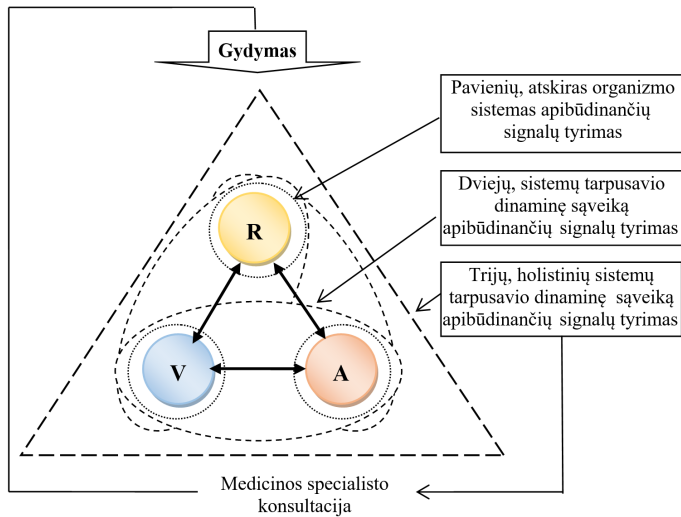
Keičiantis aplinkai ar jos poveikiui, žmogaus organizmas geba prisitaikyti. Adaptuojantis organizmui, visos minėtos trys sistemos kinta kartu (nebūtinai vienodai). Holistinių sistemų visuma žmogaus organizme ir jų funkcijos bei tarpusavio sąveikos yra puikus kompleksinės sistemos pavyzdys (Patton, 2015; Poderys et al., 2015; Vainoras, 2002).

Remiantis 10 pav. pateiktu modeliu, žmogaus organizmo būklės analizę galima atlikti keliais būdais (12 pav.). Pirmiausia galima atlikti pavienių organizmo sistemų



**11 pav.** Vezalijaus XVI amžiuje išskirtos holistinės žmogaus sistemos: griaučiai ir raumenynas (A dalis); širdies ir kraujagyslių (B dalis) bei nervų sistema (C dalis) (Vesalius, 1543)

<sup>19</sup> Andreas Vesalius (1514–1564) – medikas, anatomas bei knygų apie žmogaus anatomiją autorius.



12 pav. Žmogaus organizmo būklės vertinimo schema (Berškienė, 2009)

būklės analizę, ignoruojant bet kokias tarpusavio sąveikas. Šiuo atveju tiriama vienas signalas. Siekiant įvertinti dviejų organizmo sistemų būklę, tiriamos šių sistemų dinaminės sąsajos – tarpusavio sąveika, kitimas viena kitos atžvilgiu. Analizei atlikti naudojami du sistemas atitinkantys signalai, vertinamas jų tarpusavio ryšys. Visų trijų holistinių sistemų vertinimas atliekamas per trijų sistemas atitinkančių signalų tarpusavio sąsajų tyrimą. Išsamiau panagrinėkime dviejų sistemų sąveiką.

Tegu duoti sinchroniškai registruoti skaitmeniniai signalai  $y_0, y_1, \dots$  ir  $z_0, z_1, \dots$ . Panaudojant po tris abiejų signalų taškus, suformuojama matrica  $\mathbf{X}_n$ :

$$\mathbf{X}_n := \begin{bmatrix} y_n & y_{n-1} - z_{n-1} \\ y_{n+1} - z_{n+1} & z_n \end{bmatrix}; \quad (70)$$

čia  $n = 1, 2, \dots$ . Dviejų signalų sąsajos vertinamos nagrinėjant (70) matricių struktūrą. Plačiausiai nagrinėti ir taikyti matricių diskriminantai:

$$\text{dsk } \mathbf{X}_n = (y_n - z_n)^2 + 4(y_{n-1} - z_{n-1})(y_{n+1} - z_{n+1}). \quad (71)$$

Žmogaus organizmo sistemų pokyčių vertinimas analizuojant dviejų EKG signalų ryšio dinamiką dažnai taikomas tiek tiriant sveikų asmenų funkcinę būklę, tiek ligonių, sergančių išemine širdies liga, funkcinis ypatumus bei sportininkų adaptacijos greitį, padidėjus fiziniam krūviui (Berskiene et al., 2009; Berškienė, 2009; Venskaitytė et al., 2011; Muntianaitė-Dulkinienė et al., 2010). Elektrokardiografinių signalų parametru dinamines sąsajas, pagrįstas struktūriniu matricių analize, mokslininkai tyrinėja nuo 2008 m. (Venskaitytė et al., 2011; Kriaunavičienė et al., 2011; Muntianaitė-Dulkinienė et al., 2010; Muntianaitė-Dulkinienė et al., 2009).

Elektrokardiografinio signalo tarpparametrinių dinaminį sąsajų vertinimas naudojant antros eilės matricos diskriminantą buvo pritaikytas atletų fizinei būklei vertinti,

kai buvo taikomas krūvio mėginio testas (Venskaityte et al., 2009). Venskaitytė greta diskriminantų naudojo ir įprastines metodikas, tokias kaip RR ir JT parametrų santykio analizė, širdies susitraukimų dažnio stebėjimas ir kt. Liapunovo eksponentės buvo panaudotos tiems patiems atletams norint nustatyti širdies ir kraujotakos sistemos pakitimus (Poderys et al., 2015). Tarpparametrinių dinaminių sąsajų kitimas stebint pacientus prieš ir po fizioterapinės šalčio kameros terapijos aptartas magistro darbe (Kriaunavičienė et al., 2011). Matricų diskriminantai skaičiuojami ir siekiant įvertinti sąveikas tarp dviejų artimai susijusių žmonių (Bikulciene et al., 2009). Atvirkštinis diskriminantui dydis buvo pristatytas Berškienės (Berškienė, 2009; Berskiene et al., 2009). Berškienė diskriminantų kitimą lygino su koreliacinės dimensijos bei alometrinio koeficiento įverčiais veloergometriniu krūvio metu (Berskiene et al., 2008).

Diskriminantų sekų teikiama informacija įvairių tiriamųjų EKG duomenims lyginama su klasikiniiais metodais, tokiais kaip EKG morfologijos bei EKG parametrų santykio kitimas (Muntianaitė-Dulkinienė et al., 2009), alometrinis koeficientas<sup>20</sup> (Muntianaitė-Dulkinienė et al., 2010), Kolmogorovo koreliacinė dimensija (Navickas et al., 2005), fraktalinė dimensija (Vainoras et al., 2008). Šliupaitė su bendraautoriais EKG signalo pokyčius tyrė taikydama apytikslę entropiją ir Hankelio matricas (Šliupaitė et al., 2009).

Diskriminanto sekų dinamikos tyrimas panaudotas greta tradicinių anaerobinio slenkščio<sup>21</sup> tyrimo metodikų Bertašiūtės disertaciniame darbe (Bertašiūtė, 2015). Minėtame darbe, be diskriminantų, buvo lyginami elektrokardiografinių RR, JT, QRS ir ST segmentų vidurkiai įvairiais tyrimo etapais. Darbe taip pat nagrinėjama sistolinio ir diastolinio kraujo spaudimo (mmHG) vidurkių, santykinio pulsinio spaudimo vidurkių, RER vidurkių, deguonies pulso (ml/tvinksnį) vidurkių, kvėpuojamojo tūrio (l/min.) vidurkių bei kvėpavimo dažnio (kartai/min.) kaita skirtingo pajėgumo grupėse bei tyrimų etapuose.

Nors matricine struktūrine analize paremta metodika atliekant elektrokardiografinių parametrų sąsajų tyrimus naudojama jau beveik dešimtmetį, tačiau ankstesniuose darbuose apsiribojama tik matricų diskriminantų nagrinėjimu. Šio darbo vienas iš tikslų yra praplėsti ir patyrinėti matricų analize paremtų charakteristikų aibę.

---

<sup>20</sup> Alometrinis koeficientas nagrinėja santykį tarp dydžio ir formos. Praktinėje biologijoje šis koeficientas skaičiuojamas siekiant įvertinti skirtingų organizmų ar juos sudarančių dalių augimo tempus.

<sup>21</sup> Anaerobinis slenkstis (angl. *anaerobic threshold*) – tai taškas, kai širdis ir plaučiai nebespėja raumenims tiekti pakankamai deguonies, todėl juose ima kauptis pieno rūgštis. Susidariusi pieno rūgštis labai greitai sukelia nuovargį. Šis slenkstis yra skirtingas kiekvienam žmogui ir priklauso nuo fizinio pasirengimo (Solberg et al., 2005).



## 2. ANTROS EILĖS MATRICŲ STRUKTŪRINIAI DĖSTINIAI

Šiame skyriuje aptariami apibrėžimai, teoremos, išvados bei kiti svarbūs šiame darbe naudojami sąryšiai, taip pat jų įrodymai bei pavyzdžiai. Dalis teorijos yra surinkta iš literatūros šaltinių, kita dalis – originali, gauta disertacinio tyrimo metu. Šiame skyriuje aptariamos matricos idempotentai ir nulpotentai bei jų tiesiniais dariniais išdėstomos antros eilės matricos, taip pat aptariamos ne mažiau svarbios šių matricų parametrinės išraiškos.

### 2.1. Pagrindiniai antros eilės kvadratinių matricų apibrėžimai bei žymėjimai

Šiame skyrelyje pateikiamos matricų teorijoje dažnai sutinkamos sąvokos, teiginiai, pažymėjimai (Rao et al., 2000; Bernstein, 2009). Tegul duota antros eilės kvadratinė matrica:

$$\mathbf{X} := \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}; \quad (72)$$

čia  $x_{11}, \dots, x_{22} \in \mathbb{C}$ . Matricos tikrinės reikšmės  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  yra lygties sprendiniai:

$$\begin{vmatrix} x_{11} - \lambda & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (73)$$

Perrašę (73) sąryšį, gauname tokią charakteringą lygtį:

$$\lambda^2 - (x_{11} + x_{22})\lambda + (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) = 0. \quad (74)$$

Matricų teorijoje naudojami pėdsako:

$$\text{Tr } \mathbf{X} := x_{11} + x_{22}, \quad (75)$$

determinanto:

$$\det \mathbf{X} := x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \quad (76)$$

bei diskriminanto terminai:

$$\text{dsk } \mathbf{X} := (x_{11} - x_{22})^2 + 4x_{12}x_{21}. \quad (77)$$

Panaudoję pažymėjimus (75) ir (76), gauname  $\text{dsk } \mathbf{X} = (\text{Tr } \mathbf{X})^2 - 4 \det \mathbf{X}$ . Žinoma, kad matricai  $\mathbf{X}$  teisingos tokios lygybės  $\text{Tr } \mathbf{X} = \lambda_1 + \lambda_2$  ir  $\text{dsk } \mathbf{X} = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ . Tada tikrinės matricos reikšmės  $\lambda_1$  ir  $\lambda_2$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\text{Tr } \mathbf{X} \pm \sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}}). \quad (78)$$

Panaudojus ankstesnes išraiškas, (74) lygybė užrašoma:

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0. \quad (79)$$

Remiantis Keilio ir Hamiltono teorema, gaunamas antros eilės matricoms galiojantis sąryšis:

$$\mathbf{X}^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{X} + \lambda_1 \cdot \lambda_2\mathbf{I} = \mathbf{\Theta}; \quad (80)$$

čia  $\mathbf{\Theta} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{I} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

## 2.2. Antros eilės idempotentai ir nulpotentai

Šiame skyrelyje pateikiami rečiau sutinkami arba specifinėse srityse taikymą randantys matricų teorijos elementai; aptariamos specialios matricos – idempotentai ir nulpotentai (Bernstein, 2009; Horn et al., 2012). Skyriuje aptartas savybes bei jų įrodymus galima rasti literatūroje.

### 2.2.1. Antros eilės idempotentų ir nulpotentų savybės

**1 apibrėžimas.** Kvadratinė matrica  $\mathbf{D}$  vadinama *idempotentu*, jeigu galioja sąryšiai

$$(i) \quad \det \mathbf{D} = 0, \quad (81)$$

$$(ii) \quad \text{Tr } \mathbf{D} = 1. \quad (82)$$

**1 savybė.** Tegul matrica  $\mathbf{D}$  tenkina sąryšius  $\det \mathbf{D} = 0$  ir  $\text{Tr } \mathbf{D} = 1$ , tada matricai  $\mathbf{D}$  galioja lygybė  $\mathbf{D}^2 = \mathbf{D}$ .

**Įrodymas.** Tegul  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$ , pėdsakas  $\text{Tr } \mathbf{D} = d_{11} + d_{22} = 1$ , o determinantas  $\det \mathbf{D} = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = 0$ , tada  $d_{11}d_{22} = d_{12}d_{21}$ , Taigi:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 &= \begin{bmatrix} d_{11}^2 + d_{12}d_{21} & d_{11}d_{12} + d_{12}d_{22} \\ d_{11}d_{21} + d_{21}d_{22} & d_{12}d_{21} + d_{22}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_{11}(d_{11} + d_{22}) & d_{12}(d_{11} + d_{22}) \\ d_{21}(d_{11} + d_{22}) & d_{22}(d_{11} + d_{22}) \end{bmatrix} \\ &= (d_{11} + d_{22})^2 \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{D}. \end{aligned}$$

□

**Pastaba.** Literatūroje pateikiama keletas idempotento apibrėžimų. Dažniausiai literatūroje idempotentas įvardinamas kaip matrica, tenkinanti sąryšį  $\mathbf{D}^2 = \mathbf{D}$ . Šiame darbe naudojamas apibrėžimas nuo klasikinio skiriasi tik tuo, kad matricos  $\mathbf{I}$  ir  $\mathbf{\Theta}$  idempotentais būti negali.

**2 savybė (Idempotentų savybės).** Idempotentai tenkina sąryšius, kurių įrodymus galima rasti literatūroje:

- (i)  $\text{Tr } \mathbf{D} = \text{rank } \mathbf{D}$ . Ši savybė buvo įrodyta jau seniai, tačiau net keletas daug paprastesnių įrodymų pateikta pastaraisiais metais (Baksalary et al., 2010; Wright, 2011).

(ii)  $\mathbf{D}$  tikrinės reikšmės yra 0 ir 1,

(iii) Jeigu  $\mathbf{D}$  yra idempotentas, tai ir  $\mathbf{I} - \mathbf{D}$  yra idempotentas.

**2 apibrėžimas.** Idempotentai  $\mathbf{D}$  ir  $\bar{\mathbf{D}}$ , tenkinantys sąryšį  $\mathbf{D} + \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{I}$ , vadinami *jungtiniais idempotentais*.

**3 savybė.** Tegul matricos  $\mathbf{X}$  tikrinės reikšmės  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , tada dviejų ortogonalinių idempotentų  $\mathbf{D}_k$  išraiškos yra:

$$\mathbf{D}_k := \frac{1}{\lambda_k - \lambda_l} (\mathbf{X} - \lambda_l \mathbf{I}); \quad (83)$$

čia  $k, l = 1, 2$  ir  $k \neq l$ .

**Įrodymas.** Tai, jog  $\mathbf{D}_k$  matricos yra idempotentai, įrodoma tiesiogiai. Tegul  $k = 1$ ,  $l = 2$ , tada, pasinaudoję Keilio ir Hamiltono teorema, iš (83) sąryšio gauname:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1^2 &= \left( \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\mathbf{X} - \lambda_2 \mathbf{I}) \right)^2 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} (\mathbf{X}^2 - 2\lambda_2 \mathbf{X} + \lambda_2^2 \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left( (\mathbf{X}^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{X} + \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{I}) - \lambda_2 \mathbf{X} + \lambda_1 \mathbf{X} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2^2 \mathbf{I} - \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{I} \right) \\ &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left( (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{X} - (\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_2 \mathbf{I} \right) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\mathbf{X} - \lambda_2 \mathbf{I}) \\ &= \mathbf{D}_1. \end{aligned}$$

Analogiškai įrodoma, kad  $\mathbf{D}_2^2 = \mathbf{D}_2$ .

Matricos  $\mathbf{D}_1$  ir  $\mathbf{D}_2$  ortogonalios, nes

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\mathbf{X} - \lambda_2 \mathbf{I}) \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mathbf{X} - \lambda_1 \mathbf{I}) \\ &= -\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} (\mathbf{X}^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{X} + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \mathbf{I}) = \mathbf{O}. \end{aligned}$$

Analogiškai įrodoma, kad  $\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{O}$ . □

**Pastaba.** (83) išraiška gaunami idempotentai yra jungtiniai.

**1 pavyzdys.** Tarkime, duota matrica, kurios tikrinės reikšmės  $\lambda_1, \lambda_2$ , tuomet matricos dėstinys

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

čia  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  ir  $\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  yra jungtiniai tarpusavyje ortogonalūs idempotentai.

**3 apibrėžimas.** Kvadratinė matrica  $\mathbf{N}$  vadinama *nulpotentu*, jeigu galioja:

$$(i) \quad \det \mathbf{N} = 0, \quad (84)$$

$$(ii) \quad \text{Tr} \mathbf{N} = 0. \quad (85)$$

**4 savybė.** Tegul matrica  $\mathbf{N}$  tenkina sąryšius  $\det \mathbf{N} = 0$  ir  $\text{Tr } \mathbf{N} = 0$ , tada matricai  $\mathbf{N}$  galioja lygybė  $\mathbf{N}^2 = \Theta$ .

**Įrodymas.** Tegul  $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix}$ , pėdsakas  $\text{Tr } \mathbf{N} = n_{11} + n_{22} = 0$ , o determinantas  $\det \mathbf{N} = n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} = 0$ , tada  $n_{11}n_{22} = n_{12}n_{21}$ . Taigi

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^2 &= \begin{bmatrix} n_{11}^2 + n_{12}n_{21} & n_{11}n_{12} + n_{12}n_{22} \\ n_{11}n_{21} + n_{21}n_{22} & n_{12}n_{21} + n_{22}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_{11}(n_{11} + n_{22}) & n_{12}(n_{11} + n_{22}) \\ n_{21}(n_{11} + n_{22}) & n_{22}(n_{11} + n_{22}) \end{bmatrix} \\ &= (n_{11} + n_{22})^2 \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \Theta. \end{aligned}$$

□

**4 apibrėžimas.** Nulpotentai  $\mathbf{N}$  ir  $c\mathbf{N}$ , kai  $c \in \mathbb{C}$ , vadinami *panašiais nulpotentais*.

**Pastaba.** Bet koks nulpotentas  $\mathbf{N}$  ir nulpotentas  $\Theta$  yra panašūs nulpotentai.

**5 savybė.** Tegul matricos  $\mathbf{X}$  tikrinės reikšmės  $\lambda_1$  ir  $\lambda_2$  sutampa, t. y.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ , tada nulpotento  $\mathbf{N}$  išraiška yra:

$$\mathbf{N} := \mathbf{X} - \lambda_0 \mathbf{I}. \quad (86)$$

**Įrodymas.** Remdamiesi Keilio ir Hamiltono teorema, gauname:

$$\mathbf{N}^2 = (\mathbf{X} - \lambda_0 \mathbf{I})^2 = \mathbf{X}^2 - 2\lambda_0 \mathbf{X} + \lambda_0^2 \mathbf{I} = \Theta.$$

□

**2 pavyzdys.** Matricos  $\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  ir  $\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  yra nulpotentai.  $\mathbf{N}_1$  ir  $\mathbf{N}_2$  nėra panašūs nulpotentai.

### 2.2.2. Antros eilės idempotentų ir nulpotentų aibė

Remiantis 1 apibrėžimu, idempotentas – tai matrica, kuriai galioja sąryšiai (81) ir (82), todėl nesunkiai randama idempotentų aibė. Analogiškai, pasinaudojus nulpotento apibrėžimu, randama antros eilės nulpotentų aibė.

**6 savybė.** Antros eilės idempotentas užrašomas išraiška:

$$\left\{ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1-\alpha \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0 \right\}. \quad (87)$$

**Įrodymas.** Kadangi  $\det \mathbf{D} = 0$  ir  $\text{Tr } \mathbf{D} = 1$ , tai, pažymėjus  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$ , gaunama tik dviejų lygčių sistema

$$\begin{cases} d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} = 0, \\ d_{11} + d_{22} = 1. \end{cases}$$

Kai  $d_{12} \neq 0$ , gaunama idempotentų aibė, nusakyta (87) išraiška. Kai  $d_{12} = 0$ , tada  $d_{11}d_{22} = 0$ , vadinasi, kad galiotų (81) sąryšis, turi būti  $d_{11} = 0$  arba  $d_{22} = 0$ , analogiškai, kad galiotų (82) sąryšis, apskaičiuojami likę matricos elementai ir gaunami idempotentai  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  ir  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Pastarieji idempotentai taip pat gaunami skaičiuojant ribas, pateiktas žemiau esančioje pastaboje.  $\square$

**Pastaba.** Pastebėsime, kad čia galimi tokie sąlyginiai ribiniai perėjimai:

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 1 \\ \beta \rightarrow 0 \\ \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} \rightarrow 0\right)}} \mathbf{D} = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 1 \\ \beta \rightarrow 0 \\ \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} \rightarrow 0\right)}} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0 \\ \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} \rightarrow 0\right)}} \mathbf{D} = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0 \\ \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} \rightarrow 0\right)}} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**7 savybė.** Antros eilės nulpotentas užrašomas išraiška

$$\left\{ \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0 \right\} \quad (88)$$

arba  $\{ \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{C} \}$ .

**Įrodymas.** Kadangi nulpotentams galioja (84) ir (85) sąryšiai, tai, pažymėjus  $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix}$ , gaunama lygčių sistema:

$$\begin{cases} n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} = 0, \\ n_{11} + n_{22} = 0. \end{cases}$$

Kai  $n_{12} \neq 0$ , gaunama nulpotentų aibė, užrašoma (88) sąryšiu. Kai  $n_{12} = 0$ , tuomet  $n_{11}n_{22} = 0$ , o  $n_{21}$  gali būti bet koks skaičius. Tuomet gaunama nulpotento išraiška  $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ ,  $b \in \mathbb{C}$ . Pastarasis nulpotentas taip pat gaunamas skaičiuojant (88) išraiškos nulpotento ribą, pateiktą pastaboje.  $\square$

**Pastaba.** Pastebėsime, kad čia galimi tokie sąlyginiai ribiniai perėjimai:

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0 \\ \left(\frac{-\alpha^2}{\beta} \rightarrow b\right)}} \mathbf{N} = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0 \\ \left(\frac{-\alpha^2}{\beta} \rightarrow b\right)}} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix};$$

čia  $b \in \mathbb{C}$  – konstanta.

### 2.3. Antros eilės matricų dėstiniai

Šiame skyriuje panaudojamas Bernšteino matricų skaidymo principas į matricas eilutes ir matricas stulpelius (Bernstein, 2009). Pritaikius Bernšteino skaidinius, suformuojama originali keturių antros eilės matricų idempotentų bei nulpotentų sistema ir pateikiamas *specialus* trijų komponentių matricos dėstinys. Specialus dėstinys pritaikomas matricą keliant laipsniu.

#### 2.3.1. Matricos $\mathbf{G}$ sugeneruota idempotentų ir nulpotentų sistema

Tegul duota  $2 \times 2$  formato neišsigimusi matrica:

$$\mathbf{G} := \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}; \quad (89)$$

čia  $g_{11}, \dots, g_{22} \in \mathbb{C}$ . Tada egzistuoja jai atvirkštinė  $\mathbf{Y} = \mathbf{G}^{-1}$ :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}. \quad (90)$$

Matricos (89) bei (90) išskaidomos naudojant Bernšteino pasiūlytą skaidinį: matrica  $\mathbf{G}$  išskaidoma į matricas stulpelius, o matrica  $\mathbf{Y}$  – į matricas eilutes (Bernstein, 2009):

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2] = \left[ \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} g_{12} \\ g_{22} \end{bmatrix} \right], \quad (91)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \right]. \quad (92)$$

Matricoms  $\mathbf{Y}_k$  ir  $\mathbf{G}_l$  galioja sąryšiai:

$$\mathbf{Y}_k \mathbf{G}_l = [y_{k1} \quad y_{k2}] \begin{bmatrix} g_{1l} \\ g_{2l} \end{bmatrix} = [\sigma_{kl}] = \begin{cases} 0, & \text{kai } k \neq l, \\ 1, & \text{kai } k = l, \end{cases} \quad (93)$$

čia  $k, l = 1, 2$ , o  $\mathbf{Y} = \mathbf{G}^{-1}$  ir  $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{I}$ .

Atliekant skaičiavimus buvo pastebėta, kad, sudauginus matricų  $\mathbf{G}_k$  ir  $\mathbf{Y}_l$  poras, suformuojamos keturios matricos, iš kurių yra du idempotentai ir du nulpotentai:

$$\mathbf{R}_{kl} = \mathbf{G}_k \mathbf{Y}_l = \begin{bmatrix} g_{1k} \\ g_{2k} \end{bmatrix} [y_{l1} \quad y_{l2}]; \quad (94)$$

čia  $k, l = 1, 2$ . Gaunami du jungtiniai ortogonalūs idempotentai  $\mathbf{R}_{11} = \mathbf{D}$  ir  $\mathbf{R}_{22} = \overline{\mathbf{D}}$  bei du nulpotentai  $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{N}_{12}$  ir  $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{N}_{21}$ .

Antros eilės matricos  $\mathbf{G}$  sugeneruotų nulpotentų ir idempotentų sandaugos pateikiamos 1 lentelėje.

**1 lentelė.** Matricos  $\mathbf{G}$  sugeneruotų idempotentų ir nulpotentų daugybos lentelė

$\cdot$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{D}$	$\overline{\mathbf{D}}$	$\mathbf{N}_{12}$	$\mathbf{N}_{21}$	$\Theta$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{D}$	$\overline{\mathbf{D}}$	$\mathbf{N}_{12}$	$\mathbf{N}_{21}$	$\Theta$
$\mathbf{D}$	$\mathbf{D}$	$\mathbf{D}$	$\Theta$	$\mathbf{N}_{12}$	$\Theta$	$\Theta$
$\overline{\mathbf{D}}$	$\overline{\mathbf{D}}$	$\Theta$	$\overline{\mathbf{D}}$	$\Theta$	$\mathbf{N}_{21}$	$\Theta$
$\mathbf{N}_{12}$	$\mathbf{N}_{12}$	$\Theta$	$\mathbf{N}_{12}$	$\Theta$	$\mathbf{D}$	$\Theta$
$\mathbf{N}_{21}$	$\mathbf{N}_{21}$	$\mathbf{N}_{21}$	$\Theta$	$\overline{\mathbf{D}}$	$\Theta$	$\Theta$
$\Theta$	$\Theta$	$\Theta$	$\Theta$	$\Theta$	$\Theta$	$\Theta$

**Pastaba.** Galioja sąryšiai:

(i)

$$(\mathbf{N}_{12} + \mathbf{N}_{21})^2 = \mathbf{I}. \quad (95)$$

**Įrodymas.** Sudauginkime matricas

$$(\mathbf{N}_{12} + \mathbf{N}_{21})(\mathbf{N}_{12} + \mathbf{N}_{21}) = \Theta + \mathbf{D} + \overline{\mathbf{D}} + \Theta = \mathbf{I}.$$

□

(ii)

$$\text{rank}(\mathbf{D} + a\mathbf{N}_{12}) = 1; \quad (96)$$

čia  $a \in \mathbb{C}$ .

**Įrodymas.** Lygybė (96) išplaukia iš matricos rango savybių:

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{D} + a\mathbf{N}_{12}) &= \text{rank}(\mathbf{G}_1\mathbf{Y}_1 + a\mathbf{G}_1\mathbf{Y}_2) \\ &= \text{rank}(\mathbf{G}_1(\mathbf{Y}_1 + a\mathbf{Y}_2)) \\ &= \text{rank}\left(\begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} + ay_{21} & y_{12} + ay_{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{rank}\left(\begin{bmatrix} g_{11}(y_{11} + ay_{21}) & g_{11}(y_{12} + ay_{22}) \\ g_{21}(y_{11} + ay_{21}) & g_{21}(y_{12} + ay_{22}) \end{bmatrix}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

nes matricos eilutės proporcingos. Teisingos ir panašios lygybės, kurių įrodymas analogiškas:

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{D} + a\mathbf{N}_{21}) &= 1, \\ \text{rank}(\overline{\mathbf{D}} + a\mathbf{N}_{12}) &= 1, \\ \text{rank}(\overline{\mathbf{D}} + a\mathbf{N}_{21}) &= 1. \end{aligned}$$

□

(iii)

$$\text{rank}(\mathbf{N}_{12} + \mathbf{N}_{21}) = 2. \quad (97)$$

**Irodymas.** Matricas galima perrašyti:

$$\begin{aligned} & \text{rank}(\mathbf{N}_{12} + \mathbf{N}_{21}) \\ &= \text{rank}(\mathbf{G}_1 \mathbf{Y}_2 + \mathbf{G}_2 \mathbf{Y}_1) \\ &= \text{rank} \left( \frac{1}{\det \mathbf{G}} \begin{bmatrix} g_{12}g_{22} - g_{11}g_{21} & g_{11}^2 - g_{12}^2 \\ g_{22}^2 - g_{21}^2 & g_{11}g_{21} - g_{12}g_{22} \end{bmatrix} \right) = 2, \end{aligned}$$

nes matricos eilutės nėra proporcingos. □

(iv)

$$\text{rank}(\mathbf{D} + \bar{\mathbf{D}}) = 2.$$

**Irodymas.** Matricos rangas lygus 2, nes  $\mathbf{D} + \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{I}$ . □

**Pastaba.** Prisiminsime, kad idempotento rangas lygus 1, o nulpotento rangas mažesnis arba lygus 1.

**5 apibrėžimas.** Matricos  $\mathbf{G}$  sugeneruota idempotentų ir nulpotentų sistema  $S_{\mathbf{G}}$  vadinama matricų aibe:

$$\langle \mathbf{G}, \mathbf{G}^{-1} \rangle \Rightarrow \{\mathbf{D}, \bar{\mathbf{D}}, \mathbf{N}_{12}, \mathbf{N}_{21}\} = S_{\mathbf{G}}. \quad (98)$$

**3 pavyzdys.** Duotai matricai  $\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  sugeneruoti idempotentų ir nulpotentų sistemą.

Pirmiausia apskaičiuojama matrica  $\mathbf{Y} = \mathbf{G}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  ir sugeneruojama sistema:

$$S_{\mathbf{G}} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (99)$$

Bet kokią matricą  $\mathbf{X} := \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$  galima užrašyti kaip sistemos  $S_{\mathbf{G}}$  dviejų idempotentų ir dviejų nulpotentų tiesinį darinį:

$$\mathbf{X}_{\mathbf{G}} := c_{11}\mathbf{D} + c_{12}\mathbf{N}_{12} + c_{21}\mathbf{N}_{21} + c_{22}\bar{\mathbf{D}}; \quad (100)$$

čia  $\mathbf{G}$  – laisvai pasirenkama neišsigimusi generuojanti matrica.

**4 pavyzdys.** Išdėstykime matricą  $\mathbf{X} := \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$  sistemos elementais (99):

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22})\mathbf{D} + \frac{1}{2}(x_{11} - x_{12} + x_{21} - x_{22})\mathbf{N}_{12} \\ &+ \frac{1}{2}(x_{11} + x_{12} - x_{21} - x_{22})\mathbf{N}_{21} + \frac{1}{2}(x_{11} - x_{12} - x_{21} + x_{22})\bar{\mathbf{D}}. \end{aligned}$$



### 2.3.2. Elementarūs ir sudėtiniai idempotentai bei jų parametrinės išraiškos

Šiame skyrelyje aptariamos idempotentų rūšys, priklausomai nuo jų struktūros.

**6 apibrėžimas.** Idempotentas  $\widetilde{\mathbf{D}}$  vadinamas *sudėtinu*, jei jis gali būti užrašytas tiesiniu dariniu  $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + c\mathbf{N}_{21}$ ; čia  $c \in \mathbb{C}$ , o  $\mathbf{D}$  ir  $\mathbf{N}_{21}$  atitinkamai idempotentas ir nulpotentas, priklausantys sistemai  $S_{\mathbf{G}} = \{\mathbf{D}, \overline{\mathbf{D}}, \mathbf{N}_{12}, \mathbf{N}_{21}\}$ .

Taigi, jeigu duota idempotentų bei nulpotentų sistema  $S_{\mathbf{G}}$ , tuomet tiesinis darinys  $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + c\mathbf{N}_{21}$  (čia  $c \in \mathbb{C}$ ) taip pat yra idempotentas, o jo jungtinis idempotentas  $\overline{\widetilde{\mathbf{D}}} = \overline{\mathbf{D}} - c\mathbf{N}_{21}$  (gali būti naudojamas ir nulpotentas  $\mathbf{N}_{12}$ ). Apskaičiavus nulpotentus  $\widetilde{\mathbf{N}}_{12}$  ir  $\widetilde{\mathbf{N}}_{21}$ , gaunama nauja sistema  $S_{\widetilde{\mathbf{G}}}$ .

Pastebėsime, kad visa idempotentų (87) bei nulpotentų (88) aibė gaunama keičiant tik du parametrus  $\alpha$  ir  $\beta$ . Taigi pagal 2.3.1 skyriuje pateiktą schemą sugeneruota sistema, apimanti visą idempotentų bei nulpotentų aibę, užrašoma:

$$S_{\mathbf{G}} = \left\{ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1-\alpha \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta} & \alpha \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \mathbf{N}_{12} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ \frac{(1-\alpha)^2}{\beta} & \alpha-1 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{21} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix}, \right. \quad (101) \\ \left. \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0 \right\}.$$

Sistemą (101) generuojančios matricos išraiška:

$$\left\{ \mathbf{G} = d \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\alpha}{\beta} & -\frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix}, \alpha, \beta, d \in \mathbb{C}, d, \beta \neq 0 \right\}. \quad (102)$$

Pastebėsime, kad sistemos (101) idempotentai yra sudėtiniai.

**7 apibrėžimas.** Idempotentai  $\mathbf{D}$  ir  $\overline{\mathbf{D}}$ , priklausomi nuo vieno parametro, vadinami *elementariais idempotentais*.

Tarkime, pasirenkame matricos (102) parametrus  $\alpha = \frac{1}{2}$  ir  $d = 1$  bei įvedame žymėjimą  $2\beta = \beta_0$ , tuomet gauname nuo vieno parametro priklausomą neišsigimusią matricą:

$$\left\{ G^{(\beta_0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\beta_0} & -\frac{1}{\beta_0} \end{bmatrix}, \beta_0 \in \mathbb{C}, \beta_0 \neq 0 \right\}. \quad (103)$$

Tuomet ši matrica sugeneruoja idempotentų ir nulpotentų sistemą, priklausančią nuo vieno parametro:

$$S_{\mathbf{G}^{(\beta_0)}} = \left\{ \mathbf{D}^{(\beta_0)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \beta_0 \\ \frac{1}{\beta_0} & 1 \end{bmatrix}, \overline{\mathbf{D}}^{(\beta_0)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\beta_0 \\ -\frac{1}{\beta_0} & 1 \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \mathbf{N}_{12}^{(\beta_0)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\beta_0 \\ \frac{1}{\beta_0} & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{21}^{(\beta_0)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \beta_0 \\ -\frac{1}{\beta_0} & -1 \end{bmatrix}, \right. \quad (104) \\ \left. \beta_0 \in \mathbb{C}, \beta_0 \neq 0 \right\}.$$

Kyla natūralus klausimas, kokie sąryšiai sieja (101) sistemos sudėtinių idempotentų bei (104) sistemos elementarių vienparametrių idempotentų aibes. Pastebėsime, kad iš (104) sistemos idempotento bei nulpotento tiesinio darinio galima gauti visą dviparametrių idempotentų aibę  $\mathbf{D}^{(\alpha, \beta)}$ , nusakomą išraiška (87):

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1-\alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \beta_0 \\ \frac{1}{\beta_0} & 1 \end{bmatrix} + c \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \beta_0 \\ -\frac{1}{\beta_0} & -1 \end{bmatrix}; \quad (105)$$

čia  $c = 2\alpha - 1$ ,  $\beta_0 = \frac{\beta}{\alpha}$ . Gauta lygybė tik dar kartą patvirtina faktą, jog kiekvienam idempotentui galime rasti tokį nulpotentą, kuris nepakeis idempotento rango.

### 2.3.3. Matricos $\mathbf{X}$ trijų komponentių dėstinys

Ankstesniame skyrelyje buvo aptartas tokios matricos keturių komponentių dėstinys (Šmidaitė et al., 2008). Taigi kyla klausimas, ar įmanoma sumažinti komponentių skaičių ir bet kokią antros eilės kvadratinei matricai užrašyti dėstinį, sudarytą iš trijų komponentių (Smidtaite et al., 2009; Smidtaite et al., 2010; Navickas et al., 2011):

$$\mathbf{X} := c_{11}\mathbf{D} + c_{21}\mathbf{N}_{21} + c_{22}\overline{\mathbf{D}}; \quad (106)$$

čia  $\mathbf{D}, \overline{\mathbf{D}}, \mathbf{N}_{21} \in S_G$ .

*Matricos  $2 \times 2$  išdėstymas trimis komponentėmis.* Tegul duota antros eilės matrica  $\mathbf{X} := \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$  bei sistema, kurios parametrinė išraiška atitinka (101). Taigi ar egzistuoja ir kokie turi būti koeficientai  $c_{11}, c_{21}, c_{22}$  bei parametrai  $\alpha$  ir  $\beta$ , kad antros eilės kvadratinės matricos dėstinys atitiktų (106) išraišką?

**Teorema.** Matrica  $\mathbf{X}$  gali būti išdėstyta trijų komponentių dėstinium:

$$\mathbf{X} = c_{11} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1-\alpha \end{bmatrix} + c_{21} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix} + c_{22} \cdot \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta} & \alpha \end{bmatrix}; \quad (107)$$

čia  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , o koeficientai apskaičiuojami:

(a) Kai matricos  $\mathbf{X}$  šalutinės įstrižainės elementai  $x_{12} \neq 0$  ir  $x_{21} \neq 0$ , tada:

$$c_{11} = \frac{1}{2} (\text{Tr } \mathbf{X} + \sqrt{\text{dsk } \overline{\mathbf{X}}}) = \lambda_1, \quad (108)$$

$$c_{21} = \left( \frac{x_{11} - x_{22} + \sqrt{\text{dsk } \overline{\mathbf{X}}}}{2\alpha} - \sqrt{\text{dsk } \overline{\mathbf{X}}} \right) = \gamma, \quad (109)$$

$$c_{22} = \frac{1}{2} (\text{Tr } \mathbf{X} - \sqrt{\text{dsk } \overline{\mathbf{X}}}) = \lambda_2, \quad (110)$$

$$\beta = \frac{-(x_{11} - x_{22}) + \sqrt{\text{dsk } \overline{\mathbf{X}}}}{2x_{21}} \cdot \alpha = \frac{2x_{12}}{\sqrt{\text{dsk } \overline{\mathbf{X}}} + x_{11} - x_{22}} \cdot \alpha; \quad (111)$$

(b) Kai matricos  $\mathbf{X}$  šalutinės įstrižainės elementai  $x_{12} = 0$  ir  $x_{21} \neq 0$ , tada  $\text{dsk } \overline{\mathbf{X}} = (x_{11} - x_{22})^2$ , o matrica turi du dėstinius, jei  $x_{11} \neq x_{22}$ :

1. Kai  $\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = -(x_{11} - x_{22})$ , tada matrica išdėstoma pagal (107) išraišką, o koeficientai apskaičiuojami:

$$\begin{aligned} c_{11} &= x_{22} = \lambda_1; \\ c_{22} &= x_{11} = \lambda_2; \\ c_{21} &= -\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = x_{11} - x_{22}; \\ \beta &= \frac{x_{22} - x_{11}}{x_{21}} \cdot \alpha; \end{aligned}$$

2. Kai  $\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = x_{11} - x_{22}$ , tada  $\beta = 0$ , pereinama prie ribų:

$$\mathbf{X} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( c_{11} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1-\alpha \end{bmatrix} + c_{21} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix} + c_{22} \cdot \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta} & \alpha \end{bmatrix} \right); \quad (112)$$

čia  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , o koeficientai apskaičiuojami:

$$\begin{aligned} c_{11} &= x_{11} = \lambda_1; \\ c_{22} &= x_{22} = \lambda_2; \\ c_{21} &= \frac{1-\alpha}{\alpha} \sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = \frac{1-\alpha}{\alpha} (x_{11} - x_{22}); \end{aligned}$$

- (c) Kai matricos šalutinės įstrižainės elementai  $\mathbf{X}$ , kurios  $x_{12} \neq 0$  ir  $x_{21} = 0$ ,  $\text{dsk } \mathbf{X} = (x_{11} - x_{22})^2$ , o matrica turi du dėstinius, jei  $x_{11} \neq x_{22}$ :

1. Kai  $\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = x_{11} - x_{22}$ , tada  $\beta = \frac{x_{12}}{x_{11} - x_{22}} \cdot \alpha$ , tada matricos dėstinyms užrašomas (107) išraiška, o koeficientai apskaičiuojami:

$$\begin{aligned} c_{11} &= x_{11} = \lambda_1; \\ c_{22} &= x_{22} = \lambda_2; \\ c_{21} &= \frac{1-\alpha}{\alpha} (x_{11} - x_{22}); \end{aligned}$$

2. Kai  $\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = -(x_{11} - x_{22})$ , tada  $\beta \rightarrow \infty$ , pereinama prie ribų:

$$\mathbf{X} = \lim_{\beta \rightarrow \pm\infty} \left( c_{11} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1-\alpha \end{bmatrix} + c_{21} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix} + c_{22} \cdot \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta} & \alpha \end{bmatrix} \right); \quad (113)$$

čia  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , o koeficientai apskaičiuojami:

$$\begin{aligned} c_{11} &= x_{22} = \lambda_1; \\ c_{22} &= x_{11} = \lambda_2; \\ c_{21} &= -\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = x_{11} - x_{22}; \end{aligned}$$

(d) Matrica  $\mathbf{X} := \begin{bmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{bmatrix}$ , kai  $x_{11} \neq x_{22}$  išdėstoma dviem būdais:

$$\mathbf{X} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( c_{11} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1-\alpha \end{bmatrix} + c_{21} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix} + c_{22} \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta} & \alpha \end{bmatrix} \right); \quad (114)$$

$$\mathbf{X} = \lim_{\beta \rightarrow \pm\infty} \left( c_{11} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1-\alpha \end{bmatrix} + c_{21} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix} + c_{22} \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta} & \alpha \end{bmatrix} \right); \quad (115)$$

čia  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $c_{11} = \lambda_1 = x_{11}$ ,  $c_{21} = \left( \frac{x_{11}-x_{22}+\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}}}{2\alpha} - \sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} \right)$ ,  $c_{22} = \lambda_2 = x_{22}$ ,  $\text{dsk } \mathbf{X} = (x_{11} - x_{22})^2$ .

(e) Kai matricos  $\mathbf{X}$  šalininės įstrižinės elementai  $x_{12} = x_{21} = 0$ , o pagrindinės įstrižinės  $x_{11} = x_{22} = x$ , tada parametrai  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ir  $\beta$  parenkami laisvai, o matrica  $\mathbf{X}$  išdėstoma su bet kokiais dviem jungtiniais idempotentais  $\mathbf{D}$  ir  $\bar{\mathbf{D}}$ :

$$\mathbf{X} = x \cdot \mathbf{D} + x \cdot \bar{\mathbf{D}}. \quad (116)$$

**Pastaba.** Matrica  $\mathbf{X}$  turi du dėstinius, kai  $\text{dsk } \mathbf{X} \neq 0$ , ir vieną dėstinį, kai  $\text{dsk } \mathbf{X} = 0$ .

**5 pavyzdys.** Teoremą iliustruokime pavyzdžiais:

(a) Teoremos (a) atveji pateiksime du pavyzdžius:

1. Duota matrica  $\mathbf{X} := \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ , kurios  $\text{dsk } \mathbf{X} = 4 \neq 0$ . Taigi ši matrica turi du dėstinius. Parinkus  $\alpha = -2$ , gaunami koeficientai:

1.1. Kai  $\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = 2$ , tada  $\beta = \frac{-(x_{11}-x_{22})+\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}}}{2x_{21}} \cdot \alpha = \frac{2x_{12}}{\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}}+x_{11}-x_{22}}$ .  
 $\alpha = -1$ ,  $c_{11} = 4$ ,  $c_{21} = -4$ ,  $c_{22} = 2$ , o matricos dėstinys

$$\mathbf{X} = 4 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

1.2. Kai  $\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = -2$ , tada  $\beta = \frac{-(x_{11}-x_{22})+\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}}}{2x_{21}} \cdot \alpha = \frac{2x_{12}}{\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}}+x_{11}-x_{22}}$ .  
 $\alpha = -2$ ,  $c_{11} = 2$ ,  $c_{21} = 1$ ,  $c_{22} = 4$ , o matricos dėstinys

$$\mathbf{X} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Duota matrica  $\mathbf{X} := \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$  turi vieną dėstinį, nes  $\text{dsk } \mathbf{X} = 0$ . Parinkus  $\alpha = -2$ , gaunama  $\beta = \frac{-(x_{11}-x_{22})+\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}}}{2x_{21}} \cdot \alpha = \frac{2x_{12}}{\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}}+x_{11}-x_{22}} \cdot \alpha = 1$ ,  
 $c_{11} = 2$ ,  $c_{21} = -1$ ,  $c_{22} = 2$ , o matricos dėstinys

$$\mathbf{X} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Teoremoje aprašytą (b) atvejį iliustruoja toliau pateiktas pavyzdys. Tegul duota matrica  $\mathbf{X} := \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ , kurios  $\text{dsk } \mathbf{X} = 16 \neq 0$ . Ši matrica turi du dėstinius. Parinkus  $\alpha = -2$ , gaunami dėstiniai:

1. Kai  $\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = 4$ , tada  $\beta = 0$ ,  $c_{11} = 6$ ,  $c_{21} = -6$ ,  $c_{22} = 2$ , o matricos dėstinys

$$\mathbf{X} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( 6 \cdot \begin{bmatrix} -2 & \beta \\ -\frac{6}{\beta} & 3 \end{bmatrix} - 6 \cdot \begin{bmatrix} -2 & \beta \\ -\frac{4}{\beta} & 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -\beta \\ \frac{6}{\beta} & -2 \end{bmatrix} \right).$$

2. Kai  $\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = -4$ , tada  $\beta = -2$ ,  $c_{11} = 2$ ,  $c_{21} = 4$ ,  $c_{22} = 6$ , o matricos dėstinys

$$\mathbf{X} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

- (c) Teoremos (c) atvejį iliustruoja pavyzdys. Tegul duota matrica  $\mathbf{X} := \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , kurios  $\text{dsk } \mathbf{X} = 16 \neq 0$ . Taigi ši matrica turi du dėstinius. Parinkus  $\alpha = -2$ , matrica išdėstoma:

1. Kai  $\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = 4$ , tada  $\beta = \frac{2x_{12}}{\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X} + x_{11} - x_{22}}} \cdot \alpha = 2$ ,  $c_{11} = 6$ ,  $c_{21} = -6$ ,  $c_{22} = 2$ , o matricos dėstinys

$$\mathbf{X} = 6 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} - 6 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Kai  $\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = -4$ , tada  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $c_{11} = 2$ ,  $c_{21} = 4$ ,  $c_{22} = 6$ , pereinama prie ribų

$$\mathbf{X} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left( 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & \beta \\ -\frac{6}{\beta} & 3 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} -2 & \beta \\ -\frac{4}{\beta} & 2 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -\beta \\ \frac{6}{\beta} & -2 \end{bmatrix} \right).$$

- (d) Teoremos (d) atvejį iliustruoja pavyzdys. Duota matrica  $\mathbf{X} := \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Galimi du dėstiniai ( $\alpha = -1$ ):

1. Tegul  $\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = 2$ , tada  $\beta \rightarrow 0$ .

$$\mathbf{X} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( 4 \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1-\alpha \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix} + (-4) \cdot \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta} & \alpha \end{bmatrix} \right);$$

2. Tegul  $\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}} = -2$ , tada  $\beta \rightarrow \pm\infty$ .

$$\mathbf{X} = \lim_{\beta \rightarrow \pm\infty} \left( 2 \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1-\alpha \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta} & \alpha \end{bmatrix} \right).$$

*Matricos kėlimas laipsniu.* Matricą  $\mathbf{X}$ , išdėstyta specialiuoju struktūriniu dėstiniu, nusakomu dviem idempotentais ir vienu nulpotentu, keliant laipsniu, patogų taikyti dėstinio savybes (Navickas et al., 2011; Navickas et al., 2012).

**1 išvada.** Tegul matrica užrašoma išraiška  $\mathbf{X} := \lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21}$ . Tada matricos laipsniai  $\mathbf{X}^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) apskaičiuojami:

$$\mathbf{X}^n := \lambda_1^n \mathbf{D} + \lambda_2^n \bar{\mathbf{D}} + \gamma \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1^{n-1-i} \lambda_2^i \mathbf{N}_{21}; \quad (117)$$

čia  $\mathbf{D}$  ir  $\bar{\mathbf{D}}$  yra matricos  $\mathbf{X}$  idempotentai, o  $\mathbf{N}_{21}$  yra matricos nulpotentas.

**Įrodymas.** Įrodymas gaunamas matematinės indukcijos metodu. Kai matrica užrašoma duotąja išraiška, tuomet:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^2 &= (\lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21})^2 \\ &= (\lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21}) (\lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21}) \\ &= \lambda_1^2 \mathbf{D}^2 + \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \lambda_1 \gamma \mathbf{D} \mathbf{N}_{21} + \lambda_1 \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} + \lambda_2^2 \bar{\mathbf{D}}^2 \\ &\quad + \lambda_2 \gamma \bar{\mathbf{D}} \mathbf{N}_{21} + \lambda_1 \gamma \mathbf{N}_{21} \mathbf{D} + \lambda_2 \gamma \mathbf{N}_{21} \bar{\mathbf{D}} + \gamma^2 \mathbf{N}_{21}^2 \\ &= \lambda_1^2 \mathbf{D} + \lambda_2^2 \bar{\mathbf{D}} + \lambda_2 \gamma \mathbf{N}_{21} + \lambda_1 \gamma \mathbf{N}_{21} = \lambda_1^2 \mathbf{D} + \lambda_2^2 \bar{\mathbf{D}} + (\lambda_1 + \lambda_2) \gamma \mathbf{N}_{21}, \\ \mathbf{X}^3 &= (\lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21})^3 \\ &= (\lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21}) (\lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21})^2 \\ &= (\lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21}) (\lambda_1^2 \mathbf{D} + \lambda_2^2 \bar{\mathbf{D}} + (\lambda_1 + \lambda_2) \gamma \mathbf{N}_{21}) \\ &= \lambda_1^3 \mathbf{D}^2 + \lambda_1 \lambda_2^2 \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2) \gamma \mathbf{D} \mathbf{N}_{21} + \lambda_1^2 \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} + \lambda_2^3 \bar{\mathbf{D}}^2 \\ &\quad + \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) \gamma \bar{\mathbf{D}} \mathbf{N}_{21} + \lambda_1^2 \gamma \mathbf{N}_{21} \mathbf{D} + \lambda_2^2 \gamma \mathbf{N}_{21} \bar{\mathbf{D}} + (\lambda_1 + \lambda_2) \gamma^2 \mathbf{N}_{21}^2 \\ &= \lambda_1^3 \mathbf{D} + \lambda_2^3 \bar{\mathbf{D}} + \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) \gamma \mathbf{N}_{21} + \lambda_1^2 \gamma \mathbf{N}_{21} \\ &= \lambda_1^3 \mathbf{D} + \lambda_2^3 \bar{\mathbf{D}} + (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2) \gamma \mathbf{N}_{21}, \\ \mathbf{X}^4 &= (\lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21})^4 \\ &= (\lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21}) (\lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21})^3 \\ &= (\lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21}) (\lambda_1^3 \mathbf{D} + \lambda_2^3 \bar{\mathbf{D}} + (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2) \gamma \mathbf{N}_{21}) \\ &= \lambda_1^4 \mathbf{D}^2 + \lambda_1 \lambda_2^3 \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \lambda_1 (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2) \gamma \mathbf{D} \mathbf{N}_{21} + \lambda_1^3 \lambda_2 \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} \\ &\quad + \lambda_2^4 \bar{\mathbf{D}}^2 + \lambda_2 (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2) \gamma \bar{\mathbf{D}} \mathbf{N}_{21} + \lambda_1^3 \gamma \mathbf{N}_{21} \mathbf{D} + \lambda_2^3 \gamma \mathbf{N}_{21} \bar{\mathbf{D}} \\ &\quad + (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2) \gamma^2 \mathbf{N}_{21}^2 \\ &= \lambda_1^4 \mathbf{D} + \lambda_2^4 \bar{\mathbf{D}} + \lambda_2 (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2) \gamma \mathbf{N}_{21} + \lambda_1^3 \gamma \mathbf{N}_{21} \\ &= \lambda_1^4 \mathbf{D} + \lambda_2^4 \bar{\mathbf{D}} + (\lambda_1^3 + \lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^2 + \lambda_2^3) \gamma \mathbf{N}_{21}. \end{aligned}$$

Daroma prielaida, kad lygybė teisinga:

$$\mathbf{X}^{n-1} := \lambda_1^{n-1} \mathbf{D} + \lambda_2^{n-1} \overline{\mathbf{D}} + \gamma \sum_{i=0}^{(n-1)-1} \lambda_1^{(n-1)-1-i} \lambda_2^i \mathbf{N}_{21},$$

tuomet:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1^n &= (\lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \overline{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21}) \times \\ &\quad \times \left( \lambda_1^{n-1} \mathbf{D} + \lambda_2^{n-1} \overline{\mathbf{D}} + \gamma \sum_{i=0}^{(n-1)-1} \lambda_1^{(n-1)-1-i} \lambda_2^i \mathbf{N}_{21} \right) \\ &= \lambda_1^n \mathbf{D}^2 + \lambda_1 \lambda_2^{n-1} \mathbf{D} \overline{\mathbf{D}} + \left( \lambda_1 \gamma \sum_{i=0}^{(n-1)-1} \lambda_1^{(n-1)-1-i} \lambda_2^i \right) \mathbf{D} \mathbf{N}_{21} \\ &\quad + \lambda_1^{n-1} \lambda_2 \overline{\mathbf{D}} \mathbf{D} + \lambda_2^n \overline{\mathbf{D}}^2 + \left( \lambda_2 \gamma \sum_{i=0}^{(n-1)-1} \lambda_1^{(n-1)-1-i} \lambda_2^i \right) \overline{\mathbf{D}} \mathbf{N}_{21} \\ &\quad + \lambda_1^{n-1} \gamma \mathbf{N}_{21} \mathbf{D} + \lambda_2^{n-1} \gamma \mathbf{N}_{21} \overline{\mathbf{D}} + \left( \gamma^2 \sum_{i=0}^{(n-1)-1} \lambda_1^{(n-1)-1-i} \lambda_2^i \right) \mathbf{N}_{21}^2 \\ &= \lambda_1^n \mathbf{D} + \lambda_2^n \overline{\mathbf{D}} + \left( \lambda_2 \gamma \sum_{i=0}^{(n-1)-1} \lambda_1^{(n-1)-1-i} \lambda_2^i \right) \overline{\mathbf{D}} \mathbf{N}_{21} + \lambda_1^{n-1} \gamma \mathbf{N}_{21} \\ &= \lambda_1^n \mathbf{D} + \lambda_2^n \overline{\mathbf{D}} + \left( \lambda_1^{n-1} \gamma + \lambda_2 \gamma \sum_{i=0}^{(n-1)-1} \lambda_1^{(n-1)-1-i} \lambda_2^i \right) \mathbf{N}_{21} \\ &= \lambda_1^n \mathbf{D} + \lambda_2^n \overline{\mathbf{D}} + \gamma \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1^{n-1-i} \lambda_2^i \mathbf{N}_{21}. \end{aligned}$$

□

**Pastaba.** Išraiška (117) lieka teisinga ir kai  $n \in \mathbb{Z}$ , o  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ . Teiginio įrodymas analogiškas (117) išraiškos įrodymui.

**Pastaba.** Pasinaudojus kompleksinių skaičių teorija, galima (117) išraišką dar išplėsti, imant  $n \in \mathbb{R}$ . Tačiau šis plėtinys čia nebus nagrinėjamas.

*Matricų komutatyvumas.* Atliekant skaičiavimus taip pat svarbu nepamiršti, kad, kitaip nei skaliarinių dydžių, matricų daugyba nėra komutatyvi. Ištersime, kokias savybes turi tenkinti matricos, kad jos būtų komutatyvios (Navickas et al., 2011; Navickas et al., 2012).

**2 išvada.** Tam, kad dvi matricos  $\mathbf{X}_1$  ir  $\mathbf{X}_2$  būtų komutatyvios, t.y.,  $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1$ , būtina ir pakanka, kad jos būtų su tais pačiais jungtiniais idempotentais  $\mathbf{D}$  ir  $\overline{\mathbf{D}}$  bei su panašiais nulpotentais.

**Įrodymas. Pakankamumas.** Tegul duotos dvi matricos, kurių idempotentai sutampa, o nulpotentai yra panašūs,  $\mathbf{X}_1 = \lambda_{11}\mathbf{D} + \lambda_{12}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_1 c_1 \mathbf{N}_{21}$  ir  $\mathbf{X}_2 = \lambda_{21}\mathbf{D} + \lambda_{22}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_2 c_2 \mathbf{N}_{21}$ . Gauname, kad matricos komutatyvios, nes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 &= (\lambda_{11}\mathbf{D} + \lambda_{12}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_1 c_1 \mathbf{N}_{21}) (\lambda_{21}\mathbf{D} + \lambda_{22}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_2 c_2 \mathbf{N}_{21}) \\
 &= \lambda_{11}\lambda_{21}\mathbf{D}^2 + \lambda_{11}\lambda_{22}\mathbf{D}\overline{\mathbf{D}} + \lambda_{11}\gamma_2 c_2 \mathbf{D}\mathbf{N}_{21} + \lambda_{12}\lambda_{21}\overline{\mathbf{D}}\mathbf{D} \\
 &\quad + \lambda_{12}\lambda_{22}\overline{\mathbf{D}}^2 + \lambda_{12}\gamma_2 c_2 \overline{\mathbf{D}}\mathbf{N}_{21} + \lambda_{21}\gamma_1 c_1 \mathbf{N}_{21}\mathbf{D} \\
 &\quad + \lambda_{22}\gamma_1 c_1 \mathbf{N}_{21}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_1 \gamma_2 c_1 c_2 \mathbf{N}_{21}^2 \\
 &= \lambda_{11}\lambda_{21}\mathbf{D} + \lambda_{12}\lambda_{22}\overline{\mathbf{D}} + (\lambda_{12}\gamma_2 c_2 + \lambda_{21}\gamma_1 c_1) \mathbf{N}_{21}; \\
 \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1 &= (\lambda_{21}\mathbf{D} + \lambda_{22}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_2 c_2 \mathbf{N}_{21}) (\lambda_{11}\mathbf{D} + \lambda_{12}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_1 c_1 \mathbf{N}_{21}) \\
 &= \lambda_{11}\lambda_{21}\mathbf{D}^2 + \lambda_{12}\lambda_{21}\mathbf{D}\overline{\mathbf{D}} + \lambda_{21}\gamma_1 c_1 \mathbf{D}\mathbf{N}_{21} + \lambda_{11}\lambda_{22}\overline{\mathbf{D}}\mathbf{D} \\
 &\quad + \lambda_{12}\lambda_{22}\overline{\mathbf{D}}^2 + \lambda_{22}\gamma_1 c_1 \overline{\mathbf{D}}\mathbf{N}_{21} + \lambda_{11}\gamma_2 c_2 \mathbf{N}_{21}\mathbf{D} \\
 &\quad + \lambda_{12}\gamma_2 c_2 \mathbf{N}_{21}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_1 \gamma_2 c_1 c_2 \mathbf{N}_{21}^2 \\
 &= \lambda_{11}\lambda_{21}\mathbf{D} + \lambda_{12}\lambda_{22}\overline{\mathbf{D}} + \lambda_{22}\gamma_1 c_1 \mathbf{N}_{21} + \lambda_{11}\gamma_2 c_2 \mathbf{N}_{21} \\
 &= \lambda_{11}\lambda_{21}\mathbf{D} + \lambda_{12}\lambda_{22}\overline{\mathbf{D}} + (\lambda_{11}\gamma_2 c_2 + \lambda_{22}\gamma_1 c_1) \mathbf{N}_{21};
 \end{aligned}$$

kai nulpotentų panašumo koeficientai tenkina  $c_1 (\lambda_{21}\gamma_1 - \lambda_{22}\gamma_1) = c_2 (\lambda_{11}\gamma_2 - \lambda_{12}\gamma_2)$  sąryšį.

**Būtinumas.** Tegul duotos matricos  $\mathbf{X}_1$  ir  $\mathbf{X}_2$  ir žinoma, kad  $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1$ . Matricos išdėstomos  $\mathbf{X}_1 = \lambda_{11}\mathbf{D} + \lambda_{12}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_1 \mathbf{N}_{21}$  ir  $\mathbf{X}_2 = \lambda_{21}\mathbf{D}' + \lambda_{22}\overline{\mathbf{D}}' + \gamma_2 \mathbf{N}'_{21}$ . Matricų idempotentams galioja lygybės  $\mathbf{D} + \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{I}$  ir  $\mathbf{D}' + \overline{\mathbf{D}}' = \mathbf{I}$ , taigi matricų išraiškas galima perrašyti  $\mathbf{X}_1 = \lambda_{11}\mathbf{I} + (\lambda_{12} - \lambda_{11})\overline{\mathbf{D}} + \gamma_1 \mathbf{N}_{21}$  ir  $\mathbf{X}_2 = \lambda_{21}\mathbf{I} + (\lambda_{22} - \lambda_{21})\overline{\mathbf{D}}' + \gamma_2 \mathbf{N}'_{21}$ . Apskaičiuojamos sandaugos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 &= \lambda_{11}\lambda_{21}\mathbf{I} + \lambda_{11}(\lambda_{22} - \lambda_{21})\overline{\mathbf{D}}' + \lambda_{11}\gamma_2 \mathbf{N}'_{21} + (\lambda_{12} - \lambda_{11})\lambda_{21}\overline{\mathbf{D}} \\
 &\quad + (\lambda_{12} - \lambda_{11})(\lambda_{22} - \lambda_{21})\overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{D}}' + (\lambda_{12} - \lambda_{11})\gamma_2 \overline{\mathbf{D}}\mathbf{N}'_{21} \\
 &\quad + \lambda_{21}\gamma_1 \mathbf{N}_{21} + \gamma_1(\lambda_{22} - \lambda_{21})\mathbf{N}_{21}\overline{\mathbf{D}}' + \gamma_1\gamma_2 \mathbf{N}_{21}\mathbf{N}'_{21}; \\
 \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1 &= \lambda_{11}\lambda_{21}\mathbf{I} + (\lambda_{12} - \lambda_{11})\lambda_{21}\overline{\mathbf{D}} + \lambda_{21}\gamma_1 \mathbf{N}_{21} + \lambda_{11}(\lambda_{22} - \lambda_{21})\overline{\mathbf{D}}' \\
 &\quad + (\lambda_{12} - \lambda_{11})(\lambda_{22} - \lambda_{21})\overline{\mathbf{D}}'\overline{\mathbf{D}} + \gamma_1(\lambda_{22} - \lambda_{21})\overline{\mathbf{D}}'\mathbf{N}_{21} \\
 &\quad + \lambda_{11}\gamma_2 \mathbf{N}'_{21} + (\lambda_{12} - \lambda_{11})\gamma_2 \mathbf{N}'_{21}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_1\gamma_2 \mathbf{N}'_{21}\mathbf{N}_{21}.
 \end{aligned}$$

Kadangi  $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1$ , gaunama, kad turi galioti sąryšiai:  $\overline{\mathbf{D}} \cdot \overline{\mathbf{D}}' = \overline{\mathbf{D}}' \cdot \overline{\mathbf{D}}$ ,  $\mathbf{N}_{21}\mathbf{N}'_{21} = \mathbf{N}'_{21}\mathbf{N}_{21}$ . Tegul:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1-\alpha \end{bmatrix}, & \overline{\mathbf{D}} &= \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta} & \alpha \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{D}' &= \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \frac{\alpha'(1-\alpha')}{\beta'} & 1-\alpha' \end{bmatrix}, & \overline{\mathbf{D}}' &= \begin{bmatrix} 1-\alpha' & -\beta' \\ \frac{\alpha'(\alpha'-1)}{\beta'} & \alpha' \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$



Iš idempotentų komutatyvumo gauname, kad:

$$\begin{cases} (1 - \alpha)(1 - \alpha') - \frac{\alpha'\beta(\alpha'-1)}{\beta'} = (1 - \alpha)(1 - \alpha') - \frac{\alpha\beta'(\alpha-1)}{\beta}; \\ -(1 - \alpha)\beta - \alpha'\beta = -(1 - \alpha')\beta - \alpha\beta'. \end{cases}$$

Taigi gauname, kad  $\alpha' = \alpha, \beta' = \beta$  arba  $\alpha' = 1 - \alpha, \beta' = -\beta$ .

Pasinaudoję komutatyvumo sąryšiais, betarpiškai įsitikiname, kad komutatyvios yra tik šios idempotentų poros:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1 - \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta} & 1 - \alpha \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & -\beta \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta} & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}' = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & -\beta \\ \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta} & \alpha \end{bmatrix}.$$

Iš gautų rezultatų turime, kad idempotentai yra komutatyvūs tada ir tik tada, kai jie yra arba lygūs  $\mathbf{D} = \mathbf{D}'$ , arba jungtiniai, kurių sandauga  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}' = \mathbf{D}' \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0}$ .

Analogiškai įrodomas nulpotentų komutatyvumas. Tegul:

$$\mathbf{N}_{21} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}'_{21} = \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\frac{\alpha'^2}{\beta'} & -\alpha' \end{bmatrix}.$$

Iš nulpotentų komutatyvumo  $\mathbf{N}_{21}\mathbf{N}'_{21} = \mathbf{N}'_{21}\mathbf{N}_{21}$  gauname, kad:

$$\begin{cases} \alpha\alpha' - \frac{\alpha'^2\beta}{\beta'} = \alpha'\alpha - \frac{\alpha^2\beta'}{\beta}; \\ \alpha\beta' - \alpha'\beta = \alpha'\beta - \alpha\beta'. \end{cases}$$

Taigi gauname, kad  $\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha'}{\alpha}$ , t. y. parametrai proporcingi, jeigu pažymima  $\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha'}{\alpha} = c$ , tada  $\alpha' = c \cdot \alpha$ , o  $\beta' = c \cdot \beta$ .

Pasinaudoję komutatyvumo sąryšiais, betarpiškai įsitikiname, kad komutatyvi yra tik ši nulpotentų pora:

$$\mathbf{N}_{21} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix}, \quad \text{ir} \quad \mathbf{N}'_{21} = c \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Sandaugos komutatyvios  $\overline{\mathbf{D}}\mathbf{N}'_{21} = \mathbf{N}'_{21}\overline{\mathbf{D}}$  ir  $\mathbf{N}_{21}\overline{\mathbf{D}'} = \overline{\mathbf{D}'}\mathbf{N}_{21}$  (1 lent.).

Taigi bendru atveju  $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1$ , kai matricų  $\mathbf{X}_1$  ir  $\mathbf{X}_2$  atitinkami idempotentai sutampa, o nulpotentai yra panašūs.  $\square$

**Pastaba.** Skaliarinė matrica yra komutatyvi su bet kokia kita matrica.

**3 išvada.** Tegul matricos  $\mathbf{X}_1$  ir  $\mathbf{X}_2$  turi tuos pačius idempotentus ir panašius nulpotentus. Tada matricos  $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2$  ir  $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$  taip pat turi tuos pačius idempotentus ir panašius nulpotentus.

**Irodymas.** Tarkime, turime:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 &= \lambda_{11}\mathbf{D} + \lambda_{12}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_1 c_1 \mathbf{N}_{21}, \\ \mathbf{X}_2 &= \lambda_{21}\mathbf{D} + \lambda_{22}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_2 c_2 \mathbf{N}_{21}.\end{aligned}$$

Tada:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 &= (\lambda_{11}\mathbf{D} + \lambda_{12}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_1 c_1 \mathbf{N}_{21}) + (\lambda_{21}\mathbf{D} + \lambda_{22}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_2 c_2 \mathbf{N}_{21}) \\ &= (\lambda_{11} + \lambda_{21})\mathbf{D} + (\lambda_{12} + \lambda_{22})\overline{\mathbf{D}} + (\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2)\mathbf{N}_{21}; \\ \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 &= (\lambda_{11}\mathbf{D} + \lambda_{12}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_1 c_1 \mathbf{N}_{21}) \cdot (\lambda_{21}\mathbf{D} + \lambda_{22}\overline{\mathbf{D}} + \gamma_2 c_2 \mathbf{N}_{21}) \\ &= \lambda_{11}\lambda_{21}\mathbf{D} + \lambda_{12}\lambda_{22}\overline{\mathbf{D}} + (\lambda_{12}\gamma_2 c_2 + \lambda_{21}\gamma_1 c_1)\mathbf{N}_{21}.\end{aligned}$$

□

## 2.4. Antros eilės kvadratinų matricų rūšys ir jų savybės

Ankstesniame skyrelyje buvo aptartas antros eilės kvadratinės matricos išdėstymas trimis komponentėmis, tačiau, nors jis yra universalus, ne visose situacijose toks dėstinyš yra patogus. Idempotentams parinkus vienokį, o nulpotentams kitokį parametrizavimą, gaunami matricų struktūriniai dėstiniai, iš esmės visas antros eilės matricas suskirstantys į tris grupes – idempotentines, nulpotentines bei skaliarines matricas. Tokie matricų dėstiniai itin reikšmingi tiriant matricinius iteracinius modelius (Navickas et al., 2011; Navickas et al., 2012).

### 2.4.1. Idempotentinė ir nulpotentinė matricos

Tegul duota antros eilės matrica  $\mathbf{X} := \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ .

**8 apibrėžimas.** Matrica  $\mathbf{X}$  vadinama *idempotentine matrica*, jeigu ji gali būti užrašyta:

$$\mathbf{X} = \lambda_1 \mathbf{D}' + \lambda_2 \overline{\mathbf{D}}'; \quad (118)$$

čia  $\lambda_1$  ir  $\lambda_2$  yra matricos  $\mathbf{X}$  tikrinės reikšmės, o  $\mathbf{D}'$  ir  $\overline{\mathbf{D}}'$  tos matricos jungtiniai idempotentai.

**9 apibrėžimas.** Matrica  $\mathbf{X}$  vadinama *nulpotentine matrica*, jeigu ji gali būti užrašyta:

$$\mathbf{X} = \lambda_0 \mathbf{I} + \mathbf{N}; \quad (119)$$

čia  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ , o  $\mathbf{N}$  tos matricos nulpotentas.

**4 išvada.** Jeigu  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  (dsk  $\mathbf{X} \neq 0$ ), tada matrica  $\mathbf{X}$  idempotentinė. Jeigu  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$  (dsk  $\mathbf{X} = 0$ ) ir  $\mathbf{X} - \lambda_0 \mathbf{I} \neq \mathbf{0}$ , tada matrica  $\mathbf{X}$  nulpotentinė.

**Irodymas.** Tegul duota matrica  $\mathbf{X}$ , kurios tikrinės reikšmės  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Tada šiai matricai galima sudaryti du idempotentus. Sudarykime juos pagal (83) išraišką ir įrašę į (118) gauname:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \mathbf{D}' + \lambda_2 \overline{\mathbf{D}}' &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\mathbf{X} - \lambda_2 \mathbf{I}) + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mathbf{X} - \lambda_1 \mathbf{I}) \\ &= \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \mathbf{X} = \mathbf{X}.\end{aligned}$$

Jeigu  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ , tuomet matricai  $\mathbf{X}$  sudarome nulpotentą pagal (86) išraišką ir gauname, kad matrica  $\mathbf{X}$  išdėstoma (119) forma ir yra nulpotentinė.  $\square$

**Pastaba.** Skaliarinė matrica  $\mathbf{X} = \lambda_0 \mathbf{I}$  gali būti užrašyta ir kaip idempotentinė matrica  $\lambda_0 \mathbf{I} = \lambda_0 (\mathbf{D}' + \overline{\mathbf{D}'}) = \lambda_0 \mathbf{D}' + \lambda_0 \overline{\mathbf{D}'}$ ; čia  $\mathbf{D}'$  ir  $\overline{\mathbf{D}'}$  yra jungtinių idempotentų pora, ir kaip nulpotentinė matrica  $\lambda_0 \mathbf{I} = \lambda_0 \mathbf{I} + \mathbf{0}$ . Taigi skaliarinė matrica  $\mathbf{X} = \lambda_0 \mathbf{I}$  yra ir idempotentinė, ir nulpotentinė.

**Pastaba.** Matricos  $\mathbf{D}' = 1 \cdot \mathbf{D}' + 0 \cdot \overline{\mathbf{D}'}$  ir  $\overline{\mathbf{D}'} = 0 \cdot \mathbf{D}' + 1 \cdot \overline{\mathbf{D}'}$  taip pat yra idempotentinės matricos, o matrica  $\mathbf{N} = 0 \cdot \mathbf{I} + \mathbf{N}$  yra nulpotentinė matrica.

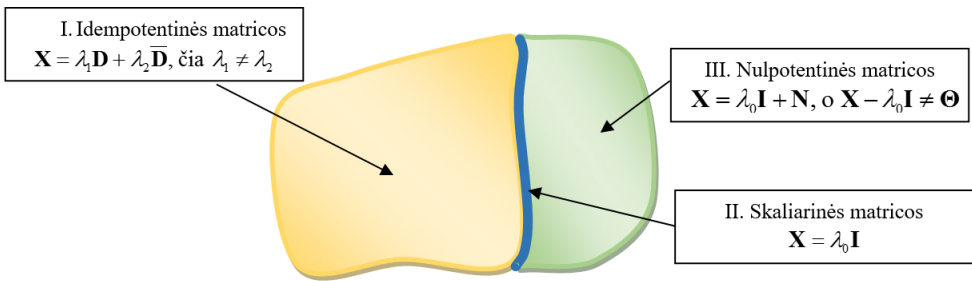
**10 apibrėžimas.** Išraiškos (118) ir (119) atitinkamai vadinamos matricos  $\mathbf{X}$  *idempotentiniu* bei *nulpotentiniu struktūriniu dėstiniu*.

Taigi antros eilės kvadratinės matricas  $\mathbf{X}$  pagal jų struktūrą sąlyginai galima suskirstyti į tris klases (13 pav.):

I klasė: idempotentinės matricos, kai  $\text{dsk } \mathbf{X} \neq 0$ ;

II klasė: skaliarinės, kai  $\text{dsk } \mathbf{X} = 0$  ir  $\mathbf{X} - \lambda_0 \mathbf{I} = \mathbf{0}$ ;

III klasė: nulpotentinės matricos, kai  $\text{dsk } \mathbf{X} = 0$  ir  $\mathbf{X} - \lambda_0 \mathbf{I} \neq \mathbf{0}$ .



13 pav. Matricų aibės semantinis išdėstymas

**5 išvada.** Tegul duoti du jungtiniai idempotentai  $\mathbf{D}'$  ir  $\overline{\mathbf{D}'}$  bei dvi konstantos  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ . Tada  $\lambda_1$  ir  $\lambda_2$  yra tikrinės matricos  $\mathbf{X}$  reikšmės, o  $\mathbf{D}'$  ir  $\overline{\mathbf{D}'}$  yra jungtiniai matricos  $\mathbf{X}$  idempotentai, kai matrica  $\mathbf{X} := \lambda_1 \mathbf{D}' + \lambda_2 \overline{\mathbf{D}'}$ .

**Įrodymas.** Tegul  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Tada matricos charakteringą lygtį:

$$\det [(\lambda_1 \mathbf{D}' + \lambda_2 \overline{\mathbf{D}'}) - \lambda \mathbf{I}] = \det [(\lambda_1 - \lambda) \mathbf{D}' + (\lambda_2 - \lambda) \overline{\mathbf{D}'}] = 0$$

tenkina sprendiniai  $\lambda = \lambda_1$  arba  $\lambda = \lambda_2$ . Vadinasi,  $\lambda_1$  ir  $\lambda_2$  yra iš tikrųjų matricos  $\mathbf{X}$  tikrinės reikšmės. Sudarykime matricos idempotentą pagal (83) išraišką, pvz.,  $\mathbf{D}_1$ :

$$\mathbf{D}_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 \mathbf{D}' + \lambda_2 \overline{\mathbf{D}'} - \lambda_2 \mathbf{I}) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{D}' = \mathbf{D}'.$$

Analogiškai sudaromos  $\mathbf{D}_2$ . Taigi  $\mathbf{D}'$  ir  $\overline{\mathbf{D}'}$  yra matricos  $\mathbf{X}$  idempotentai. Jeigu  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ , tai  $\mathbf{X}$  – skaliarinė matrica ir turi tik vieną kartotinę tikrinę reikšmę  $\lambda_0$ .  $\square$

**6 išvada.** Tegul duotas nulpotentas  $\mathbf{N}$  ir konstanta  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ . Tada matrica  $\mathbf{X} := \lambda_0 \mathbf{I} + \mathbf{N}$  turi vieną kartotinę tikrinę reikšmę, ir jos nulpotentas yra  $\mathbf{N}$ .

**Irodymas.** Matricos charakteringą lygtį

$$\det [(\lambda_0 \mathbf{I} + \mathbf{N}) - \lambda \mathbf{I}] = \det [(\lambda_0 - \lambda) \mathbf{I} + \mathbf{N}] = 0$$

tenkina sprendinys  $\lambda = \lambda_0$ . Vadinasi,  $\lambda_0$  yra iš tikrųjų matricos  $\mathbf{X}$  tikrinė kartotinė reikšmė, tada iš 5 savybės seka, kad matricai  $\mathbf{X}$  galima sudaryti nulpotentą  $\mathbf{N}' := \mathbf{X} - \lambda_0 \mathbf{I}$ , kuris ir bus lygus duotajam nulpotentui  $\mathbf{N}$ .  $\square$

**Pastaba.** Iš 2 išvados išplaukia, kad

$$\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1 = \lambda_{11} \lambda_{21} \mathbf{D}' + \lambda_{12} \lambda_{22} \overline{\mathbf{D}'}, \quad (120)$$

kai  $\mathbf{X}_1 = \lambda_{11} \mathbf{D}' + \lambda_{12} \overline{\mathbf{D}'}$  ir  $\mathbf{X}_2 = \lambda_{21} \mathbf{D}' + \lambda_{22} \overline{\mathbf{D}'}$  yra idempotentinės matricos, turinčios vienodus idempotentus, ir

$$\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1 = \lambda_{10} \lambda_{20} \mathbf{I} + (\lambda_{10} c + \lambda_{20}) \mathbf{N}, \quad (121)$$

kai  $\mathbf{X}_1$  ir  $\mathbf{X}_2$  yra nulpotentinės matricos  $\mathbf{X}_1 = \lambda_{10} \mathbf{I} + \mathbf{N}$  ir  $\mathbf{X}_2 = \lambda_{20} \mathbf{I} + c \mathbf{N}$ .

#### 2.4.2. Idempotentų ir nulpotentų parametrinės išraiškos

Matricos  $\mathbf{X}$  suvedimas iš trijų komponentių dėstinio į idempotentinį ar nulpotentinį struktūrinį dėstinį (Navickas et al., 2011; Navickas et al., 2012):

1. Jeigu  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , tai

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \overline{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21} \\ &= \lambda_1 \mathbf{D} + \lambda_2 \overline{\mathbf{D}} + \frac{\gamma}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \mathbf{N}_{21} \\ &= \lambda_1 \left( \mathbf{D} + \frac{\gamma}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbf{N}_{21} \right) + \lambda_2 \left( \overline{\mathbf{D}} - \frac{\gamma}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbf{N}_{21} \right) \\ &= \lambda_1 \mathbf{D}' + \lambda_2 \overline{\mathbf{D}'}; \end{aligned} \quad (122)$$

čia  $\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \frac{\gamma}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbf{N}_{21}$ ,  $\overline{\mathbf{D}'} = \overline{\mathbf{D}} - \frac{\gamma}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbf{N}_{21}$  (2.3 skyrius).

2. Jeigu  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ , tai

$$\mathbf{X} = \lambda_0 \mathbf{D} + \lambda_0 \overline{\mathbf{D}} + \gamma \mathbf{N}_{21} = \lambda_0 \mathbf{I} + \gamma \mathbf{N}_{21} = \lambda_0 \mathbf{I} + \mathbf{N}; \quad (123)$$

čia pažymima  $\mathbf{N} = \gamma \mathbf{N}_{21}$ .

**Pastaba.** Išdėstant matricą keturiomis ar trimis komponentėmis, dėstinio idempotentai ir nulpotentai priklauso tai pačiai sistemai (pvz., vienparametrei ((104) ar dviparametrei (101)), o, norint matricą suvesti į idempotentinės ar nulpotentinės matricos išraišką, idempotentai ir nulpotentas jau nebeprisiklauso tai pačiai sistemai.

Atliekant skaitinius eksperimentus, patogiu generuoti aibę idempotentų ir nulpotentų, keičiant vos keletą parametrų. Parametrinės idempotentų bei nulpotentų išraiškos, kurios naudojamos norint matricą išdėstyti dviejų komponentų dėstiniu ((118) ar (119) išraiškomis), skiriasi nuo idempotentų bei nulpotentų parametrinių išraiškų (101), naudojamų trijų komponentų dėstiniui. Idempotentinės matricos (118) idempotentų  $\mathbf{D}'$  ir  $\overline{\mathbf{D}'}$  parametrinės išraiškos gaunamos tiesiogiai iš (101) idempotentų išraiškų, įvedus keitinius:

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \frac{1 - \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} & 1 - \tilde{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{D}'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tilde{\alpha} & -\tilde{\beta} \\ -\frac{1 - \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} & 1 + \tilde{\alpha} \end{bmatrix}; \quad (124)$$

čia  $\tilde{\alpha} = 2\alpha - 1$ ,  $\tilde{\beta} = 2\beta$ . Nulpotentinės (119) matricos nulpotento išraiška:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \check{\alpha} & \check{\beta} \\ -\frac{\check{\alpha}^2}{\check{\beta}} & -\check{\alpha} \end{bmatrix}; \quad (125)$$

čia  $\check{\alpha} = 2\alpha$ ,  $\check{\beta} = 2\beta$  arba tiesiog  $\mathbf{N} = \gamma \mathbf{N}_{21}$ , kai  $\gamma = \frac{1}{2}$ .

## 2.5. Skyriaus išvados

Antrame skyriuje aprašyta matricų teorija, orientuota į antros eilės kvadratinių matricų struktūrinį skaidymą. Pateiktos pagrindinės savybės, teoremos, apibrėžimai ir kiti teiginiai, kurių svarba aptarta tolesniuose skyriuose. Matricų dėstiniai naudojami įvairiems skaičiavimams atlikti: idempotentiniai bei nulpotentiniai matricų dėstiniai taikomi matricinių iteracinių modelių savybėms atskleisti, o atskirų parametrų analizė naudojama vertinant sveikatos būklę.

### 3. MATRICINIAI ITERACINIAI MODELIAI

Literatūros apžvalgoje buvo aprašyti vienmačiai iteraciniai modeliai, kurių įvairovė bei taikymai yra platus. Vėliau pristatyti iteracinių modelių tinkleliai – keli vienmačiai (ir ne tik) iteraciniai modeliai, susieti tarpusavyje. Pastarieji skirti erdvėje ir laike kintančioms sistemoms tirti. Antrasis skyrius buvo skirtas matricinės analizės apžvalgai. Šiame skyriuje pateiktas originalus iteracinis modelis, kuris yra minėtų skyrių teorijos produktas (Navickas et al., 2011). Šiame iteraciniame modelyje kintamasis yra antros eilės kvadratinė matrica, taigi, priešingai nei susietų iteracinių modelių tinklelyje, didinamas ne mazgų kiekis, o paties mazgo matavimų skaičius (keičiama mazgo struktūra). Vienmačiame iteraciniame modelyje pakeisdami skaliarinį kintamąjį sudėtingesnės struktūros kintamuoju, pastebėjome efektus, kurių neaptikta analizuojant susietų iteracinių modelių tinklelius, vienas iš jų – divergavimo efektas (Navickas et al., 2012). Šiame skyriuje aptarsime bendras matricinių iteracinių modelių savybes, išsamiai išnagrinėsime matricinį  $2 \times 2$  logistinį iteracinį modelį, pateikdami svarbiausias išraiškas, aptarsime matricinių iteracinių modelių divergavimo sąlygas bei pateiksime skaitinių eksperimentų rezultatus.

#### 3.1. Antros eilės matricinių iteracinių modelių savybės

Apibrėžkime matricinį iteracinį modelį:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} := f(\mathbf{X}^{(n)}); \quad (126)$$

čia  $n = 0, 1, 2, \dots$ , matrica  $\mathbf{X}^{(n)} = \begin{bmatrix} x_{11}^{(n)} & x_{12}^{(n)} \\ x_{21}^{(n)} & x_{22}^{(n)} \end{bmatrix}$ ,  $x_{kl}^{(n)} \in \mathbb{C}$ ;  $k, l = 1, 2$  yra kvadratinė antros eilės matrica, o  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  skaliarinė funkcija.

Tegul duotą funkciją  $f(x)$  galima išreikšti analizinėmis funkcijomis:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j \frac{x^j}{j!}; \quad (127)$$

čia  $c_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 0, 1, \dots$  ir  $x \in \mathbb{R}$ .

**1 lema.** Tegul duota idempotentinė matrica  $\mathbf{X}$  ir funkcija  $f(x)$ , užrašoma (127) išraiška. Tada:

$$f(\mathbf{X}) := f(\lambda_1) \mathbf{D}' + f(\lambda_2) \overline{\mathbf{D}}'; \quad (128)$$

čia  $\lambda_1$  ir  $\lambda_2$  matricos  $\mathbf{X}$  tikrinės reikšmės ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ),  $\mathbf{D}'$  ir  $\overline{\mathbf{D}}'$  matricos  $\mathbf{X}$  jungtiniai idempotentai.

**Įrodymas.** Duota lygybė įrodoma panaudojus funkcijos  $f(x)$  išraišką bei idempotentinės matricos savybes:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{c_j}{j!} (\lambda_1 \mathbf{D}' + \lambda_2 \overline{\mathbf{D}}')^j = \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{c_j}{j!} \lambda_1^j \right) \mathbf{D}' + \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{c_j}{j!} \lambda_2^j \right) \overline{\mathbf{D}}' \\ &= f(\lambda_1) \mathbf{D}' + f(\lambda_2) \overline{\mathbf{D}}'. \end{aligned}$$

□

**2 lema.** Tegul duota nulpotentinė matrica  $\mathbf{X}$  ir funkcija  $f(x)$ , užrašoma (127) išraiška. Tada:

$$f(\mathbf{X}) = f(\lambda_0)\mathbf{I} + f'(\lambda_0)\mathbf{N}; \quad (129)$$

čia  $\lambda_0$  – matricos  $\mathbf{X}$  kartotinė tikrinė reikšmė ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ ),  $\mathbf{N}$  matricos  $\mathbf{X}$  nulpotentitas,  $f'(\lambda_0)$  žymi funkcijos  $f$  išvestinę kintamojo atžvilgiu, apskaičiuotą taške  $\lambda_0$ .

**Įrodymas.** Iš nulpotentinės matricos apibrėžimo bei funkcijos  $f(x)$  išraiškos išplaukia:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{c_j}{j!} (\lambda_0\mathbf{I} + \mathbf{N})^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{c_j}{j!} (\lambda_0^j\mathbf{I} + j\lambda_0^{j-1}\mathbf{N}) \\ &= f(\lambda_0)\mathbf{I} + f'(\lambda_0)\mathbf{N}. \end{aligned}$$

□

**7 išvada.** Tarkime, duotas matricinis iteracinis modelis:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} := f(\mathbf{X}^{(n)}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \frac{(\mathbf{X}^{(n)})^j}{j!}; \quad (130)$$

čia  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Duota idempotentinė pradinių sąlygų matrica  $\mathbf{X}^{(0)} = \lambda_1\mathbf{D}' + \lambda_2\overline{\mathbf{D}'}$ . Tada:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \lambda_1^{(n+1)}\mathbf{D}' + \lambda_2^{(n+1)}\overline{\mathbf{D}'} = f(\lambda_1^{(n)})\mathbf{D}' + f(\lambda_2^{(n)})\overline{\mathbf{D}'}; \quad (131)$$

čia  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Pastaba.** Iš 7 išvados tiesiogiai išplaukia tikrinių reikšmių rekurentinės formulės, kai pradinių sąlygų matrica idempotentinė:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(n+1)} = f(\lambda_1^{(n)}); \\ \lambda_2^{(n+1)} = f(\lambda_2^{(n)}); \end{cases} \quad (132)$$

čia  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Kitaip tariant, matricos, generuojamos iteracinio modelio, išlaiko tuos pačius jungtinius idempotentus  $\mathbf{D}'$  ir  $\overline{\mathbf{D}'}$ , jeigu pradinių sąlygų matrica yra tais pačiais idempotentais  $\mathbf{D}'$  ir  $\overline{\mathbf{D}'}$  nusakoma idempotentinė matrica.

**8 išvada.** Tegul duotas iteracinis matricinis modelis, apibrėžtas (130) lygybe, o pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė:

$$\mathbf{X}^{(0)} = \lambda_0^{(0)}\mathbf{I} + \mu_0^{(0)}\mathbf{N};$$

čia  $\mu_0^{(0)} = 1$ . Tada:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \lambda_0^{(n+1)}\mathbf{I} + \mu_0^{(n+1)}\mathbf{N} = f(\lambda_0^{(n)})\mathbf{I} + f'(\lambda_0^{(n)}) \cdot \mu_0^{(n)}\mathbf{N};$$

čia  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Pastaba.** Iš 8 išvados tiesiogiai išplaukia sąryšiai, kai pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė:

$$\begin{cases} \lambda_0^{(n+1)} = f\left(\lambda_0^{(n)}\right); \\ \mu_0^{(n+1)} = f'\left(\lambda_0^{(n)}\right) \cdot \mu_0^{(n)}; \end{cases} \quad (133)$$

čia  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Papildomos komponentės  $\mu_0^{(n+1)}$  kitimą galima užrašyti:

$$\mu_0^{(n+1)} = \prod_{k=0}^n f'\left(\lambda_0^{(k)}\right); \quad (134)$$

čia  $\mu_0^{(0)} = 1$  ir  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

### 3.2. Antros eilės matricinis logistinis iteracinis modelis

Logistinis iteracinis modelis yra paradigmatis. Šis chaotinis iteracinis modelis yra vienas iš geriausiai išnagrinėtų modelių ir dažnai literatūroje naudojamas kaip etaloninis. Todėl šiame darbe buvo nuspręsta panagrinėti logistinio iteracinio modelio, aprašomo lygtimi (1), plėtinį, kai diskretus skaliarinis kintamasis  $x^{(n)}$  pakeičiamas kvadratine antros eilės matrica (Navickas et al., 2011; Navickas et al., 2012). Tarkime, turime pradinių sąlygų matricą  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_{11}^{(0)} & x_{12}^{(0)} \\ x_{21}^{(0)} & x_{22}^{(0)} \end{bmatrix}$ ;  $x_{kl}^{(0)} \in \mathbb{R}$ ;  $k, l = 1, 2$ . Tuomet matricinis logistinis iteracinis modelis, kai matricos eilė 2, aprašomas sąryšiu:

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = a\mathbf{X}^{(n)} (\mathbf{I} - \mathbf{X}^{(n)}) := \begin{bmatrix} x_{11}^{(n+1)} & x_{12}^{(n+1)} \\ x_{21}^{(n+1)} & x_{22}^{(n+1)} \end{bmatrix}; \quad (135)$$

čia  $n$ -tosios iteracijos matrica žymima  $\mathbf{X}^{(n)}$ .

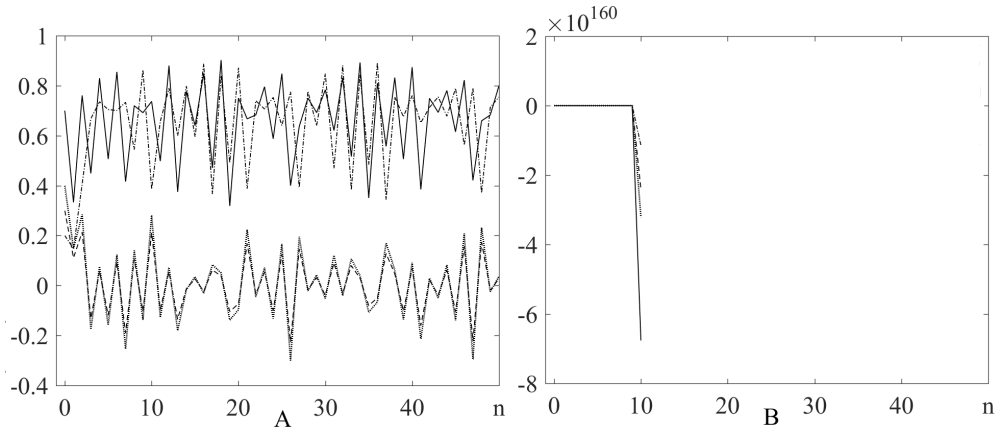
Sąryšis (135) suformuoja keturias skaliarines laiko eilutes  $\{x_{kl}^{(j)}\}_{j=0}^{+\infty}$ ;  $k, l = 1, 2$ , kurios užrašomos:

$$\begin{cases} x_{11}^{(n+1)} = a \left( x_{11}^{(n)} \left( 1 - x_{11}^{(n)} \right) - x_{12}^{(n)} x_{21}^{(n)} \right); \\ x_{12}^{(n+1)} = a x_{12}^{(n)} \left( 1 - x_{11}^{(n)} - x_{22}^{(n)} \right); \\ x_{21}^{(n+1)} = a x_{21}^{(n)} \left( 1 - x_{11}^{(n)} - x_{22}^{(n)} \right); \\ x_{22}^{(n+1)} = a \left( x_{22}^{(n)} \left( 1 - x_{22}^{(n)} \right) - x_{12}^{(n)} x_{21}^{(n)} \right); \end{cases} \quad (136)$$

čia  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $x_{11}^{(0)}, x_{12}^{(0)}, x_{21}^{(0)}, x_{22}^{(0)}$  yra keturi pradinių sąlygų matricos elementai – skaliariniai dydžiai. Nors toks klasikinio logistinio iteracinio modelio plėtinys atrodo trivialus, tačiau dinaminės jo savybės nėra tokios akivaizdžios. Pavyzdžiui, parinkime du skirtingus pradinių sąlygų skaičių rinkinius ir sekime keturių (136) lygybėmis aprašytų laiko eilučių elgesį, kai fiksuotas parametras  $a = 3,7$ . Pradinių sąlygų matrica  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$  suformuoja keturis procesus (pastebėsime, kad 14 pav. A dalyje kai



kurie laiko eilutės nariai tampa neigiamais), o kai pradinė matrica  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,9 \end{bmatrix}$ , iteraciniai procesai diverguoja, skaitmenų perpildymas pasiekiamas jau po dešimties iteracijų (14 pav. B dalis). Pagrindinis šio skyriaus tikslas – paaiškinti tokių dinaminį elgesį, aprašytą matriciniu logistiniu iteraciniu modeliu, kai diskretus skaliarinis kintamasis pakeičiamas kvadratine antros eilės matrica.



**14 pav.** Du priešingai besielgiantys matriciniai logistiniai iteraciniai modeliai:  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$  lemia keturis stacionarius procesus (A dalis), o kai pradinė matrica  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,9 \end{bmatrix}$ , iteracinis procesas diverguoja (B dalis);  $a = 3,7$ ;  $\cdots\cdots\cdots x_{11}^{(n)}$ ;  $-\cdots-\cdots x_{12}^{(n)}$ ;  $\cdots\cdots\cdots x_{21}^{(n)}$ ;  $\text{—} x_{22}^{(n)}$

### 3.2.1. Pradinių sąlygų matrica, tikrinės reikšmės ir iteraciniai procesai

Šiame skyriuje aptarsime pagrindines antros eilės matricinio logistinio iteracinio modelio dinamikos savybes.

**9 išvada.** Keturios iteracinės sekos  $\{x_{kl}^{(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$ ;  $k, l = 1, 2$ , gautos taikant matricinį logistinį iteracinį modelį (135), bus apręžtos su visais  $n = 0, 1, 2, \dots$  jeigu tenkinamos tokios sąlygos:

- (i)  $0 \leq a \leq 4$ ;
- (ii) pradinių sąlygų matrica  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra idempotentinė;
- (iii) matricos  $\mathbf{X}^{(0)}$  tikrinės reikšmės  $\lambda_1^{(0)}$  ir  $\lambda_2^{(0)}$  priklauso intervalui  $[0, 1]$ .

**Irodymas.** Kadangi  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra idempotentinė matrica:

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_{11}^{(0)} & x_{12}^{(0)} \\ x_{21}^{(0)} & x_{22}^{(0)} \end{bmatrix} = \lambda_1^{(0)} \mathbf{D}' + \lambda_2^{(0)} \overline{\mathbf{D}}'. \quad (137)$$

Tiesioginiais skaičiavimais iš (135) lygybės gaunama:  $\mathbf{X}^{(1)} = \lambda_1^{(1)} \mathbf{D}' + \lambda_2^{(1)} \overline{\mathbf{D}}'$ ;

čia  $\mathbf{D}'$  ir  $\overline{\mathbf{D}'}$  apibrėžiami (124) lygybėmis. Tada,  $\mathbf{X}^{(n+1)}$  įgauna formą:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{(n+1)} &= a \left( \lambda_1^{(n)} \mathbf{D}' + \lambda_2^{(n)} \overline{\mathbf{D}'} \right) \left( \mathbf{I} - \lambda_1^{(n)} \mathbf{D}' - \lambda_2^{(n)} \overline{\mathbf{D}'} \right) \\
&= a \left( \lambda_1^{(n)} \mathbf{D}' + \lambda_2^{(n)} \overline{\mathbf{D}'} - \left( \lambda_1^{(n)} \right)^2 \mathbf{D}'^2 - \lambda_1^{(n)} \lambda_2^{(n)} \overline{\mathbf{D}'} \mathbf{D}' \right. \\
&\quad \left. - \lambda_1^{(n)} \lambda_2^{(n)} \mathbf{D}' \overline{\mathbf{D}'} - \left( \lambda_2^{(n)} \right)^2 \overline{\mathbf{D}'}^2 \right) \\
&= a \left( \lambda_1^{(n)} \mathbf{D}' + \lambda_2^{(n)} \overline{\mathbf{D}'} - \left( \lambda_1^{(n)} \right)^2 \mathbf{D}' - \left( \lambda_2^{(n)} \right)^2 \overline{\mathbf{D}'} \right) \quad (138) \\
&= a \left( \lambda_1^{(n)} - \left( \lambda_1^{(n)} \right)^2 \right) \mathbf{D}' + a \left( \lambda_2^{(n)} - \left( \lambda_2^{(n)} \right)^2 \right) \overline{\mathbf{D}'} \\
&= \lambda_1^{(n+1)} \mathbf{D}' + \lambda_2^{(n+1)} \overline{\mathbf{D}'}.
\end{aligned}$$

Akivaizdu, kad  $\mathbf{X}^{(n)}$  struktūra atitinka  $\mathbf{X}^{(0)}$  struktūrą. Įrašius (137) išraišką į (135) lygybę, gaunama iteracinė matricių seka:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{(n)} &= \begin{bmatrix} x_{11}^{(n)} & x_{12}^{(n)} \\ x_{21}^{(n)} & x_{22}^{(n)} \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1^{(n)} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \frac{1 - \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} & 1 - \tilde{\alpha} \end{bmatrix} + \lambda_2^{(n)} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tilde{\alpha} & -\tilde{\beta} \\ -\frac{1 - \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} & 1 + \tilde{\alpha} \end{bmatrix}. \quad (139)
\end{aligned}$$

Iš (130) ir (126) lygybių išplaukia:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^{(n+1)} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \frac{1 - \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} & 1 - \tilde{\alpha} \end{bmatrix} + \lambda_2^{(n+1)} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tilde{\alpha} & -\tilde{\beta} \\ -\frac{1 - \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} & 1 + \tilde{\alpha} \end{bmatrix} \\
&= a \left( \left( \lambda_1^{(n)} - \left( \lambda_1^{(n)} \right)^2 \right) \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \frac{1 - \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} & 1 - \tilde{\alpha} \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \left( \lambda_2^{(n)} - \left( \lambda_2^{(n)} \right)^2 \right) \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tilde{\alpha} & -\tilde{\beta} \\ -\frac{1 - \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} & 1 + \tilde{\alpha} \end{bmatrix} \right). \quad (140)
\end{aligned}$$

Tada gaunama:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(n+1)} = a \lambda_1^{(n)} \left( 1 - \lambda_1^{(n)} \right); \\ \lambda_2^{(n+1)} = a \lambda_2^{(n)} \left( 1 - \lambda_2^{(n)} \right); \end{cases} \quad (141)$$

čia  $n = 0, 1, 2, \dots$  ir

$$\begin{cases} x_{11}^{(n)} = \frac{1}{2} \left( \lambda_1^{(n)} + \lambda_2^{(n)} \right) + \frac{\tilde{\alpha}}{2} \left( \lambda_1^{(n)} - \lambda_2^{(n)} \right); \\ x_{12}^{(n)} = \frac{1}{2} \tilde{\beta} \left( \lambda_1^{(n)} - \lambda_2^{(n)} \right); \\ x_{21}^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} \left( \lambda_1^{(n)} - \lambda_2^{(n)} \right); \\ x_{22}^{(n)} = \frac{1}{2} \left( \lambda_1^{(n)} + \lambda_2^{(n)} \right) - \frac{\tilde{\alpha}}{2} \left( \lambda_1^{(n)} - \lambda_2^{(n)} \right); \end{cases} \quad (142)$$

čia  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\lambda_1^{(n)}$  ir  $\lambda_2^{(n)}$  yra matricos  $\mathbf{X}^{(n)}$  tikrinės reikšmės. Akivaizdu, kad jeigu  $0 \leq \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)} \leq 1$  ir  $0 \leq a \leq 4$ , tada  $0 \leq \lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)} \leq 1$  su visais  $n = 1, 2, \dots$ , o tai yra pakankama sąlyga, kad  $x_{kl}^{(n)}$ ;  $k, l = 1, 2$  bus aprėžtos su visais  $n = 1, 2, \dots$   $\square$

**10 išvada.** Keturios iteracinės sekos  $\{x_{kl}^{(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$ ;  $k, l = 1, 2$ , gautos taikant matricinį logistinį iteracinį modelį (135), bus aprėžtos su visais  $n = 0, 1, 2, \dots$ , jeigu tenkinamos sąlygos:

1.  $0 \leq a \leq 4$ ;
2. pradinių sąlygų matrica  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra nulpotentinė matrica;
3. matricos  $\mathbf{X}^{(0)}$  tikrinė reikšmė  $\lambda_0^{(0)}$  priklauso intervalui  $[0, 1]$ ;
4. sekos elementai  $\left\{a^{n+1} \prod_{k=0}^n (1 - 2\lambda_0^{(k)})\right\}_{n=0}^{+\infty}$  priklauso intervalui  $[-M, M]$ ;  $0 \leq M < +\infty$ ; kai  $\lambda_0^{(k)}$  yra matricos  $\mathbf{X}^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) tikrinė reikšmė.

**Irodymas.** Kadangi  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra nulpotentinė matrica, tuomet:

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_{11}^{(0)} & x_{12}^{(0)} \\ x_{21}^{(0)} & x_{22}^{(0)} \end{bmatrix} = \lambda_0^{(0)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \check{\alpha} & \check{\beta} \\ -\frac{\check{\alpha}^2}{\check{\beta}} & -\check{\alpha} \end{bmatrix}. \quad (143)$$

Irašę (143) išraišką į (135) lygybę, gauname iteracinę matricių seką, o iš pastarosios gauname du atitinkamų komponentų skaliarinius iteracinius modelius:

$$\begin{cases} \lambda_0^{(n+1)} = a\lambda_0^{(n)} (1 - \lambda_0^{(n)}); \\ \mu_0^{(n+1)} = a\mu_0^{(n)} (1 - 2\lambda_0^{(n)}); \end{cases} \quad (144)$$

čia  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\mu_0^{(0)} = 1$  ir  $\{\mu_0^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$  yra koeficientai prie nulpotento  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \check{\alpha} & \check{\beta} \\ -\frac{\check{\alpha}^2}{\check{\beta}} & -\check{\alpha} \end{bmatrix}$ , esantys nulpotentinės matricos  $\{\mathbf{X}^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$  struktūrinėje išraiškoje. Tuomet keturios iteracinės sekos:

$$\begin{cases} x_{11}^{(n)} = \lambda_0^{(n)} + \frac{\check{\alpha}}{2}\mu_0^{(n)}; \\ x_{12}^{(n)} = \frac{\check{\beta}}{2}\mu_0^{(n)}; \\ x_{21}^{(n)} = -\frac{\check{\alpha}^2}{2\check{\beta}}\mu_0^{(n)}; \\ x_{22}^{(n)} = \lambda_0^{(n)} - \frac{\check{\alpha}}{2}\mu_0^{(n)}; \end{cases} \quad (145)$$

čia  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Taigi to pakanka, kad  $0 \leq \lambda_0^{(0)} \leq 1$ ;  $0 \leq a \leq 4$  ir  $|\mu_0^{(n)}| < M < +\infty$  visiems  $x_{kl}^{(n)}$ ;  $k, l = 1, 2$  būtų aprėžtas su bet koku  $n = 1, 2, \dots$ . Kita vertus, koeficientų  $\{\mu_0^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$  aprėžtumas išplaukia iš (144) lygybės:

$$\mu_0^{(n+1)} = a^{n+1} \prod_{k=0}^n (1 - 2\lambda_0^{(k)}); \quad (146)$$

čia  $n = 0, 1, 2, \dots$   $\square$

**Pastaba.** Ši pastaba aprašo matricinio logistinio iteracinio modelio raidą, priklausomai nuo pradinių sąlygų matricos struktūros ir kai matricos eilė yra 2:

1. Jeigu pradinių sąlygų matrica  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra skaliarinė matrica, tuomet visos matricos  $\mathbf{X}^{(n)}$ , gautos pritaikius matricinį logistinį iteracinį modelį, taip pat bus skaliarinės su visais  $n = 1, 2, \dots$ .
2. Jeigu pradinių sąlygų matrica  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra idempotentinė matrica, tuomet visos matricos  $\mathbf{X}^{(n)}$ , gautos pritaikius matricinį logistinį iteracinį modelį, taip pat bus idempotentinės su visais  $n = 1, 2, \dots$  arba gali virsti skaliarinėmis matricomis, nuo  $n = m, m + 1, \dots; m \geq 1$ .
3. Jeigu pradinių sąlygų matrica  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra nulpotentinė matrica, tuomet visos matricos  $\mathbf{X}^{(n)}$ , gautos pritaikius matricinį logistinį iteracinį modelį, taip pat bus nulpotentinės su visais  $n = 1, 2, \dots$  arba gali virsti skaliarinėmis matricomis, nuo  $n = m, m + 1, \dots; m \geq 1$ .

**Įrodymas.** Įrodymai išplaukia iš idempotentinių bei nulpotentinių matricų sandaugos savybių bei matricų tikrinių (bei  $\mu_0^{(n)}$ ) reikšmių evoliucijos:

1. Jeigu pradinė matrica yra skaliarinė  $\mathbf{X}^{(0)} = \lambda_0^{(0)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , tuomet visos iteruotos matricos bus skaliarinės:

$$\mathbf{X}^{(n)} = \lambda_0^{(n)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (147)$$

čia  $n = 1, 2, \dots$ , nes  $\lambda_0^{(n+1)} = a\lambda_0^{(n)} (1 - \lambda_0^{(n)})$ .

2. Jeigu pradinių sąlygų matrica  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra idempotentinė, tuomet visos logistiniu modeliu gautos matricos  $\mathbf{X}^{(n)}$  išliks idempotentinės:

$$\mathbf{X}^{(n)} = \lambda_1^{(n)} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ \frac{1 - \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} & 1 - \tilde{\alpha} \end{bmatrix} + \lambda_2^{(n)} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \tilde{\alpha} & -\tilde{\beta} \\ -\frac{1 - \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} & 1 + \tilde{\alpha} \end{bmatrix}; \quad (148)$$

kol  $\lambda_1^{(n)} \neq \lambda_2^{(n)}$  su visais  $n = 1, 2, \dots$  (7 savybė). Bet jeigu iteruotų matricų  $\mathbf{X}^{(m)}$  tikrinės reikšmės tampa vienodos, kai  $m > 0$ :  $\lambda_1^{(m)} = \lambda_2^{(m)} = \lambda_0^{(m)}$ , tuomet iteruotos matricos  $\mathbf{X}^{(k)}$  virsta skaliarinėmis:

$$\mathbf{X}^{(k)} = \lambda_0^{(k)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

čia  $k = m, m + 1, m + 2, \dots$

3. Jeigu pradinių sąlygų matrica  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra nulpotentinė, tuomet visos logistiniu modeliu gautos matricos  $\mathbf{X}^{(n)}$  išliks nulpotentinės:

$$\mathbf{X}^{(n)} = \lambda_0^{(n)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu_0^{(n)} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \check{\alpha} & \check{\beta} \\ -\frac{\check{\alpha}^2}{\check{\beta}} & -\check{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (149)$$

kol  $\mu_0^{(n)} \neq 0$  su visais  $n = 1, 2, \dots$ . Bet jeigu  $\mu_0^{(m)}$  tampa lygus nuliui, kai  $m > 0$ , tuomet iteruotos matricos  $\mathbf{X}^{(k)}$  virsta skaliarinėmis:

$$\mathbf{X}^{(k)} = \lambda_0^{(k)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

čia  $k = m, m + 1, m + 2, \dots$

□

### 3.2.2. Skaitiniai eksperimentai

Pirmiausia reiktų pastebėti, kad kokybinis iteruotų matricų elgesys, priklausomai nuo pradinių sąlygų matricos  $\mathbf{X}^{(0)}$  rūšies, nusakomas (128) arba (129) lygybėmis. Antra, svarbu pabrėžti, kad matricinio iteracinio modelio evoliucija priklauso nuo to, ar  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra idempotentinė, ar nulpotentinė matrica. Jeigu  $\mathbf{X}^{(0)}$  turi dvi skirtingas tikrines reikšmes iš intervalo  $[0, 1]$ , tuomet ši sąlyga yra pakankama, kad iteruotų matricų sekos elementai išliktų aprėžti, kai  $0 \leq a \leq 4$ . Bet jeigu  $\mathbf{X}^{(0)}$  turi vieną kartotinę tikrinę reikšmę iš intervalo  $[0, 1]$ , tuomet ši sąlyga užtikrina tik kad iteruotų matricų elementai išliks aprėžti, kai  $0 \leq a \leq 1$ ; atskiras tyrimas turėtų būti atliktas esant didesnėms parametro  $a$  reikšmėms.

*Asimptotinis ir neasimptotinis konvergavimas*  $1 < a < 3$ . Tegul pradinių sąlygų matrica yra idempotentinė, o logistinio iteracinio modelio parametras  $a$  priklauso intervalui  $1 < a < 3$  (toku atveju skaliarinis logistinis iteracinis modelis konverguoja į stabilų fiksuotą tašką  $1 - a^{-1}$ ). Tada (remiantis (141) lygčių sistema) abi tikrinės reikšmės  $\lambda_1^{(n)}$  ir  $\lambda_2^{(n)}$  didėjant  $n$  konverguos į  $1 - a^{-1}$  (jeigu tik  $\lambda_1^{(0)}$  ir  $\lambda_2^{(0)}$  yra iš intervalo  $[0, 1]$ ). Kitaip tariant, pradinių sąlygų idempotentinė matrica galiausiai bus transformuota į skaliarinę matricą prie pakankamai didelio iteracijų skaičiaus  $n$ . Išsamesnis tokios transformacijos paaiškinimas pateikiamas žemiau.

Pirmiausia pastebėsime, kad skaliarinio logistinio iteracinio modelio konvergavimas į stabilų fiksuotą tašką  $1 - a^{-1}$  gali būti asimptotinis ir neasimptotinis. Tarkime, kad dabartinio momento skaliarinis iteracinis modelis ((1) išraiška) yra  $x^{(n)}$ . Tuomet atbulinė iteracija nuo  $x^{(n)}$  aprašoma tokia lygybe:

$$(x^{(n-1)})_{1,2} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{a} x^{(n)}} \right); \quad (150)$$

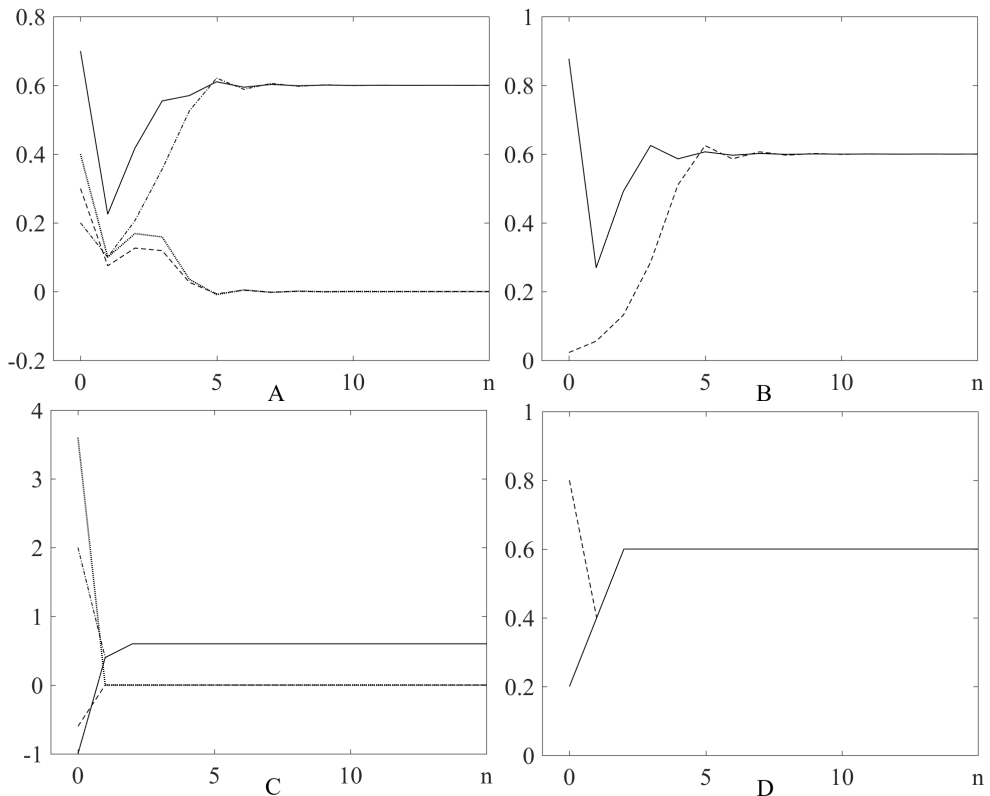
čia būtina atvirkštinės iteracijos sąlyga yra:

$$a - 4x^{(n)} \geq 0. \quad (151)$$

Toks atbulinis iteracinis procesas generuoja taškų medį (kai kurios medžio šakos pašalinamos, nes netenkinama (151) sąlyga) (Weisstein, 2001). Taigi egzistuoja tokie taškai, kurie duoda tiksliai stabilaus fiksuoto taško  $1 - a^{-1}$  reikšmes per baigtinį skaičių atbulinių iteracijų (neasimptotinis konvergavimas) (Ragulskis et al., 2011). Visos kitos pradinės sąlygos (iš intervalo  $[0, 1]$ ) konverguoja asimptotiškai į stabilų fiksuotą tašką.

Asimptotinį ir neasimptotinį tikrinių reikšmių konvergavimą į fiksuotą tašką, kai  $a = 2,5$  iliustruoja 15 paveikslas. Pradinių sąlygų idempotentinė  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$  palaipsniui transformuojama į skaliarinę matricą:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix}$  (15 pav.), kai matricos tikrinės reikšmės  $\lambda_1^{(0)} = 0,023$  ir  $\lambda_2^{(0)} = 0,877$  asimptotiškai konverguoja į fiksuotą tašką  $1 - a^{-1} = 0,6$  (15 pav. B dalis). O pradinių sąlygų idempotentinė matrica  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & -0,6 \\ 3,6 & -1 \end{bmatrix}$  transformuojama į skaliarinę matricą per du žingsnius:  $\mathbf{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix}$  (15 pav. C dalis), kai matricos tikrinės reikšmės  $\lambda_1^{(0)} = 0,2$  ir  $\lambda_2^{(0)} = 0,8$  neasimptotiškai konverguoja į  $0,6$  (15 pav. D dalis):  $\lambda_1^{(1)} = 0,4$ ;  $\lambda_2^{(1)} = 0,4$ ;  $\lambda_1^{(2)} = 0,6$ ;  $\lambda_2^{(2)} = 0,6$ .

Pastebime, kad, norint sukonstruoti  $\mathbf{X}^{(0)}$  tikrines reikšmes, pakako atlikti tik dvi atbulines iteracijas. Žinoma, galima pateikti daug sudėtingesnių neasimptotinio kon-



**15 pav.** Asimptotinis ir neasimptotinis konvergavimas į vieno periodo atraktorių:  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$  lemia asimptotinį konvergavimą (A dalyje vaizduojama  $x_{11}^{(n)}$  (.....),  $x_{12}^{(n)}$  (----),  $x_{21}^{(n)}$  (.....),  $x_{22}^{(n)}$  (—)) evoliucija, o B dalyje – tikrinės reikšmės  $\lambda_1^{(n)}$  (----),  $\lambda_2^{(n)}$  (—);  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & -0,6 \\ 3,6 & -1 \end{bmatrix}$  lemia neasimptotinį konvergavimą (C dalyje vaizduojama matricų elementų evoliucija, o D dalyje – tikrinių reikšmių evoliucija); abiem atvejais  $a = 2,5$

vergavimo pavyzdžių, norint iliustruoti perėjimą iš idempotentinės matricos į skaliarinę. Bendru atveju, jeigu matricos  $\mathbf{X}^{(n)}$  tikrinės reikšmės yra  $\lambda_1^{(n)}$  ir  $\lambda_2^{(n)}$ , tuomet atbulinės iteracijos išreiškiamos:

$$\begin{cases} \left( \lambda_1^{(n-1)} \right)_{1,2} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{a} \lambda_1^{(n)}} \right); \\ \left( \lambda_2^{(n-1)} \right)_{1,2} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{a} \lambda_2^{(n)}} \right). \end{cases} \quad (152)$$

Pastebėsime, kad atbulinės iteracijos galimos tik tada, kai  $a - 4\lambda_1^{(n)} \geq 0$  ir  $a - 4\lambda_2^{(n)} \geq 0$ . Jeigu  $\mathbf{X}^{(n)}$  yra nulpotentinė matrica, tuomet atbulinė iteracija užrašoma:

$$\begin{cases} \left( \lambda_0^{(n-1)} \right)_{1,2} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{a} \lambda_0^{(n)}} \right); \\ \left( \mu_0^{(n-1)} \right)_{1,2} = \frac{1}{a(1 - 2(\lambda_0^{(n-1)})_{1,2})} \left( \mu_0^{(n)} \right)_{1,2}, \end{cases} \quad (153)$$

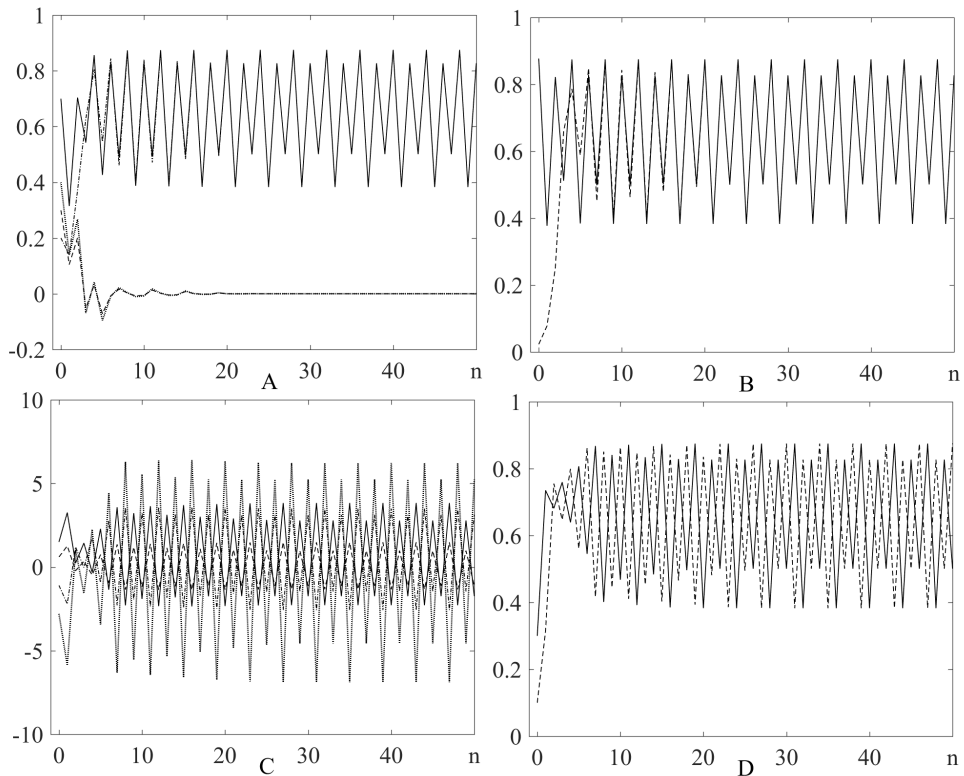
o šios atbulinės iteracijos būtinos sąlygos yra:

$$\begin{cases} a - 4\lambda_0^{(n)} \geq 0; \\ 0 \leq \left( \lambda_0^{(n-1)} \right)_{1,2} < 1. \end{cases} \quad (154)$$

*Periodiniai atraktoriai, kai  $a = 3,5$ ;  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra idempotentinė matrica.* Skaliariniam logistiniame iteraciniame modelyje keturių periodų stabilus atraktorius egzistuoja, kai parametras  $a = 3,5$  (primename, kad konvergavimas į šį atraktorių gali būti tiek asimptotinis, tiek neasimptotinis). Kyla kitas klausimas: ar bet kokia idempotentinė pradinių sąlygų matrica virs skaliarine, kai tikrinės reikšmės palaipsniui (ar per baigtinį žingsnių skaičių) artės prie periodo 4 atraktoriaus (žinoma,  $\mathbf{X}^{(0)}$  tikrinės reikšmės yra iš intervalo  $[0, 1]$ )?

Atsakymas neigiamas. Matricos  $\mathbf{X}^{(0)}$  tikrinės reikšmės artės prie periodo 4 atraktoriaus bet koku atveju, tačiau fazių skirtumas tarp iteruotų tikrinių reikšmių nebūtinai lygus nuliui. Šis fazių skirtumas yra pastovus (ir gali būti lygus 0, 1, 2 ar 3 iteracijoms), kai abi tikrinės reikšmės yra periodo 4 režime. Pavyzdžiui, idempotentinė matrica  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$  palaipsniui transformuojama į skaliarinių matricių seką (4 skirtingos skaliarinės matricos viename periode) (16 pav. A dalis), o tikrinės reikšmės asimptotiškai konverguoja į periodo 4 atraktorių be fazių skirtumo (16 pav. B dalis). Bet idempotentinė matrica  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0,6 \\ -2,8 & 1,5 \end{bmatrix}$  evoliucionuoja į idempotentinių matricių seką, nes šios matricos tikrinės reikšmės konverguoja į periodo 4 atraktorių su pastoviu nelygiu nuliui fazių skirtumu (16 pav. C ir D dalys).

*Matricinio logistinio iteracinio modelio evoliucija, kai  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra nulpotentinė matrica.* Tarkime, kad pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė matrica  $\mathbf{X}^{(0)}$ , kurią galima užrašyti (143) išraiška. Kai parametru reikšmės  $\lambda_0^{(0)} = 0,3$ ;  $\check{\alpha} = 2$  ir  $\check{\beta} = 8$ , suformuojama matrica  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1,3 & 4 \\ -0,25 & -0,7 \end{bmatrix}$ . 17 pav. A ir B dalyse vaizduojami dideli keturi

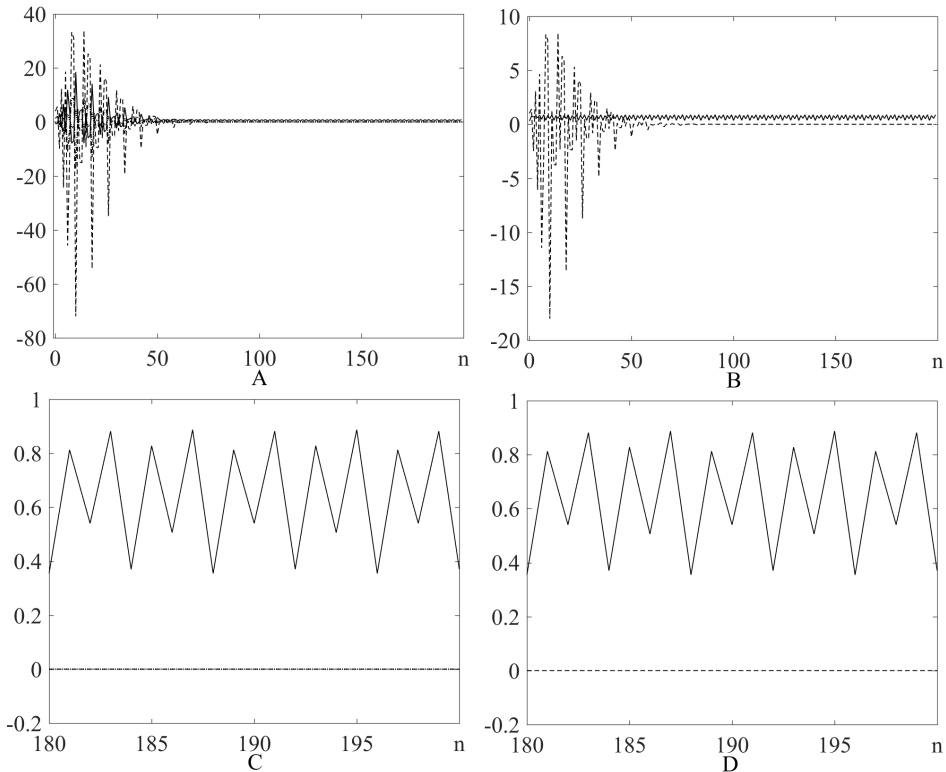


**16 pav.** Idempotentinė pradinių sąlygų matrica lemia skaliarinių arba idempotentinių matricų seką:  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$  konverguoja į skaliarinių matricų seką (A dalis vaizduoja matricos elementų, o B dalis – matricos tikrinių reikšmių kitimą) – tikrinių reikšmių fazių skirtumas periodo 4 režime yra lygus 0;  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1,1 & 0,6 \\ -2,8 & 1,5 \end{bmatrix}$  lemia idempotentinių matricų seką (C dalis vaizduoja matricos elementų kitimą, o D dalis – matricos tikrinių reikšmių kitimą), kadangi tikrinės reikšmės konverguoja į periodo 4 režimą su fazių skirtumu; abiem atvejais parametras  $a = 3,5$ ; - - - -  $x_{11}^{(n)}$ , - - - -  $x_{12}^{(n)}$ , .....  $x_{21}^{(n)}$ , —  $x_{22}^{(n)}$  (A ir C dalys); - - - -  $\lambda_1^{(n)}$ , —  $\lambda_2^{(n)}$  (B ir D dalys)

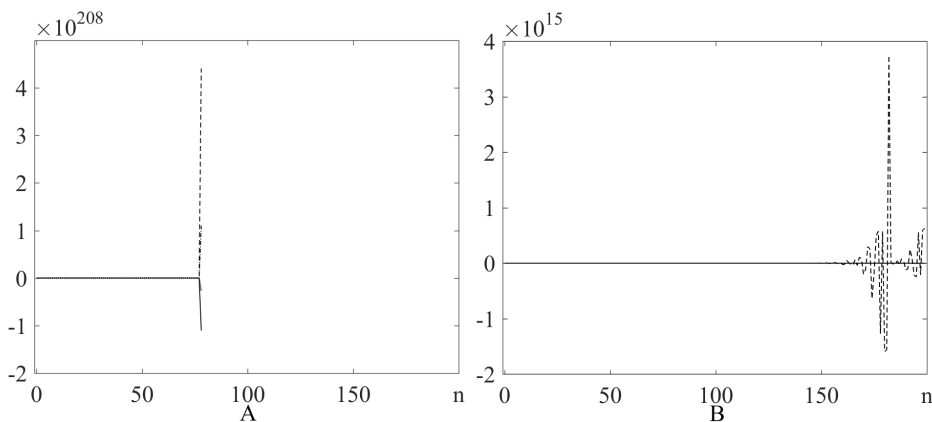
skaliarinių laiko eilučių ((136) išraiška) ir atitinkamų tikrinių reikšmių svyravimai, kai  $0 \leq n \leq 200$ , tačiau procesai nurimsta esant pakankamai dideliam iteracijos numeriui  $n$ . Iteruotų matricų konvergavimą į skaliarines matricas iliustruoja 17 pav. C dalis. 17 pav. D dalyje pavaizduotas tikrinių reikšmių  $\lambda_0^{(n)}$  svyravimas intervale  $[0, 1]$  – tai būtina (tačiau nepakankama) (144) išraiškoje nurodyto kintamojo konvergavimo sąlyga. Pastebėsime, kad parametrai  $\mu_0^{(n)}$  artėja į nulį, taip užtikrindami, kad elementai  $\{x_{kl}^{(n)}\}_{n=0}^{+\infty}$ ;  $k, l = 1, 2$  liks aprėžti. Kitokia parametro  $a$  reikšmė ( $a = 3,6$ ) lemia staigų iteracinių procesų divergavimą (18 pav.).

*Jautrumas pradinėms sąlygoms, kai  $a = 3,7$ .* Žinoma, kad skaliarinis iteracinis modelis išsivysto į chaotinę seką po periodo dvigubėjimo bifurkacijų kaskadų. Kai parametro reikšmė  $a = 3,7$ , skaliarinio logistinio iteracinio modelio dinamika jau





**17 pav.** Matricinio logistinio iteracinio modelio evoliucija nuo matricos  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1,3 & 4 \\ -0,25 & -0,7 \end{bmatrix}$ , kai  $a = 3,55$  (A ir C dalys vaizduoja elementų  $x_{11}^{(n)}, x_{12}^{(n)}, x_{21}^{(n)}, x_{22}^{(n)}$  evoliuciją; B ir D dalys vaizduoja tikrinės reikšmės (—) bei parametro  $\mu_0^{(n)}$  (----), apibrėžto (144) lygybe, kitimus. C ir D paveikslėlyje pateikti svyravimai, kai  $180 \leq n \leq 200$  ( $n$  yra iteracijos numeris)



**18 pav.** Matricinio logistinio iteracinio modelio evoliucija nuo pradinės matricos  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1,3 & 4 \\ -0,25 & -0,7 \end{bmatrix}$ , kai  $a = 3,6$  (A dalis vaizduoja elementų  $x_{11}^{(n)}, x_{12}^{(n)}, x_{21}^{(n)}, x_{22}^{(n)}$ , o B dalis – tikrinės reikšmės (—) bei parametro  $\mu_0^{(n)}$  (----), apibrėžto (134) lygybe, kitimus

yra chaotinė. Jautrumas pradinėms sąlygoms yra viena iš deterministinio chaoso charakteristinių savybių (Strogatz, 2014). Šią savybę iliustruosime naudodami matricinį iteracinį logistinį modelį.

Pradinių sąlygų matrica  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$  ir jos tikrinės reikšmės lemia chaotines sekas, kai  $a = 3,7$  (19 pav. A ir B dalys). Sudarome pradinių sąlygų matricą su nedidelių elementų pokyčiu  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2+\varepsilon & 0,3+\varepsilon \\ 0,4+\varepsilon & 0,7+\varepsilon \end{bmatrix}$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$  ir stebime, kaip elementų pokytis  $\varepsilon$  keičia procesus (19 pav. C ir D dalys). Skirtumai tarp iteruotų elementų vaizduojami 19 paveiksle. E dalyje, o skirtumai tarp iteruotų matricų tikrinių reikšmių vaizduojami 19 pav. F dalyje.

### 3.3. Antros eilės matricinių iteracinių modelių sprendinių divergavimas

Šiame skyriuje apibrėšime ir aprašysime apibendrintų matricinių iteracinių modelių staigaus divergavimo efektą, naudodami formalius algebrinius metodus (Navickas et al., 2011). Parodysime, kad staigaus divergavimo efektas gali atsirasti matriciniuose iteraciniuose modeliuose tada ir tik tada, kai antros eilės pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė ir atitinkamo skaliarinio iteracinio modelio Liapunovo eksponentė yra teigiama (Navickas et al., 2012). Pateikiame logistinio ir apskritiminio matricinių iteracinių modelių skaitinius pavyzdžius.

**11 apibrėžimas.** Staigaus divergavimo efektas atsiranda matriciniame iteraciniame modelyje (129), kai

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n |f'(\lambda_0^{(k)})| = +\infty, \quad (155)$$

o nulpotentinės matricos tikrinė reikšmė lieka aprėžta viso iteracinio proceso metu  $|\lambda_0^{(n)}| \leq M < +\infty$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Pastaba.** Iš 11 apibrėžimo išplaukia, kad staigaus divergavimo efektas idempotentinės matricos inicijuotame iteraciniame procese nevyksta.

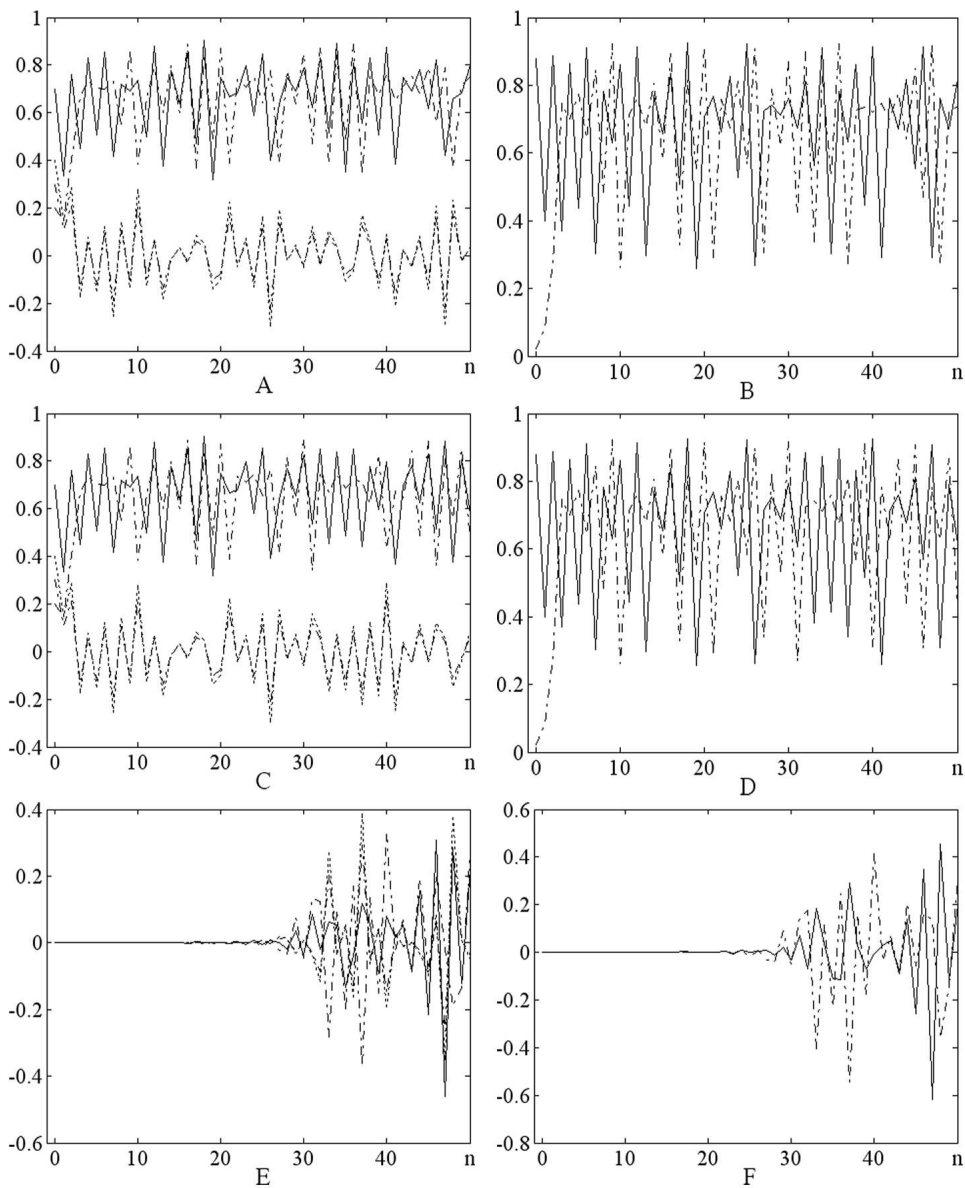
Vienmačio skaliarinio iteracinio modelio Liapunovo eksponentė nusakoma (Hilborn, 2000):

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln |f'(\lambda_0^{(j)})|; \quad (156)$$

čia  $\tilde{\lambda}$  yra Liapunovo eksponentės skaitinis įvertis. Liapunovo eksponentės apskaičiuojamos iteracinių reikšmių  $\lambda_0^{(j)}$  sekai po pereinamųjų procesų.

**11 išvada.** Staigaus divergavimo efektas matriciniame iteraciniame modelyje atsiranda, jeigu pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė, o atitinkamo skaliarinio iteracinio modelio Liapunovo eksponentė yra teigiama.

**Įrodymas.** Jeigu pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė, tuomet matricos tikrinės reikšmės kitimą nusako (133) sistemos pirmoji lygybė. Papildomos komponentės išraiška (134) rodo, kad iteracinio modelio funkcijos išvestinė apskaičiuojama pradedant



**19 pav.** Jautrumo pradinėms sąlygoms iliustracija, kai  $a = 3,7$ ; pradinė matrica  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$  lemia chaotines sekas (A dalyje vaizduojamas matricių elementų; B – tikrinių reikšmių kitimas);  $\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,2+\varepsilon & 0,3+\varepsilon \\ 0,4+\varepsilon & 0,7+\varepsilon \end{bmatrix}$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$  taip pat lemia chaotinius procesus (C dalyje vaizduojama matricių elementų; D dalyje – tikrinių reikšmių evoliucija); E dalyje vaizduojami skirtumai tarp atitinkamų matricių elementų; F dalyje vaizduojami skirtumai tarp atitinkamų tikrinių reikšmių

nuo  $\lambda_0^{(0)}$ , tačiau kad būtų išpildyta būtina (155) sąlyga, būtinai turi galioti sąlyga:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \prod_{k=m}^{m+p} |f'(\lambda_0^{(k)})| > 1; \quad (157)$$

čia  $m$  nusako iteracijų skaičių, reikalingą procesams nusistovėti. Stabilaus periodinio atraktoriaus Liapunovo eksponentė yra neigiama, tuomet (155) ir (157) sąlygos nėra išpildytos. Taigi staigaus divergavimo efektas nevyksta, jeigu skaliarinis iteracinis modelis  $\lambda_0^{(n+1)} = f(\lambda_0^{(n)})$  evoliucionuoja į stabilų periodinį režimą.  $\square$

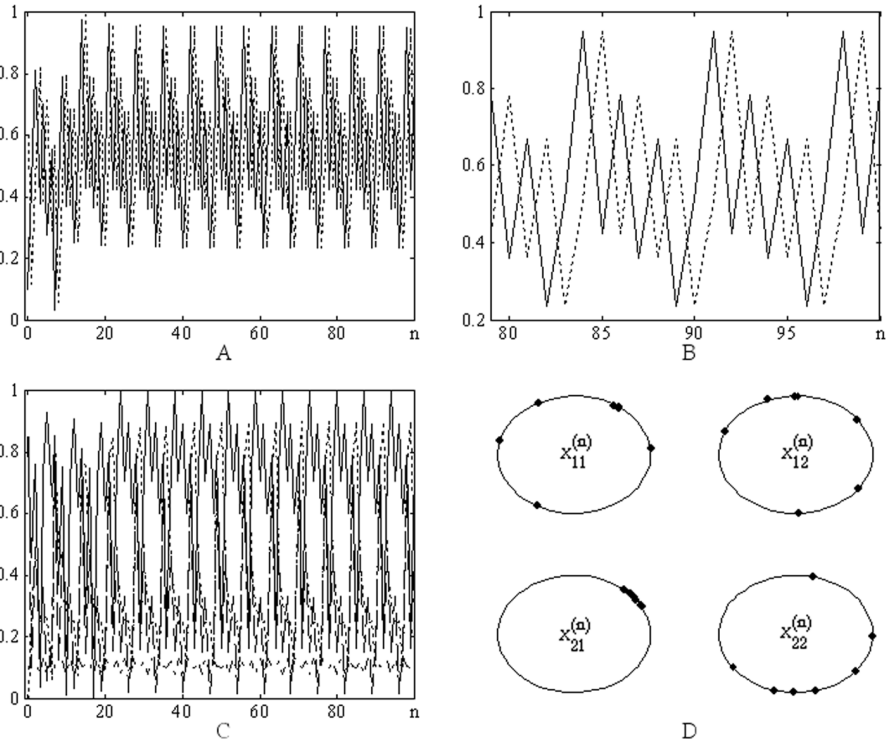
Pastebėsime, kad skaitinė parametro  $\mu_0^{(n)}$  reikšmė gali būti traktuojama kaip sistemos stabilumo įvertis.

*Skaitiniai eksperimentai.* Ankstesniame skyriuje buvo parodyta, kad staigaus divergavimo efektas atsiranda matriciniuose iteraciniuose modeliuose, kai pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė, o atitinkamo skaliarinio iteracinio modelio Liapunovo eksponentė yra teigiama. Teorinius rezultatus iliustruojame skaitiniais pavyzdžiais su logistiniu bei apskritiminiu iteraciniais modeliais. Šie modeliai atitinkamai nusakomi (1) ir (2) išraiškėmis. Kaip jau buvo minėta, logistinis iteracinis modelis yra paradigmatis modelis siekiant iliustruoti, kaip sudėtingas elgesys aprašomas labai paprasta netiesine dinamine lygtimi (Hilborn, 2000). Apskritiminis iteracinis modelis dažniausiai naudojamas fiksuotos fazės efektui iliustruoti bei širdies plakimui tyrinėti.

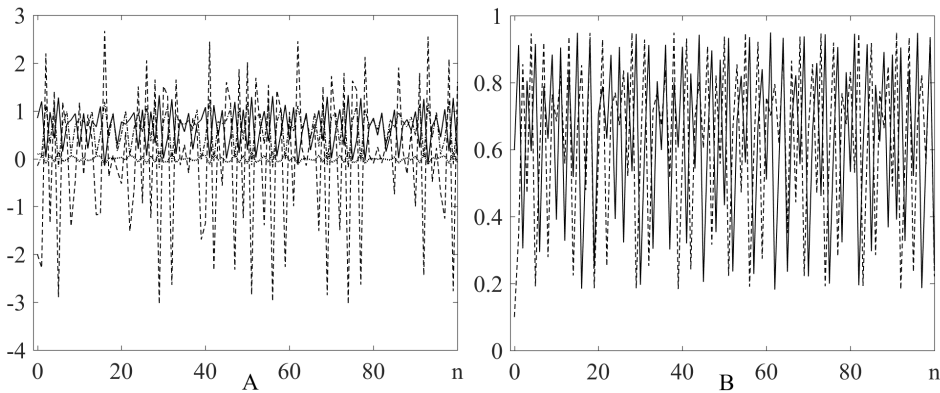
Matricinio apskritiminio iteracinio modelio evoliucija, kai pradinė matrica yra idempotentinė, pavaizduota 20 paveiksle. Pastebėsime, kad divergavimo efekto tokioje sistemoje nebus, abi tikrinės reikšmės nusistovi fiksuotos fazės 3:7 režimu. Divergavimo efekto taip pat nebus ir matriciniame logistiniame iteraciniame modelyje, kai pradinių sąlygų matrica idempotentinė, nors atitinkamo skaliarinio iteracinio modelio elgesys yra chaotinis (21 pav.); skaliarinio iteracinio modelio Liapunovo eksponentė lygi 0,4312.

Matricinio logistinio iteracinio modelio raida, kai pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė, vaizduojama 22 paveiksle. Pereinamųjų procesų metu matoma tendencija diverguoti, tačiau tik iki procesams nusistovint. Iteracinio modelio  $\lambda_0^{(n+1)} = a\lambda_0^{(n)}(1 - \lambda_0^{(n)})$  Liapunovo eksponentė yra neigiama ir lygi  $-0,8723$  (kai  $a = 3,5$ ). Taigi po didesnio iteracijų skaičiaus matricinio logistinio iteracinio modelio procesai nurimsta.

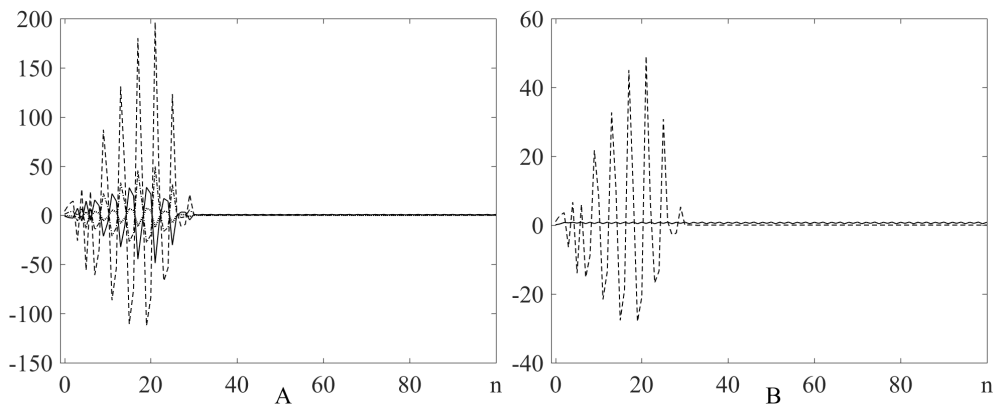
Staigaus divergavimo efektas matriciniame logistiniame iteraciniame modelyje vaizduojamas 23 paveiksle. Šiuo atveju tikrinės reikšmės iteracinio modelio Liapunovo eksponentė teigiama ir lygi 0,4312 (kai  $a = 3,8$ ), o sistema staigiai diverguoja (skaičiavimai stabdomi dėl skaitmenų persipildymo). Matricinio apskritiminio modelio procesų nusistovėjimas vaizduojamas 24 paveiksle. Iteracinio modelio  $\lambda_0^{(n+1)} = \lambda_0^{(n)} + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\lambda_0^{(n)})$  Liapunovo eksponentė yra neigiama ir lygi  $-0,0546$  (kai parametų reikšmės  $K = 4,4$  ir  $\Omega = 0,428$ ). Staigaus divergavimo efektas matriciniame apskritiminiame modelyje atsiranda, kai parametų reikšmės



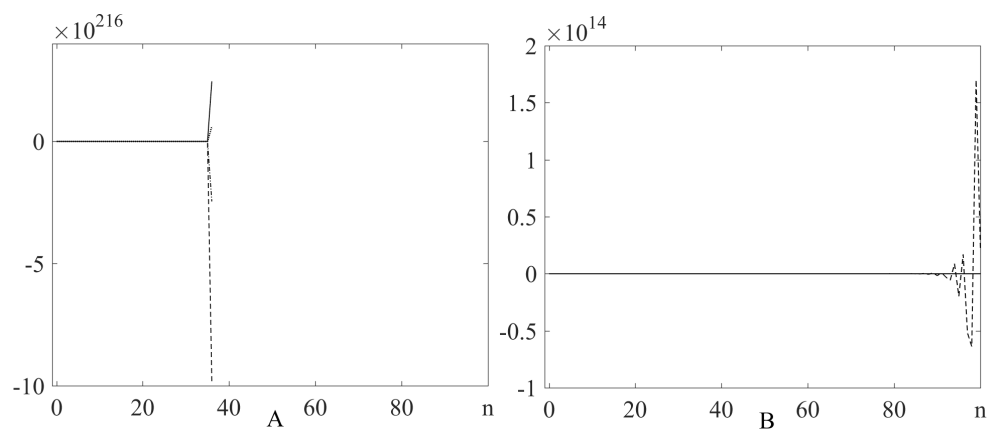
**20 pav.** Staigaus divergavimo efekto matriciniame apskritiniame modelyje nėra, kai pradinių sąlygų matrica yra idempotentinė ( $\tilde{\alpha} = 2, \tilde{\beta} = 8, \lambda_1^{(0)} = 0,1, \lambda_2^{(0)} = 0,6$ ); parametrų reikšmės  $K = 0,96$  ir  $\Omega = 0,428$  lemia 3:7 sinchronizaciją. A dalyje vaizduojama tikrinių reikšmių evoliucija intervale  $0 \leq n \leq 100$  ( $n$  – iteracijos numeris); B dalyje vaizduojama padidinta paveikslė A dalis intervale  $80 \leq n \leq 100$ ; C dalis vaizduoja elementų  $x_{11}^{(n)}, x_{12}^{(n)}, x_{21}^{(n)}, x_{22}^{(n)}$  kitimą; D dalis vaizduoja kiekvieno matricos elemento fazę po pereinamųjų procesų



**21 pav.** Matriciniame logistiniame iteraciniame modelyje divergavimo efekto nėra, kai pradinių sąlygų matrica yra idempotentinė ( $\tilde{\alpha} = 2, \tilde{\beta} = 8, \lambda_1^{(0)} = 0,1, \lambda_2^{(0)} = 0,6$ ); parametras  $a = 3,8$ . Paveikslė A dalyje vaizduojamas matricos elementų  $x_{11}^{(n)}, x_{12}^{(n)}, x_{21}^{(n)}, x_{22}^{(n)}$  kitimas; B dalyje vaizduojama tikrinių reikšmių evoliucija intervale  $0 \leq n \leq 100$  ( $n$  iteracijos numeris)



**22 pav.** Matriciniame logistiniame iteraciniame modelyje matoma tendencija diverguoti, tačiau procesai nurimsta pereinamiesiems procesams pasibaigus. Pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė ( $\tilde{\alpha} = 2, \tilde{\beta} = 8, \lambda_0^{(0)} = 0,1$ );  $a = 3,5$ . Paveikslo A dalyje vaizduojamas matricos elementų  $x_{11}^{(n)}, x_{12}^{(n)}, x_{21}^{(n)}, x_{22}^{(n)}$  kitimas; paveikslo B dalyje vaizduojama tikrinės reikšmės (—) ir parametro  $\mu_0^{(n)}$  (----) evoliucija

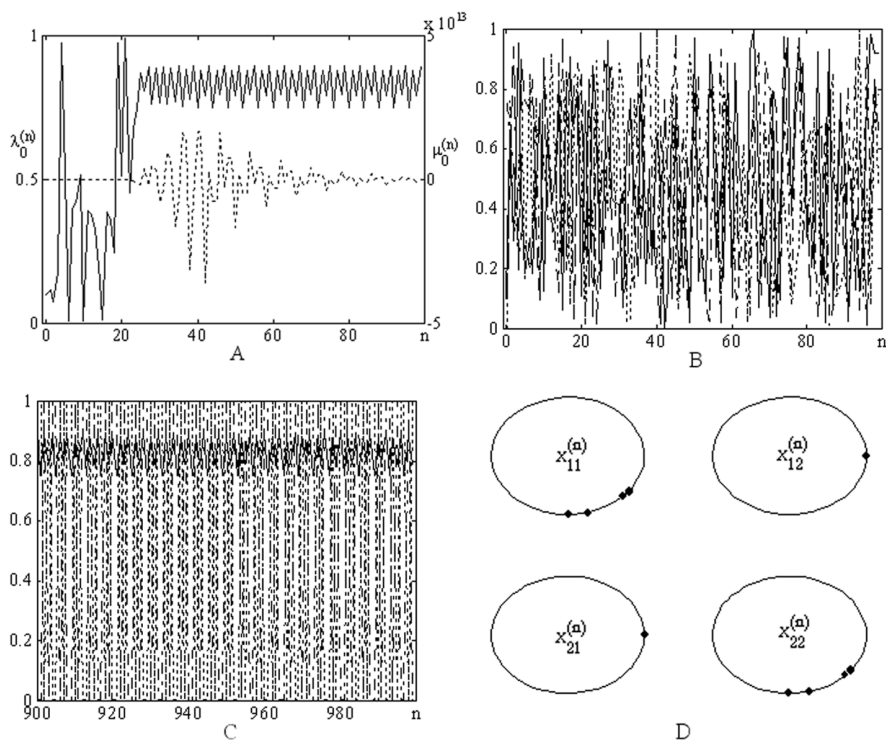


**23 pav.** Matriciniame logistiniame iteraciniame modelyje atsiranda staigus divergavimo efektas. Pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė ( $\tilde{\alpha} = 2, \tilde{\beta} = 8, \lambda_0^{(0)} = 0,1$ );  $a = 3,8$ . Paveikslo A dalyje vaizduojamas matricos elementų  $x_{11}^{(n)}, x_{12}^{(n)}, x_{21}^{(n)}, x_{22}^{(n)}$  kitimas; paveikslo B dalyje vaizduojama tikrinės reikšmės (—) ir parametro  $\mu_0^{(n)}$  (----) evoliucija

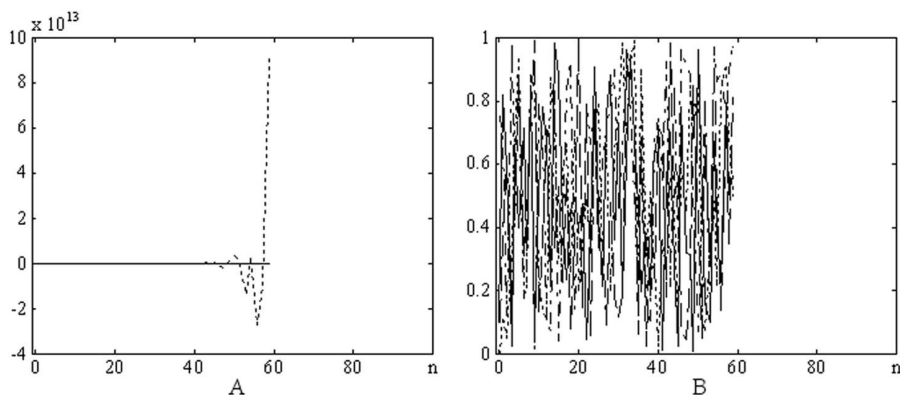
$K = 4,6$  ir  $\Omega = 0,428$  (25 pav.). Šiuo atveju atitinkamo skaliarinio apskritiminio iteracinio modelio Liapunovo eksponentė yra teigiama ir lygi  $0,4208$ .

### 3.4. Skyriaus išvados

Šiame skyriuje skaliarinį logistinį iteracinį modelį praplečiame, skaliarinį kintamąjį pakeisdami kvadratine kintamųjų matrica. Tiriame logistinio iteracinio modelio dinamines savybes, kai kintamasis yra antros eilės matrica. Parodome, kad logistinio iteracinio modelio vystymasis priklauso ne tik nuo parametrų, bet ir nuo pradinių sąlygų matricos tikrinių reikšmių. Skyriuje pateikti pavyzdžiai, iliustruojantys konver-



**24 pav.** Matriciniame apskritiniame iteraciniame modelyje matoma tendencija diverguoti, tačiau procesai nusistovi pasibaigus pereinamiesiems procesams. Pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė ( $\tilde{\alpha} = 2, \tilde{\beta} = 8, \lambda_0^{(0)} = 0,1$ );  $K = 4,4$  ir  $\Omega = 0,428$ . Paveikslo A dalyje vaizduojama tikrinės reikšmės (—) ir parametro  $\mu_0^{(n)}$  (----) raida; paveikslo B dalyje vaizduojamas matricos elementų  $x_{11}^{(n)}, x_{12}^{(n)}, x_{21}^{(n)}, x_{22}^{(n)}$  kitimas. C ir D vaizduojama sistemos evoliucija po pereinamųjų procesų (matricių elementai pavaizduoti C dalyje, o elementų fazės D dalyje)



**25 pav.** Matriciniame apskritiniame iteraciniame atsiranda staigus divergavimo efektas. Pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė ( $\tilde{\alpha} = 2, \tilde{\beta} = 8, \lambda_0^{(0)} = 0,1$ );  $K = 4,6$  and  $\Omega = 0,428$ . Paveikslo A dalis vaizduoja tikrinės reikšmės (—) ir parametro  $\mu_0^{(n)}$  (----) kitimą; B dalis vaizduoja elementų  $x_{11}^{(n)}, x_{12}^{(n)}, x_{21}^{(n)}, x_{22}^{(n)}$  kitimą

gavimą į periodinius atraktorius ir chaotinių procesų jautrumą pradinėms sąlygoms. Šiame skyriuje taip pat aprašytas divergavimo efektas apibendrintiems matriciniams iteraciniams modeliams, kai juos atitinkanti skaliarinė funkcija yra analizinė. Būtinios ir pakankamos divergavimo sąlygos išvestos ir iliustruotos skaitiniais eksperimentais.

Matriciniai iteraciniai modeliai gali būti pritaikyti įvairiose srityse. Literatūros apžvalgoje buvo paminėti keletas dvimačių diskrečių chaotinių iteracinių modelių pritaikymo būdų. Mes siūlome matricių iteracinio modelio pritaikymą konstruojant apibendrintus dvimačius iteracinius modelius. Tarkime, turime vektorių  $(p^{(n)}, q^{(n)})$ , kai  $p^{(n)}, q^{(n)} \in \mathbb{R}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Tuomet apibendrintas dvimatis diskretus iteracinis modelis:

$$\begin{aligned} (p^{(n+1)}, q^{(n+1)}) &:= (p^{(n)}, q^{(n)}) \cdot \mathbf{X}^{(n)}; \\ \mathbf{X}^{(n+1)} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(n)}); \end{aligned} \quad (158)$$

čia  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $(p^{(0)}, q^{(0)}) \neq (0, 0)$ ;  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra kvadratinė antros eilės matrica. Toks jungtinis matricinis iteracinis modelis apibendrina dvimačius diskrečius iteracinius modelius. Be to, tokio iteracinio modelio dinamika daug įdomesnė, palyginti su standartiniais diskrečiais iteraciniais modeliais. Ypatingas dėmesys turėtų būti atkreiptas į staigaus divergavimo efektą, kuris atsiranda (158) sistemoje, kai pradinųjų sąlygų matrica  $\mathbf{X}^{(0)}$  yra nulpotentinė, o iteracinio modelio  $\lambda_0^{(n+1)} = \mathbf{F}(\lambda_0^{(n)})$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) Liapunovo eksponentė yra teigiama.

Tarkime, kad  $\mathbf{X}^{(n)}$  yra nulpotentinis operatorius:

$$\mathbf{X}^{(n)} = \lambda_0^{(n)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu_0^{(n)} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \check{\alpha} & \check{\beta} \\ -\frac{\check{\alpha}^2}{\check{\beta}} & -\check{\alpha} \end{bmatrix}. \quad (159)$$

Tada:

$$\begin{aligned} (p^{(n+1)}, q^{(n+1)}) &= (p^{(n)}, q^{(n)}) \mathbf{X}^{(n)} \\ &= \left( \left( \lambda_0^{(n)} + \frac{\mu_0^{(n)} \check{\alpha}}{2} \right) p^{(n)} - \frac{\mu_0^{(n)} \check{\alpha}^2}{2\check{\beta}} q^{(n)}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\mu_0^{(n)} \check{\beta}}{2} p^{(n)} + \left( \lambda_0^{(n)} - \frac{\mu_0^{(n)} \check{\alpha}}{2} \right) q^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (160)$$

Taigi:

$$\begin{cases} p^{(n+1)} = \lambda_0^{(n)} p^{(n)} + \frac{\mu_0^{(n)}}{2} (\check{\alpha} p^{(n)} - \frac{\check{\alpha}^2}{\check{\beta}} q^{(n)}); \\ q^{(n+1)} = \lambda_0^{(n)} q^{(n)} + \frac{\mu_0^{(n)}}{2} (\check{\beta} p^{(n)} - \check{\alpha} q^{(n)}). \end{cases} \quad (161)$$

Pastebėsime, kad parametrai  $\check{\alpha}$  ir  $\check{\beta}$  yra tikrinių vektorių koordinatės, o  $\lambda_0^{(n)}$  yra tikrinė nulpotentinio operatoriaus  $\mathbf{X}^{(n)}$  reikšmė:

$$(\check{\alpha}, \check{\beta}) \xrightarrow{\mathbf{X}^{(n)}} \lambda_0^{(n)} (\check{\alpha}, \check{\beta}). \quad (162)$$



## 4. ELEKTROKARDIOGRAFINIŲ PARAMETRŲ TYRIMAS

Kompleksinių sistemų teorijoje sistema yra sudaryta iš tarpusavyje glaudžiai susijusių komponentių, kurių kiekviena negali būti vertinama individualiai, nes sistemos dedamosios dalys tarpusavyje glaudžiai susijusios. Sistemos komponentės sąveikauja tarpusavyje, taip nulemdamos visos sistemos veiklą. Žmogus taip pat yra kompleksinė sistema, todėl individo fiziologinės sistemas reikia vertinti kaip visumą – sistemų pokyčius kitų sistemų atžvilgiu (Costa et al., 2008).

Remdamasis kompleksinių sistemų teorija, dar 1996 m. savo habilitaciniame darbe prof. A. Vainoras pristatė žmogaus organizmo kaip kompleksinės sistemos modelį (10 pav.). Vėliau remiantis šiuo modeliu buvo sudaryta žmogaus organizmo būklės vertinimo schema ir pristatyta sąsajų tarp atskirų organizmo sistemų vertinimo metodika (12 pav.).

Sąsajų vertinimo metodika pagrįsta matricų struktūriniais dėstiniais. Specialus antros eilės kvadratinų matricų dėstinys ir skaidymas į tris klases buvo pristatytas antroje disertacijos skyriuje (2.4 skyrius). Toks matricų klasifikavimas yra ypač svarbus tiriant netiesinių sistemų matricinius iteracinius modelius bei sprendinių divergavimo efekto, nebūdingo kitokiems iteraciniams modeliams, atsiradimo priežastis (3 skyrius) (Navickas et al., 2011; Navickas et al., 2012).

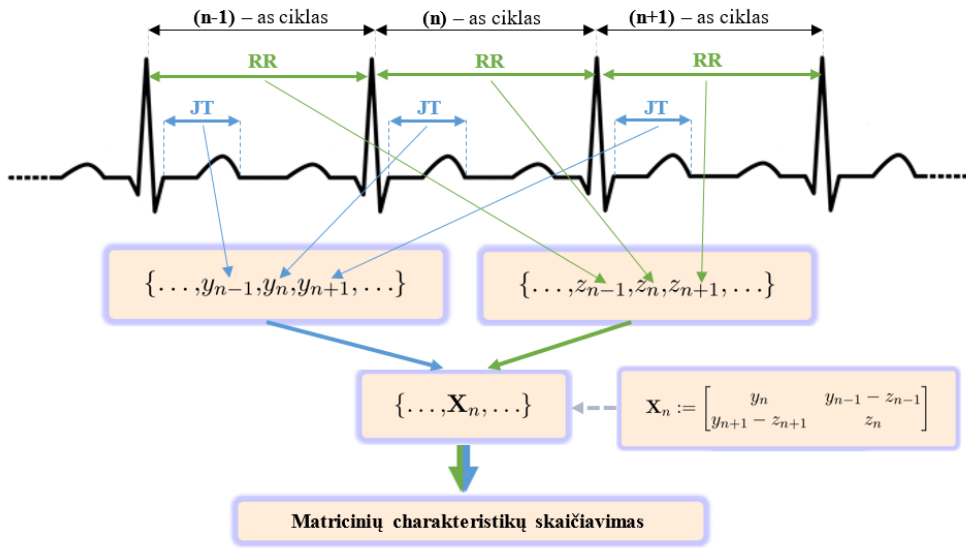
Žmogaus organizmas taip pat yra netiesinės sistemos pavyzdys, todėl, remiantis žmogaus kaip kompleksinės sistemos modeliu, buvo sudaromos antros eilės kvadratinės matricos ir nagrinėjama jų struktūra. Matricos struktūrą galima nusakyti diskriminantu, tikrinėmis reikšmėmis, pėdsaku, struktūriniais koeficientais ir pan. (2.3.3 skyrius). Todėl vienas iš šio disertacinio darbo uždavinių yra panagrinėti platesnę reikšmingų parametrų aibę.

Tyrime buvo naudojami graikų-romėnų imtynininkų elektrokardiografiniai įrašai pritaikius Ruffjė testo krūvio mėginį. Darbe taip pat nagrinėjami EKG įrašai, gauti koronarinės angioplastikos procedūros metu: prieš, per ir po procedūros. Apibendrintai pademonstruota, kad matricų analizė gali būti pritaikyta ne tik EKG duomenims, bet ir kitokiems signalams – širdies susitraukimų dažnio ir Žemės lokalaus magnetinio lauko ryšio dinamikai vertinti.

### 4.1. Dviejų sinchroninių signalų dinaminių sąsajų vertinimas

Šiame skyriuje aptariama metodika, leidžianti vertinti dviejų signalų dinamines sąsajas realiu laiku. Siūlomai metodikai reikalingi tik trys signalo atskaitos taškai (praeitės, dabarties ir ateities). Statistiniai metodai šiuo atveju nėra tinkami, nes vertinami didesnės imties duomenys ir taip prarandama momentinė informacija. Trumpai siūlomą tarpparametrinių sąsajų vertinimo metodiką galima pateikti schema (26 pav.), o žemiau kiekvienas etapas aprašytas išsamiau.

*Elektrokardiografiniai duomenys ir jų charakteristikos.* Pirmiausia derėtų apžvelgti, kokie elektrokardiografiniai duomenys buvo naudoti atliekant skaičiavimus. Gydytojų kardiologų patarimu tiriant asmenų, pasižyminčių patologijomis (pvz., ser-



26 pav. Elektrokardiografinių parametų sąsajų vertinimo metodika

gančių ūminiu miokardo infarktu), elektrokardiografinius duomenis, derėtų nagrinėti tos derivacijos duomenis, kurioje patologiniai pakitimai pasireiškia labiausiai (Jeon et al., 2014).

Remiantis žmogaus, kaip kompleksinės sistemos, fenomenologiniu modeliu (11 pav.), šiame darbe buvo nagrinėti penki pagrindiniai elektrokardiografiniai parametrai (6 pav.):

- RR intervalas, matuojamas ms, – tai laiko tarpas tarp dviejų gretimų R dantelių – laiko intervalas tarp dviejų širdies susitraukimų. Literatūroje dažnai sutinkamas atvirkščias dydis – širdies susitraukimų dažnis (angl. *heart rate*)  $HR = 60000/RR$ . RR intervalu gali būti apibūdinta viso organizmo būseną;
- DJT (ms) – JT intervalo trukmė – nuo jungties taško J iki T bangos pabaigos. DJT apibūdina skilvelių repoliarizacijos trukmę. JT intervalo pokyčiams įtaką daro reguliacinė nervų sistema. Taip pat žinoma, kad organizmo medžiagų apykaitos procesų pokyčiai yra susiję su repoliarizacijos pokyčiais. JT intervalas fizinio krūvio metu trumpėja;
- AR ( $\mu V$ ) – R dantelio amplitudė. AR parametras glaudžiai susijęs su kvėpavimo sistema;
- DQRS (ms) – QRS komplekso trukmė. Šis intervalas apibūdina širdies vidinę reguliaciją;
- AT ( $\mu V$ ) – T bangos amplitudė. Ši amplitudė apibūdina širdies vidinę metabolinę sistemą bei širdies viduje vykstančius medžiagų apykaitos procesus;
- ST (ms) – ST intervalo trukmė – nuo S bangos pabaigos, t. y. nuo jungties taško J, iki T bangos pradžios. Šis segmentas svarbus siekiant nustatyto patologijas,

tokias kaip miokardo infarktas (ST padidėjimas) ir išemija (ST sumažėjimas).

Anksčiau minėti elektrokardiografiniai parametrai yra dažniausiai nagrinėjami literatūroje. Be to, parametų sąsajos apibūdina širdies darbą: RR, DJT, AR nagrinėja sisteminių lygmenį, RR, DJT, DQRS sąveikos nusako vidinius širdies reguliacinius procesus, RR, DJT, AT sąveikos apibūdina vidinius širdies medžiagų apykaitos procesus.

*Matricų sekos sudarymas.* Remiantis anksčiau pristatytu A. Vainoro modeliu bei faktu, jog žmogaus organizmas reaguoja ne tiek į poveikio absoliutų dydį, kiek į poveikio pokytį (pvz., temperatūros pokytis, šviesos intensyvumo pokytis ir pan.), buvo sudaryta pirmos eilės Lagranžo skirtumų matrica. Matricos elementai sudaryti iš dviejų sekų.  $n$ -tajai matricai sudaryti reikia trijų momentų kiekvienos sekos narių:  $n - 1, n, n + 1$ . Tarkime, turime dvi skaitines sekas  $Y = (y_0, y_1, y_2, \dots)$  ir  $Z = (z_0, z_1, z_2, \dots)$ , atitinkančias realius duomenis (pvz., elektrokardiografinių parametų sekas). Iš duotų sekų sudaroma matricų seka  $\mathbf{X}_n$ :

$$\mathbf{X}_n := \mathbf{X}_n(Y, Z) = \begin{bmatrix} y_n & y_{n-1} - z_{n-1} \\ y_{n+1} - z_{n+1} & z_n \end{bmatrix}; \quad (163)$$

čia  $n = 1, 2, \dots$  Kadangi nagrinėjami ryšiai tarp skirtingų elektrokardiografinių parametų, kurie skiriasi ne tik kitimo intervalais, bet ir matavimo vienetais, todėl, prieš atliekant bet kokius skaičiavimus, duomenys turi būti normuojami į intervalą  $[0; 1]$  (Etzkorn, 2012; Zolfagharian et al., 2012):

$$\hat{y}_n = \frac{y_n - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}; \quad (164)$$

čia  $n$  – kardiociklo numeris;  $\hat{y}_n$  – normuota parametro reikšmė taške  $n$ ;  $y_n$  – pradinė parametro reikšmė taške  $n$ ;  $y_{\min}, y_{\max}$  – fiziologinės parametų mažiausia ir didžiausia reikšmės (2 lent.).

## 2 lentelė. Fiziologinės kardiologinių parametų ribos

Parametras	Apatinė fiziologinė riba	Viršutinė fiziologinė riba
RR, ms	300	1400
DJT, ms	100	400
DQRS, ms	60	140
AR, $\mu\text{V}$	300	2500
AT, $\mu\text{V}$	-800	1200
ST, $\mu\text{V}$	-800	1200

*Antros eilės matricos dėstinys, skirtas kardiologiniams signalams tirti.* Kita vertus, antros eilės matricų struktūros svarba išsamiai išnagrinėta 2 skyriuje. Todėl kiekvieną (163) sekos matricą galima nagrinėti atskirai skaičiuojant vienokius ar kitokius jos struktūrą nusakančius dydžius. Tegul duota antros eilės matrica  $\mathbf{X} := \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ . Tuomet, remiantis (107) išraiška, matrica gali būti išreikšta trijų komponentų dėstiniu, kurio idempotentai ir nulpotentai priklauso nuo vieno parametro ir užrašyti (104)

išraiškėmis. Taigi, pertvarkius dėstinį (107) ( $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2\beta_0$ ), gaunama:

$$\mathbf{X} := \frac{x_{11} + x_{22}}{2} \cdot \mathbf{I} + \frac{\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}}}{2} \begin{bmatrix} 0 & \beta_0 \\ \frac{1}{\beta_0} & 0 \end{bmatrix} + \frac{x_{11} - x_{22}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \beta_0 \\ -\frac{1}{\beta_0} & -1 \end{bmatrix}; \quad (165)$$

čia  $\beta_0 = \frac{-(x_{11}-x_{22})+\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}}}{2x_{21}} = \frac{2x_{12}}{\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}}+(x_{11}-x_{22})}$ , kompleksinė kvadratinė šaknis  $\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}}$  turi dvi reikšmes. Prisiminsime, kad teisingos lygybės  $\lambda_k = \frac{1}{2} (\text{Tr } \mathbf{X} + \sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}})$  ( $k = 1, 2$ ),  $\text{Tr } \mathbf{X} = x_{11} + x_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $\frac{\sqrt{\text{dsk } \mathbf{X}}}{2} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$ . Taigi tikslinga skaičiuoti koeficientus:  $\text{dsk } \mathbf{X}$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2, \beta_0, \text{Tr } \mathbf{X}$ .

*Diskriminantų seka tarp dviejų dydžių.* Didžiausias dėmesys iš visų matricinių charakteristikų ilgą laiką buvo skiriamas antros eilės matricos diskriminantų sekos tyrimui (Berskiene et al., 2008; Bikulciene et al., 2009; Berškienė, 2009; Berskiene et al., 2009; Muntianaitė-Dulkinienė et al., 2009; Kriaunavičienė et al., 2011). Antrame teorijai skirtame skyriuje pateiktas matricių skirstymas į grupes, o vienas pagrindinių parametru, lemiantis priklausomybę grupei, yra diskriminantas – reikšmė lygi nuliui ar ne.

Tegul duotos dvi skaitinės sekos  $y_0, y_1, y_2, \dots$  ir  $z_0, z_1, z_2, \dots$ . Galima sudaryti matricų seką  $\mathbf{X}_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) pagal (163) išraišką. Tuomet diskriminanto išraiška:

$$\text{dsk } \mathbf{X}_n = (y_n - z_n)^2 + 4(y_{n-1} - z_{n-1})(y_{n+1} - z_{n+1}); \quad (166)$$

čia  $n = 1, 2, \dots$ . Be to, galima sudaryti diskriminantų seką  $\text{dsk } \mathbf{X}_1, \text{dsk } \mathbf{X}_2, \dots$ . Diskriminantų sekai, sudarytai pagal (166) išraišką bet kokioms dviem skaitinėms sekoms  $Y$  ir  $Z$ , būdingos savybės:

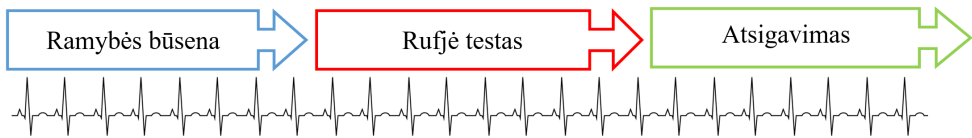
1.  $\text{dsk } \mathbf{X}(Y, Z) = \text{dsk } \mathbf{X}(Z, Y)$ .
2.  $\text{dsk } \mathbf{X}(Y + Q, Z + Q) = \text{dsk } \mathbf{X}(Y, Z)$ .
3.  $\text{dsk } \mathbf{X}(Y, Z) = \text{dsk } \mathbf{X}(Y - Z, O)$ ; čia  $Y - Z = (y_0 - z_0, y_1 - z_1, \dots)$ ,  $O = (0, 0, \dots)$ .
4.  $\text{dsk } \mathbf{X}(Y, Y) = (0, 0, \dots)$ .
5.  $\text{dsk } \mathbf{X}(Y, Y + a) = (5a^2, 5a^2, \dots) = a^2 \text{dsk } \mathbf{X}(\mathbb{1}, O)$ ; čia  $\mathbb{1} = (1, 1, \dots)$ .
6.  $\text{dsk } \mathbf{X}(Y, bY) = (1 - b)^2 \text{dsk } \mathbf{X}(Y, O)$ .
7.  $\text{dsk } \mathbf{X}(a, b) = (5(a - b)^2, 5(a - b)^2, \dots)$ .

čia  $Y, Z$  yra skaitinės sekos,  $a, b$  yra bet kokie kompleksiniai skaičiai.

## 4.2. Imtynininkų elektrokardiografinių duomenų analizė

Asmenys, lankantys bet kokias kūno kultūros ar sporto pratybas, privalo reguliariai tikrintis sveikatą. Sveikatos tyrimą sudaro ne vien kraujo ar šlapimo analizė, bet ir aibė testų, kurių metu vertinama organizmo funkcinė būklė ar fizinis parengtumas, analizuojamos fiziologinės reakcijos į krūvį. Šiame darbe buvo panaudoti vieno tokių tyrimų, Ruffjė testo, elektrokardiografiniai duomenys, o organizmo funkcinės būklės pokyčiai vertinami panaudojant šiame darbe pristatytą metodiką (Venskaitytė et al., 2011; Vainoras, 2002; Venskaityte et al., 2009).

Buvo tirta 14 lietuvių sportininkų, užsiimančių graikų-romėnų imtynėmis. Tirtų sportininkų amžius nuo 22–26 metų, ūgis 180 cm ( $\pm 30$  cm), svoris 90 kg ( $\pm 10$  kg). Sportininkai buvo suskirstyti į dvi grupes: ilgą (daugiau nei 5 metai) ir trumpą (mažiau nei 5 metai) sportavimo stažą turintys sportininkai. Testo metu sportininkai turėjo atlikti Ruffjė fizinio krūvio mėginį – 30 pritūpimų per 45 sekundes, kojas per kelio sąnarį sulenkdami 90 laipsnių kampu. Viso tyrimo metu buvo registruojama 12 derivacijų elektrokardiograma. Duomenys testavimo metu buvo suskirstyti į keturis etapus: ramybės, fizinio krūvio, atsigavimo pradžios (1 min.) bei atsigavimo pabaigos (1 min.) (27 pav).

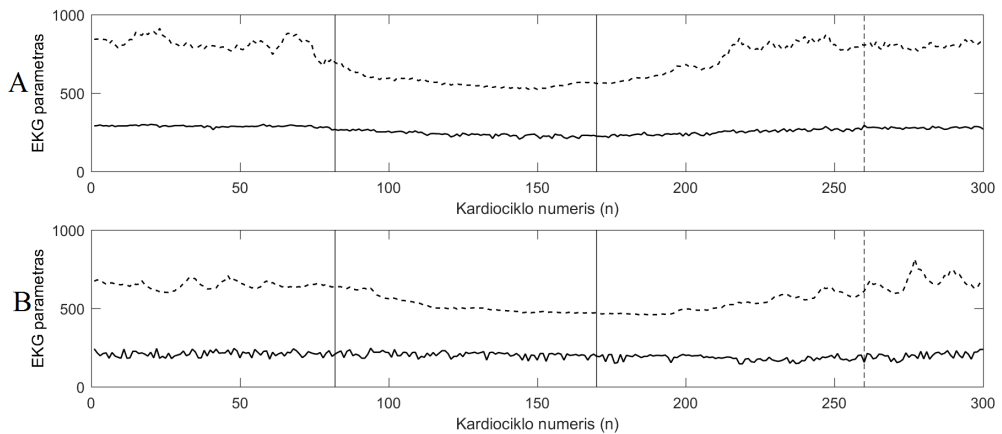


27 pav. Elektrokardiogramos registravimas

Kompleksinių sistemų teorija žmogų traktuoja kaip nedalomą visumą, todėl ir atskirų organizmo sistemų analizė nėra tinkamas sprendimas vertinant individo būklę. Kadangi pagrindinės žmogaus organizmo sistemos yra holistinės, o pokyčiai (didesni ar mažesni) vienoje sistemoje lems pokyčius ir kitoje, todėl aktualu stebėti ryšio tarp sistemų dinamiką. Ryšiui tarp kelių biosignalų vertinti literatūra siūlo nemažai metodų (1.5.3 skyrius), tačiau pagrindinė problema, kad dauguma jų yra statistiniai ir reikalauja didelių duomenų kiekių bei pateikia pernelyg apibendrintą informaciją. Tiriant sportuojančio asmens sveikatą, svarbu analizuoti momentines organizmo reakcijas į krūvį, t. y. stebėti, kaip kinta sistemų tarpusavio ryšys atsiradus krūviui ar kaip greitai organizmas geba atsigausti po krūvio. Taip ne tik nustatomi sveikatos sutrikimai, bet ir vertinamas fizinis pasirengimas.

Panagrinėkime graikų-romėnų imtynininkų Ruffjė testo elektrokardiografinius duomenis – RR ir DJT intervalų trukmes (ms). Šie parametrai nusako sisteminį organizmo lygmenį, t. y. sąsaja tarp šių parametru atskleidžia reguliacinės sistemos ir aprūpinančios sistemos tarpusavio ryšio ypatumus ir dinamiką besikeičiančių organizmo būsenų atžvilgiu. Minėtų elektrokardiografinių parametru sąsajos tyrimas buvo nagrinėjamas tiriamiesiems taikant krūvio mėginį. Pradiniai duomenys pavaizduoti 28 paveiksle. Paveikslo A dalyje pavaizduotos RR ir DJT parametru reikšmės ilgesnė sportavimo patirtį turinčiam sportininkui, o B dalyje – trumpesnė. Vertikaliomis raudonomis linijomis atskirti tyrimo etapai: ramybės būseną, Ruffjė testas ir atsigavimo (pirmoji ir antroji minutės). Pastebima, kad RR ir DJT parametrai, nusakantys skirtingus organizmo procesus, yra susiję, tačiau vizualiai ryšio kitimą nustatyti sunku.

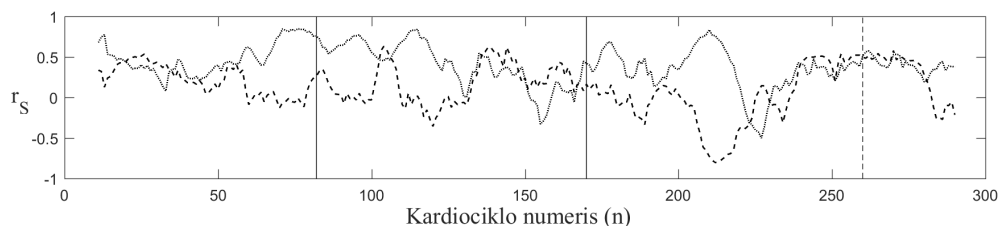
Koreliacijos koeficientas yra vienas iš literatūroje taikomų metodų ryšiui tarp dviejų signalų ar sekų nustatyti. Šiame darbe buvo pasirinktas *Spirmano ranginis koreliacijos koeficientas*  $r_S$  (42), nes jis nereikalauja ypatingo duomenų skirstinio (1.5.3



**28 pav.** Elektrokardiografinių parametų reikšmės: RR (----) ir DJT (—) intervalai. A pav. ilgesnės nei 5 metus sportavimo patirtį turinčio, o B dalis trumpesnės nei 5 metus sportavimo patirtį turinčio imtynininko duomenis

skyrus). Spirmano koreliacijos koeficientai buvo skaičiuoti elektrokardiografinių parametų porai. Kadangi norima stebėti elektrokardiografinių parametų ryšio kitimą, todėl buvo skaičiuojama Spirmano koreliacijos koeficientų seka – imamas tam tikro dydžio slenkantis langas. Vienam Spirmano koreliacijos koeficientui paprastai rekomenduojama imti ne mažiau nei 20 reikšmių (ITRC, 2013). Taigi  $n$  stebinių turinčiai kiekvienai sinchroniškai fiksuotai elektrokardiogramos parametų porai gaunama  $n - 20$  Spirmano koreliacijos koeficientų seka.

Klasikinėje biosignalų analizėje plačiai naudojamas Spirmano koreliacijos koeficientas šiuo atveju taip pat papildomos informacijos apie šių dviejų sportininkų fizinio pasirengimo skirtumus nepateikia. 29 pav. vaizduojamos Spirmano koreliacijos koeficientų sekos RR ir DJT parametų porai. Koreliacijos koeficientų reikšmės kinta viso testo metu, ir, remiantis šių koeficientų dinamika, įvardinti, pavyzdžiui, kad ir bent apytiksles krūvio etapo ribas tiesiog nėra įmanoma, o juo labiau išvelgti skirtumų tarp nevienodą sportavimo patirtį turinčių sportininkų duomenų.



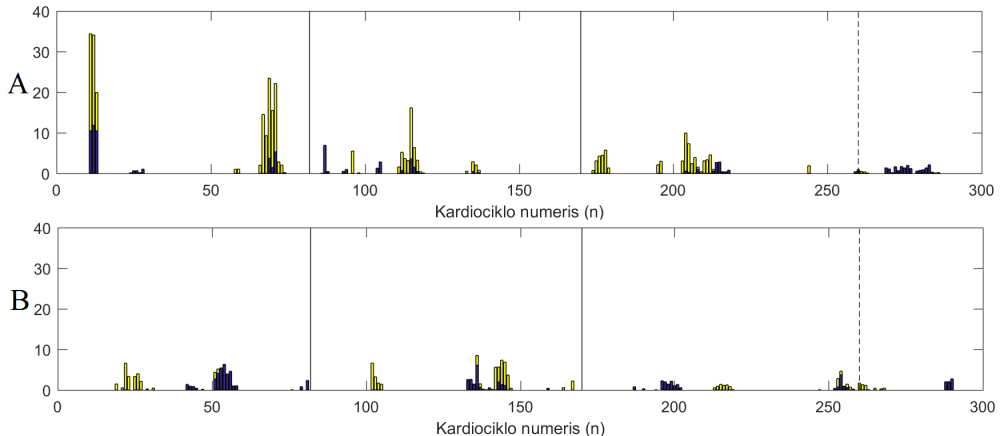
**29 pav.** Spirmano koreliacijos koeficientų seka RR ir DJT parametų porai: ilgesnės sportavimo patirtį turinčio (—) ir trumpesnės sportavimo patirtį turinčio (----) imtynininko duomenys

*Grangerio priežastingumo testas* buvo aprašytas 1.5.3 skyriuje. Dviejų vienu metu matuotų signalų  $y_1, \dots, y_i, \dots, y_n$  ir  $z_1, \dots, z_i, \dots, z_n$  Grangerio priežastingu-

mas vertinamas pasitelkus vienmačius ((51) ir (52)) bei dvimačius ((53) ir (54)) autoregresinius modelius. Jeigu  $Z$  prognozė gaunama geresnė modelį papildžius informacija apie signalą  $Y$ , tuomet laikoma, kad  $Y$  lemia  $Z$  ( $Y \rightarrow Z$ ). Grangerio priežastingumo testas taikomas tik stacionariems procesams.

Šiame darbe buvo tiriamas RR ir DJT parametrų Grangerio priežastingumo ryšys. Buvo panaudotas kodas<sup>22</sup>. Grangerio priežastingumo ryšys buvo skaičiuojamas kiekvienam 20 reikšmių langui. Nors įprastai imamos daug didesnės imtys, tačiau praktikoje, ypač atliekant ekonominius skaičiavimus, tenka atlikti ir mažai duomenų turinčių procesų Grangerio priežastingumo testą. Kiekvienam slenkančiam langui buvo skaičiuojama Fišerio statistikos reikšmė  $F$  bei nustatoma  $\alpha$  lygmens kritinė statistikos reikšmė  $c_F$ . Jeigu  $F > c_F$ , tada hipotezė, kad Grangerio priežastingumo tarp kintamųjų nėra, yra atmetama.

Patyrinėkime ryškiausių abiejų grupių atstovų duomenis. 30 pav. ordinačių ašyje vaizduojama statistikos reikšmė, kuria apskaičiuota Fišerio statistikos reikšmė viršija  $\alpha$  lygmens kritinę statistikos reikšmę. Paveiksluose vaizduojamas tiek RR→DJT (žymi mėlyna spalva), tiek DJT→RR (žymi geltona spalva) Grangerio priežastingumas. 30 pav. A dalyje vaizduojamas Grangerio priežastingumas vertinant daugiau nei penkerius metus sportuojančio imtynininko duomenis. 30 pav. B dalyje vaizduojamas Grangerio priežastingumas vertinant mažiau nei penkerių metų patirtį turinčio imtynininko duomenis. Duomenų stacionarumas buvo tikrinamas taikant Dickey ir Fullerio testą<sup>23</sup>. Didesnę sportavimo patirtį turinčiam sportininkui parametrų RR ir DJT



**30 pav.** Paveikslu ordinačių ašis vaizduoja skirtumą tarp apskaičiuotos Fišerio statistikos įvertinio  $F$  ir kritinės statistikos reikšmės  $c_F$ . Mėlyna spalva žymimas priežastingumas RR→DJT, o geltona žymimas priežastingumas DJT→RR. A paveiksle pavaizduota daugiau nei 5 metus sportuojančio imtynininko duomenys, B dalyje mažiau nei 5 metus sportuojančio duomenys

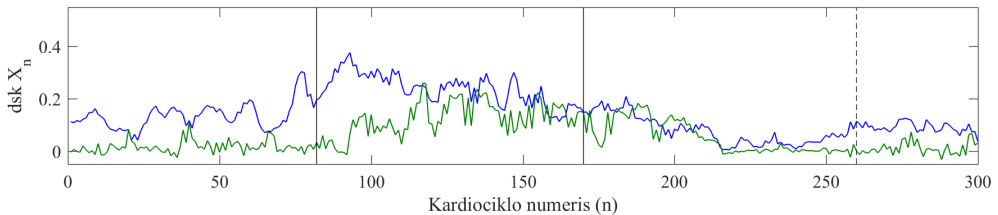
<sup>22</sup>MATLAB kodą, funkciją `granger_djt`, patobulino dr. R. Boldi (Zayed universitetas, Dubajus, JAE, 2015), ankstesnio kodo, parašyto dr. Chandler Lutz (Kalifornijos universitetas, JAV, 2009) pagrindu. Prieiga internetu <https://se.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/25467-granger-causality-test>

<sup>23</sup>Stacionarumo testui atlikti buvo panaudota MATLAB paketo `adftest` funkcija.

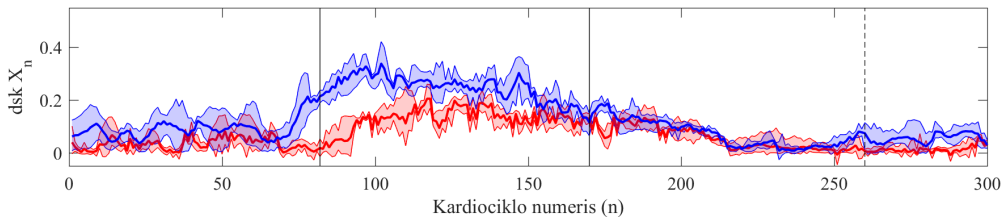
Grangerio priežastingumas atrodo labiau atsitiktinis nei formuojantis aiškias tendencijas atskirais ramybės, krūvio bei atsigavimo etapais (RR duomenų tinkamumas (tenkinamas stacionarumo testas) 95,9 proc., o DJT – 100 proc.). Grangerio priežastingumas (RR→DJT ar DJT→RR) buvo pastebimas 30 proc. duomenų. Trumpesnę patirtį turinčio sportininko Grangerio priežastingumas taip pat neišskiria nei vieno iš tyrimo etapų – nedidelės fliktuacijos matomos viso tyrimo metu (RR duomenų stacionarumas 90,9 proc., o DJT – 100 proc.). Šiam sportininkui Grangerio priežastingumas buvo fiksuotas 29,3 proc. RR ir DJT duomenų.

*Struktūrinė matricų analize paremta* metodika siūlo nagrinėti matricos struktūrą nusakančius matus. Vienas tokių dydžių yra matricos diskriminantas. Diskriminantų dsk  $X_n$  seka, suformuota iš RR ir DJT parametrų sekų, dviem skirtingą sportavimo patirtį turintiems sportininkams pavaizduota 31 paveiksle. Esant ramybės būsenai, sistemų būklė išliko stabili (nedidelės fliktuacijos), fizinio krūvio metu sąsaja (diskriminantui atvirksčiai proporcingas dydis) tarp sistemų sumažėdavo, o atsigavimo metu sąsaja vėl padidėdavo. Ryškiausi skirtumai tarp šių dviejų sportininkų kategorijų atstovų pastebimi tyrimo etape, kai buvo taikytas krūvio mėginys. Buvo pastebėta, jog staigėnis diskriminantų reikšmių kitimas prasidėjęs krūviui būdingas sportininkams, turintiems ilgesnę sportavimo patirtį. Trumpesnę patirtį turintiems sportininkams būdinga reakcija į krūvį ne tokia ryški diskriminantų atžvilgiu kaip ilgesnę sportavimo patirtį turinčių sportininkų. Kreivės, apie kurias svyruoja diskriminantų reikšmės, abiejose sportininkų grupėse pateikiamos 32 paveiksle. Diskriminantų vidurkiai visais trimis tyrimo etapais abiem grupėms pateikti 3 lentelėje.

Atliekant dinaminių sistemų tyrimą, patogu įvesti fazinę erdvę. Fazinė erdvė



**31 pav.** Diskriminantų seka RR ir DJT parametrų porai: mėlyna spalva žymi ilgesnę sportavimo patirtį turinčio, o žalia – trumpesnę sportavimo patirtį turinčio imtynininko duomenis



**32 pav.** Diskriminantų sekos RR ir DJT parametrų poroms tiriamiesiems ramybės, Ruffė testo ir atsigavimo etapais. Mėlyna spalva žymi ilgesnę, o raudona – trumpesnę sportavimo patirtį turinčių imtynininkų diskriminantų sekas

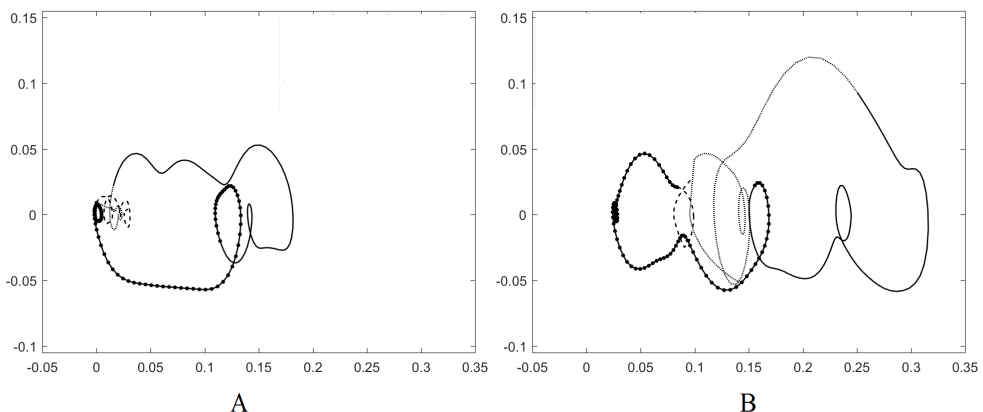


**3 lentelė.** Diskriminantų dsk  $X_n$  vidurkiai skirtingais tyrimo etapais

	Ramybė	Krūvis	Atsigavimas (I min.)	Atsigavimas (II min.)
Mažiau nei 5 metus sportuojantys	0,033	0,128	0,054	0,013
Daugiau nei 5 metus sportuojantys	0,092	0,246	0,072	0,056

patogi atliekant kokybinį dinaminės sistemos aprašymą ir pateikiant sistemos evoliuciją geometrinio pavidalu. Fazinė plokštuma parodo miokardo repoliarizacijos procesų homogeniškumą, kai širdies veikla padidėja atliekant fizinę krūvį (Alabdulgade et al., 2015; Venskaitytė et al., 2010). Gauti rezultatai parodė, kad svyravimai atsiranda nagrinėjamo elektrokardiografinio signalo pradžioje. Priklausomai nuo testo etapo, suformuojamas atraktorius, pereinant į kitą etapą, atsiranda bifurkacijos ir susiformuoja nauja stabili būsena. Šąsaja mažėja didėjant treniruočių sesijos numerui.

Pastebėta, jog skirtingus fazinius vaizdus lėmė tiek fizinis krūvis, tiek sportininko patirtis (33 pav.). Didelį sportavimo stažą turinčių imtynininkų RR ir DJT intervalų diskriminantai yra labiau išreikšti nei mažesnę patirtį turinčios tiriamosios grupės atstovų. Ilgiau sportuojančių imtynių atstovų nagrinėjamų rodiklių atžvilgiu efektyviau vystosi simpatinės nervų sistemos aktyvėjimas, kuris siejamas su padidėjusia medžiagų apykaita. Šių sportininkų reguliacinė ir aprūpinančios sistemos labiau adaptuotos fiziniam krūviui, todėl persireguliacijos procesai bei juos lydintios perturbacijos vyksta daug sparčiau. Didesnę sportavimo patirtį turinčio sportininko elektrokardiografinių parametrų diskriminantų fazinėje plokštumoje formuojamas atsigavimo etapo atraktorius turi mažesnes diskriminanto reikšmes nei pradinio ramybės būsenos etape, tai reiškia, kad po fizinio krūvio sportininko organizmo sistemos sparčiai atsigavo ir nėra

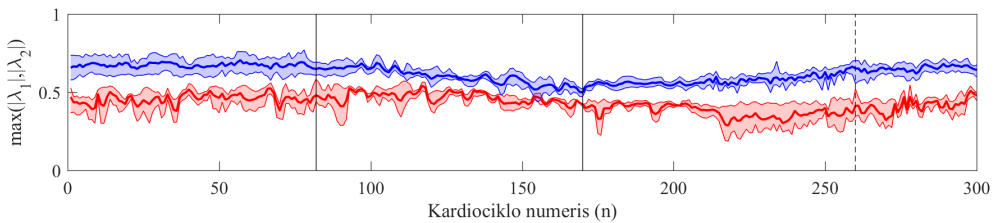


**33 pav.** Abscisių ašis žymi diskriminantą dsk  $X_n$ , ordinačių ašis žymi diskriminanto pokytį. Paveikslo A dalyje pavaizduoti mažesnę nei 5 metų, o paveikslo B dalyje didesnę nei 5 metų sportavimo patirtį turinčio imtynininko duomenys, skirtingais tyrimo etapais: ramybės (.....), krūvio (—), pirmą atsigavimo minutę (—→) ir antrą atsigavimo minutę (---)

liekamojo nuovargio požymių. Mažesnę sportinę stažą turinčiam imtynininkui ramybės ir atsigavimo etapų formuojami atraktoriai nesutampa, t. y. dėl liekamojo nuovargio organizmo sistemos nesugeba sugrįžti į pradinį lygį per dvi registruojamas atsigavimo minutes po krūvio.

Tikrinių reikšmių sekų dinamika yra visiškai kitokia nei diskriminantų, tačiau šiuo atveju matoma aiški atskirtis tarp dviejų sportininkų grupių – nėra bendrų (persidengiančių) sričių (34 pav.). Vidurkiai atskirais tyrimo etapais skiriasi nedaug (4 lent.). Matricos pėdsakų sekų kitimas leistų išskirti atskirus tyrimo etapus: abiem sportininkų grupėms pėdsakas pradeda mažėti krūvio etapo pradžioje, pradeda didėti nutraukus krūvį ir artėja prie pradinių (ramybės etape fiksuotų) reikšmių antrąją atsigavimo minutę (35 pav.). Pėdsakų sekos aiškiai suformuoja dvi atskiras kreives abiem grupėms, nors ir krūvio pradžioje šios kreivės turi persidengiančių sričių. 5 lent. pateikti matricos pėdsakų vidurkiai skiriasi abiem grupėms įvairiais tyrimo etapais.

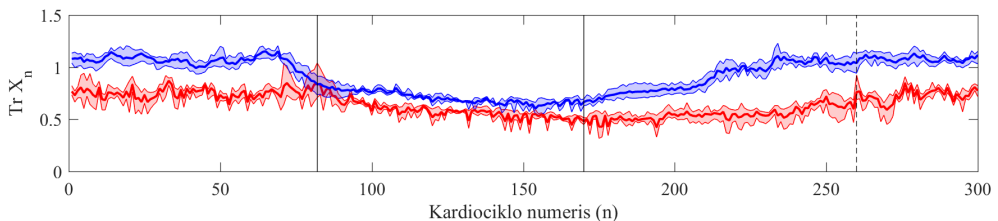
Reiktų pastebėti, jog Ruffjė testas nėra sudėtingas, palyginti su kitais testais, pvz., kai fizinis krūvis didinamas iki pastebimi pirmieji nuovargio požymiai. Net ir kai nėra didelių fizinio krūvio mėginių, pateikta metodika geba identifikuoti sportininkus, ku-



**34 pav.** Tikrinių reikšmių sekos RR ir DJT parametrų poroms tiriamiesiems ramybės, Ruffjė testo ir atsigavimo etapais. Mėlyna spalva žymi ilgesnę, o raudona – trumpesnę sportavimo patirtį turinčių imtynininkų duomenis

**4 lentelė.** Tikrinių reikšmių  $\lambda$  vidurkiai skirtingais tyrimo etapais

	Ramybė	Krūvis	Atsigavimas (I min.)	Atsigavimas (II min.)
Mažiau nei 5 metus sportuojantys	0,457	0,466	0,377	0,413
Daugiau nei 5 metus sportuojantys	0,673	0,601	0,574	0,652



**35 pav.** Matricos pėdsako sekos RR ir DJT parametrų poroms tiriamiesiems ramybės, Ruffjė testo ir atsigavimo etapais

## 5 lentelė. Matricos pėdsako $\text{Tr } X$ vidurkiai skirtingais tyrimo etapais

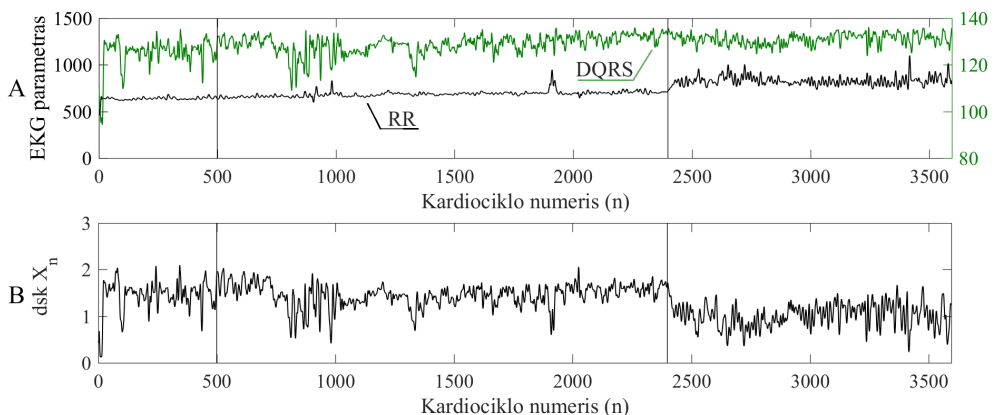
	Ramybė	Krūvis	Atsigavimas (I min.)	Atsigavimas (II min.)
Mažiau nei 5 metus sportuojantys	0,752	0,466	0,551	0,728
Daugiau nei 5 metus sportuojantys	1,058	0,710	0,902	1,079

rių geresnė hemodinamika širdies raumenyje, o pastaroji susijusi su geresniu fiziniu pasirengimu.

### 4.3. Koronarinės angioplastikos duomenys

Kai širdies vainikinės arterijos susiaurėja ar jas užkemša aterosklerozinės plokštelės, sumažėja arterijos spindis. Tuomet širdies raumuo neaprūpinamas pakankamu kraujo kiekiu. Siekiant atkurti kraujotaką, atliekama *vainikinių arterijų (koronarinė) angioplastika*. Šios procedūros metu kateteris įkišamas į rankos ar kirkšnies kraujagyslę ir nukreipiamas į širdį. Ties susiaurėjusia vieta gydytojas įkiša balioninį kateterį. Išplėtus balioną, aterosklerozinė plokštelė prispaudžiama prie arterijos sienelių – taip praplečiama vainikinė arterija ir pagerinama kraujotaka į širdies raumenį.

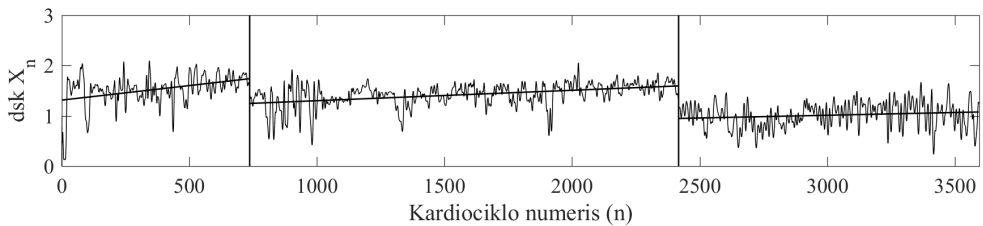
Natūralu, kad, sutrikus kraujotakai, juntamas poveikis visame organizme: vienos sistemos veikla sutrinka, kita, priešingai, ima dominuoti. Be įprasto elektrokardiogramos stebėjimo, ne mažiau svarbi ir sistemų tarpusavio ryšio dinamikos analizė. Šiuo atveju buvo nagrinėjama RR ir DQRS parametrų pora, kuri nusako širdies ir organizmo tarpreguliacinę sąsają. 36 pav. A dalyje pavaizduoti paciento, kuriam atliekant kraujagyslės atkimšimo procedūrą kateteris buvo įkištas į kirkšnies arteriją, duomenų parametrų reikšmės. Elektrokardiografinių duomenų stebėjimas susideda iš trijų etapų – tai stebėjimas prieš procedūrą, atkimšimo procedūra bei stebėjimas po procedūros.



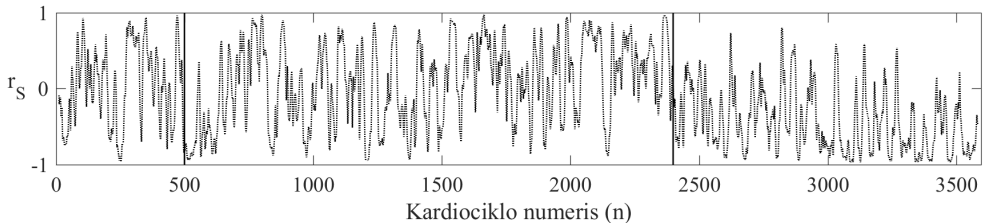
**36 pav.** Pradiniai duomenys, vaizduojami paveikslo A dalyje, susideda iš trijų stebėjimo etapų: prieš procedūrą, atkimšimo procedūros metu ir po procedūros. RR intervalo skalė yra kairėje, o DQRS intervalo skalė yra dešinėje paveikslo pusėje. Paveikslo B dalyje pavaizduoti RR ir DQRS diskriminantai atitinkamai etapais

Sutrikus kraujotakai, žmogaus organizmas patiria stresą. Organizmo sistemų darna sutrinka, ir mažėja sąsaja tarp jų (didelis diskriminantas), atkimšus kraujagyslę (paskutiniame etape), diskriminanto reikšmės smarkiai sumažėja ir normalizuojasi organizmo veikla (36 pav.).

Reikšmingus diskriminanto sekos pokyčius fiksuoja ir MATLAB paketo *findchangepts* funkcija<sup>24</sup> (37 pav.). Pirmasis diskriminantų pokytis fiksuojamas šiek tiek vėliau nei procedūros pradžia (730-asis kardiociklas, o procedūros pradžia 500-asis kardiociklas). Tai suprantama, nes kraujotaka neatsinaujina tik pradėjus kraujagyslės atkimšimo procedūrą. Procedūros pabaigos momentas nustatomas tiksliai pagal diskriminanto pokyčius MATLAB paketu. Spirmano koreliacijos koeficientai dvidešimties reikšmių slenkančiam langui. Spirmano koreliacijos koeficientai pavaizduoti 38 paveiksle. Ryškių pokyčių skirtingais etapais nėra. Daug kartų visuose etapuose Spirmano koreliacijos koeficientas tampa nuliu.



**37 pav.** Diskriminantų sekos pokyčiai nustatomi MATLAB paketo funkcija *findchangepts*



**38 pav.** Spirmano koreliacijos koeficientų seka RR ir DQRS parametru porai

Apibendrinti tiriamųjų rezultatus ar nusakyti bendras tendencijas būtų sudėtinga, nes koronarinės angioplastikos procedūra yra intervencinė ir kiekvienam pacientui kraujotakos normalizavimosi laikas, reakcija į procedūrą ar komplikacijos (pvz., po procedūros atsirandančios reperfuzinės aritmijos) yra labai individualūs ir reikalauja išsamesnių tyrimų.

#### 4.4. Ryšio tarp magnetinio žemės lauko ir širdies ritmo variabilumo tyrimas

Žemės magnetinis laukas, dar kitaip vadinamas geomagnetiniu, tai magnetinis laukas, besitęsiantis nuo Žemės branduolio iki vietos, kur susiduria su Saulės vėjo dalelių srautu. Magnetinio lauko stiprumas žemės paviršiuje svyruoja nuo 25 iki 65 mikrotėslių. Taigi nenuostabu, kad ne tik mokslinėje literatūroje, bet ir viešojoje erdvėje vis

<sup>24</sup>MATLAB *findchangepts* funkcija aptinka reikšmingus kintamojo pokyčius, vertindama kintamojo reikšmių vidurkį bei tiesės krypties koeficientą

dažniau užduodamas klausimas „o kaip gi šis laukas veikia mus?“ (Alabdulgade et al., 2015).

Ilgalaikio projekto metu (2012 m.) buvo surinkti septyniolikos moterų savanorių širdies ritmo variabilumo duomenys. Šios dalyvės taip pat yra ir Princo Sultano širdies centro (Hofuf miestas, Saudo Arabija) darbuotojos: septynios slaugės, šešios valymo darbuotojos, keturios iš tyrimų departamento. Vidutinis tiriamųjų amžius  $32 \pm 8$  metai (kinta nuo 24 iki 49 metų). Dalyvės prieš tyrimą pasirašė sutikimo formą ir galėjo bet kada pasitraukti iš tyrimo.

Dalyvėms kas savaitę po 24–72 valandas buvo registruojamas širdies susitraukimų dažnis Firstbeat Bodyguard<sup>25</sup> RR aparatais. Bodyguard aparatas apskaičiuoja RR intervalą iš elektrokardiogramos, kuri fiksuojama 1000 taškų per sekundę. Registruoti duomenys pirmiausia išsaugomi aparate, o savaitės pabaigoje sukaupti duomenys persiunčiami į serverį. Dalyvių duomenų registravimas buvo vykdomas kartą per savaitę (įrašai daugiausia 72 valandų trukmės), kartojant registravimą kas savaitę penkis mėnesius nuo 2012 m. balandžio iki 2012 m. rugpjūčio.

The Global Coherence Initiative (GCI) sistema yra tarptautinės pastangos, siekiančios pažadinti žmogiškumą, paskatinti taiką, harmoniją ir pasaulinį sąmoningumą. GCI kontroliuoja tyrimus ieškant ryšių tarp žmonijos ir žemės magnetinių laukų bei energetinių sistemų. GCI sistema yra pasaulinis tinklas, suformuotas nuolatos matuoti magnetinius signalus, kurių dažnių intervalas artimas žmogaus fiziologiniams dažniams, pvz., smegenų ir širdies ir kraujagyslių sistemų. Kiekvieną matavimo regioną sudaro labai jautrūs magnetinio lauko matuokliai (jautrumas 10–12T), kurie buvo specialiai sukurti matuoti magnetinio lauko rezonansus žemės ir jonosferos sluoksniuose. Magnetometrai sukurti matuoti žemės geomagnetinio lauko linijų virpesius ir itin žemus dažnius, kurie atsiranda žemės magnetiniame lauke ir veikia žmogaus sveikatą, protinius ir emocinius procesus bei elgesį. Iš viso pasaulyje pastatyti šeši magnetometrai – Kalifornijos valstijoje (JAV), Kanadoje, Saudo Arabijoje, PAR, Naujoje Zelandijoje ir Lietuvoje.

Visiems RR įrašams buvo pritaikyta DADiSP<sup>26</sup> 2002 analizės programa. RR įrašas, 30 proc. didesnis ar mažesnis nei prieš tai fiksuotų keturių intervalų vidurkis, laikomas artefaktu ir pašalinamas iš failo. Dienos įrašas analizuojamas po 5 minučių segmentus. Bet kuris penkių minučių segmentas, kurio 10 proc. ir daugiau įrašų nėra ar jie netinkami, pašalinamas ir tolimesnei analizei nenaudojamas.

RR vidurkis buvo suskaičiuotas kiekvienai valandai ir sinchronizuotas su lokaliais kas valandą gautais magnetinio lauko matavimais, gautais magnetometru, esančiu Hofuf, Saudo Arabijoje. Duomenys tyrimams atlikti paimti iš HeartMath instituto duomenų<sup>27</sup>.

<sup>25</sup>Firstbeat Bodyguard yra RR intervalams matuoti ir įrašyti skirtas aparatas, tinkantis atliekant trumpos ir ilgos laiko trukmės matavimus.

<sup>26</sup>DADiSP (*Data Analysis and Display*) – programa, skirta apdoroti skaitines eilutes, matricas ir paveikslėlius, atlikti pastarųjų skaitinių ir statistinių apdorojimą.

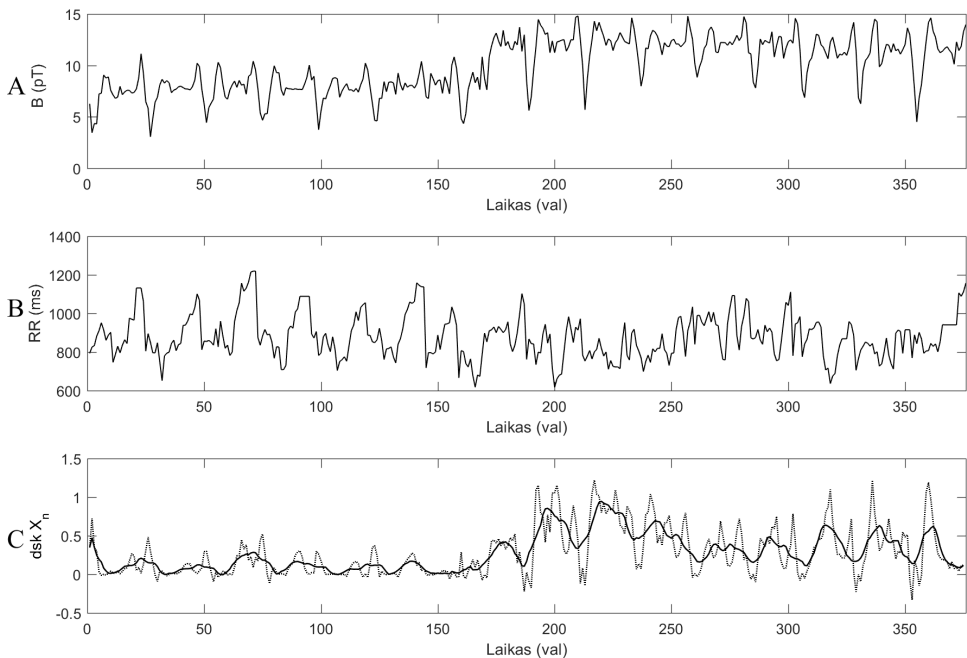
<sup>27</sup>HeartMath institutas – ne pelno siekianti tyrimų ir mokslo organizacija, kurianti metodikas, kaip su-

Skirtingi žmonės nevienodai reaguoja į magnetinio lauko stiprumą. Vieni žmonių šis laukas išvis neveikia, o kitiems magnetinis laukas sukelia nemažai nepatogumų ar net sveikatos sutrikimų. Šiame darbe nagrinėjama ryšio dinamika tarp RR intervalų (milisekundės (ms)) ir lokalaus magnetinio lauko stiprumo lygio (pikoteslos (pT)). Ryšio dinamika tarp šių dviejų dydžių stebima vaizduojant diskriminantą, o jautrumui vertinti įvedamas jautrumo koeficientas  $S$ , vertinantis priklausomybę tarp magnetinio lauko stiprumo  $\tilde{B}$  ir diskriminantų  $\text{dsk X}$ , skaičiuotų tarp parametru RR intervalų ir magnetinio lauko stiprumo:

$$\tilde{B} = S \cdot \text{dsk X} + b. \quad (167)$$

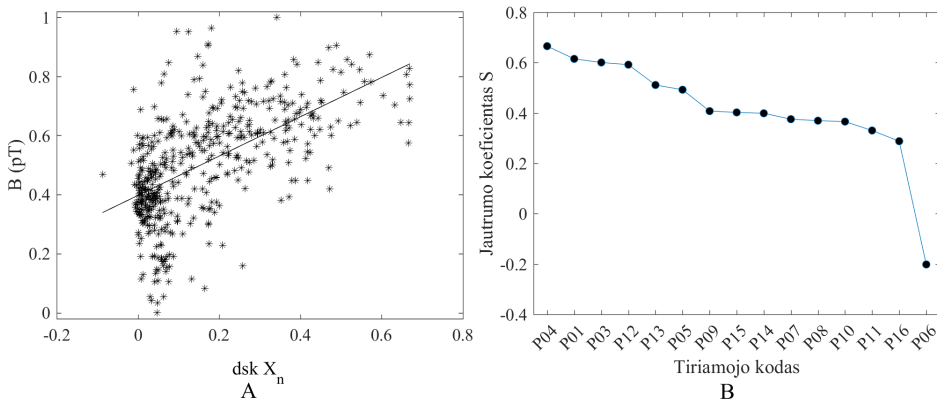
Organizmas be rimtų veiklos sutrikimų geba prisitaikyti prie besikeičiančių sąlygų, taip pat ir prie pakitusio magnetinio lauko stiprumo lygio. Vienas iš tokių atvejų pavaizduotas 39 paveiksle. Paveikslo C dalyje vaizduojama, kaip, kintant Žemės magnetiniam laukui, keičiasi ir ryšys tarp širdies ritmo variabilumo ir magnetinio lauko intensyvumo. Punktyrinė linija žymi neglodintas diskriminanto reikšmes, o ištisine žymi slenkančio vidurkio metodu suglodintas reikšmes. Jautrumo koeficientas  $S$  yra teigiamas asmeniui, kuriam nėra rimtų sveikatos sutrikimų (40 pav. A dalis).

Prisitaikymas prie magnetinio lauko svyravimų nėra būdingas asmeniui (jautrumo koeficientas neigiamas), kurio organizmo sistemų veikla nefunkcionuoja idealiai.



**39 pav.** Magnetinio lauko stiprumo lygis (pT) (A dalis), RR intervalai (ms) (B dalis). Paveikslo C dalyje vaizduojami diskriminantai tarp magnetinio lauko bei RR intervalų: punktyrinė linija žymi neglodintas, o ištisine slenkančio vidurkio metodu suglodintas diskriminanto reikšmes

valdyti ir apsaugoti nuo streso bei pagerinti emocinę sveikatą, sprendimų priėmimą, mokymosi įgūdžius ir panašiai. Prieiga internetu <http://www.heartmath.com>



**40 pav.** Diskriminantų priklausomybė nuo magnetinio lauko stiprumo lygio (B) sveikam asmeniui (A dalis) bei jautrumo koeficientai visiems tyrimo dalyviams (B dalis)

Jautrumo koeficientai skirtingiems tyrimo dalyviams pavaizduoti 40 pav. B dalyje. Tiriųjų, kuriems nėra rimtų sveikatos sutrikimų, prisitaikymas prie Žemės magnetinio lauko yra pakankamas, tačiau vieno asmens (tiriomojo P06, 40 pav. B dalis) gebėjimas prisitaikyti nėra tinkamas. Panagrinėjus šio tiriomojo ligos istoriją, paaiškėjo, kad ši asmenį vargina širdies veiklos sutrikimai, ką ir parodo gauti rezultatai.

Organizmo adaptacija yra svarbus sveikatos rodiklis, todėl, širdies veiklos sutrikimų turinčio asmens organizmo adaptacijos sumažėjimas gali turėti rimtų pasekmių. Stipriai pasikeitus magnetiniam laukui ar kitoms aplinkos sąlygoms, organizmas patiria stresą, kuris gali išprovokuoti arterinio kraujo spaudimo svyravimus ar net miokardo infarktą (Alabdulgade et al., 2015).

#### 4.5. Skyriaus išvados

Sudėtingoms (kompleksinėms) sistemoms nagrinėti nepakanka vien pavienių požymių tyrimo, o reikalinga tarpusavio sąryšių analizė. Statistiniai metodai reikalauja didelių duomenų kiekių ir nėra patogūs, kai reikalingas momentis vertinimas (pvz., kad ir realiuoju laiku), todėl matricų analize paremti metodai atskleidžia naujas galimybes. Sąsajų parametrus galima būtų suskirstyti įvairiai. Šiame skyriuje nagrinėjami matricos struktūrą nusakantys koeficientai (diskriminantai, tikrinės reikšmės, matricos pėdsakas). Buvo nagrinėti diskriminantai, tikrinės reikšmės bei matricos pėdsakas Ruffė testo metu. Šios charakteristikos leido atlikti skirtingą sportavimo stažą turinčių sportininkų organizmo reakcijos analizę į krūvio mėginį. Diskriminantų dinamikos analizė bei jautrumo koeficiento vertinimas leido aptikti širdies susitraukimų dažnio bei Žemės lokalaus magnetinio lauko sąsajų anomalijas bei identifikuoti širdies darbo sutrikimų turinčius tiriamuosius. Stebint širdies ir organizmo tarpreguliacinę sąsają (RR ir QRS kompleksai) kraujagyslės atkūrimo procedūros metu buvo galima identifikuoti kraujotakos pagerėjimo pradžią, remiantis diskriminantų sekos pokyčiais.

## IŠVADOS

1. Įvestos elementarių ir sudėtinių idempotentų bei nulpotentų sąvokos. Apibrėžta idempotentų bei nulpotentų matricių aibė ir pristatytos parametrinės jų išraiškos. Suformuota ir pateikta idempotentų ir nulpotentų sistemos generavimo schema.
2. Pristatytas *specialus* antros eilės kvadratinės matricos trijų komponentų dėstiny ir pateikti dėstinio koeficientų skaičiavimo algoritmai. Matricos dėstiny leido suformuoti supaprastintą matricos kėlimo  $n$ -tuoju laipsniu schemą bei išvesti ir įrodyti būtinas ir pakankamas dviejų išdėstytų matricių komutatyvumo sąlygas.
3. Aprašyta *modifikuota* matricinių iteracinių modelių klasė  $\mathbf{X}^{(n+1)} = f(\mathbf{X}^{(n)})$ , kai  $\mathbf{X}^{(n+1)} \in \mathbb{C}_{2 \times 2}$ , o funkcija  $f$  analizinė, kuriai būdingi efektai nesutinkami skaliariniuose iteraciniuose modeliuose ar jų plėtiniuose. Suformuluota teorema tinka ir  $n$ -tos eilės matricoms, jeigu pradinių sąlygų matrica turi  $n$  skirtingų tikrinių Hamiltono reikšmių.
4. Suformuluotos būtinos ir pakankamos sąlygos iteracinių antros eilės matricinių modelių sprendiniams diverguoti.
5. Pasiūlyti keli įverčiai (pagrįsti kompleksinių sistemų teorija bei matricių struktūrine analize) ryšiams tarp dviejų elektrokardiogramos parametrų vertinti realiuoju laiku, o pasiūlytos EKG sąsajų tyrimo charakteristikos pritaikytos identifikuoti kraujotakos pagerėjimo pradžios momentą koronarinės angioplastikos procedūros metu. Sąsajų tarp širdies susitraukimų dažnio bei žemės lokalaus magnetinio lauko dinamikos analizė padėjo identifikuoti pacientus, varginamus širdies veiklos sutrikimų. Taip pat EKG tarpparametrinių sąsajų dinamikos stebėjimas leido nustatyti sportininkus, kuriems pasireiškia liekamojo nuovargio požymiai po atlikto krūvio mėginio testo.
6. Elektrokardiogramos parametrų dinaminių sąsajų tyrimui atlikti skirtas įrankis įdiegtas į automatizuotą EKG registracijos sistemą „Kaunas – Krūvis“.



## PRAKTINĖ SVARBA

1. 2008–2012 m. vykdyti du EUREKA projektai: „Angelas sargas išplėstai namų aplinkai“ ITEA 2 GUARANTEE 08018 ir „Paskirstyto intelekto funkcinės būklės įvertinimo sistema pagyvenusiems ir neįgaliems“ EUREKA E!4452 EDFAS.
2. Pasiūlytos EKG tyrimo metodikos panaudotos plėtros projektų centro projektų grupėje Nr. VP1-V-31-003 (7978) projekte „Arterinės hipotenzijos epizodų prognozavimo inovacinės sistemos technologinė plėtra“ (Nr. VP1-3.1-ŠMM-10-V-02-003) (2013-2015 m.).
3. 2014–2015 m. vykdytas bendras KTU ir LSMU mokslininkų grupių projektas „Žemės magnetinio lauko, žmogaus ir gyvūnų kardiovaskulinių sąsajų tyrimas (GEOMAG)“.
4. 2014 m. teikta paraiška HORIZON 2020 – „Local geomagnetic field fluctuations impact on human and animal health and their cardiovascular system functional state“, tačiau nebuvo patvirtinta.
5. Šiuo metu vykdomas (pradžia 2014 m.) Pasaulinis projektas „Global Coherence Initiative“, vadovaujant JAV, Kalifornija, HeartMath Institutui, Lietuvos dalyviai LSMU ir KTU.
6. *Originalios* metodikos, pasiūlytos 2013–2015 m. vykdyto projekto „Arterinės hipotenzijos epizodų prognozavimo inovacinės sistemos technologinė plėtra“ metu buvo užpatentuotos.

## LITERATŪRA

1. ABDULLAH, H. et al. Phase synchronization and directional coupling between brain and heart during sleep. 659–663.
2. ACHARYA, R. et al. Analysis of cardiac health using fractal dimension and wavelet transformation. *ITBM-RBM*. 2005, 26(2), 133–139. ISSN: 1297-9562.
3. ADDISON, P. S. Wavelet transforms and the ECG: a review. *Physiological measurement*. 2005, 26(5), R155. ISSN: 0967-3334.
4. AKHSHANI, A. et al. An image encryption scheme based on quantum logistic map. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2012, 17(12), 4653–4661. ISSN: 1007-5704.
5. AKTARUZZAMAN, M. and R. SASSI. Parametric estimation of sample entropy in heart rate variability analysis. *Biomedical Signal Processing and Control*. 2014, 14(0), 141–147. ISSN: 1746-8094.
6. ALABDULGADE, A. et al. Human heart rhythm sensitivity to earth local magnetic field fluctuations. *Journal of Vibroengineering*. 2015, 17(6), ISSN: 1392-8716.
7. ALCARAZ, R. and J. J. RIETA. A novel application of sample entropy to the electrocardiogram of atrial fibrillation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2010, 11(2), 1026–1035. ISSN: 1468-1218.
8. ALCARAZ, R. and J. J. RIETA. Sample entropy of the main atrial wave predicts spontaneous termination of paroxysmal atrial fibrillation. *Medical Engineering & Physics*. 2009, 31(8), 917–922. ISSN: 1350-4533.
9. AMANO, T. et al. Non-invasive assessment of functionally significant coronary stenoses through mathematical analysis of spectral ECG components. *Open Heart*. 2014, 1(1),
10. ANTANAVIČIUS, K. et al. Nonlinear dynamics analysis of electrocardiograms for detection of coronary artery disease. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2008, 92(2), 198–204. ISSN: 0169-2607.
11. AYUB, S. and J. SAINI. Abnormality detection in Indian ECG using correlation techniques. *International Journal of Computer Applications*. 2012, 58(14), ISSN: 0975-8887.
12. BAHI, J. M. et al. Steganography: a class of secure and robust algorithms. *The Computer Journal*. 2011, bxr116. ISSN: 0010-4620.
13. BAKSALARY, J. K. and O. M. BAKSALARY. Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices. *Linear Algebra and its Applications*. 2000, 321(1–3), 3–7. ISSN: 0024-3795.
14. BAKSALARY, O. M. et al. On the equality between rank and trace of an idempotent matrix. *Applied Mathematics and Computation*. 2010, 217(8), 4076–4080. ISSN: 0096-3003.
15. BANERJEE, S. and M. MITRA. Application of cross wavelet transform for ecg pattern analysis and classification. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*. 2014, 63(2), 326–333. ISSN: 0018-9456.
16. BASSANI, T. et al. Testing the involvement of baroreflex during general anesthesia through Granger causality approach. *Computers in Biology and Medicine*. 2012, 42(3), 306–312. ISSN: 0010-4825.
17. BEHNIA, S. et al. Nonlinear measure of ECG time series: detection of cardiac diseases. *Journal of theoretical and applied physics (Iranian physical journal)*. 2008, 2(1), 9.

18. BERA, S. C. and R. SARKAR. Fourier Analysis of Normal ECG Signal to Find its Maximum Harmonic Content by Signal Reconstruction. *Sensors & Transducers Journal*. 2010, 123(12), 11.
19. BERŠKIENĖ, K. *Elektrokardiografinių signalų parametrų dinaminių sąsajų analizė*. 2009.
20. BERNSTEIN, D. S. *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas (Second Edition)*. 2009.
21. BERSKIENE, K. et al. Complexity assessment of ECG RR interval. 989–991.
22. BERSKIENE, K. et al. Analysis of dynamical interrelations of electrocardiogram parameters. *Elektronika ir Elektrotechnika*. 2009, 95(7), 95–98. ISSN: 2029-5731.
23. BERTAŠIŪTĖ, V. *Vyrų širdies ir kraujagyslių bei kvėpavimo sistemų funkcinių rodiklių kaita ties anaerobinės apykaitos slenksčiu*. 2015.
24. BEZERRA, V. L. et al. A pervasive energy-efficient ECG monitoring approach for detecting abnormal cardiac situations. 340–345.
25. BIKULCIENE, L. et al. Matrix analysis of human physiologic data. 41–46.
26. BLINOWSKA, K. and J. ZYGIEREWICZ. *Practical Biomedical Signal Analysis Using MATLAB®*. 2011.
27. BRANDT, M. and G. CHEN. Controlling the dynamical behavior of a circle map model of the human heart. *Biological Cybernetics*. 1996, 74(1), 1–8. ISSN: 0340-1200.
28. CADOGAN, M. and C. NICKSON. Life in the fastlane: ECG library. 2015, Priciga internetu: <http://lifeinthefastlane.com/> [žiūrėta 2015 06 03].
29. CAMPOS, L. A. et al. Mathematical biomarkers for the autonomic regulation of cardiovascular system. *Frontiers in Physiology*. 2013, 4, 279. 24109456[pmid] Front Physiol. ISSN: 1664-042X.
30. CHANTAD, D. et al. Derived 12-lead electrocardiogram in the assessment of ST-segment deviation and cardiac rhythm. *Journal of Electrocardiology*. 2006, 39(1), 7–12. ISSN: 0022-0736.
31. CHAZOTTES, J. R. and B. FERNANDEZ. *The CML2004 Project*. Lecture Notes in Physics, 2005.
32. CHEN, W. et al. Measuring complexity using FuzzyEn, ApEn, and SampEn. *Med Eng Phys*. 2009, 31(1), 61–8. ISSN: 1350-4533 (Print) 1350-4533.
33. CHIN, F. J. et al. A fast Critical Arrhythmic ECG waveform identification method using cross-correlation and multiple template matching. 1922–1925.
34. CHOK, N. S. *Pearson's versus Spearman's and Kendall's correlation coefficients for continuous data*. 2010.
35. CHUDUC, H. et al. A Review of Heart Rate Variability and its Applications. *APCBEE Procedia*. 2013, 7(0), 80–85. ISSN: 2212-6708.
36. COLL, M. M. M. E. Ventricular Premature Beat Detection in ECG using Correlation Techniques. 2013,
37. COSTA, M. et al. Multiscale entropy analysis of complex physiologic time series. *Phys Rev Lett*. 2002, 89(6), 068102. ISSN: 0031-9007 (Print) 0031-9007.
38. COSTA, M. D. et al. Multiscale analysis of heart rate dynamics: entropy and time irreversibility measures. *Cardiovascular Engineering*. 2008, 8(2), 88–93. ISSN: 1567-8822.
39. COURTEMANCHE, M. et al. A circle map in a human heart. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1989, 40(3), 299–310. ISSN: 0167-2789.
40. DAS, C. and M. H. KHONDEKAR. Statistical Investigation of ECG Signal of Sleep Apnea Patient. *Global Journal of Researchers in Engineering- F: Electronic and Electronics Engineering*. 2011, 11(8), 7.

41. DAS, S. and K. MAHARATNA. Fractional dynamical model for the generation of ECG like signals from filtered coupled Van-der Pol oscillators. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2013, 112(3), 490–507. ISSN: 0169-2607.
42. DAVIDSON, A. et al. *Nursing, Caring, and Complexity Science: For Human Environment Well-Being*. 2011.
43. DUTTA, S. et al. Correlation technique and least square support vector machine combine for frequency domain based ECG beat classification. *Medical Engineering & Physics*. 2010, 32(10), 1161–1169. ISSN: 1350-4533.
44. ČEKANAVIČIUS, V. and G. MURAUSKAS. *Statistika ir jos taikymai, I knyga*. 2000, 240.
45. ENGIN, M. et al. Feature measurements of ECG beats based on statistical classifiers. *Measurement*. 2007, 40(9–10), 904–912. ISSN: 0263-2241.
46. ETZKORN, B. Data Normalization and Standardization. *Finance Thoughts*. 2012,
47. FAES, L. et al. Non-uniform multivariate embedding to assess the information transfer in cardiovascular and cardiorespiratory variability series. *Computers in Biology and Medicine*. 2012, 42(3), 290–297. ISSN: 0010-4825.
48. FERREIRA, B. B. et al. Chaos control applied to heart rhythm dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2011, 44(8), 587–599. ISSN: 0960-0779.
49. FOLEY, P. W. X. et al. Cardiac resynchronisation therapy in patients with heart failure and a normal QRS duration: the RESPOND study. *Heart*. 2011, 97(13), 1041–1047.
50. FREITAS, U. et al. Identifying chaos from heart rate: The right task? *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2009, 19(2), 028505.
51. FREIWALD, W. A. et al. Testing non-linearity and directedness of interactions between neural groups in the macaque inferotemporal cortex. *Journal of Neuroscience Methods*. 1999, 94(1), 105–119. ISSN: 0165-0270.
52. FRIGG, R. and C. WERNDL. *Entropy – A Guide for the Perplexed*. 2011.
53. FU, C. et al. An efficient and secure medical image protection scheme based on chaotic maps. *Computers in Biology and Medicine*. 2013, 43(8), 1000–1010. ISSN: 0010-4825.
54. GACEK, A. and W. PEDRYCZ. *ECG Signal Processing, Classification and Interpretation: A Comprehensive Framework of Computational Intelligence*. 2011.
55. GENZLINGER, M. A. and M. EBERHARDT. Analyzing Prominent T Waves and ST-segment Abnormalities in Acute Myocardial Infarction. *The Journal of Emergency Medicine*. 2012, 43(2), e81–e85. ISSN: 0736-4679.
56. GIBSON, W. T. and W. G. WILSON. Individual-based chaos: Extensions of the discrete logistic model. *Journal of Theoretical Biology*. 2013, 339(0), 84–92. ISSN: 0022-5193.
57. GIDEA, M. et al. Deterministic models for simulating electrocardiographic signals. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2011, 16(10), 3871–3880. ISSN: 1007-5704.
58. GIRARDI-SCHAPPO, M. et al. A brief history of excitable map-based neurons and neural networks. *Journal of Neuroscience Methods*. 2013, 220(2), 116–130. ISSN: 0165-0270.
59. GIRI, D. et al. Automated diagnosis of Coronary Artery Disease affected patients using LDA, PCA, ICA and Discrete Wavelet Transform. *Knowledge-Based Systems*. 2013, 37(0), 274–282. ISSN: 0950-7051.
60. GLASS, L. Is Cardiac Chaos Normal or Abnormal? *Journal of Cardiovascular Electrophysiology*. 1990, 1(5), 481–482. ISSN: 1540-8167.

61. GLASS, L. Introduction to Controversial Topics in Nonlinear Science: Is the Normal Heart Rate Chaotic? *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2009, 19(2), 028501.
62. GONZÁLEZ-AGUILAR, H. and E. UGALDE. *Nonlinear Dynamics New Directions: Theoretical Aspects*. 2015.
63. GOSHVARPOUR, A. and A. GOSHVARPOUR. Classification of Heart Rate Signals during Meditation using Lyapunov Exponents and Entropy. *International Journal of Intelligent Systems and Applications*. 2012, 4(2), 6. Goshvarpour2012.
64. GOTHWAL, H. et al. Cardiac arrhythmias detection in an ECG beat signal using fast fourier transform and artificial neural network. *Journal of Biomedical Science and Engineering*. 2011, 4(04), 289.
65. GOVINDAN, R. B. et al. On the evidence of deterministic chaos in ECG: Surrogate and predictability analysis. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 1998, 8(2), 495–502.
66. GRAFF, B. et al. Entropy Measures in the Assessment of Heart Rate Variability in Patients with Cardiodepressive Vasovagal Syncope. *Entropy*. 2015, 17(3), 1007–1022. ISSN: 1099-4300.
67. GRASSBERGER, P. and I. PROCACCIA. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1983, 9(1–2), 189–208. ISSN: 0167-2789.
68. GREVE, A. M. et al. Impact of QRS Duration and Morphology on the Risk of Sudden Cardiac Death in Asymptomatic Patients With Aortic StenosisThe SEAS (Simvastatin and Ezetimibe in Aortic Stenosis) Study. *Journal of the American College of Cardiology*. 2012, 59(13), 1142–1149. 10.1016/j.jacc.2011.12.020. ISSN: 0735-1097.
69. GU, G. and J. LING. A fast image encryption method by using chaotic 3D cat maps. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*. 2014, 125(17), 4700–4705. ISSN: 0030-4026.
70. GUPTA, R. et al. *ECG Signal Analysis*. 2014.
71. HARAOKA, K. et al. Fragmented QRS is associated with torsades de pointes in patients with acquired long QT syndrome. *Heart Rhythm*. 2010, 7(12), 1808–1814. ISSN: 1547-5271.
72. HARIKRISHNAN, K. P. and V. M. NANDAKUMARAN. An analogue of the logistic map in two dimensions. *Physics Letters A*. 1989, 142(8–9), 483–489. ISSN: 0375-9601.
73. HARTWIG, R. E. and M. S. PUTCHA. When is a matrix a sum of idempotents? *Linear and Multilinear Algebra*. 1990, 26(4), 279–286. ISSN: 0308-1087.
74. HERREROS, A. et al. Analysis of changes in the beat-to-beat P-wave morphology using clustering techniques. *Biomedical Signal Processing and Control*. 2009, 4(4), 309–316. ISSN: 1746-8094.
75. HIGGINS, J. P. Nonlinear systems in medicine. *Yale J Biol Med*. 2002, 75(5-6), 247–60. 1551-4056 Higgins, John P Yale J Biol Med. 2002 Sep-Dec;75(5-6):247-60. ISSN: 0044-0086 (Print).
76. HILBORN, R. C. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. 2000.
77. HODGKIN, A. L. and A. F. HUXLEY. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of physiology*. 1952, 117(4), 500.
78. HOLMES, P. J. The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table. *Journal of Sound and Vibration*. 1982, 84(2), 173–189. ISSN: 0022-460X.

79. HONG, L. et al. T-wave morphology analysis of competitive athletes. *Journal of Electrocardiology*. 2015, 48(1), 35–42. ISSN: 0022-0736.
80. HORN, R. and C. JOHNSON. *Matrix Analysis*. Matrix Analysis, 2012.
81. IBARZ, B. et al. Map-based models in neuronal dynamics. *Physics Reports*. 2011, 501(1–2), 1–74. ISSN: 0370-1573.
82. ITRC. Groundwater Statistics and Monitoring Compliance, Statistical Tools for the Project Life Cycle. GSMC-1. Washington, D.C.: Interstate Technology & Regulatory Council, Groundwater Statistics and Monitoring Compliance Team. 2013, Prieiga internetu: <http://www.itcreweb.org/gsmc-1/> [žiūrėta 2016 04 14].
83. JAVORKA, M. et al. Granger causality analysis of baroreflex in obese children and adolescents. 759–762.
84. JENKINS Dean; Gerred, S. ECG library: Electrocardiogram (ECG/EKG) library. 2014, Prieiga internetu: <http://www.ecglibrary.com/ecghome.php> [žiūrėta 2015 06 01].
85. JEON, T. et al. Implementation of a portable device for real-time ECG signal analysis. *Biomed Eng Online*. 2014, 13, 160. 1475-925x Jeon, Taegyun Kim, Byoungjo Jeon, Moongu Lee, Byung-Geun Journal Article Research Support, Non-U.S. Gov't England Biomed Eng Online. 2014 Dec 10;13:160. doi: 10.1186/1475-925X-13-160. ISSN: 1475-925x.
86. JUOZAPAVIČIUS, A. and T. MEŠKAUSKAS. Vaizdų ir signalų analizė ir apdorojimas. 2011, 278.
87. KABIR, M. M. et al. Time delay correction of the synchrogram for optimized detection of cardiorespiratory coordination. *Medical & biological engineering & computing*. 2011, 49(11), 1249–1259. ISSN: 0140-0118.
88. KAMATH, C. Analysis of heart rate variability signal during meditation using deterministic-chaotic quantifiers. *Journal of Medical Engineering & Technology*. 2013, 37(7), 436–448.
89. KANEKO, K and T YANAGITA. Coupled maps. *Scholarpedia*. 2014, 9(5), 4085.
90. KANEKO, K. Period-Doubling of Kink-Antikink Patterns, Quasiperiodicity in Antiferro-Like Structures and Spatial Intermittency in Coupled Logistic Lattice: Towards a Prelude of a “Field Theory of Chaos”. *Progress of Theoretical Physics*. 1984, 72(3), 480–486.
91. KANEKO, K. From globally coupled maps to complex-systems biology. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2015, 25(9), 097608.
92. KARAGUEUZIAN, H. S. et al. Bifurcation theory and cardiac arrhythmias. *American journal of cardiovascular disease*. 2013, 3(1), 1.
93. KONG, D.-R. and H.-B. XIE. Use of modified sample entropy measurement to classify ventricular tachycardia and fibrillation. *Measurement*. 2011, 44(4), 653–662. ISSN: 0263-2241.
94. KORINNA, T. A. and E. BRUNO. Directed percolation model for turbulence transition in shear flows. *Fluid Dynamics Research*. 2012, 44(3), 031201. ISSN: 1873-7005.
95. KRASKOV, A. et al. Estimating mutual information. *Physical review E*. 2004, 69(6), 066138.
96. KRIAUNAVIČIENĖ, A. et al. *Kai kurių elektrokardiografinių parametrų tarpusavio sąsajų tyrimas*. 2011.
97. KULESSA, B. et al. Long-Time Autocorrelation Function of ECG Signal for Healthy versus Diseased Human Heart. *Acta Physica Polonica B*. 2003, 34(1), 13.

98. KUTLU, Y. and D. KUNTALP. Feature extraction for ECG heartbeats using higher order statistics of WPD coefficients. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2012, 105(3), 257–267. ISSN: 0169-2607.
99. KUZNETSOV, S. P. On critical behavior of one-dimensional lattices. *Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskooe Fiziki*. 1983, 9, 94–98.
100. LEE, J. et al. Personal Identification Based on Vectorcardiogram Derived from Limb Leads Electrocardiogram. *Journal of Applied Mathematics*. 2012, 2012, 12.
101. LETELLIER, C. From nonlinear dynamics to biomedicine through applications to ECG, EEG, and NIV: Chaos or not chaos, that is not the question! *Journal of Critical Care*. 2011, 26(3), e23. ISSN: 0883-9441.
102. LIU, C. et al. Measuring synchronization in coupled simulation and coupled cardiovascular time series: A comparison of different cross entropy measures. *Biomedical Signal Processing and Control*. 2015, 21, 49–57. ISSN: 1746-8094.
103. LONES, M. A. et al. Characterising neurological time series data using biologically motivated networks of coupled discrete maps. *Biosystems*. 2013, 112(2), 94–101. ISSN: 0303-2647.
104. MADHEKAR, S. Hyperchaos: Logistic Map – Bifurcation Diagram. 2011, Prieiga internetu: <https://hyperchaos.wordpress.com/2011/04/27/logistic-map-bifurcation-diagram/> [žiūrėta 2016 02 14].
105. MADIAS, J. E. Comparison of lead aVR "net QRS area" and "peak-to-peak amplitude" as indices of all limb electrocardiogram leads: Implications for the diagnosis, management, and follow-up in patients with heart failure. *Med Eng Phys*. 2012, 34(8), 1037–40. 1873-4030 Madias, John E Comparative Study Journal Article England Med Eng Phys. 2012 Oct;34(8):1037-40. doi: 10.1016/j.medengphy.2011.11.006. Epub 2011 Dec 3. ISSN: 1350-4533.
106. MAGALHÃES, L. M. et al. High interleukin 17 expression is correlated with better cardiac function in human Chagas disease. *Journal of Infectious Diseases*. 2013, 207(4), 661–665. ISSN: 0022-1899.
107. MAHMOUD, K. S. et al. Significance of ST-segment deviation in lead aVR for prediction of culprit artery and infarct size in acute inferior wall ST-elevation myocardial infarction. *The Egyptian Heart Journal*. 2015, 67(2), 145–149. ISSN: 1110-2608.
108. MANDELBROT, B. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. *Science*. 1967, 156(3775), 636–638. ISSN: 00368075.
109. MARKIENĖ, Z. O. Elektrokardiografija. 2000, Prieiga internetu: <http://ekg.lt/> [žiūrėta 2015 06 01].
110. MAROZAS, V. and D. JEGELEVIČIUS. *Biomedicinių signalų skaitmeninis apdorojimas*. 2008.
111. MARTÍN GARCÍA, A. et al. P Wave Morphology and Recurrence After Cardioversion of Lone Atrial Fibrillation. *Revista Española de Cardiología (English Version)*. 2012, 65(03), 289–290. ISSN: 255.
112. MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*. 1976, 261(5560), 459–467. 10.1038/261459a0.
113. MCCARTNEY, M. A discrete time car following model and the bi-parameter logistic map. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2009, 14(1), 233–243. ISSN: 1007-5704.

114. MCCARTNEY, M. et al. Investigation of a traffic modelling inspired two dimensional map. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010, 15(9), 2445–2455. ISSN: 1007-5704.
115. MCGUINNESS, M. et al. Arnold tongues in human cardiorespiratory systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2004, 14(1), 1–6.
116. MEHTA, S. S. et al. K-means algorithm for the detection and delineation of QRS-complexes in Electrocardiogram. *IRBM*. 2010, 31(1), 48–54. ISSN: 1959-0318.
117. MEKO, D. M. Applied Time Series Analysis (GEOS 585A). 2015, Prieiga internetu: <http://www.ltrr.arizona.edu/~dmeko/geos585a.html> [žiūrēta 2015 06 10].
118. ŠMIDTAITĒ, R. et al. Sašajū vertinimas kompleksinēms sistemoms medicinoje. *Biomedical Engineering*. 2008, 4.
119. MISHRA, A. K. and S. RAGHAV. Local fractal dimension based ECG arrhythmia classification. *Biomedical Signal Processing and Control*. 2010, 5(2), 114–123. ISSN: 1746-8094.
120. MOODY, G. B. MIT-BIH Database Distribution: Harvard-MIT Division of Health Sciences and Technology. 2005, Prieiga internetu: <http://ecg.mit.edu/> [žiūrēta 2015 06 03].
121. MUNTIANAITĒ-DULKINIENĒ, I et al. Cointegration of Different ECG Parametres for Various Physical Tasks. *Elektronika ir Elektrotechnika*. 2009, 94(6), 77–80. ISSN: 2029-5731.
122. MUNTIANAITĒ-DULKINIENĒ, I. et al. Širdies ir kraujagyslių sistemos funkcinių rodiklių kaitos kompleksiško matematinis įvertinimas atliekant judamąsias užduotis. 2010.
123. NAVICKAS, Z. et al. EKG derivacijų integralinės koreliacinės dimensijos vertinimas. *Elektronika ir Elektrotechnika*. 2005, 5(61), 67–69. ISSN: ISSN 1392-9631.
124. NAVICKAS, Z. et al. The logistic map of matrices. *Discrete Cont Dyn-B*. 2011, 16(3), 927–944.
125. NAVICKAS, Z. et al. The explosive divergence in iterative maps of matrices. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2012, 17(11), 4430–4438. ISSN: 1007-5704.
126. NAYAK, M. and N. RAY. *Influence of gender and body mass index on autonomic reactivity in adults and middle-aged population*. 2014.
127. NEN, S. and K. MACOTO. Robustness leads close to the edge of chaos in coupled map networks: toward the understanding of biological networks. *New Journal of Physics*. 2013, 15(5), 053037. ISSN: 1367-2630.
128. NETHONONDA, R. et al. The relationship between electrocardiographic and cardiac magnetic resonance (CMR)-derived left ventricular parameters differs between physiologic and pathologic hypertrophy. *Journal of Cardiovascular Magnetic Resonance*. 2008, 10(Suppl 1), 1–2.
129. OFULLA, A. *The Secrets of Hidden Knowledge: How Understanding Things in the Physical Realm Nurtures Life*. 2013.
130. OKNIŃSKI, A. and B. RADZISZEWSKI. Simple model of bouncing ball dynamics: displacement of the table assumed as quadratic function of time. *Nonlinear Dynamics*. 2012, 67(2), 1115–1122. ISSN: 0924-090X.
131. OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. 2002.
132. ÖZDEMİR, H. and A. Y. ÖZBAN. On idempotency of linear combinations of idempotent matrices. *Applied Mathematics and Computation*. 2004, 159(2), 439–448. ISSN: 0096-3003.



133. ÖZDEMİR, H. et al. On idempotency and tripotency of linear combinations of two commuting tripotent matrices. *Applied Mathematics and Computation*. 2009, 207(1), 197–201. ISSN: 0096-3003.
134. ÖZDEMİR, H. et al. On a disjoint idempotent decomposition for linear combinations produced from n commutative tripotent matrices. *Applied Mathematics and Computation*. 2012, 219(4), 1909–1918. ISSN: 0096-3003.
135. PACHAURI, N. and D. K. MISHRA. Phase Synchronization and Coherence Analysis between ECG & Arterial Blood Pressure. *International Journal of Computer Applications*. 2012, 44(18), 4.
136. PAN, Y.-H. et al. Fast computation of sample entropy and approximate entropy in biomedicine. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2011, 104(3), 382–396. ISSN: 0169-2607.
137. PATCHETT, N. Electrocardiography: from Wikipedia, the free encyclopedia. 2015, Prigeja internetu: <http://en.wikipedia.org/wiki/Electrocardiography> [žiūrėta 2015 06 02].
138. PATTON, K. *Anatomy and Physiology*. 2015.
139. PAVLOV, E. A. et al. Map-based model of the cardiac action potential. *Physics Letters A*. 2011, 375(32), 2894–2902. ISSN: 0375-9601.
140. PEIRCE, B. Linear associative algebra. *American Journal of Mathematics*. 1881, 4(1), 97–229. ISSN: 0002-9327.
141. PEREDA, E. et al. Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals. *Progress in Neurobiology*. 2005, 77(1–2), 1–37. ISSN: 0301-0082.
142. PINCUS, S. M. Approximate entropy as a measure of system complexity. *Proc Natl Acad Sci U S A*. 1991, 88(6), 2297–301. Pincus, S M Journal Article United States Proc Natl Acad Sci U S A. 1991 Mar 15;88(6):2297-301. ISSN: 0027-8424 (Print) 0027-8424.
143. PODERYS, J. et al. Cardiovascular changes during the performance by nonathletes of Bosco repeated jumps anaerobic test. *Medicina*. 2015, ISSN: 1010-660X.
144. PORTA, A. et al. *Cardiovascular control and time domain Granger causality: insights from selective autonomic blockade*. 2013.
145. PORTHAN, K. et al. Relationship of common candidate gene variants to electrocardiographic T-wave peak to T-wave end interval and T-wave morphology parameters. *Heart Rhythm*. 2010, 7(7), 898–903. ISSN: 1547-5271.
146. PUKĖNAS, K. Kokybinių duomenų analizė SPSS. 2010, 137. ISSN: 9786098040524.
147. QIANQIAN, W. et al. Investigating the beat by beat phase synchronization between maternal and fetal heart rates. 3821–3824.
148. QU, Z. Chaos in the genesis and maintenance of cardiac arrhythmias. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*. 2011, 105(3), 247–257. ISSN: 0079-6107.
149. QU, Z. et al. Nonlinear and stochastic dynamics in the heart. *Physics Reports*. 2014, 543(2), 61–162. ISSN: 0370-1573.
150. QUIAN QUIROGA, R. et al. Performance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals. *Physical Review E*. 2002, 65(4), 041903. PRE.
151. RADWAN, A. G. On some generalized discrete logistic maps. *Journal of Advanced Research*. 2013, 4(2), 163–171. ISSN: 2090-1232.
152. RAGULSKIS, M. and Z. NAVICKAS. The rank of a sequence as an indicator of chaos in discrete nonlinear dynamical systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2011, 16(7), 2894–2906. ISSN: 1007-5704.

153. RANI, M. and R. AGARWAL. Generation of fractals from complex logistic map. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2009, 42(1), 447–452. ISSN: 0960-0779.
154. RAO, A. and P. BHIMASANKARAM. *Linear algebra*. 2000.
155. RICHMAN, J. S. and J. R. MOORMAN. Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy. *Am J Physiol Heart Circ Physiol*. 2000, 278(6), H2039–49. ISSN: 0363-6135 (Print) 0363-6135.
156. RICKARD, J. et al. QRS prolongation induced by cardiac resynchronization therapy correlates with deterioration in left ventricular function. *Heart Rhythm*. 2012, 9(10), 1674–1678. ISSN: 1547-5271.
157. RÉNYI, A. *Probability theory*. 1970.
158. ROGERS, A. et al. Chaotic maps and pattern recognition – the XOR problem. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2002, 14(1), 57–70. ISSN: 0960-0779.
159. ROSENBLUM, M. et al. Phase synchronization: from theory to data analysis. *Handbook of biological physics*. 2001, 4(279-321), 93–94.
160. RYZHII, E. and M. RYZHII. A heterogeneous coupled oscillator model for simulation of ECG signals. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2014, 117(1), 40–49. ISSN: 0169-2607.
161. SADHUKHAN, D. and M. MITRA. ECG noise reduction using Fourier coefficient suppression. 142–146.
162. SAHOO, J. P. et al. Autocorrelation and Hilbert transform-based QRS complex detection in ECG signal. *International Journal of Signal and Imaging Systems Engineering*. 2014, 7(1), 52–58.
163. SARDUVAN, M. and H. ÖZDEMİR. On linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices. *Applied Mathematics and Computation*. 2008, 200(1), 401–406. ISSN: 0096-3003.
164. SCHERPTONG, R. W. et al. Normal limits of the spatial QRS-T angle and ventricular gradient in 12-lead electrocardiograms of young adults: dependence on sex and heart rate. *J Electrocardiol*. 2008, 41(6), 648–55. ISSN: 0022-0736.
165. SCHIEK, M. et al. Circle Maps Analysis implemented on an intelligent, miniaturized and wireless communicating sensor enabling online cardiac arrhythmia classification. 1321–1324.
166. SECUI, D. C. A new modified artificial bee colony algorithm for the economic dispatch problem. *Energy Conversion and Management*. 2015, 89(0), 43–62. ISSN: 0196-8904.
167. SEGUINS PAZZIS, C. de. On sums of idempotent matrices over a field of positive characteristic. *Linear Algebra and its Applications*. 2010, 433(4), 856–866. ISSN: 0024-3795.
168. SHAKIBFAR, S. et al. Assessing common classification methods for the identification of abnormal repolarization using indicators of T-wave morphology and QT interval. *Computers in Biology and Medicine*. 2012, 42(4), 485–491. ISSN: 0010-4825.
169. SHANNON, C. E. A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*. 1948, 27(3), 379–423. ISSN: 1538-7305.
170. SHINWARI, M. F. et al. Classification algorithm for feature extraction using Linear Discriminant Analysis and Cross-Correlation on ECG signals. *International Journal of Advanced Science and Technology*. 2012, 48, 149–161.
171. SINGH, A. et al. Discretization of continuous ECG based risk metrics using asymmetric and warped entropy measures. 473–476.
172. SINGH, R. and J. J. MURPHY. Electrocardiogram and arrhythmias. *Anaesthesia & Intensive Care Medicine*. 2009, 10(8), 381–384.

173. SIPAHI, I. et al. Effect of QRS morphology on clinical event reduction with cardiac resynchronization therapy: Meta-analysis of randomized controlled trials. *American Heart Journal*. 2012, 163(2), 260–267.e3. ISSN: 0002-8703.
174. ŠLIUPAITĖ, A. et al. Evaluation of complexity of ECG parameters using sample entropy and Hankel matrix. *Elektronika ir Elektrotechnika*. 2009, 92(4), 107–110.
175. SMIDTAITE, R. et al. Evaluation of Coherence of T wave in Different Leads. *Elektronika ir Elektrotechnika*. 2009, 93(5), 113–116. ISSN: 2029-5731.
176. SMIDTAITE, R. et al. ECG Research Using Elements of Matrix Analysis and Phase Planes. *Elektronika ir Elektrotechnika*. 2010, 103(7), 83–86. ISSN: 2029-5731.
177. SMITH, S. W. Upwardly concave ST segment morphology is common in acute left anterior descending coronary occlusion. *The Journal of Emergency Medicine*. 2006, 31(1), 69–77. ISSN: 0736-4679.
178. SOLBERG, G. et al. Respiratory gas exchange indices for estimating the anaerobic threshold. *Journal of sports science & medicine*. 2005, 4(1), 29.
179. SOUFAN, O. and S. ARAFAT. Arrhythmia Detection using Mutual Information-Based Integration Method. *arXiv preprint arXiv:1502.01733*. 2015,
180. STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. 2014.
181. TAKEUCHI, K. A. et al. Extensive and Subextensive Chaos in Globally Coupled Dynamical Systems. *Physical Review Letters*. 2011, 107(12), 124101. PRL.
182. TANG, W.-H. et al. Wide QRS tachycardia with two P wave morphologies: What is the mechanism? *The Kaohsiung Journal of Medical Sciences*. 2012, 28(7), 404–405.
183. TIAN, Y. G. A disjoint idempotent decomposition for linear combinations produced from two commutative tripotent matrices and its applications. *Linear and Multilinear Algebra*. 2011, 59(11), 1237–1246. ISSN: 0308-1087.
184. TIAN, Y. and G. P. H. STYAN. Rank equalities for idempotent matrices with applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2006, 191(1), 77–97. ISSN: 0377-0427.
185. UBEYLI, E. D. and n. GÜLER. Detection of electrocardiographic changes in partial epileptic patients using Lyapunov exponents with multilayer perceptron neural networks. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2004, 17(6), 567–576. ISSN: 0952-1976.
186. UBEYLI, E. Detecting variabilities of ECG signals by Lyapunov exponents. *Neural Computing and Applications*. 2009, 18(7), 653–662. ISSN: 0941-0643.
187. VAFAIE, M. H. et al. Heart diseases prediction based on ECG signals' classification using a genetic-fuzzy system and dynamical model of ECG signals. *Biomedical Signal Processing and Control*. 2014, 14(0), 291–296. ISSN: 1746-8094.
188. VAINORAS, A. et al. Analysis of Electric Cardiac Signals—Methods and Application Results. *Elektronika ir Elektrotechnika*. 2008, 85(5), 81–84.
189. VAINORAS, A. *Širdies repoliarizacijos procesų tyrimas ramybės ir fizinio krūvio metu (100-taškės ir įprastinės EKG duomenys): habilitacinis darbas*. 1996.
190. VAINORAS, A. Functional model of human organism reaction to load-evaluation of sportsman training effect. *Education Physical Training Sport*. 2002, 3(44), 5.
191. VARON, C. et al. Robust artefact detection in long-term ECG recordings based on auto-correlation function similarity and percentile analysis. 3151–3154.
192. VENSKAITYTĖ, E. et al. Elektrokardiogramos rodiklių sąsąjį ir jų fizinės plokštumos dinamikos analizė. *Physical Culture and Sport in Universities*. 2010, 3. ISSN: 2029-4840.

193. VENSKAITYTĖ, E. et al. *Širdies ir kraujagyslių sistemos funkcinių rodiklių sąsajų kaita vertinant sportuojančiųjų organizmo būsenas*. 2011.
194. VENSKAITYTĖ, E. et al. Assessment of Dynamics of Inter-Parameter Concatenation during Exercise Tests. *Elektronika ir Elektrotechnika*. 2009, 94(6), 89–92. ISSN: 2029-5731.
195. VESALIUS, A. *De Humani Corporis Fabrica (On the Fabric of the Human Body)*. 1543.
196. WALLER, A. D. A Demonstration on Man of Electromotive Changes accompanying the Heart's Beat. *The Journal of Physiology*. 1887, 8(5), 229–234. ISSN: 1469-7793.
197. WALLER, I. and R. KAPRAL. Spatial and temporal structure in systems of coupled non-linear oscillators. *Physical Review A*. 1984, 30(4), 2047–2055. PRA.
198. WEISSTEIN, E. W. Logistic Map. 2001,
199. WRIGHT, S. E. A note on the equality of rank and trace for an idempotent matrix. *Applied Mathematics and Computation*. 2011, 217(16), 7048–7049. ISSN: 0096-3003.
200. WU, G. Q. et al. Chaotic Signatures of Heart Rate Variability and Its Power Spectrum in Health, Aging and Heart Failure. *PLoS ONE*. 2009, 4(2), e4323.
201. XIE, H.-B. et al. Complexity analysis of the biomedical signal using fuzzy entropy measurement. *Applied Soft Computing*. 2011, 11(2), 2871–2879. ISSN: 1568-4946.
202. XIONG, F. and M. TANIK. *A Digital Circuit Model For Exploration Of Cardiovascular System Based On ECG (Electrocardiogram) input and ABP (Arterial blood pressure) Output Signals Using Evolvable Hardware Design*. 2011.
203. YEH, J.-R. et al. Investigating Properties of the Cardiovascular System Using Innovative Analysis Algorithms Based on Ensemble Empirical Mode Decomposition. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2012, 2012, 11.
204. ZANIN, M. et al. Permutation Entropy and Its Main Biomedical and Econophysics Applications: A Review. *Entropy*. 2012, 14(8), 1553–1577. ISSN: 1099-4300.
205. ZAYLAA, A. et al. Reducing sojourn points from recurrence plots to improve transition detection: Application to fetal heart rate transitions. *Computers in biology and medicine*. 2015, 63, 251–260. ISSN: 0010-4825.
206. ZHANG, Q. et al. Improved algorithm for image encryption based on DNA encoding and multi-chaotic maps. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*. 2014, 68(3), 186–192. ISSN: 1434-8411.
207. ZHAO, Y. et al. Evidence Consistent with Deterministic Chaos in Human Cardiac Data: Surrogate and Nonlinear Dynamical Modeling. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2008, 18(01), 141–160.
208. ZOLFAGHARIAN, S. and M. NOURBAKHS. The Development of a Sustainable-construction Planning System. 2012, 17, 162–178.

## **MOKSLINIŲ PUBLIKACIJŲ DISERTACIJOS TEMA SĄRAŠAS**

### **Web of Science duomenų bazės leidiniuose su citavimo indeksu**

#### **Tarptautinėse leidyklose**

1. Navickas, Z.; Ragulskis, M.; Vainoras, A.; Smidtaite, R. The explosive divergence in iterative maps of matrices // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. Elsevier, ISSN 1007-5704, Volume 17, 2012, p. 4430–4438.
2. Navickas Zenonas, Smidtaite Rasa, Vainoras Alfonsas, Ragulskis Minvydas, The Logistic Map of Matrices, Discrete and Continuous Dynamical Systems B (DCDS-B), Volume 16, Number 3, 2011, p. 927–944.

#### **Nacionalinėse leidyklose**

1. Alabdulgade, Abdullah; Maccraty, Rollin; Atkinson, Mike; Vainoras, Alfonsas; Berškienė, Kristina; Mauricienė, Vilma; Daunoravičienė, Algė; Navickas, Zenonas; Šmidkaitė, Rasa; Landauskas, Mantas. Human heart rhythm sensitivity to earth local magnetic field fluctuations // *Journal of vibroengineering / Vibromechanika*, Lithuanian Academy of Sciences, Kaunas University of Technology, Vilnius Gediminas Technical University. Kaunas: Vibroengineering. ISSN 1392-8716. 2015, vol. 17, iss. 6, p. 3271–3278.
2. Šmidkaitė, Rasa; Navickas, Zenonas; Venskaitytė Eurelija, ECG Research Using Elements of Matrix Analysis and Phase Planes // *Electronics and Electrical Engineering = Elektronika ir elektrotechnika*. Kaunas: Technologija. ISSN 1392-1215. 2010, nr. 7(103), p. 83–86.
3. Šmidkaitė, R.; Navickas, Z.; Vainoras, A.; Bikulčienė, L.; Poškaitis, V. Evaluation of coherence of T wave in different leads // *Electronics and Electrical Engineering = Elektronika ir elektrotechnika*. Kaunas: Technologija. ISSN 1392-1215. 2009, nr. 5(93), p. 113–116.

### **Kitų tarptautinių duomenų bazių leidiniuose (Periodiniuose leidiniuose ir vienkartinuose straipsnių rinkiniuose bei konferencijų pranešimų medžiagoje paskelbti straipsniai)**

#### **Tarptautinėse leidyklose**

1. Navickas, Zenonas; Landauskas, Mantas; Šmidkaitė, Rasa; Ragulskis, Minvydas. The Ho-Kalman Model As A Transformer Of Linear Recurring Sequences // *Global journal of pure and applied mathematics*. Delhi: Research India Publications. ISSN 0973-1768. 2015, vol. 11, no. 1, p. 99–119.
2. Bikulčienė, Liepa; Navickas, Zenonas; Šmidkaitė, Rasa; Berškienė, Kristina; Vainoras, Alfonsas. The measure of ECG complexity by matrix analysis // *Journal of Applied Electromagnetism*. Athens: Institute of Communication and

## **Kituose recenzuojamuose mokslo leidiniuose paskelbti straipsniai**

## **Konferencijų pranešimų medžiagoje paskelbti straipsniai**

### **Tarptautinėse leidyklose**

1. Bikulčienė, Liepa; Navickas, Zenonas; Vainoras, Alfonsas; Šmidkaitė, Rasa. The measure of ECG complexity by matrix analysis // Proceedings of 5th International Conference on Communications, Electromagnetics and Medical Applications (CEMA'10), 7–9 October, 2010, Athens, Greece. Sofia: KING. ISSN 1314-2100. 2010, p. 89–92.

### **Nacionalinėse leidyklose**

1. Vainoras, Alfonsas; Šmidkaitė, Rasa; Bikulčienė, Liepa; Gargasas, Liudas. Monitoring of elderly using special matrix characteristics for analysis of ECG parameters // Biomedical engineering – 2011: proceedings of international conference, Kaunas University of Technology, 27, 28 October 2011 / Kaunas University of Technology. Kaunas: Technologija. ISSN 2029-3380. 2011, p. 26–29.
2. Venskaitytė, Eurelija; Šmidkaitė, Rasa; Bikulčienė, Liepa; Poderys, Jonas; Vainoras, Alfonsas. Elektrokardiogramos rodiklių sąsajų ir jų fazinės plokštumos dinamikos analizė // Kūno kultūra ir sportas universitete – 2010 = Physical culture and sport in universities 2010: tarptautinės konferencijos pranešimų medžiaga / Kauno technologijos universitetas. Kaunas: Technologija. ISSN 2029-4840. 2010, p. 164–166.
3. Šmidkaitė, Rasa; Navickas, Zenonas; Vainoras, Alfonsas; Venskaitytė, E. Analysis of relation between cardiosignal and its change in time // Biomedical engineering: proceedings of international conference, 29, 30 October 2009, Kaunas University of Technology. Kaunas: Technologija. ISSN 2029-3380. 2009, p. 21–24.
4. Šmidkaitė, Rasa; Navickas, Zenonas; Vainoras, Alfonsas; Berškienė, Kristina; Bikulčienė, Liepa; Poderys, Jonas. Sąsajų vertinimas kompleksinėms sistemoms medicinoje // Biomedicininė inžinerija = Biomedical engineering: tarptautinės konferencijos pranešimų medžiaga, 2008 m. spalio 23–24 d., Kaunas / Kauno technologijos universitetas. Kaunas: Technologija, 2008, ISBN 9789955255765. p. 47–50.

UDK 512.643 + 517.938 + 530.182](043.3)

SL344. 2017-04-27, 14,75 leidyb. apsk.1. Tiražas 12 egz. Užsakymas 150.

Išleido Kauno technologijos universitetas, K. Donelaičio g. 73, 44249 Kaunas, Lietuva  
Spausdino leidyklos „Technologija“ spaustuvė, Studentų g. 54, 51424 Kaunas, Lietuva