

**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS  
STATYBOS IR ARCHITEKTŪROS FAKULTETAS**

**Ignacio Villalon Fornes**

**SMŪGINĖS APKROVOS VEIKIAMOS GEMBINĖS SIJOS  
TYRIMAS**

Magistro projektas

**Vadovas**  
Prof. dr. Viktoras Doroševas

**KAUNAS, 2017**

**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**STATYBOS IR ARCHITEKTŪROS FAKULTETAS**

**SMŪGINĖS APKROVOS VEIKIAMOS GEMBINĖS SIJOS**  
**TYRIMAS**

Magistro projektas  
Statybos inžinerija (kodas 621H20001)

**Vadovas**

(parašas) Prof. dr. Viktoras Doroševas  
(data)

**Recenzentas**

(parašas) Lekt. dr. Juozas Vaičiūnas  
(data)

**Projektą atliko**

(parašas) Ignacio Villalon Fornes  
(data)

**KAUNAS, 2017**



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**STATYBOS IR ARCHITEKTŪROS FAKULETTAS**

(Fakultetas)

**IGNACIO, VILLALON FORNES**

(Studento vardas, pavardė)

**STATYBOS INŽINERIJA, 621H20001**

(Studijų programos pavadinimas, kodas)

„Smūginės apkrovos veikiamos gembinės sijos tyrimas“  
**AKADEMINIO SAŽNINGUMO DEKLARACIJA**

20 17 m. gegužės 23 d.  
Kaunas

Patvirtinu, kad mano, **Ignacio Villalon Fornes**, baigiamasis projektas tema „Smūginės apkrovos veikiamos gembinės sijos tyrimas“ yra parašytas visiškai savarankiškai ir visi pateikti duomenys ar tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti sąžiningai. Šiame darbe nei viena dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar internetinių šaltinių, visos kitų šaltinių tiesioginės ir netiesioginės citatos nurodytos literatūros nuorodose. Įstatymų nenumatytų piniginių sumų už šį darbą niekam nesu mokėjęs.

Aš suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo faktui, man bus taikomos nuobaudos, remiantis Kauno technologijos universitete galiojančia tvarka.

\_\_\_\_\_  
(vardą ir pavardę įrašyti ranka)

\_\_\_\_\_  
(parašas)

Magistro baigiamojo darbo planas

## SMŪGINĖS APKROVOS VEIKIAMOS GEMBINĖS SIJOS TYRIMAS

### **I semestras**

1. Literatūros paieška ir apžvalga.
2. Pagrindinių sijos skaičiavimo teorijų apžvalga.
  - 2.1. *Bernoulli-Euler* teorija.
  - 2.2. *Timoshenko* teorija.
3. Standžiai plastiškos sijos analizės metodai.

### **II semestras**

1. Eksperimentams naudojamų sijų ir jų medžiagų bei skerspjuvių parinkimas.
2. Tyrimo schemos sudarymas. Bandymų planavimas.
3. Gembinių sijų gaminimas.
4. Matavimui reikalingos aparatūros parinkimas.

### **III semestras**

1. Eksperimentų atlikimas ir duomenų surinkimas.

### **IV Semestras**

1. Gautų rezultatų analizė ir palyginimas.
2. Magistro baigiamojo darbo apipavidalinimas

Vadovas: prof. Dr. V. Doroševs

Studentas: Ignacio Villalon, STM-5 gr.

# TURINYS

1. Įvadas.....	9
1.1. Temos aktualumas .....	9
1.2. Darbo tikslas ir uždaviniai.....	10
1.3. Praktinė vertė.....	10
2. Teorinė problemos analizė.....	11
2.1. Pagrindinės sijų teorijos .....	11
2.1.1. <i>Bernoulli-Euler</i> sijų teorija.....	11
2.1.1.1. Statinė <i>Bernoulli-Euler</i> lygtis.....	12
2.1.1.2. Sijos įlinkių formulė dinaminio apkrovimo atveju.....	14
2.1.2. <i>Timoshenko</i> sijų teorija .....	15
2.1.2.1. Kvazistatinė <i>Timoshenko</i> sija .....	16
2.1.2.2. Kraštinės sąlygos .....	16
2.1.2.3. Dinaminės apkrovos veikiama sija pagal <i>Timoshenko</i> teoriją .....	17
2.1.2.4. <i>Timoshenko</i> šlyties koeficientas .....	18
2.2. Dinaminis apkrovimas tamprioje įtempių ir deformacijų stadijoje .....	18
2.2.1. <i>D'Alembert</i> principas.....	18
2.2.2. Dinaminio koeficiento metodas (energetinis metodas).....	19
2.2.3. <i>Hertz</i> teorija.....	21
2.2.4. Nauji tyrimai.....	22
2.3. Dinaminis apkrovimas plastinėje įtempių ir deformacijų stadijoje .....	22
2.3.1. Bendros sąvokos.....	22
2.3.2. Sijų dinaminis apkrovimas.....	23
2.3.3. Dinaminės apkrovos veikiama dviatramė sija.....	24
2.3.4. Dinaminės apkrovos veikiama gembinė sija .....	24
3. Eksperimento planavimas, aprašymas ir atlikimas .....	27
3.1. Eksperimento planavimas .....	27

3.2.	Eksperto aprašymas.....	29
3.3.	Eksperto atlikimas.....	35
4.	Statinės apkrovos veikiamos sijos rezultatų analizė .....	37
4.1.	Teorinės įlinkių reikšmės .....	37
4.2.	Ekspertiniai matavimai.....	40
4.2.1.	Įlinkių matavimas naudojant „merkimo į dažus“ metodą.....	40
4.2.1.	Įlinkių matavimas naudojant lazerinį atstumo matuoklį.....	42
4.3.	Matavimo metodų lyginamoji analizė .....	44
4.4.	Statinės apkrovos veikiamos sijos analizės išvados .....	47
5.	Smūginių bandymų rezultatų analizė .....	48
5.1.	Dinaminio koeficiento skaičiavimo teorijos ir jų atitikimas bandymų rezultatams .....	48
5.2.	Priklausomybės nuo apkrovos kritimo aukščio $h$ .....	57
5.2.1.	Įlinkių priklausomybė nuo apkrovos laisvo kritimo aukščio .....	57
5.2.2.	Dinaminio koeficiento priklausomybė nuo apkrovos laisvo kritimo aukščio .....	59
5.3.	Dinaminio koeficiento priklausomybė nuo sijos ilgio .....	61
5.3.1.	Sijos įlinkiai esant $L=1,5\text{m}$ ir $2,0\text{m}$ .....	62
5.3.2.	Rezultatų palyginimas tarp skirtingų sijų ilgių.....	63
5.4.	Paklaidų statistinė analizė .....	65
5.4.1.	Pagrindiniai statistiniai dydžiai .....	65
5.4.2.	Normaliojo skirstinio hipotezės tikrinimas .....	67
5.4.3.	Paklaidų įvertinimas pritaikant $2\cdot\sigma$ taisyklę .....	70
5.5.	Smūgio jėgos veikimo laiko įvertinimas.....	71
6.	Išvados.....	74
7.	Literatūra .....	76
	Priedai .....	79

Villalon Fornes, Ignacio. *Smūginės apkrovos veikiamos gembinės sijos tyrimas*. Magistro baigiamasis projektas / vadovas prof. dr. Viktoras Doroševas; Kauno technologijos universitetas, Statybos ir Architektūros fakultetas.

Mokslo kryptis ir sritis: Statybinė Dinamika, Statybos Inžinerija.

Reikšminiai žodžiai: *gembinė sija, smūginė apkrova, įlinkiai, dinaminis koeficientas*.

Kaunas, 2017. 05. 10.

## **SANTRAUKA**

Statybos inžinerijos srityje dauguma metodikų bei projektavimo situacijų yra parengti veikiant statinėms apkrovoms. Tačiau, realiame pasaulyje apkrovos kinta laike – jos yra dinaminės. Dinaminės apkrovos gali sukelti daug pavojingesnes situacijas nei statinės; dėl to yra labai aktualu išvystyti dinaminių poveikių tyrimus.

Vienas iš pavojingiausių dinaminių poveikių konstrukcijoms yra smūginė apkrova; smūgio veikimas yra staigus. Todėl smūgio metu elementas juda dideliu pagreičiu. Tokiu būdu sukeliama daug pavojingesnių įrąžų bei deformacijų nei statinės apkrovos veikimo metu. Paprasčiausias ir plačiausiai naudojamas metodas smūginės apkrovos pasekmių prognozavimui yra dinaminis koeficientas  $k_{dyn}$ . Jis parodo kiek kartų konstrukcijos įlinkiai dinaminės apkrovos veikimo metu viršija atitinkamos statinės apkrovos sukeltus įlinkius.

Šiame darbe yra nagrinėjami smūginės apkrovos veikiamos metalinės gembinės sijos įlinkiai. Tiek statinės, tiek dinaminės apkrovos veikiamos sijos eksperimentiniai įlinkių matavimai yra palyginami su teoriniais rezultatais. Skirtingos dinaminio koeficiento skaičiavimo metodikos yra palyginamos su eksperimentiniais rezultatais. Taip pat yra atliekama statistinė matavimo duomenų paklaidų analizė.

Villalon Fornes, Ignacio. *Investigation of a Cantilever Beam under Impact Loading*: Master's thesis in Civil Engineering / supervisor prof. dr. Viktoras Doroševas. The Faculty of Civil Engineering and Architecture, Kaunas University of Technology.

Research area and field: Construction Dynamics, Civil Engineering.

Key words: *cantilever beam, impact load, deformations, dynamic factor.*

Kaunas, 10.05.2017

## **SUMMARY**

Most of the structural calculation methods in Civil Engineering are implemented for the case of static loads. However, in the real world static loads do not exist. All loads are constantly changing with time. Therefore, it is crucial to consider dynamic load effects on building structures, which may considerably differ from static effects.

Impact loading is one of the most dangerous dynamical situations in construction. Impact loads act quite suddenly and with large accelerations. Therefore, impact provokes considerably more hazardous internal forces and deformations in structural elements, as compared to static forces. The most simple and most widely used method to describe impact load effects is the dynamic factor  $k_{dyn}$ , which shows the ratio between dynamic and static deformations.

In this research the deformations of a cantilever metal beam are analyzed. Both static and dynamic loading experimental measurements are compared with theoretical results. Different dynamic factor calculation methods are compared with experimental results. Finally, a statistical analysis of the errors of the experimental measurements is carried out.



# 1. ĮVADAS

## 1.1. Temos aktualumas

Dinaminių apkrovų įvertinimas – tai vienas iš svarbiausių dalykų inžineriniame projektavime. Poveikiai, kurie yra sukelti veikiant dinaminei apkrovai gali labai ženkliai skirtis nuo poveikių, sukeltų to paties didumo statinės apkrovos. Statybos inžinerijos moksle dauguma projektavimo metodikų bei skaičiavimų yra skirti statinei analizei, t.y. nagrinėti konstrukcijų elgseną ir užtikrinti jų stiprumą ir pastovumą esant nekintantiems laike apkrovimams. Dėl to statiškai apkrautų konstrukcijų įrašų, įtempių ir deformacijų analizė yra daug plačiau išvystyta ir rezultatai patikimesni nei dinaminio apkrovimo atveju.

Tačiau, kaip teisingai pastebi įvairūs autoriai [1, 2], visos realios apkrovos yra dinaminės. Statinė apkrova yra konkretus dinaminės apkrovos atvejis. Pagal A. Čižo [3] apibrėžimą *dinaminė apkrova – tai tokia apkrova, kurios didumas, kryptis arba pridėties taškas sparčiai kinta ir kuri dėl to konstrukcijos elementą veikia dideliu pagreičiu*. Apkrovos veikimo metu, konstrukcijoje atsiranda pagreitis, kuris sukelia papildomas inercines jėgas; dėl to poveikiai gali būti kelis ar net dešimt kartų didesni nei statinės apkrovos veikimo metu. Dėl to, apkrovos dinamiškumas turėtų būti gerai nagrinėjamas inžineriniame projektavime, ypač skaičiuojant tiltams, estakadoms, pokraninėms sijoms, geležinkelio bėgiams ir panašioms konstrukcijoms. Dinaminė konstrukcijų analizė yra labai aktuali tiriant žemės drebėjimų pasekmes pastatuose.

Nepaisant poreikio, dinaminės apkrovos yra išanalizuotos daug mažiau nei statinės. Viena vertus nėra vieningos tyrimo metodikos; kita vertus poveikiai yra daug sunkiau prognozuojami. Norint gauti tikslius rezultatus, skaičiavimo metodai pasidaro labai sudėtingi ir reikalauja specialios įrangos arba skaičiavimo programos. A. Čižas [3] paaiškina, kad mokslinė šaka, nagrinėjanti šituos poveikius, vadinasi *Statybinė Dinamika*. Nagrinėjant tamprius kūnus, dažnai yra daroma prielaida, kad dinaminės apkrovos veikiamas kūnas deformuojasi pagal statinės apkrovos principus, įvedant tam tikrus papildymus. Plačiausiai naudojamas toks papildymas yra dinaminis koeficientas  $k_{dyn}$ , kuris parodo kiek kartų dinaminės apkrovos poveikis yra didesnis už statinės apkrovos poveikį, esant tos pačios masės apkrovai. Dinaminių apkrovų poveikis statybinėms konstrukcijoms buvo pradėtas nagrinėti, kai 1847 metais sugriuvo *Stephenson* tiltas (Anglijoje). Tai skatino inžinierius plačiau nagrinėti dinamines apkrovas. Šiuo metu tai yra viena iš svarbiausių statybinės mechanikos mokslinių tyrimo krypčių.

## 1.2. Darbo tikslas ir uždaviniai

Šio tyrimo tikslas – smūginės apkrovos veikiamos metalinės gembinės sijos analizė tampriojoje deformacijos stadijoje.

Tyrimo uždaviniai:

1. Atlikti statinės apkrovos veikiamos gembinės sijos deformacijų analizę ir palyginti dviejų matavimo metodų („merkimo į dažus“ ir „lazerinio prietaiso“) tikslumą. Patikrinti dviejų pagrindinių sijų teorijų (*Bernoulli-Euler* ir *Timoshenko*) atitikimą eksperimentiniams rezultatams.
2. Atlikti smūginės apkrovos veikiamos gembinės sijos deformacijų analizę ir palyginti dinaminio koeficiento apskaičiavimo metodikas ir jų atitikimą eksperimentiniams rezultatams. Atlikti bandymus, esant skirtingiems svarmenų kritimo aukščiams, sijų ilgiams ir apkrovimo taško koordinatėms. Atlikti smūginės apkrovos veikiamos gembinės sijos deformacijų analizę skaitiniais metodais su baigtinių elementų programa ir identifikuoti smūgio trukmę.
3. Nustatyti smūginės apkrovos veikiamos gembinės sijos eksperimentinių matavimų nuokrypius nuo teorinių rezultatų taikant statistinės analizės metodus. Patikrinti nuokrypių išsibarstymo atitikimą normaliajam skirstiniui.

## 1.3. Praktinė vertė

Gembinės konstrukcijos yra labai plačiai naudojamos statybos, mechanikos ir aeronautikos inžinerijos srityse. Jos gali būti veikiamos įvairių poveikių ir apkrovų, pavyzdžiui, mechaninio poveikio ar žmonių veiklos. Turint omenyje, kad veikiamas elementas gali būti pavojingoje konstrukcijos vietoje (pvz., perdangos sija), yra labai svarbu atsižvelgti į smūgio poveikį. Statinė apkrova gali būti nereikšminga konstrukcijai, bet smūginė – gali sukelti realią grėsmę konstrukcijos tinkamumui ar saugumui.

## 2. TEORINĖ PROBLEMOS ANALIZĖ

### 2.1. Pagrindinės sijų teorijos

Sija – tai statybinė konstrukcija, kurioje viena iš geometrinių dimensijų (ilgis) yra santykinai daug didesnė nei kitos dvi (aukštis ir plotis). Jos yra projektuojamos, kad atlaikytų skersines apkrovas.

*Timoshenko* [4] pateikia sijų teoriją istorinę apžvalgą. Sijų mokslinis aprašymas prasidėjo XIX amžiaus pradžioje. Pasinaudojantis *Robert Hook* neseniai išvystyta tamprumo teorija, *Jacob Bernoulli* (1654 – 1705) atrado, kad apkrautos tamprios sijos kreivis yra tiesiogiai proporcingas lenkimo momentui tame sijos taške. Jo sūnėnas, *Daniel Bernoulli* (1700 – 1782) suformulavo sijos judėjimo diferencialinę lygtį. Vėliau, jo mokinys *Leonhard Euler* (1707 – 1783) priėmė *Daniel* teorijos principus savo aprašyme apie sijos deformacijas skirtingais apkrovimo atvejais. Dėl to šis modelis yra vadinamas *Bernoulli–Euler* sijų teorija.

Ši teorija buvo tobulinama kitų mokslininkų. XX amžiaus pradžioje rusų ir amerikiečių mokslininkas *Stephen Timoshenko* pasiūlė platesnę teoriją, įvertindamas šlyties įrašų bei sukimo įtaką sijos deformacijoms. Ši teorija yra žinoma kaip *Timoshenko* sijų teorija.

Minėtos dvi teorijos yra naudojamos plačiausiai. Nors yra ir tikslesnių metodų sijų skaičiavimui (pvz., baigtinių elementų metodas), šitų dviejų teorijų pranašumas yra tai, kad pateikia projektuotojui paprastą ir pakankamai tikslų įrankį konstrukcijų projektavimui.

#### 2.1.1. *Bernoulli-Euler* sijų teorija

*Bernoulli-Euler* sijų teorija taip pat yra vadinama *klasikine* sijų teorija. Būdamą tamprumo teorijos supaprastinimas, ji yra naudinga priemonė skaičiuojant sijos įrašų pasiskirstymą ir sukeltus įlinkius. Ji galioja, kai sijos įlinkiai yra palyginus maži ir kai sija yra veikiamą tik skersinės apkrovos [4].

*L. Euler* ir *D. Bernoulli* buvo pirmieji kurie pasiūlė mokslinę sijų teoriją 1750 metais [5], tačiau ji nebuvo pritaikoma iki XIX amžiaus, kai *Eiffel* bokšto ir *Chicago* miesto apžvalgos rato projektavimas įrodė teorijos patikimumą dideliais mastais.

Šita teorija yra plačiausiai taikoma dėl savo paprastumo. Ji formuluojama iš trijų kinematinųjų prielaidų:

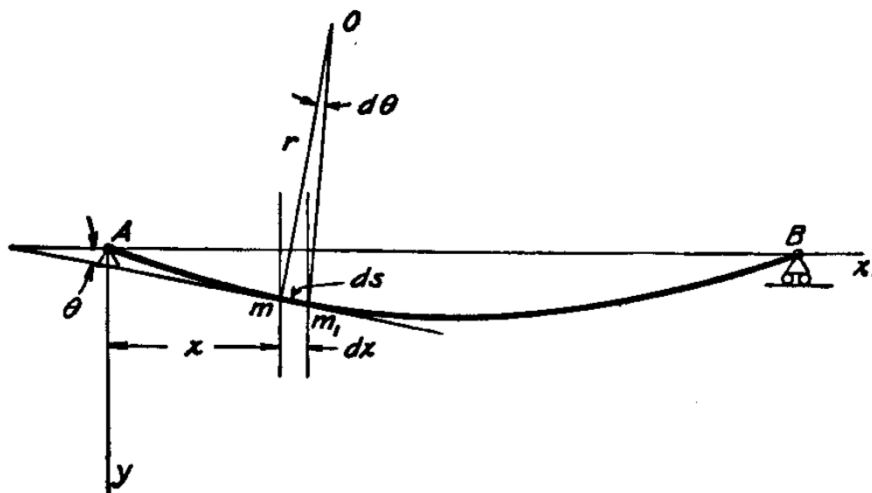
- ✓ kiekvienas sijos skerspjūvis yra standus savo plokštumoje;
- ✓ kiekvienas skerspjūvis lieka plokščias po sijos deformavimosi;

✓ kiekvieno sijos skerspjūvio plokštuma visada yra statmena sijos neutraliajai ašiai.

Šitos trys prielaidos galioja todėl, kad taikant šią teoriją yra atmetamos deformacijos, sukeltos dėl šlyties įrašų. Todėl deformacijos tik atsiranda dėl veikiančio lenkimo momento, ir visi skerspjūviai deformuojasi tokiu būdu, kad lieka statmeni neutraliajai ašiai.

### 2.1.1.1. Statinė *Bernoulli-Euler* lygtis

*Bernoulli-Euler* sijų teorijos principai yra labai tvarkingai ir aiškiai aprašyti *Timoshenko* [6].



2.1. Pav. Dvitrasmės sijos įlinkių kreivė  
(Timoshenko, S., 1940. *Strength of Materials*. 2nd ed. New York: D. Van Nostrand Company Inc)

2.1 paveikslėlyje yra pavaizduota dvitrasmės sijos įlinkių kreivė **AmB**. Darant prielaidą, kad kreivės pobūdį tik lemia lenkimo momentas, iš *Hook* dėsnio galima gauti kreivio ir lenkimo momento priklausomybę bet kuriame sijos  $m$  taške:

$$\frac{l}{r} = \frac{M}{E \cdot I} \quad (2.1)$$

čia:  $r$  – įlinkio kreivės spindulys taške  $m$ ;

$I$  – sijos skerspjūvio inercijos momentas taške  $m$ ;

$E$  – sijos medžiagos tamprumo modulis taške  $m$ ;

$M$  – lenkimo momentas taške  $m$ .

$m$  ir  $m_1$  yra du gretimi taškai nutolę tarpusavyje  $ds$  atstumu.  $\theta$  yra kampas, esantis tarp kreivės liestinės taške  $m$  ir  $x$  ašies;  $d\theta$  yra kampas tarp dviejų statmenų kreivei tiesių taškuose  $m$  ir  $m_1$ . Tada:

$$ds = r \cdot d\theta \quad (2.2)$$

$$\frac{l}{r} = - \frac{d\theta}{ds} \quad (2.3)$$

Minuso ženklas yra parašomas nes, keliaujant nuo A iki B, kai  $ds$  didėja,  $d\theta$  mažėja. Praktikoje konstrukcijų įlinkiai yra labai apribojami ir įlinkių kreivė yra labai plokščia. Dėl to, galima priimti, kad:

$$\begin{aligned} ds &\approx dx \\ \theta &\approx \tan \theta = dy/dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

Įvedant šiuos supaprastinimus į lygtį (2.3), gaunama, kad:

$$\frac{I}{r} = -\frac{d^2y}{dx^2} \quad (2.5)$$

Iš lygties (2.1) gaunama tokia formulė:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -M \quad (2.6)$$

Ši formulė yra diferencialinė sijos lygtis, kuri turi būti integruojama kiekviena kartą, kai norime gauti konkrečias įrašas bei įlinkius. Diferencijuojant lygtį (2.6)  $x$  atžvilgiu yra gaunamos tokios išraiškos:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = -V \quad (2.7)$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^4y}{dx^4} = q \quad (2.8)$$

čia:  $V$  – šlyties jėga;  
 $q$  – paskirstyta apkrova.

Šios formulės yra labai plačiai taikomos inžineriniuose skaičiavimuose. Projektavimo vadovėliuose galima surasti įvairių lentelių su įlinkių reikšmėmis tipinėms sijų konfigūracijoms.

Matome, kad pastovaus skerspūvio įlinkių formulė (2.8) yra ketvirtos eilės  $x$  išvestinė. Norint gauti konkrečias  $y(x)$  reikšmes reikia įvesti 4 kraštines sąlygas. Nagrinėsime gembinės sijos kraštines sąlygas.

Standžiam įtvirtinimui:

$$[y]_{x=0} = 0 \quad (2.9)$$

$$\left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 \quad (2.10)$$

Laisvam galui:

$$\left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0 \quad (2.11)$$

$$\left[ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right]_{x=L} = 0 \quad (2.12)$$

Taikant šias kraštutines sąlygas galima nustatyti statškai apkrautos gembinės sijos įrašų ir įlinkių pasiskirstymus, kurie yra pateikiami 2.1 lentelėje [7]:

**Lentelė Nr. 2.1.** Gembinės sijos įrašos ir įlinkiai statinės apkrovos atveju

Pasiskirstymo funkcija	Maks. Reikšmė	Vaizdavimas
<b>Gembinė sija su koncentruota jėga laisvajame gale</b>		
$M(x) = P \cdot (x - L)$	$M_A = P \cdot L$	
$Q(x) = P$	$Q_{max} = P$	
$y(x) = \frac{P \cdot x^2 \cdot (3 \cdot L - x)}{6 \cdot E \cdot I}$	$y_C = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$	
<b>Gembinė sija tolygiai apkrauta išskirstyta apkrova</b>		
$M(x) = -\frac{q \cdot (L^2 - 2 \cdot L \cdot x + x^2)}{2}$	$M_A = \frac{q \cdot L^2}{2}$	
$Q(x) = q \cdot (L - x)$	$Q_A = q \cdot L$	
$y(x) = \frac{q \cdot x^2 \cdot (6 \cdot L^2 - 4 \cdot L \cdot x + x^2)}{24 \cdot E \cdot I}$	$y_C = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I}$	

### 2.1.1.2. Sijos įlinkių formulė dinaminio apkrovimo atveju

Kai sija yra veikiamą dinaminės apkrovos, įlinkiai nebeprisiklauso tik nuo taško pozicijos sijoje  $x$ , bet taip pat nuo laiko  $t$ . Šitam atvejui *Euler-Lagrange* dinaminė formulė yra tokia:

$$S = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \cdot \bar{p} \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot E \cdot I \cdot \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 + q(x) \cdot y(x, t) \right] \cdot dx \quad (2.13)$$

čia:  $\bar{\rho}$  – sijos ilgio vieneto masė.

Pirmasis lygties narys atstoja kinetinę energiją; antrasis – vidinių įrašų potencinę energiją; trečiasis – išorinių apkrovų potencinę energiją. *Euler-Lagrange* formulė naudojama tam, kad būtų galima surasti funkcijos reikšmę minimizuojančią funkcinį dydį  $S$ . Dinaminės apkrovos veikiamos sijos *Euler-Lagrange* lygtis tampa tokia:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = -\bar{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q(x) \quad (2.14)$$

Kai sijos skerspjūvis yra pastovus, formulė (2.14) pasidaro paprastesnė:

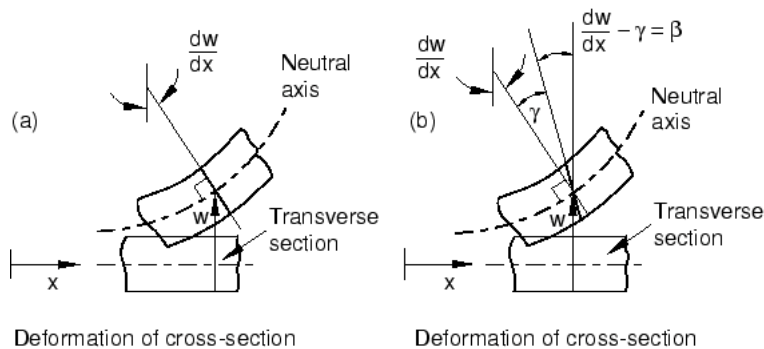
$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\bar{\rho} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + q \quad (2.15)$$

### 2.1.2. Timoshenko sijų teorija

Rusų ir amerikiečių mokslininkas *Timoshenko* XX amžiaus pradžioje pasiūlė naują sijų teoriją [8, 9]. Jo modelis, skirtingai nei *Bernoulli-Euler* teorija, įtraukia į skaičiavimus šlyties deformacijas ir sukimo inercijos pasekmes. Dėl to ši teorija yra tinkamesnė aprašant sąlyginai trumpas sijas, kompozitines sluoksniuotas sijas arba sijas, veikiamas didelių dažnių apkrovų, kurių bangos ilgis panašus į sijos storį.

Atsižvelgiant į tai, kad šios papildomos šlyties deformacijos ženkliai sumažina sijos standumą, gaunasi, kad statinės apkrovos sukelti įlinkiai yra didesni ir kad savieji dažniai mažesni tam tikroms duotoms kraštinėms sąlygoms.

Jeigu sijos šlyties modulis  $G$  artimas begalybei (kai sija yra standi kirpimo atžvilgiu), ir sukimo inercijos efektai yra nežymūs, tai *Timoshenko* modelis susitapatina su *Bernoulli-Euler* modeliu. Dėl to, galima teigti, kad *Bernoulli-Euler* modelis yra tik vienas atvejis *Timoshenko* teorijoje.



2.2. Pav. *Bernoulli-Euler* (a) ir *Timoshenko* (b) sijos deformacijos palyginimas (ABAQUS 6.10. Using beam elements: formulation and integration (skyrius 6.2).

*Getting started with Abaqus: Interactive edition*. Prieiga per internetą:

<http://abaqusdoc.ucalgary.ca/books/gsa/default.htm?startat=ch06s02.html> [Žiūrėta 2017.05.10]

### 2.1.2.1. Kvizistatinė Timoshenko sija

Statinėje Timoshenko teorijoje sijos poslinkiai yra tokie:

$$s_x(x,y,z) = -z \cdot \varphi(x) ; s_y(x,y,z) = 0 ; s_z(x,y) = \omega(x) \quad (2.16)$$

čia:  $(x,y,z)$  – taško esančio sijoje koordinatės;

$s_x, s_y, s_z$  – poslinkio vektoriaus komponentai;

$\varphi$  – sijos skerspjūvio pasisukimo kampas;

$\omega$  – sijos vidinio sluoksnio poslinkis  $z$  kryptimi.

Sijos įlinkiai yra aprašomi šitų dviejų diferencialinių lygčių sistema:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( E \cdot I \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) = q(x,t) \quad (2.17)$$

$$\frac{d\omega}{dx} = \varphi - \frac{I}{\kappa \cdot A \cdot G} \cdot \frac{d}{dx} \left( E \cdot I \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \quad (2.18)$$

Timoshenko sijų teorija statinėms apkrovoms sutampa su Bernoulli-Euler, kai paskutinis (2.18) formulės narys dingsta, t.y. kai:

$$\frac{E \cdot I}{\kappa \cdot A \cdot G \cdot L^2} \ll 1 \quad (2.19)$$

čia:  $L$  – sijos ilgis;

$\kappa$  – Timoshenko šlyties koeficientas, kuris priklauso nuo sijos geometrijos.

Sujungiant dvi (2.17) ir (2.18) formulės pastovaus skerspjūvio sijai gaunama tokia formulė:

$$EI \cdot \frac{d^4 \omega}{dx^4} = q(x) - \frac{EI}{\kappa \cdot A \cdot G} \cdot \frac{d^2 q}{dx^2} \quad (2.20)$$

Lenkimo momentas  $M$  ir skersinė jėga  $Q$  priklauso nuo  $\omega$  ir nuo pasisukimo kampo  $\varphi$ . Šitos priklausomybės tiesinėms tamprims Timoshenko sijoms gali būti išreikštos:

$$M = -E \cdot I \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.21)$$

$$Q = \kappa \cdot A \cdot G \cdot \left( -\varphi + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \quad (2.22)$$

### 2.1.2.2. Kraštinės sąlygos

Kadangi deformacijų lygtis (2.20) yra ketvirtos eilės išvestinė, norint gauti konkrečius sijos įlinkius reikia keturių kraštinių sąlygų. Gembinei sijai tos kraštinės sąlygos yra:

- ✓ standžiojoje atramoje kampas  $\varphi=0$  ir įlinkis  $\omega=0$ ;



✓ žinomos skersinės jėgos  $Q$  ir lenkimo momento  $M$  reikšmės laisvajame sijos gale.

Jėgos veikiančios laisvajame sijos gale ir atsirandančios deformacijos yra pateikiamos lentelėje:

**Lentelė Nr. 2.2.** Timoshenko gembinės sijos įrašos ir deformacijos

$M(x)=P \cdot x$	
$Q(x)= -P$	
$\varphi(x)= -\frac{P}{2 \cdot E \cdot I} (L^2 - x^2)$	
$\omega(x)= \frac{P \cdot (L-x)}{\kappa \cdot A \cdot G} - \frac{P \cdot x}{2 \cdot E \cdot I} \left( L^2 - \frac{x^2}{3} \right) + \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$	

### 2.1.2.3. Dinaminės apkrovos veikiamą sija pagal *Timoshenko* teoriją

Dinaminėje *Timoshenko* teorijoje sijos įlinkiai taip pat priklauso ir nuo laiko:

$$s_x(x,y,z,t) = -z \cdot \varphi(x,t) ; s_y(x,y,z,t) = 0 ; s_z(x,y,t) = \omega(x,t) \quad (2.23)$$

čia:  $(x,y,z)$  – sijos koordinatės;

$s_x, s_y, s_z$  – įlinkio vektoriaus komponentai;

$\varphi$  – sijos skerspjūvio pasisukimo kampas;

$\omega$  – sijos įlinkis  $z$  kryptimi.

*Timoshenko* sijų teorija gali būti aprašoma šitų dviejų diferencialinių lygčių sistema:

$$\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - q(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa \cdot A \cdot G \cdot \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - \varphi \right) \right] \quad (2.24)$$

$$\rho \cdot I \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( E \cdot I \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \kappa \cdot A \cdot G \cdot \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - \varphi \right) \quad (2.25)$$

čia:  $\rho$  – sijos medžiagos tankis;

Tiesinei, tampriai, izotropinei vienalytei pastovaus skerspjūvio sijai šitos dvi formulės gali būti sujungiamos [10, 11]:

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + m \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \left( \sigma \cdot I + \frac{E \cdot I \cdot m}{\kappa \cdot A \cdot G} \right) \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} + \frac{m \cdot \sigma \cdot I}{\kappa \cdot A \cdot G} \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial t^4} = q + \frac{\sigma \cdot I}{\kappa \cdot A \cdot G} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{E \cdot I}{\kappa \cdot A \cdot G} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (2.26)$$

#### 2.1.2.4. *Timoshenko* šlyties koeficientas

*Timoshenko* šlyties koeficientas  $\kappa$  priklauso nuo *Puasono* koeficiento  $\nu$ . Daug mokslininkų bandė skirtingų būdų kuo tiksliau jį nustatyti.

*Cowper* [12] stačiakampio skerspjuvio sijoms siūlo tokią formulę:

$$\kappa = \frac{10 \cdot (1 + \nu)}{12 + 11 \cdot \nu} \quad (2.27)$$

Apskrito skerspjuvio sijoms:

$$\kappa = \frac{6 \cdot (1 + \nu)}{7 + 6 \cdot \nu} \quad (2.28)$$

## 2.2. Dinaminis apkrovimas tamproje įtempių ir deformacijų stadijoje

Kaip jau buvo minėta, realiame pasaulyje egzistuoja tik dinaminės apkrovos, veikiančios kitus kūnus. Kaip teisingai apibūdina Čižas [3], *Statybinė Dinamika* yra labai sudėtingas mokslas. Apkrovų poveikiai priklauso nuo daug veiksnių, kurie gali nulemti labai skirtingus rezultatus. Dėl to, kai kūnas yra veikiamas dinaminės apkrovos tamproje stadijoje, situacija yra dažnai supaprastinama, priimant kad kūnas elgiasi panašiai kaip statinės apkrovos veikimo atveju tik su tam tikromis modifikacijomis.

Paprastai dinaminės apkrovos veikiamas kūnas yra analizuojamas dviem keliais:

- ✓ naudojant *D'Alembert* principą;
- ✓ naudojant dinaminį koeficientą, kuris yra gaunamas iš mechaninės energijos tvermės dėsnio.

### 2.2.1. *D'Alembert* principas

Žymusis prancūzų mokslininkas *Jean le Rond d'Alembert* (1717 – 1783) įvedė inercinės jėgos sąvoką ir pasiūlė ją kaip būdą aprašyti dinaminis poveikius [13]. Pagal *Newton* apibrėžimą: jėga yra masės ir pagreičio sandaugos rezultatas. Dėl to kūnai, kurie juda su tam tikru pagreičiu yra veikiami papildomų inercinių jėgų. Dinaminės apkrovos veikiamo kūno atveju prie esamos apkrovos dar prisideda inercinės jėgos, kurios gali ženkliai padidinti arba sumažinti sukeltus poveikius. Toks metodas yra labai plačiai pritaikomas įvairiems atvejams: lėtėjantiems arba

greitėjantiems kūnams, besisukantiems kūnams su pastoviu kampiniu greičiu (kurie turi tik normalinį pagreitį), ir t.t. Tam, kad jį būtų galima pritaikyti, pagreitis turi būti žinomas. Šis metodas yra paprastas ir todėl turi labai dideli pritaikomumą praktikoje. Įvairūs autoriai [3, 14, 15, 16] plačiai aptaria šį metodą.

### 2.2.2. *Dinaminio koeficiento metodas (energetinis metodas)*

Esant tam tikroms situacijoms *d'Alembert* principas negali būti taikomas, nes pagreitis yra nežinomas. Tokio atvejo aiškiausias pavyzdys yra šio tyrimo nagrinėjimo objektas – smūginė apkrova. Smūgio procesas yra toks staigus, kad yra labai sunku nustatyti sąveikos veikimo laiką ir tai lemia, kad pagreitis būtų nežinomas. Dėl to dinaminių poveikių nustatymui yra naudojamas mechaninės energijos tvermės dėsnis, kuris nereikalauja žinoti pagreičio. Pagal energijos tvermės dėsnį teigiama, kad smūgio metu, sistemos mechaninė energija (potencinės ir kinetinės energijos suma) nepakinta. Svarbiausias dydis, kuris yra nustatomas šiuo metodo metu yra dinaminis koeficientas  $k_{dyn}$ . Šis koeficientas parodo kiek kartų apkrovos, įrašos, įtempiai ir deformacijos yra didesni už analogiškus veikiant statiniams poveikiams.

$$k_{dyn} = \frac{s_{dyn}}{s_{st}} = \frac{F_{dyn}}{F_{st}} \quad (2.29)$$

čia:  $s_{st}$  ir  $s_{dyn}$  – įlinkis, esant statinei bei dinaminei apkrovai (atitinkamai);

$F_{st}$  ir  $F_{dyn}$  – statinė ir dinaminė apkrova (atitinkamai).

*Timoshenko* [17] šį metodą aprašo aptardamas konkretų šio tyrimo nagrinėjamą atvejį: kai sija skersai veikia smūginė apkrova. Smūgis yra sukuriamas paleidžiant ant nagrinėjamos sijos tam tikra svorį  $W$  iš aukščio  $h$ .

Kai sijos masė yra labai maža palyginus su krentančio kūno mase, galima gauti apytikslus poveikių rezultatus, darant prielaidą, kad įlinkių kreivė įgaus tą pačią formą kaip statinės apkrovos atveju. Maksimalus įlinkis bus gaunamas atsižvelgiant į sistemos mechaninės energijos pastovumą.

Sistemos kinetinė energija smūgio metu  $E_k$  prilygsta pradinei sistemos potencinei energijai  $E_P$ :

$$E_k = E_P = W \cdot (h + s_{dyn}) \quad (2.30)$$

čia:  $h$  – smūgiuojančios apkrovos kritimo aukštis;

$W$  – smūgiuojančios apkrovos svoris.

Smūgio metu, potencinė energija, kuri susikaupia deformuojamoje sijoje, yra lygi smūginės jėgos  $F_{dyn}$  ir dinaminio įlinkio  $s_{dyn}$  sandaugos pusei:

$$E_D = F_{dyn} \cdot s_{dyn} / 2 \quad (2.31)$$

Pagal energijos tvermės dėsnį, kinetinė energija yra lygi sijos deformavimosi potencinei energijai:

$$W \cdot (h + s_{dyn}) = F_{dyn} \cdot s_{dyn} / 2 \quad (2.32)$$

Pagal *Bernoulli-Euler* sijų teoriją, gembinės sijos, apkrautos bet kuriame taške koncentruota apkrova, deformacijų formulė yra:

$$s = \frac{F \cdot a^2}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (3 \cdot L - a) \quad (2.33)$$

čia:  $a$  – atstumas nuo standaus galo iki apkrovimo taško;

$L$  – gembinės sijos ilgis.

Paimant  $F_{dyn}$  iš formulės (2.33) ir įstatant jį į formulę (2.32) gauname:

$$W \cdot (h + s_{dyn}) = \frac{6 \cdot E \cdot I}{a^2 \cdot (3 \cdot L - a)} \cdot s_{dyn}^2 \quad (2.34)$$

Apdorojant formulę (2.34) gaunama dinaminių įlinkių išraiška:

$$s_{dyn} = s_{st} + \sqrt{s_{st}^2 + 2 \cdot h \cdot s_{st}} \quad (2.35)$$

Iš šitos lygties galima gauti dinaminį koeficientą  $k_{dyn}$ :

$$k_{dyn} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{s_{st}}} \quad (2.36)$$

Formulė (2.36) galioja įvairių sijų dinaminio apkrovimo atvejams (ne tik gembinei sijai), kai sijos masė yra palyginus maža (į ją neatsižvelgiama). Čižas [3] apriboja šio metodo pritaikymą teigdamas, kad kol santykis  $2 \cdot h / s_{st} < 100$ , skaičiavimų paklaida yra ne didesnė kaip 10%. Toliau šis metodas sąlyginai pavadintas *paprastuoju* metodu.

Naudojant aprašytą metodiką dinaminio koeficiento apskaičiavimui, neįvertinama pačios sijos masė. Norint tiksliau įvertinti situaciją, arba nagrinėti stambesnes sijas, reikia atsižvelgti į smūgiuojamos sijos savąjį svorį. *Rayleigh* [18] pasiūlė metodą, pritaikytą smūgiuojamų sijų svyravimo dažnio įvertinimui atsižvelgiant į pačios sijos masę. Šio metodo esmė yra tai, kad svyravimo dažnis išskaičiuojamas iš visos sistemos mechaninės energijos tvermės dėsnio. Smūgio metu kinetinės energijos masę sudaro ne tik smūgiuojančio kūno masė, bet ir redukuota sijos masė. Sijos savojo svorio redukavimas priklauso nuo apkrovimo skaičiuojamosios schemos. Dvitramei sijai redukuotas svoris yra  $(17/35) \cdot W_1$ ; gembinei sijai yra  $(33/140) \cdot W_1$ . Čia  $W_1$  – nagrinėjamos sijos savasis svoris.

*Rayleigh* pritaikė šį metodą kinetiniams tikslams, t.y. sijos svyravimams apibūdinti. *Cox* [19] priėmė šios teorijos sijos redukuoto svorio principą ir jį pritaikė dinaminių poveikių tyrimui. Sistemos kinetinė energija šiuo atveju apima ir sijos redukuotą masę:

$$E_k = \frac{I}{2g} \cdot \left( W + \frac{33}{140} W_1 \right) \cdot v^2 = \frac{W \cdot v_0^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{W_1}{W}} \quad (2.37)$$

Smūgio metu kinetinė energija yra lygi pradinei potencinei energijai:

$$\frac{W \cdot v_0^2}{2g} = W \cdot h \quad (2.38)$$

Šitaip gaunama analogiška išraiška formulei (2.35), įvertinant sijos masę:

$$s_{dyn} = s_{st} + \sqrt{s_{st}^2 + 2 \cdot h \cdot s_{st} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{W_1}{W}}} \quad (2.39)$$

Iš (2.39) lygties išvedžiojama dinaminio koeficiento formulė:

$$k_{dyn} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{s_{st}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{W_1}{W}}} \quad (2.40)$$

*Timoshenko* [17] nurodo, kad *Rayleigh* metodo apytiksli paklaida yra 1,5%.

Labai svarbus ir plačiai analizuojamas atvejis yra kai apkrova yra staigiai paleidžiama prie pat sijos paviršiaus, t.y. kai kritimo aukštis yra artimas nuliui. Iš (2.36) ir (2.40) formulių galima teigti, kad tokiu atveju, dinaminis koeficientas yra lygus dvejetui. Šis rezultatas yra senai žinomas ir aiškinamas tamprumo teorijoje įvairiuose vadovėliuose [3, 17, 20]. Tačiau yra kiti autoriai, kurie savo tyrimais įrodė, kad ne visais atvejais tai yra tiesa. *Suzuki* [21], nagrinėdamas konstrukcijas analitiškai ir eksperimentiškai nustatė, kad dinaminis koeficientas (paleidimo nuo paviršiaus atveju) gali skirtis nuo rezultato  $k_{dyn} = 2$ . Savo tyrimuose nustatė, kad gembinės sijos dinaminis koeficientas yra mažesnis nei 2; taip pat, kad kompleksinės konstrukcijos, sudarytos iš skirtingų komponentų, pavyzdžiui, rėminės konstrukcijos, yra daug jautresnės dinaminiam poveikiui nei pavienės konstrukcijos: jų dinaminis koeficientas gali pasiekti net  $k_{dyn} = 10$ .

### 2.2.3. Hertz teorija

*Rayleigh* pasiūlytu metodu yra įvertinamas sijos savasis svoris. Jį taikant galima nagrinėti stambesnes sijas, kurių negalima analizuoti *paprastuoju* metodu. Tačiau jo taikymas taip pat turi apribojimus. Kai sijos savojo svorio  $W_1$  ir smūgiuojančio kūno savojo svorio  $W$  santykis ( $W_1/W$ ) viršija tam tikras ribas, *Rayleigh* teorija tampa netiksli. Esant dideliame sijos savajam svoriui,

palyginus su smūgiuojančio kūno svoriu, reikia įvertinti sijos svyravimų pobūdį ir vietines deformacijas smūgio pridėties taške.

Pagal klasikinę *Newton* mechaniką, kūnai priklauso dviem kategorijoms: „idealiai tampriųjų“ ir „neidealiai tampriųjų“. Pirmuoju atveju smūgio metu energija neišsisklaido; antruoju atveju energija išsisklaido. Daugelis kūnų turi artimas savybes idealiai tampriesiems kūnams. *Hertz* [22] suformulavo smūginio apkrovimo teoriją, kurioje neatsižvelgia į energijos išsklaidymą. Pagal *Hertz*, vietinės kūno deformacijos smūgio pridėties taške yra traktuojamos kaip statinės apkrovos deformacijos. Tam, kad teorija galiotų, smūgio trukmė turi būti daug didesnė nei kūno svyravimo ilgiausias periodas. Savo tyrime *Hertz* pateikė smūgio trukmės skaičiavimo formules, kurios vėliau buvo patikrintos eksperimentiškai. *Love* [20] labai plačiai aptaria *Hertz* metodą.

#### ***2.2.4. Nauji tyrimai***

Dinaminių poveikių analizė buvo labai sparčiai plėtojama kartu su naujų technologijų atsiradimu. Baigtinių elementų kompiuterinės programos yra labai naudingi įrankiai dinaminiam modeliavimui.

Trumpalaikė analizė yra metodas, kuris apima naujas technologijas, kurios sąlygoja tikslus rezultatus. Mokslinėje aplinkoje jis yra labai populiarus ir plačiai taikomas metodas. Kita vertus, jo panaudojimas yra gana sudėtingas ir brangus. Dėl to dauguma mokslininkų yra labiau linkę naudoti statinę analizę. Šiuo metodu bandoma ieškoti ekvivalentinių statinių apkrovų paketo, kuris sukeltų tas pačias deformacijas kaip dinaminė apkrova. Statinių apkrovų skirtingi paketai veikia siją skirtingomis to paties apkrovimo akimirkomis. Ekvivalentinių statinių apkrovų pridėties taškai nebūtinai turi sutapti su dinaminės apkrovos pridėties tašku. Įvairiuose tyrimuose [1, 23, 24, 25] yra atliekama ekvivalentinių statinių jėgų parametrų (dydis, kiekis, pridėties taškai ir tikslumas) analizė. Naujos tyrimo kryptys labai sparčiai žengia šios analizės tobulinimui.

### **2.3. Dinaminis apkrovimas plastinėje įtempių ir deformacijų stadijoje**

#### ***2.3.1. Bendros sąvokos***

Dinaminės apkrovos veikiamo kūno deformavimasis plastinėje stadijoje yra aprašytas pagal *Lubliner* [26]. Dažniausiai nagrinėjamos apkrovos konstrukcijoms yra statinės arba pusiau statinės. Atliekant šias užduotis yra neatsižvelgiama į kūno inercijos pasekmes. Jeigu kūnas yra pagamintas iš idealiai plastiškos medžiagos, kritinis apkrovimas yra tas, dėl kurios dar takumo ribos yra

neperžengiamos jokioje kūno vietoje. Jeigu takumo riba yra peržengiama, tada statinė metodika yra jau nebetaikytina ir reikia atsižvelgti į inercijos pasekmes vykstančias plastiškoje stadijoje.

Nagrinėjant smūgines ar kitas dinamines apkrovas veikiančias į sijas, plokštes, talpyklas ir panašias konstrukcijas, konstrukcijos yra traktuojamos kaip standžiai – idealiai plastiški kūnai. Šitas priartėjimas yra priimtinas, kai smūgiuojančio kūno kinetinė energija ženkliai viršija konstrukcijos geba ją kaupti savyje. Dėl to atsiranda liekamosios (plastinės) deformacijos, kurių nebegalima aprašyti statinėmis metodikomis.

Dauguma konstrukcijų, kurioms stiprumo ribos statinėms apkrovoms buvo nustatytos pagal standžiai – idealiai plastišką modelį, taip pat yra nagrinėjamos esant dinaminėms apkrovoms. Problemų sprendimai buvo pateikiami *Krajcinovič* [27] ir *Jones* [28] darbuose. Bendras sprendimų bruožas yra tai, kad kūnas yra veikiamas kito judančio kūno smūgio. Smūgio metu greičio laukas tampa modos forma (angl. *mode form*). Tai reiškia, kad erdvinis pokytis tampa nebeprisiklausomas nuo laiko. Greitis pradeda būti priklausomas nuo laiko amplitudės ir pozicijos funkcijos:

$$v(x,t)=\dot{\Delta}(t)\cdot\omega(x) \quad (2.41)$$

### 2.3.2. Sijų dinaminis apkrovimas

Dinaminės apkrovos veikiamos sijos judėjimo formules galima gauti iš *Bernoulli-Euler* formulės inercines jėgas pridėdant prie išskirstytos apkrovos. Mūsų atveju nagrinėjamos tik simetrinės sijos apkrautos grynu lenkimu  $xy$  plokštumoje. Jeigu įlinkis teigiama  $y$  kryptimi yra  $\omega(x,t)$ , tada inercinė jėga ilgio vienetui bus:

$$F = \frac{-\bar{\rho} \cdot \partial^2 \omega}{\partial t^2} \quad (2.42)$$

čia:  $\bar{\rho} = \rho \cdot A$  – sijos vienetinio ilgio masė;  
 $\rho$  – sijos medžiagos tankis;  
 $A$  – skerspjūvio plotas.

Jeigu  $q$  yra išskirstyta apkrova, sijos dinaminė lygtis (iš *Bernoulli-Euler* formulės) atrodo taip:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = q - \bar{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \quad (2.43)$$

Kai  $q=0$ , ir priimant santykį tarp lenkimo momento  $M$  ir kreivio  $\kappa = \partial^2 \omega / \partial x^2$ , įlinkį galima išreikšti šitaip:

$$\omega(x,t) = t f(\eta) \quad (2.44)$$

čia:  $\eta = \frac{x^2}{t}$

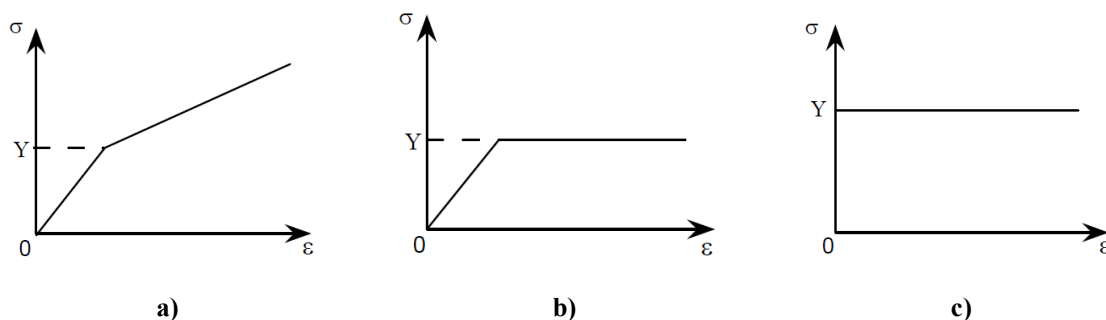
Taip pat galima teigti, kad tiek kreivis  $\kappa$ , tiek greitis  $v = \partial\omega/\partial t$  yra vienintelio kintamojo  $\eta$  funkcijos. Tarkime, kad  $\kappa = \psi(M)$ , tai sijos judėjimas būtų aprašytas formule:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \left( \sqrt{\eta} \cdot \frac{dM}{d\eta} \right) + \frac{\bar{p}}{16} \cdot \psi'(M) \cdot \sqrt{\eta} \cdot \frac{dM}{d\eta} = 0 \quad (2.45)$$

Tampriai sijai  $\psi'(M) = 1/EI$ . Dėl to (2.45) formulė šiuo atveju yra tiesinė.

Tampriai – plastinei sijai bendruoju atveju (2.45) formulė yra netiesinė ir reikia ją išspręsti skaitmeniniu būdu. Tačiau yra dalinai tiesinė, jeigu momento – kreivio santykis su tiesiniu apkrovimo darbu yra priimamas. Tokiu atveju analitinis sprendimas gali būti skaičiuojamas. *Duwez*, *Clark* ir *Bohnenblust* [29] rado pirmąjį sprendimą.

Analogiška problema atsitinka su standžiai – plastiškų sijų atveju, su skirtingais apkrovimų darbų tipais ir atsižvelgiant į kintančius greičius pusiau – begalinėse sijose. Tai buvo plačiai nagrinėjama *Conroy* [30, 31, 32, 33].



**2.3. Pav.** Įtempių-deformacijų kreivės: a) tampriai-plastinės medžiagos; b) tampriai-idealiai plastinės medžiagos; c) standžiai-idealiai plastinės medžiagos.

(KELLY, PA. *Soil Mechanics*, part 2. Paskaitų konspektai, 2012. Prieiga per internetą:

[http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part\\_II](http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_II)

[Žiūrėta: 2017-05-11])

### 2.3.3. Dinaminės apkrovos veikiamą dviatramė sija

Smūgio (kuris yra padėties ir laiko funkcija) poveikis laisvajame sijos gale buvo plačiai nagrinėjamas XX amžiaus viduryje. *Lee* ir *Symonds* [34] tyrė standžiai – idealiai plastišką siją, apkrauta viduryje; *Bleich* ir *Salvatori* [35] nagrinėjo tampriai – idealiai plastišką siją, veikiamą apkrovos, kuri yra simetrinė vidurinio taško atžvilgiu, bet kitais atžvilgiais pagal sutarimą. Visuose tyrimuose buvo nagrinėjami plastinių šarnyrų susiformavimas ir jų padėtis sijoje.

### 2.3.4. Dinaminės apkrovos veikiamą gembinė sija

*E.W. Parkes* [36] nagrinėjo smūginės apkrovos poveikį gembinei sijai. Jo tyrimo tikslas – nustatyti, iki kurio laipsnio klasikinė statinė plastiškumo teorija galioja esant dinaminėms poveikiams.



Gembinė sija  $L$  ilgio yra smūgiuojama  $m$  masės kūno su greičiu  $v$ . Sija yra standžiai – idealiai plastiška. Dėl to judančio kūno kinetinė energija gali būti perduodama tik plastiniams šarnyrams.

Pirmoje tyrimo stadijoje *Parkes* nagrinėja siją pagal plastiškumo teoriją. Išveda deformacijų formules lengvų smūgių ir sunkių smūgių atvejais:

$$\frac{(y/L) \cdot M_p}{\frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2} = \frac{1}{3 \cdot (1+\beta)} - \frac{\zeta}{3 \cdot (1+\beta \cdot \zeta)} + \frac{2}{3\beta} \cdot \ln \left\{ \frac{1+\beta}{1+\beta \cdot \zeta} \right\} \quad (2.46)$$

$$\frac{y \cdot M_p \cdot m}{M^2 \cdot v^2} = \frac{\beta}{3 \cdot (1+\beta)} - \frac{\beta \cdot \zeta}{3 \cdot (1+\beta \cdot \zeta)} + \frac{2}{3} \cdot \ln \left\{ \frac{1+\beta}{1+\beta \cdot \zeta} \right\} \quad (2.47)$$

čia:  $M$  – smūgiuojančio kūno masė;

$M_p$  – dinaminis plastinis momentas;

$L$  – gembinės sijos ilgis;

$t$  – laikas;

$v$  – smūgiuojančio kūno greitis;

$y$  – įlinkis bet kuriame sijos taške;

$m$  – gembinės sijos ilgio vieneto masė;

$$\beta = \frac{m \cdot L}{2 \cdot M}$$

$\lambda$  – taško koordinatė išilgai sijos (priimant laisvą galą kaip koordinatinių pradžių);

$\zeta = \frac{\lambda}{L}$  – santykinė koordinatė išilgai sijos (priimant laisvą galą kaip koordinatinių pradžių).

Kai  $\beta$  yra sąlyginai mažas (sunkaus smūgiuojančio daikto atveju), formulė (2.46) supaprastinama iki tiesės:

$$\frac{(y/L) \cdot M_p}{\frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2} \approx 1 - \zeta \quad (2.48)$$

Kai  $\beta$  yra sąlyginai didelis (lengvo smūgiuojančio kūno atveju), formulę (2.47) galima supaprastinti dvejopai:

$$\frac{y \cdot M_p \cdot m}{M^2 \cdot v^2} \approx \frac{2}{3} \ln \frac{1}{\zeta} (\beta \zeta \gg 1) \quad (2.49)$$

$$\frac{y \cdot M_p \cdot m}{M^2 \cdot v^2} \approx \frac{2}{3} \ln \beta (\zeta = 0) \quad (2.50)$$

Iš (2.48) formulės galima daryti išvadą, kad sunkiojo apkrovimo atveju tik susiformuoja plastinis šarnyras prie standaus sutvirtinimo, o visa likusi sijos dalies forma lieka tiesinė.

Pagal (2.49) formulę galima sakyti, kad lengvojo apkrovimo atveju susiformuoja plastinis šarnyras prie standaus įtvirtinimo. Tačiau pagal (2.50) formulę galima matyti, kad papildomas plastinis šarnyras susiformuoja laisvajame gale.

Eksperimentinėje dalyje *Parkes* analizuoja gembinės sijos sąveiką su sunkiu ir lengvu kūnu. Pastarasis eksperimentas buvo atliekamas šaudant kulkomis. Analizės išvada buvo tokia: tiek sunkaus, tiek lengvo apkrovimo atveju plastinio šarnyro, esančio prie standaus įtvirtinimo, eksperimentiniai rezultatai labai gerai sutampa su plastiškumo teorijos skaičiavimais. Tačiau lengvo apkrovimo atveju plastinio šarnyro, susiformavusio prie laisvojo galo, padėtis bandiniuose nesutampa su apskaičiuota teoriškai, nes eksperimentuose plastinio šarnyro ruožas yra truputi atitrauktas nuo laisvo galo, tuo tarpu, pagal teoriją jis turėtų atsirasti pačiame gale. *Parkes* aiškina šituos nesutapimus dėl kulku minkštumo ir dėl jų ilgio ribotumo.

Savo tyrimu iš esmės *Parkes* pateikia standžiai – idealiai plastiško kūno dinaminę plastinę analizę. Pagal jo sprendimą, smūgiui įvykus sijoje atsiranda plastinis šarnyras, kuris keliauja link atramos. Vienintelis ruožas, turintis skersinį greitį, yra besirandantis tarp šarnyro ir sijos laisvo galo. Šitaip, *Parkes* modelyje plastinis šarnyras yra traktuojamas kaip plastiškumo poveikių frontas.

*Symonds ir Fleming* [37]. Šitų autorių atliktas skaitinis tyrimas rodo: kai tamprumas yra įvertinamas, pirmoji deformacijos fazė nėra paaiškinama *Parkes* keliaujančio plastinio šarnyro sprendimu. Kitaip tariant, plastinės deformacijos nėra nesikoncentruoja siauroje zonoje sijos viduryje.

*Wang ir Yu* [38] peranalizavo *Parkes* problemą įvesdami prie gembės atramos tampriai – plastišką rotacinę spyruoklę.

*Stronge ir Yu* [39] analizavo standaus kūno smūgio poveikį gembinei sijai. Rezultatai rodo, kad po smūgio atsiranda laipsninio plastinio gniuždymo ir tempimo zonos. Sąveika tarp šitų dviejų zonų juda nuo laivo galo link atramos. Kai medžiaga yra lengvai deformuojama, šitas modelis susitapatina su *Parkes* modeliu.

### 3. EKSPERIMENTO PLANAVIMAS, APRAŠYMAS IR ATLIKIMAS

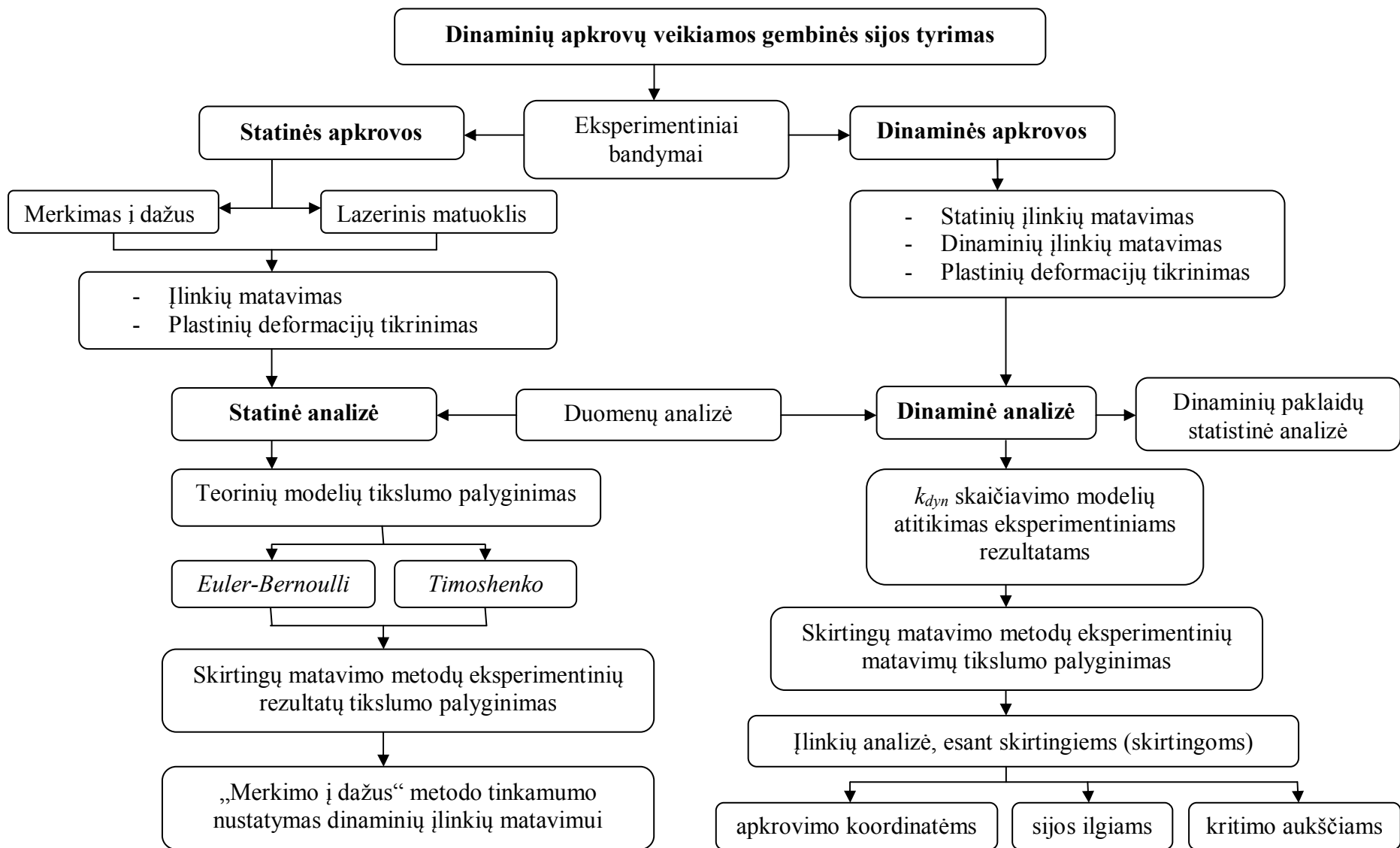
#### 3.1. Eksperimento planavimas

Eksperimento planavimo metu pirmasis uždavinys buvo surasti tinkamą aparatūrą ir priemonės matavimams atlikti. Statinės apkrovos veikiamos gaminės sijos įlinkių matavimui buvo parinktas lazerinis atstumo matuoklis (*Bosch GLM 100 C*), kurio matavimo tikslumas yra 0,1 mm.

Smūginiams bandymams turimas lazerinis atstumo matuoklis yra netinkamas. Todėl buvo svarstoma apie įvairių aparatūrą: greitaeiges kameras, dinaminių poslinkių jutiklius, ultragarsinius prietaisus, ir t.t. Tačiau, tokios įrangos įsigijimas buvo nerealus dėl lėšų stokos. Įvertinus situaciją buvo parinktas labai paprastas ir pigus būdas smūginės apkrovos veikiamos sijos įlinkių matavimui atlikti: „merkimo į dažus“ metodas. Šis metodas bus aprašomas sekančiuose poskyriuose.

Gombinei sijai buvo parinktas S235 plieno klasės pilnaviduris, kvadratinio skerspjūvio elementas. Metalinės sijos geometriniai parametrai (ilgis ir skerspjūvio kraštinė) buvo parinkti taip, kad prognozuojami maksimalūs įtempiai ( $\sigma = M/W$ ) statinės bei dinaminės apkrovos veikimo metu neviršytų takumo ribos  $f_{y,k} = 235$  MPa, ir neatsirastų plastinės deformacijos jokiam sijos skerspjūvyje.

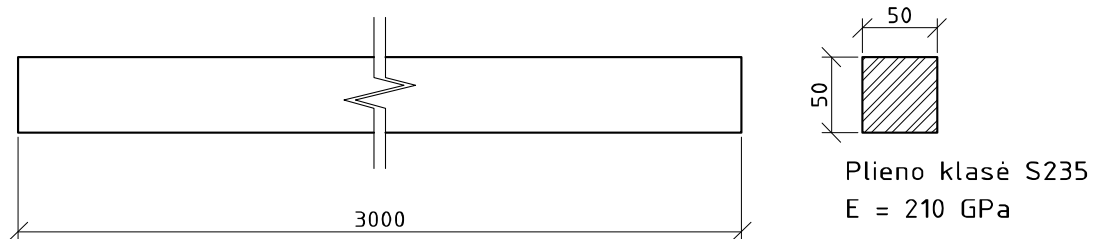
Tyrimo atlikimo algoritmas yra pateikiamas 3.1 paveikslėlyje:



3.1. Pav. Tyrimo atlikimo algoritmas

## 3.2. Eksperimento aprašymas

Nagrinėjamos metalinės sijos ilgis yra 3000mm; jos skerspjūvis yra kvadratinis pilnaviduris 50x50 mm. Sijos metalo stiprumo klasė S235; tamprumo modulis  $E=210$  GPa.

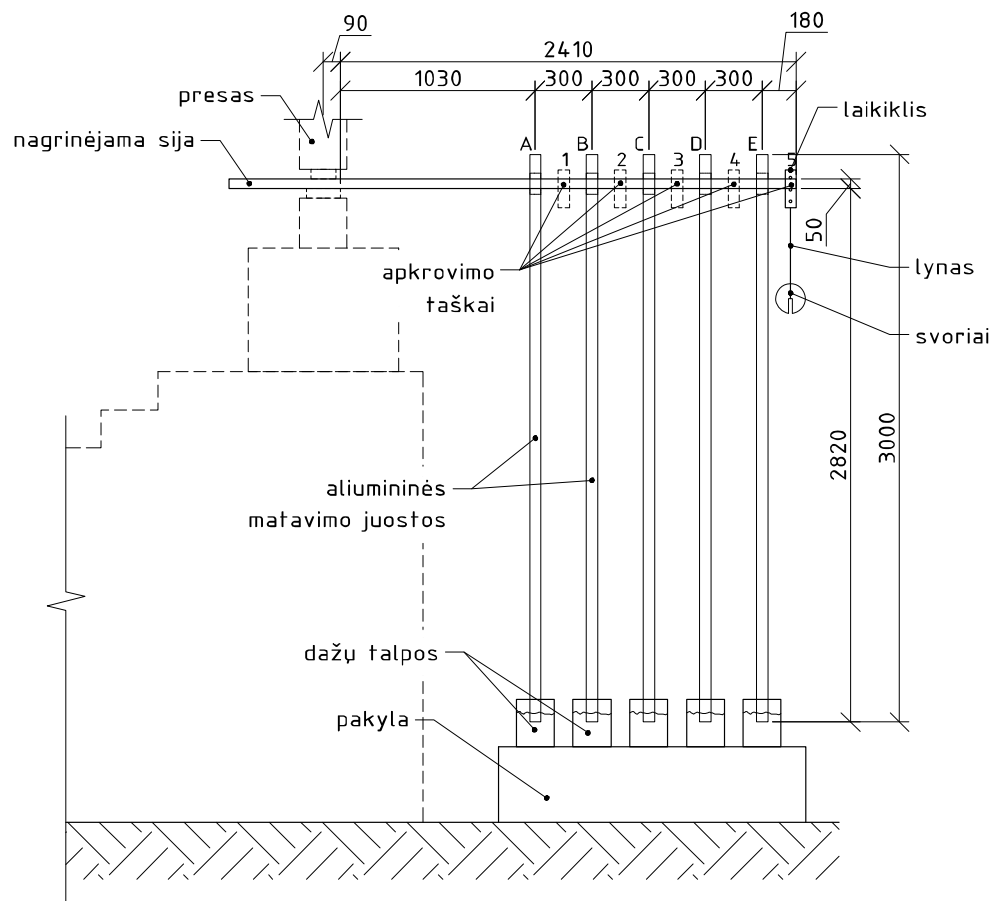


3.2 Pav. Eksperimento metu nagrinėjama metalinė sija

Atliekamo eksperimento vaizdas bei schema yra pateikiami 3.3 ir 3.4 paveikslėliuose:

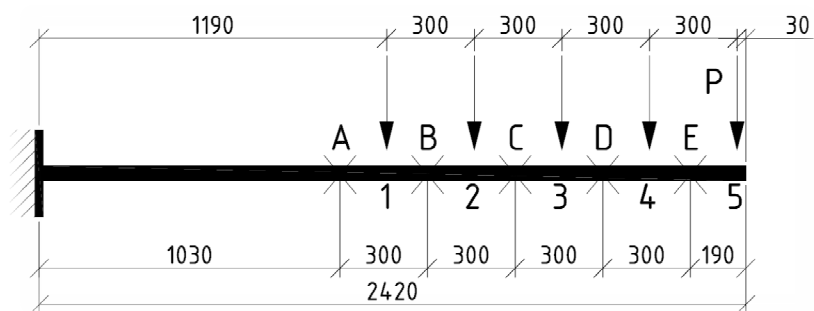


3.3 Pav. Eksperimento vaizdas



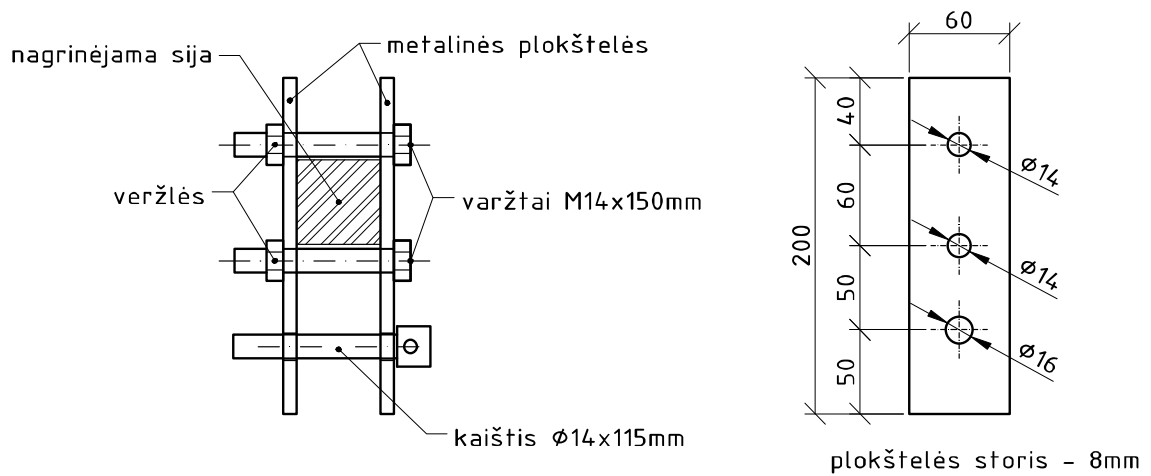
3.4. Pav. Eksperimento schema

Sijos skaičiuojamoji schema vaizduojama 3.5 paveikslėlyje. Skaičiais 1 – 5 pažymimi apkrovimo taškai, o raidėmis A – B pažymimi įlinkių matavimo taškai.

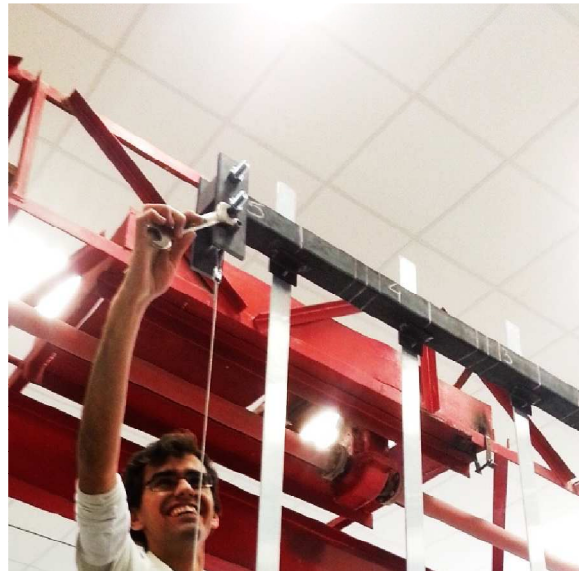


3.5 Pav. Skaičiuojamoji schema

Svoris kuris apkrauna siją kaba nuo jos 3 mm skersmens metalinių vijų lynu. Siekiant išvengti apkrovos padėties sijoje pasislinkimo, apkrovimo (ypač smūginio) metu, metalinis lynas yra tvirtinamas prie sijos specialiu laikikliu. Jį sudaro dvi metalinės plokštelės ir du varžtai su veržlėmis bei poveržlėmis. Tvirtinant varžtus, plokštelės stipriai prisiglaudžia prie sijos ir laikiklio prijungimas pasidaro standus.



**3.6 Pav.** Apkrovos laikiklis (kairėje) susidaro iš dviejų metalinių plokštelių (dešinėje)



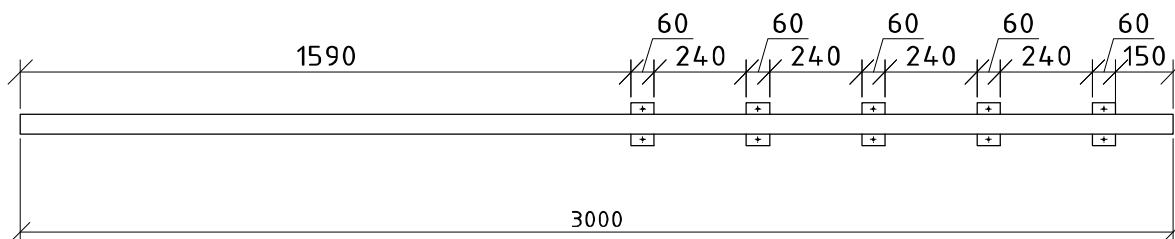
**3.7 Pav.** Laikiklio tvirtinimas

Standi atrama yra užtikrinama gniuždymo preso pagalba. Norint gauti norimo ilgio gembę, sija yra spaudžiama preso nurodytame taške. Pagrindinio eksperimento metu gembinės sijos skaičiuojamasis ilgis yra 2410 mm. Vėliau, nagrinėjant įlinkių priklausomybę nuo sijos ilgio, sija buvo sutrumpinta iki 2000 mm ir 1500 mm.

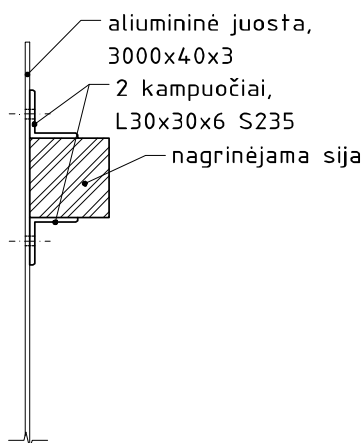


**3.8 Pav.** Standaus tvirtinimo vaizdas

Sijos įlinkių matavimas buvo atliekamas naudojant dažus. Išilgai sijos įlinkiai buvo matuojami penkiuose skirtinguose taškuose kas 300 mm. Tuose taškuose privirinami metaliniai kampuočiai, prie kurių pritvirtinamos 3 m ilgio aliumininės juostos statmenos metalinei sijai. Šios juostos įlenda į dažų butelius esančius apačioje. Apkrovimo atveju, pagal tai, kiek dažosi aliumininės juostos, galima spręsti apie sijos įlinkį tame taške.



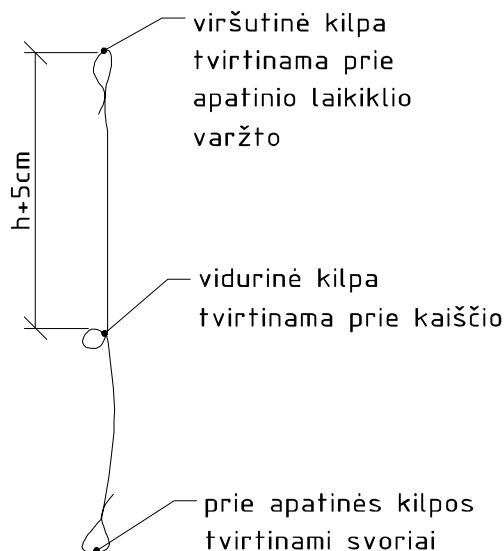
**3.9 Pav.** Kampuočių virinimo pozicijos



**3.10 pav.** Kampuočių ir aliumininės juostos vaizdas sijos pjūvyje

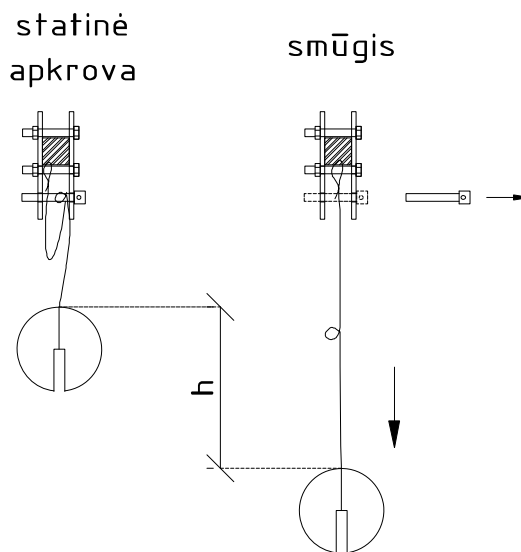
Apkrovos pakabinimo lynas yra sulankstomas su trimis kilpomis. Pirmoji kilpa yra tvirtinama prie apatinio laikiklio varžto. Vidurinė kilpa yra tvirtinama prie kaiščio. Prie apatinės kilpos kabinami svoriai. Labai svarbu užtikrinti kilpų stiprumą suveržiant jas bent 4 metaliniais suvaržymais. Atstumas tarp viršutinės ir apatinės kilpos lemia apkrovos kritimo aukštį  $h$  smūginiam bandymui. Kritimo aukštis yra lygus atstumui tarp kilpų atėmus atstumą tarp apatinio varžto ir kaiščio (5 cm).





3.11 Pav. Metalinių vijų lyno schema

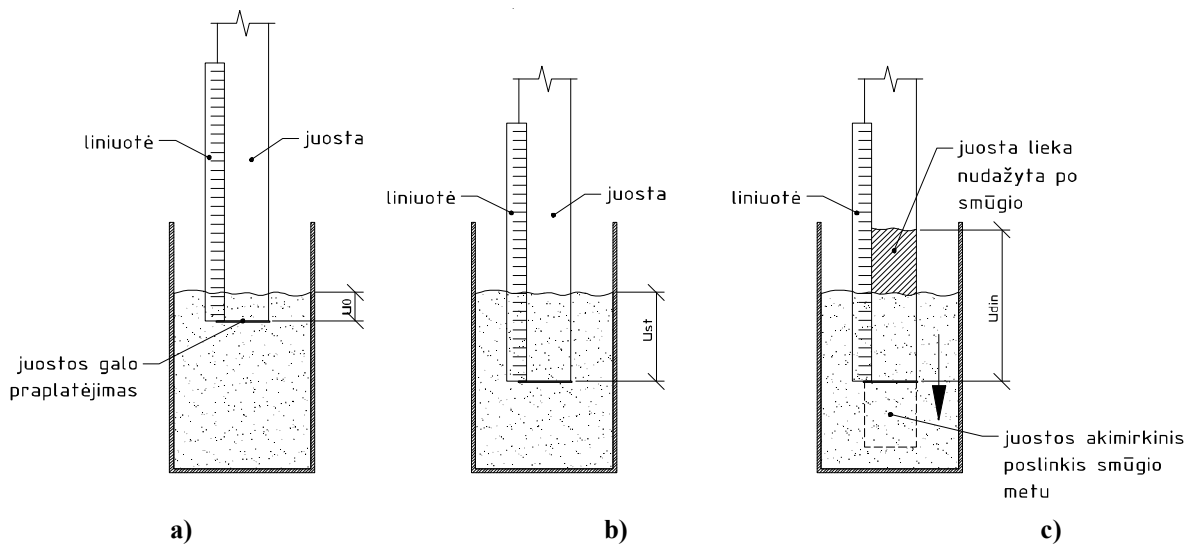
Smūgis yra paduodamas staigiai patraukiant metalinį kaištį nuo laikiklio. Svoriai krenta nuo aukščio  $h$  ir su dideliu greičiu smūgiuoja nagrinėjamą siją.



3.12 Pav. Smūgio schema

Dažai turi būti pilami į numatytas talpas tokiu būdu, kad esant neapkrautai metalinei sijai, aliumininės juostos įbristų į dažus apie 8 – 15 mm. Šis pradinis merkimo ilgis yra žymimas  $u_0$ . Paskui siją yra apkraunama statine apkrova, ir įmerkimas žymimas  $u_{st}$ . Smūgio metu, deformuojantis sijai, matavimo juostos yra panardinamos į dažų talpas. Įlinkis gali būti nustatytas tik po smūgio. Akimirkos smūginį įmerkimą galima nustatyti nuo to, kiek juosta buvo nudažyta smūgiavimo metu. Šis įmerkimas yra žymimas  $u_{dyn}$ . Visi šitie didžiai yra matuojami metaline liniuotę statant palei aliumininę juostą iki jos apačios. Liniuotės mažiausios padalos vertė yra 1 mm. Tačiau buvo pastebėta, kad atliekant tą patį matavimą kelis kartus, tas pats rezultatas svyruoja

intervale  $\pm 2,0$  mm. Siekiant gauti tikslesnius rezultatus, kiekvienas įlinkio matavimas yra atliekamas 4 kartus, atliekant po vieną matavimą kiekviename juostos kampe.



**3.13 pav.** „Merkimo į dažus“ metodo matavimo atlikimo schema: a) matavimas, esant neapkrautai sijai; b) matavimas, esant statinei apkrovai; c) matavimas atliktas po smūgio.



**3.14 Pav.** „Merkimo į dažus“ metodo matavimo proceso vaizdai

Sijos įlinkiai yra nustatomi atimant iš statinės ir smūginės apkrovos įmerkimo rezultatų (atitinkamai  $u_{st}$  ir  $u_{din}$ ) pradinį neapkrautą įmerkimą  $u_0$ :

$$s_{st,i,j} = u_{st,i,j} - u_{0,i,j} \quad (3.1)$$

$$s_{dyn,i,j} = u_{dyn,i,j} - u_{0,i,j} \quad (3.2)$$

- čia:  $s_{st,i,j}$  – įlinkis, veikiant statinei apkrovai;  
 $s_{dyn,i,j}$  – įlinkis, veikiant dinaminei apkrovai;  
 $i$  – įlinkio matavimo taškas (nuo A iki E);  
 $j$  – apkrovimo taškas (nuo 1 iki 5).

Statinės apkrovos veikimo analizė lygiagrečiai yra atliekamas lazeriniu atstumo matuokliu. Šis prietaisas matuoja 0,1 mm tikslumu. Tačiau buvo pastebėta, kad atliekant tą patį matavimą kelis

kartus, tas pats rezultatas svyruoja intervale  $\pm 0,7$  mm. Lazerinis prietaisas yra tinkamas matuoti tik nekintantiems laike atstumams, ir dėl to smūginė analizė negali būti atliekama jį naudojant. Tačiau, lazerinio prietaiso metodas yra naudingas įrankis „merkimo į dažus“ metodo tikslumo palyginamosios analizės atlikimui.



3.14 Pav. Matavimo su lazeriniu atstumų matuokliu vaizdai

### 3.3. Eksperimento atlikimas

1. **Bandymai matuojant su dažais, esant statinėms apkrovoms.** Visų pirma matuojamos juostos merkimo reikšmės kai sija yra neapkrauta, visuose  $j$  matavimo taškuose. Paskui sija apkraunama konkrečiame  $i$  taške su svarmenimis, nuo 4 iki 28 kg masės, palaipsniui didinant masę po 4 kg. Siekiant padidinti rezultatų tikslumą, kiekvienoje  $j$  aliumininėje juostoje matavimai atliekami po 4 kartus. Pabaigus matavimus, laikiklis yra perkeliamas į sekantį apkrovimo tašką ir jame apkrovimai ir matavimai yra kartojami. Procesas atliekamas visuose apkrovimo taškuose.
2. **Bandymai matuojant lazeriniu prietaisu, esant statinėms apkrovoms.** Procesas yra analogiškas pirmam etapui, bet naudojant lazerinį atstumo matuoklį. Siekiant didinti rezultatų tikslumą, kiekviename matavimo taške yra atliekami trys skirtingi įlinkio matavimai.
3. **Smūginiai bandymai.**
  - a) Metalinis lynas yra reguliuojamas pagal norimą kritimo aukštį. Šiuo eksperimento metu yra nagrinėjami 4 kritimo aukščiai: 520mm, 420mm, 320mm ir 220mm. Lynas yra fiksuojamas prie laikiklio kaip parodyta 3.12 paveikslėlyje (prie apatinio varžto ir prie kaiščio).
  - b) Laikiklis yra tvirtinamas prie apkrovimo taško Nr. 1 sijoje. Įmerkimas  $u_{0,i,1}$  yra matuojamas, visuose matavimo taškuose  $i$ , esant dar neapkrautai sijai. Kiekvienas

matavimas yra kartojamas po 4 kartus. Paskui kabinamas 4 kg masės svarmuo ir statinės apkrovos įmerkimas  $u_{st,i,1}$  yra matuojamas visuose matavimo taškuose. Pabaigus matavimus, esant statinei apkrovai, kaištis yra staiga nutraukiamas nuo laikiklio sukeliant smūgį nuo nustatyto aukščio (kaip parodyta 3.12 paveikslėlyje). Smūginio apkrovimo įmerkimas  $u_{dyn,i,1}$  yra matuojamas visuose matavimo taškuose. Galiausiai, apkrova yra nuimama ir matavimas vėl kartojamas, kai sija yra neapkrauta. Šis paskutinis veiksmas atliekamas tam, kad būtų patikrinta, ar neįvyko liekamųjų (plastinių) deformacijų.

- c) Atliekami bandymai apkraunant siją taške Nr. 1 su didesniais svoriais: 8 kg ir 12 kg. Pabaigus visus matavimus, laikiklis yra perkeliamas į apkrovimo tašką Nr. 2 ir visas procesas yra kartojamas. Toliau, tas pats yra daroma apkraunant sija likusiuose matavimo taškuose.
- d) Pabaigus visus bandymus su konkrečiu kritimo aukščiu, lyno kritimo aukštis yra performuojamas į sekantį aukštį, ir visi matavimai vėl kartojami.
- e) Atliekami bandymai formuojant trumpesnių ilgių gembines sijas.

## 4. STATINĖS APKROVOS VEIKIAMOS SIJOS REZULTATŲ ANALIZĖ

Tyrimo pirminė užduotys – nustatyti ar „merkimo į dažus“ metodo matavimai yra pakankami tikslūs, statinės apkrovos atveju, kad būtų galima jį pritaikyti ir dinaminuose bandymuose. Tam tikslui rezultatų tikslumas buvo palyginamas su rezultatais gautais naudojant tikslesnį matavimo prietaisą – lazerinį atstumo matuoklį.

Nagrinėjama sija yra apkraunama įvairiuose taškuose  $j$  išilgai sijos. Įlinkiai yra matuojami išilgai sijos keliuose taškuose  $i$ . Apkrovimo ir matavimo taškų koordinatės (nuo atramos) yra pateiktos 4.1 lentelėje.

**Lentelė Nr. 4.1.** Apkrovimo ir matavimo taškų koordinatės, m

Apkrovos taškas $j$	Žymėjimas	1	2	3	4	5
	Koordinatė $x_j$	1,18	1,48	1,78	2,08	2,38
Matavimo taškas $i$	Žymėjimas	A	B	C	D	E
	Koordinatė $x_i$	1,03	1,33	1,63	1,93	2,03

Nagrinėjamos sijos skerspjūvio parametrai yra pateikti 4.2 lentelėje.

**Lentelė Nr. 4.2.** Skerspjūvio geometriniai parametrai

$b \times h$ , cm	$A$ , cm <sup>2</sup>	$I$ , cm <sup>4</sup>
5×5	25	52,08

Sija yra pagaminta iš S235 legiruoto plieno. Tokios medžiagos mechaninės savybės yra pateiktos 4.3 lentelėje.

**Lentelė Nr. 4.3.** Sijos medžiagos mechaninės savybės

$f_{y,k}$ , MPa	$E$ , GPa	$G$ , GPa	Poisson koeficientas $\nu$
235	210	81	0,3

### 4.1. Teorinės įlinkių reikšmės

Plačiausiai naudojamas sijos įlinkis yra skaičiuojamas iš *Bernoulli–Euler* arba *klasikinės* sijų teorijos. Taškinės apkrovos veikiamos geminės sijos įlinkiai bet kuriame elemento taške yra apskaičiuojami pagal formules:

$$s_{i,j} = \frac{P \cdot x_i^2}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (3 \cdot x_j - x_i), \text{ kai } 0 < x_i < x_j \quad (4.1)$$

$$s_{i,j} = \frac{P \cdot x_j^2}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (3 \cdot x_i - x_j), \text{ kai } x_j < x_i < 1 \quad (4.2)$$

čia:  $P$  – taškine apkrova, kN;

$x_i$  – matavimo koordinatė nuo standžios atramos, m;

$x_j$  – apkrovimo koordinatė nuo standžios atramos, m.

Pagal 3.1 ir 3.2 formules suskaičiuotos įlinkių reikšmės yra pateikiamos 4.2 lentelėje.

Lentelė Nr. 4.2. Įlinkiai (mm) apskaičiuoti pagal *Bernoulli-Euler* teoriją

Apkrovos taškas, <i>i</i>	Matavimo taškas, <i>j</i>	Apkrovos, kg						
		4	8	12	16	20	24	28
1	A	0,162	0,325	0,487	0,649	0,812	0,974	1,136
	B	0,238	0,477	0,715	0,954	1,192	1,431	1,669
	C	0,315	0,630	0,945	1,259	1,574	1,889	2,204
	D	0,391	0,783	1,174	1,565	1,956	2,348	2,739
	E	0,468	0,935	1,403	1,871	2,338	2,806	3,273
2	A	0,221	0,441	0,662	0,882	1,103	1,323	1,544
	B	0,335	0,671	1,006	1,341	1,677	2,012	2,347
	C	0,455	0,911	1,366	1,821	2,276	2,732	3,187
	D	0,575	1,151	1,726	2,302	2,877	3,453	4,028
	E	0,696	1,391	2,087	2,782	3,478	4,174	4,869
3	A	0,279	0,557	0,836	1,115	1,394	1,672	1,951
	B	0,432	0,865	1,297	1,729	2,162	2,594	3,026
	C	0,601	1,202	1,802	2,403	3,004	3,605	4,206
	D	0,774	1,549	2,323	3,098	3,872	4,647	5,421
	E	0,948	1,896	2,845	3,793	4,741	5,689	6,638
4	A	0,337	0,674	1,011	1,348	1,685	2,021	2,358
	B	0,529	1,059	1,588	2,118	2,647	3,176	3,706
	C	0,747	1,493	2,240	2,986	3,733	4,479	5,226
	D	0,979	1,957	2,936	3,914	4,893	5,871	6,850
	E	1,216	2,431	3,647	4,863	6,078	7,294	8,510
5	A	0,395	0,790	1,185	1,580	1,975	2,371	2,766
	B	0,626	1,253	1,879	2,506	3,132	3,759	4,385
	C	0,892	1,785	2,677	3,569	4,462	5,354	6,246
	D	1,183	2,366	3,549	4,732	5,914	7,097	8,280
	E	1,488	2,977	4,465	5,953	7,441	8,930	10,418

*Timoshenko* metodu šlyties įrašos, atsirandančios sijos viduje apkrovimo metu, yra įvertinamos. Šiuo atveju įlinkių skaičiavimas atliekamas pagal formules:

$$S_{i,j} = \frac{P \cdot x_i}{\kappa \cdot A \cdot G} - \frac{P \cdot (x_j - x_i)}{2 \cdot E \cdot I} \left( x_j^2 - \frac{(x_j - x_i)^2}{3} \right) + \frac{P \cdot x_j^3}{3 \cdot E \cdot I}, \text{ kai } 0 < x_i < x_j \quad (4.3)$$

$$S_{i,j} = \frac{P \cdot x_j}{\kappa \cdot A \cdot G} - \frac{P \cdot (x_i - x_j)}{2 \cdot E \cdot I} \left( x_i^2 - \frac{(x_i - x_j)^2}{3} \right) + \frac{P \cdot x_i^3}{3 \cdot E \cdot I}, \text{ kai } x_j < x_i < l \quad (4.4)$$

Kaip buvo paminėta, *Timoshenko* metodu yra atsižvelgiama į šlyties įrašų įtaką sijos deformacijų padidėjimui. Šlyties poveikis sijos deformacijoms yra reikšmingas, kai sija yra trumpa, palyginus su skerspjūvio matmenimis [40]. Kai sija yra pakankamai liauna, *Bernoulli-Euler* teorija labai tiksliai aprašo jos deformavimąsi ir nėra tikslo pritaikyti sudėtingesnės *Timoshenko* teorijos. Sijos liaunumą galima įvertinti liaunumo santykiu  $\lambda_{\text{ratio}}$  kuris suskaičiuojamas pagal formulę:

$$\lambda_{ratio} = \frac{G \cdot A \cdot L^2}{E \cdot I} \quad (4.5)$$

čia:  $L$  – gembės ilgis. Šiuo atveju buvo priimtas jėgos pridėties taško koordinatės  $x_j$  reikšmė.

Pritaikant *Timoshenko* teoriją, įlinkių padidėjimas šlyties įrašų įvertinimo atveju yra skaičiuojamas pagal formulę:

$$\Delta s = \frac{s_{Timoshenko} - s_{Euler}}{s_{Euler}} \times 100\% \quad (4.6)$$

Lentelėje 4.3 yra duotos orientacinės įlinkių padidėjimo vertės priklausomai nuo liaunumo santykio.

**Lentelė Nr. 4.3** *Timoshenko* santykis su *Bernoulli–Euler* pagal sąlyginį liaunumą

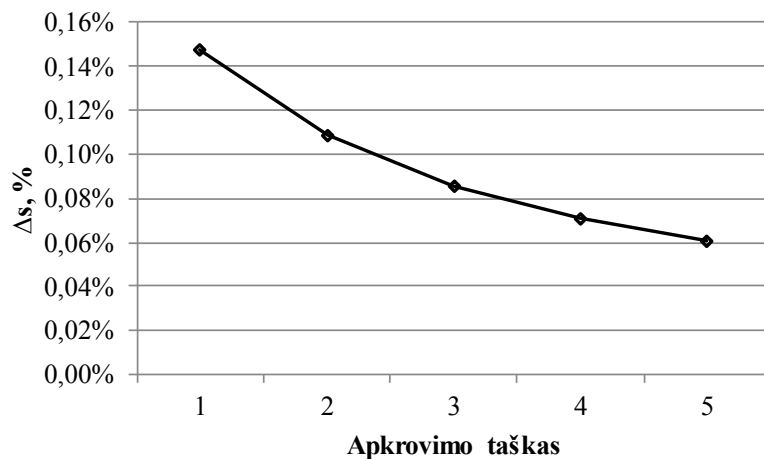
$\lambda_{ratio}$	25	50	100	1000
$\Delta s, \%$	12	6	3	0,3

Kuo mažesnės  $\lambda_{ratio}$  reikšmės, tuo daugiau  $s_{Timoshenko}$  didėja ir atsiskiria nuo  $s_{Euler}$ . Nagrinėjamos sijos atveju,  $\lambda_{ratio}$  reikšmės pagal apkrovimo tašką yra duotos 4.4 lentelėje.

**Lentelė Nr. 4.4** Esamos sijos faktinės  $\lambda_{ratio}$  reikšmės skirtingose apkrovimo taškuose

Apkrovimo taškas $j$	1	2	3	4	5
$\lambda_{ratio}$	2578	4055	5866	8010	10487

Lyginant gautas reikšmes su 4.3 lentelės orientacinėmis reikšmėmis, pastebimos gana didelės  $\lambda_{ratio}$  vertės. Tai reiškia, kad įlinkių pokyčiai yra nereikšmingi.



**4.1 Pav.** Įlinkių padidėjimas skaičiuojant pagal *Timoshenko* teoriją, esamos sijos atveju

Paveikslėlyje yra duotos maksimalios stebėtos  $\Delta s$  reikšmės apkraunant skirtinguose sijos taškuose. Apkraunant taške Nr. 1 gauname didžiausią pokytį 0,15%. Tai reiškia, kad didžiausias įlinkių padidėjimas *Timoshenko* teorijos pritaikymo atveju yra  $3,6 \cdot 10^{-3}$  mm. Aiškiai yra rodoma, kad šios analizės metu abiejų teorijos rezultatai praktiškai nesiskiria tarpusavyje. Turima sija visais apkrovimo atvejais yra pakankamai liauna, kad *Timoshenko* šlyties poveikiai darytų įtaką. Todėl

tolimesnei analizei statinės apkrovos veikiamos sijos įlinkiai buvo skaičiuojami pagal klasikinę sijų teoriją.

## 4.2. Eksperimentiniai matavimai

### 4.2.1. Įlinkių matavimas naudojant „merkimo į dažus“ metodą

Statinės apkrovos veikiamos gembinės sijos bandymų įmerkimo matavimai buvo atliekami kiekviename  $j$  matavimo taške po keturis kartus. Lentelėje Nr. 4.5 pristatomi jau suvidurkinti įlinkių rezultatai, apdoroti skaičiuojant pagal (3.1) formulę. Įlinkiai surašyti milimetrais.

Lentelė Nr. 4.5. Įlinkiai (mm) išmatuoti naudojant dažų metodą, veikiant statinei apkrovai

Apkrovos taškas, $i$	Matavimo taškas, $j$	Apkrovos, kg						
		4	8	12	16	20	24	28
1	A	-0,3	-0,4	0,4	0,1	0,0	0,1	0,4
	B	0,8	0,8	0,6	1,0	1,1	1,8	2,1
	C	0,5	0,8	1,1	0,9	1,4	1,9	1,6
	D	0,6	1,0	1,3	2,0	1,8	2,5	3,0
	E	0,3	0,9	1,3	1,4	1,8	2,6	3,3
2	A	0,1	0,5	0,5	1,3	1,1	1,5	1,6
	B	0,4	0,8	1,0	1,6	2,1	2,4	2,9
	C	0,8	1,1	1,8	2,4	3,5	3,1	3,4
	D	0,4	1,1	2,0	2,3	2,9	3,6	4,4
	E	0,6	1,3	2,4	3,3	3,9	4,5	5,1
3	A	0,5	0,6	0,6	1,0	1,8	1,6	1,9
	B	0,3	0,6	1,3	1,6	2,1	2,4	2,9
	C	0,6	1,0	1,8	2,4	3,0	3,6	4,3
	D	1,0	2,6	3,4	4,1	4,9	5,8	6,4
	E	1,0	2,3	3,0	4,6	5,5	5,9	7,3
4	A	0,5	1,0	1,3	1,4	1,9	2,3	2,8
	B	0,3	0,9	1,6	2,4	3,1	3,5	3,9
	C	0,8	1,8	2,4	3,6	4,4	5,3	6,0
	D	0,9	1,8	3,0	4,0	5,4	6,4	7,1
	E	1,9	3,3	4,5	5,9	7,1	8,3	9,6
5	A	0,3	0,6	0,6	1,3	1,6	1,9	1,9
	B	0,9	1,5	1,9	2,9	3,6	3,9	4,8
	C	1,0	1,8	2,8	3,8	4,4	5,6	6,4
	D	1,1	2,4	4,0	4,8	6,1	7,6	8,6
	E	1,9	3,1	4,8	6,4	8,0	9,6	11,1

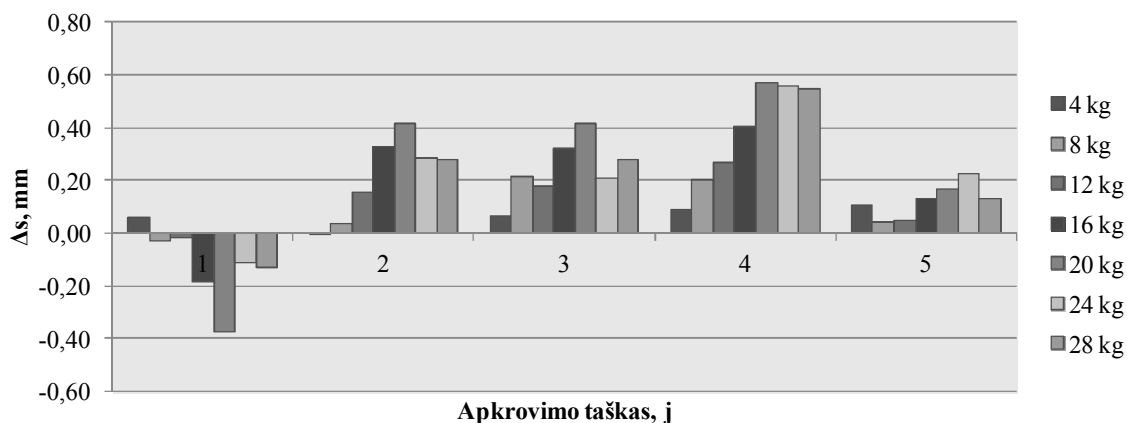
Matuojant įlinkius „merkimo į dažus“ metodu naudojamas matavimo prietaisas buvo liniuotė, kurios padalos vertės – 1 mm. Norint įvertinti šio „merkimo į dažus“ metodo matavimų tikslumą,



buvo atliekama matavimų nuokrypių analizė. Eksperimentinių reikšmių nuokrypiai nuo teorinių reikšmių, suskaičiuotų pagal *Bernoulli-Euler* sijų teoriją, yra gaunami pagal formulę:

$$\Delta s = s_{exp,i,j} - s_{teor,i,j} \quad (4.7)$$

Nuokrypių priklausomybė nuo jėgos veikimo taško ir nuo jėgos didumo yra pavaizduoti 4.2 paveikslėlyje.



4.2 Pav. „Merkimo į dažus“ metodo matavimų rezultatų nuokrypių  $\Delta s$  priklausomybės nuo apkrovimo taško histograma

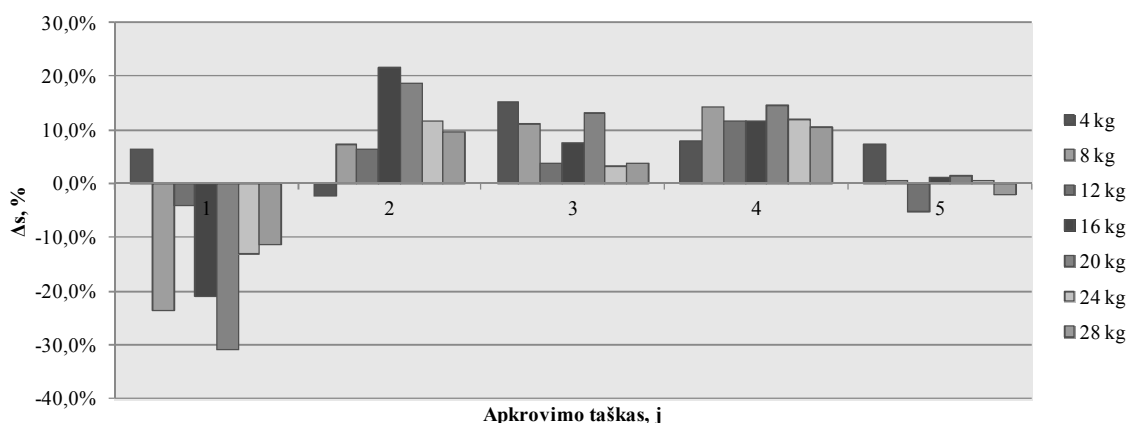
Diagramoje stebima riški nuokrypių priklausomybė nuo apkrovos veikimo taško  $j$  ir nuo jos didumo. Apkrovimo taške Nr. 1 metu dauguma  $\Delta s$  reikšmės yra neigiamos, ir siekia  $-0,40$  mm. Kituose taškuose, toliau esančiose nuo atramos, visos reikšmės yra teigiamos (eksperimentiniai įlinkiai viršija teorinius), kai kuriais atvejais siekdamos  $0,57$  mm. Apkraunant siją laisvajame gale (taške Nr. 5), nuokrypiai labai ženkliai sumažėja, nesiekdami net  $0,20$  mm. Iš to galima daryti išvada, kad apkraunant siją laisvajame gale eksperimentiniai rezultatai geriausiai atitinka teorijai.

Didinant apkrovą vyksta įdomūs reiškiniai. Apkraunant siją nuo  $4$  kg iki  $20$  kg nuokrypiai nuo teorinių reikšmių palaipsniui didėja. Tai galima paaiškinti tuo, kad didėjant apkrovai, didėja ir įlinkis; o esant didesniam įlinkiui yra didesnė tikimybė, kad eksperimentinės reikšmės labiau atsiskirtų nuo teorinių. Nuokrypiai  $\Delta s$  pasiekia maksimumą apkraunant su  $20$  kg svoriu. Tačiau, toliau apkraunant, eksperimentiniai rezultatai labiau pradeda atitikti teoriniams ir  $\Delta s$  labai ženkliai sumažėja. Tai leidžia daryti prielaidą, kad yra tam tikras apkrovos slenkstis, nuo kurio klasikinė sijų teorija labai tiksliai aprašo tikrą sijos elgseną.

Kai kurios minėtos išvados aiškiau pastebimos žiūrint į santykinius nuokrypius, kurie yra skaičiuojami pagal formulę:

$$\Delta s = \frac{s_{exp,i,j} - s_{teor,i,j}}{s_{teor,i,j}} \times 100\% \quad (4.8)$$

Santykiniai nuokrypiai yra pateikiamos 4.3 histogramoje.



**4.3 Pav.** „Merkimo į dažus“ metodo santykinų nuokrypių  $\Delta s$  (%) priklausomybės nuo apkrovimo taško histograma

Pagal santykinus nuokrypius daroma išvada, kad kuo arčiau atramos, tuo netikslesni rezultatai. Taške Nr. 1 pasiekama -30% paklaida, o taške Nr. 2 pasiekama 20%. Apkraunant sijos gale, kadangi įlinkis yra didelis, santykinės paklaidos yra mažos – svyruoja tarp -5,1% ir 7,2%.

#### 4.2.1. Įlinkių matavimas naudojant lazerinį atstumo matuoklį

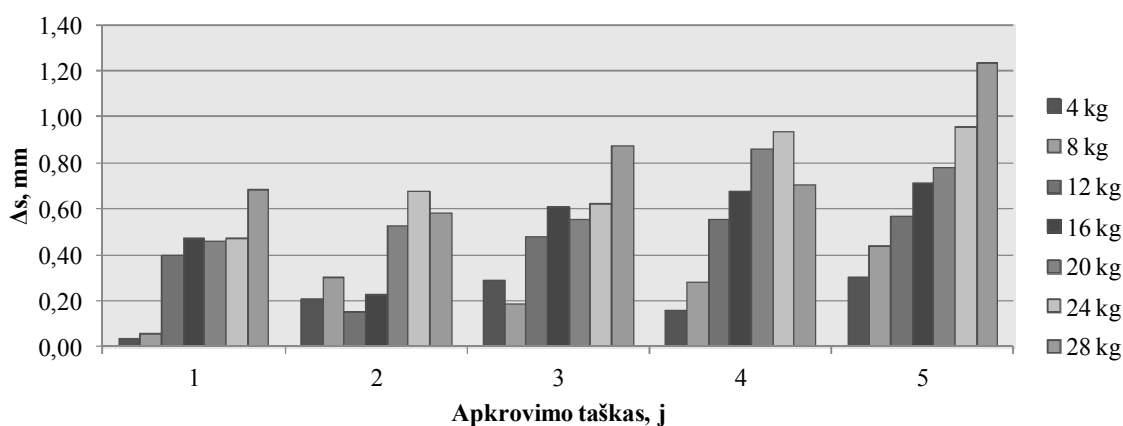
Statinės apkrovos veikiamos sijos įlinkių matavimai naudojant lazerinį matuoklį buvo atliekami kiekviename  $j$  matavimo taške po tris kartus. Lentelėje Nr. 4.7 pristatomi jau suvidurkinti įlinkių rezultatai, apdoroti skaičiuojant pagal (3.1) formulę. Įlinkiai surašyti milimetrais.

**Lentelė Nr. 4.7.** Įlinkiai (mm) išmatuoti naudojant lazerinį atstumų matuoklį, veikiant statinei apkrovai

Apkrovos taškas, $i$	Matavimo taškas, $j$	Apkrovos, kg						
		4	8	12	16	20	24	28
1	A	0,2	0,1	0,6	0,9	1,1	0,9	1,8
	B	0,3	0,4	1,1	1,2	1,3	1,8	2,1
	C	0,4	0,7	1,1	1,9	2,0	2,5	3,0
	D	0,2	1,0	1,7	2,1	2,5	2,9	3,3
	E	0,7	1,3	2,3	2,6	3,2	3,6	4,2
2	A	0,0	0,2	0,4	-0,2	1,0	1,4	1,7
	B	0,5	0,7	1,2	1,6	2,1	2,5	2,7
	C	0,8	1,6	1,5	2,7	3,1	3,8	4,4
	D	1,1	1,5	2,0	2,9	3,6	4,4	4,5
	E	0,9	2,1	2,5	3,2	4,2	4,9	5,6
3	A	0,8	0,6	1,4	1,8	2,0	2,1	2,7
	B	0,8	0,5	1,7	2,0	2,5	3,1	3,6
	C	0,9	1,8	2,3	3,1	3,6	4,4	5,2
	D	1,1	1,9	2,8	3,7	4,2	5,1	6,4
	E	0,9	2,1	3,2	4,6	5,6	6,6	7,7

4	A	0,3	0,7	1,5	1,7	2,4	2,9	3,0
	B	0,9	1,8	2,2	2,9	3,7	4,2	4,6
	C	1,2	1,8	3,2	4,0	4,7	5,7	6,2
	D	1,0	2,0	3,2	4,4	5,5	6,6	6,7
	E	1,2	2,7	4,1	5,6	7,0	8,1	9,7
5	A	0,1	0,6	1,4	1,8	2,1	3,0	3,2
	B	0,7	1,7	2,6	3,2	3,9	4,3	5,5
	C	1,5	2,5	3,5	4,4	5,6	6,6	8,0
	D	1,9	3,1	4,2	5,8	6,9	8,3	9,9
	E	1,9	3,4	4,9	6,6	8,3	10,1	11,8

Naudojamo lazerinio prietaiso matavimo rezultatų vertės yra duotos su 0,1mm tikslumu. Norint įvertinti matavimo rezultatų atitikimo su teorinėmis reikšmėmis tikslumą, buvo atliekama nuokrypių analizė. Nuokrypiai nuo teorinių reikšmių yra pateikti 4.5 paveikslėlyje.

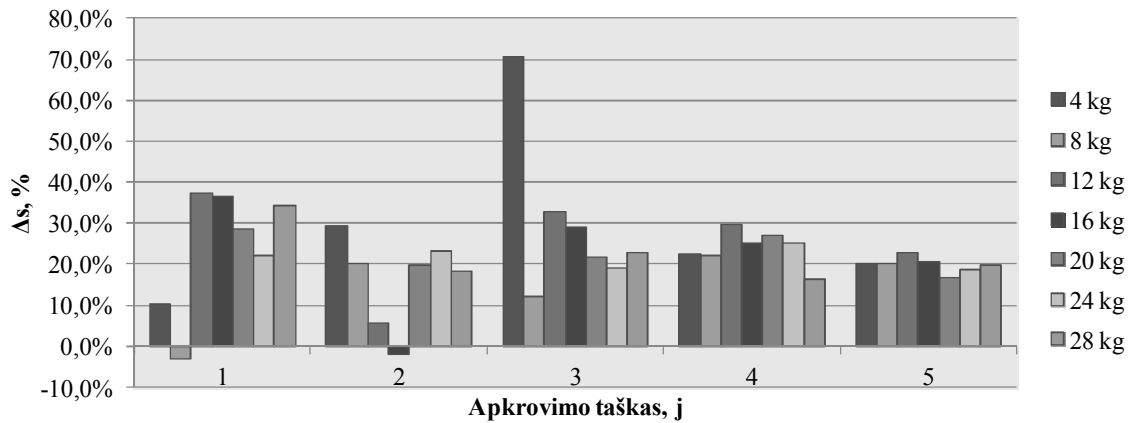


**4.5 Pav.** Lazerinio matuoklio matavimų rezultatų nuokrypių  $\Delta s$  priklausomybės nuo apkrovimo taško histograma

Matuojant lazeriu, visi nuokrypiai nuo teorijos yra teigiami; tai reiškia, kad visais atvejais eksperimentiniai rezultatai yra didesni nei teoriniai. Tai atsitinka dėl sisteminės matavimo paklaidos – lazerinio prietaiso  $1^\circ$  nukrypimas nuo vertikalinės padėties, matuojant 3 m žemiau sijos, lemia 0,5 mm matavimų padidėjimą. Dėl to nėra neigiamų rezultatų.

Rezultatai taip pat rodo, kad didėjant atstumui ir tolstant apkrovimo taškui nuo atramos, nuokrypiai  $\Delta s$  sistemingai padidėja. Šiuo atveju nėra „slenksčio“, kaip atsitiko matuojant su dažais.

Santykiniai nuokrypiai yra pateikti 4.6 histogramoje.

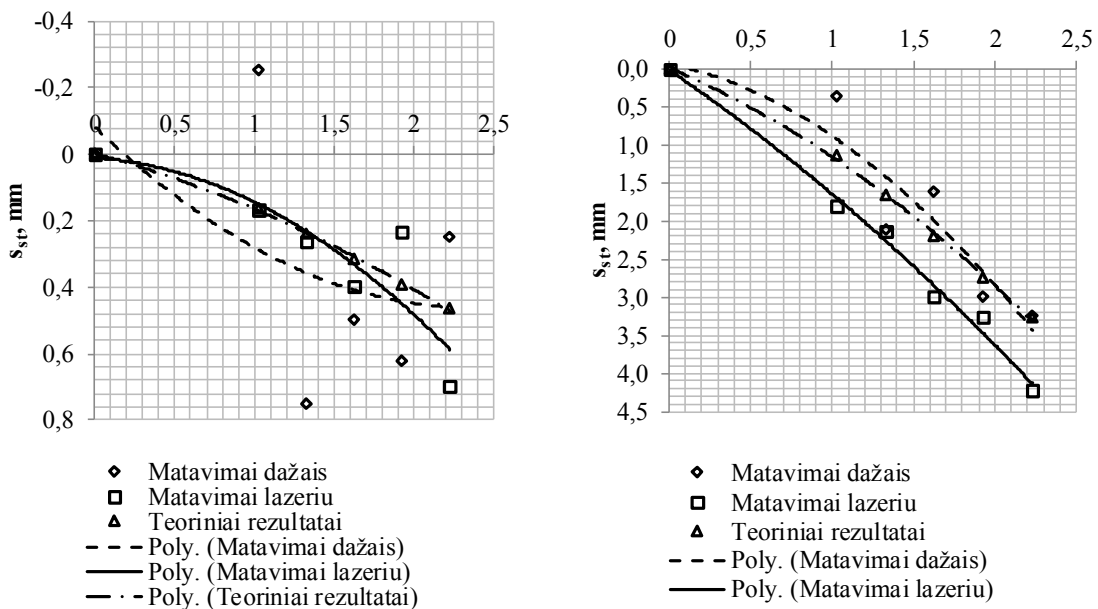


4.6 Pav. Lazerinio matuoklio matavimo rezultatų santykinų nuokrypių  $\Delta s$  (%) priklausomybės nuo apkrovimo taško histograma

Santykiniai nuokrypiai šiuo atveju yra labai panašūs tarpusavyje. Arčiau atramos rezultatai siekia 37%; tolstant nuo atramos dauguma rezultatų patenka tarp 15 – 30% santykinų paklaidų reikšmių.

### 4.3. Matavimo metodų lyginamoji analizė

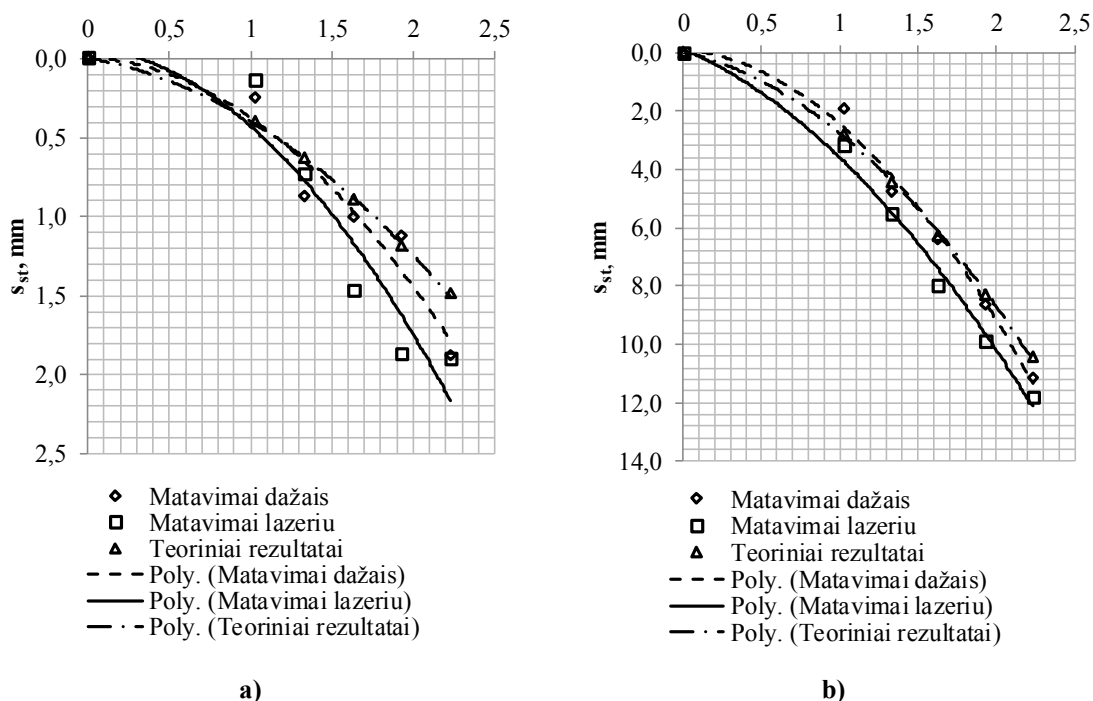
Įlinkių matavimo rezultatų tikslumas priklauso nuo apkrovimo taško padėties ir nuo apkrovos didumo. Apkraunant taške Nr. 1 išmatuoti įlinkiai skirtinguose taškuose išilgai sijos yra pateikiami grafikuose.



a) b)  
4.7. Pav. Statinės apkrovos veikiamos sijos įlinkiai apkraunant taške Nr.1: a) apkraunant su 4 kg masės svarmeniu; b) apkraunant su 28 kg masės svarmeniu

Kai sija yra veikiamą 4 kg masės svarmens apkrovos taške Nr. 1, pastebimas netvarkingas „merkimo į dažus“ rezultatų išsibarstymas aplink teorines reikšmes; net įlinkių kreivė yra išgaubta į

priešingą pusę. Lazeriniu prietaisu išmatuoti įlinkiai tiksliau sutampa su teorinių rezultatų kreive. Apkraunant su didesne (28 kg) apkrova, įlinkiai didėja ir dažų metodo kreivė atitinka labiau teorinėms reikšmėms nei lazerinio matuoklio rezultatų kreivė. Iš diagramų aiškiai matosi, kad esant didesniems įlinkiams dažų metodas yra žymiai tikslesnis.



**4.8. Pav.** Statinės apkrovos veikiamos sijos įlinkiai apkraunant taške Nr. 5:  
a) apkraunant su 4 kg masės svarmeniu; b) apkraunant su 28 kg masės svarmeniu

Diagramose yra vaizduojami sijos įlinkiai apkraunant laisvajame gale (taške Nr. 5), apkraunant su 4 kg ir su 28 kg apkrovomis. Abiem atvejais gaunami tikslesni rezultatai naudojant „merkimo į dažus“ metodą. Didinant apkrovą abiejų metodų rezultatai geriau sutampa su teorinėmis reikšmėmis. Kitais apkrovimų atvejais, kurie yra pateikti priede Nr.1, tendencijos yra tokios pačios.

Pagal atliktą nuokrypių analizę matome, kad duomenų nuokrypiai naudojant „merkimo į dažus“ metodą siekia 0,6 mm, tuo tarpu, pagal lazerinio matuoklio metodą maksimalus nuokrypis yra 1,2 mm. Santykiniai nuokrypiai naudojant dažus maksimaliai siekia 30,8%; o naudojant lazerinį prietaisą atskirais atvejais yra pasiekama 70,5%. Tokie duomenys rodo, kad dažų metodo matavimai labiau atitinka *Bernoulli-Euler* teoriją nei naudojant lazerinį prietaisą. Iš kitos pusės taip pat galima teigti, kad esant mažiems įlinkiams (pvz., apkraunant arti atramos su maža apkrova) dažų metodo santykiniai nuokrypiai labai išauga. Lazerinio prietaiso atveju santykiniai nuokrypiai nepriklauso nuo įlinkio didumo.

Matavimo metodų tikslumo palyginimas yra atliekamas pritaikant mažiausių kvadratų  $\sum \Delta s^2$  regresinę analizę. Pagal šį metodą priimama, kad tikslesnis metodas yra tas, kurio nuokrypių kvadratų suma yra mažesnė.

„Merkimo į dažus“ metodo suminių įlinkių kvadratų  $\sum \Delta s^2$  reikšmės yra pateiktos 4.8 lentelėje.

Lentelė Nr. 4.8. „Merkimo į dažus“ metodo įlinkių nuokrypių kvadratų  $\sum \Delta s^2$  reikšmės, mm<sup>2</sup>

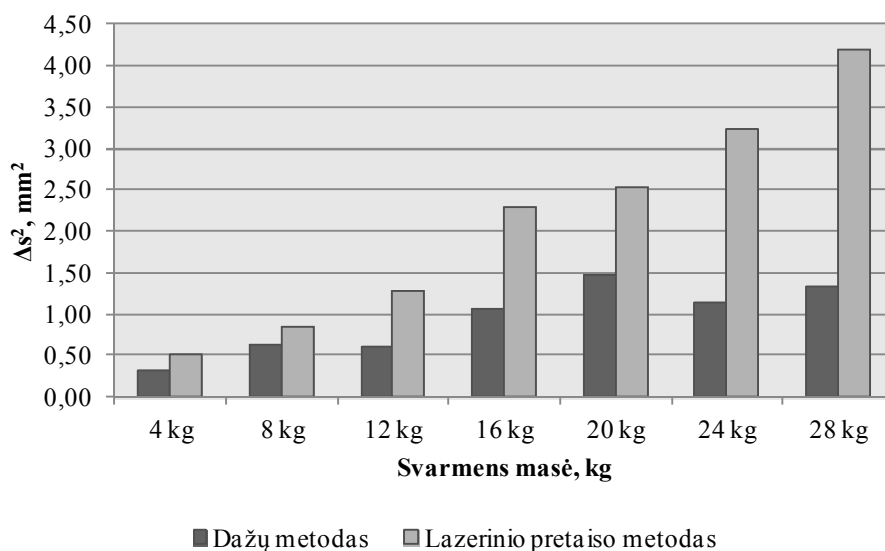
Apkrovimo taškai, <i>j</i>	Svarmens masė						
	4 kg	8 kg	12 kg	16 kg	20 kg	24 kg	28 kg
1	0,57	0,63	0,08	0,86	1,09	0,88	1,19
2	0,14	0,08	0,33	0,74	1,86	0,45	0,51
3	0,14	1,39	1,18	1,77	1,71	1,30	1,32
4	0,55	0,92	0,81	1,51	2,01	1,92	2,10
5	0,25	0,11	0,60	0,46	0,73	1,09	1,56
<b>VIDURKIAI</b>	<b>0,33</b>	<b>0,62</b>	<b>0,60</b>	<b>1,07</b>	<b>1,48</b>	<b>1,13</b>	<b>1,34</b>

Lazerinio prietaiso metodo įlinkių  $\sum \Delta s^2$  reikšmės yra pateiktos 4.9 lentelėje.

Lentelė Nr. 4.9. Lazerinio prietaiso metodo įlinkių nuokrypių kvadratų  $\sum \Delta s^2$  reikšmės, mm<sup>2</sup>

Apkrovimo taškai, <i>j</i>	Svarmens masė						
	4 kg	8 kg	12 kg	16 kg	20 kg	24 kg	28 kg
1	0,09	0,21	1,20	1,34	1,37	1,51	2,49
2	0,50	1,16	0,34	2,64	1,99	2,95	2,26
3	0,58	0,67	1,17	2,02	1,72	2,17	3,99
4	0,36	0,68	1,81	2,55	3,83	4,50	3,52
5	1,05	1,53	1,88	2,92	3,74	5,05	8,70
<b>VIDURKIAI</b>	<b>0,52</b>	<b>0,85</b>	<b>1,28</b>	<b>2,29</b>	<b>2,53</b>	<b>3,23</b>	<b>4,19</b>

Nuokrypių suminių kvadratų  $\sum \Delta s^2$  vidurkiai yra pavaizduoti 4.9 diagramoje.



4.9. Pav. Matavimo metodų  $\sum \Delta s^2$  vidurkių palyginimas

Iš 4.9 diagramos priimama išvada, kad  $\sum \Delta s^2$  reikšmės visais apkrovimo atvejais yra mažesnės „merkimo į dažus“ metodo atveju. Galima teigti, kad šio metodo išmatuotos įlinkio reikšmės geriau sutampa su priimta *Bernoulli-Euler* teorijos rezultatais.

#### 4.4. Statinės apkrovos veikiamos sijos analizės išvados

Statinei įlinkių analizei buvo nagrinėjamos dvi pagrindinės sijų teorijos: *Bernoulli-Euler* sijų teorija, kuri yra pritaikoma liauniems strypams bei sijoms; ir *Timoshenko* sijų teorija, kuri yra pritaikoma masyvesnėms sijoms. Buvo pastebėta, kad turima sija yra sąlyginai liauna. *Timoshenko* teorijos įvertinamos šlyties deformacijos yra nereikšmingos. Skirtumas tarp abiejų teorijų įlinkių maksimaliai siekia 0,15%. Kadangi toks skirtumas yra nereikšmingas, nėra tikslo pritaikyti sudėtingesnę *Timoshenko* teoriją. Tolimesnė analizė buvo atliekama skaičiuojant įlinkius pagal *Bernoulli-Euler* teoriją.

1. Matuojant „merkimo į dažus“ metodu buvo pastebėta, kad matavimų nuokrypiai nuo teorinių reikšmių didėja (iki 40%) kai įlinkiai yra maži, tai yra, kai sija apkraunama arti atramos arba su maža apkrova. Esant didesniems įlinkiams matavimai labiau atitinka teoriniams rezultatams, ir santykinis nuokrypis pasidaro 5 – 20%.
2. Atliekant matavimus lazeriniu matuokliu, nuokrypiai yra teigiami, apie 20 – 30%. Nuokrypių didumas nepriklauso nuo apkrovos dydžio nei nuo apkrovimo taško išilgai sijos.
3. Pagal mažiausių kvadratų  $\sum \Delta s^2$  regresinę analizę buvo nustatyta, kad „merkimo į dažus“ matavimo metodas yra daug tikslesnis už lazerinio prietaiso metodo, nepaisant to, kad paties lazerinio matuoklio matavimo tikslumas (0,1mm) yra daug didesnis už „merkimo į dažus“ metodo naudojamos liniuotės tikslumą (1mm). Tai lemia sisteminė lazerinio matuoklio paklaida dėl prietaiso padėties nukrypimo nuo normalės atliekant matavimą.
4. Statinės apkrovos veikiamos gėminės sijos analizėje buvo įrodytas dažų metodo tikslumas ir jo pritaikomumas smūginuose bandymuose.

## 5. SMŪGINIŲ BANDYMŲ REZULTATŲ ANALIZĖ

Smūginės apkrovos veikiamos sijos deformavimosi dėsnų prognozavimas yra labai sudėtingas uždavinys. Todėl įprastai yra priimami tam tikri supaprastinimai, kuriuos pritaikant smūgio pasekmės yra lengviau prognozuojamos išlaikant pakankamą tikslumą. Plačiausiai naudojamas toks supaprastinimas yra dinaminio koeficiento  $k_{dyn}$  metodas, kuris tam tikrose ribose yra paprastas ir gana tikslus įrankis smūginiams uždaviniams spręsti.

Dinaminis koeficientas  $k_{dyn}$  priklauso nuo įvairių veiksnių: sijos ilgio, apkrovimo taško, svorio didumo ir jo kritimo aukščio. Atliktų bandymų rezultatų analizės tikslas – įvertinti dinaminio koeficiento  $k_{dyn}$  tikslumą ir pritaikomumą visiems šiems atvejams.

### 5.1. Dinaminio koeficiento skaičiavimo teorijos ir jų atitikimas bandymų rezultatams

Dinaminio koeficiento  $k_{dyn}$  skaičiavimo metodikos yra grindžiamos mechaninės energijos tvermės dėsniu: smūgio metu suminė mechaninė energija nekinta. Skaičiavimo metodikų apžvalga yra pateikta 2.2.2 skyriuje. Nagrinėjami du pagrindiniai skaičiavimo būdai:

1. *Paprastasis* metodas, kuriame nėra įvertintas pačios sijos savojo svorio; šio metodo skaičiavimas atliekamas pagal (2.36) formulę:

$$k_{dyn} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{s_{st}}} \quad (2.36)$$

2. *Rayleigh* metodas, kuriame yra įvedamas sijos redukuotas savasis svoris. Redukuotas svoris priklauso nuo skaičiuojamosios schemos. Geminės sijos dinaminio koeficiento skaičiavimas pagal šį metodą pateiktas (2.40) formulėje.

$$k_{dyn} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{s_{st}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{W_1}{W}}} \quad (2.40)$$

Eksperimento metu sija buvo apkraunama tuose pačiuose taškuose kaip statinės apkrovos bandymų metu, esant keturiems skirtingiems laisvo kritimo aukščiams: 0,520 m, 0,420 m, 0,320 m ir 0,220 m. Šiame skyriuje yra rodomi tik įlinkių rezultatai, kai laisvo kritimo aukštis –  $h=0,520$ m, nes įlinkiai yra didžiausi, ir dėl to matavimai yra tiksliausi. Kitų kritimo aukščių įlinkių bei  $k_{dyn}$  rezultatai yra pateikiami prieduose Nr. 2 – 5.

Kaip buvo aptarta 4 skyriuje, statinės apkrovos veikiamos sijos įlinkių teoriniai rezultatai yra skaičiuojami pagal *Bernoulli-Euler* teoriją. Smūginės apkrovos veikiamos sijos teoriniai įlinkių rezultatai, suskaičiuoti pagal *paprastąjį* metodą, yra pateikiami 5.1 lentelėje.



**Lentelė Nr. 5.1.** Paprastuoju metodu apskaičiuoti dinaminiai įlinkiai bei koeficientai, svarmeniui krentant nuo 0,520 m aukščio

Apkrovimo taškas <i>j</i>	Matavimo taškas <i>i</i>	4 kg			8 kg			12 kg		
		S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm
1	A	0,16	48,2	7,82	0,32	34,4	11,15	0,49	28,3	13,75
	B	0,24		11,49	0,48		16,39	0,72		20,21
	C	0,31		15,17	0,63		21,64	0,94		26,68
	D	0,39		18,85	0,78		26,89	1,17		33,15
	E	0,47		22,53	0,94		32,14	1,40		39,63
2	A	0,22	39,7	8,75	0,44	28,4	12,51	0,66	23,4	15,44
	B	0,34		13,31	0,67		19,02	1,01		23,49
	C	0,46		18,07	0,91		25,82	1,37		31,89
	D	0,58		22,83	1,15		32,64	1,73		40,30
	E	0,70		27,60	1,39		39,45	2,09		48,72
3	A	0,28	34,1	9,51	0,56	24,4	13,62	0,84	20,2	16,84
	B	0,43		14,76	0,86		21,13	1,30		26,13
	C	0,60		20,51	1,20		29,37	1,80		36,31
	D	0,77		26,43	1,55		37,85	2,32		46,81
	E	0,95		32,37	1,90		46,35	2,84		57,31
4	A	0,34	30,3	10,20	0,67	21,7	14,63	1,01	17,9	18,11
	B	0,53		16,02	1,06		22,98	1,59		28,45
	C	0,75		22,60	1,49		32,41	2,24		40,13
	D	0,98		29,62	1,96		42,48	2,94		52,60
	E	1,22		36,79	2,43		52,78	3,65		65,34
5	A	0,40	27,5	10,85	0,79	19,7	15,58	1,19	16,3	19,32
	B	0,63		17,20	1,25		24,71	1,88		30,62
	C	0,89		24,50	1,78		35,19	2,68		43,62
	D	1,18		32,48	2,37		46,65	3,55		57,83
	E	1,49		40,86	2,98		58,70	4,46		72,76

Teoriniai sijos įlinkių rezultatai pritaikant *Rayleigh* metodą yra pateikiami 5.2 lentelėje.

**Lentelė Nr. 5.2.** *Rayleigh* metodu apskaičiuoti dinaminiai įlinkiai bei koeficientai, svarmeniui krentant nuo 0,520 m aukščio

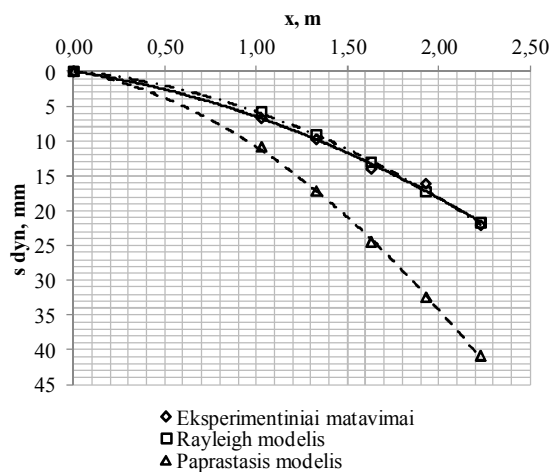
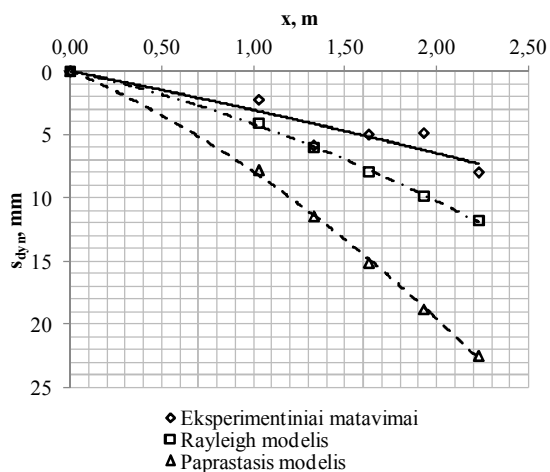
Apkrovimo taškas <i>j</i>	Matavimo taškas <i>i</i>	4 kg			8 kg			12 kg		
		$s_{st}$ mm	$k_{dyn}$	$s_{dyn}$ mm	$s_{st}$ mm	$k_{dyn}$	$s_{dyn}$ mm	$s_{st}$ mm	$k_{dyn}$	$s_{dyn}$ mm
1	A	0,16	25,3	4,10	0,32	22,6	7,33	0,49	20,6	10,04
	B	0,24		6,02	0,48		10,77	0,72		14,76
	C	0,31		7,95	0,63		14,22	0,94		19,49
	D	0,39		9,88	0,78		17,67	1,17		24,21
	E	0,47		11,81	0,94		21,12	1,40		28,94
2	A	0,22	20,9	4,61	0,44	18,7	8,25	0,66	17,1	11,31
	B	0,34		7,01	0,67		12,54	1,01		17,21
	C	0,46		9,51	0,91		17,03	1,37		23,36
	D	0,58		12,02	1,15		21,52	1,73		29,53
	E	0,70		14,53	1,39		26,02	2,09		35,69
3	A	0,28	18,0	5,03	0,56	16,2	9,01	0,84	14,8	12,38
	B	0,43		7,80	0,86		13,98	1,30		19,20
	C	0,60		10,84	1,20		19,43	1,80		26,68
	D	0,77		13,98	1,55		25,04	2,32		34,39
	E	0,95		17,11	1,90		30,66	2,84		42,11
4	A	0,34	16,1	5,41	0,67	14,4	9,71	1,01	13,2	13,34
	B	0,53		8,50	1,06		15,25	1,59		20,96
	C	0,75		11,99	1,49		21,51	2,24		29,56
	D	0,98		15,72	1,96		28,19	2,94		38,75
	E	1,22		19,53	2,43		35,02	3,65		48,14
5	A	0,40	14,6	5,78	0,79	13,1	10,37	1,19	12,0	14,26
	B	0,63		9,16	1,25		16,44	1,88		22,62
	C	0,89		13,05	1,78		23,42	2,68		32,22
	D	1,18		17,30	2,37		31,05	3,55		42,71
	E	1,49		21,76	2,98		39,06	4,46		53,73

Smūginių eksperimentinių bandymų įlinkiai buvo išmatuojami kiekviename *j* matavimo taške po keturis kartus, merkimo į dažus metodu. Lentelėje 5.3 pateikiami jau suvidurkinti įlinkių rezultatai, apdoroti skaičiuojant pagal (3.1) formulę. Taip pat pateikiami statinės apkrovos veikiamos sijos įlinkių matavimai „merkimo į dažus“ metodu, ir dinaminio koeficiento vertės, gautos iš eksperimentinių dinaminių ir statinių rezultatų santykio ( $k_{dyn} = s_{dyn}/s_{st}$ ).

**Lentelė Nr. 5.3.** Eksperimentiniai matavimai, svarmeniui krentant nuo 0,520 m aukščio

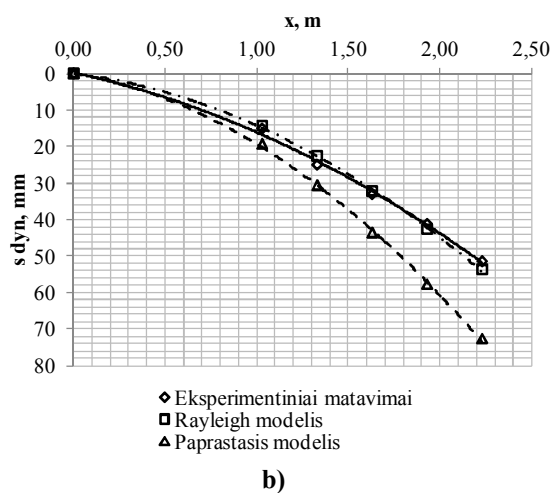
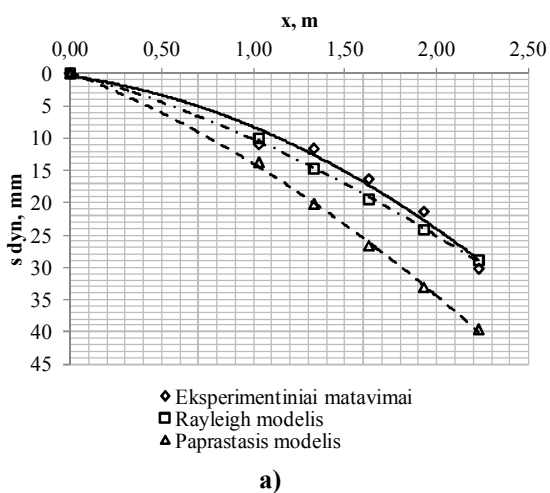
Apkrovimo taškas <i>j</i>	Matavimo taškas <i>i</i>	4 kg			8 kg			12 kg		
		S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm
1	A	0,3	9,0	2,3	0,6	9,8	6,1	0,8	14,7	11,0
	B	0,3	23,5	5,9	0,5	14,3	7,1	0,5	23,3	11,6
	C	0,3	20,0	5,0	0,8	13,8	10,4	0,9	18,7	16,4
	D	0,3	19,5	4,9	0,8	16,7	12,5	1,3	17,1	21,4
	E	0,8	10,7	8,0	1,0	18,5	18,5	2,0	15,1	30,3
2	A	0,0	-	3,0	0,3	27,0	6,8	1,1	10,4	11,8
	B	0,4	15,0	5,6	1,0	11,5	11,5	1,3	13,6	17,0
	C	0,4	16,3	6,1	0,8	22,0	16,5	1,8	13,1	23,0
	D	0,3	32,5	8,1	1,0	20,9	20,9	2,0	15,4	30,9
	E	0,9	13,7	12,0	1,4	19,9	27,4	2,4	16,6	39,4
3	A	0,3	15,5	3,9	0,5	10,8	5,4	1,0	12,8	12,8
	B	0,8	8,3	6,3	0,9	14,7	12,9	1,4	14,2	19,5
	C	0,9	10,4	9,1	1,1	16,4	18,5	1,9	15,1	28,3
	D	0,4	26,3	9,9	1,5	16,6	24,9	2,3	16,4	36,9
	E	0,9	17,3	15,1	2,4	13,1	31,0	3,0	17,6	52,8
4	A	0,4	14,3	5,4	0,8	11,7	8,8	0,9	16,3	14,3
	B	0,8	10,2	7,6	1,4	12,6	17,4	2,0	11,3	22,6
	C	0,6	18,6	11,6	1,6	13,3	21,6	2,3	13,5	30,4
	D	1,3	11,2	14,0	2,3	12,6	28,4	3,3	12,3	40,0
	E	1,3	15,6	19,5	2,6	13,6	35,6	3,5	14,7	51,4
5	A	0,4	18,0	6,8	0,4	30,3	11,4	1,5	10,1	15,1
	B	1,3	7,8	9,8	1,5	11,4	17,1	2,1	11,8	25,0
	C	1,0	14,0	14,0	1,6	14,8	24,0	2,5	13,3	33,1
	D	1,1	14,3	16,1	2,5	12,1	30,3	3,9	10,6	41,3
	E	1,8	12,6	22,1	3,1	12,5	39,1	4,9	10,6	51,5

Įlinkių palyginimas tarp eksperimentinių bei teorinių įlinkių reikšmių yra toliau pateiktas grafikuose. Tik yra pateikti kraštiniai rezultatai: kai apkrauname su mažiausia (4 kg) ir didžiausia (12 kg) apkrova, arčiausiai ir toliausiai atramos (taškuose Nr. 1 ir Nr. 5). Tarpiniai apkrovimo rezultatai pateikiami priedo Nr. 2 poskyryje 2.1.



5.1. Pav. Smūginio apkrovimo įlinkiai apkraunant siją su 4 kg masės svarmens apkrova, krentančia nuo 0,52 m aukščio: a) apkraunant taške Nr. 1; b) apkraunant taške Nr. 5

Paveikslėlyje 5.1 yra pavaizduojami sijos įlinkiai, smūgiuojant su 4 kg svarmens apkrova, kuri krenta nuo 0,52 m aukščio. Pastebima ryški tendencija – eksperimentinės įlinkių reikšmės geriau atitinka *Rayleigh* metodo rezultatus nei *paprastojo* metodo rezultatus. *Paprastasis* metodas, neįvertindamas sijos savojo svorio, duoda daug didesnius įlinkius, kurie labai skiriasi nuo eksperimentinių. Apkraunant arčiau atramos (taške Nr. 1) rezultatai yra labai netikslūs: santykinis skirtumas tarp eksperimentinių ir teorinių rezultatų yra  $\Delta s=33,5\%$  (pagal *Rayleigh* metodą) ir  $\Delta s=65,2\%$  (pagal *paprastąjį* metodą). Apkraunant laisvajame gale, rezultatai pasidaro tikslesni:  $\Delta s=5,1\%$  (pagal *Rayleigh*) ir  $\Delta s=44,0\%$  (pagal *paprastąjį* metodą).

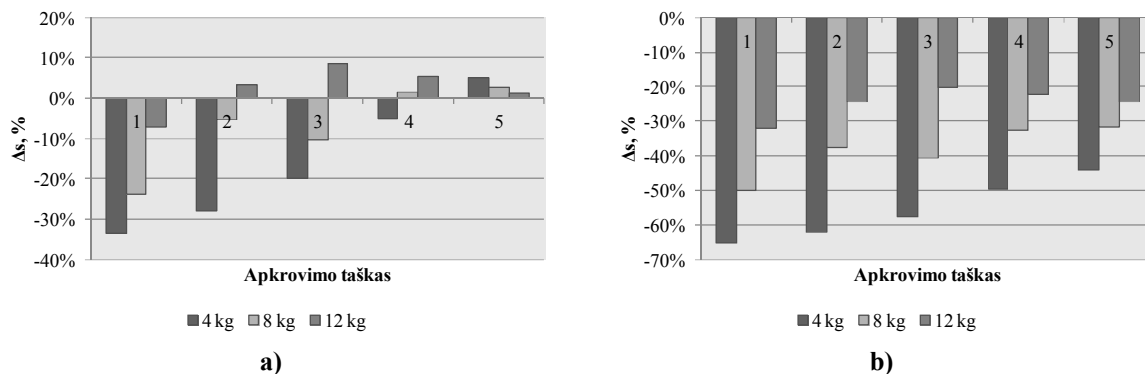


5.2. Pav. Smūginio apkrovimo įlinkiai apkraunant siją su 12 kg masės svarmens apkrova, krentančia nuo 0,52 m aukščio: a) apkraunant taške Nr. 1; b) apkraunant taške Nr. 5

Paveikslėlyje 5.2 stebimos tokios pačios tendencijos kaip 5.1 paveikslėlyje. Pastebimas ryškus *paprastojo* metodo palyginus su *Rayleigh* metodu neatitikimas su eksperimentiniais rezultatais. Rezultatai tampa tikslesni apkrovimo taškui tolstant nuo atramos. Apkraunant taške Nr.

1 santykiniis skirtumas reikšmių yra  $\Delta s=6,98\%$  (pagal *Rayleigh*) ir  $\Delta s=32,06\%$  (pagal *paprastąjį* metodą); apkraunant taške Nr.5 skirtumas sumažėja iki  $\Delta s=1,2\%$  (pagal *Rayleigh*) ir  $\Delta s=24,4\%$  (pagal *paprastąjį* metodą).

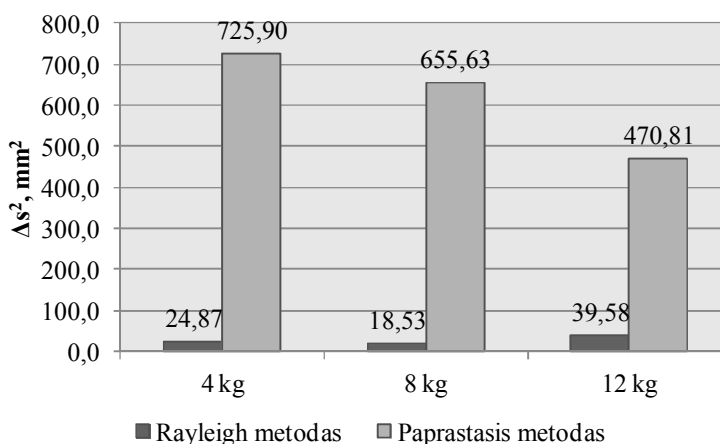
Vidurkiniai visų matavimų santykiniai skirtumai ( $\Delta s = (s_{\text{eksp}} - s_{\text{teor}}) / s_{\text{teor}} \times 100\%$ ) tarp eksperimentinių ir analizuojamų modelių reikšmių pateikti 5.3 paveikslėlyje.



**5.3. Pav.** Santykiniai nuokrypiai tarp eksperimentinių įlinkių rezultatų ir skirtingų teorinių metodų rezultatų, metant svorį nuo 0,52 m aukščio:  
a) santykiniai skirtumai su *Rayleigh* metodas; b) santykiniai skirtumai *paprastasis* metodas

Eksperimentinių rezultatų santykinis nuokrypis nuo teorinių modelių mažėja tolstant nuo atramos. Nuokrypiai nuo *Rayleigh* metodo pasidaro labai maži apkraunant siją laisvajame gale (taškuose Nr. 4 ir Nr.5), kur nesiekia net 5 %. Toks nuokrypis yra priimtinas inžinerijoje.

Iš atliktos analizės galima aiškiai matyti, kad turimai sijai *Rayleigh* metodas yra daug tikslesnis nei paprastasis metodas. Siekiant palyginti metodų tikslumą buvo taikoma mažiausių kvadratų  $\sum \Delta s^2$  analizė.

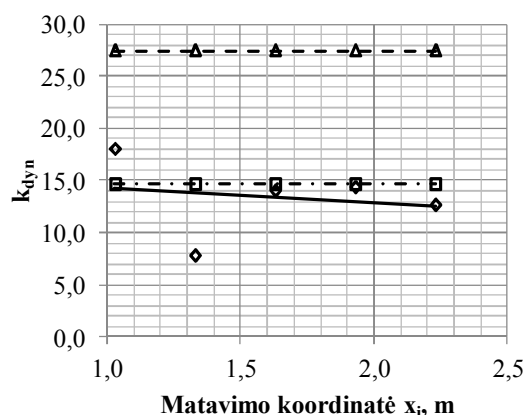
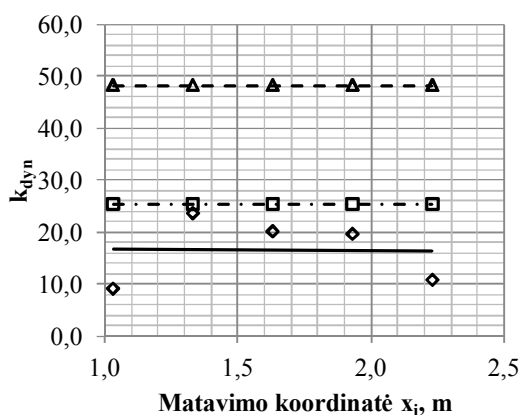


**5.4. Pav.** Skirtingų teorinių modelių  $\sum \Delta s^2$  vidurkių palyginimas, metant svorį nuo 0,52 m aukščio

Histogramoje 5.4 yra pateikiami kiekvienos apkrovos didumo (4 kg, 8 kg ir 12 kg) visų apkrovimo taškų eksperimentinių matavimų nuokrypių kvadratų  $\sum \Delta s^2$  vidurkiai. Pastebima, kad *Rayleigh* metodas yra ženkliai tikslesnis už *paprastąjį* metodą.

Mažinant svarmens kritimo aukštį (krentant nuo 0,42 m, 0,32 m ir 0,22 m), smūgiuojanti jėga, kartu su įlinkiais, mažėja, bet bendros tikslumo tendencijos yra tokios pačios kaip metant svarmeniū nuo 0,52 m aukščio: tikslumas didėja apkrovai didėjant ir tolstant nuo atramos. *Rayleigh* metodas visais atvejais yra tikslesnis už *paprastąjį*. Kaip jau buvo paminėta visų likusių metimo aukščių eksperimentinių ir teorinių įlinkių rezultatai yra pateikiami prieduose Nr. 2 – 5.

Dinaminis koeficientas  $k_{dyn}$  taip pat priklauso nuo apkrovimo sąlygų. Sijos apkrovimo  $k_{dyn}$  rezultatai apkraunant su 4 kg masės svarmeniu, kai laisvo kritimas aukštis yra 0,52m, yra pateikiami 5.5 paveikslėlyje.



- $\diamond$  Eksperimentinės reikšmės
- $\square$  Teorinės reikšmės įvertinant sijos masę
- $\triangle$  Teorinės reikšmės neįvertinant sijos masės

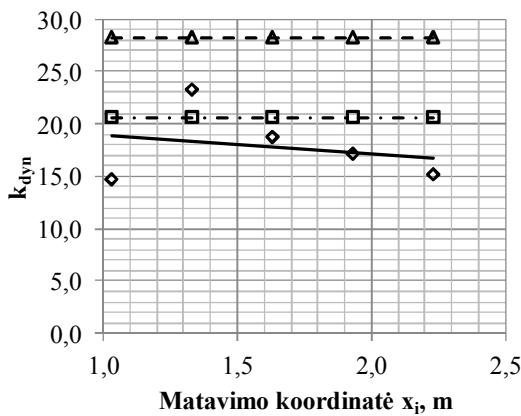
- $\diamond$  Eksperimentinės reikšmės
- $\square$  Teorinės reikšmės įvertinant sijos masę
- $\triangle$  Teorinės reikšmės neįvertinant sijos masės

a)

b)

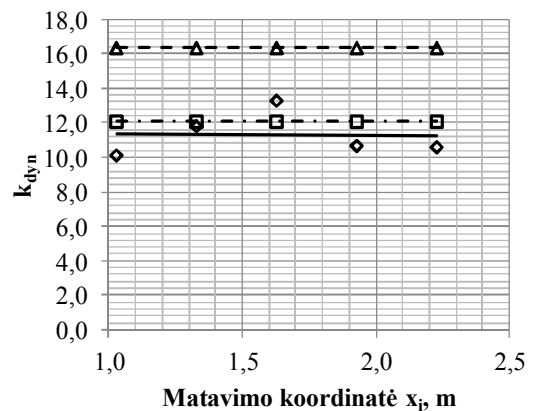
**5.5. Pav.** Dinaminio koeficiento  $k_{dyn}$  priklausomybė nuo matavimo taško koordinatės  $x_i$ , apkraunant siją 4 kg masės svarmens apkrova, krentančia iš 0,52m aukščio:  
a) apkraunant taške Nr. 1; b) apkraunant taške Nr. 5

Sijos apkrovimo  $k_{dyn}$  rezultatai esant didesnei apkrovai (12 kg) vaizduojami 5.6 paveikslėlyje.



- $\diamond$  Eksperimentinės reikšmės
- $\square$  Teorinės reikšmės įvertinant sijos masę
- $\triangle$  Teorinės reikšmės neįvertinant sijos masės

a)



- $\diamond$  Eksperimentinės reikšmės
- $\square$  Teorinės reikšmės įvertinant sijos masę
- $\triangle$  Teorinės reikšmės neįvertinant sijos masės

b)

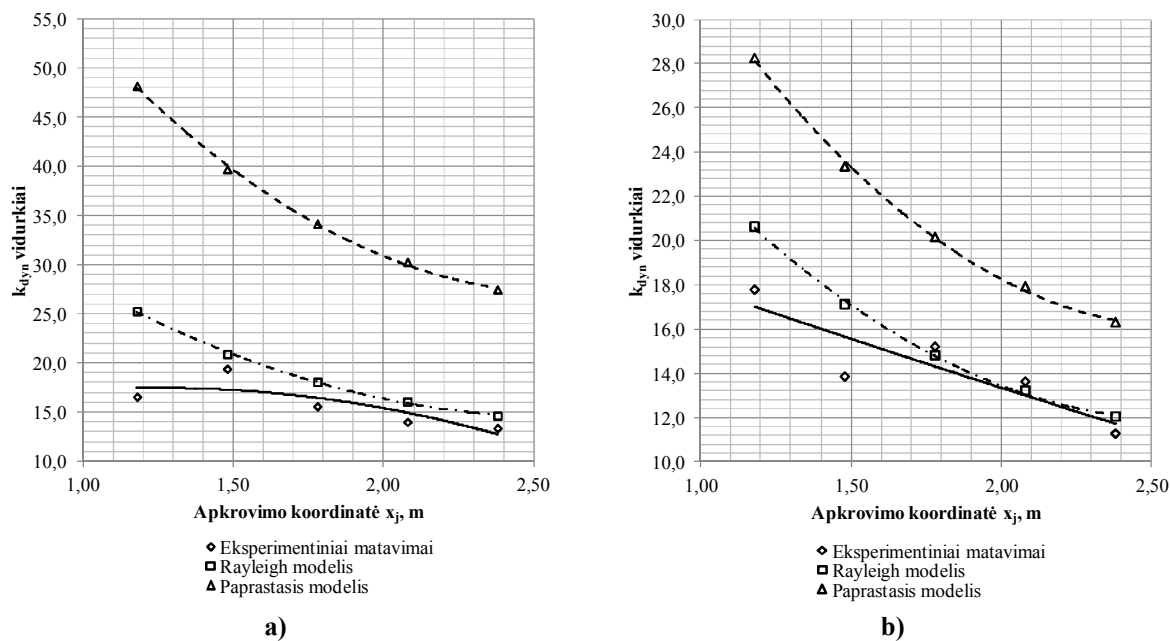
**5.6. Pav.** Dinaminio koeficiento  $k_{dyn}$  priklausomybė nuo matavimo taško koordinatės  $x_i$ , apkraunant siją 12 kg masės svarmens apkrova, krentančia iš 0,52m aukščio:  
a) apkraunant taške Nr. 1; b) apkraunant taške Nr. 5

Iš pateiktų grafikų 5.5 ir 5.6 galima ištraukti daug vertingos informacijos. Pagrindinė energijos tvermės metodų priimta prielaida yra, kad smūgio metu, sijos deformacijų kreivė yra tokios pačios formos, kaip statiskai apkrautos sijos deformacijų kreivė, bet padauginta iš  $k_{dyn}$  koeficiento. Tokiu būdu, vienu apkrovimo metu,  $k_{dyn}$  reikšmės yra tokios pačios visai sijai. Koeficientas  $k_{dyn}$  nepriklauso nuo matavimo koordinatės  $x_i$ . Ši prielaida yra patvirtinta gautais eksperimentiniais rezultatais kurie yra pateikiami grafikuose 5.5 ir 5.6. Nors yra tam tikras rezultatų išbarstymas, koeficiento  $k_{dyn}$  reikšmės išilgai sijos nekinta.

Kitas pastebėtinas dalykas yra tai, kad pagal *paprastąjį* metodą  $k_{dyn}$  rezultatai yra  $1,2 \div 2,9$  kartus didesni už eksperimentinius. Pagal *Rayleigh*  $k_{dyn}$  yra  $0,81 \div 1,55$  kartus eksperimentinių rezultatų reikšmių. Taigi *Rayleigh* metodas duoda ženkliai tikslesnius rezultatus.

Galiausiai, iš 5.5 ir 5.6 grafikų galima matyti tikslumo ryškią didėjimo tendenciją didinant apkrovą ir tolstant nuo atramos. Apkraunant tarpiniuose taškuose ir su tarpinėmis apkrovomis, gauti rezultatai yra pateikiami priedo Nr. 2 poskyryje 2.2.

Visų kritimo aukščių suvidurkintų  $k_{dyn}$  reikšmių priklausomybė nuo apkrovimo taško koordinatės vaizduojama 5.7 paveikslėlyje.



**5.7. Pav.** Dinaminio koeficiento  $k_{dyn}$  priklausomybė nuo apkrovimo taško koordinatės  $x_j$ , apkraunant sija su svarmeniu, krentančiu iš 0,52 m aukščio: a) apkraunant su 4 kg masės svarmeniu; b) apkraunant su 12 kg masės svarmeniu

Apkrovimų su 8 kg masės svarmeniu grafikas yra pateiktas priedo Nr. 2 poskyryje 2.3 ir yra kartu aptariamas su paveikslėliu 5.7. Paveikslėlyje pastebima, kad apkraunant sija laisvajame gale,  $k_{dyn}$  vidurkių reikšmės pagal eksperimentą ir pagal *Rayleigh* metodą labai gerai sutampa. Apkraunant su 12 kg svarmeniu laisvajame gale eksperimentinių reikšmių santykinis nuokrypis nuo *Rayleigh* rezultatų yra  $\Delta s=6,9\%$ ; apkraunant su 8 kg nuokrypis yra  $\Delta s=-19,1\%$ ; tuo tarpu apkraunant su 4kg santykinis nuokrypis pasiekia  $\Delta s=9,5\%$ . Galima teigti, kad nėra aiškios tikslumo priklausomybės nuo apkrovimo masės. Artėjant prie atramos, (taške Nr.1) santykinė paklaida  $\Delta s$  didėja: 52,7% su 4 kg, 54,5 % su 8 kg ir 16,1% su 12 kg. Paklaidos padidėjimą lemia eksperimentinių statinės ir dinaminės apkrovos veikiamos sijos įlinkių rezultatai, kurie arti atramos yra nelabai tikslūs, ypač apkraunant su mažesne apkrova.

Koeficiento  $k_{dyn}$  vertės pagal *paprastąjį* metodą yra labai tolimos eksperimentinėms reikšmėms. Apkraunant taške Nr. 1 eksperimentinių reikšmių nuokrypis nuo paprastojo metodo rezultatų yra 191,3% (su 4 kg), 135,2 (su 8 kg) ir 58,9% (su 12 kg). Apkraunant laisvajame gale santykinis nuokrypis mažėja: 105,6% (su 4 kg), 21,5 (su 8 kg) ir 44,7% (su 12 kg).

Apibendrinant galima pasakyti, kad  $k_{dyn}$  reikšmės yra daug tiksliau prognozuojamos įvertinant sijos savąjį svorį (pagal *Rayleigh*) negu naudojant *paprastąjį* metodą. Be to, matuojant dažų metodu yra pasiekiamas priimtinas tikslumas tiksliai matuojant sijos gale. Arti atramos paklaidos yra pernelyg didelės.

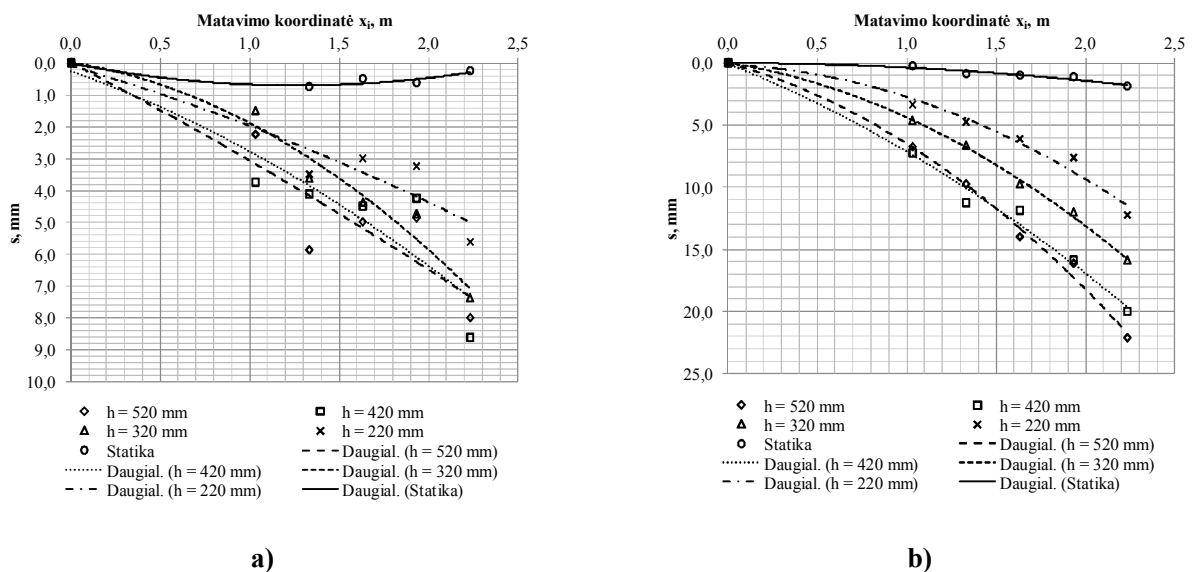


## 5.2. Priklausomybės nuo apkrovos kritimo aukščio $h$

Pagal energijos tvermės dėsnių aptartus modelius, koeficientas  $k_{dyn}$  priklauso nuo apkrovos kritimo aukščio. Kuo didesnis aukštis, tuo didesnis ir koeficientas  $k_{dyn}$ . Eksperimentiniu būdu gautos įlinkių vertės taip pat leido patvirtinti šį prognozavimą.

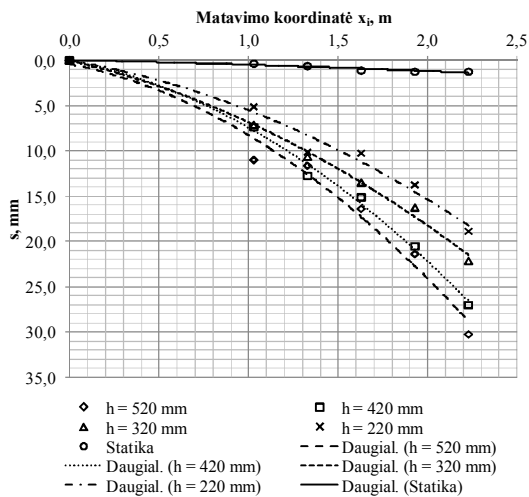
### 5.2.1. Įlinkių priklausomybė nuo apkrovos laisvo kritimo aukščio

Įlinkiai, kurie yra išmatuoti apkraunant siją taške Nr.1 ir Nr.5 su 4 kg masės svarmeniu yra parodyti 5.8 paveikslėlyje. Kiti apkrovimo atvejai yra pateikti priede Nr. 6, poskyryje 6.1.

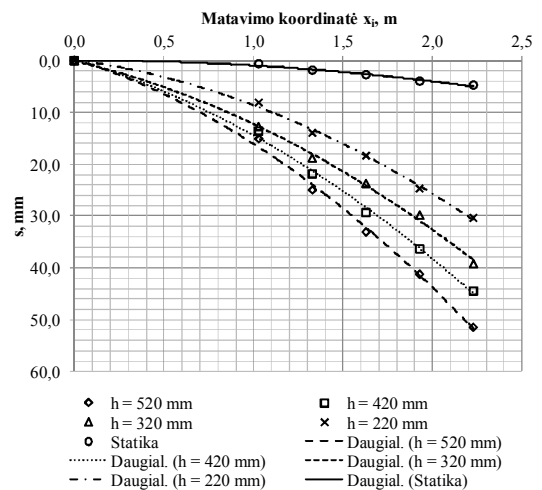


5.8. Pav. Įlinkių priklausomybė nuo matavimo taško koordinatės  $x_i$ , apkraunant siją su 4 kg masės svarmeniu, esant skirtingiems kritimo aukščiams: a) apkraunant taške Nr. 1; b) apkraunant taške Nr. 5

Įlinkiai, kurie yra išmatuoti apkraunant siją taške Nr.1 ir Nr.5 su 12 kg masės svarmeniu yra parodyti 5.9 paveikslėlyje.



a)

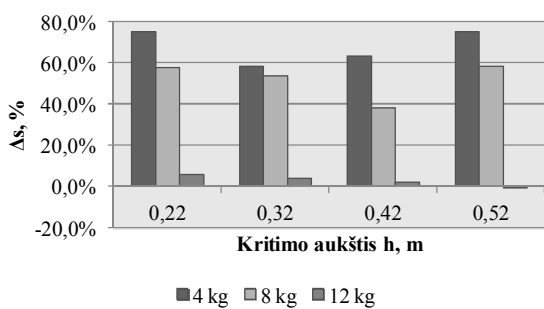


b)

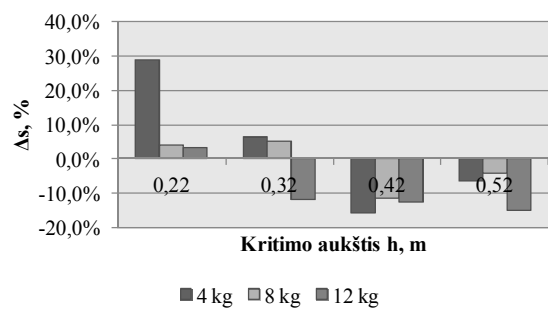
**5.9. Pav.** Įlinkių priklausomybė nuo matavimo taško koordinatės  $x_i$ , apkraunant siją su 12 kg masės svarmeniu, esant skirtingiems kritimo aukščiams: a) apkraunant taške Nr. 1; b) apkraunant taške Nr. 5

Stebint 5.8 ir 5.9 grafikus, matomos aiškios eksperimentinių rezultatų tendencijos – didinant apkrovimo svarmens masę, tolstant nuo standžios atramos ir aukštinant apkrovos paleidimo tašką, įlinkis palaipsniui didėja. Pateikti grafikai įrodo dinaminių poveikių nemenką įtaką konstrukcijų deformavimuisi. Apkraunant su 12 kg sijos laisvą galą įlinkis didėja nuo 6 (kai  $h=0,22\text{m}$ ) iki 11 kartų (kai  $h=0,52\text{m}$ ). Taigi, kaip nuo darbo pradžios yra teigiama, apkrovos dinamiškumo įtaka yra labai svarbus veiksnys konstrukcijų elgsenai.

Duomenų tikslumas, priklausomai nuo laisvo kritimo aukščio  $h$  yra pateikiamas 5.10 histogramose.



a)



b)

**5.10. Pav.** Eksperimentinių įlinkių santykinų nuokrypių nuo *Rayleigh* metodo rezultatų histogramos: a) apkraunant siją taške Nr. 1; b) apkraunant siją taške Nr. 5

Diagramose galima išvėlgti tikslumo tendencijas. Apkraunant arčiau atramos (pvz., taške Nr. 1) matomos labai didelės santykinės paklaidos naudojant 4 kg ir 8 kg masės svarmenis. Paklaidos patenka į 40÷80% intervalą. Kadangi patys dinaminiai įlinkiai yra maži, merkimo į dažus metodo sisteminė paklaida lemia dideles  $k_{dyn}$  santykinės paklaidas. Apkraunant su 12 kg masės svarmeniu

taške Nr. 1, santykinės paklaidos labai staigiai mažėja, nes įlinkių vertės yra žymiai didesnės ir matavimo priemonės paklaidos yra mažiau lemtingos.

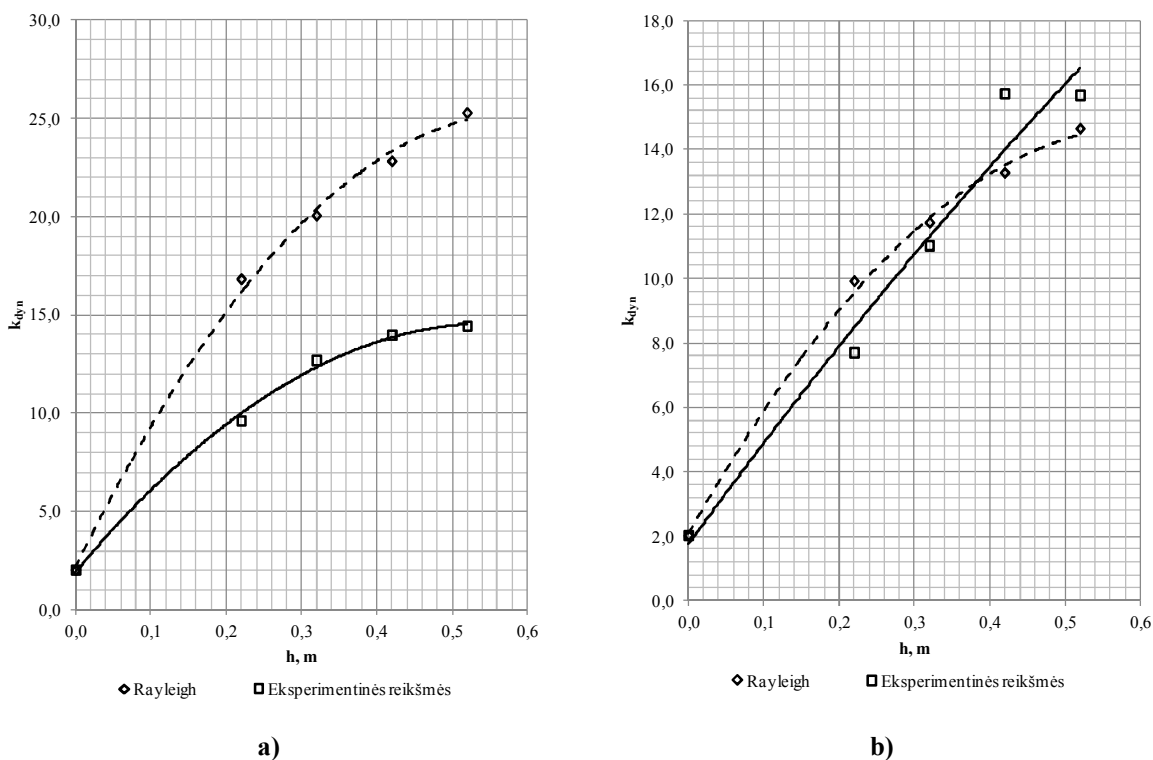
Apkraunant sijos gale, dinaminių įlinkių reikšmės pasidaro didesnės, ir turima įranga gali tiksliau jas fiksuoti. Dėl to  $k_{dyn}$  santykiniai nuokrypiai mažėja. Kuo toliau apkraunama nuo atramos, tuo  $k_{dyn}$  santykiniai nuokrypiai yra mažesni. Dešinės 5.10 grafike matoma, kad apkraunant sijos laisvajame gale, apkrovimo dydis yra nebesvarbus: tikslumas išlieka panašus.

Iš minėtų pastebėjimų galima daryti svarbią išvadą: šio eksperimento metu, pagrindinės nuokrypių tendencijos priklauso nuo dažų metodo matavimo paklaidos, ir ne nuo panaudotos teorijos geresnio ar blogesnio atitikimo. Esant mažiems įlinkiams, rezultatų nuokrypiai nuo teorijos yra dideli, nes matavimo paklaida yra tos pačios eilės kaip pats matavimas; kitą vertus, esant didesniems įlinkiams, matavimai yra daug didesni už paklaidas, ir santykiniai nuokrypiai mažėja.

### **5.2.2. Dinaminio koeficiento priklausomybė nuo apkrovos laisvo kritimo aukščio**

Pagal *Rayleigh* modelio formulę (2.40),  $k_{dyn}$  priklauso nuo apkrovos kritimo aukščio, nuo statinės apkrovos sukulto įlinkio ir nuo redukuotos sijos masės. Šiame poskyryje yra analizuojamas  $k_{dyn}$  eksperimentinių rezultatų atitikimas *Rayleigh* modeliui, priklausomai nuo apkrovos kritimo aukščio  $h$ . Kaip yra aprašyta 2.2.2 poskyryje, kai apkrova staiga yra paleidžiama nuo paties sijos paviršiaus (kritimo aukštis  $h=0$ ), skaičiuojant pagal (2.40) formulę, dinaminis koeficientas pasidaro  $k_{dyn} = 2,0$ . Kadangi tokio apkrovimo bandymai nebuvo atliekami, buvo priimta  $k_{dyn} = 2,0$  tiek eksperimentiniams tiek teoriniams rezultatams.

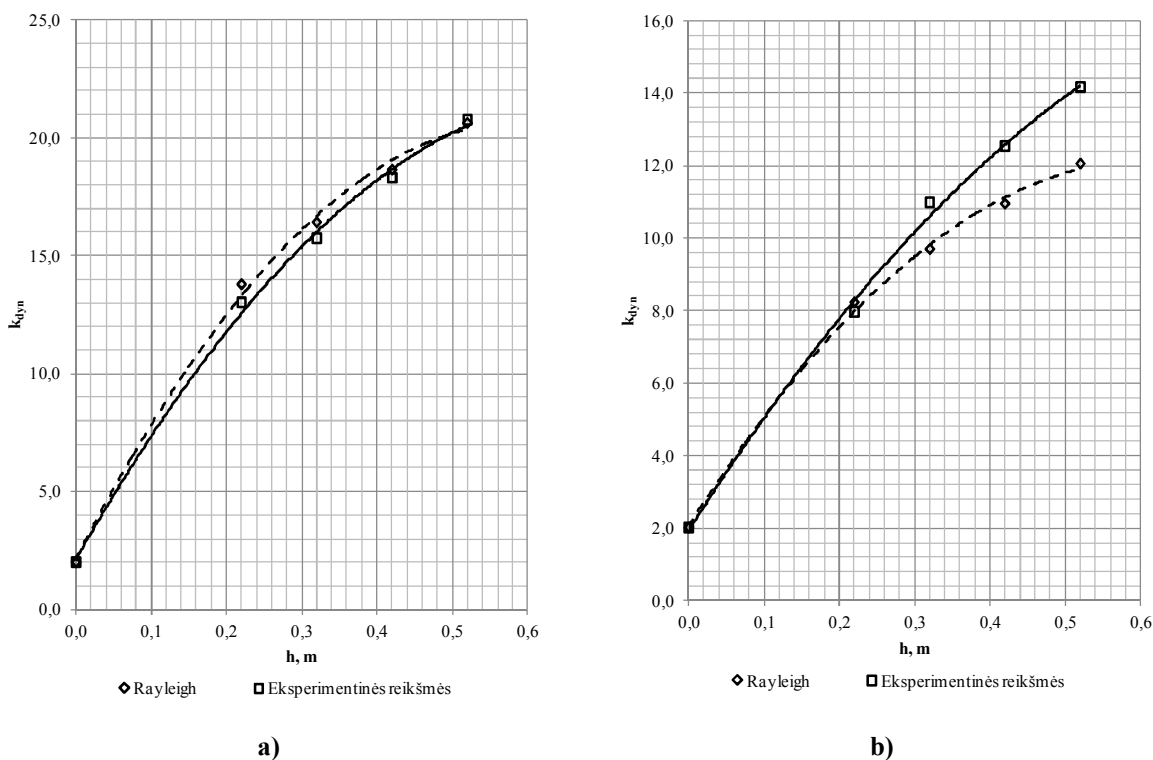
Grafike 5.11 pateikiamos  $k_{dyn}$  priklausomybės nuo kritimo aukščių, apkraunant siją su 4 kg masės svarmeniu.



**5.11. Pav.** Eksperimentiškai gautų  $k_{dyn}$  reikšmių palyginimas su *Rayleigh* modelio rezultatais, apkraunant siją su 4 kg masės svarmeniu, esant skirtingiems kritimo aukščiams: a) apkraunant taške Nr. 1; b) apkraunant taške Nr. 5

Iš 5.11 diagramos dar kartą yra patvirtinamas faktas, kad merkimo į dažus matavimo būdas yra labai netikslus apkraunant arti atramos (taške Nr.1). Kita vertus, apkraunant laisvajame gale eksperimentiniai rezultatai labai artimi *Rayleigh* teorijai.

Grafike 5.12 pateikiamos  $k_{dyn}$  priklausomybės nuo kritimo aukščių, apkraunant siją su 12 kg masės svarmeniu.



**5.12. Pav.** Eksperimentiškai gautų  $k_{dyn}$  reikšmių palyginimas su *Rayleigh* modelio rezultatais, apkraunant siją su 12 kg masės svarmeniu, esant skirtingiems kritimo aukščiams: a) apkraunant taške Nr. 1; b) apkraunant taške Nr. 5

Kitų apkrovimo atvejų  $k_{dyn}$  priklausomybės yra pateiktos priede Nr. 6 poskyryje 6.2. Pagal pateiktus 5.11 ir 5.12 grafikus, kartu su minėto priedo grafikais, matome, kad  $k_{dyn}$  eksperimentinės kreivės forma yra tokia pati, kokia buvo prognozuojama pagal teoriją. Kuo didesnė svarmens masė, tuo ir įlinkis didesnis. Taip pat galima matyti, kad didinant laisvo kritimo aukštį,  $k_{dyn}$  didėja: pradžioje nuolydis yra staigesnis; paskui nuolydis mažėja.

### 5.3. Dinaminio koeficiento priklausomybė nuo sijos ilgio

*Rayleigh* metodas skiriasi nuo *paprastojo* tuo, kad jį pritaikant yra įvertinamas nagrinėjamos sijos redukuotas savasis svoris. Norint įvertinti dinaminio koeficiento įtaką nuo redukuoto sijos svorio, buvo atliekami bandymai su skirtingo ilgio gembinėmis sijomis: 2,42 m, 2,00 m ir 1,50 m.

Sija buvo apkraunama tik viename taške laisvajame gale, su 12 kg masės svarmeniu, paleidžiant jį nuo 0,52 m aukščio. Pirmo ilgo atveju (esant sijos ilgiui  $L=2,42$  m) rezultatai jau yra pateikti ankstesniuose poskyriuose. Sijų skerspūvis ir medžiaga išlieka visais atvejais tokie patys.

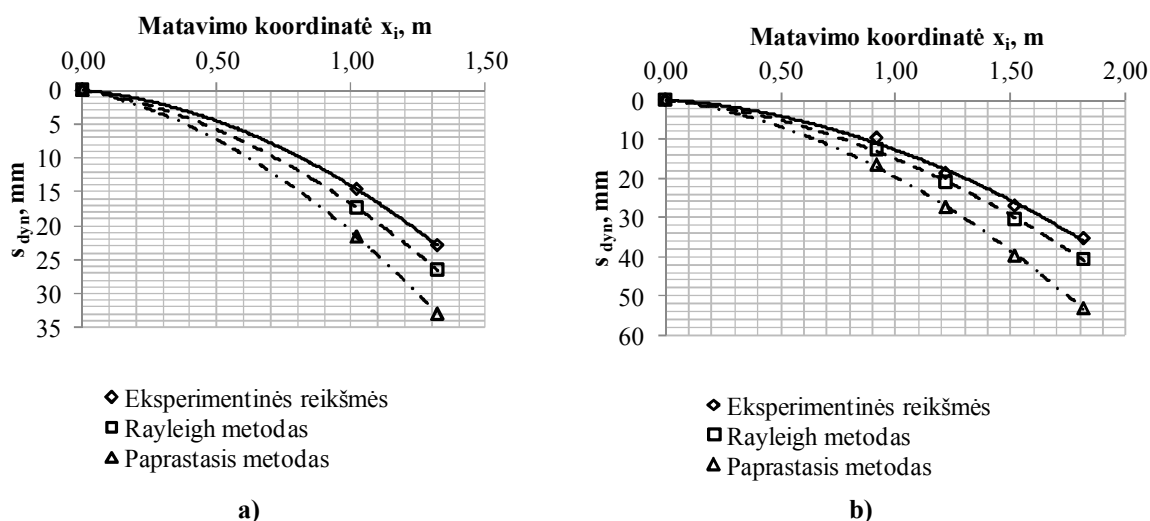
### 5.3.1. Sijos įlinkiai esant $L=1,5\text{m}$ ir $2,0\text{m}$

Statinės bei dinaminės apkrovos veikiamos sijos įlinkių matavimai (suvidurkinti ir apdoroti pagal formulę (3.1)), ir iš jų išskaičiuojamos  $k_{dyn}$  koeficiento vertės yra pateikiamos lentelėse 5.4 ir 5.5.

5.6 Lentelė. Eksperimento rezultatai, esant  $L= 1,50\text{m}$  ir  $2,00\text{m}$  ilgio sijoms

Matavimo koordinatė $x_i$ , m	$s_{st}$ , mm	$s_{st}$ , mm	$k_{dyn}$
<i>Sijos ilgis <math>L= 1,50\text{m}</math></i>			
1,02	1,1	14,6	13,00
1,32	1,6	22,9	14,08
<i>Sijos ilgis <math>L= 2,00\text{m}</math></i>			
0,92	0,9	9,8	11,14
1,22	1,4	18,8	13,64
1,52	1,8	27,1	15,50
1,82	3,1	35,4	11,32

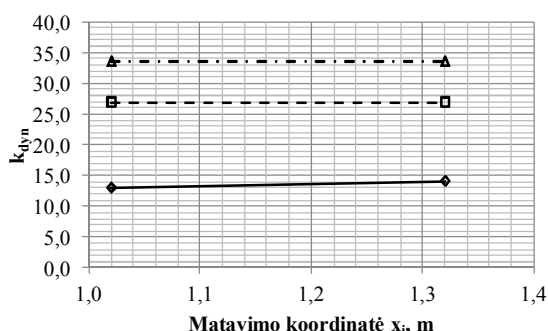
Įlinkių matavimai palyginimas su teoriniais rezultatais pateikiamas 5.13 diagramose.



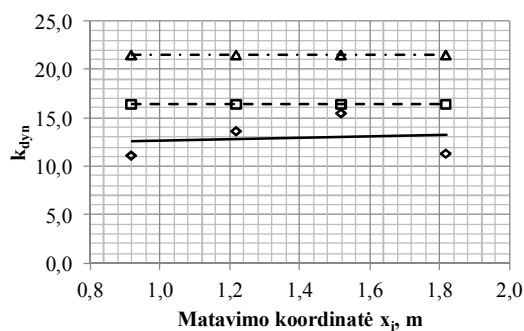
5.13. Pav. Dinaminių įlinkių eksperimentinių ir teorinių rezultatų palyginimas: a) esant sijos ilgiui  $L=1,50\text{ m}$ ; b) esant sijos ilgiui  $L=2,00\text{ m}$

Tendencijos panašios kaip anksčiau nagrinėtų dinaminio apkrovimo situacijų: *Rayleigh* metodu daug tiksliau prognozuojama sijos elgsena nei *paprastuoju* metodu.

Teorinės ir eksperimentinės dinaminio koeficiento reikšmės visuose sijos taškuose pateikiamos 5.14 diagramoje.



a)



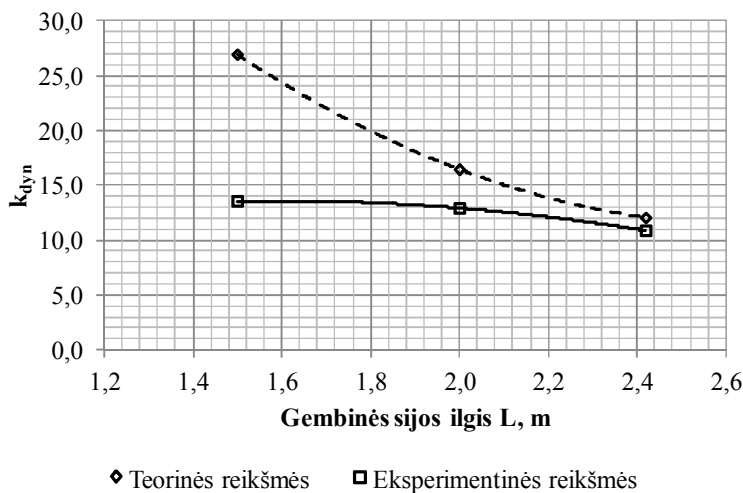
b)

5.12. Pav. Eksperimentiškai gautos  $k_{dyn}$  reikšmių palyginimas su *Rayleigh* ir *paprastojo* modelių rezultatais: a) esant sijos ilgiui  $L=1,50$  m; b) esant sijos ilgiui  $L=2,00$  m

Esant ilgesnei sijai dinaminio koeficiento  $k_{dyn}$  reikšmės mažėja. Tai galima paaiškinti tuo, kad  $k_{dyn} \propto h/s_{st}$ . Taigi, kuo didesni statinės apkrovos veikiamos sijos įlinkiai, tuo mažesnės  $k_{dyn}$  reikšmės.

### 5.3.2. Rezultatų palyginimas tarp skirtingų sijų ilgių

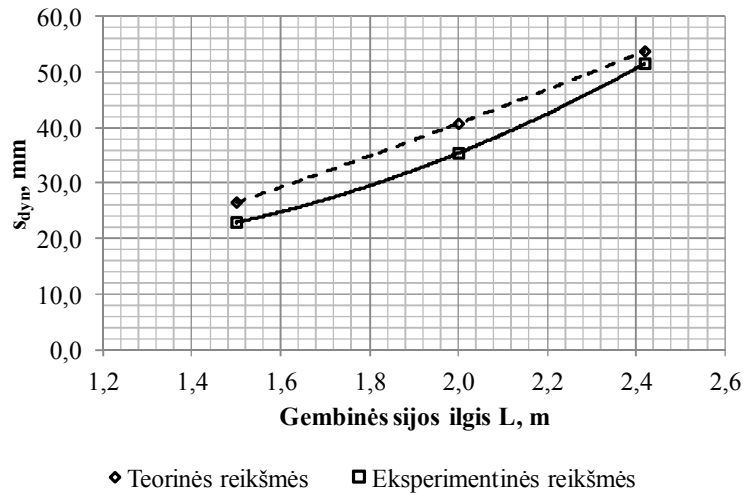
Dinaminio koeficiento priklausomybė nuo sijos ilgio yra pateikiama 5.13 grafike.



5.13. Pav. Skirtingo ilgio sijų eksperimentinių  $k_{dyn}$  reikšmių palyginimas su *Rayleigh* modelio rezultatais, apkraunant sijos laisvajame gale su 12 kg masės svarmeniu, krentančiu nuo 0,52 m aukščio

Pagal *Rayleigh* modelį, sijai ilgėjant, dinaminis koeficientas turėtų nežymiai sumažėti. Tačiau, eksperimentinių rezultatų kreivės nuolydis yra daug statesnis už *Rayleigh*. Esant trumpesnei sijai (ypač kai  $L=1,5$ m),  $k_{dyn}$  reikšmė labai nukrypsta nuo *Rayleigh* prognozės. Paskui, ilgėjant sijai, teorinės ir eksperimentinės reikšmės suvienodėja.

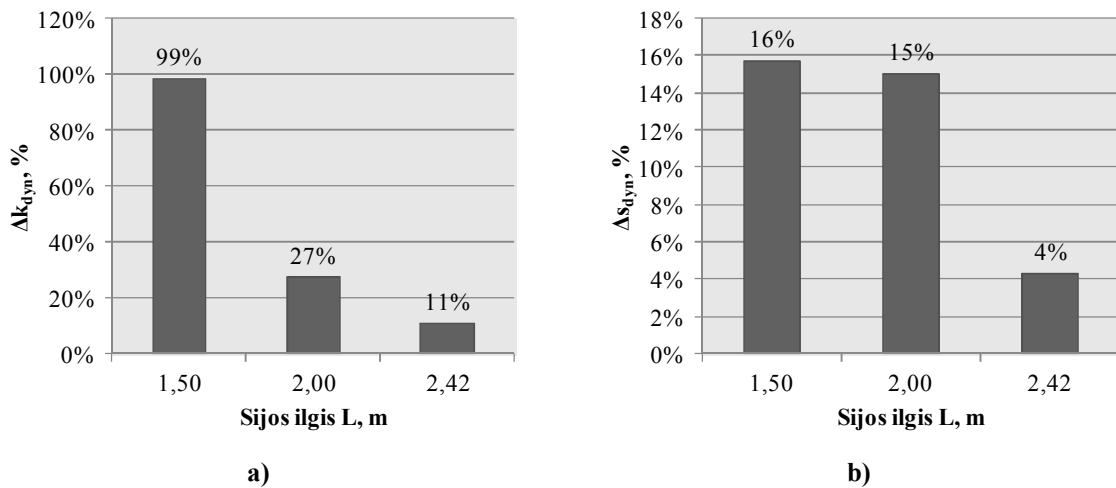
Dinaminių įlinkių priklausomybė nuo sijos ilgio yra pateikiama 5.14 grafike.



5.14. Pav. Skirtingo ilgio sijų eksperimentinių  $s_{dyn}$  reikšmių palyginimas su *Rayleigh* modelio rezultatais, apkraunant sijos laisvajame gale su 12 kg masės svarmeniu, krentančiu nuo 0,52 m aukščio

Pagal apibrėžimą dinaminės apkrovos veikiamos sijos įlinkis priklauso nuo statinės apkrovos veikiamos sijos įlinkio ir nuo dinaminio koeficiento ( $s_{dyn} = k_{dyn} \cdot s_{st}$ ). Didėjant sijos ilgiui,  $s_{st}$  didėja, o  $k_{dyn}$  mažėja. Tačiau,  $s_{st}$  didėjimo nuolydis yra daug staigesnis už  $k_{dyn}$  sumažėjimą. Tai lemia, kad sumoje, dinaminis įlinkis didėja.

Eksperimentinių įlinkių bei dinaminio koeficiento reikšmių santykiniai nuokrypiai ( $\Delta k_{dyn}$  ir  $\Delta s_{dyn}$ ) nuo *Rayleigh* reikšmių yra pavaizduoti 5.14 diagramoje.



5.15. Pav. Santykinių nuokrypių diagramos:

a) dinaminio koeficiento nuokrypių  $\Delta k_{dyn}$  diagrama; b) dinaminėjų įlinkių nuokrypių  $\Delta s_{dyn}$  diagrama

Diagramose pastebima, kad  $\Delta k_{dyn}$  nuokrypiai yra daug didesni už  $\Delta s_{dyn}$ . Tai atsitinka todėl, kad eksperimentiškai gautos  $k_{dyn}$  reikšmės yra netiesiogiai išmatuotos, bet apskaičiuotos *a posteriori* iš  $s_{st}$  bei  $s_{dyn}$  reikšmių, pagal dinaminio koeficiento sąvoką ( $k_{dyn} = s_{dyn} / s_{st}$ ). Dėl to,



išmatuotų  $s_{st}$  bei  $s_{dyn}$  įlinkių nuokrypiai susideda, o tai lemia didelį  $\Delta k_{dyn}$  nuokrypį. Kita vertus, nuokrypiai  $\Delta s_{dyn}$  yra daug mažesni, nes dinaminiai įlinkiai yra tiesiogiai išmatuotas dydis.

Kaip 2.2.3 skyriuje yra paminėta, *Timoshenko* [17] paaiškina, kad paprastas metodas gaunami tikslūs rezultatai kai sijos savasis svoris  $W_1$  yra labai mažas palyginus su smūgiuojančio kūno savuoju svoriu  $W$  ( $W_1 \ll W$ ). Esant didesniai sijos savasis svoris, jis turi būti įvertinamas naudojant *Rayleigh* metodą. Kai sijos svoris yra daug didesnis už smūgiuojančio kūno svorį, *Rayleigh* metodas tampa netikslus, ir reikia įvertinti smūgio vietines deformacijas pagal kitus metodus (pvz., pagal *Hertz* [22] pasiūlytą modelį). Tačiau, *Rayleigh* modelio viršutinė pritaikymo riba yra neapibrėžta.

Inžinerinėje analizėje, eksperimentinis matavimas yra laikomas tikslu, kai jo paklaida yra nedidesnė už 5 %. Pagal 5.15 dešinės diagramą galima matyti, kad ta sąlyga yra tenkinama esant sijos ilgiui 2,42 m ( $\Delta s_{dyn}=4\%$ ). Esant trumpesnėms sijoms, įlinkių santykinis nuokrypis  $\Delta s_{dyn}$  siekia 15 ir 16%. Tokie rezultatai yra nepriimtini.

**5.7 Lentelė.** Skirtingo ilgio sijų  $W_1/W$  santykiai ir jų santykiniai nuokrypiai

Sijos ilgis, m	Sijos savasis svoris $W_1$ , kN	Svarmens savasis svoris $W$ , kN	$W_1/W$	$\Delta s_{dyn}$ , %
1,50	0,30	0,12	2,50	16
2,00	0,39		3,25	15
2,42	0,47		3,92	4

Iš pateiktos lentelės galima daryti išvadą, kad *Rayleigh* metodas gali būti pritaikomas kai savųjų svorių santykis  $W_1/W > 3,9$ .

## 5.4. Paklaidų statistinė analizė

Smūginių bandymų metu buvo pastebėta, kad eksperimentiniai nuokrypiai  $\Delta s_{dyn}$  (mm) nuo *Rayleigh* teorijos rezultatų yra atsiktiniai dydžiai. Dėl to, siekiant išsiaiškinti dinaminių matavimo paklaidų dydį ir pobūdį buvo atliekama statistinė analizė pagal V. Pekarsko [41] nurodymus.

### 5.4.1. Pagrindiniai statistiniai dydžiai

Sija buvo apkraunama penkiuose taškuose išilgai sijos  $j$  (1, 2, 3, 4, 5). Kiekvieno apkrovimo metu buvo atliekami matavimai penkiuose sijos taškuose išilgai sijos  $i$  (A, B, C, D, E). Šių taškų koordinatės nuo  $x_i$  ir  $x_j$  yra pateikiamos 4.1 lentelėje. Apkrovos didumas buvo 4 kg, 8 kg ir 12 kg. Taigi iš viso imties duomenų skaičius –  $n=300$ .

5.7 Lentelė. Santykinių nuokrypių  $\Delta s_{dyn}$  (mm) imties duomenys

<i>j</i>	<i>i</i>	h=0,52 m			h=0,42 m			h=0,32 m			h=0,22 m		
		4 kg	8 kg	12 kg	4 kg	8 kg	12 kg	4 kg	8 kg	12 kg	4 kg	8 kg	12 kg
1	A	-1,85	-1,20	0,96	0,05	-1,25	-1,70	-1,75	-1,07	-0,87	-2,73	-1,89	-1,59
	B	-0,15	-3,64	-3,13	-1,31	1,02	-0,59	-1,15	-1,68	-1,12	-0,51	-1,81	0,26
	C	-2,95	-3,84	-3,11	-2,68	-2,97	-2,49	-1,93	-2,92	-2,00	-2,29	-1,86	-2,78
	D	-5,01	-5,17	-2,84	-4,67	-3,71	-1,39	-3,09	-3,79	-3,01	-3,32	-4,03	-2,44
	E	-3,81	-2,62	1,31	-2,04	-2,33	0,84	-1,99	-2,65	-0,90	-2,23	-2,58	-0,47
2	A	-1,61	-1,50	0,44	-2,91	-0,08	1,38	-1,16	0,30	-0,28	-0,58	-0,78	-1,73
	B	-1,38	-1,04	-0,21	-0,21	1,28	0,80	-1,32	-0,87	0,02	-1,81	-2,16	-2,32
	C	-3,39	-0,53	-0,36	-2,22	-1,53	1,86	-1,94	-1,32	-0,52	-1,98	-1,79	-2,84
	D	-3,90	-0,65	1,35	-2,12	-1,47	2,40	-3,31	-1,77	-0,69	-2,78	-3,93	-2,61
	E	-2,53	1,36	3,68	-1,01	1,34	4,45	-1,68	0,90	2,02	-2,21	-2,19	-2,00
3	A	-1,15	-3,64	0,37	-0,43	-1,16	0,29	-0,63	-1,45	-0,15	-3,38	-0,82	-1,87
	B	-1,55	-1,11	0,30	-2,06	0,97	0,73	-1,35	-1,79	0,76	-2,11	-2,05	-3,23
	C	-1,72	-0,93	1,57	-0,06	-0,47	0,95	-1,27	-0,90	0,65	-2,03	-2,97	-4,04
	D	-4,10	-0,17	2,48	-1,27	-0,18	<b>8,21</b>	-2,14	-2,00	-0,15	-2,76	-3,38	-3,88
	E	-1,99	0,34	<b>10,64</b>	-1,23	1,49	2,97	-1,77	-0,87	0,80	-1,61	-1,79	-2,98
4	A	-0,04	-0,96	0,91	-0,90	0,58	0,15	-1,32	0,10	-0,83	-3,65	-0,32	-1,82
	B	-0,88	2,12	1,66	-0,32	0,80	1,74	-1,29	0,04	-0,32	-2,23	-1,33	-1,00
	C	-0,37	0,12	0,81	-0,61	0,26	1,31	-1,46	0,28	-0,72	-2,71	-0,94	-3,22
	D	-1,72	0,18	1,25	-1,23	-0,43	0,98	-2,31	0,43	-1,09	-3,34	-2,96	-2,59
	E	-0,03	0,60	3,24	0,44	0,51	1,09	-2,10	4,21	0,00	-2,79	-2,09	-3,72
5	A	0,97	1,00	0,00	2,02	3,09	0,67	0,00	0,05	1,28	-0,53	0,45	-1,61
	B	0,59	0,68	2,38	2,95	1,83	1,34	-0,71	-0,32	0,69	-1,45	-0,93	-1,44
	C	0,95	0,58	0,91	0,05	1,00	0,12	-0,69	-2,42	-2,16	-2,70	-1,42	-3,62
	D	-1,17	-0,80	-1,46	0,20	1,09	-2,40	-1,84	-2,41	-4,47	-4,08	-0,73	-4,41
	E	0,36	0,06	-2,23	0,28	-1,19	-4,29	-1,54	-2,59	-3,96	-2,47	-4,18	<b>-6,31</b>

Lentelėje buvo pašalinti tris matavimų rezultatai, kurie žymiai nukrypsta nuo vidurkio. Šitie rezultatai yra labai netikėtini, ir gali iškreipti statistinę analizę. Dėl to, jie yra neįtraukiami į skaičiavimus. Tuomet, imties duomenų skaičius sumažėja –  $n=297$ .

Visų pirma buvo apskaičiuojami pagrindiniai statistiniai parametrai:

1. Vidurkis:

$$\bar{\Delta s} = \frac{1}{n} \cdot \sum \Delta s = -1,03 \text{ mm} \quad (5.1)$$

2. Dispersija:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\Delta s - \bar{\Delta s})^2}{n-1} = 3,03 \quad (5.2)$$

3. Standartinis nuokrypis:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1,74 \quad (5.3)$$

4. Variacijos koeficientas:

$$\bar{v} = \frac{\bar{S}}{\Delta s} = \frac{1,96}{-0,98} = -1,69 \quad (5.4)$$

5. Asimetrijos koeficientas:

$$A_s = \frac{1}{n \cdot \bar{S}} \cdot \sum (\bar{\Delta s}_{i,j} - \bar{\Delta s})^3 = 0,25 \quad (5.5)$$

6. Maksimali ir minimali reikšmė:

$$\Delta s_{max} = 4,45 \text{ mm}$$

$$\Delta s_{min} = -5,17 \text{ mm}$$

7. Imties plotis:

$$IP = \Delta s_{max} - \Delta s_{min} = 4,45 - (-5,17) = 9,61 \text{ mm} \quad (5.6)$$

### 5.4.2. Normaliojo skirstinio hipotezės tikrinimas

Iškeliama neparametrinė hipotezė, kad turimi duomenys pasiskirto pagal normalųjį skirtinį. Visų gautų duomenų diapazoną išskaidysime į intervalus. Intervalų skaičių rekomenduojama pasirinkti lygu reikšmei  $k$ , pagal formulę:

$$k = 1 + 3,22 \cdot \lg(n) = 19,9 \approx 20 \quad (5.7)$$

Kiekvieno intervalo ilgis  $h$  skaičiuojamas pagal formulę:

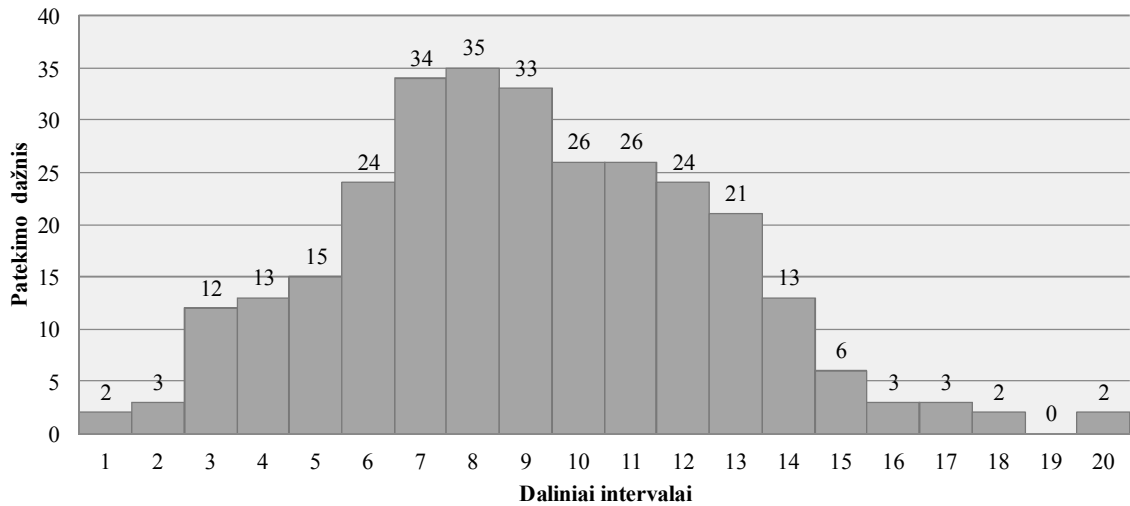
$$h = (\Delta s_{max} - \Delta s_{min}) / k = (4,45 + 5,17) / 20 = 0,5 \text{ mm} \quad (5.8)$$

Kiekvieno intervalo ribos yra  $(a_{i-1}, a_i]$ . Intervalo ribos yra parodytos 5.8 lentelėje:

**5.8 Lentelė.** Nuokrypių  $\Delta s_{dyn}$  (mm) imties daliniai intervalai

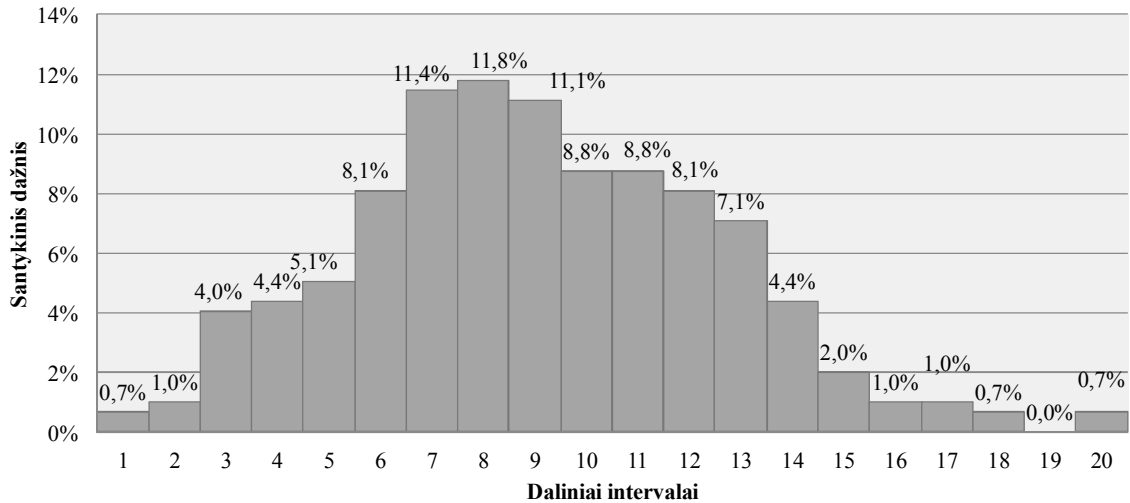
Intervalo Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Ribos	-5,3	-4,8	-4,3	-3,8	-3,3	-2,8	-2,3	-1,8	-1,3	-0,8	
Intervalo Nr.	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ribos	-0,3	0,2	0,7	1,2	1,7	2,2	2,7	3,2	3,7	4,2	4,7

Duomenų, patekusių į vieną intervalą, skaičius vadinamas patekimo į intervalus dažniu  $m_i$ . ( $i$  indeksu žymimas intervalo numeris). Toliau pateikiamas duomenų patekimo į intervalus dažnio skirstinys.



5.16. Pav. Patekimo į intervalus dažnių histograma

Santykinių patekimo dažnių  $W_i$  skirstinys taip pat yra pateikiamas.



5.17. Pav. Patekimo į intervalus santykinių dažnių histograma

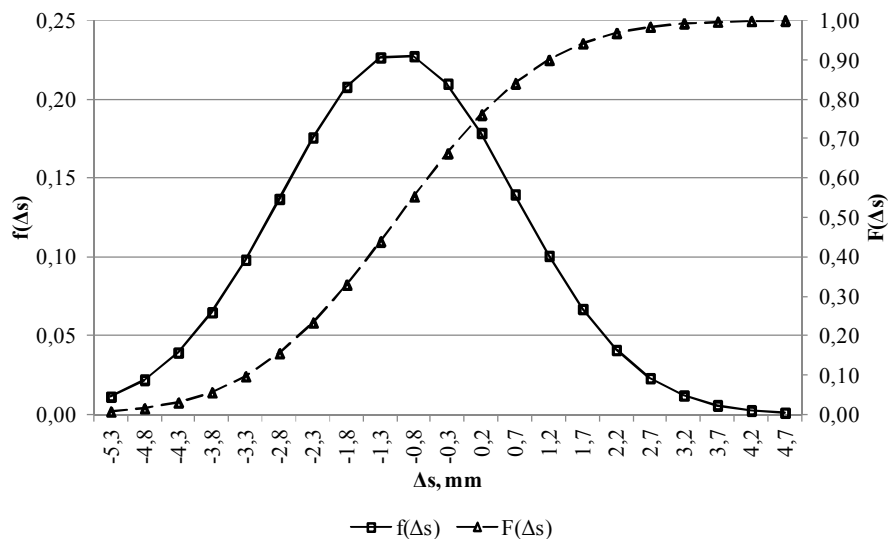
Diagrama primena normalųjį skirstinį. Normaliojo skirstinio duomenų tankio funkcija:

$$f(\Delta s) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(\Delta s - \bar{\Delta s})^2}{2 \cdot \sigma^2}} \quad (5.9)$$

Kaip matoma, normalusis skirstinys priklauso nuo rezultatų vidurkio  $\bar{\Delta s}$  ir nuo standartinio nuokrypio  $\sigma$ . Norėdami apskaičiuoti tikimybę, kad atsitiktinis dydis būtų mažesnis už tam tikrą vertę  $\Delta s$ , reikia integruoti normaliojo skirstinio funkciją:

$$F(\Delta s) = \int_{-\infty}^{\Delta s} f(\Delta s) \cdot d(\Delta s) \quad (5.10)$$

Funkcija  $F(\Delta s)$  yra vadinama skirstinio tikimybių pasiskirstymo funkcija. Funkcijos  $f(\Delta s)$  ir  $F(\Delta s)$  yra pavaizduotos grafiškai:



5.18. Pav. Normaliojo skirstinio funkcija  $f(\Delta s)$  ir tikimybių pasiskirstymo funkcija  $F(\Delta s)$

Norint patikrinti ar tam tikras skirstinys atitinka tikrus duomenis, naudojami suderinamumo kriterijai. Populiariausias iš jų yra Pirsono kriterijus  $\chi^2$ .

Kaip aiškina Pekarskas [41], eksperimentiniai matavimai niekada nesutaps idealiai su tam tikro skirstinio rezultatais. To pasakoje, teoriniai intervalų dažniai  $m_i$  nesutampa su teoriniais patekimo dažniais  $m_i'$ . Teorinis patekimo į intervalą dažnis skaičiuojamas pagal formulę:

$$m_i' = n \cdot p_i \quad (5.11)$$

čia:  $n$  – imties duomenų skaičius;

$p_i$  – tikimybė, kad dydis  $\Delta s_{ij}$  pateks į tam tikrą intervalą. Ši vertė yra skaičiuojama pagal  $F(\Delta s)$  formulę:

$$p_i = F(\Delta s)_i - F(\Delta s)_{i-1} \quad (5.12)$$

5.9 Lentelė. Patekimo į intervalą tikimybė  $p_i$

Intervalo Nr., $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_i$	0,008	0,015	0,026	0,040	0,059	0,078	0,096	0,109	0,114	0,110
Intervalo Nr., $i$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$p_i$	0,098	0,080	0,060	0,042	0,027	0,016	0,008	0,004	0,002	0,001

Pirsonas pasiūlė patekimų dažnių nuokrypį įvertinti statistika:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'} = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \quad (5.13)$$

Analizuojamų duomenų atveju rezultatas gaunamas  $\chi^2 = 21,7$ .

Jeigu hipotezė, kad duomenys pasiskirto pagal normalųjį skirstinį yra teisinga, tai esant pakankamai dideliame duomenų skaičiui  $n$ , atsitiktinis dydis paklūsta  $\chi^2$  skirstiniui su  $k-3$  laisvės laipsnių. Nagrinėjamu atveju:  $20 - 3 = 17$  laisvės laipsnių.

Parengamas reikšmingumo lygmuo  $\alpha=0,2$ . Tuomet, skirstinio  $\chi^2$  su 17 laisvės laipsnių kvantilis skaičiuojamas:

$$\chi^2_{1-\alpha; k-3} = \chi^2_{0,98; 17} = 31,0 \quad (5.14)$$

Sąlyga yra tikrinama:

$$\chi^2 < \chi^2_{0,98; 17} \rightarrow 21,7 < 31,0 \quad (5.15)$$

Kadangi sąlyga yra tenkinama, hipotezę apie normalųjį skirstinį atmesti nėra pagrindo. Priimama, kad dinaminio apkrovimo matavimų nuokrypiai nuo *Rayleigh* metodo rezultatų pasiskirsto pagal normalųjį skirstinį.

### 5.4.3. Paklaidų įvertinimas pritaikant $2\cdot\sigma$ taisyklę

Esant normaliajam atsitiktinio dydžio pasiskirstymui, inžinerinėje praktikoje taikoma  $2\cdot\sigma$  taisyklė. Su 95% garantija galima teigti, kad atsitiktinis įvykis pateks į intervalą reikšmių nutolusių nuo vidurkio dydžiu  $2\cdot\sigma$ :  $(\bar{\Delta s} - 2\cdot\sigma; \bar{\Delta s} + 2\cdot\sigma)$ . Reikšmių nuokrypiai, didesni už  $2\cdot\sigma$  yra mažai tikėtini.

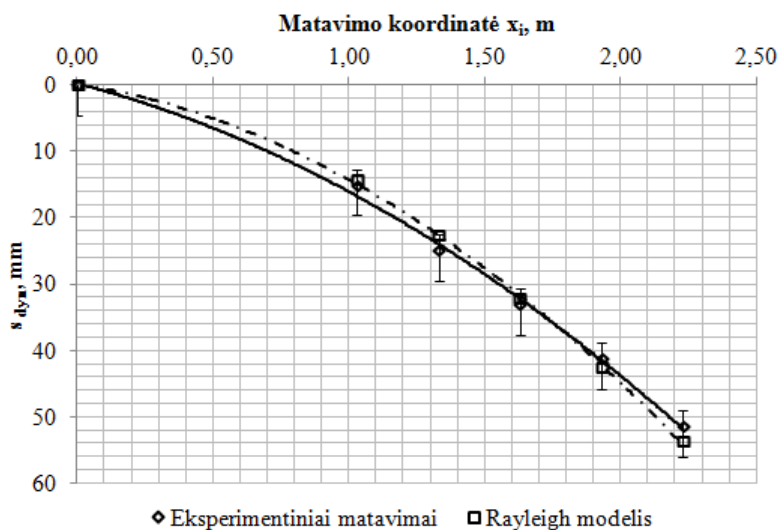
Nagrinėjama atveju:

$$\bar{\Delta s} - 2\cdot\sigma = -1,03 - 2\cdot 1,74 = -4,51 \text{ mm} \quad (5.16)$$

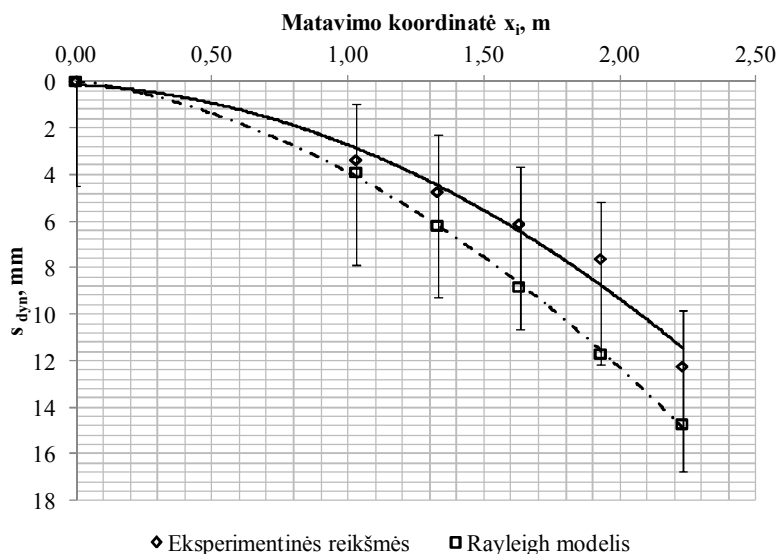
$$\bar{\Delta s} + 2\cdot\sigma = -1,03 + 2\cdot 1,74 = 2,45 \text{ mm} \quad (5.17)$$

Taigi su 95% tikimybe galima teigti, kad įlinkių nuokrypiai  $\Delta s$  patenka į intervalą  $[-4,51 \text{ mm}; 2,45 \text{ mm}]$ .

Šis paklaidų įvertinimo tinkamumas gerai pastebimas įlinkių grafiku pavyzdžiuose. Pateikiami du pavyzdiniai grafikai:



**5.19. Pav.** Paklaidų juostos pagal  $2\cdot\sigma$  taisykle, kai sija yra apkraunama laisvajame gale (taške Nr. 5) su 12 kg masės svarmeniu, krentančiu nuo 0,52 m aukščio



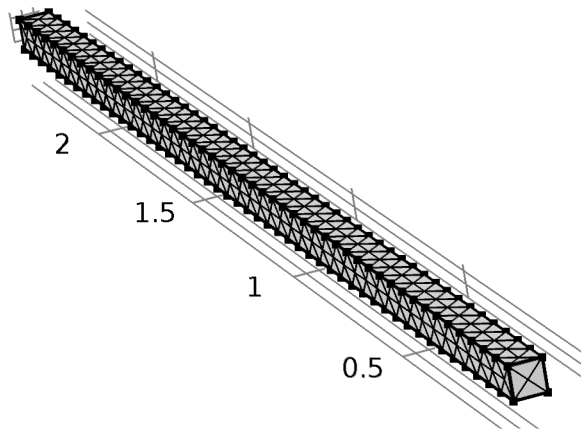
**5.19. Pav.** Paklaidų juostos pagal  $2\cdot\sigma$  taisykle, kai sija yra apkraunama laisvajame gale (taške Nr. 5) su 4 kg masės svarmeniu, krentančiu nuo 0,22 m aukščio

Pavyzdžiuose (grafikai 5.18 ir 5.19) galima stebėti, kad statistiniu pobūdžiu nustatytos paklaidos iš tiesų aprašo faktinius nuokrypius.

## 5.5. Smūgio jėgos veikimo laiko įvertinimas

Prognozuojant smūginius įlinkius, energetinio metodo pritaikymas yra labai naudingas tuo, kad jėgos veikimo laikas yra nereikalaujamas. Tačiau, yra kiti metodai, kaip *d'Alembert* principas (aprašytas 2.2.1 skyriuje), kuriais dinaminiai poveikiai yra prognozuojami įvertinant jėgos veikimo laiką. Smūgio metu, jėgos veikimas yra labai staigus, ir dėl to sunkiai matuojamas. Yra reikalinga labai tiksli aparatūra, kaip greitaeigės kameros, kurios fiksuotų jėgos veikimo trukmę. Atlikto eksperimento eigoje, tokios aparatūros nebuvo. Tačiau, turint eksperimentinius dinامينius įlinkius, pagal *d'Alembert* principą, galima *a posteriori* nustatyti jėgos veikimo laiką.

Tam tikslui buvo naudojama baigtinių elementų programa, kurios pagalba buvo sumodeliuojama 2,42 m ilgio gembinė sija.



5.20. Pav. Geminės sijos modelis naudojant baigtinių elementų programa

Geminė sija buvo apkraunama laisvajame gale, 12 kg nuo 0,52 m aukščio. Pagal mechaninės energijos tvermės dėsnį, kinetinės energijos pokytis turi būti lygus potencinei energijai:

$$\frac{m \cdot v_B}{2} - \frac{m \cdot v_0}{2} = m \cdot g \cdot h \quad (5.18)$$

- čia:  $m=12$  kg – svarmens masė;  
 $g=9,81$  m/s<sup>2</sup> – laisvo kritimo pagreitis;  
 $h=0,52$  m – kritimo aukštis;  
 $v_0=0$  – svarmens pradinis greitis;  
 $v$  – svarmens greitis smūgio metu.

Kadangi pradinis greitis yra lygus nuliui, galima išreikšti  $v$  pagal formulę:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,52} = 3,19 \text{ m/s} \quad (5.19)$$

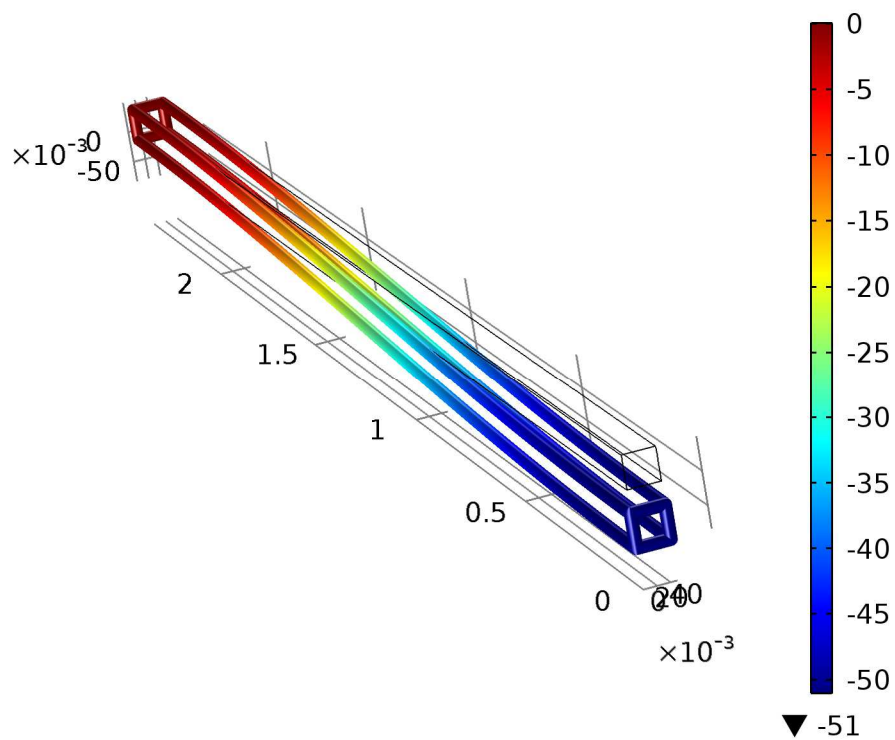
Smūgio jėgos impulsas:

$$I = \int_0^t P dt = m \cdot g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = m \cdot g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = m \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = m \cdot v = 38 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad (5.20)$$

Tokiu jėgos impulsu buvo sumodeliuotas smūgio poveikis į gembinę siją baigtinių elementų kompiuterine programa.

Jėgos veikimo trukmė  $t$  buvo identifikuota pagal eksperimentinius rezultatus. Gauta, kad esant veikimo trukmei  $t=0,016$  s įlinkiai geriausiai atitinka eksperimentiniams rezultatams.





5.21. Pav. Sijos įlinkiai (mm) esant sąveikos trukmei 0,016 s

Pagal eksperimentinius rezultatus tokio apkrovimo metu sijos gale dinaminiai įlinkiai yra  $s_{dyn}=51,5$  mm.

Geriausia būtų eksperimentiškai matuoti jėgos veikimo trukmę, pavyzdžiui, naudojant greitaigį smūgio vaizdo įrašymą. Tačiau, neturint įrangos, iš eksperimentinių dinaminių įlinkių rezultatų, naudojant jėgos momento sąvoką, galima identifikuoti *a posteriori* jėgos veikimo trukmę.

## 6. IŠVADOS

1. Atlikus statistškai apkrautos sijos įlinkių matavimus dviem būdais: naudojant lazerinį matuoklį ir taikant merkimo į dažus metodą, nustatyta, kad:
  - 1.1. Nors pati matavimo procedūra yra tikslesnė lazeriu (paklaida  $\pm 0,7$  mm) nei matuojant su dažais (paklaida  $\pm 2,0$  mm), tačiau atliekant matavimus su lazeriniu prietaisu buvo fiksuota sisteminė paklaida, kurią sukelia prietaiso matavimo ašies nukrypimas nuo normalinės (statmenos) sijos ašies. Dėl to lazeriniu matuokliu išmatuoti įlinkiai yra didesni nei skaičiuojant pagal *Bernoulli-Euler* teorija.
  - 1.2. Absoliučių paklaidų vidurkis  $\overline{\Delta s_{st}}$  matuojant su lazeriniu prietaisu yra  $\overline{\Delta s_{st}}=0,3$  mm; tuo tarpu su dažais gaunamas  $\overline{\Delta s_{st}}=0,22$  mm. Paklaidų standartinis nuokrypis gautas abejais atvejais  $s_{st,lazeris}=s_{st,dazai}=0,40$  mm.
  - 1.3. Galima daryti išvada, kad išmatuotos vertės taikant merkimo į dažus metodą yra tikslesnės nei naudojant lazerinį prietaisą. Taip įrodomas merkimo į dažus metodo tikslumas bei tinkamumas dinaminei analizei.
2. Atlikus statistškai apkrautų sijų įlinkių tyrimą ir palyginus *Bernoulli-Euler* ir *Timoshenko* sijų analizės teorijas nustatyta, kad:
  - 2.1. visais apkrovimo atvejais statinės apkrovos veikiamos sijos įlinkiai apskaičiuoti pagal *Timoshenko* teoriją 0,15% yra didesni už *Bernoulli-Euler* rezultatus; tai sudaro didžiausią 0,02 mm įlinkio padidėjimą ir atliekamuose tyrimuose toks pokytis yra nereikšmingas.
  - 2.2. Tiriamoji sija yra pakankamai liauna, kad *Timoshenko* teorijos vertinamos šlyties jėgos darytų pastebimą įtaką statinės apkrovos veikiamos sijos įlinkiams. Dėl to, tolimesnė analizė yra atliekama apsiribojant *Bernoulli-Euler* teorija.
3. Atliekant smūginės apkrovos veikiamos sijos tyrimą ir pritaikant dinaminį koeficientą  $k_{dyn}$ , kurio apskaičiavimui panaudotas energijos tvermės dėsnis smūgio metu, priimant dvi skirtingas hipotezes:
  - sijos savasis svoris neturi įtakos  $k_{dyn}$  apskaičiavimui (metodas pavadintas *paprastuoju* metodu);
  - sijos savasis svoris yra įvertinamas pagal Rayleigh redukuotos masės principą (metodas pavadintas *Rayleigh* metodu).
- 3.1. Patikrintas apskaičiuotų teorinių įlinkių reikšmių atitikimas su eksperimentinėmis reikšmėmis pagal mažiausių kvadratų metodą ir nustatyta, kad pagal *Rayleigh* metodą  $\sum \Delta s^2$  reikšmės yra nuo 7 iki 30 kartų mažesnės už  $\sum \Delta s^2$  reikšmes gautas skaičiuojant *paprastuoju* metodu. Remiantis *Rayleigh* metodu gaunami ženkliai tikslesni rezultatai.

- 3.2. Eksperimentinių smūginių įlinkių  $s_{dyn, exp}$  reikšmių nukrypimų nuo apskaičiuotų  $s_{dyn, teor}$  reikšmių (pagal *Rayleigh* teoriją) vidurkis yra 15%. Tuo tarpu, statinės apkrovos veikiamos sijos įlinkių matavimų ( $s_{st, exp}$ ) reikšmių nukrypimų nuo apskaičiuotų  $s_{st, teor}$  reikšmių (pagal *Bernoulli–Euler* teoriją) vidurkis yra 25%. Iš to galima daryti išvadą, kad sijos sąveiką su smūgine apkrova geriau aprašo *Rayleigh* teorija nei *Bernoulli–Euler* teorija statinės apkrovos atveju.
4. Eksperimentiškai buvo nustatyta, kad dinaminis koeficientas  $k_{dyn}$  nepriklauso nuo nagrinėjamo taško koordinatės išilgai sijos veikiant smūginei apkrovai ir yra vienodas visiems sijos įlinkiams. Tokiu būdu, patvirtinama dinaminio koeficiento  $k_{dyn}$  metodo prielaidą, kad smūgio metu, sijos deformavimosi forma išlieka tokia pati, kaip statinės apkrovos atveju.
  5. Eksperimentiškai buvo patikrintos  $s_{dyn}$  priklausomybės nuo svarmens kritimo aukščio, sijos ilgio, ir jėgos pridėties taško koordinatės išilgai sijos. Analizuojant skirtingo ilgio sijas (apkraunant sijos laisvajame gale su 12 kg masės svarmeniu) buvo pastebėta, kad *Rayleigh* modelį galima taikyti kai sijos savojo svorio  $W_1$  ir svarmens savojo svorio  $W$  santykis tenkina sąlygą  $W_1/W > 3,9$ . Šis rezultatas yra labai apytikslis ir ateityje reiktų atlikti platesnio spektro sijų ilgių bei svarmenų masės bandymus bei jį patikslinti.
  6. Atlikus sijos dinaminio apkrovimo įlinkių rezultatų eksperimentinių reikšmių nukrypimų  $\Delta s_{dyn}$  nuo teorinių verčių statistinę analizę, naudojant  $2 \cdot \sigma$  taisyklę, nustatyta, kad  $\Delta s_{dyn} \in [-4,51\text{mm} ; 2,45\text{mm}]$ .
  7. Atlikus sijos dinaminio apkrovimo modeliavimą baigtiniais elementais nustatyta, kad neturint įrangos smūgio trukmei išmatuoti, galima naudoti sudarytą baigtinių elementų modelį smūgio trukmei  $t$  identifikuoti, pavyzdžiui, smūgiuojant 12 kg masės svarmeniu iš 0,52 m aukščio sijos laisvajame gale, identifikuota smūgio trukmė  $t=0,016$  s.

## 7. LITERATŪRA

1. CHOI, W.S. and PARK, G.J. Transformation of Dynamic Loads into Equivalent Static Loads Based on Modal Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, vol. 46, no. 1. pp. 29-43 ISSN 1097-0207.
2. PARK, G. and KANG, B. Validation of a Structural Optimization Algorithm Transforming Dynamic Loads into Equivalent Static Loads. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2003, vol. 118, no. 1. pp. 191-200.
3. ČIŽAS, A. *Medžiagų Atsparumas: Konstrukcijų Elementų Mechanika: Vadovėlis Aukštųjų Technikos Mokyklų Studentams*. Vilnius: Technika, 1993.
4. TIMOSHENKO, S. *History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*. York, PA.: Courier Corporation, 1953.
5. TRUESDELL, C. *The Rational Mechanics of Flexible Or Elastic Bodies 1638-1788: Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia, Vol X et XI Seriei Secundae*. Venditioni Exponunt Orell Fussli Turici, 1960.
6. TIMOSHENKO, S. *Strength of Materials*. 2nd ed. New York: D. Van Nostrand Company Inc., 1940.
7. GERE, J.M. and TIMOSHENKO, S.P. *Mechanics of Materials*. 3rd ed. Hardcover: PWS-KENT Publishing Company, 1990 ISBN 0534921744.
8. TIMOSHENKO, S. On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibration of Bars of Uniform Cross Section. *Philosophical Magazine*, 1921. pp. 744.
9. TIMOSHENKO, S. On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross-Section. *Philosophical Magazine*, 1922. pp. 125.
10. THOMSON, W.T. *Theory of Vibration with Applications*. 4th ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1993 ISBN 0748743804.
11. ROSINGER, H.E. and RITCHIE, I.G. On Timoshenko's Correction for Shear in Vibrating Isotropic Beams. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1977, vol. 10, no. 11. pp. 1461 ISSN 0022-3727.
12. COWPER, G.R. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, vol. 33, no. 2. pp. 335-340 ISSN 0021-8936.
13. D'ALEMBERT, J. *Traité De La Dynamique*. Paris: , 1743.
14. FEODOSJEVAS, V. *Medžiagų Atsparumas: Vadovėlis Aukštosiomis Technikos Mokykloms : Versta Iš Septintojo Pataisyto Leidimo*. Vilnius: Mokslas, 1977.
15. VASAUSKAS, S. and BAUŠYS, J. *Medžiagų Atsparumas: Mokymo Priemonė Technikumams*. Vilnius: Mintis, 1969.

16. DOROŠEVAS, V. and VYŠNIAUSKIENĖ, Ž. *Trumpas Teorinės Mechanikos Kursas (Elektroninis Išteklius): Vadovėlis*. 2-nd completed and corrected ed. Kaunas: Technologija, 2011 ISBN 9786090200292.
17. TIMOSHENKO, S. *Vibration Problems in Engineering*. New York: D. Van Nostrand Company Inc., 1937.
18. RAYLEIGH, L. *The Theory of Sound, Vol. 1*. 2nd ed. New York: Dover, 1945.
19. COX, H. On Impact of Elastic Beams. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1851, vol. 9. pp. 73.
20. LOVE, A.E.H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge university press, 1906.
21. SUZUKI, S. Measured Dynamic-Load Factors of Cantilever Beams, Frame Structures and Rings Subjected to Impulsive Loads. *Experimental Mechanics*, 1971, vol. 11, no. 2. pp. 76-81 ISSN 1741-2765.
22. HERTZ, H. On the Contact of Elastic Solids. *J.Reine Angew.Math*, 1881, vol. 92, no. 156-171. pp. 110.
23. HAN, S.M., BENAROYA, H. and WEI, T. Dynamics of Transversely Vibrating Beams using Four Engineering Theories. *Journal of Sound and Vibration*, 2 September 1999, 1999, vol. 225, no. 5. pp. 935-988. Available from:  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X99922575> ISSN 0022-460X. DOI <http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1999.2257>.
24. CHOI, W.S. and PARK, G.J. Structural Optimization using Equivalent Static Loads at all Time Intervals. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3/1, 2002, vol. 191, no. 19–20. pp. 2105-2122 ISSN 0045-7825.
25. CHOI, W., PARK, K.B. and PARK, G.J. Calculation of Equivalent Static Loads and its Application. *Nuclear Engineering and Design*, 11, 2005, vol. 235, no. 22. pp. 2337-2348 ISSN 0029-5493.
26. LUBLINER, J. *Plasticity Theory*. Mineola, New York: Dover Publications Inc., 2008 ISBN 978-0-486-46290-5.
27. KRAJCINOVIC, D. Dynamic Response of Rigid - Ideally Plastic Structures. *Shock and Vibration Digest*, 1973, vol. 5, no. 2. pp. 2-9.
28. JONES, N. Plastic Failure of Ductile Beams Loaded Dynamically. *Journal of Engineering for Industry*, 02/01, 1976, vol. 98, no. 1. pp. 131-136 ISSN 1087-1357.
29. DUWEZ, P., CLARK, D. and BOHNENBLUST, H. The Behavior of Long Beams Under Impact Loading. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 1950, vol. 17, no. 1. pp. 27-34.
30. CONROY, M.F. Plastic-Rigid Analysis of Long Beams Under Transverse Impact Loading. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 1952, vol. 19, no. 4. pp. 465-470.

31. CONROY, M.F. Plastic Deformation of Semi-Infinite Beams Subject to Transverse Impact Loading at the Free End. *Journal of Applied Mechanics*, 1956, vol. 23. pp. 239.
32. CONROY, M.F. Plastic-Rigid Analysis of a Special Class of Problems Involving Beams Subject to Dynamic Transverse Loading. *Journal of Applied Mechanics*, 1955, vol. 22. pp. 48-45.
33. CONROY, M.F. The Behavior of Rigid-Ideally Plastic Beams due to Dynamic Loading. *Journal De Mecanique*, 1963, vol. 11, no. 4. pp. 455-473.
34. LEE, E. and SYMONDS, P.S. Large Plastic Deformations of Beams Under Transverse Impact. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 1952, vol. 19, no. 3. pp. 308-314.
35. BLEICH, H.H. and SALVADORI, M.G. Impulsive Motion of Elasto-Plastic Beams. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1955, vol. 120, no. 1. pp. 499-515.
36. PARKES, E. *The Permanent Deformation of a Cantilever Struck Transversely at its Tip*. series A, vol. 228 ed. London: The Royal Society, 1955.
37. SYMONDS, P.S. and FLEMING, W.T. *Parkes Revisited: On Rigid-Plastic and Elastic-Plastic Dynamic Structural Analysis*. , 1984, 1984 Available from: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734743X84900137> ISBN 0734-743X. DOI [http://dx.doi.org/10.1016/0734-743X\(84\)90013-7](http://dx.doi.org/10.1016/0734-743X(84)90013-7).
38. WANG, X.D. and YU, T.X. Parkes Revisited: Effect of Elastic Deformation at the Root of a Cantilever Beam. *International Journal of Impact Engineering*, 1991, 1991, vol. 11, no. 2. pp. 197-209. Available from: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734743X91900062> ISSN 0734-743X. DOI [http://dx.doi.org/10.1016/0734-743X\(91\)90006-2](http://dx.doi.org/10.1016/0734-743X(91)90006-2).
39. STRONGE, W.J. and YU, T.X. Dynamic Plastic Deformation in Strain Hardening and Strain-Softening Cantilevers. *International Journal of Solids and Structures*, 1989, vol. 25, no. 7. pp. 769-782. Available from: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768389900127> ISSN 0020-7683. DOI [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(89\)90012-7](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(89)90012-7).
40. COWPER, G.R. On the Accuracy of Timoshenko's Beam Theory. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1968, vol. 94, no. 6. pp. 1447-1454.
41. PEKARSKAS, V. *Matematinė Inžinerinio Eksperimento Teorija (Elektroninis Išteklius): Ekperimento Planavimo Ir Jo Rezultatų Matematinis Apdorojimas : Mokomoji Knyga*. 1st ed. Šiauliai i.e. Kaunas: Šiaulių universiteto leidykla i.e. Technologija, 2012 ISBN 9786090203842.

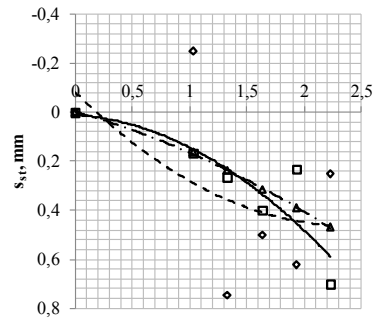
## **PRIEDAI**

# 1 Priedas

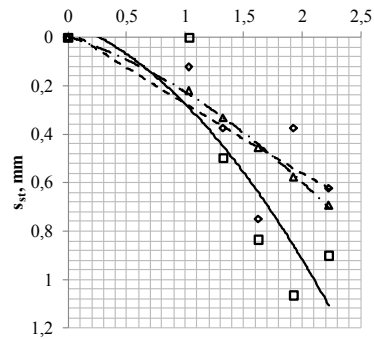
## Statinės apkrovos veikiamos sijos įlinkių grafikai

Žymėjimai:

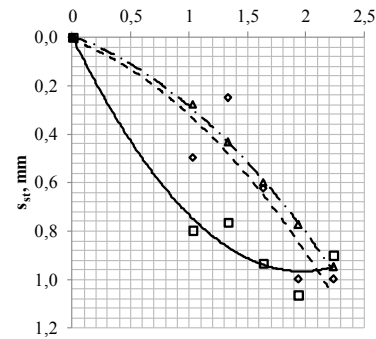
- ◆ Matavimai dažais
- Matavimai lazeriu
- ▲ Teoriniai rezultatai
- - - Poly. (Matavimai dažais)
- Poly. (Matavimai lazeriu)
- · - Poly. (Teoriniai rezultatai)



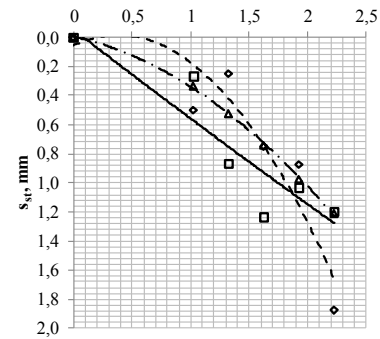
**Pr-1.1 Pav.** Apkraunama 1 taške, su 4 kg masės svarmeniu



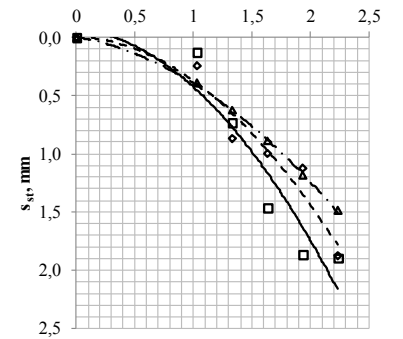
**Pr-1.2 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 4 kg masės svarmeniu



**Pr-1.3 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 4 kg masės svarmeniu

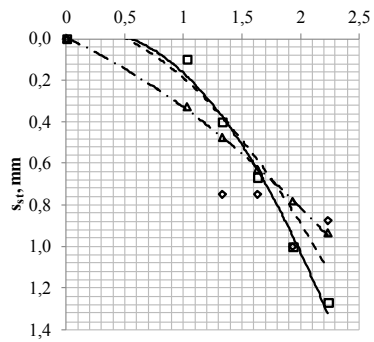


**Pr-1.4 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 4 kg masės svarmeniu

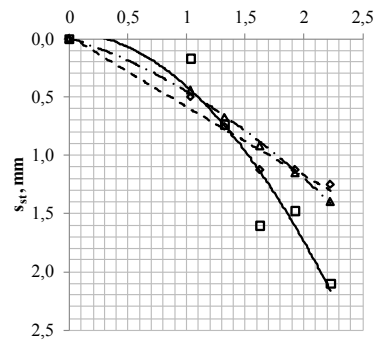


**Pr-1.5 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 4 kg masės svarmeniu

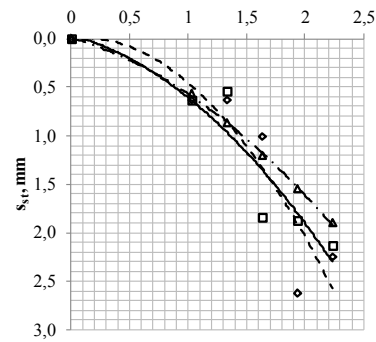




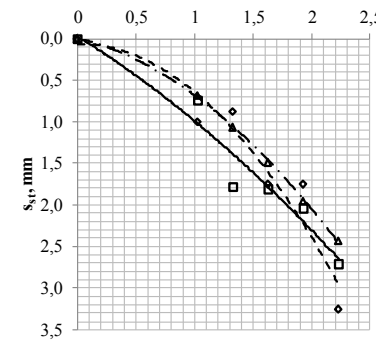
**Pr-1.6 Pav.** Apkraunama 1 taške, su 8 kg masės svarmeniu



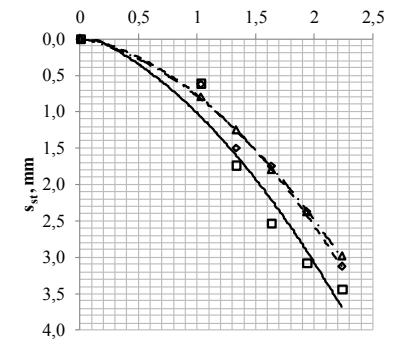
**Pr-1.7 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 8 kg masės svarmeniu



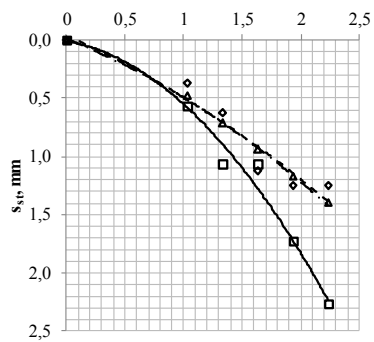
**Pr-1.8 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 8 kg masės svarmeniu



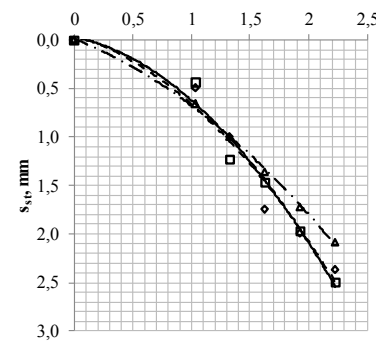
**Pr-1.9 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 8 kg masės svarmeniu



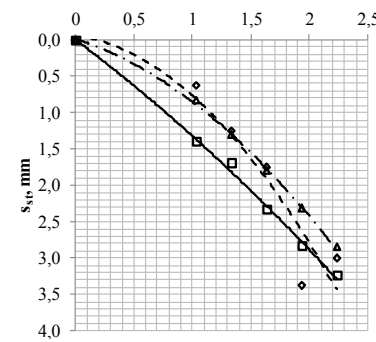
**Pr-1.10 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 8 kg masės svarmeniu



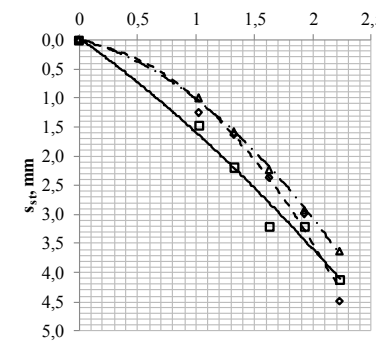
**Pr-1.11 Pav.** Apkraunama 1 taške, su 12 kg masės svarmeniu



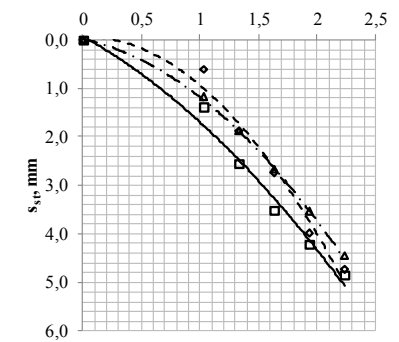
**Pr-1.12 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 12 kg masės svarmeniu



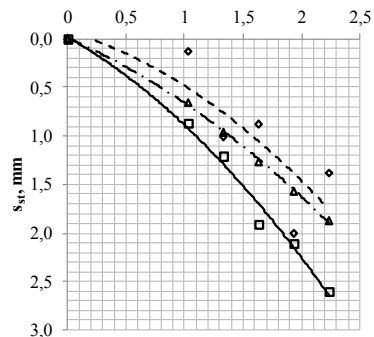
**Pr-1.13 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 12 kg masės svarmeniu



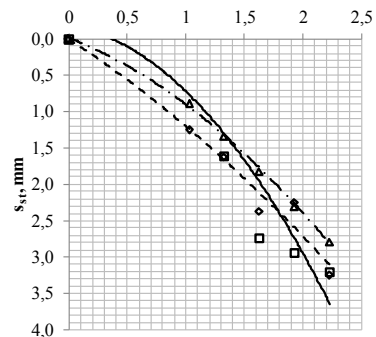
**Pr-1.14 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 12 kg masės svarmeniu



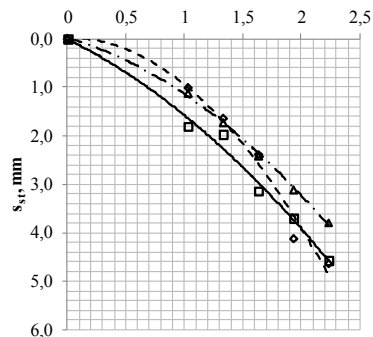
**Pr-1.15 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 12 kg masės svarmeniu



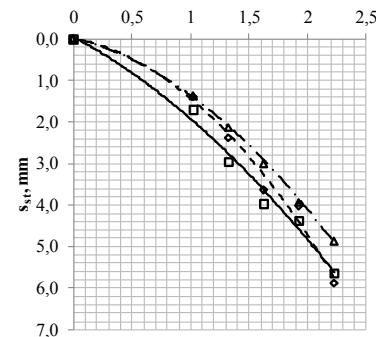
**Pr-1.16 Pav.** Apkraunama 1 taške, su 16 kg masės svarmeniu



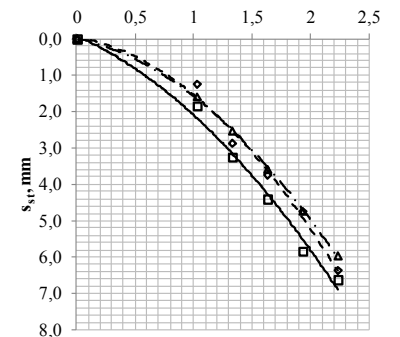
**Pr-1.17 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 16 kg masės svarmeniu



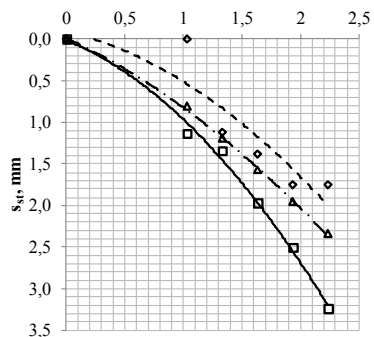
**Pr-1.18 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 16 kg masės svarmeniu



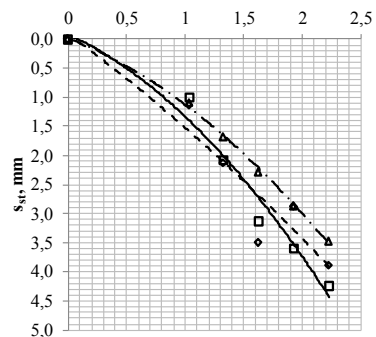
**Pr-1.19 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 16 kg masės svarmeniu



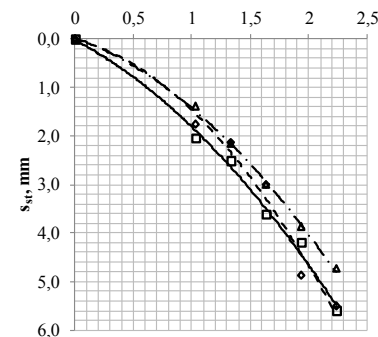
**Pr-1.20 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 16 kg masės svarmeniu



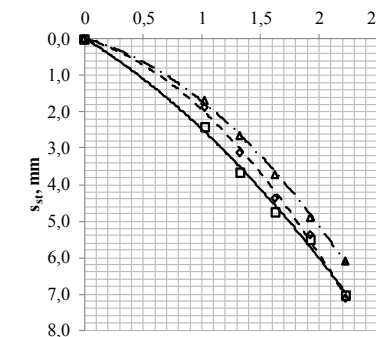
**Pr-1.21 Pav.** Apkraunama 1 taške, su 20 kg masės svarmeniu



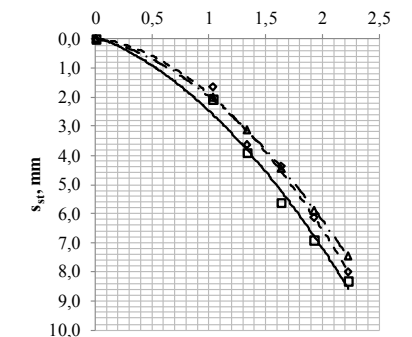
**Pr-1.22 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 20 kg masės svarmeniu



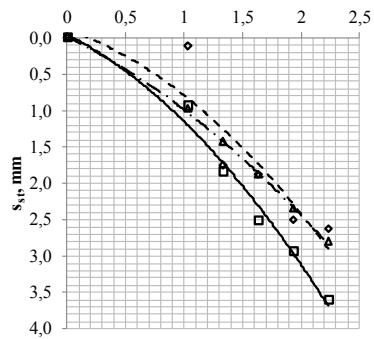
**Pr-1.23 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 20 kg masės svarmeniu



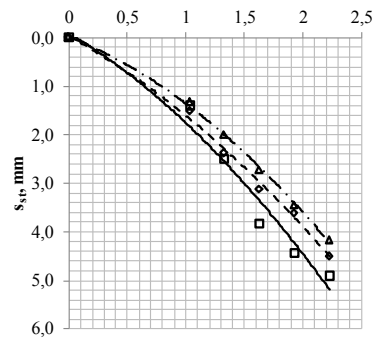
**Pr-1.24 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 20 kg masės svarmeniu



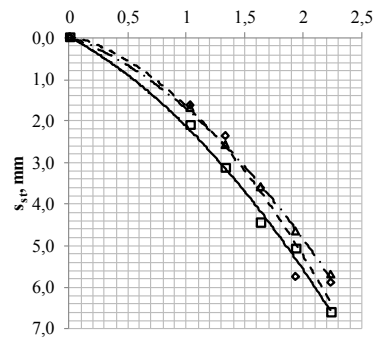
**Pr-1.25 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 20 kg masės svarmeniu



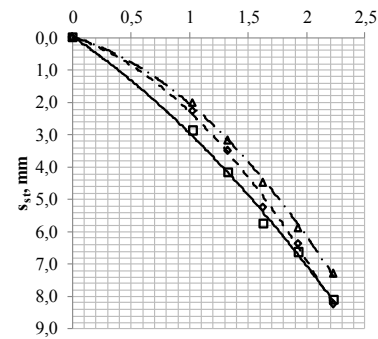
**Pr-1.26 Pav.** Apkraunama 1 taške, su 24 kg masės svarmeniu



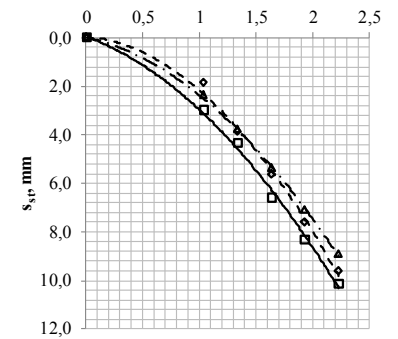
**Pr-1.27 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 24 kg masės svarmeniu



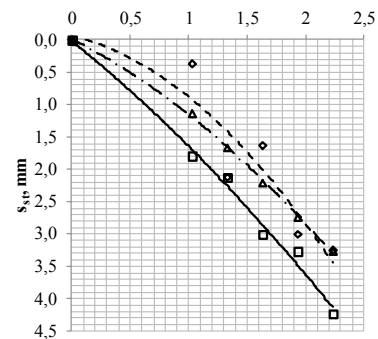
**Pr-1.28 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 24 kg masės svarmeniu



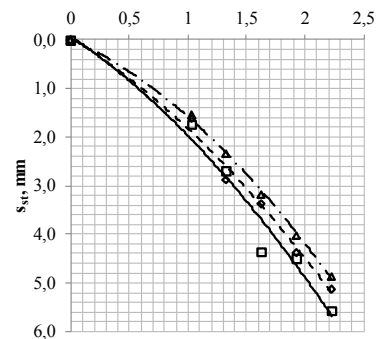
**Pr-1.29 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 24 kg masės svarmeniu



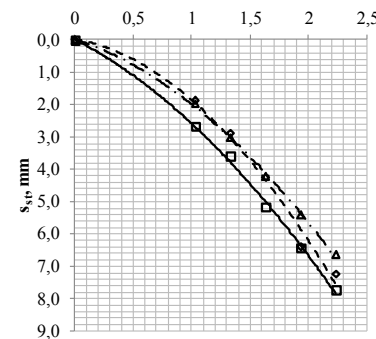
**Pr-1.30 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 24 kg masės svarmeniu



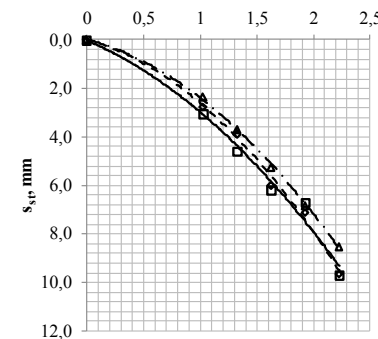
**Pr-1.31 Pav.** Apkraunama 1 taške, su 28 kg masės svarmeniu



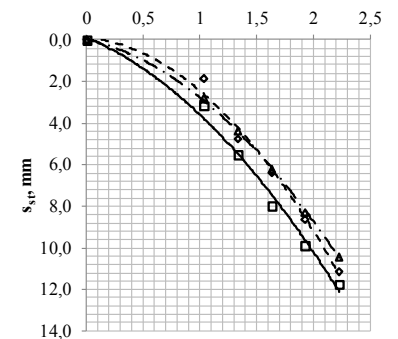
**Pr-1.32 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 28 kg masės svarmeniu



**Pr-1.33 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 28 kg masės svarmeniu



**Pr-1.34 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 28 kg masės svarmeniu



**Pr-1.35 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 28 kg masės svarmeniu

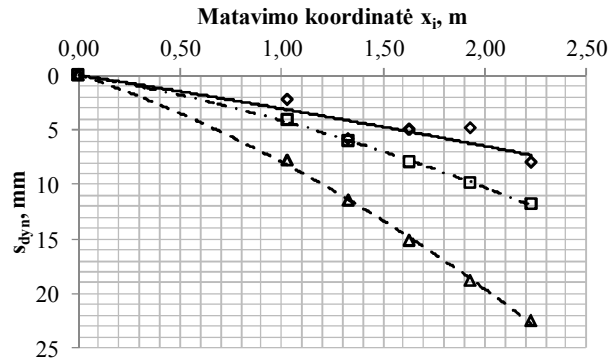
## 2 Priedas

### Smūginių bandymų rezultatai, esant $h=520\text{mm}$

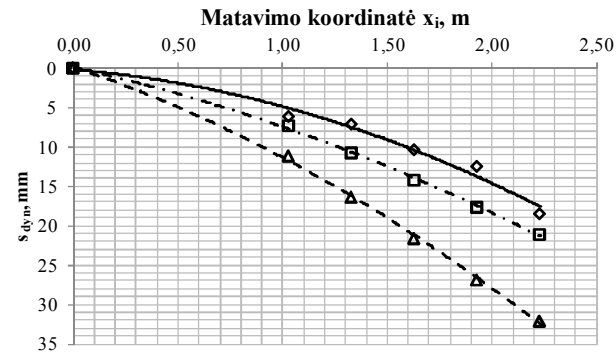
#### 2.1 Dinaminių įlinkių rezultatų grafikai

##### Žymėjimai

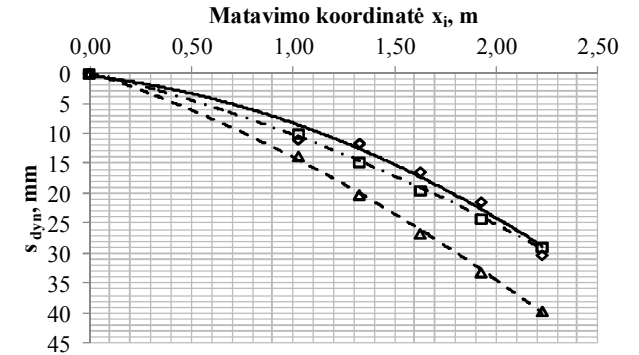
- ◆ Eksperimentinės reikšmės
- Rayleigh modelis
- ▲ Paprastas modelis



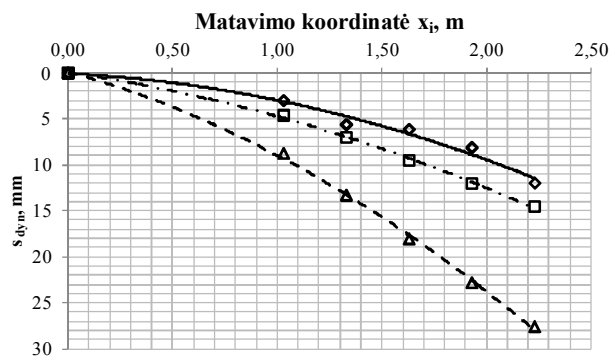
Pr-2.1 Pav. Apkraunama 1 taške, su 4 kg masės svarmeniu



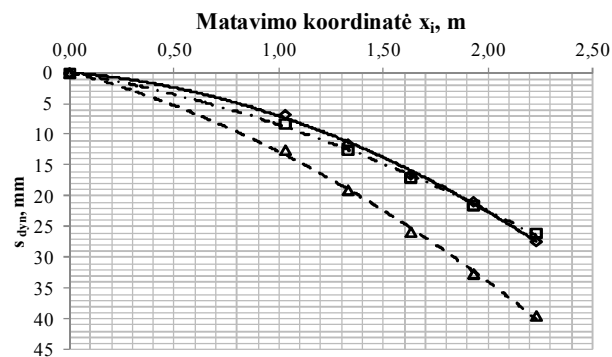
Pr-2.2 Pav. Apkraunama 1 taške, su 8 kg masės svarmeniu



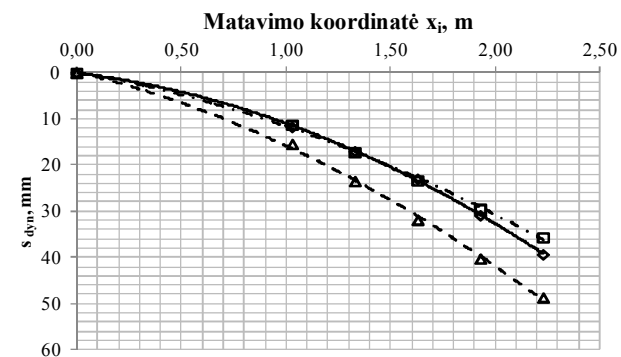
Pr-2.3 Pav. Apkraunama 1 taške, su 12 kg masės svarmeniu



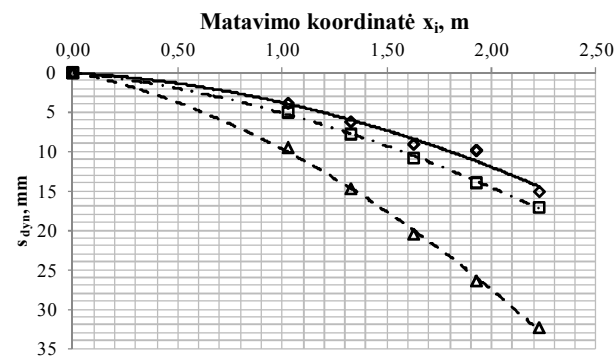
Pr-2.4 Pav. Apkraunama 2 taške, su 4 kg masės svarmeniu



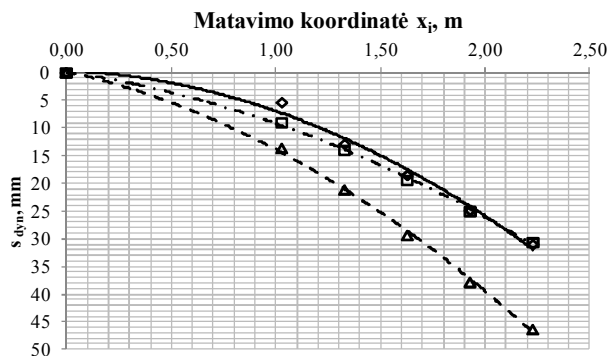
Pr-2.5 Pav. Apkraunama 2 taške, su 8 kg masės svarmeniu



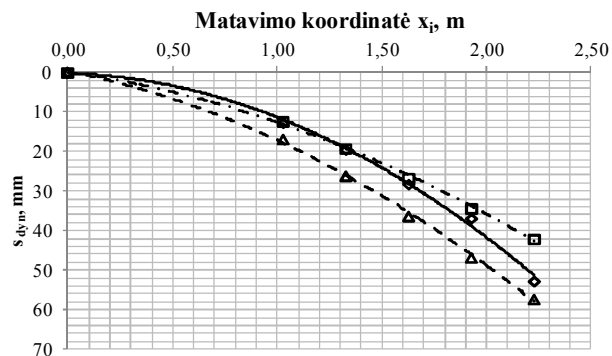
Pr-2.6 Pav. Apkraunama 2 taške, su 12 kg masės svarmeniu



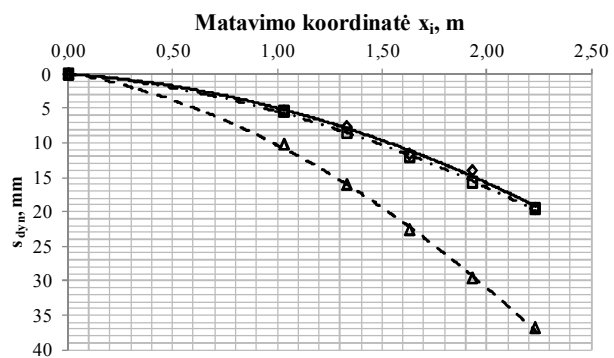
Pr-2.7 Pav. Apkraunama 3 taške, su 4 kg masės svarmeniu



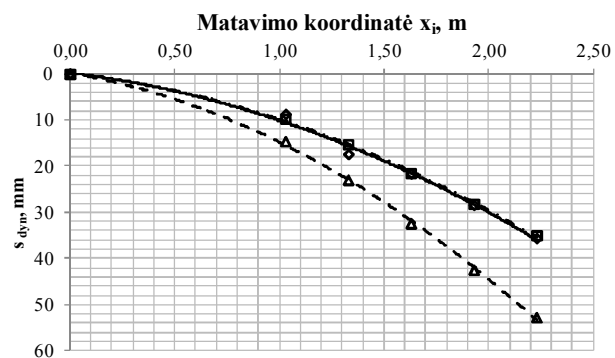
Pr-2.8 Pav. Apkraunama 3 taške, su 8 kg masės svarmeniu



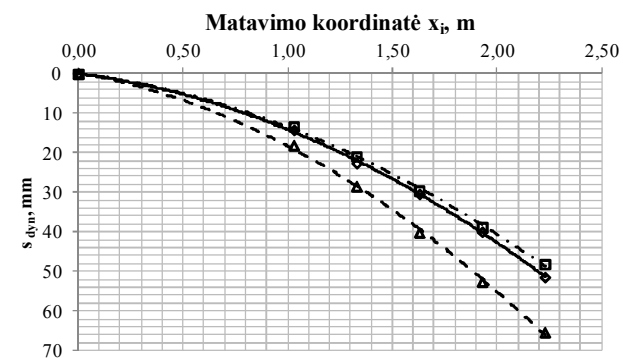
Pr-2.9 Pav. Apkraunama 3 taške, su 12 kg masės svarmeniu



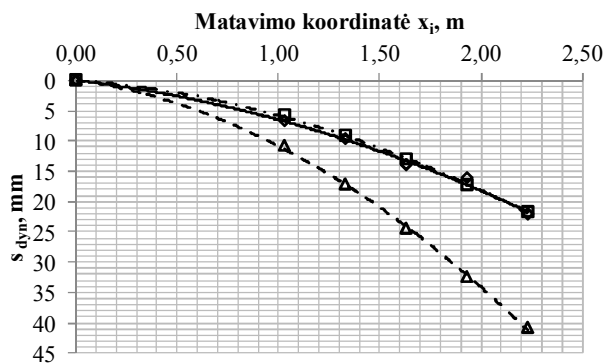
Pr-2.10 Pav. Apkraunama 4 taške, su 4 kg masės svarmeniu



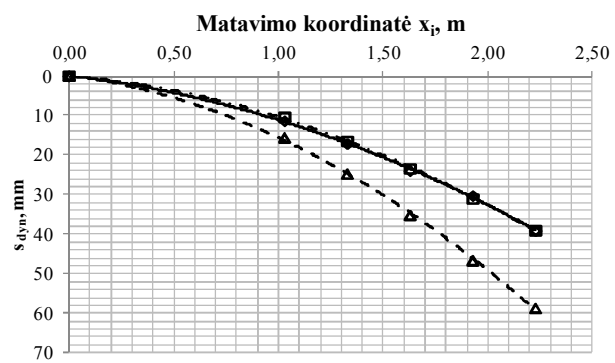
Pr-2.11 Pav. Apkraunama 4 taške, su 8 kg masės svarmeniu



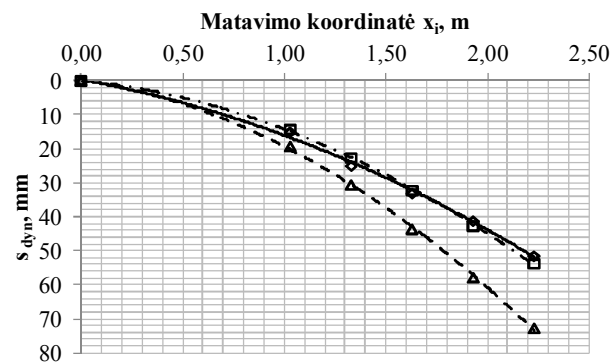
Pr-2.12 Pav. Apkraunama 4 taške, su 12 kg masės svarmeniu



Pr-2.13 Pav. Apkraunama 5 taške, su 4 kg masės svarmeniu



Pr-2.14 Pav. Apkraunama 5 taške, su 8 kg masės svarmeniu

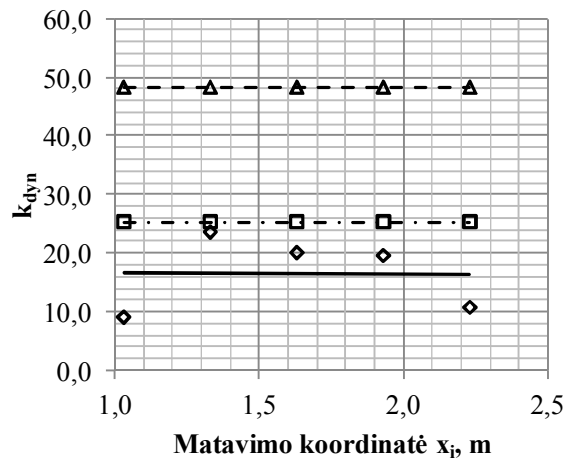


Pr-2.15 Pav. Apkraunama 5 taške, su 12 kg masės svarmeniu

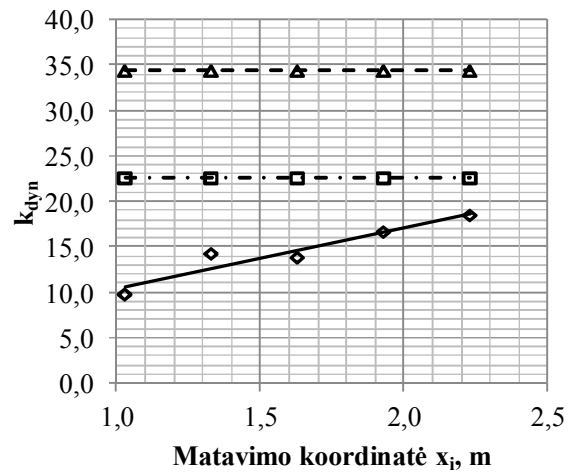
## 2.2 Dinaminio koeficiento $k_{dyn}$ rezultatų grafikai

Žymėjimai:

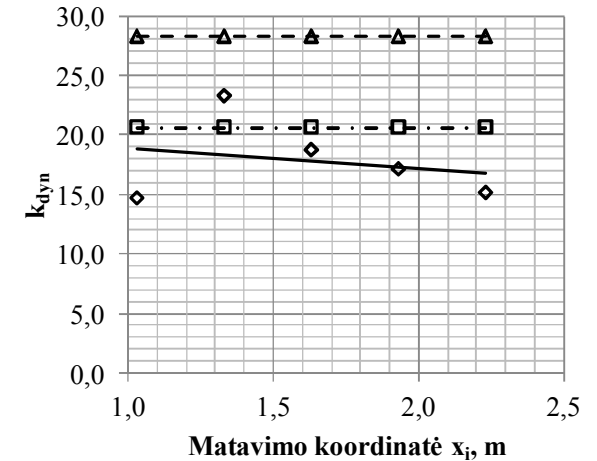
- ◊ Eksperimentinės reikšmės
- ◻ Rayleigh modelis
- ▲ Paprastas modelis



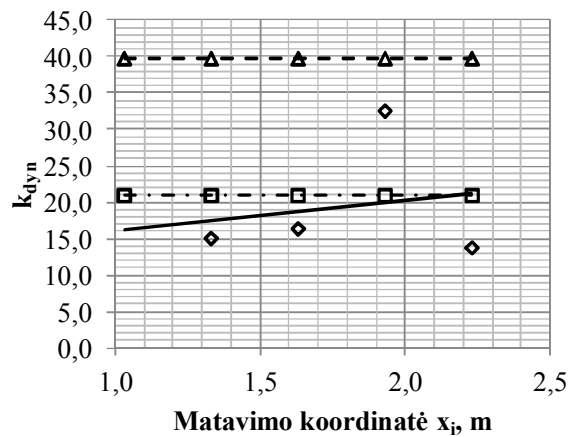
Pr-2.16 Pav. Apkraunama 1 taške, su 4 kg masės svarmeniu



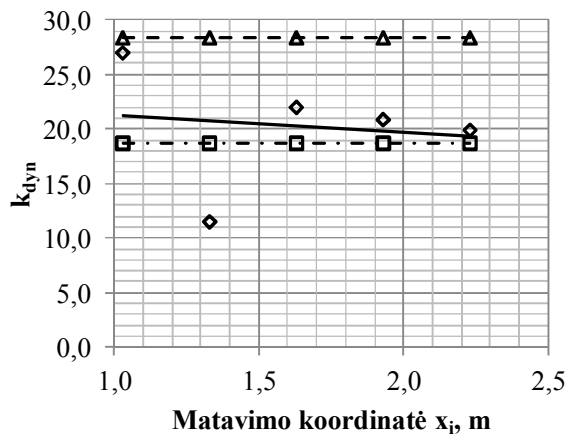
Pr-2.17 Pav. Apkraunama 1 taške, su 8 kg masės svarmeniu



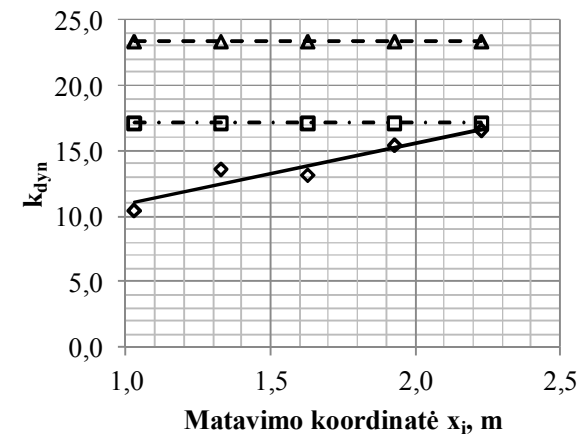
Pr-2.18 Pav. Apkraunama 1 taške, su 12 kg masės svarmeniu



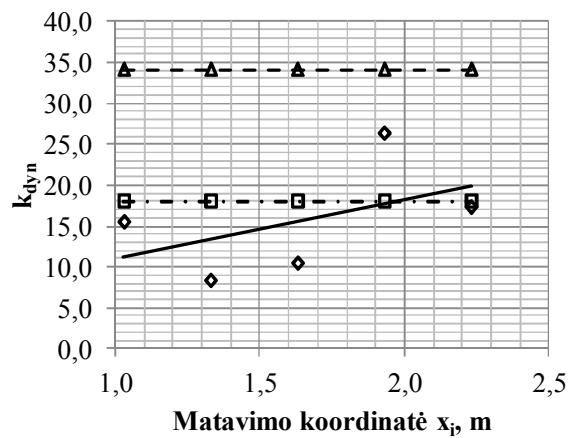
**Pr-2.19 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 4 kg masės svarmeniu



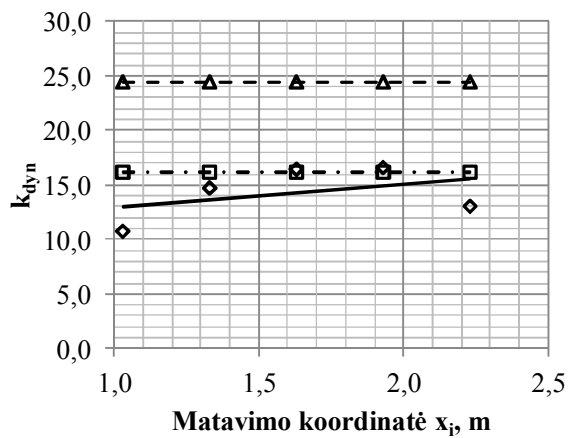
**Pr-2.20 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 8 kg masės svarmeniu



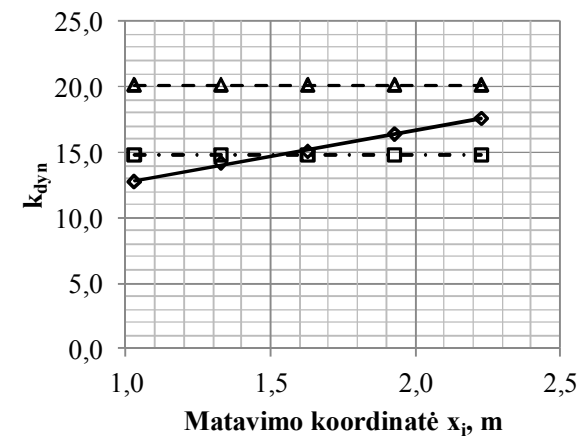
**Pr-2.21 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 12 kg masės svarmeniu



**Pr-2.22 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 4 kg masės

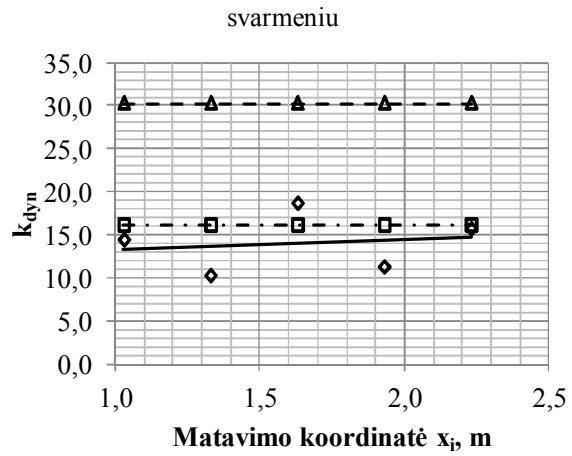


**Pr-2.23 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 8 kg masės

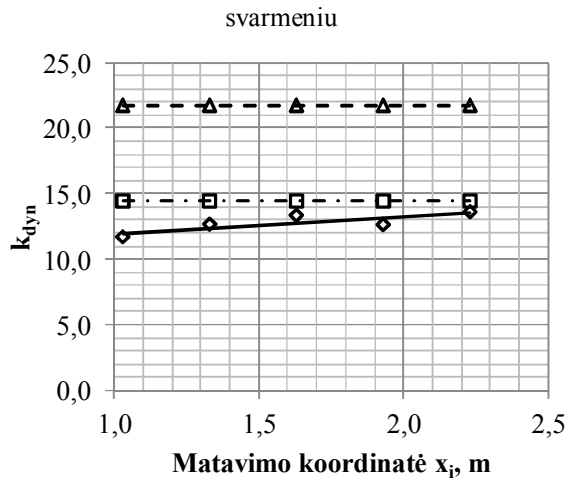


**Pr-2.24 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 12 kg masės

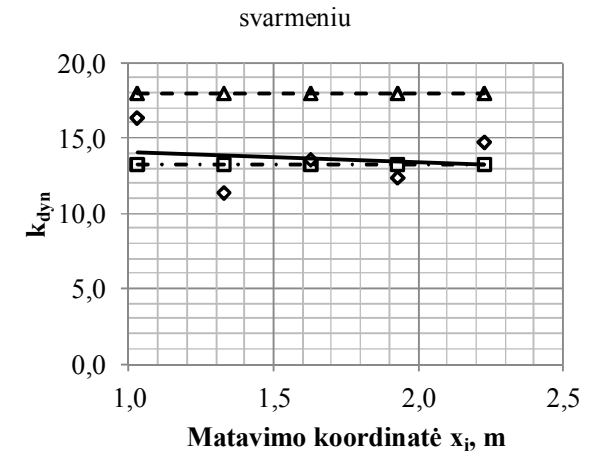




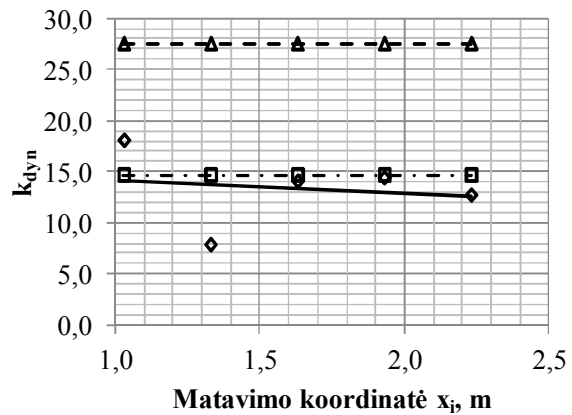
**Pr-2.25 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 4 kg masės svarmeniu



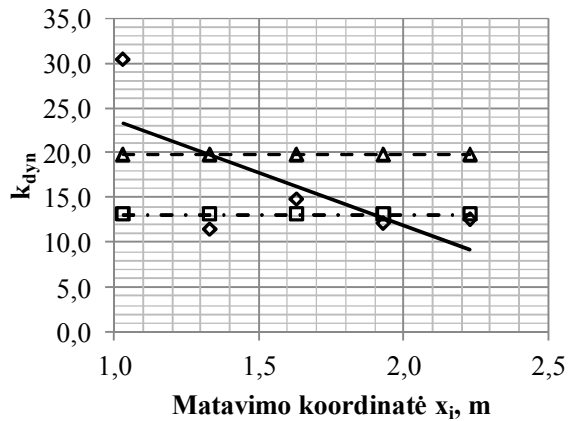
**Pr-2.26 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 8 kg masės svarmeniu



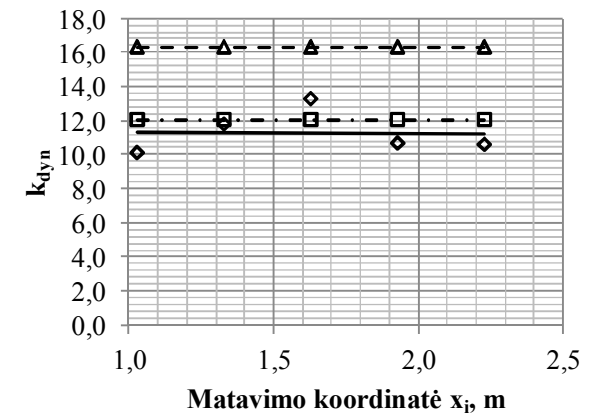
**Pr-2.27 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 12 kg masės svarmeniu



**Pr-2.28 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 4 kg masės svarmeniu



**Pr-2.29 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 8 kg masės svarmeniu

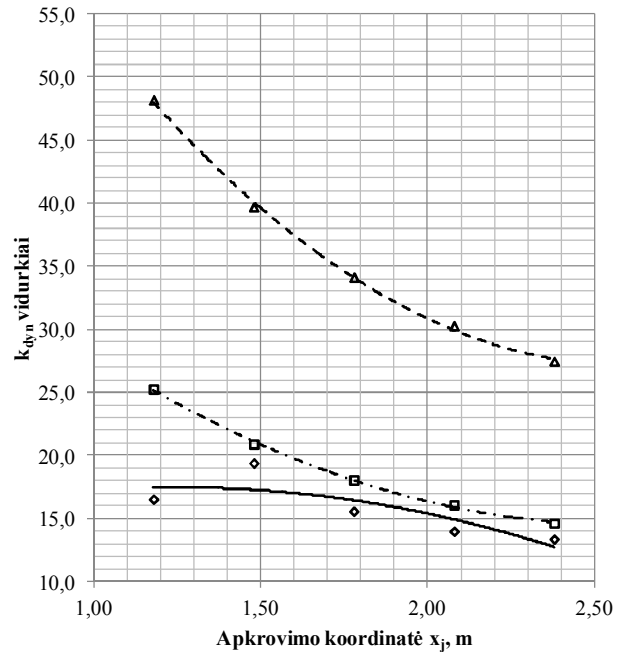


**Pr-2.30 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 12 kg masės svarmeniu

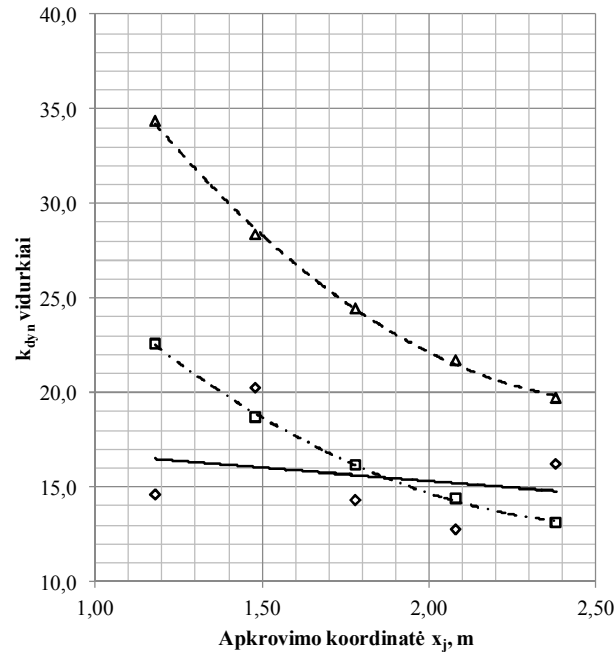
### 2.3 Dinaminio koeficiento $k_{dyn}$ priklausomybės nuo apkrovimo koordinatės

Žymėjimai:

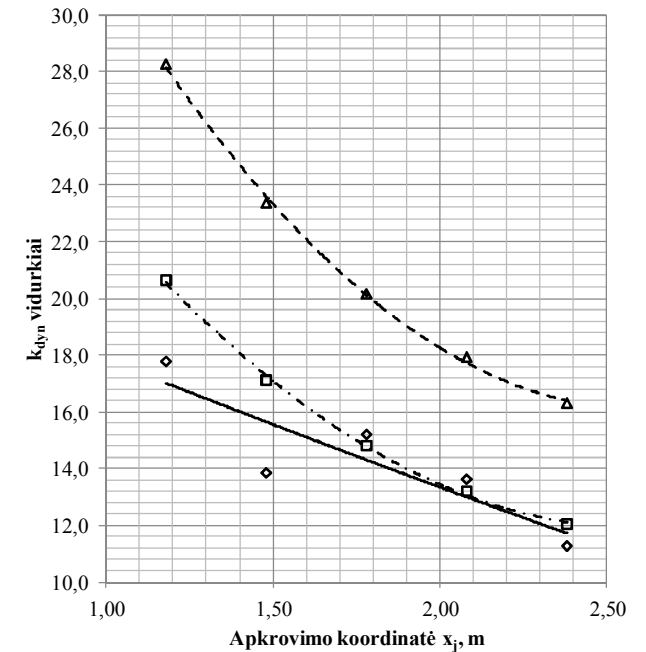
- ◆ Eksperimentinės reikšmės
- Rayleigh modelis
- ▲ Paprastas modelis



Pr-2.31 Pav. Vidurkinės  $k_{dyn}$  reikšmės apkraunant su 4 kg masės svarmeniu



Pr-2.32 Pav. Vidurkinės  $k_{dyn}$  reikšmės apkraunant su 8 kg masės svarmeniu



Pr-2.33 Pav. Vidurkinės  $k_{dyn}$  reikšmės apkraunant su 12 kg masės svarmeniu

### 3 Priedas

#### Smūginių bandymų rezultatai, esant h=420mm

##### 3.1 Dinaminių įlinkių rezultatų lentelės

Lentelė Nr. Pr-3.1 Eksperimentiniai rezultatai

Apkrovimo taškas <i>j</i>	Matavimo taškas <i>i</i>	4 kg			8 kg			12 kg		
		S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm
1	A	0,6	6,0	3,8	0,5	10,8	5,4	0,4	19,7	7,4
	B	0,0	-	4,1	0,6	17,2	10,8	1,3	10,2	12,8
	C	0,4	12,0	4,5	0,9	11,3	9,9	0,9	17,3	15,1
	D	0,0	-	4,3	1,1	10,9	12,3	1,4	14,9	20,5
	E	0,4	23,0	8,6	1,1	14,9	16,8	1,6	16,6	27,0
2	A	0,0	-	1,3	0,6	11,8	7,4	1,0	11,6	11,6
	B	0,4	16,3	6,1	1,3	10,1	12,6	1,4	11,9	16,4
	C	0,8	8,5	6,4	0,9	15,9	13,9	1,5	15,3	23,0
	D	0,8	11,7	8,8	1,1	16,0	18,0	2,0	14,6	29,1
	E	0,6	19,4	12,1	1,4	18,1	24,9	2,3	16,3	36,8
3	A	0,6	6,6	4,1	0,9	8,0	7,0	0,9	13,1	11,5
	B	0,6	8,0	5,0	1,3	10,9	13,6	1,5	12,1	18,1
	C	0,6	15,6	9,8	1,6	10,5	17,1	1,9	13,4	25,1
	D	0,8	15,2	11,4	1,9	12,0	22,5	2,4	16,6	39,4
	E	0,3	57,0	14,3	2,3	13,0	29,3	3,3	12,7	41,1
4	A	0,0	-	4,0	1,1	8,3	9,4	1,0	12,3	12,3
	B	0,6	11,8	7,4	1,3	11,7	14,6	1,6	12,8	20,8
	C	1,0	10,3	10,3	1,3	15,8	19,8	2,6	10,7	28,1
	D	1,0	13,0	13,0	2,3	11,2	25,1	3,1	11,6	36,1
	E	1,5	12,1	18,1	2,1	15,2	32,3	4,1	10,8	44,8
5	A	0,4	19,3	7,3	1,1	11,1	12,5	1,4	9,9	13,6
	B	1,4	8,2	11,3	1,6	10,3	16,8	1,8	12,5	21,9
	C	1,1	10,6	11,9	2,0	11,1	22,3	3,0	9,8	29,4
	D	1,9	8,5	15,9	2,6	11,1	29,3	3,8	9,7	36,4
	E	1,4	14,5	20,0	2,9	11,9	34,3	4,9	9,1	44,5

Lentelė Nr. Pr-3.2 Teoriniai rezultatai pagal *paprastąjį* metodą

Apkrovimo taškas <i>j</i>	Matavimo taškas <i>i</i>	4 kg			8 kg			12 kg		
		S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm
1	A	0,2	43,4	7,0	0,3	31,0	10,1	0,5	25,5	12,4
	B	0,2		10,3	0,5		14,8	0,7		18,2
	C	0,3		13,7	0,6		19,5	0,9		24,1
	D	0,4		17,0	0,8		24,2	1,2		29,9
	E	0,5		20,3	0,9		29,0	1,4		35,8
2	A	0,2	35,8	7,9	0,4	25,6	11,3	0,7	21,1	14,0
	B	0,3		12,0	0,7		17,2	1,0		21,2
	C	0,5		16,3	0,9		23,3	1,4		28,8
	D	0,6		20,6	1,2		29,5	1,7		36,4
	E	0,7		24,9	1,4		35,6	2,1		44,0
3	A	0,3	30,8	8,6	0,6	22,1	12,3	0,8	18,2	15,2
	B	0,4		13,3	0,9		19,1	1,3		23,6
	C	0,6		18,5	1,2		26,5	1,8		32,8
	D	0,8		23,8	1,5		34,2	2,3		42,3
	E	0,9		29,2	1,9		41,9	2,8		51,8
4	A	0,3	27,3	9,2	0,7	19,6	13,2	1,0	16,2	16,4
	B	0,5		14,5	1,1		20,8	1,6		25,7
	C	0,7		20,4	1,5		29,3	2,2		36,3
	D	1,0		26,7	2,0		38,4	2,9		47,6
	E	1,2		33,2	2,4		47,7	3,6		59,1
5	A	0,4	24,8	9,8	0,8	17,8	14,1	1,2	14,8	17,5
	B	0,6		15,5	1,3		22,3	1,9		27,7
	C	0,9		22,1	1,8		31,8	2,7		39,5
	D	1,2		29,3	2,4		42,2	3,5		52,4
	E	1,5		36,9	3,0		53,1	4,5		65,9

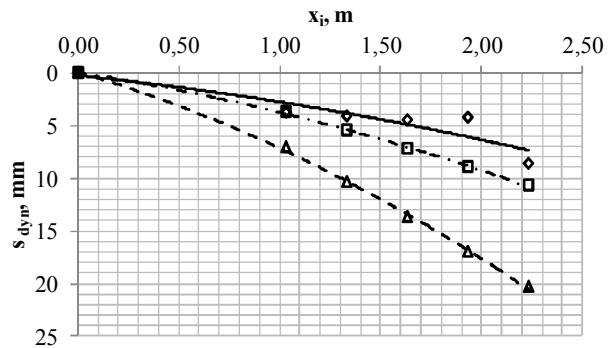
Lentelė Nr. Pr-3.3. Teoriniai rezultatai pagal *Rayleigh* metodą

Apkrovimo taškas <i>j</i>	Matavimo taškas <i>i</i>	4 kg			8 kg			12 kg		
		S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm
1	A	0,2	43,4	7,0	0,3	31,0	10,1	0,5	25,5	12,4
	B	0,2		10,3	0,5		14,8	0,7		18,2
	C	0,3		13,7	0,6		19,5	0,9		24,1
	D	0,4		17,0	0,8		24,2	1,2		29,9
	E	0,5		20,3	0,9		29,0	1,4		35,8
2	A	0,2	35,8	7,9	0,4	25,6	11,3	0,7	21,1	14,0
	B	0,3		12,0	0,7		17,2	1,0		21,2
	C	0,5		16,3	0,9		23,3	1,4		28,8
	D	0,6		20,6	1,2		29,5	1,7		36,4
	E	0,7		24,9	1,4		35,6	2,1		44,0
3	A	0,3	30,8	8,6	0,6	22,1	12,3	0,8	18,2	15,2
	B	0,4		13,3	0,9		19,1	1,3		23,6
	C	0,6		18,5	1,2		26,5	1,8		32,8
	D	0,8		23,8	1,5		34,2	2,3		42,3
	E	0,9		29,2	1,9		41,9	2,8		51,8
4	A	0,3	27,3	9,2	0,7	19,6	13,2	1,0	16,2	16,4
	B	0,5		14,5	1,1		20,8	1,6		25,7
	C	0,7		20,4	1,5		29,3	2,2		36,3
	D	1,0		26,7	2,0		38,4	2,9		47,6
	E	1,2		33,2	2,4		47,7	3,6		59,1
5	A	0,4	24,8	9,8	0,8	17,8	14,1	1,2	14,8	17,5
	B	0,6		15,5	1,3		22,3	1,9		27,7
	C	0,9		22,1	1,8		31,8	2,7		39,5
	D	1,2		29,3	2,4		42,2	3,5		52,4
	E	1,5		36,9	3,0		53,1	4,5		65,9

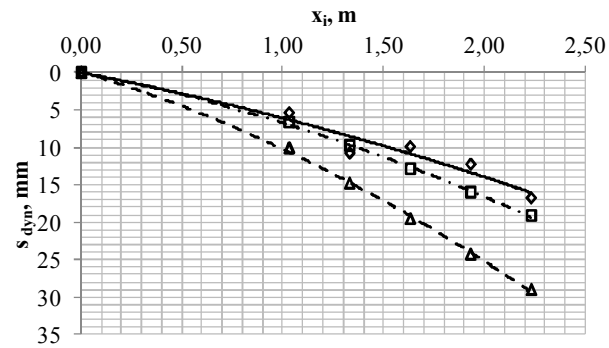
### 3.2 Dinaminių įlinkių rezultatų grafikai

#### Žymėjimai

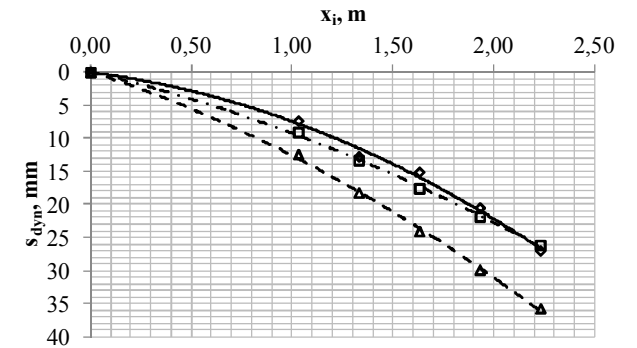
- ◆ Eksperimentinės reikšmės
- Rayleigh modelis
- ▲ Paprastasis modelis



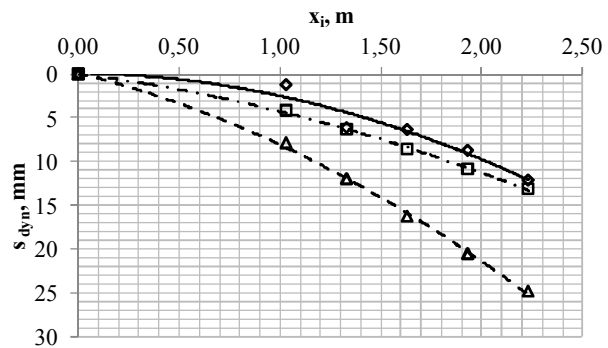
Pr-3.1 Pav. Apkraunama 1 taške, su 4 kg masės svarmeniu



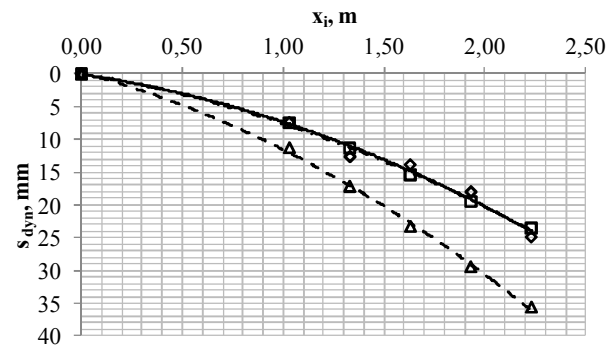
Pr-3.2 Pav. Apkraunama 1 taške, su 8 kg masės svarmeniu



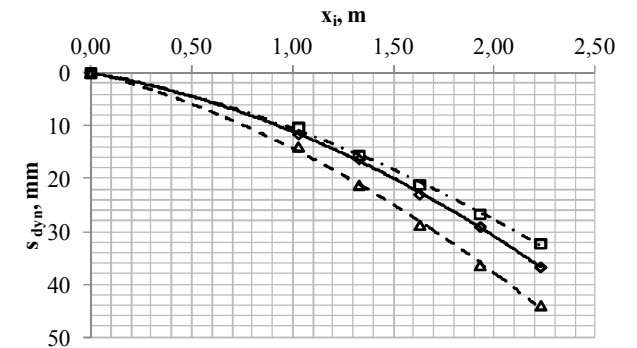
Pr-3.3 Pav. Apkraunama 1 taške, su 12 kg masės svarmeniu



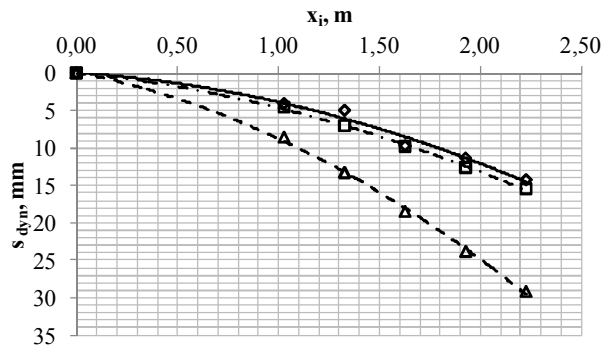
Pr-3.4 Pav. Apkraunama 2 taške, su 4 kg masės svarmeniu



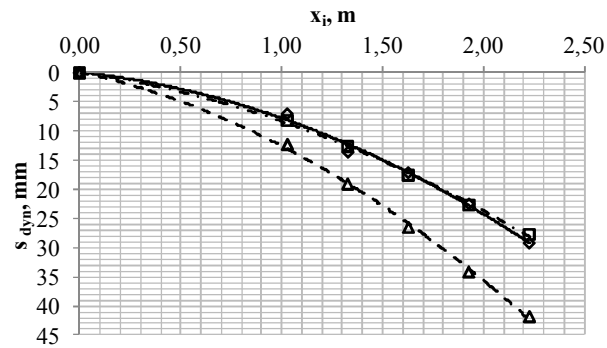
Pr-3.5 Pav. Apkraunama 2 taške, su 8 kg masės svarmeniu



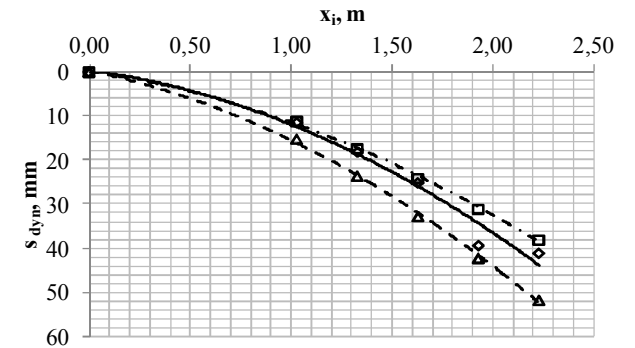
Pr-3.6 Pav. Apkraunama 2 taške, su 12 kg masės svarmeniu



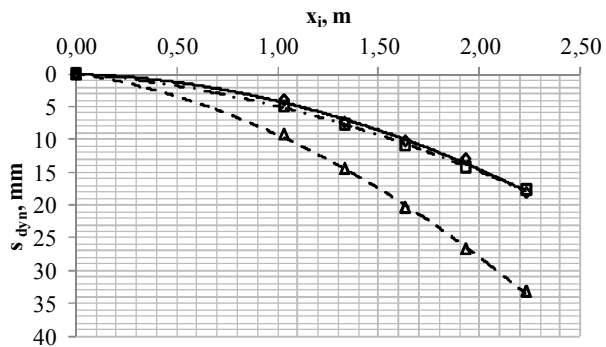
Pr-3.7 Pav. Apkraunama 3 taške, su 4 kg masės svarmeniu



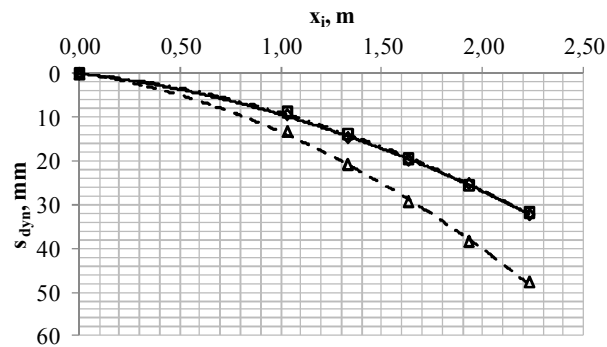
Pr-3.8 Pav. Apkraunama 3 taške, su 8 kg masės svarmeniu



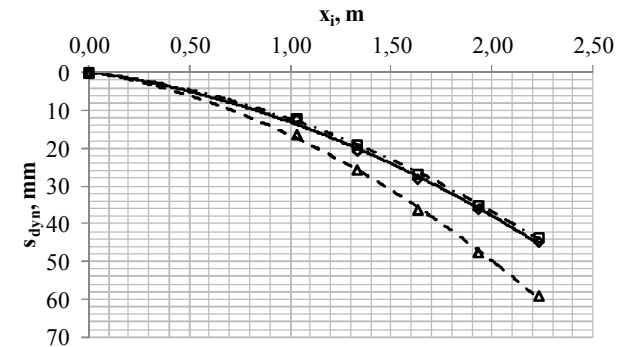
Pr-3.9 Pav. Apkraunama 3 taške, su 12 kg masės svarmeniu



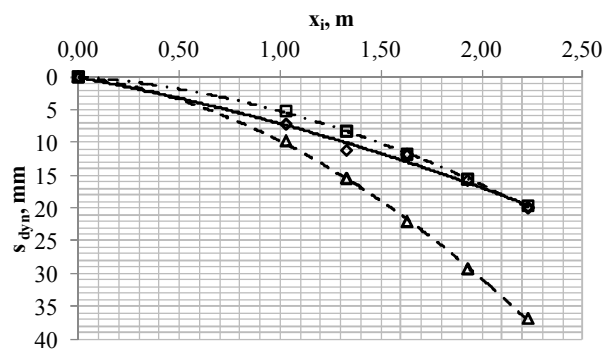
Pr-3.10 Pav. Apkraunama 4 taške, su 4 kg masės svarmeniu



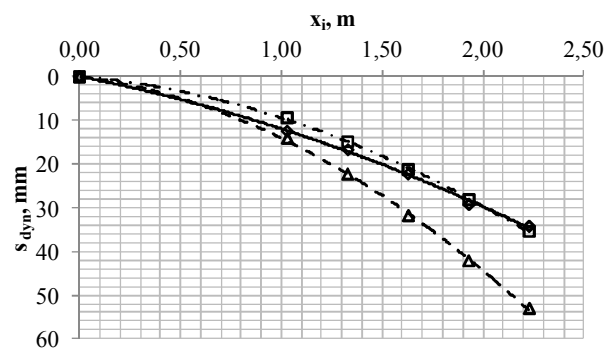
Pr-3.11 Pav. Apkraunama 4 taške, su 8 kg masės svarmeniu



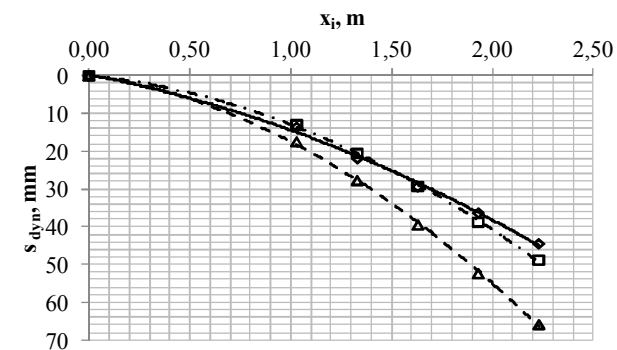
Pr-3.12 Pav. Apkraunama 4 taške, su 12 kg masės svarmeniu



**Pr-3.13 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 4 kg masės svarmeniu



**Pr-3.14 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 8 kg masės svarmeniu



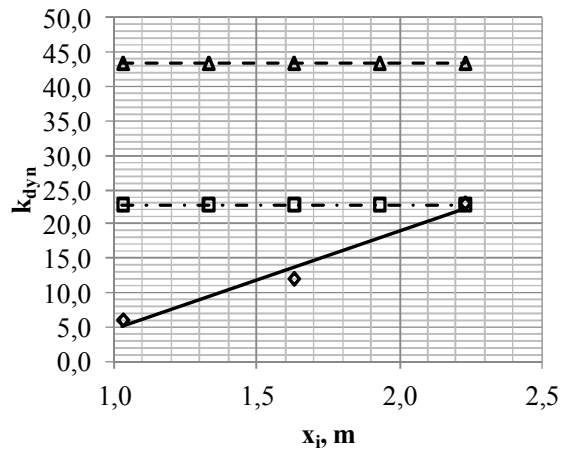
**Pr-3.15 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 12 kg masės svarmeniu



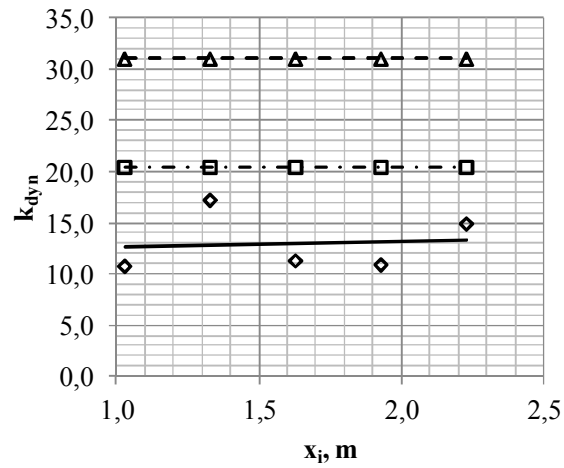
### 3.3 Dinaminio koeficiento $k_{dyn}$ rezultatų grafikai

Žymėjimai:

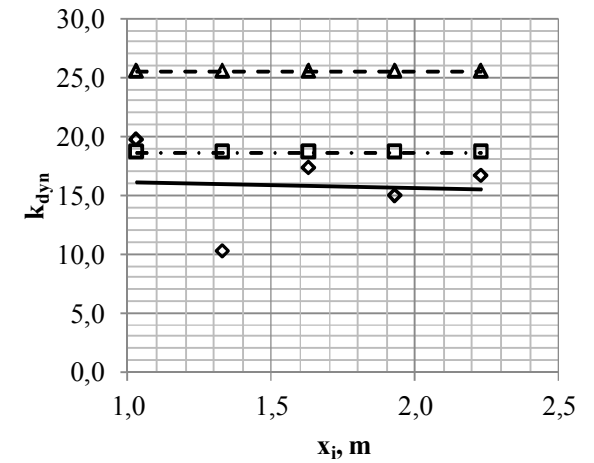
- ◊ Eksperimentinės reikšmės
- ◻ Rayleigh modelis
- ▲ Paprastasis modelis



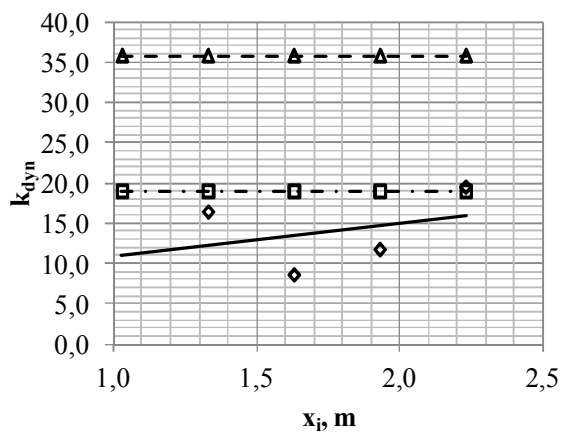
Pr-3.16 Pav. Apkraunama 1 taške, su 4 kg masės svarmeniu



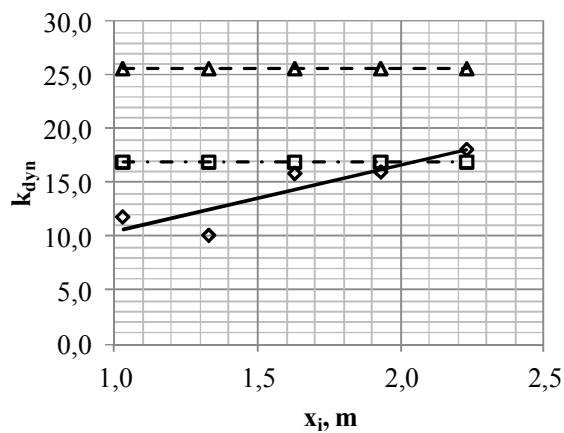
Pr-3.17 Pav. Apkraunama 1 taške, su 8 kg masės svarmeniu



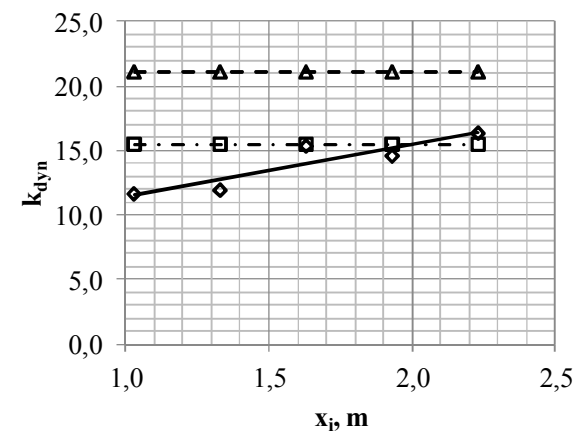
Pr-3.18 Pav. Apkraunama 1 taške, su 12 kg masės svarmeniu



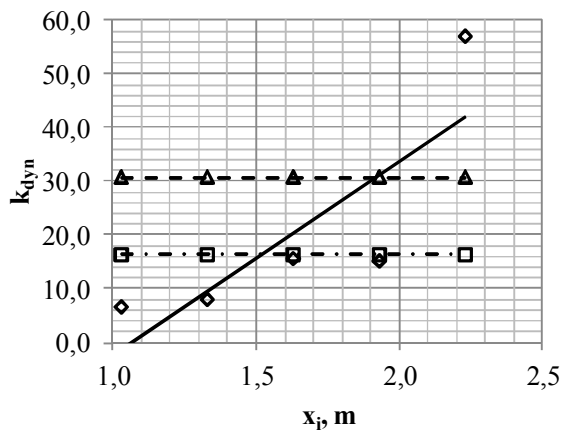
**Pr-3.19 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 4 kg masės svarmeniu



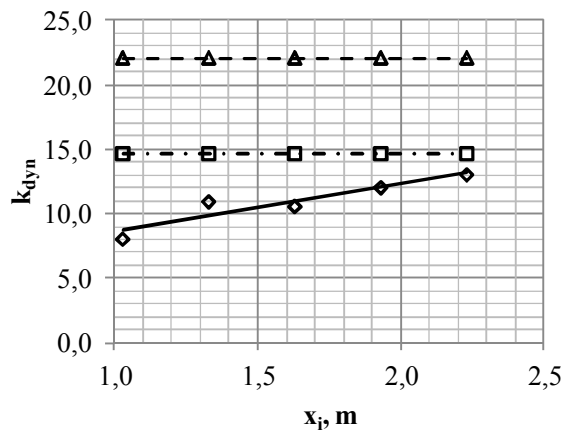
**Pr-3.20 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 8 kg masės svarmeniu



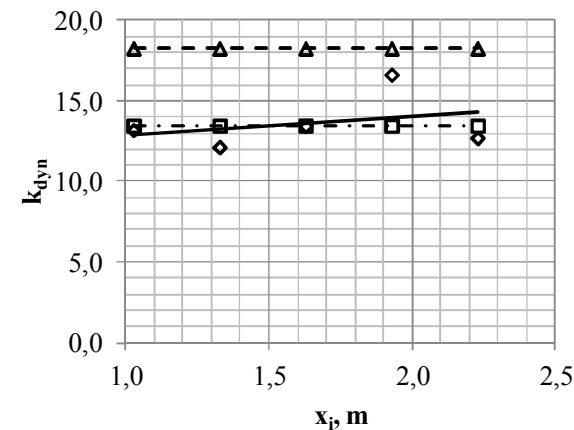
**Pr-3.21 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 12 kg masės svarmeniu



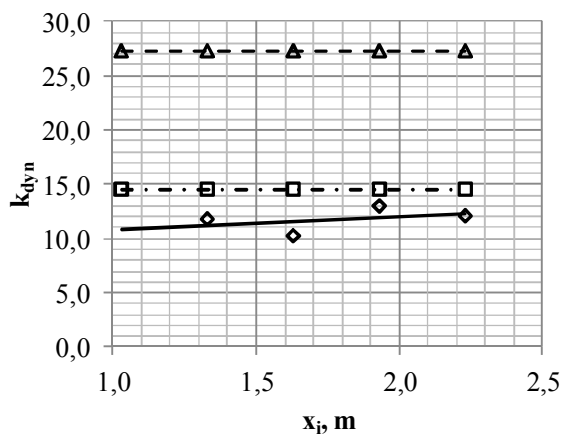
**Pr-3.22 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 4 kg masės svarmeniu



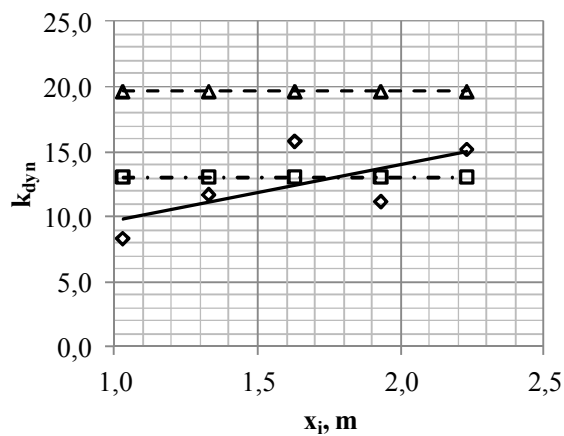
**Pr-3.23 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 8 kg masės svarmeniu



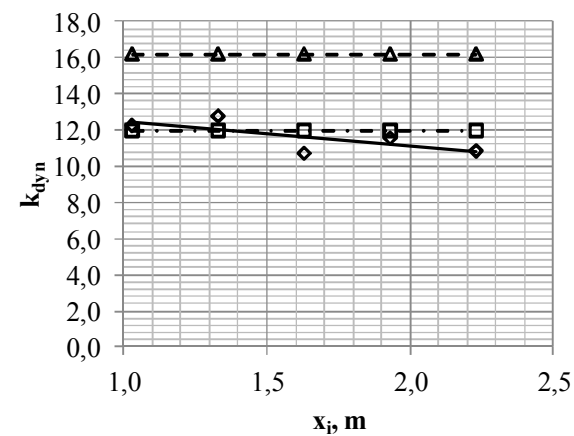
**Pr-3.24 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 12 kg masės svarmeniu



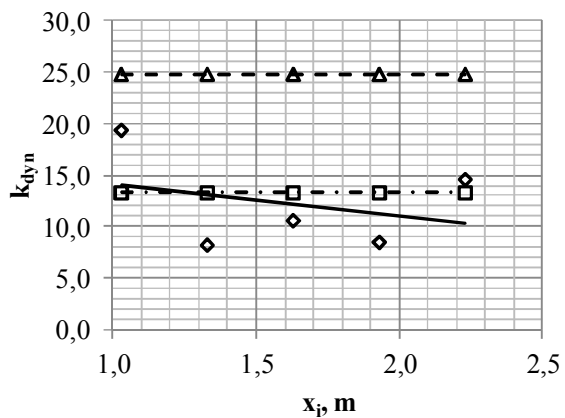
**Pr-3.25 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 4 kg masės svarmeniu



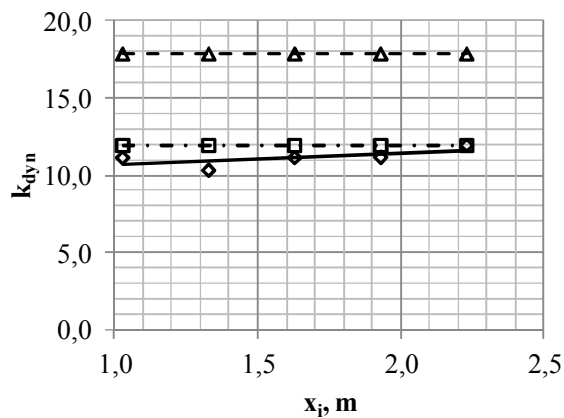
**Pr-3.26 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 8 kg masės svarmeniu



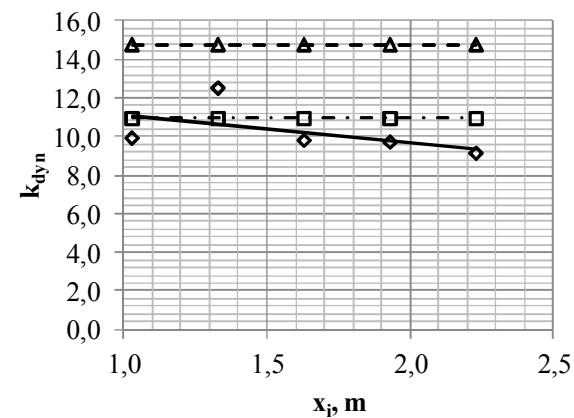
**Pr-3.27 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 12 kg masės svarmeniu



**Pr-3.28 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 4 kg masės svarmeniu



**Pr-3.29 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 8 kg masės svarmeniu

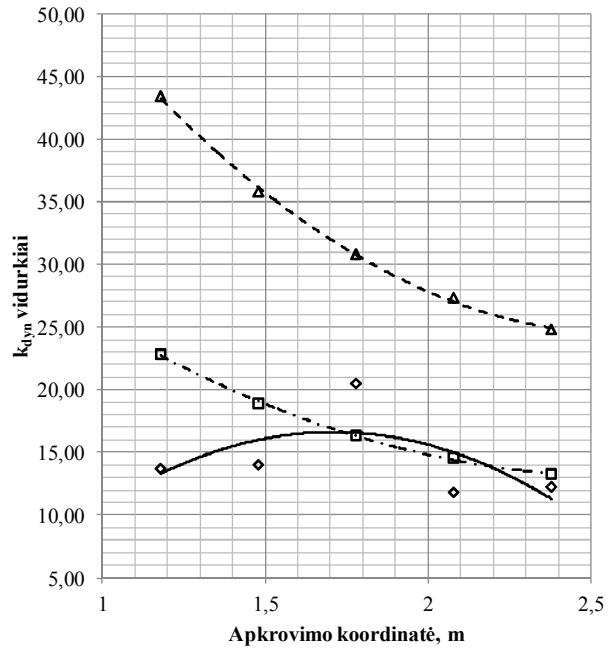


**Pr-3.30 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 12 kg masės svarmeniu

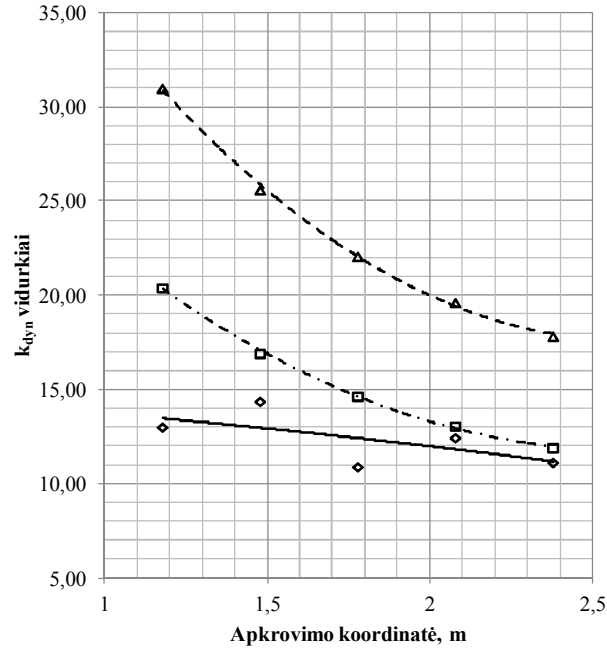
### 3.4 Dinaminio koeficiento $k_{dyn}$ priklausomybės nuo apkrovimo koordinatės

Žymėjimai:

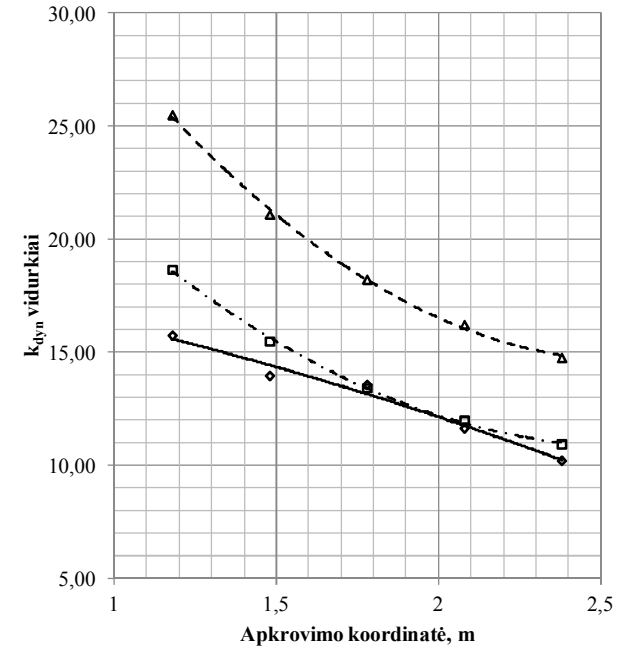
- ◊ Eksperimentinės reikšmės
- ◻ Rayleigh modelis
- ▲ Paprastas modelis



**Pr-3.31 Pav.** Vidurkinės  $k_{dyn}$  reikšmės apkraunant su 4 kg masės svarmeniu



**Pr-3.32 Pav.** Vidurkinės  $k_{dyn}$  reikšmės apkraunant su 8 kg masės svarmeniu



**Pr-3.33 Pav.** Vidurkinės  $k_{dyn}$  reikšmės apkraunant su 12 kg masės svarmeniu

## 4 Priedas

### Smūginių bandymų rezultatai, esant $h=320\text{mm}$

#### 4.1 Dinaminių įlinkių rezultatų lentelės

Lentelė Nr. Pr-4.1. Eksperimentiniai rezultatai

Apkrovimo taškas <i>j</i>	Matavimo taškas <i>i</i>	4 kg			8 kg			12 kg		
		$S_{st}$ mm	$k_{dyn}$	$S_{dyn}$ mm	$S_{st}$ mm	$k_{dyn}$	$S_{dyn}$ mm	$S_{st}$ mm	$k_{dyn}$	$S_{dyn}$ mm
1	A	0,5	3,0	1,5	0,9	5,4	4,8	0,6	11,4	7,1
	B	0,0	0,0	3,6	0,9	7,9	6,9	0,9	12,1	10,6
	C	0,4	11,7	4,4	0,8	11,2	8,4	1,3	10,8	13,5
	D	0,5	9,5	4,8	1,1	9,1	10,3	1,1	14,4	16,3
	E	0,8	9,8	7,4	1,4	10,3	14,1	1,8	12,6	22,1
2	A	0,6	4,0	2,5	0,9	7,9	6,9	0,4	23,3	8,8
	B	0,3	17,0	4,3	0,5	18,3	9,1	0,9	15,7	13,8
	C	0,5	11,3	5,6	1,0	12,3	12,3	1,5	12,1	18,1
	D	0,8	8,3	6,3	1,6	9,5	15,4	2,0	11,4	22,9
	E	1,1	8,8	9,9	1,5	14,4	21,6	2,4	12,8	30,5
3	A	0,6	5,4	3,4	0,6	9,2	5,8	0,9	11,1	9,8
	B	0,8	6,5	4,9	1,1	8,3	9,4	1,9	8,6	16,1
	C	0,3	29,5	7,4	1,4	10,6	14,6	2,0	11,0	22,0
	D	0,8	12,0	9,0	2,0	9,0	18,0	2,6	10,4	27,4
	E	0,9	13,6	11,9	2,1	11,1	23,6	3,0	11,5	34,5
4	A	0,3	12,0	3,0	1,0	7,9	7,9	1,1	8,8	9,9
	B	0,5	11,0	5,5	1,6	7,5	12,3	2,3	7,3	16,5
	C	1,1	7,2	8,1	1,5	11,7	17,5	2,8	8,4	23,0
	D	1,0	10,3	10,3	2,9	8,0	23,0	3,6	8,3	30,0
	E	1,6	8,3	13,5	2,9	11,2	32,3	4,5	8,6	38,6
5	A	1,0	4,6	4,6	1,3	6,7	8,4	2,0	6,4	12,8
	B	1,1	5,9	6,6	1,6	7,9	12,9	2,3	8,4	18,9
	C	1,1	8,7	9,8	2,0	8,2	16,4	3,0	7,9	23,8
	D	1,4	8,7	12,0	3,1	7,2	22,5	4,0	7,5	29,9
	E	1,9	8,5	15,9	3,1	9,2	28,8	5,0	7,9	39,3

Lentelė Nr. Pr-4.2. Teoriniai rezultatai pagal *paprastąjį* metodą

Apkrovimo taškas <i>j</i>	Matavimo taškas <i>i</i>	4 kg			8 kg			12 kg		
		S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm
1	A	0,2	38,0	6,2	0,3	27,2	8,8	0,5	22,4	10,9
	B	0,2		9,1	0,5		13,0	0,7		16,0
	C	0,3		12,0	0,6		17,1	0,9		21,1
	D	0,4		14,9	0,8		21,3	1,2		26,3
	E	0,5		17,8	0,9		25,4	1,4		31,4
2	A	0,2	31,3	6,9	0,4	22,5	9,9	0,7	18,5	12,3
	B	0,3		10,5	0,7		15,1	1,0		18,7
	C	0,5		14,3	0,9		20,5	1,4		25,3
	D	0,6		18,0	1,2		25,9	1,7		32,0
	E	0,7		21,8	1,4		31,3	2,1		38,7
3	A	0,3	27,0	7,5	0,6	19,4	10,8	0,8	16,0	13,4
	B	0,4		11,7	0,9		16,8	1,3		20,8
	C	0,6		16,2	1,2		23,3	1,8		28,9
	D	0,8		20,9	1,5		30,0	2,3		37,2
	E	0,9		25,6	1,9		36,8	2,8		45,6
4	A	0,3	24,0	8,1	0,7	17,3	11,6	1,0	14,3	14,4
	B	0,5		12,7	1,1		18,3	1,6		22,7
	C	0,7		17,9	1,5		25,8	2,2		32,0
	D	1,0		23,5	2,0		33,8	2,9		41,9
	E	1,2		29,1	2,4		42,0	3,6		52,1
5	A	0,4	21,8	8,6	0,8	15,7	12,4	1,2	13,0	15,4
	B	0,6		13,6	1,3		19,7	1,9		24,5
	C	0,9		19,4	1,8		28,0	2,7		34,8
	D	1,2		25,7	2,4		37,1	3,5		46,2
	E	1,5		32,4	3,0		46,7	4,5		58,1

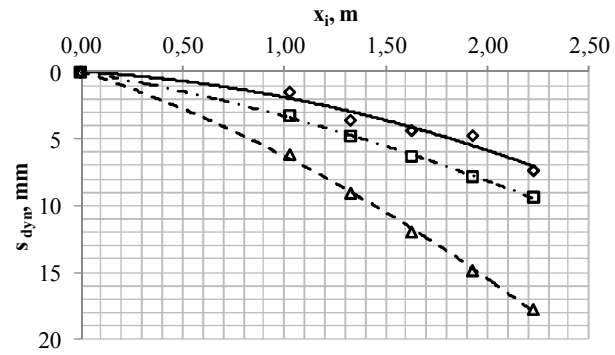
Lentelė Nr. Pr-4.3. Teoriniai rezultatai pagal *Rayleigh* metodą

Apkrovimo taškas <i>j</i>	Matavimo taškas <i>i</i>	4 kg			8 kg			12 kg		
		S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm
1	A	0,2	20,0	3,3	0,3	17,9	5,8	0,5	16,4	8,0
	B	0,2		4,8	0,5		8,6	0,7		11,7
	C	0,3		6,3	0,6		11,3	0,9		15,5
	D	0,4		7,8	0,8		14,0	1,2		19,3
	E	0,5		9,4	0,9		16,8	1,4		23,0
2	A	0,2	16,6	3,7	0,4	14,9	6,6	0,7	13,6	9,0
	B	0,3		5,6	0,7		10,0	1,0		13,7
	C	0,5		7,6	0,9		13,6	1,4		18,6
	D	0,6		9,6	1,2		17,1	1,7		23,6
	E	0,7		11,6	1,4		20,7	2,1		28,5
3	A	0,3	14,4	4,0	0,6	12,9	7,2	0,8	11,8	9,9
	B	0,4		6,2	0,9		11,2	1,3		15,4
	C	0,6		8,6	1,2		15,5	1,8		21,4
	D	0,8		11,1	1,5		20,0	2,3		27,5
	E	0,9		13,6	1,9		24,5	2,8		33,7
4	A	0,3	12,8	4,3	0,7	11,5	7,8	1,0	10,6	10,7
	B	0,5		6,8	1,1		12,2	1,6		16,8
	C	0,7		9,6	1,5		17,2	2,2		23,7
	D	1,0		12,6	2,0		22,6	2,9		31,1
	E	1,2		15,6	2,4		28,0	3,6		38,6
5	A	0,4	11,7	4,6	0,8	10,5	8,3	1,2	9,7	11,5
	B	0,6		7,3	1,3		13,2	1,9		18,2
	C	0,9		10,4	1,8		18,8	2,7		25,9
	D	1,2		13,8	2,4		24,9	3,5		34,3
	E	1,5		17,4	3,0		31,3	4,5		43,2

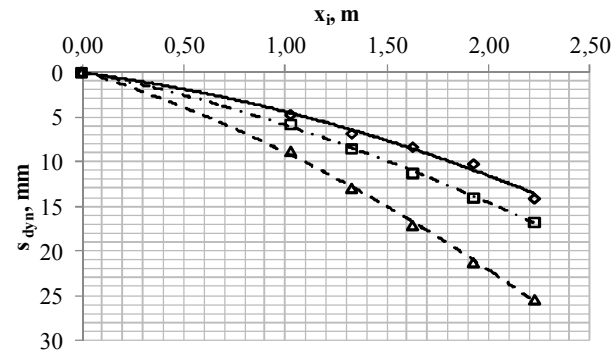
## 4.2 Dinaminių įlinkių rezultatų grafikai

### Žymėjimai

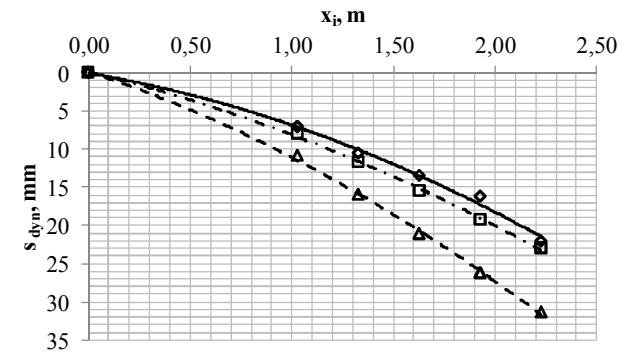
- ◆ Eksperimentinės reikšmės
- Rayleigh modelis
- ▲ Paprastas modelis



Pr-4.1 Pav. Apkraunama 1 taške, su 4 kg masės svarmeniu

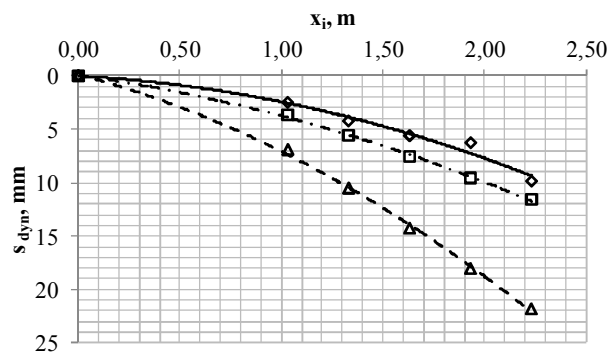


Pr-4.2 Pav. Apkraunama 1 taške, su 8 kg masės svarmeniu

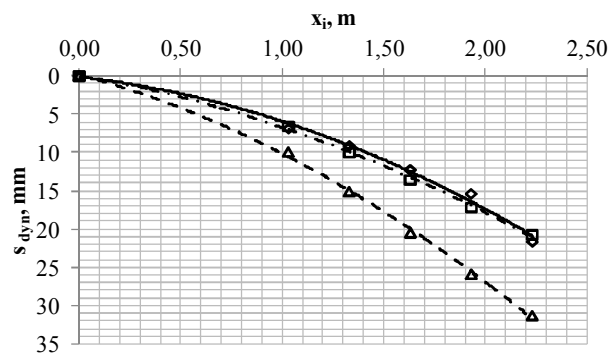


Pr-4.3 Pav. Apkraunama 1 taške, su 12 kg masės svarmeniu

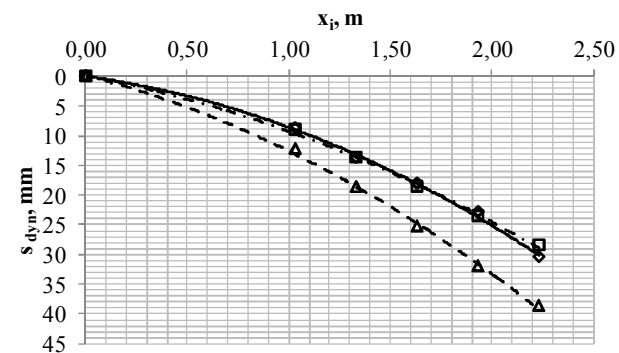




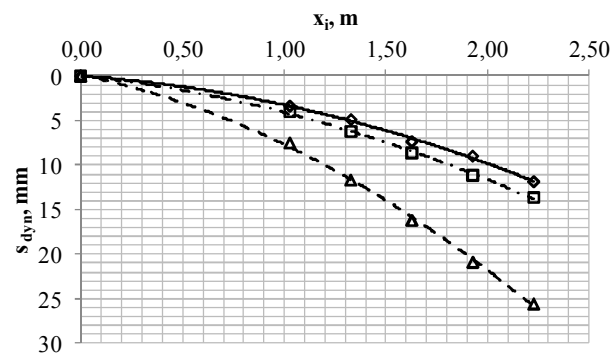
**Pr-4.4 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 4 kg masės svarmeniu



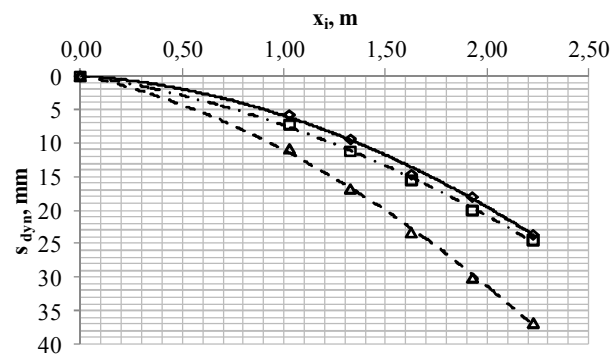
**Pr-4.5 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 8 kg masės svarmeniu



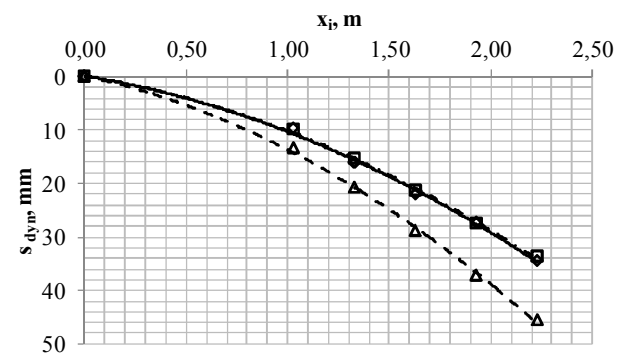
**Pr-4.6 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 12 kg masės svarmeniu



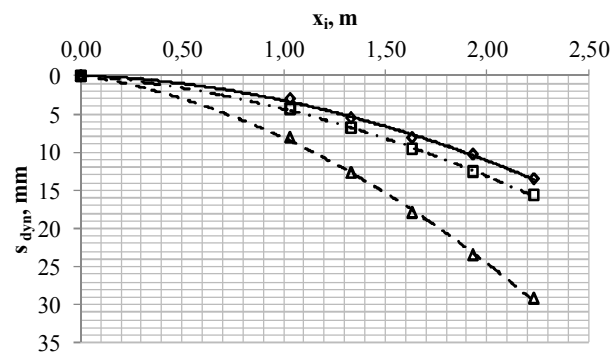
**Pr-4.7 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 4 kg masės svarmeniu



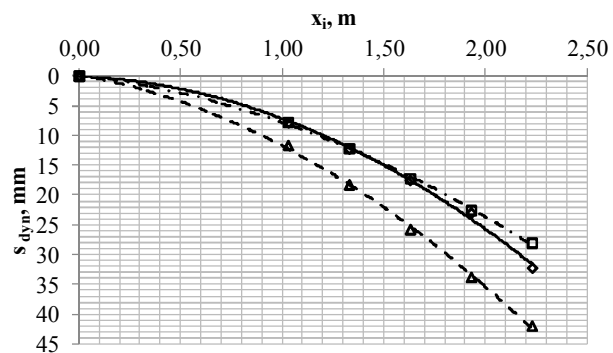
**Pr-4.8 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 8 kg masės svarmeniu



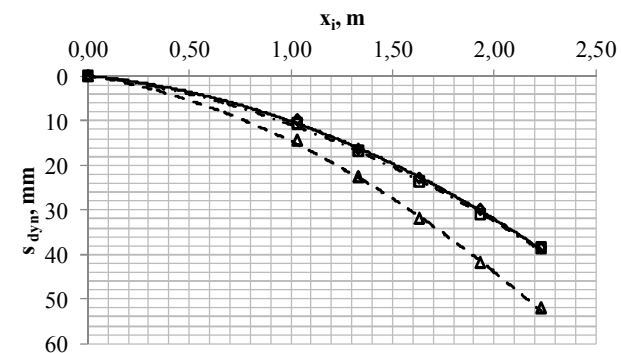
**Pr-4.9 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 12 kg masės svarmeniu



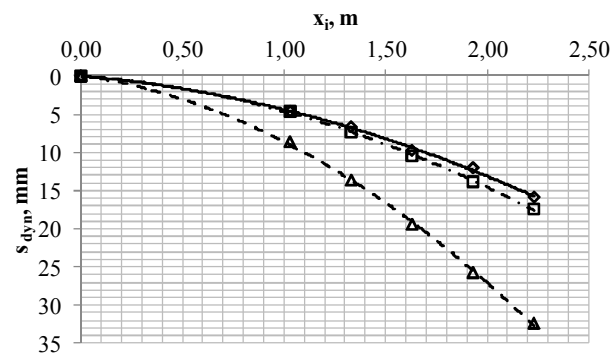
**Pr-4.10 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 4 kg masės svarmeniu



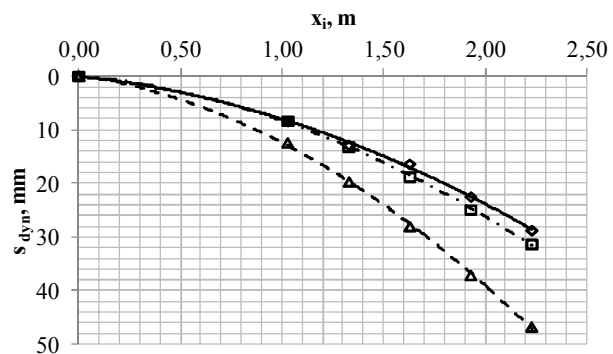
**Pr-4.11 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 8 kg masės svarmeniu



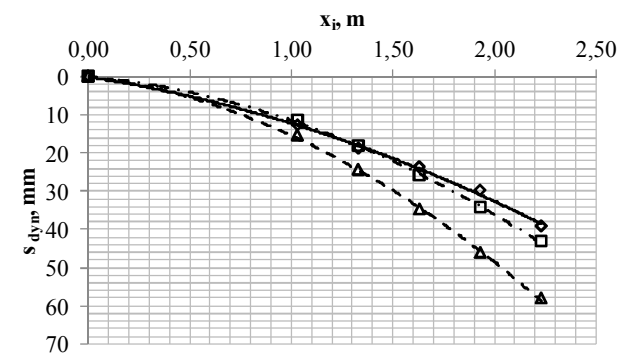
**Pr-4.12 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 12 kg masės svarmeniu



**Pr-4.13 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 4 kg masės svarmeniu



**Pr-4.14 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 8 kg masės svarmeniu

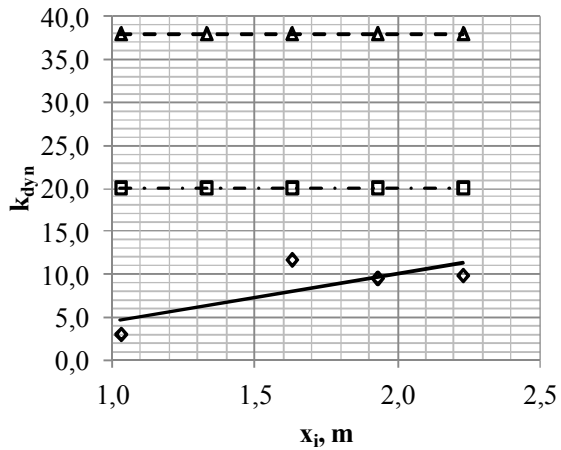


**Pr-4.15 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 12 kg masės svarmeniu

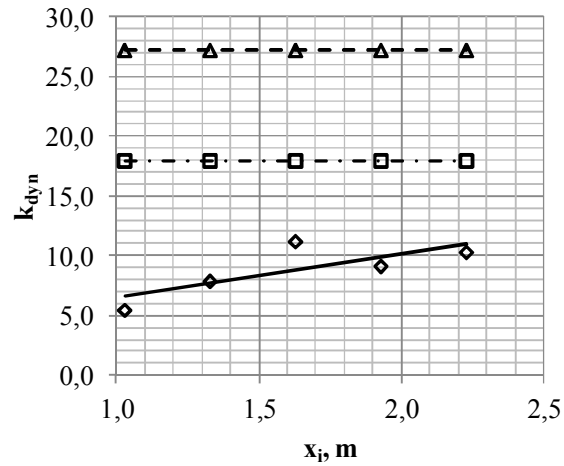
### 4.3 Dinaminio koeficiento $k_{dyn}$ rezultatų grafikai

Žymėjimai:

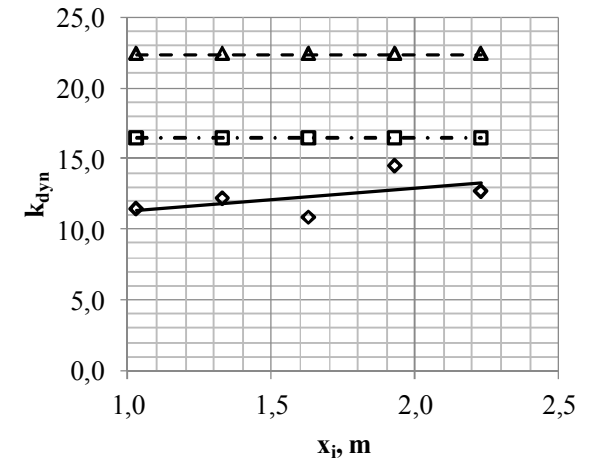
- ◆ Eksperimentinės reikšmės
- Rayleigh modelis
- ▲ Paprastasis modelis



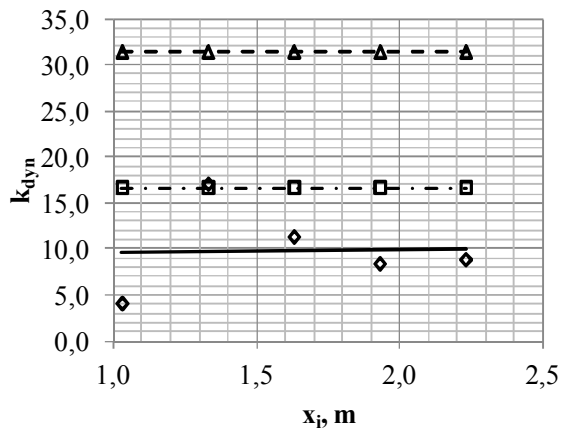
Pr-4.16 Pav. Apkraunama 1 taške, su 4 kg masės svarmeniu



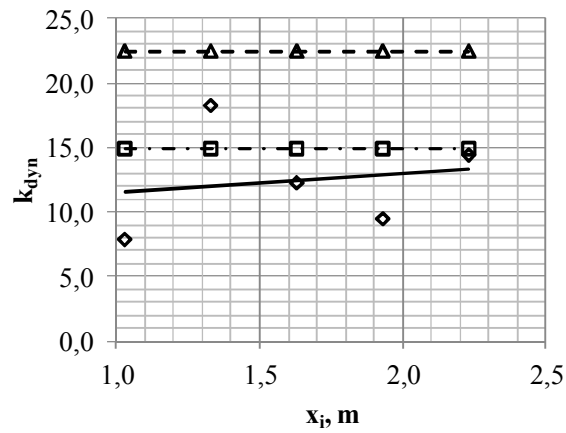
Pr-4.17 Pav. Apkraunama 1 taške, su 8 kg masės svarmeniu



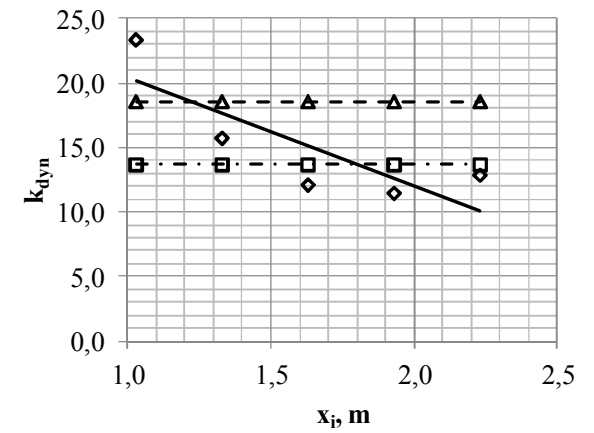
Pr-4.18 Pav. Apkraunama 1 taške, su 12 kg masės svarmeniu



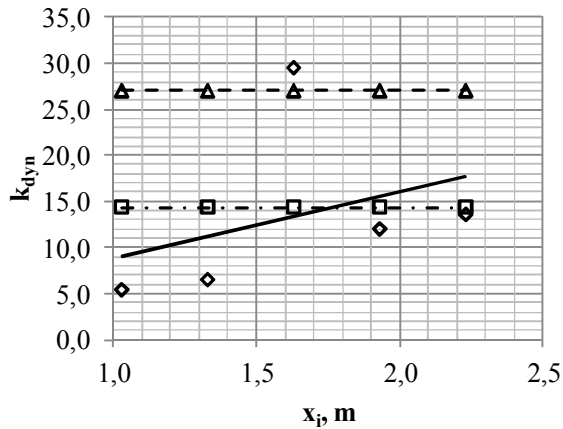
**Pr-4.19 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 4 kg masės svarmeniu



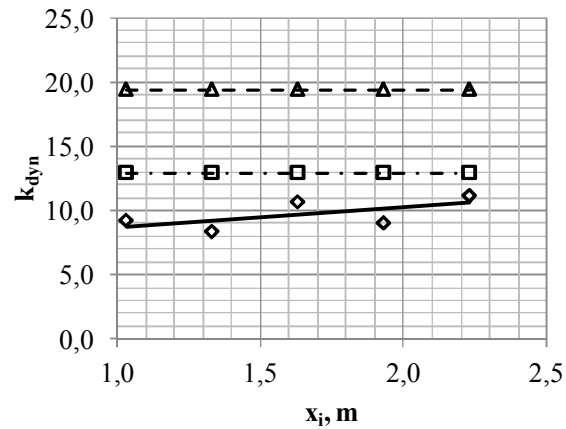
**Pr-4.20 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 8 kg masės svarmeniu



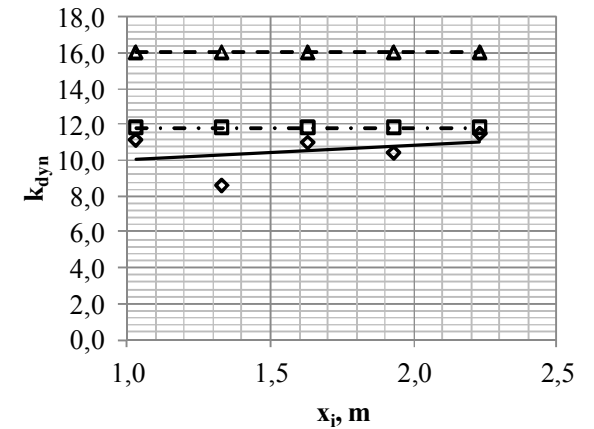
**Pr-4.21 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 12 kg masės svarmeniu



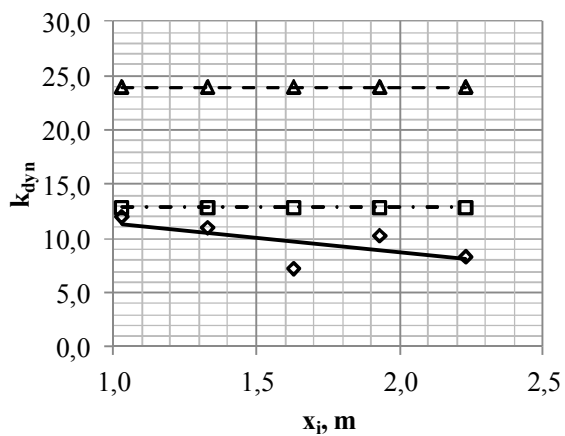
**Pr-4.22 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 4 kg masės svarmeniu



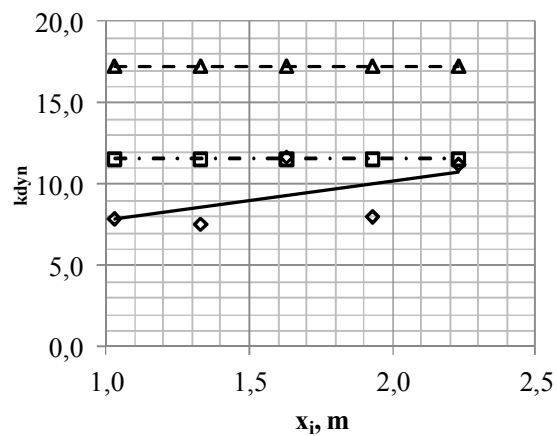
**Pr-4.23 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 8 kg masės svarmeniu



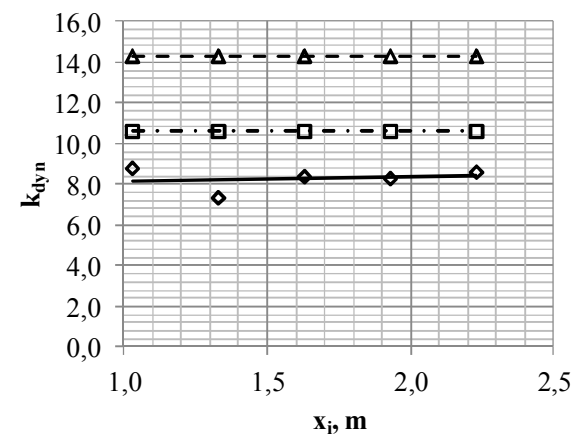
**Pr-4.24 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 12 kg masės svarmeniu



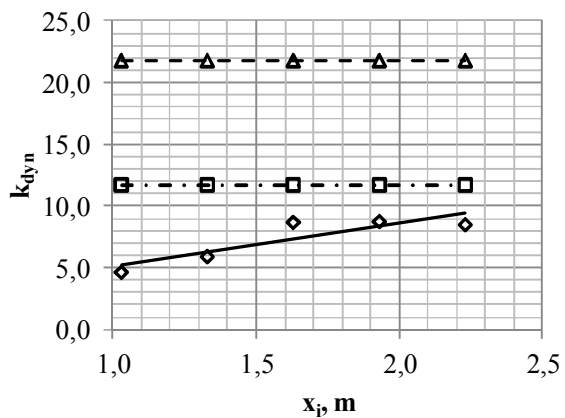
**Pr-4.25 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 4 kg masės svarmeniu



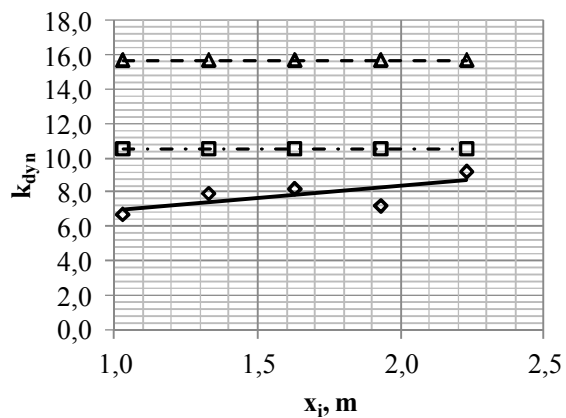
**Pr-4.26 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 8 kg masės svarmeniu



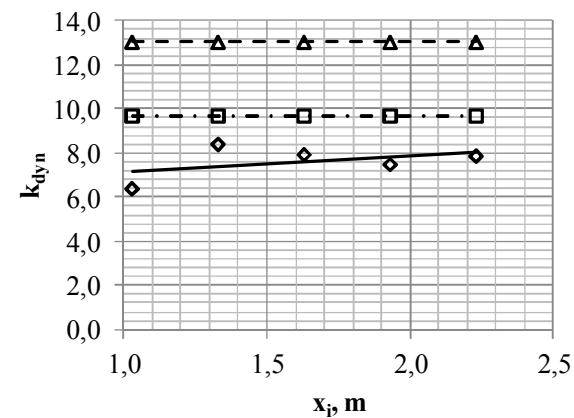
**Pr-4.27 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 12 kg masės svarmeniu



**Pr-4.28 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 4 kg masės svarmeniu



**Pr-4.29 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 8 kg masės svarmeniu

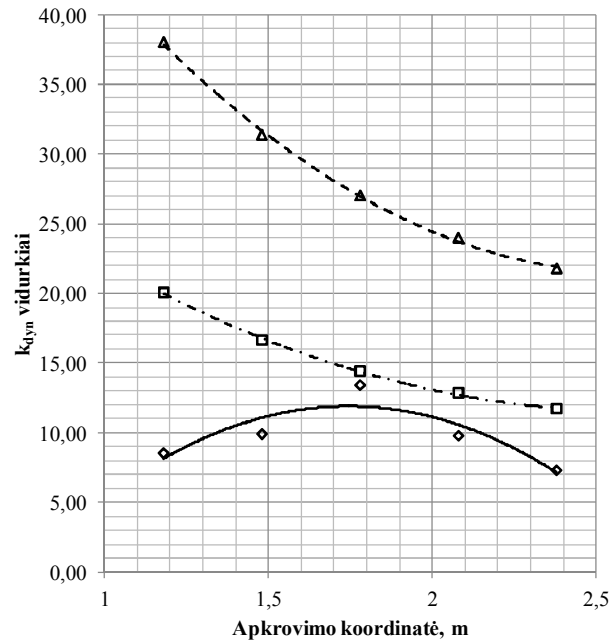


**Pr-4.30 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 12 kg masės svarmeniu

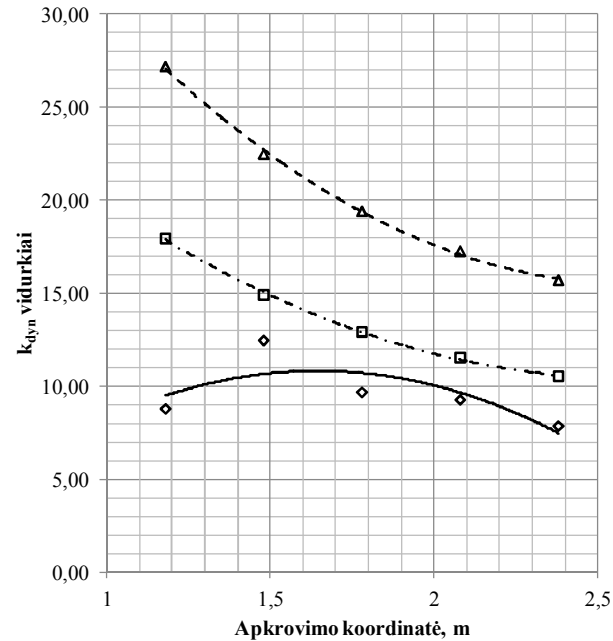
#### 4.4 Dinaminio koeficiento $k_{dyn}$ priklausomybės nuo apkrovimo koordinatės

Žymėjimai:

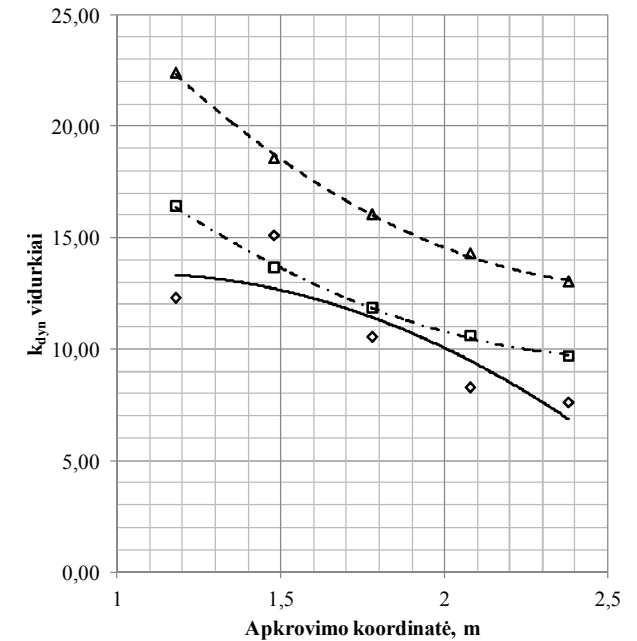
- ◆ Eksperimentinės reikšmės
- Rayleigh modelis
- ▲ Paprastas modelis



Pr-4.31 Pav. Vidurkinės  $k_{dyn}$  reikšmės apkraunant su 4 kg masės svarmeniu



Pr-4.32 Pav. Vidurkinės  $k_{dyn}$  reikšmės apkraunant su 8 kg masės svarmeniu



Pr-4.33 Pav. Vidurkinės  $k_{dyn}$  reikšmės apkraunant su 12 kg masės svarmeniu

## 5 Priedas

### Smūginių bandymų rezultatai, esant $h=220\text{mm}$

#### 5.1 Dinaminių įlinkių rezultatų lentelės

Lentelė Nr. Pr-5.1. Eksperimentiniai rezultatai

Apkrovimo taškas <i>j</i>	Matavimo taškas <i>i</i>	4 kg			8 kg			12 kg		
		S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm
1	A	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,0	0,8	6,8	5,1
	B	0,9	4,0	3,5	0,3	21,5	5,4	0,6	16,2	10,1
	C	0,1	24,0	3,0	0,9	8,7	7,6	1,4	7,5	10,3
	D	0,4	8,7	3,3	0,6	12,4	7,8	1,5	9,2	13,8
	E	0,3	22,5	5,6	1,0	11,5	11,5	2,1	8,9	18,9
2	A	0,5	5,0	2,5	0,4	12,7	4,8	0,5	11,8	5,9
	B	0,5	5,8	2,9	0,8	8,3	6,3	1,3	7,4	9,3
	C	0,1	35,0	4,4	1,1	8,6	9,6	1,4	9,4	12,9
	D	0,9	6,0	5,3	1,3	8,4	10,5	2,0	8,6	17,3
	E	1,3	6,0	7,5	1,5	10,2	15,3	2,4	9,3	22,0
3	A	0,4	0,0	0,0	1,0	5,3	5,3	1,1	5,8	6,5
	B	0,8	4,2	3,1	1,0	7,4	7,4	1,6	6,0	9,8
	C	1,1	4,7	5,3	1,6	6,2	10,1	2,1	6,6	14,0
	D	0,6	10,6	6,6	1,8	7,7	13,5	2,8	7,0	19,4
	E	1,0	9,9	9,9	2,1	8,9	18,9	3,1	8,2	25,5
4	A	0,0	0,0	0,0	1,0	6,3	6,3	1,3	5,8	7,3
	B	0,4	9,3	3,5	1,4	6,5	9,0	2,1	6,2	13,3
	C	0,9	6,1	5,4	1,8	7,8	13,6	2,8	6,1	16,9
	D	1,0	7,3	7,3	2,4	6,8	16,1	3,3	7,3	23,8
	E	1,8	5,9	10,4	2,6	8,2	21,6	4,6	6,3	29,0
5	A	0,5	6,8	3,4	0,8	10,0	7,5	1,0	8,1	8,1
	B	0,6	7,6	4,8	1,4	7,5	10,3	2,3	6,2	14,0
	C	0,6	9,8	6,1	1,6	8,9	14,5	2,8	6,7	18,4
	D	1,3	6,1	7,6	2,5	8,2	20,4	3,8	6,6	24,8
	E	1,8	7,0	12,3	3,4	6,6	22,4	4,9	6,2	30,4

Lentelė Nr. Pr-5.2. Teoriniai rezultatai pagal *paprastąjį* metodą

Apkrovimo taškas <i>j</i>	Matavimo taškas <i>i</i>	4 kg			8 kg			12 kg		
		S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm
1	A	0,2	31,7	5,1	0,3	22,7	7,4	0,5	18,7	9,1
	B	0,2		7,6	0,5		10,8	0,7		13,4
	C	0,3		10,0	0,6		14,3	0,9		17,7
	D	0,4		12,4	0,8		17,8	1,2		22,0
	E	0,5		14,8	0,9		21,2	1,4		26,3
2	A	0,2	26,2	5,8	0,4	18,8	8,3	0,7	15,6	10,3
	B	0,3		8,8	0,7		12,6	1,0		15,6
	C	0,5		11,9	0,9		17,1	1,4		21,2
	D	0,6		15,1	1,2		21,7	1,7		26,9
	E	0,7		18,2	1,4		26,2	2,1		32,5
3	A	0,3	22,6	6,3	0,6	16,3	9,1	0,8	13,5	11,3
	B	0,4		9,8	0,9		14,1	1,3		17,5
	C	0,6		13,6	1,2		19,5	1,8		24,3
	D	0,8		17,5	1,5		25,2	2,3		31,3
	E	0,9		21,4	1,9		30,8	2,8		38,3
4	A	0,3	20,1	6,8	0,7	14,5	9,8	1,0	12,0	12,2
	B	0,5		10,6	1,1		15,3	1,6		19,1
	C	0,7		15,0	1,5		21,6	2,2		26,9
	D	1,0		19,6	2,0		28,4	2,9		35,3
	E	1,2		24,4	2,4		35,2	3,6		43,9
5	A	0,4	18,2	7,2	0,8	13,2	10,4	1,2	11,0	13,0
	B	0,6		11,4	1,3		16,5	1,9		20,6
	C	0,9		16,3	1,8		23,6	2,7		29,4
	D	1,2		21,6	2,4		31,2	3,5		39,0
	E	1,5		27,1	3,0		39,3	4,5		49,0



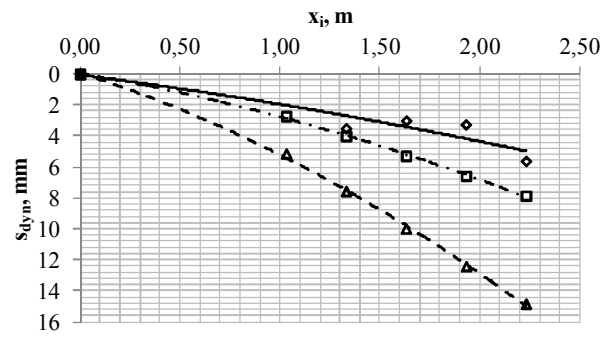
Lentelė Nr. Pr-5.3. Teoriniai rezultatai pagal *Rayleigh* metodą

Apkrovimo taškas <i>j</i>	Matavimo taškas <i>i</i>	4 kg			8 kg			12 kg		
		S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm	S <sub>st</sub> mm	k <sub>dyn</sub>	S <sub>dyn</sub> mm
1	A	0,2	16,8	2,7	0,3	15,1	4,9	0,5	13,8	6,7
	B	0,2		4,0	0,5		7,2	0,7		9,9
	C	0,3		5,3	0,6		9,5	0,9		13,0
	D	0,4		6,6	0,8		11,8	1,2		16,2
	E	0,5		7,9	0,9		14,1	1,4		19,3
2	A	0,2	14,0	3,1	0,4	12,5	5,5	0,7	11,5	7,6
	B	0,3		4,7	0,7		8,4	1,0		11,6
	C	0,5		6,4	0,9		11,4	1,4		15,7
	D	0,6		8,0	1,2		14,4	1,7		19,9
	E	0,7		9,7	1,4		17,4	2,1		24,0
3	A	0,3	12,1	3,4	0,6	10,9	6,1	0,8	10,0	8,4
	B	0,4		5,2	0,9		9,4	1,3		13,0
	C	0,6		7,3	1,2		13,1	1,8		18,0
	D	0,8		9,4	1,5		16,9	2,3		23,3
	E	0,9		11,5	1,9		20,7	2,8		28,5
4	A	0,3	10,8	3,6	0,7	9,8	6,6	1,0	9,0	9,1
	B	0,5		5,7	1,1		10,3	1,6		14,2
	C	0,7		8,1	1,5		14,6	2,2		20,1
	D	1,0		10,6	2,0		19,1	2,9		26,3
	E	1,2		13,2	2,4		23,7	3,6		32,7
5	A	0,4	9,9	3,9	0,8	8,9	7,1	1,2	8,2	9,7
	B	0,6		6,2	1,3		11,2	1,9		15,4
	C	0,9		8,8	1,8		15,9	2,7		22,0
	D	1,2		11,7	2,4		21,1	3,5		29,2
	E	1,5		14,7	3,0		26,6	4,5		36,7

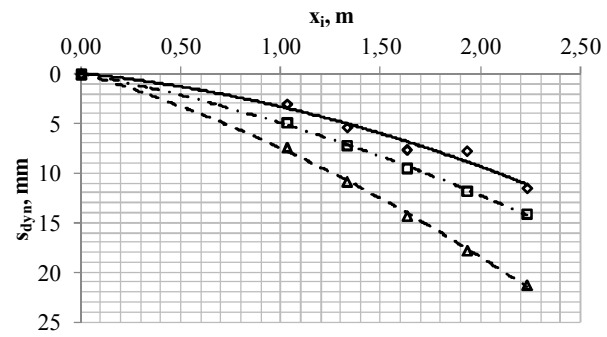
## 5.2 Dinaminių įlinkių rezultatų grafikai

### Žymėjimai

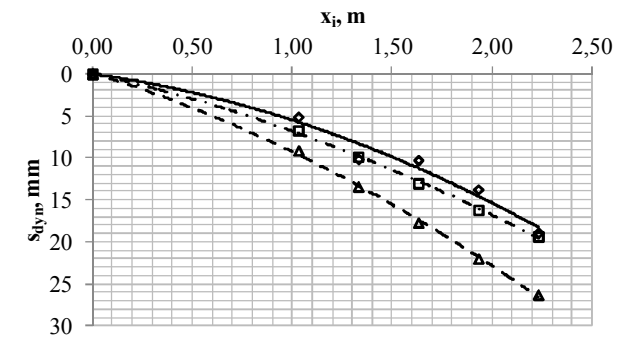
- ◆ Eksperimentinės reikšmės
- Rayleigh modelis
- ▲ Paprastasis modelis



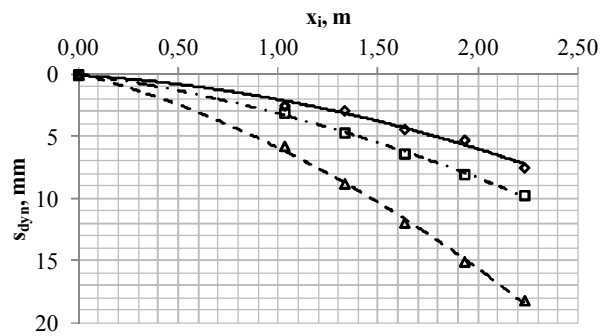
Pr-5.1 Pav. Apkraunama 1 taške, su 4 kg masės svarmeniu



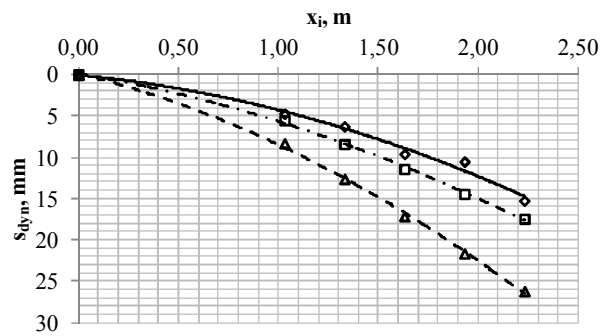
Pr-5.2 Pav. Apkraunama 1 taške, su 8 kg masės svarmeniu



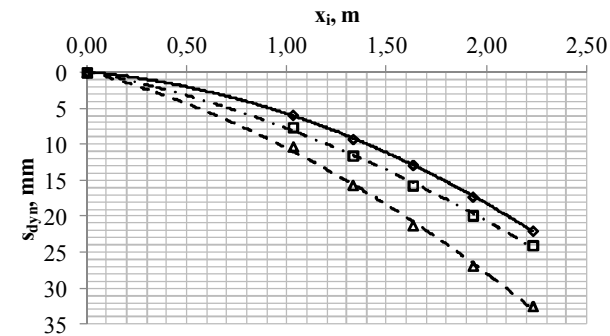
Pr-5.3 Pav. Apkraunama 1 taške, su 12 kg masės svarmeniu



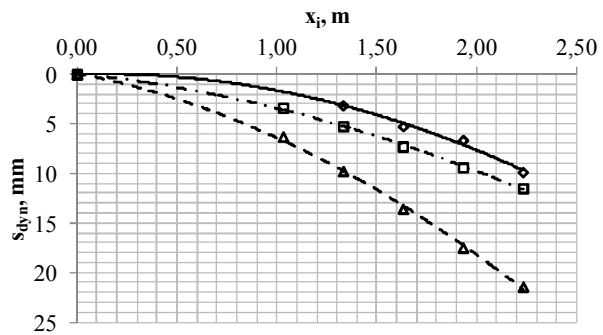
**Pr-5.4 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 4 kg masės svarmeniu



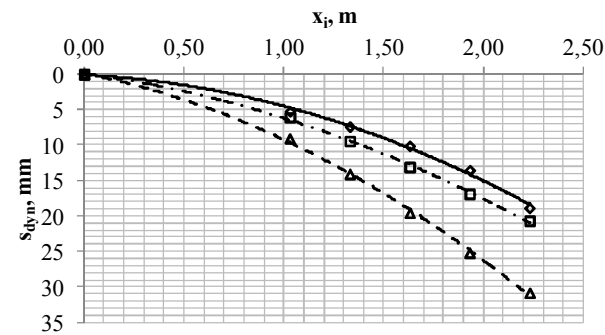
**Pr-5.5 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 8 kg masės svarmeniu



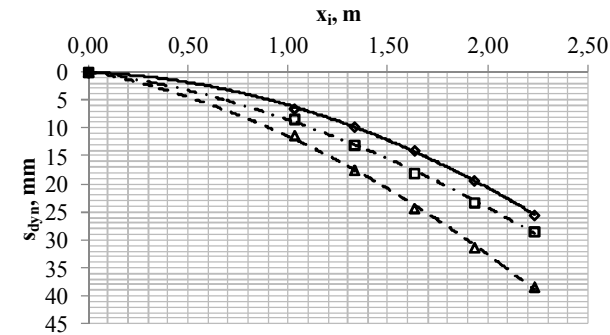
**Pr-5.6 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 12 kg masės svarmeniu



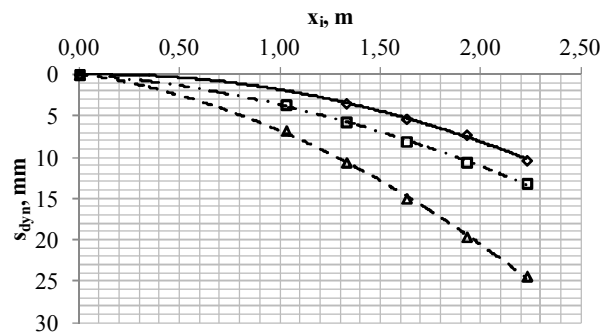
**Pr-5.7 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 4 kg masės svarmeniu



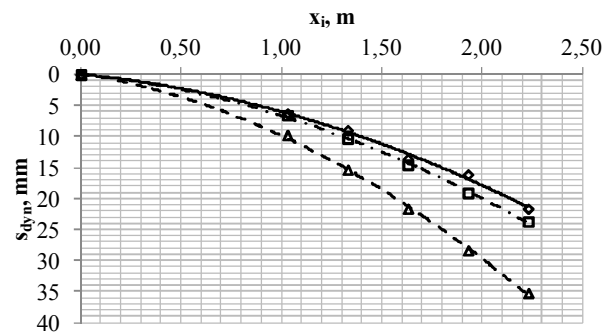
**Pr-5.8 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 8 kg masės svarmeniu



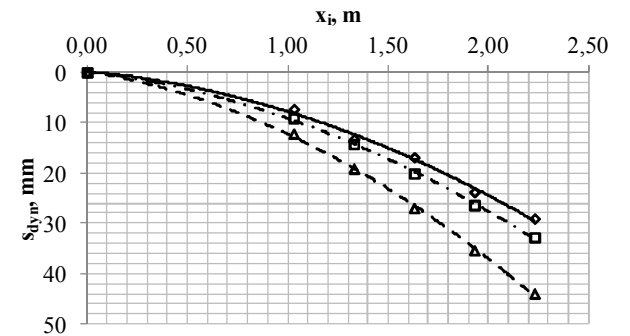
**Pr-5.9 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 12 kg masės svarmeniu



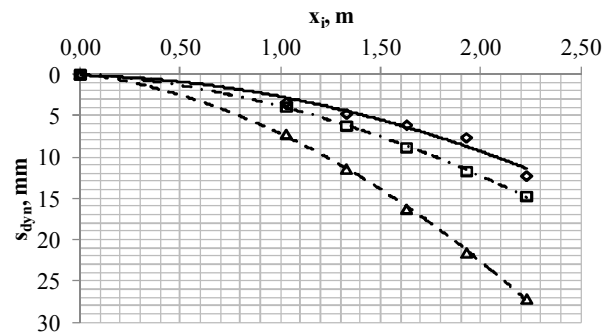
**Pr-5.10 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 4 kg masės svarmeniu



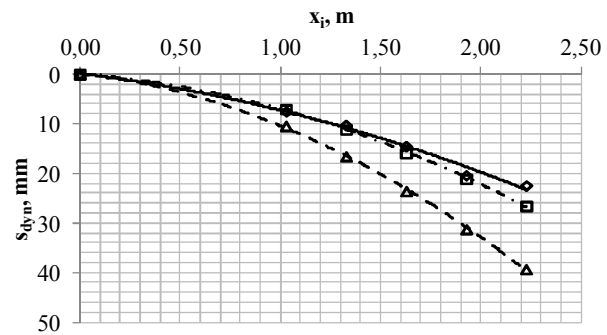
**Pr-5.11 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 8 kg masės svarmeniu



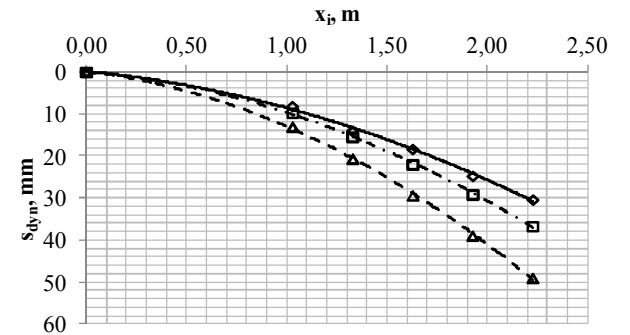
**Pr-5.12 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 12 kg masės svarmeniu



**Pr-5.13 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 4 kg masės svarmeniu



**Pr-5.14 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 8 kg masės svarmeniu

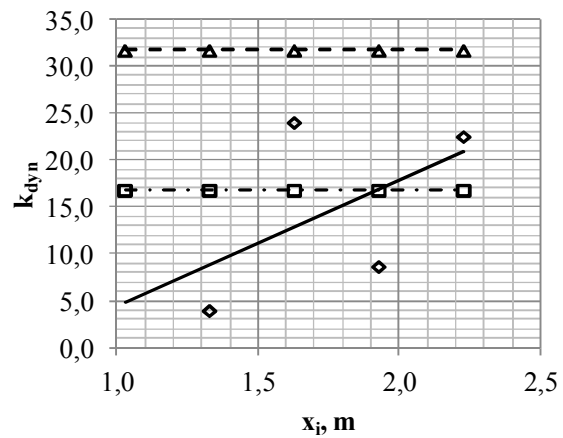


**Pr-5.15 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 12 kg masės svarmeniu

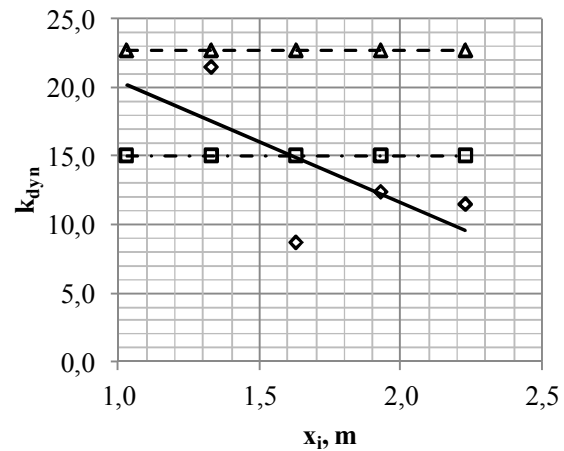
### 5.3 Dinaminio koeficiento $k_{dyn}$ rezultatų grafikai

Žymėjimai:

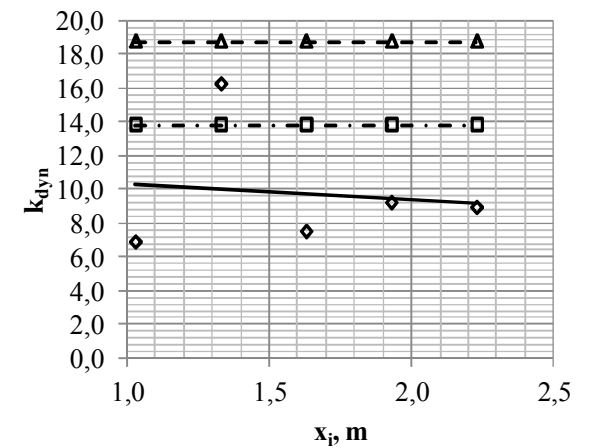
- ◊ Eksperimentinės reikšmės
- ◻ Rayleigh modelis
- ▲ Paprastasis modelis



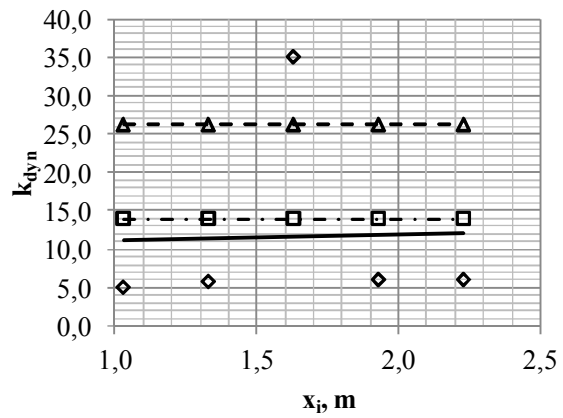
Pr-5.16 Pav. Apkraunama 1 taške, su 4 kg masės svarmeniu



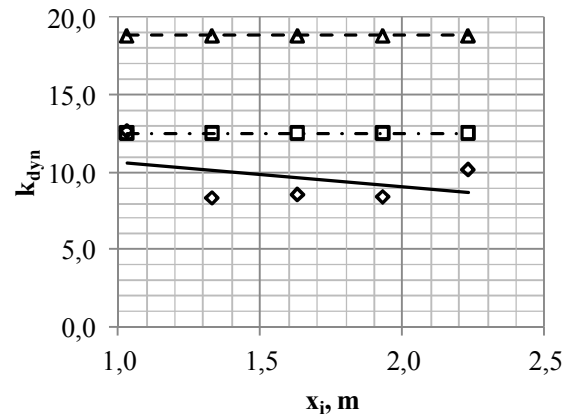
Pr-5.17 Pav. Apkraunama 1 taške, su 8 kg masės svarmeniu



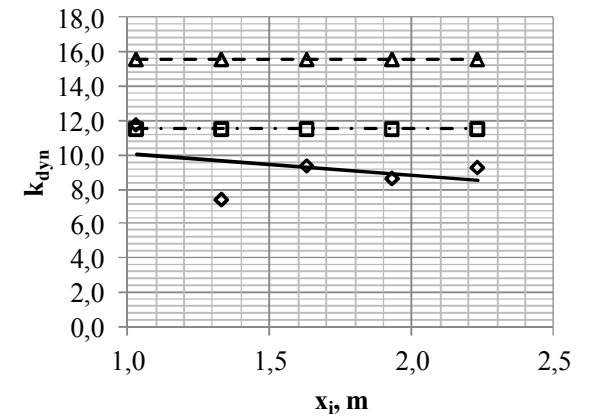
Pr-5.18 Pav. Apkraunama 1 taške, su 12 kg masės svarmeniu



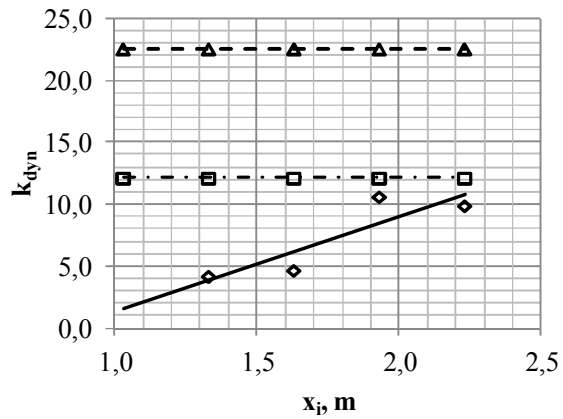
**Pr-5.19 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 4 kg masės svarmeniu



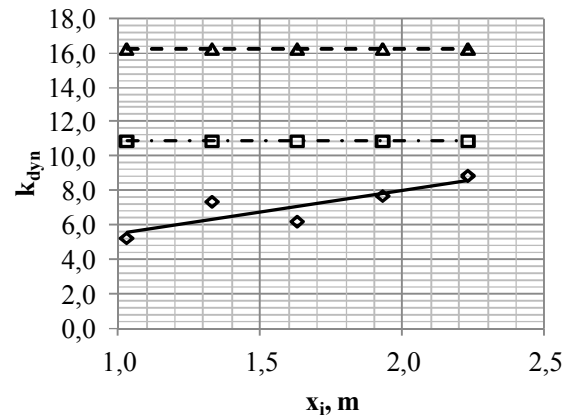
**Pr-5.20 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 8 kg masės svarmeniu



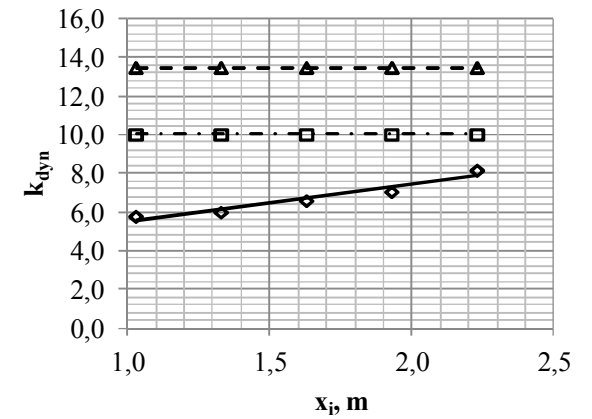
**Pr-5.21 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 12 kg masės svarmeniu



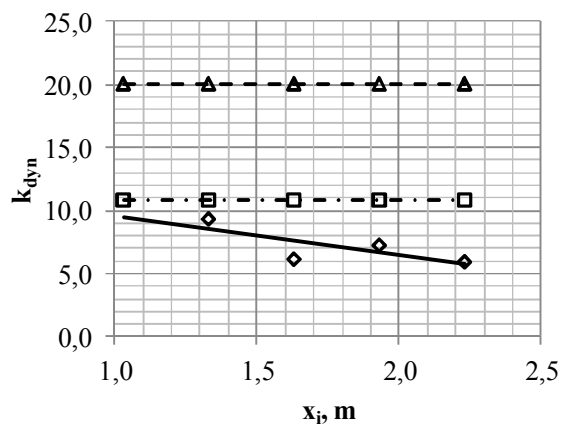
**Pr-5.22 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 4 kg masės svarmeniu



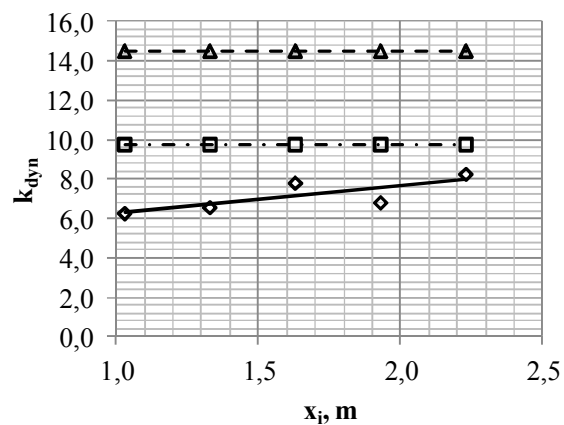
**Pr-5.23 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 8 kg masės svarmeniu



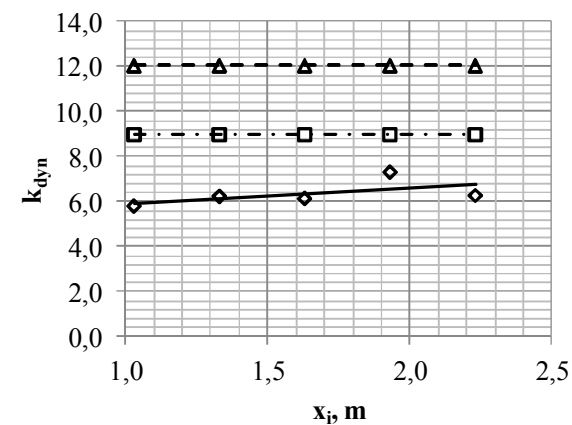
**Pr-5.24 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 12 kg masės svarmeniu



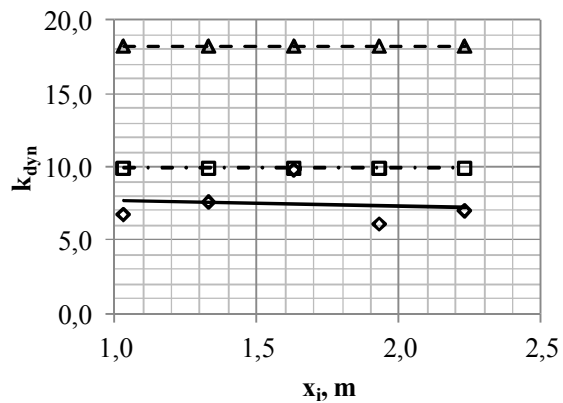
Pr-5.25 Pav. Apkraunama 4 taške, su 4 kg masės svarmeniu



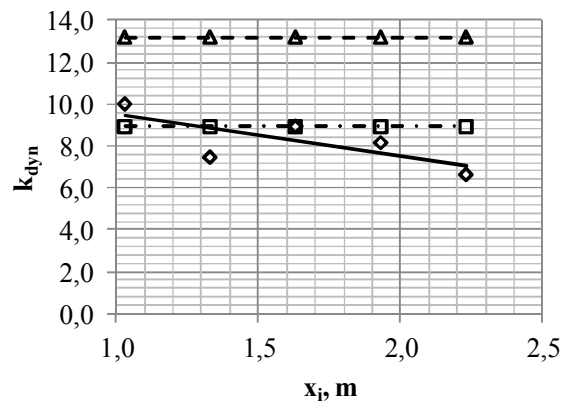
Pr-5.26 Pav. Apkraunama 4 taške, su 8 kg masės svarmeniu



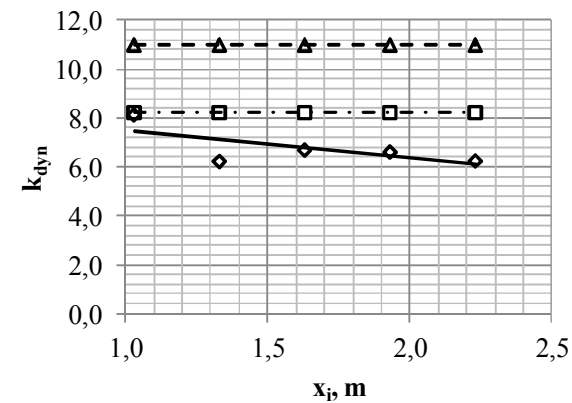
Pr-5.27 Pav. Apkraunama 4 taške, su 12 kg masės svarmeniu



Pr-5.28 Pav. Apkraunama 5 taške, su 4 kg masės svarmeniu



Pr-5.29 Pav. Apkraunama 5 taške, su 8 kg masės svarmeniu

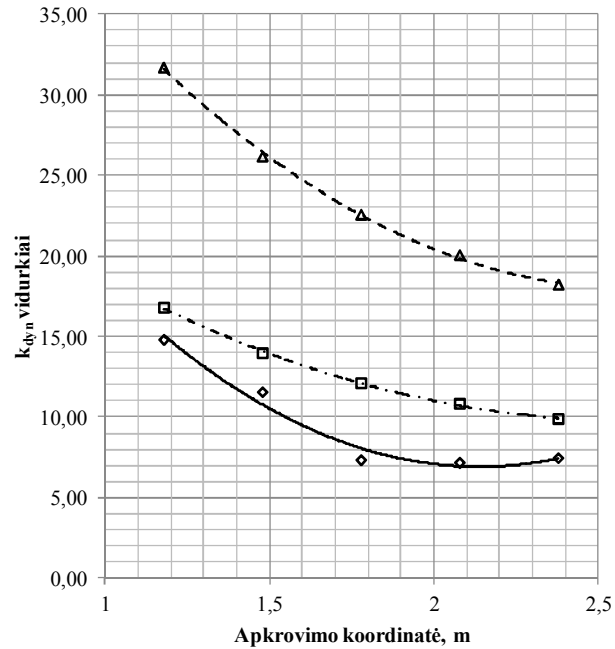


Pr-5.30 Pav. Apkraunama 5 taške, su 12 kg masės svarmeniu

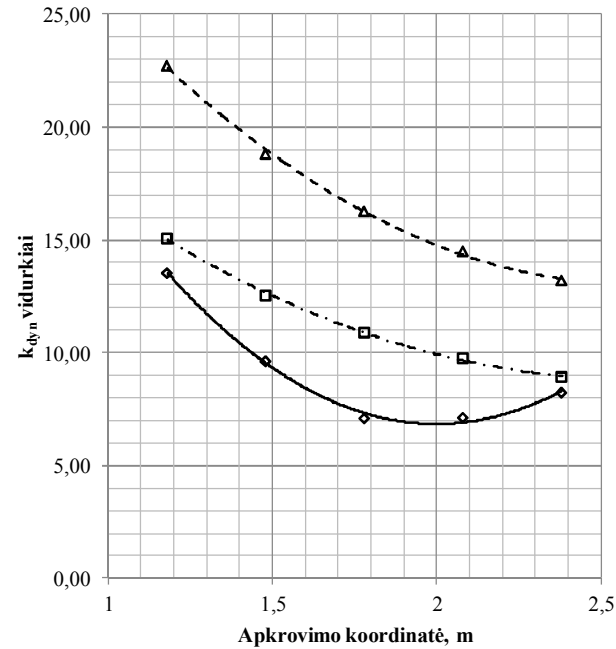
## 5.4 Dinaminio koeficiento $k_{dyn}$ priklausomybės nuo apkrovimo koordinatės

Žymėjimai:

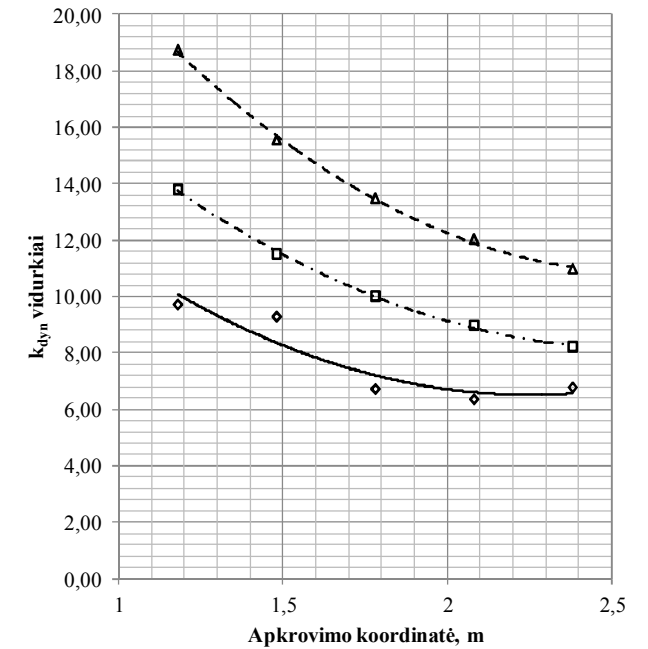
- ◊ Eksperimentinės reikšmės
- ◻ Rayleigh modelis
- ▲ Paprastas modelis



**Pr-5.31 Pav.** Vidurkinės  $k_{dyn}$  reikšmės apkraunant su 4 kg masės svarmeniu



**Pr-5.32 Pav.** Vidurkinės  $k_{dyn}$  reikšmės apkraunant su 8 kg masės svarmeniu



**Pr-5.33 Pav.** Vidurkinės  $k_{dyn}$  reikšmės apkraunant su 12 kg masės svarmeniu

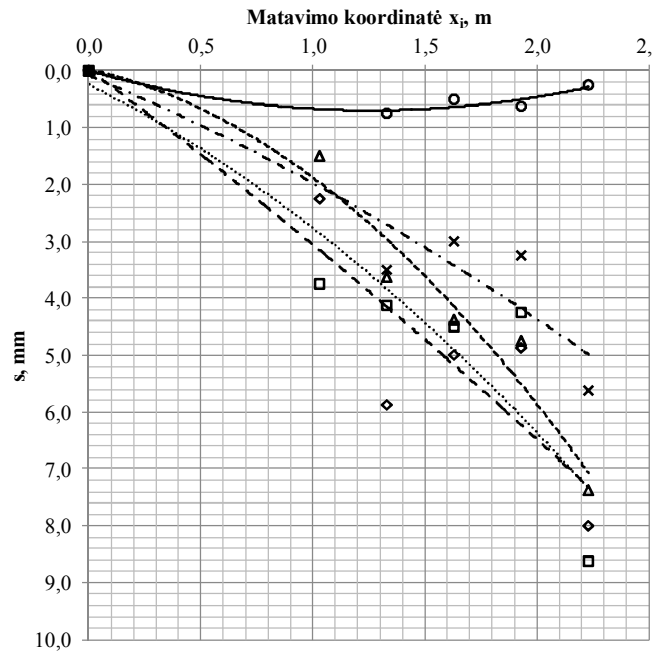


## 6 Priedas

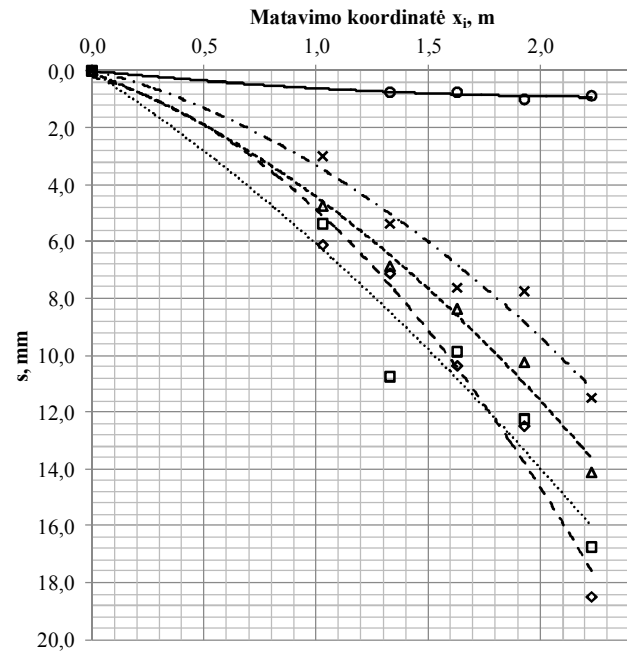
### Smūginio apkrovimo bendri grafikai

#### 6.1 Įlinkių priklausomybės nuo matavimo koordinatės, esant skirtingiems kritimo aukščiams

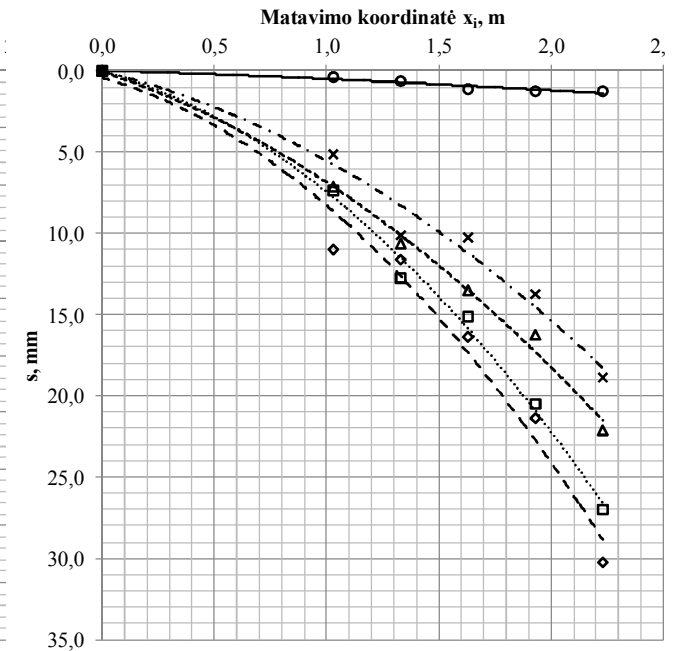
- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| ◇ h = 520 mm                | □ h = 420 mm                |
| ▲ h = 320 mm                | × h = 220 mm                |
| ○ Statika                   | - - - Daugial. (h = 520 mm) |
| ⋯ Daugial. (h = 420 mm)     | - · - Daugial. (h = 320 mm) |
| - · - Daugial. (h = 220 mm) | — Daugial. (Statika)        |



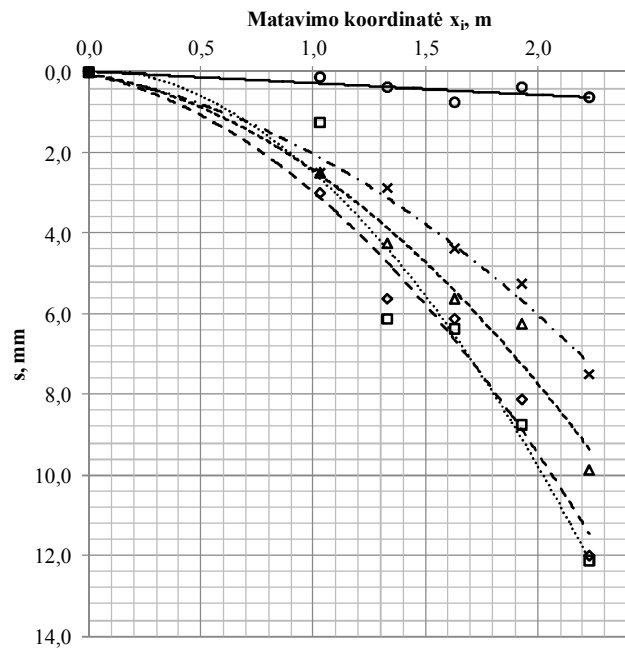
Pr-6.1 Pav. Apkraunama 1 taške, su 4 kg masės svarmeniu



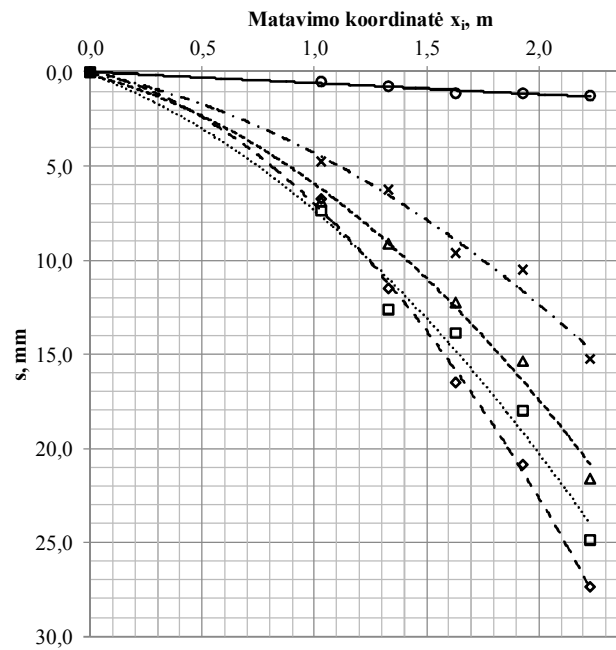
Pr-6.2 Pav. Apkraunama 1 taške, su 8 kg masės svarmeniu



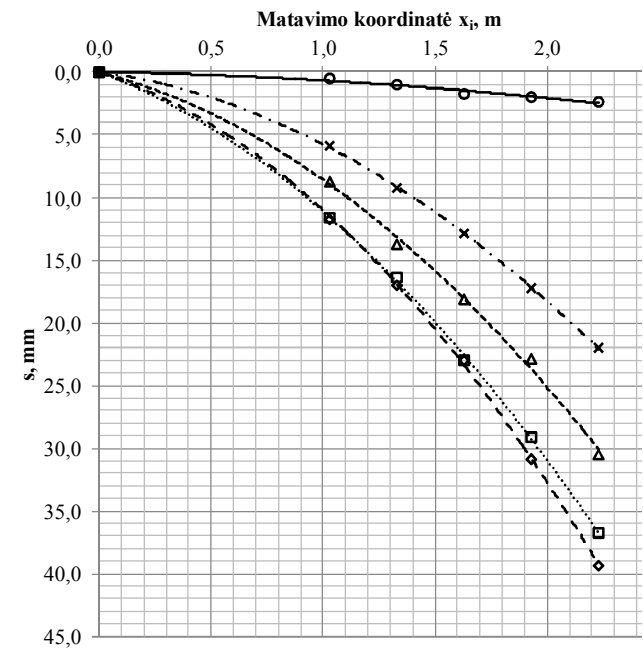
Pr-6.3 Pav. Apkraunama 1 taške, su 12 kg masės svarmeniu



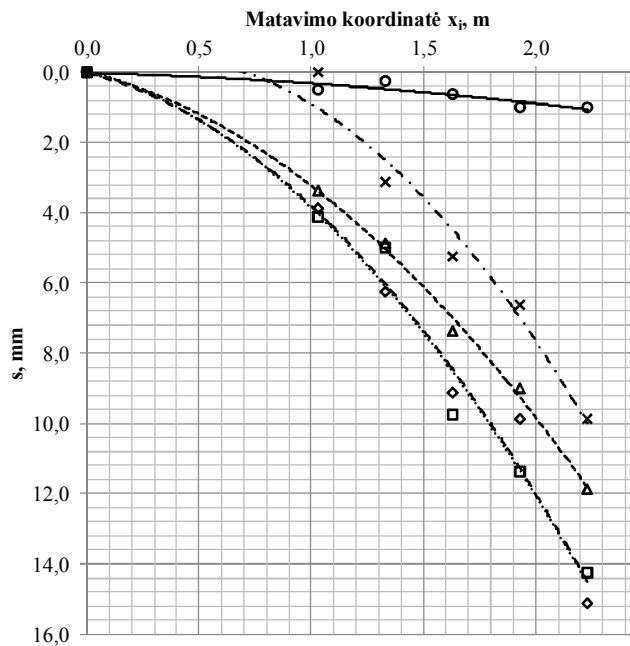
**Pr-6.4 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 4 kg masės svarmeniu



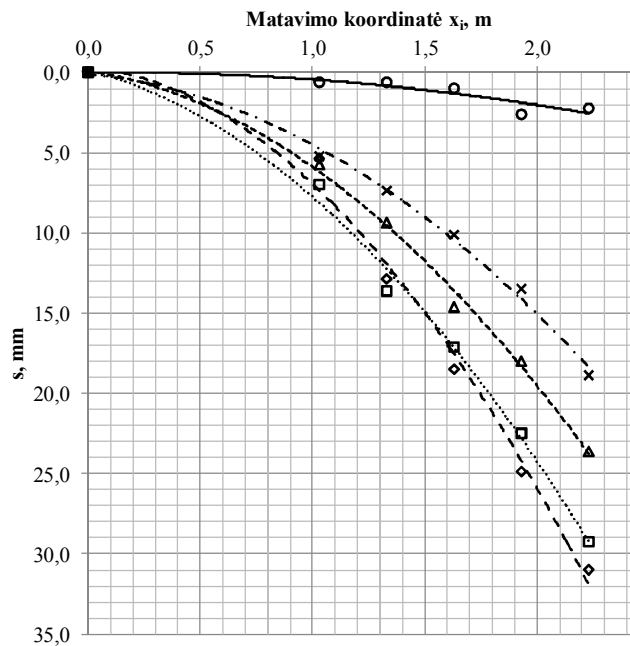
**Pr-6.5 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 8 kg masės svarmeniu



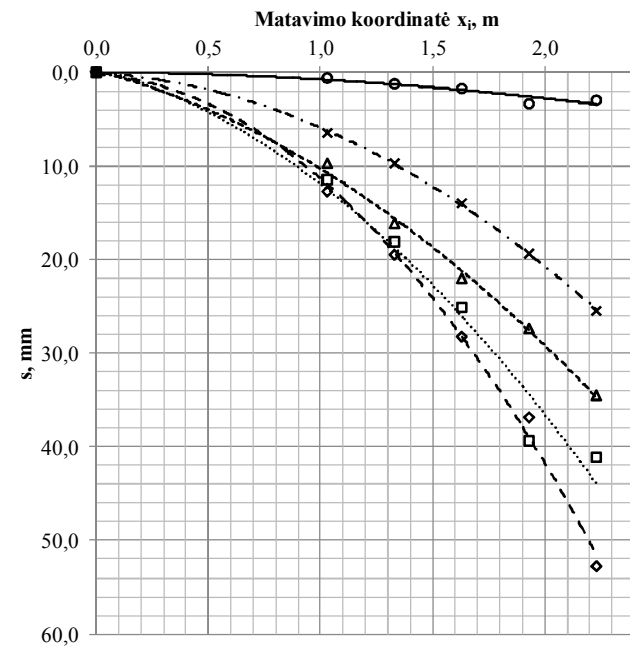
**Pr-6.6 Pav.** Apkraunama 2 taške, su 12 kg masės svarmeniu



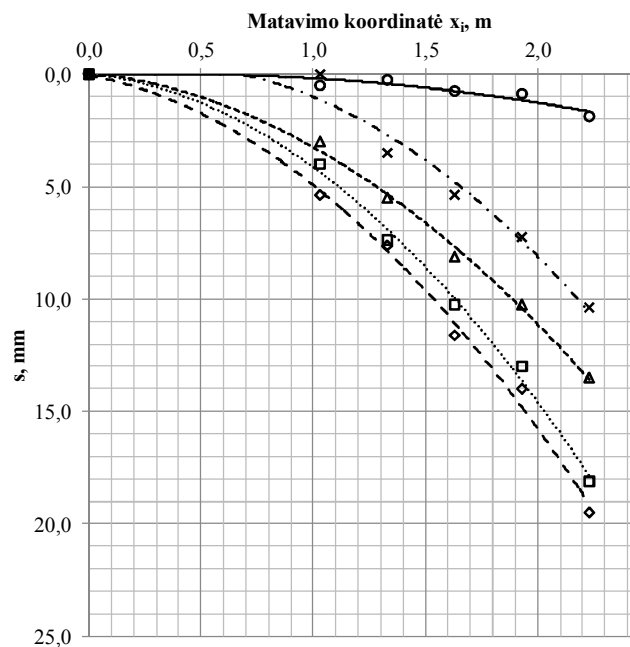
**Pr-6.7 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 4 kg masės svarmeniu



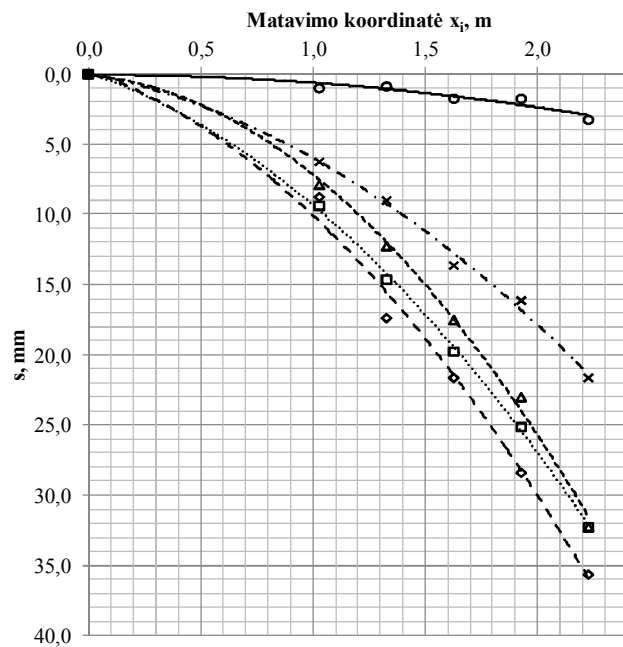
**Pr-6.8 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 8 kg masės svarmeniu



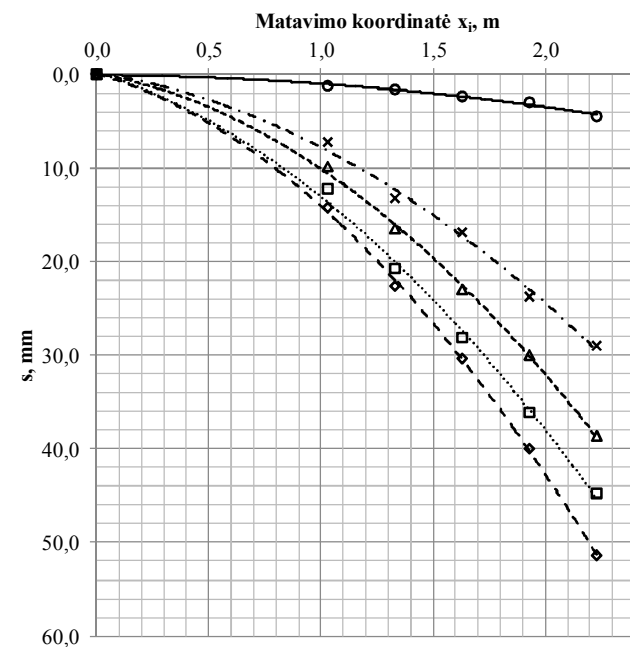
**Pr-6.9 Pav.** Apkraunama 3 taške, su 12 kg masės svarmeniu



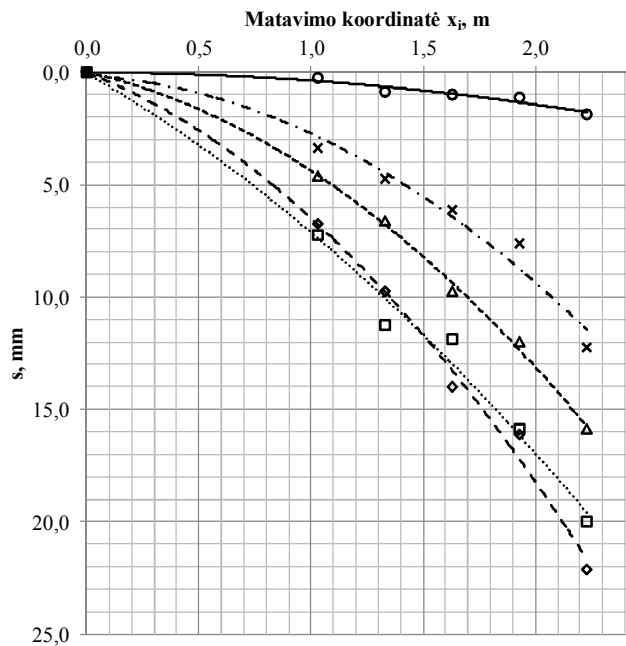
**Pr-6.10 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 4 kg masės svarmeniu



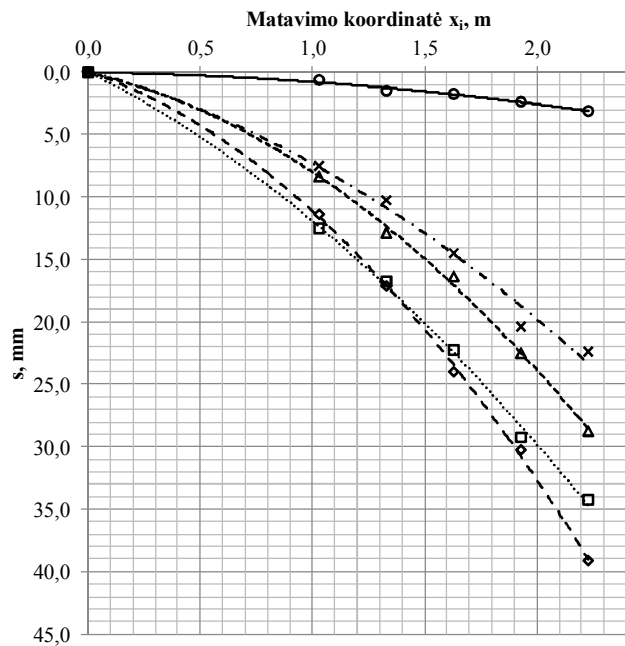
**Pr-6.11 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 8 kg masės svarmeniu



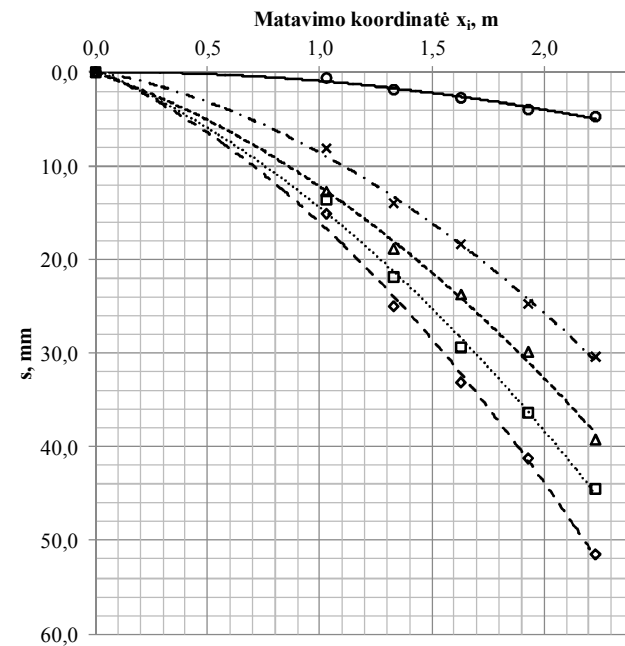
**Pr-6.12 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 12 kg masės svarmeniu



**Pr-6.13 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 4 kg masės svarmeniu

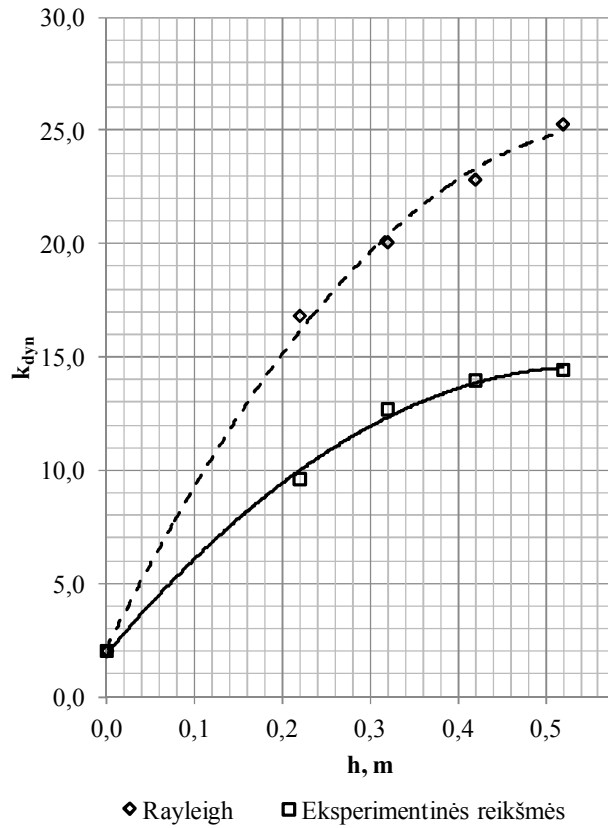


**Pr-6.14 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 8 kg masės svarmeniu

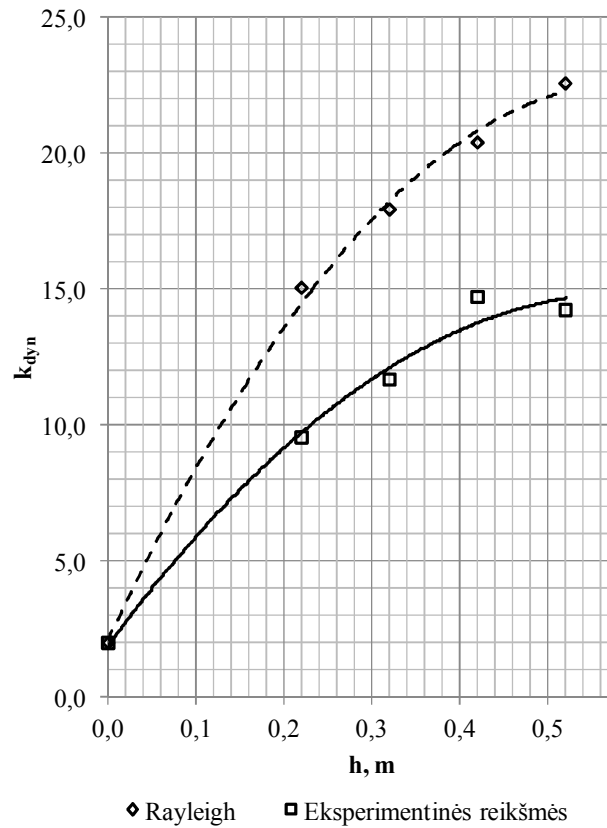


**Pr-6.15 Pav.** Apkraunama 5 taške, su 12 kg masės svarmeniu

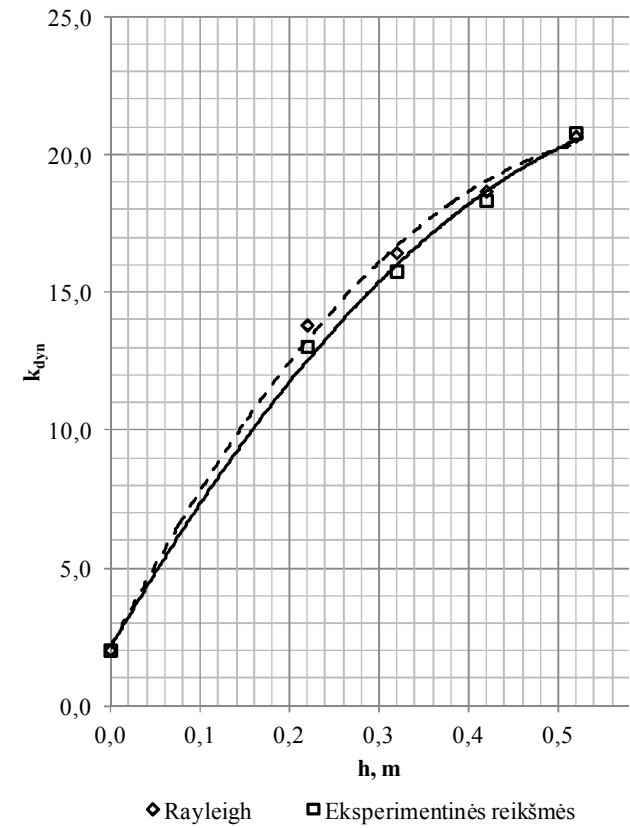
## 6.2 Vidurkinių dinaminio koeficiento priklausomybės nuo apkrovos laisvo kritimo aukščio $h$



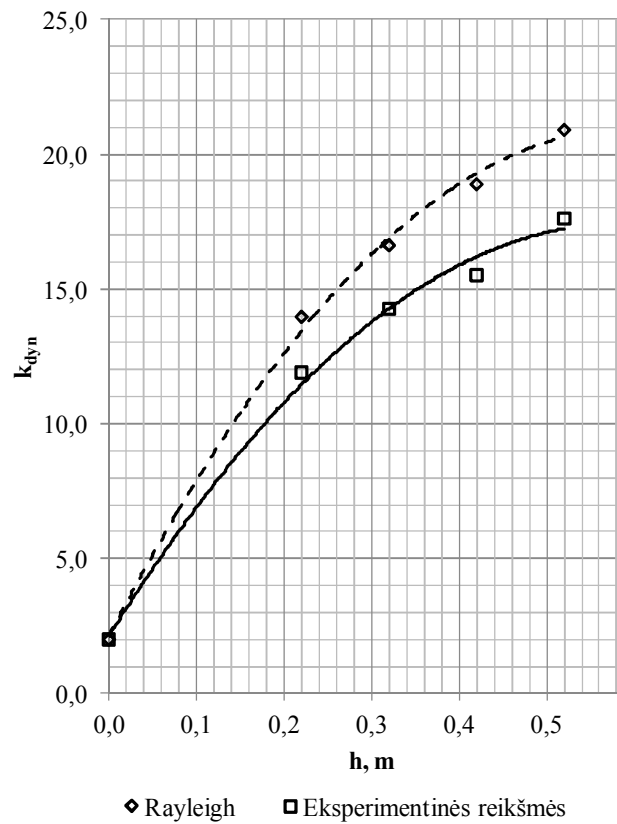
Pr-6.16 Pav. Apkraunama 1 taške, su 4 kg masės svarmeniu



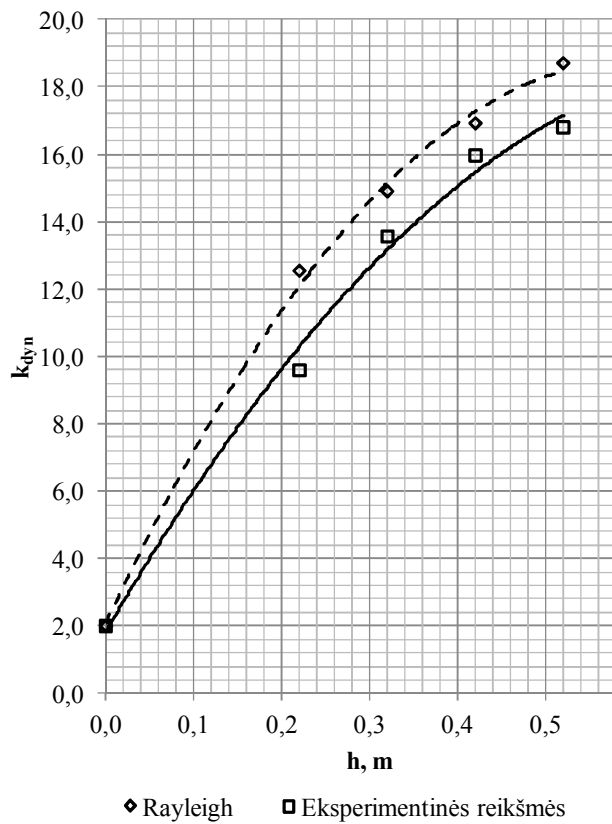
Pr-6.17 Pav. Apkraunama 1 taške, su 8 kg masės svarmeniu



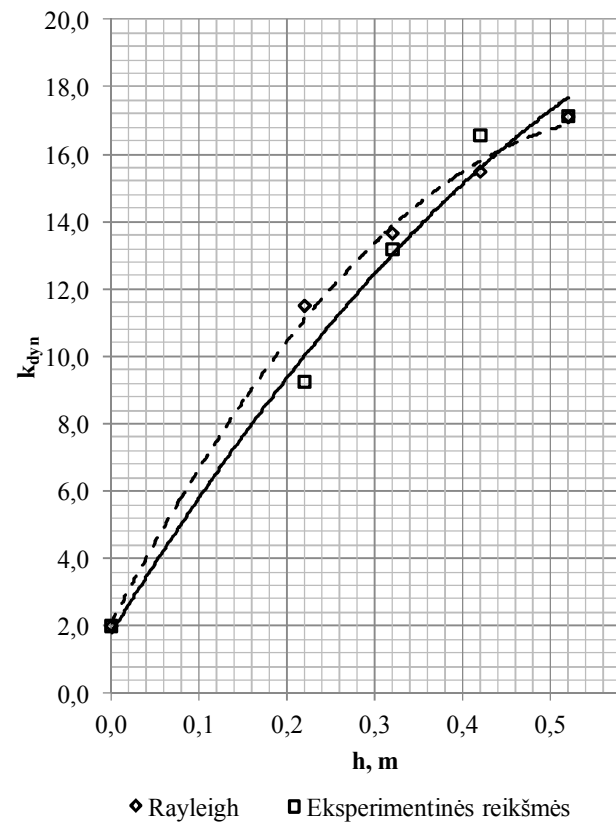
Pr-6.18 Pav. Apkraunama 1 taške, su 12 kg masės svarmeniu



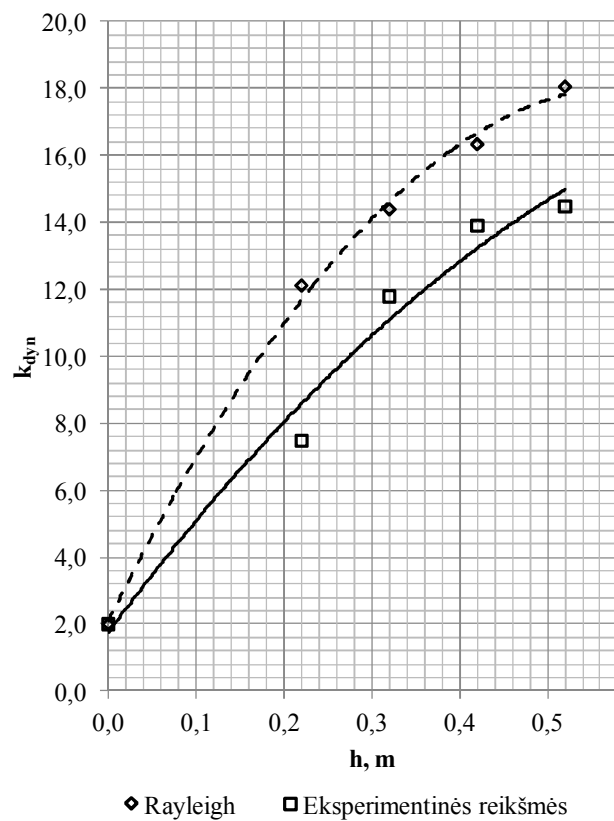
Pr-6.19 Pav. Apkraunama 2 taške, su 4 kg masės svarmeniu



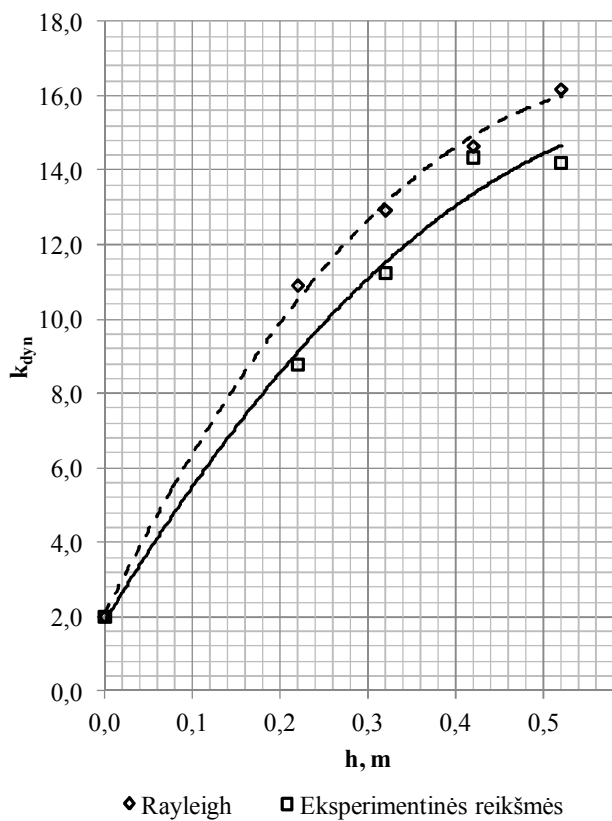
Pr-6.20 Pav. Apkraunama 2 taške, su 8 kg masės svarmeniu



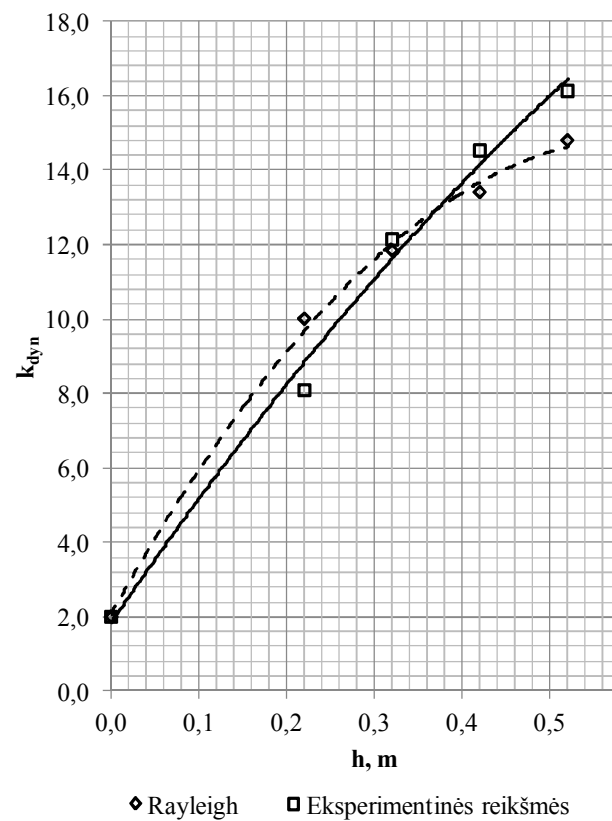
Pr-6.21 Pav. Apkraunama 2 taške, su 12 kg masės svarmeniu



Pr-6.22 Pav. Apkraunama 3 taške, su 4 kg masės svarmeniu

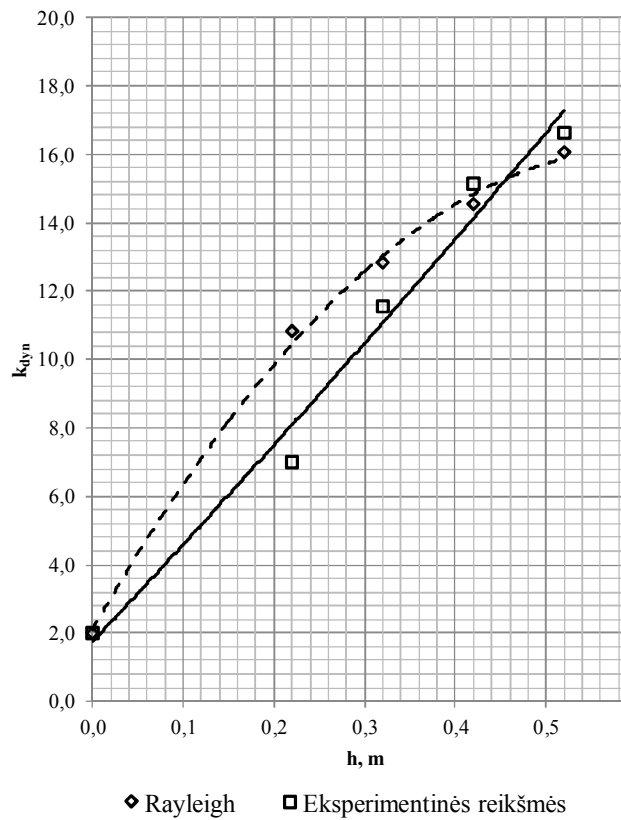


Pr-6.23 Pav. Apkraunama 3 taške, su 8 kg masės svarmeniu

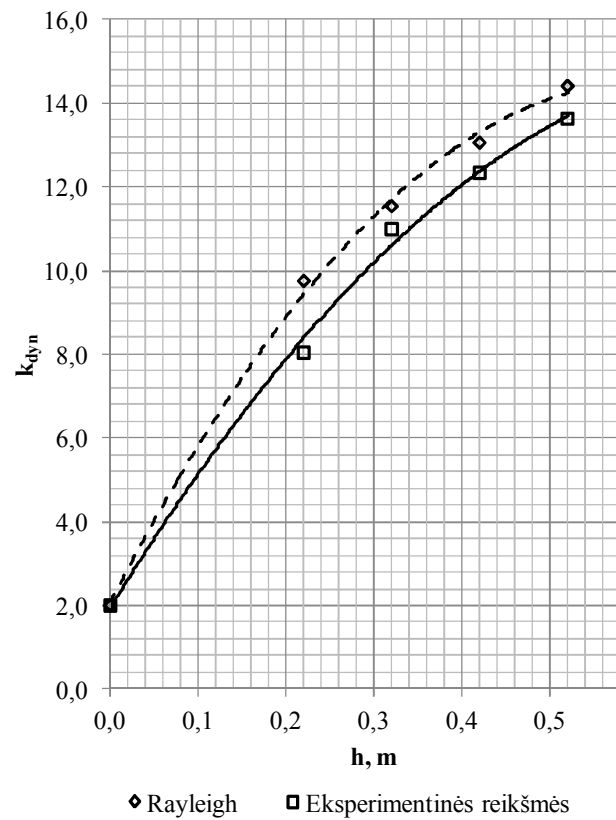


Pr-6.24 Pav. Apkraunama 3 taške, su 12 kg masės svarmeniu

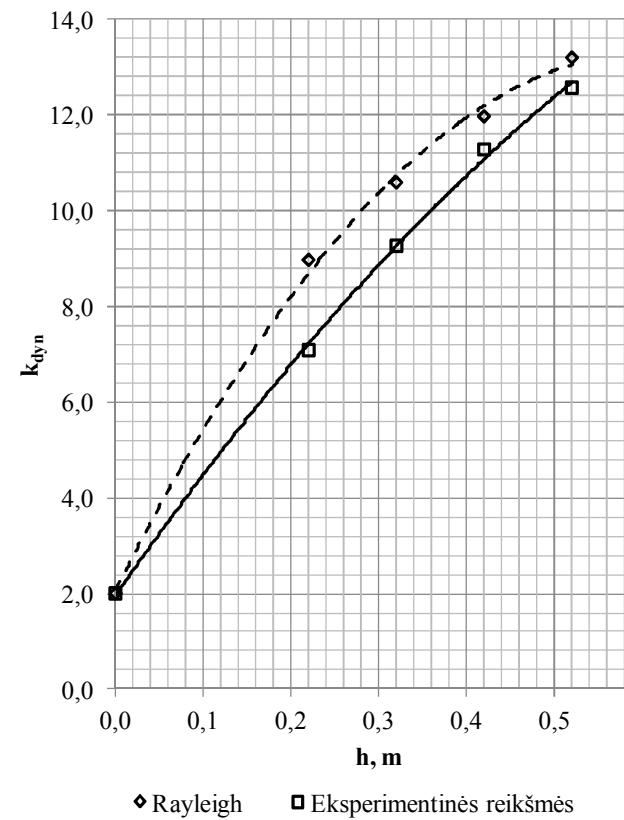




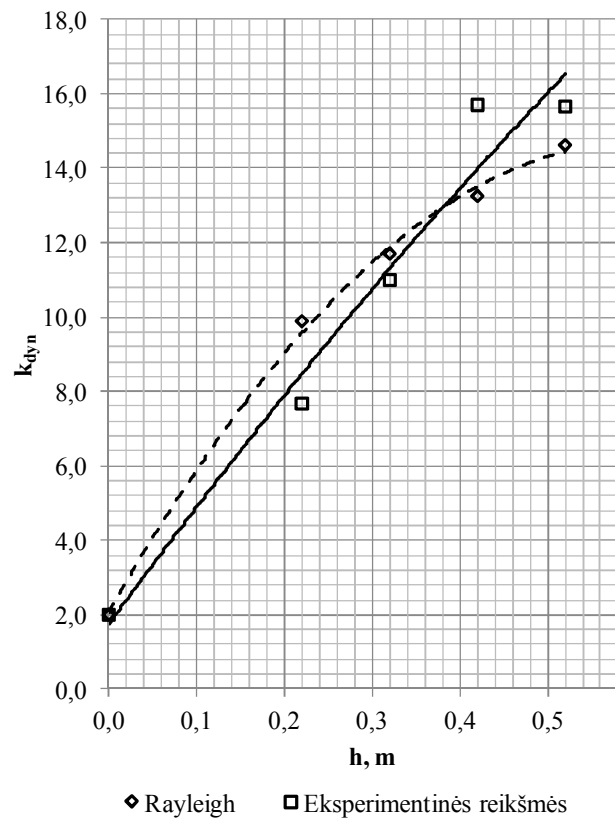
**Pr-6.25 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 4 kg masės svarmeniu



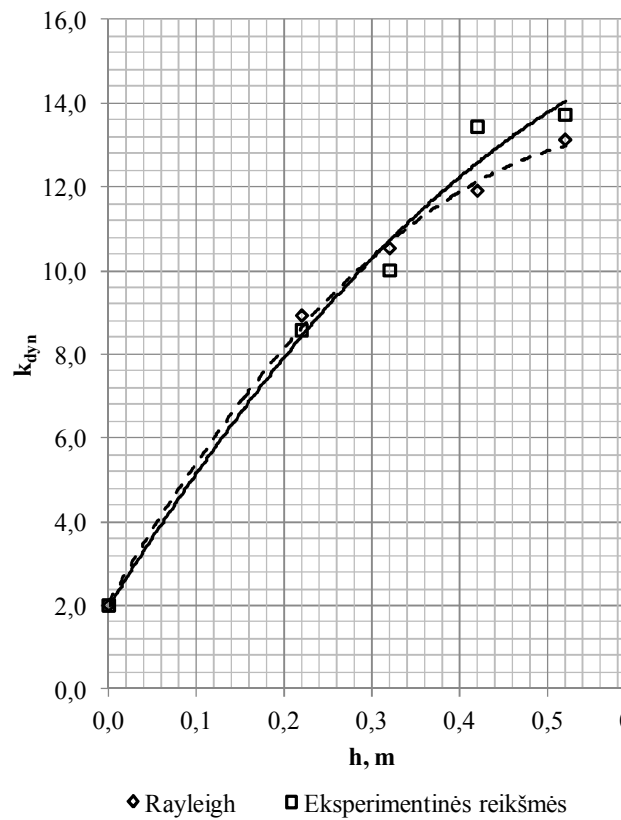
**Pr-6.26 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 8 kg masės svarmeniu



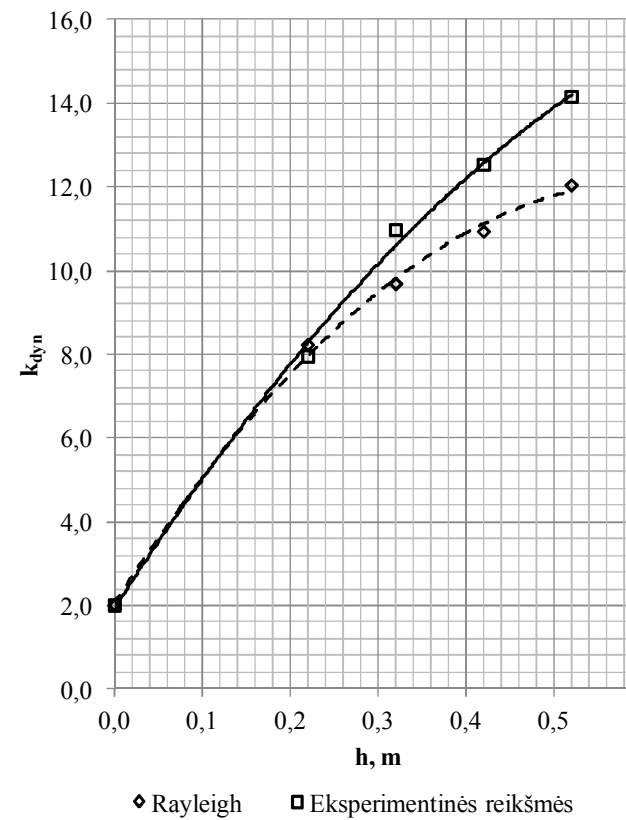
**Pr-6.27 Pav.** Apkraunama 4 taške, su 12 kg masės svarmeniu



Pr-6.28 Pav. Apkraunama 5 taške, su 4 kg masės svarmeniu



Pr-6.29 Pav. Apkraunama 5 taške, su 8 kg masės svarmeniu



Pr-6.30 Pav. Apkraunama 5 taške, su 12 kg masės svarmeniu