



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINIO MODELIAVIMO KATEDRA

Julija Raguzina

VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO SU SUNKIOMIS
UODEGOMIS MODELIAVIMAS IR OPTIMIZAVIMAS

Magistro darbas

Vadovas
doc. dr. A. Kabašinskas

KAUNAS, 2014



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINIO MODELIAVIMO KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. dr. E. Valakevičius
2014 06 02

VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO SU SUNKIOMIS
UODEGOMIS MODELIAVIMAS IR OPTIMIZAVIMAS

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
doc. dr. A. Kabašinskas
2014 06 01

Recenzentas
doc.dr. M.Kavaliauskas
2014 06 01

Atliko
FMMM-2 gr. stud.
J. Raguzina
2014 05 30

KAUNAS, 2014

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Juozas Augutis, profesorius (VDU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, profesorius (KTU)

Nariai: Jonas Valantinas, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Kristina Šutienė, docentė (KTU)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., direktoriaus pavaduotojas (UAB „Danet Baltic“)

SANTRAUKA

Vertybinių popierių portfelio rizikos vertinimas yra aktualumo neprarandantis klausimas. Šio darbo tikslas sudaryti patikimą portfelio grąžų modelį, atspindintį empirines savybes ir atlikti rizikos vertinimą. Šiame darbe portfelio grąžoms modeliuoti buvo naudojamas ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modelis su triukšmu pasiskirsčiusiu pagal pasiskirstymą, turinčiu sunkiąsias uodegas. Modelio pasirinkimą nulėmė tokios grąžų savybės: autokoreliacija, grąžų pasiskirstymo sunkios uodegos, sąlyginės dispersijos heteroskedastiškumas.

Siekiant gauti patikimesnį modelį buvo sprendžiama portfelio dimensijos mažinimo problema. Šios problemos sprendimui buvo atliekama pagrindinių komponentų analizė, kuri padėjo nustatyti faktorius, turinčius didžiausią įtaką portfelio grąžų dispersijai.

Sudarant portfelio modelį kitas svarbus uždavinys – priklausomybinių ryšių nustatymas ir jų atvaizdavimas kuriamame modelyje. Esant empiriniams įrodymams, kad akcijų grąžos yra asimetriškai priklausomos (priklausomybė tarp apatinių kvantilių yra didesnė negu tarp viršutinių), tokiai struktūrai atvaizduoti buvo panaudota asimetrinė Stjudento kopula. Įvertinus priklausomybinius ryšius ir sudarius kiekvienam faktoriui ARMA-GARCH modelį, buvo gautas portfelio grąžų modelis, kuris atvaizdavo empirines savybes. Toliau buvo atliekamas portfelio svorių apskaičiavimas, siekiant optimizuoti pasirinktus rizikos ir efektyvumo rodiklius. Esant skirtingoms modeliavimo prielaidoms, geriausias portfelio charakteristikos buvo gautos optimizuojant Šarpo ir MAD rodiklius.

Raguzina J. Modeling and Optimization of Equity Portfolios with Heavy-tailed Distributions / supervisor Assoc. prof. dr. A. Kabašinskas; Department of Mathematical Modeling, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2014. – 66 p.

SUMMARY

Risk estimation of equity portfolio is still very important issue nowadays. In order to complete risk evaluation, reliable portfolio has to be constructed, which reflects empirical characteristics. In this thesis ARMA(1,1)-GARCH(1,1) model with fat-tailed innovations was chosen for modelling portfolio returns. This decision was determined by following characteristics: serial dependence of returns, heavy-tailed returns, conditional heteroskedasticity.

In order to get more robust model, problem of reduction of portfolio dimension had been solved. For this purpose principal component analysis was performed in order to identify factors with the highest variability.

Identifying dependency structure between portfolio equities and modeling this structure is another important issue. According to the empirical evidence, which says that returns are asymmetrically dependent (dependency between the lower quantiles is higher than the upper), asymmetric Student's t-distribution was employed in order to model such dependence structure. After dependence structure was captured and each factor approximated with ARMA-GARCH, equity portfolio model was obtained, which reflected empirical characteristics. This approach allowed us to generate future scenarios. Further, estimation of portfolio weights, which maximized performance and risk ratios, had been performed. With different modeling assumptions, the best characteristics of the portfolio has been obtained by optimizing Sharpe and MAD measures.

TURINYS

ĮVADAS.....	11
1. BENDROJI DALIS	13
1.1. FINANSINĖS LAIKO EILUTĖS IR JŲ SAVYBĖS	13
1.2. EMPIRINĖS SAVYBĖS	14
1.2.1. SUNKIOS UODEGOS	14
1.2.2. HETEROSKEDASTIŠKUMAS	15
1.2.3. ASIMETRIŠKUMAS	16
1.3. AUTOREGRESINIAI SLENKANČIO VIDURKIO MODELIAI ARMA(P,Q)	16
1.4. APIBENDRINTI AUTOREGRESINIAI SĄLYGINIO HETEROSKEDASTIŠKUMO MODELIAI GARCH	17
1.5. ARMA-GARCH MODELIS	18
1.6. MODELIO PARAMETRŲ VERTINIMAS MTM BŪDU.....	19
1.6.1. MAKSIMALAUS TIKĖTINUMO METODAS.....	19
1.6.2. ARMA-GARCH SU SUNKIOMIS UODEGOMIS PARAMETRŲ VERTINIMAS.....	20
1.7. ARMA-GARCH MODELIO ADEKVATUMO VERTINIMAS	21
1.8. SUDERINAMUMO HIPOTEZIŲ TIKRINIMAS.....	22
1.9. STABILIEJI PASISKIRSTYMAI	24
1.10. PAGRINDINIŲ KOMPONENČIŲ ANALIZĖ	26
1.11. KOPULA	28
1.11.1 PRIKLAUSOMYBIŲ TARP UODEGŲ MATAI.....	29
1.11.2 ASIMETRINĖ STJUDENTO KOPULA	29
1.12. MODELIAVIMO ALGORITMAS	30
1.13. RIZIKOS IR EFEKTYVUMO MATAI	33
1.14. SVORIŲ OPTIMIZAVIMAS.....	35
2. TIRIAMOJI DALIS.....	39
2.1. VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO SAVYBIŲ ANALIZĖ	39
2.2. ARMA-GARCH MODELIO ADEKVATUMO TYRIMAS.....	42

2.3.	PORTFELIO PAGRINDINIŲ KOMPONENČIŲ ANALIZĖ.....	45
2.4.	FAKTORIŲ IR LIEKANŲ ARMA(1,1)-GARCH (1,1) APROKSIMAVIMAS	46
2.5.	ARMA-GARCH MODELIO TRIUKŠMO APROKSIMAVIMAS	48
2.6.	KOPULOS PARAMETRŲ APSKAIČIAVIMAS.....	49
2.7.	PORTFELIO OPTIMIZAVIMO REZULTATAI.....	50
2.6.1	EFEKTYVIEJI PORTFELIAI IR EFEKTYVIŲJŲ PORTFELIŲ KRAŠTAS EMPIRINIAMS DUOMENIMS	50
2.6.2	MODELIAVIMAS, PASKIRSTANT SVORIUS LYGIOMIS DALIMIS.....	52
2.6.3	MODELIAVIMAS, OPTIMIZUOJANT SVORIUS INTERVALE (0,1)	53
2.6.4	MODELIAVIMAS, OPTIMIZUOJANT SVORIUS INTERVALE (0.1,0.4)	55
2.6.5	MODELIAVIMAS, ATNAUJINANT SVORIO KOEFICIENTUS PAGAL NETOLIMĄ PRAEITĮ	57
2.6.6	MODELIAVIMAS, ATNAUJINANT SVORIO KOEFICIENTUS PAGAL VISĄ SUMODELIUOTĄ PRAEITĮ	59
	PROGRAMINĖ REALIZACIJA.....	60
	DISKUSIJA.....	60
	IŠVADOS.....	63
	LITERATŪRA.....	64
	1 PRIEDAS. AKCIJŲ LOG-GRAŽŲ GRAFIKAI.....	67
	2 PRIEDAS. AKCIJŲ APROKSIMAVIMO STJUDENTO PASISKIRTŲJŲ PARAMETRAI.....	68
	3 PRIEDAS. AKCIJŲ APROKSIMUOTŲ ASIMETRINIŲ STJUDENTO PASISKIRTŲJŲ PARAMETRAI.....	69
	4 PRIEDAS. AKCIJŲ APROKSIMUOTŲ STABILIUOJAMŲ PASISKIRTŲJŲ PARAMETRAI.....	69
	5 PRIEDAS. MATRICOS A (PRIKLAUSOMYBE TARP APATINIŲ UODEGŲ) IR B(PRIKLAUSOMYBE TARP VIRSUTINIŲ UODEGŲ).....	69
	6 PRIEDAS. PKA ANALIZES KOEFICIENTAI ALPHA IR BETA	70
	7 PRIEDAS. FAKTORINIO(REGRESINIO) MODELIO KOEFICIENTŲ P-REIŠMĖS	70
	8 PRIEDAS. FAKTORIŲ ARMA-GARCH MODELIO, KOEFICIENTŲ P-REIŠMĖS	71
	9 PRIEDAS. TRIUKŠMO E ARMA-GARCH MODELIŲ KOEFICIENTŲ P REIŠMĖS	71

10 PRIEDAS. FAKTORIŲ ARMA-GARCH MODELIO LIEKANŲ PASISKIRSTYMŲ PARAMETRAI.....	72
11 PRIEDAS. A-D SUDERINAMUMO TESTO TARP ARMA-GARCH MODELIO TRIUKŠMŲ IR STABILIAUS PASISKIRSTYMU P-REIŠMĖS.....	72
12 PRIEDAS. TRIUKSMO E ARMA-GARCH MODELIŲ LIEKANŲ PASISKIRSTYMŲ PARAMETRAI.....	72
13 PRIEDAS. PROGRAMOS KODAS.....	72

LENTELIŲ SĄRAŠAS

2.1 lentelė. Istorinių akcijų gražų statistikos.....	40
2.2 lentelė. Kolmogorovo-Smirnovo testo p-reikšmės.....	40
2.3 lentelė. A-D suderinamumo testo p-reikšmės.....	40
2.4 lentelė. Pirsono koreliacijos koeficientai portfelio gražoms.....	41
2.5 lentelė. Spirmeno ranginės koreliacijos koeficientai portfelio gražoms.....	41
2.6 lentelė. Priklausomybių tarp apatinių ir viršutinių uodegų palyginimas.....	42
2.7 lentelė. ADF testo rezultatai.....	43
2.8 lentelė. Q , Q^2 , Lagranžo daugiklio testų p-reikšmės akcijų gražom.....	43
2.9 lentelė. Q , Q^2 , Lagranžo daugiklio testų p-reikšmės ARMA modelio liekanoms.....	44
2.10 lentelė. Q , Q^2 , Lagranžo daugiklio testų p-reikšmės ARMA-GARCH modelio liekanoms.....	44
2.11 lentelė. Pagrindinių komponentų analizės rezultatai.....	45
2.12 lentelė. Faktorių ARMA(1,1)-GARCH (1,1) modelio MTM koeficientų įverčiai.....	47
2.13 lentelė. Liekanų ARMA(1,1)-GARCH (1,1) modelio MTM koeficientų įverčiai.....	47
2.14 lentelė. A-D suderinamumo testo p-reikšmės.....	48
2.15 lentelė. A-D suderinamo procentinis dažnis, esant skirtingiems pasiskirstymams.....	49
2.16 lentelė. Daugiamačio asimetrinio Stjudento dėsnio parametrai.....	49
2.17 lentelė. Optimalūs svoriai pagal pasirinktą optimizavimo strategiją.....	51
2.18 lentelė. Optimaliųjų portfelių rizikos matai pagal pasirinktą optimizavimo strategiją.....	51
2.19 lentelė. Statistikos ir rizikos matai paskirstant svorius lygiomis dalimis.....	52
2.20 lentelė. Portfelio gražų statistikos, kai $\omega=(0,1)$	54
2.21 lentelė. Optimalūs svoriai (0.1, 0.4) pagal pasirinktą optimizavimo strategiją.....	55
2.22 lentelė. Portfelio gražų statistikos, kai $\omega=(0.1,0.4)$	56
2.23 lentelė. Portfelio gražų statistikos, atnaujinant svorių reikšmes pagal netolimą praeitį.....	57
2.24 lentelė. Portfelio gražų statistikos, atnaujinant svorių reikšmes pagal visą praeitį.....	59

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1 pav. Nestacionarių akcijų kainų dinamika.....	13
2 pav. Stacionarių akcijų gražų dinamika.....	13
3 pav. Pasiskirstymai su sunkiomis uodegomis.....	14
4 pav. Gražos be dispersijos klasterių.....	15
5 pav. Gražos su dispersijos klasteriais.....	15
6 pav. α – stabilaus pasiskirstymo tankio funkcijos priklausomybė nuo α_0 , kai $\beta_0 = 0$	24
7 pav. α – stabilaus pasiskirstymo tankio funkcijos priklausomybė nuo α_0 , kai $\beta_0 = 0.5$	25
8 pav. Dispersijos kitimo kryptis (1)	26
9 pav. Dispersijos kitimo kryptis (2)	26
10 pav. Simetrinė Stjudento kopula.....	30
11 pav. Asimetrinė Stjudento kopula.....	30
12 pav. VaR ir CVaR geometrinė interpretacija.....	34
13 pav. Vidurkio-dispersijos kvadratinis optimizavimo uždavinys.....	36
14 pav. Šarpo koeficiento kvadratinis optimizavimo uždavinys.....	37
15 pav. CVaR formulės interpretacija.....	37
16 pav. CVaR koeficiento optimizavimo uždavinys.....	37
17 pav. VaR, CVaR ir atstumo tarp jų geometrinė interpretacija.....	38
18 pav. CVaR tiesinio optimizavimo uždavinys.....	38
19 pav. MAD tiesinio programavimo uždavinys.....	39
20 pav. Portfelį sudarančių akcijų kainų dinamika.....	39
21 pav. Efektyvieji portfeliai (σ ašyje)	50
22 pav. Efektyvieji portfeliai (MAD ašyje)	50
23 pav. Portfelio verčių dinamika, taikant optimalius svorio koeficientus.....	51
24 pav. Log-gražų histograma, svorius paskirstant lygiomis dalimis.....	52
25 pav. Portfelio gražos, kai $\omega=(0,1)$	53
26 pav. Efektyvieji portfeliai, kai $\omega=(0.1,0.4)$ (σ ašyje)	55
27 pav. Efektyvieji portfeliai, kai $\omega=(0.1,0.4)$ (MAD ašyje)	55
28 pav. Portfelio gražos, kai $\omega=(0.1,0.4)$	57
29 pav. Portfelio gražos, perkaičiuojant svorių koeficientus pagal netolimą praeitį.....	58
30 pav. Portfelio gražos, atnaujinant svorių koeficientus pagal visą sumodeliuotą praeitį.....	59

IVADAS

Su nuolat augančia vertybinių popierių rinka, kartu didėja ir investicijų į šią rinką rizikos vertinimo poreikis. Norint kuo tiksliau įvertinti vertybinių popierių riziką, svarbu gerai žinoti vertybinių popierių savybes ir parinkti modelį, kuris galėtų atspindėti šias savybes. Todėl šio darbo tikslas buvo parinkti adekvatų portfelio grąžų modelį ir, taikant skirtingas portfelio svorių apskaičiavimo strategijas, palyginti modeliavimo rezultatus pagal skirtingus rizikos rodiklius.

Šiame darbe buvo sprendžiami šie uždaviniai:

- 1) Portfelio grąžų skirstinio nustatymas
- 2) Portfelio dimensijos mažinimas
- 3) Imitacinio portfelio grąžų modelio sudarymas
- 4) Svorio koeficientų, optimizuojančių pasirinktus rizikos rodiklius, apskaičiavimas
- 5) Portfelio rizikos ir efektyvumo palyginimas, taikant skirtingus svorius

Portfelio grąžų modeliavimas turi būti atliekamas atsižvelgiant į gerai žinomas vertybinių popierių grąžų savybes: (1) grąžos yra autokoreliuotos (S.Rachev ir kiti, 2005)[28], (2) egzistuoja dispersijos klasteriai, (3) grąžų pasiskirstymų funkcijos turi sunkesnes uodegas ir yra galimai asimetrinės (Tavares ir kiti, 2008)[37], (4) vertybinių popierių priklausomybė yra asimetrinė (Hong ir kiti, 2006)[13]. Dispersijos klasteriškumas apibūdinamas tokiu stebėjimu: po didesnių nei įprasta pokyčių vertybinių popierių grąžose seka taip pat didesni pokyčiai, o maži pokyčiai sąlygoja mažus (Mandelbrot, 1963)[21]. Sunkesnes pasiskirstymų uodegas apibūdina didesnė už normaliojo pasiskirstymo eksceso koeficiento reikšmė, o tai lemia didesnes retų įvykių tikimybes. Autokoreliacinę proceso struktūrą atspindi autoregresinis slenkančio vidurkio (ARMA) modelis, kuri pristatė P. Whittle (1951), tačiau šis modelis nesugeba paaiškinti dispersijos heteroskedastiškumo. 1982 metais Engle pasiūlė autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo modelį (ARCH). Tačiau empiriniai duomenys parodė, kad reikalingas pakankamai aukštos eilės ARCH procesas, norint adekvačiai aprašyti dispersijos kintamumą. 1986 metas Bollerslev šios problemos sprendimui pasiūlė apibendrintą sąlyginio heteroskedastiškumo modelį GARCH, kuris gali būti išreikštas kaip begalinės eilės ARCH modelis. Ši savybė leido sumažinti modelio parametrų skaičių nuo begalybės iki vos kelių (Bollerslev, 1986)[9]. GARCH modelis puikiai atspindi dispersijos klasteriškumo savybę, tačiau ne visada pavyksta užfiksuoti sunkiąsias uodegas.

Šiame darbe portfelio grąžoms modeliuoti buvo pasirinktas ARMA ir GARCH modelių junginys, vadinamas ARMA-GARCH modeliu. Tam, kad modelis galėtų atvaizduoti sunkiąsias uodegas, triukšmo komponentėms modeliuoti buvo pasirinkti pasiskirstymai, pasižymintys aukštesniu eksceso koeficientu, t.y. Stjudento, asimetrinis Stjudento ir α -stabilusis.

Modeliuojant vertybinių popierių portfelį, viena iš esminių problemų yra ryšio tarp atskirų akcijų nustatymas. Empiriniai tyrimai rodo, kad priklausomybė tarp vertybinių popierių yra asimetrinė, t.y. koreliacijos tarp grąžų yra didesnės meškų rinkos metu nei bulių (Patton, Andrew J., 2012)[27]. Tokiai

priklausomybių struktūrai, kur stebima didesnė priklausomybė tarp apatinių kvantilių nei viršutinių, modeliuoti šiame darbe buvo pasirinkta asimetrinė Stjudento kopulos funkcija.

Sumodeliavus priklausomų grąžų reikšmes pasirinktame laiko horizonte, buvo atliekamas portfelio svorių apskaičiavimas, optimizuojant pasirinktus rizikos matavimus. Modernaus portfelio teorijoje (Markowitz, H.M., 1952)[22] rizika apibūdinama standartiniu nuokrypiu. Be to daroma prielaida, kad grąžos yra pasiskirsčiusios pagal normalųjį pasiskirstymą. Tačiau standartinis nuokrypis yra efektyvus tik tada, kai grąžų pasiskirstymas yra simetrinis, o empiriniai tyrimai rodo, kad normalaus pasiskirstymo prielaida yra dažnai pažeidžiama vertybinių popierių grąžoms (Brooks ir Kat, 2002)[10]. Dėl šios priežasties šiame darbe portfelio grąžų rizikai vertinti buvo parinkti rizikos ir efektyvumo rodikliai, tinkantys ne tik Gauso skirstiniams. Rizika buvo matuojama pagal VaR, CVaR, MAD ir pusiau dispersijos rodiklius, o efektyvumas – Šarpo ir Rachev rodiklius. VaR kaip rizikos rodiklį išpopuliarino finansų kompanija J.P.Morgan praeito amžiaus devintojo dešimtmečio pabaigoje. Šiuo rodikliu rizika išreiškiama per skirtinio procentiles. Dėl savo paprastos interpretacijos jis įgavo didelį populiarumą, tačiau turi trūkumą: kai skirstinys nėra Gauso, jis nėra subadityvus, t.y. portfelio sudaryto iš kelių akcijų VaR reikšmė yra didesnė nei pavienių akcijų (Artzner ir kt., 1997, 1999)[4]. CVaR rodiklis, kuris taip pat remiasi kvantiliais, yra subadityvus bei šio rodiklio funkcija yra iškilą, kas palengvina optimizavimo uždavinį (Rockafellar ir Uryasev, 2000)[30]. Todėl šiame darbe vienas iš portfelio svorio apskaičiavimo būdų rėmėsi CVaR rodiklio maksimizavimu. Taip pat svoriai buvo apskaičiuojami minimizuojant vidutinę absoliutinę dispersiją (MAD) (Konno ir Yamazaki, 1994)[16] ir maksimizuojant Šarpo rodiklį. MAD portfelio sudarymo teorijoje nėra daroma prielaida apie grąžų normalųjį pasiskirstymą, be to modelis lankstesnis už Markovitzo, nes su normaliosiomis grąžomis sprendinys sutampa su modernaus portfelio teorijos sprendiniu (Simaan ir Yusif, 1997)[36]. Galiausiai, norint patikrinti modernaus portfelio teorijos netinkamumą asimetrinėms ir didesnio eksceso koeficiento grąžoms, buvo sudaromas portfelis minimizuojantis standartinį nuokrypį.

Tyrimo rezultatai leido palyginti skirtingų svorių apskaičiavimo strategijų efektyvumą. Nustatyta, kad apskaičiuojant svorio koeficientus pagal istorinius duomenis, pelningiausia ir efektyviausia strategija – parinkus maksimizuojančius Šarpo koeficientą svorius. Tačiau rezultatai pasikeitė, kai svoriai buvo atnaujinami pagal sumodeliuotą praeitį tam tikru intervalu: MAD svorių portfeliai buvo mažiausiai rizikingi ir labiausiai efektyvus, tuo tarpu Šarpo portfelis – pats rizikingiausias ir neefektyviausias.

1. BENDROJI DALIS

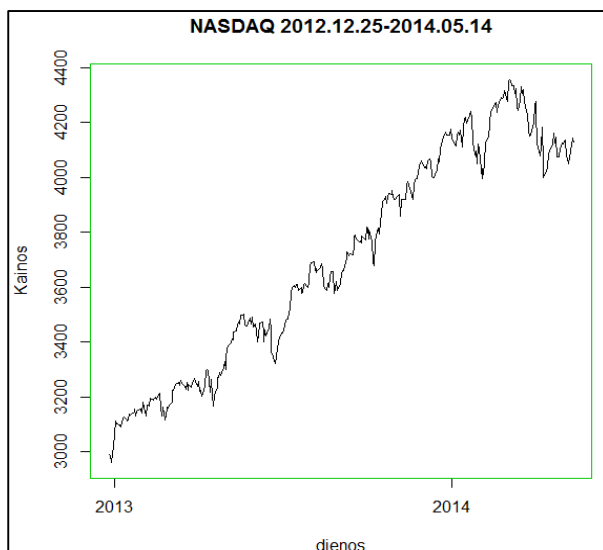
1.1. FINANSINĖS LAIKO EILUTĖS IR JŲ SAVYBĖS

Finansinių laiko eilučių analizės tikslas yra suprasti taisykles pagal kurias elgiasi nagrinėjamos laiko eilutės, arba kitais žodžiais: finansinių laiko eilučių analizės tikslas yra rasti tinkamiausią modelį, kuris galėtų paaiškinti realių duomenų empiriškai stebimas savybes. Suradus tokį modelį, galima atlikti tiriamų kintamųjų prognozę.

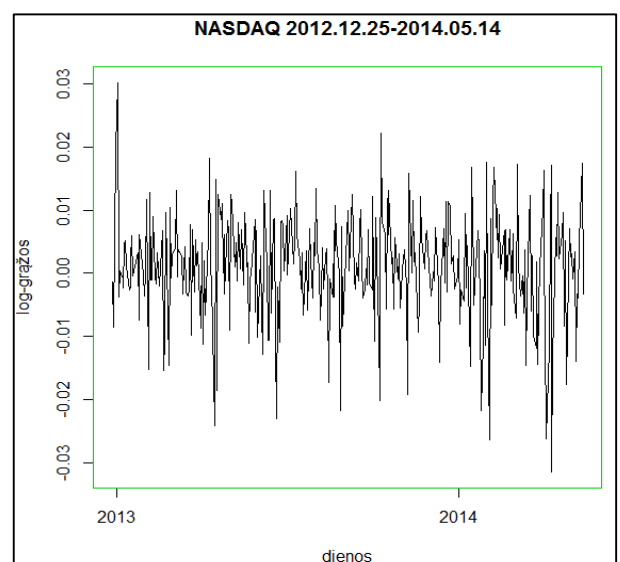
Šiandieną egzistuoja daug finansinių duomenų tipų, kurie stebi skirtingus dydžius, pavyzdžiui, akcijų ar obligacijų kainas, indeksų reikšmes, valiutų, keitimo kursus ir panašiai (kuriuos mes žymėsime P_t , $t = 1, 2, \dots$, kur t gali būti minutės, valandos, dienos ir t.t.), tačiau visi šie dydžiai elgiasi labai panašiai juos transformavus:

$$X_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln P_t - \ln P_{t-1} \quad (1.1)$$

Eilutė $\{X_t\}$ yra sudaryta iš logaritmuotų gražų (toliau log-gražų). Šių eilučių privalumas yra jų bematiškumas, todėl eilutes galima paprasčiau lyginti tarpusavyje. Tačiau svarbiausias transformacijos teikiamas privalumas yra tas, kad galima daryti prielaidą apie laiko eilutės $\{X_t\}$ modeliavimą stacionariu procesu, t.y. procesu, kurio charakteristikos nekinta laike (žr. sk. 1.3.). Retai, kada eilutės būna stacionarios be šios transformacijos (žr. pav. 1).



1 pav. Nestacionarių akcijų kainų dinamika



2 pav. Stacionarių akcijų gražų dinamika

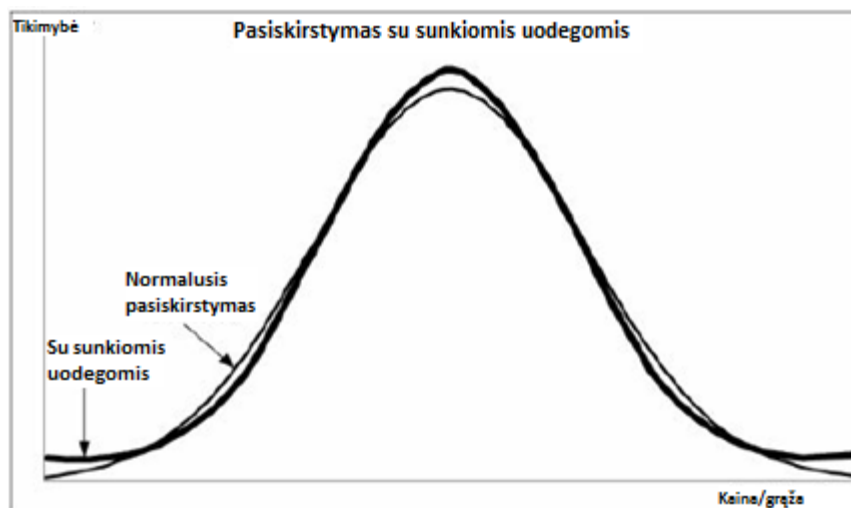
1.2. EMPIRINĖS SAVYBĖS

1.2.1. SUNKIOS UODEGOS

Gerai yra žinomas faktas, kad finansinių laiko eilučių pasiskirstymo funkcija turi sunkesnes uodegas, lyginant su duomenimis sugeneruotais pagal normalųjį pasiskirstymą, t.y. jų pasiskirstymo funkcija pasižymi didesniu eksceso koeficientu.

Eksceso koeficientas parodo pasiskirstymo smailumą arba plokštumą lyginant su normaliuoju pasiskirstymu, t.y. duomenys su aukšta eksceso koeficiento reikšme turi smailesnę viršūnę, nyksta pakankamai staigiai ir turi sunkias uodegas. Tuo tarpu mažesnio eksceso koeficiento pasiskirstymas turi apvalesnę viršūnę ir trumpesnes, lengvesnes uodegas. Empirinio eksceso koeficiento formulė stebėjimams (x_1, \dots, x_n) , apskaičiuojama:

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{(n-1)\sigma^4}$$



3 pav. Pasiskirstymai su sunkiomis uodegomis

Didelis eksceso koeficientas lemia ir didesnę ekstremaliųjų reikšmių tikimybę, todėl nauji modeliai buvo kuriami atsižvelgiant į šią savybę. Pirmasis (o vėliau labai išpopuliarėjęs) bandymas modeliuojant akcijų grąžas atspindėti sunkiųjų uodegų savybes buvo atliktas Mandelbort (1963), kuris panaudojo stabilijų Pareto pasiskirstymų klasę (žr.sk. 1.9), kurios atskirasis atvejis yra normalusis pasiskirstymas. Vėliau daugelis autorių Fama (1965), Fama ir Roll (1966,1971), So (1983,1987) ir kiti savo darbuose rado platų pritaikymą šiai pasiskirstymų klasei [12].

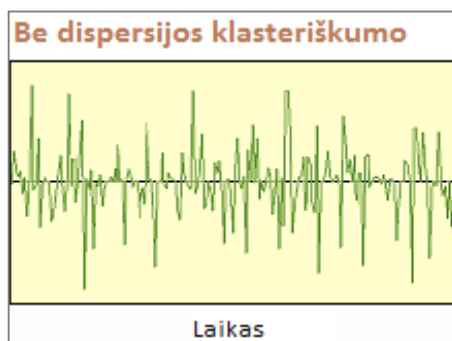
Stabiliojo pasiskirstymo teorinis tinkamumo pagrindimas, rėmėsi bendrąja centrine ribine teorema, kuri nusako, kad jei egzistuoja nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumos pasiskirstymo funkcija, tada ši funkcija turi priklausyti stabilijų Pareto pasiskirstymų klasei. O kadangi mažesnio dažnio finansinės grąžos (pvz. mėnesio) gali būti išreikštos aukšto dažnio grąžų (pvz.

dienos) suma, todėl galima daryti prielaidą, kad mažesnio dažnio grąža gali būti modeliuojama pagal stabilųjį pasiskirstymą. Tačiau Mittnik ir Rachev (1993) paneigė šią prielaidą, argumentuodami tuo, kad yra pakankamai sunku rasti tikslų pasiskirstymą konkreitiems stebėjimams, pagal kurį galima būtų sumodeliuoti grąžas. Vis dėlto, kadangi bendroji centrinė ribinė teorema apibrėžia stabilųjų pasiskirstymų traukos sritį (skirstinys pasižymi tomis pačiomis savybėmis, kaip ir traukos srities skirstinys), tikėtina, kad ir stebėjimai priklausys stabilaus pasiskirstymo traukos sričiai, ir tokiu būdu, ją galima modeliuoti pagal stabilųjį pasiskirstymą [12].

1982 metais Engle pristatė ARCH modelių klasę, o vėliau 1986 m. Bollerslev [9] apibendrintą ARCH modelį GARCH, modeliai sudarė alternatyvą modeliavimui pagal stabilųjį pasiskirstymą, kadangi abu turi sunkesnes už normaliojo pasiskirstymo uodegas. Tai pagrindinė priežastis dėl ko šie modeliai iki šiol plačiai naudojami finansiniame modeliavime.

1.2.2. HETEROSKEDASTIŠKUMAS

Kita svarbi akcijų grąžų savybė yra heteroskedastiškumas arba dispersijos nepastovumas. Gerai žinomas faktas, kad akcijų grąžų dispersija yra kintanti laike ir yra pastebimi dispersijos didėjimo ir mažėjimo klasteriai. Dispersijos kitimo suvokimas yra svarbus, norint suprasti ir prognozuoti būsimas grąžas. Paskutiniu metu dažnai naudojami ARCH šeimos modeliai atspindi būtent šią savybę. Žemiau pateiktuose grafikuose pavaizduotos laiko eilutės be dispersijos klasterių (pav. 4) ir su dispersijos klasteriais (pav. 5).



4 pav. Grąžos be dispersijos klasterių



5 pav. Grąžos su dispersijos klasteriais

1.2.3. ASIMETRIŠKUMAS

Finansinėje literatūroje pateikiamuose paskutiniuose tyrimuose (Hong ir kiti, 2006)[13], išskiriami du asimetrijos tipai. Pirmasis tipas – tai asimetrija pavienių akcijų gražų, kuri per paskutinius du dešimtmečius buvo plačiai išnagrinėta daugelyje darbų. Antrasis – tai priklausomybių tarp akcijų asimetrija: akcijų gražos stipriau koreliuoja rinkos nuosmukio metu, nei per rinkos pakilimą. Ši savybė vadinama „asimetrine priklausomybe“. Tokios asimetrinės priklausomybės įrodymai buvo publikuoti kelių autorių per paskutinį dešimtmetį: Longin ir Solnik (2001)[19], Ang ir Bekaert (2001)[3], Ang ir Chen (2002)[2] - visi autoriai pažymėjo, kad koreliacijos tarp akcijų gražų yra didesnės meškų rinkos metu nei bulių (Andrew J. Patton, 2012)[27]. Todėl modeliuojant ne pavienes akcijų gražas, o portfelius susidedančius iš kelių ar kelių šimtų akcijų svarbu vertinti priklausomybes, kas leidžia sumažinti portfelio riziką. Tokiu būdu, esant išvardintiems požymiams nagrinėjamame portfelyje, aproksimuoti modelį daugiamačiu normaliuoju pasiskirstymu negalima, nes jis neatvaizduos išvardintų savybių.

1.3. AUTOREGRESINIAI SLENKANČIO VIDURKIO MODELIAI ARMA(P,Q)

Šis modelis buvo sukurtas Peter Whittle 1938 metais. Daugelio laiko eilučių negalėtume aprašyti vien slenkančiojo vidurkio (MA) arba vien autoregresiniai modeliais (AR). ARMA modeliai yra tų dviejų modelių apjungimas. Šį modelį galima sudaryti stacionarioms eilutėms.

Apibrėžimas. Procesas ξ_t vadinamas stacionariu siaurąja prasme, jei jo daugiamačiai pasiskirstymai nepriklauso nuo postūmio laike, t. y.

$$F_{t_1, \dots, t_k}(\cdot) = F_{t_1 + \tau, \dots, t_k + \tau}(\cdot), \forall t_1, \dots, t_k \in T, k = 1, 2, \dots, \text{jei } (t_i + \tau) \in T \quad (1.2)$$

Laiko eilučių analizėje dažniausiai naudojamas kitas stacionarumo apibrėžimas.

Apibrėžimas. Procesas ξ_t vadinamas stacionariu plačiąja prasme, jei jo matematinis vidurkis ir kovariacinė funkcija nepriklauso nuo poslinkio laike, t. y. Jei

$$m(t) = m(0), \quad R(t, s) = R(t - s, 0), \quad \forall t, s \in T$$

T.y. suskaidžius stebėjimus į atskiras grupes, kiekvienos grupės vidurkis turi būti toks pats ir laiko eilutės stebėjimų kovariacija (dispersija) turi nepriklausyti nuo laiko.

Toliau procesą vadinsime stacionariu, jei jis stacionarus plačiąja prasme.

Apibrėžimas. Stacionarus procesas ξ_t vadinamas $ARMA(p, q)$ procesu, jei jis tenkina lygybę

$$\xi_t = \mu + a_1 \xi_{t-1} + \dots + a_p \xi_{t-p} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + b_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}, t \in \mathbb{Z}, \quad (1.3)$$

kur ε_t – baltas triukšmas.

Apibrėžkime sekančius polinomus:

$$P(z) = 1 - a_1 z - \dots - a_p z^p$$

$$Q(z) = 1 + b_1z + \dots + b_qz^q$$

Panaudojant vėlinimo operatorių ir įvestus polinomus $P(z)$ ir $Q(z)$, $ARMA(p, q)$ procesą galime užrašyti:

$$P(L)\hat{\xi}_t = Q(L)\varepsilon_t, \mu = P(1)E\xi_t \quad (1.4)$$

ARMA modelis bus vienareikšmiškai identifikuojamas ir apibrėš stacionarų procesą, jei pareikalausime, kad

$$P(z) \neq 0, \text{ kai } |z| \leq 1, \quad (1.5)$$

$$Q(z) \neq 0, \text{ kai } |z| < 1.$$

Be to $P(z)$ ir $Q(z)$ neturi bendrų šaknų [15].

Po optimalių parametrų p ir q apskaičiavimo, likę nežinomi modelio parametrai $\mu, \sigma_\varepsilon^2, a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ randami maksimalaus tikėtimumo metodu, darant prielaidą apie ξ_t pasiskirstymą.

1.4. APIBENDRINTI AUTOREGRESINIAI SĄLYGINIO HETEROSKEDASTIŠKUMO MODELIAI GARCH

Kaip ir regresinėje analizėje, kur svarbią klasę sudaro heteroskedastinių paklaidų (t.y. su nepastovia dispersija) regresijos modeliai, aprašant finansinius duomenis svarbiausią vietą užima vadinamieji sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai. Heteroskedastiškumas apibūdina stebimo dydžio dispersijos nepastovumą laike. Sąlygiškumas suvokiamas kaip priklausomybė nuo netolimos praeities stebėjimų. GARCH modelis buvo pasiūlytas Bollerslevo 1986 m. [9] ir yra panašus į ARMA modelį, tačiau ARMA modelyje sąlyginė dispersija yra pastovi. Kokia įtaka tai turi akcijų modeliavimui? Sakykime, esame pastebėję, kad paskutinės akcijų grąžos turėjo didesnę dispersiją nei įprastai, todėl galima tikėtis, kad ir sekančią dieną grąžų svyravimas bus didesnis nei įprastai, tačiau ARMA procesas dėl pastovios dispersijos šios savybės neatvaizduos. Tačiau sukurtas GARCH modelis atspindi dispersijos svyravimų padidėjimų ir sumažėjimų klasterius[9].

Sakysime, kad ξ_t tenkina apibendrintą autoregresinį sąlyginio heteroskedastiškumo GARCH(r,s) (angl. *Generalized autoregressive conditional heteroskedastic*) modelį, jei

$$\xi_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (1.6)$$

kur ε_t pasiskirstęs pagal tam tikrą dėsnį, dažniausiai, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ ir yra nepriklausomi, o σ_t tenkina

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r \sigma_{t-r}^2 + \beta_1 \xi_{t-1}^2 + \dots + \beta_s \xi_{t-s}^2 = \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^s \beta_i \xi_{t-i}^2, \end{aligned}$$

čia

$$r \geq 0, s \geq 0,$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, r,$$

$$\beta_i \geq 0, i = 1, \dots, s.$$

Be to ξ_t – stochastiškai (statistiškai) nepriklausomi. Jei $r = s = 0$, tada ξ_t – baltasis triukšmas.

Nors išraiška (1.6) primena ARMA proceso apibrėžimą su autoregresijos eile p ir slenkančio vidurkio eile q , tačiau tai nėra ARMA procesas, nes ξ_t^2 nėra procesą σ_t^2 atnaujinantis baltas triukšmas.

Proceso sugeneruotą pagal GARCH modelį besąlyginis ekscesas išreiškiamas:

$$k_4 = \frac{E\xi_t^4}{(E\xi_t^2)^2} = \nu_4 \frac{E\sigma_t^4}{E\sigma_t^2} \geq \nu_4, \quad (1.7)$$

čia ν_4 yra ε_t eksceso koeficientas. Iš šios nelygybės seka, kad GARCH modeliu generuojami dydžiai turi sunkesnes uodegas [32].

GARCH(p,q) modelis su nepriklausomomis ir vienodai pasiskirsčiusiomis triukšmo komponentėmis ε_t , kurių $E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t^2) = 0$, yra stacionarus, jei

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j < 1. \quad (1.8)$$

Jei galioja ši nelygybė, tai GARCH(p,q) procesas turi stacionarų sprendinį, o besąlyginė dispersija lygi

$$Var(\xi_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^r \alpha_i - \sum_{j=1}^s \beta_j} < \infty. \quad (1.9)$$

Akivaizdu, jei $\sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j = 1$, GARCH modelio besąlyginė dispersija lygi begalybei.

GARCH parametrų apskaičiavimas. GARCH parametrų vertinamas gali būti atliekamas mažiausių kvadratų metodu, kvazi-didžiausio tikėtinumo funkcija (angl. *quasi-maximum likelihood function*) ir didžiausio tikėtinumo funkcija (žr. sk. 1.6.1). Dažniausiai literatūroje yra sutinkamas kvazi-didžiausio tikėtinumo metodas, tačiau šis parametrų apskaičiavimo būdas, tinkamas tik tada, kai triukšmo dedamoji ε_t yra Gauso, o tai nėra realistinė prielaida. Empiriniai testai rodo, kad triukšmo dedamoji daug geriau yra suderinama su Stjudento arba apibendrintu normaliuoju (angl. *Generalized error distribution*) pasiskirstymais.

1.5. ARMA-GARCH MODELIS

Apjungus anksčiau aprašytus ARMA(p,q) ir GARCH(r,s) modelius, gaunamas ARMA(p,q)-GARCH(r,s) modelis. Šiame modelyje stebimas dydis aprašomas ARMA procesu, o ARMA proceso liekanos aprašomos GARCH modeliu.

ARMA(p,q)-GARCH(r,s) modelis nusakomas šiomis lygtimis:

$$\begin{aligned} \xi_t &= \sum_{i=1}^p a_i \xi_{t-i} + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^s \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

čia ξ_t – graža laiko momentu t , z_t – nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka, kurių $E(z_t) = 0, E(z_t^2) = 1$, iš čia seka, kad ε_t – stochastiškai nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kurių $E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ [32].

Atsižvelgiant į modeliuojamos sekos empirines savybes, šiame darbe taikysime prielaidas, kad z_t pasiskirstęs:

- Stjudento $t(\nu)$
- Asimetrinį Stjudento
- α -stabilųjį

1.6. MODELIO PARAMETRŲ VERTINIMAS MTM BŪDU

1.6.1. MAKSIMALAUS TIKĖTINUMO METODAS

Tarkime turime n ilgio nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių dydžių seką $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ su tankio funkcija $f(x)$, kurios parametrai θ yra nežinomi. Tada daugiamačio pasiskirstymo funkcija lygi:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = f(x_1 | \theta) \cdot f(x_2 | \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n | \theta)$$

Jei stebėjimus x_1, x_2, \dots, x_n laikysime fiksuotais pasiskirstymo funkcijos parametrais, o tuo tarpu θ – funkcijos kintamaisiais, gauname didžiausio tikėtinumo funkciją:

$$L(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)$$

Praktikoje daug patogiau naudoti tikėtinumo funkcijos logaritmą.

$$\ln L(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i | \theta)$$

Jei stebėjimai yra pasiskirstę pagal normalųjį pasiskirstymą su nežinomais parametrais $\theta = \{\mu, \sigma^2\}$, tada

$$\begin{aligned} \ln L(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \ln \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln \sigma - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \\ &= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

Nežinomų parametrų įverčiai randami :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Phi} L_n(\theta) \quad (1.11)$$

1.6.2. ARMA-GARCH SU SUNKIOMIS UODEGOMIS PARAMETRŲ VERTINIMAS

Tegu (ξ_1, \dots, ξ_n) yra n ilgio ARMA-GARCH modelio realizacija. ARMA-GARCH parametrų apskaičiavimo algoritmas vykdomas sekančiais žingsniais:

1. Stebėtos laiko eilutės inicializavimas
2. Nežinomų modelio parametrų θ inicializavimas
3. Liekanų tankio funkcijos aprašymas
4. Tikėtinumo funkcijos apskaičiavimas
5. Modelio parametrų radimas netiesinio optimizavimo metodais

Šio algoritmo eigoje iš stebėjimų eilutės ir nustatytų pradinių parametrų reikšmių išreiškiamos ARMA(p,q)-GARCH(r,s) modelio liekanos. Jeigu $s \geq q$, pradinės reikšmės $\xi_0, \dots, \xi_{1-(s-q)-p}, \tilde{\varepsilon}_{-s+p}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{1-s}, \tilde{\sigma}_0^2, \dots, \tilde{\sigma}_{1-r}^2$ leidžia apskaičiuoti $\tilde{\varepsilon}_t(\theta)$, kai $t = -s + q + 1, \dots, n$ ir $\tilde{\sigma}_t^2(\theta)$, kai $t = 1, \dots, n$ iš

$$\tilde{\varepsilon}_t = \tilde{\varepsilon}_t(\theta) = \xi_t - a_0 - \sum_{i=1}^p a_i(\xi_{t-1} - a_0) - \sum_{j=1}^q b_j \tilde{\varepsilon}_{t-j}, \quad (1.12)$$

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \tilde{\sigma}_t^2(\theta) = \omega + \sum_{i=1}^r \alpha_i \tilde{\sigma}_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \tilde{\varepsilon}_{t-j}^2,$$

$$\tilde{z}_t = \frac{\tilde{\varepsilon}_t}{\tilde{\sigma}_t}.$$

Kai $s < q$, reikalingos pradinės reikšmės $\xi_0, \dots, \xi_{1-(s-q)-p}, \tilde{\varepsilon}_0, \dots, \tilde{\varepsilon}_{1-s}, \tilde{\sigma}_0^2, \dots, \tilde{\sigma}_{1-r}^2$.

Galiausiai, filtravimo būdu išreiškus liekanų \tilde{z}_t ir dispersijų $\tilde{\sigma}_t$ sekas, maksimizuojame tikėtinumo funkciją:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Phi} L_n(\theta),$$

kur θ – nežinomi ARMA(p,q)-GARCH(r,s) modelio parametrai.

Didžiausio tikėtinumo funkcija, esant prielaidai, kad ARMA(p,q) - GARCH(1,1) modelio triukšmo dedamosios yra pasiskirsčiusios pagal Stjudento pasiskirstymą (kuris pasižymi sunkiomis uodegomis), apibrėžiama:

$$L_n = \sum_{t=1}^n \left[\ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln(\pi(\nu-2)) - \frac{1}{2} \ln \sigma_t^2 - \left(\frac{\nu+1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}_t^2}{\sigma_t^2(\nu-2)}\right) \right] \quad (1.13)$$

Tačiau iškila viena problema susijusi su šia parametrų apskaičiavimo metodika. Kaip minėta anksčiau šiame skyriuje, priklausomai nuo modelio eilės (p,q,r,s parametrų reikšmių) reikalingas tam tikras skaičius pradinių $\tilde{\varepsilon}_0, \tilde{\varepsilon}_{-1}, \dots, \tilde{\sigma}_0^2, \tilde{\sigma}_{-1}^2, \dots$ reikšmių, kurie nėra stebimi dydžiai, o yra išreiškiami per $\xi_{n-1}, \dots, \xi_0, \xi_{-1}, \dots$. Tačiau dydžiai ξ_0, ξ_{-1}, \dots taip pat nėra stebimi, nes duomenų eilutė yra ξ_1, \dots, ξ_n . Todėl daroma prielaida, kad esant pakankam n , priklausomybė nuo pradinių (nestebimų) reikšmių

išnyksta, todėl jų pradinis parinkimas neturės įtakos MTM įverčiui. Tačiau reikia turėti omenyje, kad tai yra sudėtingas klausimas.

1.7. ARMA-GARCH MODELIO ADEKVATUMO VERTINIMAS

Šiame skyrelyje išvardintos pagrindinės statistikos ARMA(p,q)-GARCH(r,s) modelio tinkamumui tikrinti.

1) Augmented-Dickey Fuller testas

Vienas iš būdų patikrinti laiko eilutės stacionarumą yra atlikti ADF (Augmented-Dickey Fuller) testą. ADF testas tikrina, ar nagrinėjama eilutė turi vienetinę šaknį. Taikant ADF testą, norint patikrinti, ar kintamasis y_t yra stacionarus, sudarome regresiją:

$$y_t = c + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = c + \varphi y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$$

Ši regresija pertvarkoma į tokią:

$$\Delta y_t = c + \delta y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \delta = \varphi - 1$$

Tikrinamos hipotezės:

$H_0: \delta = 0$ (kintamasis y_t nėra stacionarus ir yra integruotas bent 1-a eile)

$H_1: \delta < 0$ (kintamasis y_t yra stacionarus)

Testo statistika:

$$t = \frac{\hat{\delta}}{SE(\hat{\delta})}$$

Jei $t = \frac{\hat{\delta}}{SE(\hat{\delta})} < \tau_\alpha$, galime atmesti hipotezę H_0 (τ_α yra Dickey-Fuller t- statistikos reikšmė)

2) Ljung-Box testas (Q statistika)

Testas taikomas laiko eilučių ARMA(p,q) modelio liekanoms. Testas tikrina, ar yra statistiškai reikšmingų autokorelacijų tarp modelio liekanų. Jei autokorelacijų reikšmės yra statistiškai reikšmingos, daroma išvada, kad ARMA(p,q) modelis taikomas nekorektiškai.

Ljung-Box testo hipotezės apibrėžiamos:

$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$

H_1 : bent vienas nelygus nuliui

Čia ρ_i yra i-ojo vėlavimo (angl. *lag*) autokoreliacija. Skaičiaus m parinkimas turi įtakos testo rezultatui. Jei N yra stebėjimų skaičius, rekomenduojama parinkti $m = \log(N)$.

Tikrinamos hipotezės taip pat galima apibrėžti sekančiu būdu:

H_0 : nėra autokorelacijos tarp modelio paklaidų

H_1 : yra paklaidų autokoreliacija

Sprendimas dėl hipotezių priimamas apskaičiuojant statistiką:

$$Q_k = (T + 2) \sum_{i=1}^k (T - i)^{-1} \rho_i^2 \sim \chi_{\alpha}^2(k - p - q), \quad (1.14)$$

kur T – stebėjimų skaičius, k – vėlavimo periodų skaičius, ρ_i – i -ojo lago autokoreliacijos įvertis, α – reikšmingumo lygmuo, p – AR, o q – MA eilė.

Jei apskaičiuota Q - statistikos reikšmė yra mažesnė už kritinę teorinio $\chi_{\alpha}^2(k - p - q)$ skirstinio reikšmę (ar pagal Q -statistiką nustatyta reikšmingumo tikimybė yra didesnė už pasirinktą reikšmingumo lygmenį), daroma išvada su $(1 - \alpha)$ reikšmingumu, kad paklaidos neautokoreliuoja ir modelis sudarytas adekvačiai.

Sąlyginiam heteroskedastiškumui (arba ARCH efektui) tikrinti gali būti taikomi keli žemiau aprašyti testai.

3) Q^2 Testas

Q^2 testas, tai įprastas Ljung-Box testas, tik jis taikomas modelio kvadratinėms liekanoms, norint patikrinti sąlyginį heteroskedastiškumą. Tikrinamos sekančios hipotezės:

H_0 : nėra autokoreliacijos tarp kvadratinių paklaidų

H_1 : yra autokoreliacija tarp kvadratinių paklaidų

4) Lagranžo daugiklio testas

Šis testas buvo pasiūlytas Engle (1982). Testas ekvivalentus įprastai F statistikai, tikrinant hipotezę apie tiesinės regresijos koeficientų lygybę nuliui $\alpha_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$)

$$\xi_t^2 = \mu + a_1 \xi_{t-1}^2 + \dots + a_p \xi_{t-p}^2 + \varepsilon_t \quad t = m + 1, \dots, T,$$

čia ε_t – modelio paklaida, m – modelio eilė, T – duomenų dydis. Tikrinamos hipotezės:

$$H_0: a_1 = \dots = a_m = 0$$

$$H_a: \text{ bent vienas nelygus } 0$$

Tada pažymėjus $SSR_0 = \sum_{t=m+1}^T (\xi_t^2 - \bar{\omega})^2$, kur $\bar{\omega} = 1/T \sum_{t=1}^T \xi_t^2$ ir yra ξ_t^2 vidurkis, bei $SSR_1 = \sum_{t=m+1}^T (\hat{\varepsilon}_t^2)^2$, kur $\hat{\varepsilon}_t^2$ – modelio liekanos, gauname F statistiką:

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/m}{SSR_1/(T - 2m - 1)}$$

Pagal H_0 hipotezę statistika F asimptotiškai yra pasiskirsčiusi pagal chi-kvadrato dėsnį su m laisvės laipsniu. Jei $F > \chi_m^2(\alpha)$, kur $\chi_m^2(\alpha)$ yra viršutinė $100(1 - \alpha)$ procentilė, arba p statistikos F reikšmė yra mažesnė už α , H_0 hipotezė yra atmetama.

1.8. SUDERINAMUMO HIPOTEZIŲ TIKRINIMAS

Taikant ARMA-GARCH modelį atskiru klausimu nagrinėjamas liekanų pasiskirstymo dėsnio parinkimas. Norint priimti arba atmesti hipotezes apie stebimojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją, gali būti taikomi keli kriterijai.

Kolmogorovo-Smirnovo suderinamumo testas. Kolmogorovo-Smirnovo suderinamumo testas remiasi tuo, kad (tuomet kai teisinga nulinė hipotezė apie skirstinį) empirinė skirstinio funkcija negali labai skirtis nuo teorinės. Kolmogorovo-Smirnovo testo didžiausias privalumas yra jautrumas skirtumams tarp dviejų nagrinėjamų imčių pasiskirstymų kreivių formų ir padėčių (arba empirinės ir teorinės kreivių). Kolmogorovo-Smirnovo teste naudojama statistika skaičiuoja atstumą tarp dviejų lyginamų imčių pasiskirstymo funkcijų.

Empirinio pasiskirstymo funkcija F_n visiems n vienodai pasiskirsčiusiems stebėjimams X_i apibėžiama:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{X_i \leq x},$$

kur $I_{X_i \leq x}$ – požymio funkcija, kuri lygi 1, jei $X_i \leq x$ ir 0 priešingu atveju.

Kolmogorovo-Smirnovo statistika apibrėžtai pasiskirstymo funkcijai $F(x)$ lygi:

$$D_n = \sqrt{n} \sup_x |F_n(x) - F(x)| \quad (1.15)$$

Jei nagrinėjama imtis priklauso pasiskirstymui $F(x)$, tada D_n konverguoja į 0 beveik visur, kai n artėja prie begalybės.

Praktikoje, norint tinkamai apskaičiuoti statistiką ir priimti arba atmesti hipotezę, reikia pakankamai didelės imties.

Anderson-Darling suderinamumo testas. Šis testas yra alternatyva prieš tai aprašytam Kolmogorovo-Smirnovo suderinamumo testui. Anderson-Darling testu tikrinamos sekančios hipotezės:

H_0 : Imtis pasiskirsčiusi pagal tam tikrą pasiskirstymą.

H_1 : Imtis nėra pasiskirsčiusi pagal tam tikrą pasiskirstymą.

A-D teste apskaičiuojama statistika:

$$A^2 = -N - S, \quad S = \sum_{i=1}^N \frac{(2i-1)}{N} [\ln F(Y_i) + \ln(1 - F(Y_{N+1-i}))]. \quad (1.16)$$

F – apibrėžta pasiskirstymo funkcija, Y_i – surikiuota imtis.

Jeigu apskaičiuotos statistikos A reikšmė yra didesnė negu kritinė reikšmė (kritinė reikšmė priklauso nuo tiriamojo pasiskirstymo), tada hipotezė apie pasiskirstymų suderinamumą yra atmetama.

A-D testą galima taikyti ir kelių sekų lyginimui, iškeliant hipotezę, kad visos nagrinėjamos imtys priklauso tai pačiai pasiskirstymo funkcijai.

$$H_0: F_1 = \dots = F_k$$

$$H_a: \text{ bent viena seka turi kita pasiskirstymą .}$$

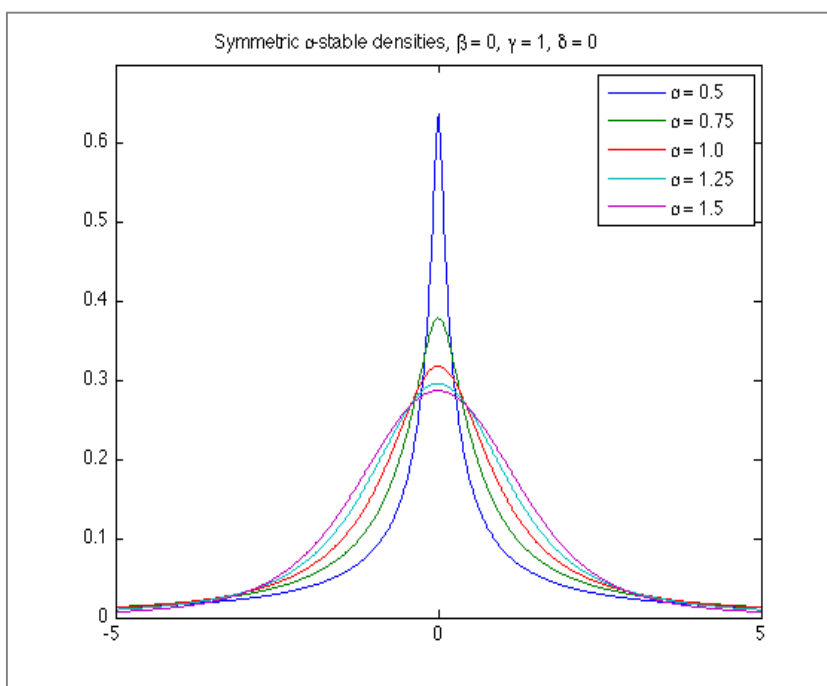
Čia F – neapibrėžta pasiskirstymo funkcija.

1.9. STABILIEJI PASISKIRSTYMAI

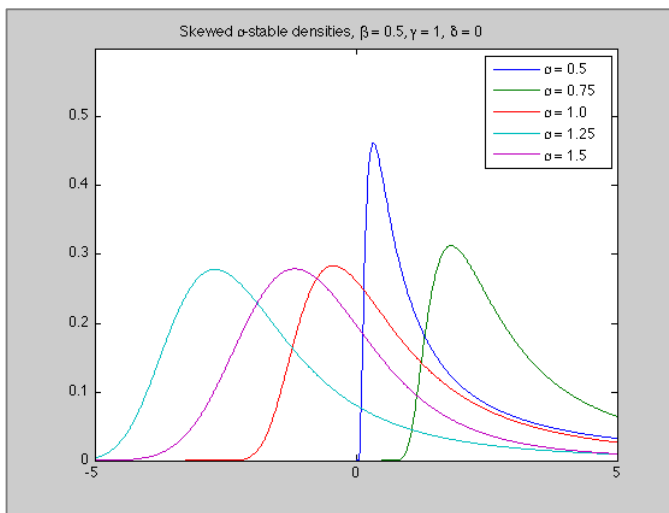
Stabilusis pasiskirstymas plačiai naudojamas finansinių grąžų modeliavime, nes jis atspindi tas empirines savybes, kurias negali atvaizduoti Gauso pasiskirstymas.

1960-aisiais metais Mandelbrot[21] pasiūlė α -stabiliaus pasiskirstymo panaudojimą dėl jo tinkamų savybių. Stabiliųjų pasiskirstymų šeima ne tik atvaizduoja sunkiąsias uodegas ar asimetriją, bet ir priklausomybė nuo keturių parametrų $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$, vietoj dviejų Gauso atveju, suteikia daugiau lankstumo aproksimuojant ir modeliuojant duomenis. Kita svarbi priežastis yra tai, kad šie pasiskirstymai turi traukos sritį (n.v.p. stabilijų a.d. sumos pasiskirstymas taip pat yra stabilusis), kas suteikia modeliams stabilumo, t.y. duomenys su nedideliais pakitimais atitiks pasiskirstymą, kuris taip pat priklausys šiai šeimai [5].

Nors nėra bendros analitiškai apibrėžtos tankio f ar pasiskirstymo funkcijų F formulė (išskyrus atskirus žinomus atvejus – normalųjį, Koši, Levy), tačiau yra sukurtos patikimos kompiuterinės programos, leidžiančios dirbti su šiais pasiskirstymais [25]. Parametras α vadinamas dėsnio rodikliu, arba stabilumo rodikliu ir yra apibrėžiamas ribose $0 < \alpha_0 \leq 2$. Parametras β_0 vadinamas dėsnio asimetrijos koeficientu, ir yra apibrėžtas ribose $-1 < \beta_0 \leq 1$. Jei $\beta_0 = 0$, tada pasiskirstymas yra simetrinis, jei $\beta_0 > 0$ jis įgyja teigiamą asimetriją (ištempta pasiskirstymo dešinė pusė), jei $\beta_0 < 0$, pasiskirstymo kairė pusė yra labiau ištempta. Parametrai α_0 ir β_0 nulemia pasiskirstymo pavidalą. Parametras γ_0 yra mastelio parametras, ir gali būti bet koks teigiamas skaičius. Parametras δ_0 yra padeties parametras, jis pastumia funkciją į dešinę, jei $\delta_0 > 0$ ir į kairę, jei $\delta_0 < 0$ [25].



6 pav. α – stabilaus pasiskirstymo tankio funkcijos priklausomybė nuo α_0 , kai $\beta_0 = 0$



7 pav. α – stabilaus pasiskirstymo tankio funkcijos priklausomybė nuo α_0 , kai $\beta_0 = 0.5$

Šaltinis: <http://math.bu.edu>

Atskiri stabilaus pasiskirstymo atvejai:

- Kai $\alpha_0 = 2$, stabilusis pasiskirstymas susiprastina į Gauso su dispersija lygia $2\gamma_0^2$, vidurkiu δ_0 , asimetrijos β_0 koeficientas neturi įtakos.
- Kai $\alpha_0 = 1$ ir $\beta_0 = 0$ pasiskirstymas susiprastina į Koši.
- Kai $\alpha_0 = 1/2$ ir $\beta_0 = 1$ pasiskirstymas virsta Levy pasiskirstymu.

Paini problema susijusi su stabiliaisiais pasiskirstymais yra jų parametų interpretavimas. Egzistuoja mažiausiai 10 skirtingų stabiliojo pasiskirstymo parametų apibrėžimų [12], todėl svarbu suvokti kokį parametrizavimą naudoja autoriai. Egzistuoja du pagrindiniai parametrizavimo būdai, kurie žymimi $S(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0; \mathbf{0})$ ir $S(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_1; \mathbf{1})$. Praktiniuose skaičiavimuose rekomenduojama naudoti $S(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0; 0)$ parametrizaciją dėl patogesnio skaičiavimo ir paprastesnio intuityvaus suvokimo. Parametrai $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ turi vienodas prasmes abiejose parametrizacijose, skiriasi tik padėties parametro prasmė. Šiame darbe buvo naudojama S_0 parametrizacija (pirmoji), todėl toliau pateikiama informacija yra apie $S(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0; 0)$.

Sakoma, kad atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal stabilųjį dėsnį, jei jo charakteristinė funkcija gali būti užrašyta:

$$E \exp(iuX) = \begin{cases} \exp(-\gamma_0^{\alpha_0} |u|^{\alpha_0} [1 + i\beta_0 (\tan \frac{\pi\alpha_0}{2}) (\text{sign } u) (|\gamma_0 u|^{1-\alpha_0} - 1) + i\delta_0 u]) & \alpha_0 \neq 1 \\ \exp(-\gamma_0^{\alpha_0} |u| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign } u) \ln(\gamma_0 |u|)] + i\delta_0 u) & \alpha_0 = 1 \end{cases} \quad (1.17)$$

Padėties parametras išreiškiamas:

$$\delta_0 = \begin{cases} \delta_1 + \beta_0 \gamma \tan \frac{\pi\alpha_0}{2} & \alpha_0 \neq 1 \\ \delta_1 + \beta_0 \frac{2}{\pi} \gamma_0 \ln(\gamma_0) & \alpha_0 = 1 \end{cases}$$

Svarbu pastebėti, kad β_0 – asimetrijos parametras, nėra taip pat interpretuojamas kaip ir įprastas asimetrijos koeficientas, kadangi kai $\alpha_0 < 2$ pasiskirstymas neturi antros ir aukštesnių eilių momentų, o pagal asimetrijos koeficiento apibrėžimą, jis yra lygus trečiojo centruoto momento ir standartinio nuokrypio trečiajame laipsnyje santykiui.

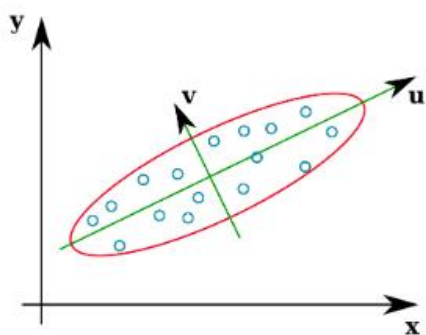
Svarbi stabilaus pasiskirstymo savybė: kai $\alpha_0 \neq 2$, neegzistuoja antros ir aukštesnių eilių momentai, todėl neegzistuoja dispersijos, asimetrijos ir eksceso koeficientų išraiškų.

1.10. PAGRINDINIŲ KOMPONENČIŲ ANALIZĖ

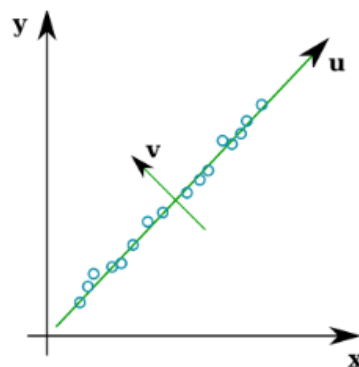
Modeliuojant portfelio grąžas didžiausias sunkumas yra portfelio dydis, kuris tiesiogiai susijęs su laiko sąnaudomis, bei nežinomų parametru skaičiumi (kuo daugiau nežinomų parametru, tuo didesnė tikimybė, kad modeliuojamos reikšmės nebus patikimos). Vienas iš galimų būdų sumažinti portfelio dimensiją yra aproksimuoti grąžas regresijos tipo modeliu, kuris priklauso nuo adekvataus (ne per didelio) parametru skaičiaus. Parametru skaičiaus mažinimas gali būti atliekamas pagrindinių komponentų analizės (angl. *PCA - principal component analysis*) būdu.

Pagrindinių komponentų analizė (PKA) – tai statistinė procedūra, kurios tikslas nustatyti kovariacines priklausomybes tarp kintamųjų aibės elementu. Tiksliau, PKA leidžia nustatyti pagrindines kryptis, kuriose yra didžiausias duomenų išsibarstymas.

Tarkime, kad 8 paveiksle $X - Y$ ašyse pavaizduoti dviejų kintamųjų duomenys. Pagrindinė kryptis, kurioje labiausiai išsibarstę stebėjimai yra ašyje U , o antroji pagal svarbumą kryptis yra V , kuri yra ortogonalė pirmajai. Patogumo dėlei, nubraižome $U - V$ ašis per duomenų centrą. Jei kiekvieną $X - Y$ koordinatę perkeltume į atitinkamą tik koordinatinių sistemoje $U - V$, duomenys taptų nekoreliuoti, t.y. kovariacijos tarp U ir V kintamųjų pasidarytų lygios nuliui. Taigi, kiekvienam duomenų rinkiniui, PKA randa koordinatinių sistemą, kuri yra nustatoma iš pagrindinių duomenų išsibarstymo krypčių ($U - V$ koordinatinių sistema pav.8). Kryptis U ir V vadinamos pagrindinėmis komponentėmis.



8 pav. Dispersijos kitimo kryptis (1)



9 pav. Dispersijos kitimo kryptis (2)

Nagrinėkime du kintamuosius, kurie beveik tiesiškai priklausomi (žr. pav. 9). Kaip ir 8 paveiksle, pagrindinės duomenų dispersijos kitimo kryptys pažymėtos ašyje U , o antroji kryptis V ašimi. Tačiau šiuo atveju, reikšmės V ašyje yra labai mažos ir yra artimos nuliui. Todėl galime daryti prielaidą, kad jos nelygios nuliui tik dėl eksperimentinio triukšmo. Todėl ašių sistemoje $U - V$ galima atvaizduoti duomenys tik vienu kintamuoju U ir atsisakyti V . Tokiu būdu uždavinio matas buvo sumažintas iki 1.

PKA apskaičiavimas. Pagrindinės komponentės randamos apskaičiuojant duomenų kovariacijos matricos tikrinius vektorius ir tikrines reikšmes. Šis veiksmas analogiškas ašių sistemos radimui, kurioje kovariacijų matrica yra diagonali. Tikrinis vektorius su didžiausia tikrine reikšme parodo kryptį kurioje didžiausias duomenų išsibarstymas, ašis su antra pagal dydį tikrine reikšme yra (ortogonal) kryptis su kitu didžiausiu išsibarstymu ir t.t.

Pritaikius tikrinių reikšmių ir vektorių apibrėžimą, užrašome:

$$A[x_1 \ x_2 \ x_3] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} [x_1 \ x_2 \ x_3]^T.$$

Pažymėjus

$$\Phi = [x_1 \ x_2 \ x_3] \text{ ir } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

gauname matricinę lygtį:

$$A\Phi = \Phi\Lambda$$

Normalizavus tikrinius vektorius iki vienetinio ilgio, ir vertinant jų ortogonalumą, gauname:

$$\Phi\Phi^T = \Phi^T\Phi = I.$$

Iš čia išplaukia

$$\Phi^T A \Phi = \Lambda,$$

ir

$$A = \Phi\Lambda\Phi^T.$$

PKA atveju, matricą A atitinka $n \times n$ kovariacijų matricą Σ . Tada egzistuos jai ortogonal) matrica Φ , kurios stulpeliuose yra kovariacijų matricos tikriniai vektoriai ir diagonalioji matrica Λ , kurios diagonalėje esantys elementai yra tikrinės kovariacijų matricos reikšmės.

$$\Phi^T \Sigma \Phi = \Lambda$$

Į tikrinių vektorių matricą Φ galima žiūrėti, kaip į tiesinę transformaciją, kuri, kaip 8 pavyzdyje, transformuoja duomenys iš ašių sistemos $[X, Y]$ į sistemą $[U, V]$. Bendruoju atveju tiesinė transformacija Φ , transformuoja duomenys į tokius, kuriuose visi kintamieji būtų nekoreliuoti. Koreliacijų matrica naujoje koordinatinių sistemoje lygi Λ , kurioje ne diagonalėje esantys elementai lygūs 0.

1.11. KOPULA

Apibrėžiant kopulas, iš pradžių apsiribosime dvimačiu atveju.

Nelson [23] kopulą apibrėžia kaip funkciją:

$$C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1], (u, v) \rightarrow C(u, v) \quad (1.18)$$

su savybėmis

- 1) Visiems $u, v \in [0,1]$ galioja:

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0 \text{ ir } C(u, 1) = u \text{ ir } C(1, v) = v$$

- 2) Visiems $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ su $u_1 \leq u_2$ ir $v_1 \leq v_2$ galioja:

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

Naudingesnė už formalųjį apibrėžimą yra sąsaja, kurią galima nustatyti tarp kopulos funkcijų ir daugiamačių pasiskirstymų funkcijų. Nagrinėkime atsitiktinį vektorių $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)'$. Sklar (1959) parodė, kad bet kurią daugiamačio pasiskirstymo funkciją F su marginaliosiomis pasiskirstymų funkcijomis $F_i (i = 1, \dots, d)$ galima išreikšti:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (1.19)$$

visiems $x_i \in \mathbb{R}$. C vadinama F funkcijos kopula (Sklar teorema). Tokiu būdu, d -matė kopula yra d -matė pasiskirstymo funkcija ant d – mačio hiperkubo $[0,1]^d$ su tolygiaisiais marginaliaisiais pasiskirstymais.

Dvi svarbios savybės:

1. Jei marginaliosios pasiskirstymo funkcijos F yra tolydžiosios, tada C yra vienareikšmiškai apibrėžta $[0,1]^d$.
2. Kopula yra invariantinė griežtai didėjant kintamųjų x_i transformacijų reikšmėms.

Tokiu būdu, griežtai didėjant marginaliųjų pasiskirstymų funkcijų reikšmėms, kopulos funkcija gali būti išreikšta:

$$C(u) := C(u_1, \dots, u_d) = F(F^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \quad (1.20)$$

Iš (1.19) ir (1.20) formulių matome, kad kopulos sąvoka leidžia paaiškinti ir apjungti priklausomybines ir marginaliųjų pasiskirstymų savybes: kopulos funkcija C perteikia informaciją apie priklausomybinę struktūrą tarp dydžių (X_1, \dots, X_d) , o marginaliosios pasiskirstymo funkcijos F_i perteikia informaciją apie marginaliųjų pasiskirstymo funkcijų savybes. Kopulos panaudojimas yra labai patrauklus modeliavimo požiūriu: dėl Sklaro teoremos bendrumo, daugiamačiam pasiskirstymui konstruoti užtenka turėti apibrėžtą kopulos funkciją ir marginaliąsias pasiskirstymo funkcijas. Praktinis privalumas tas, kad užtenka turėti empirines pasiskirstymo funkcijas, kaip įvesties duomenis, modeliuojant priklausomybinę struktūrą.

1.11.1 PRIKLAUSOMYBIŲ TARP UODEGŲ MATAI

Empiriškai pastebėta, jog finansų rinkose labiau tikėtina, kad didesni nuostoliai vyks kartu, tuo tarpu priklausomybės, esant didesnėms grąžom nėra tokios stiprios. Norint atvaizduoti tokias priklausomybes dažnai sutinkamos Gauso, Stjudento ir kitos simetrinės kopulos netinka. Todėl modeliuojant siūloma taikyti tokias kopulas, kurios atspindėtų priklausomybių asimetriškumą pasiskirstymų uodegose, t.y. stipresnį ryšį tarp apatinių kvantilių nei viršutinių.

Norint palyginti priklausomybes uodegose, Coles ir kiti [11] pasiūlė matą, kuris apibūdintų asimptotinę priklausomybę arba nepriklausomumą tarp dviejų dydžių. Tarkime, kad X ir Y turi vienodus pasiskirstymus. Tada, jei tarsime, kad šie du dydžiai yra griežtai nepriklausomi:

$$P(X \leq x, Y \leq x) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq x) = P(X \leq x)^2$$

Jei tarsime, kad dydžiai yra idealiai teigiamai koreliuoti (arba lygūs, kadangi padarėme prielaidą apie vienodą pasiskirstymą), tada

$$P(X \leq x, Y \leq x) = P(X \leq x) = P(X \leq x)^1$$

Tarkime, kad egzistuoja toks koeficientas α , kuris kai įgyja reikšmę $\alpha = 2$ apibūdina dydžių nepriklausomumą, tuo tarpu, kai $\alpha = 1$ daroma išvada, kad dydžiai teigiamai priklausomi. Tokiu būdu transformuojame matą taip, kad jis įgytų reikšmes intervale $[0,1]$:

$$\xi = \frac{2}{\alpha} - 1$$

Norėdami išvesti priklausomybės uodegose indeksą, tarkime, kad egzistuoja riba :

$$\alpha = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log P(X \leq F_X^{-1}(u), Y \leq F_Y^{-1}(u))}{\log P(X \leq F_X^{-1}(u))}$$

kuri bus interpretuojama kaip priklausomybės uodegose matas. Iš čia:

$$L(u) = 2 \frac{\log P(X \leq F_X^{-1}(u))}{\log P(X \leq F_X^{-1}(u), Y \leq F_Y^{-1}(u))} - 1 \quad (1.21)$$

yra priklausomumo tarp apatinių uodegų matas ir

$$R(u) = 2 \frac{\log P(X > F_X^{-1}(u))}{\log P(X > F_X^{-1}(u), Y > F_Y^{-1}(u))} - 1 \quad (1.22)$$

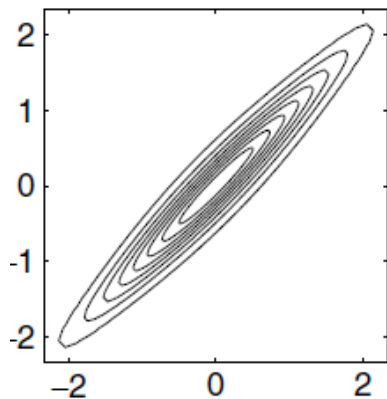
tarp viršutinių uodegų.

1.11.2 ASIMETRINĖ STJUDENTO KOPULA

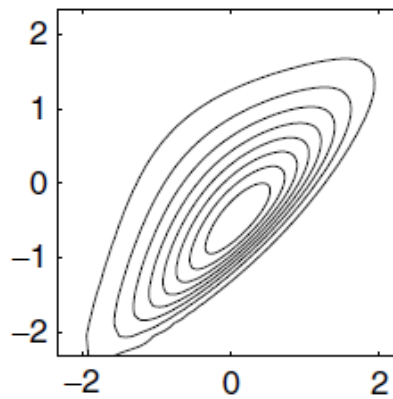
Viena iš galimų kopulų, kuri atvaizduoja didesnę priklausomybę tarp apatinių kvantilių negu viršutinių yra asimetrinė Stjudento kopulos funkcija.:

$$C_t(u; \mathcal{R}, \nu, \gamma) = St^d_{\mathcal{R}, \nu, \gamma}(F^{-1}(u_1), \dots, F^{-1}(u_d)) \quad (1.23)$$

Kur ν – laisvės laipsnio skaičius, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ – asimetrijos koeficientų vektorius, \mathcal{R} – koreliacijų matrica, F^{-1} – atvirkštinė pasiskirstymo funkcija, St^d – d-matė asimetrinė Stjudento pasiskirstymo funkcija.



10 pav. Simetrinė Stjudento kopula



11 pav. Asimetrinė Stjudento kopula

Kopulos sudarymui yra svarbus stochastinis daugiamačio asimetrinio Stjudento pasiskirstymo apibrėžimas:

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\gamma}Y + \sqrt{Y}\mathbf{Z} \quad (1.24)$$

Kur $\boldsymbol{\mu}$ ir $\boldsymbol{\gamma}$ yra d-mačiai vektoriai konstantos, Y pasiskirstęs pagal atvirkštinį Gama dėsnį $IG(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2})$ ir nepriklausomais nuo vektoriaus \mathbf{Z} , kuris pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį su nuliniu vidurkiu ir kovariacine matrica $\Sigma = [\sigma_{i,j}]$. Parametrų $(\nu, \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_{ii}, \hat{\gamma}_i)$ įverčiai randami didžiausio tikėtimumo metodu. Radus parametrų įverčius, kovariacijos matrica apskaičiuojama:

$$\hat{\Sigma} = \left(\text{cov}(\mathbf{V}) - \frac{2\nu^2}{(\nu-2)^2(\nu-4)} \hat{\boldsymbol{\gamma}}\hat{\boldsymbol{\gamma}}' \right) \frac{\nu-2}{2} \quad (1.25)$$

Plačiau apie kopulos sudarymą, daugiamačio asimetrinio Stjudento pasiskirstymo pagalba parašyta 1.12 skyriuje 4 žingsnyje).

1.12. MODELIAVIMO ALGORITMAS

Šiame skyriuje pateikiamas portfelio grąžų modeliavimo algoritmas. Tarkime portfelis yra sudarytas iš r_i akcijų grąžų ($i = 1 \dots N$), kur $r_{i,t}$ – žymi i -osios akcijos t dienos grąžą ($i = 1 \dots T$).

1 žingsnis: PK analizė ir regresijos modelio sudarymas.

Pagrindinių komponentių analizės būdu išskiriamos reikšmingos komponentės ($f_i, i = 1 \dots, K$), kurios turi didžiausią įtaką portfelio dispersijai. Likusios nereikšmingos komponentės apibendrinamos triukšmo dedamąja. Tokiu būdu kiekviena akcijų grąžų eilutė r_i yra tiesinis komponentių darinys plus nedidelis nekoreliuotas triukšmas

$$r_i = \sum_{i=1}^K c_i f_i + \sum_{i=k+1}^N c_i P_i = \sum_{i=1}^k c_i f_i + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.26)$$

Nustačius pagrindines komponentes ir regresinio modelio koeficientus, būsimas akcijų gražas galime generuoti:

$$r_{i,t} = \alpha_i + \sum_{j=1}^K \beta_{i,j} f_{j,t} + e_{i,t}, \quad t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, N. \quad (1.27)$$

Generuojant būsimums gražų scenarijus, modelis turi atspindėti:

- 1) stebėtas akcijų gražų savybes (sunkios uodegos)
- 2) faktorių $f_{j,t}$ ir triukšmo $e_{i,t}$ raidą laike
- 3) koreliaciją tarp gražų, atsižvelgiant į daugiamačio pasiskirstymo asimetriją ir ekscesą.

Žemiau pateikiamas šių problemų sprendimas.

2 žingsnis: Faktorių aproksimavimas ARMA(p,q)-GARCH(r,s) modeliu.

Priimame prielaidą, kad portfelio log-gražos pasiskirsčiusios pagal (1.10) modelį. Atsižvelgus į visas aukščiau išvardintas akcijų savybes, faktorius aproksimuojame ARMA(p,q)-GARCH(r,s) modeliu. Atsižvelgiant į tai, kad empiriniai stebėjimai rodo, jog triukšmo dedamoji $u_{j,t}$ (angl. *innovations*) yra geriau suderinama su pasiskirstymais, turinčiais sunkias uodegas, $u_{j,t}$ modeliuosime pagal Stjudento (t -ARMA-GARCH), asimetrinį Stjudento (*skew-t*-ARMA-GARCH) ir α – stabilųjį (α -stabilus-ARMA-GARCH).

$$f_{j,t} = a_{j,0} + \sum_{k=1}^p a_{j,k} f_{j,t-k} + \sum_{m=1}^q b_{j,m} \varepsilon_{j,t-m} + \varepsilon_{j,t} \quad (1.28)$$

$$\varepsilon_{j,t} = \sigma_{j,t} u_{j,t}$$

$$\sigma_{j,t}^2 = c_{j,0} + \sum_{k=1}^r c_{j,k} \sigma_{j,t-k}^2 + \sum_{m=1}^s d_{j,m} \varepsilon_{j,t-m}^2$$

$$j = 1, \dots, K; t = 1, \dots, T$$

Čia K - pagrindinių komponentių skaičius.

ARMA(p,q)-GARCH(r,s) modelio parametų apskaičiavimas vykdomas sekančiais žingsniais:

1. Randame MTM parametų $a_{j,0}, \dots, a_{j,p}, b_{j,1}, \dots, b_{j,q}, c_{j,0}, \dots, c_{j,r}, d_{j,1}, \dots, d_{j,s}$ įverčius su prielaida, kad $u_{j,t}$ yra pasiskirstę pagal Stjudento dėsnį.
2. Turint apskaičiuotus modelio parametrus ir komponentių eilutes, išsireiškiame triukšmų $u_{j,t}$ eilutes.
3. Triukšmo eilutę aproksimuojame Stjudento, asimetriniu Stjudento ir α – stabiliuoju pasiskirstymais MTM būdu.

3 žingsnis: ARMA-GARCH triukšmo modeliavimas.

Šiame žingsnyje, ištiriame priklausomybes tarp ARMA-GARCH modelio liekanų $u_{j,t}$ ir aprašome jų modeliavimą $T + 1$ laiko momentu. Priklausomybėms aprašyti panaudosime asimetrinę Stjudento kopulą.

Apskaičiavus triukšmo $u_{j,t}$ pasiskirstymų (Stjudento, asimetrinio Stjudento, α -stabilus) MTM parametrų įverčius, sugeneruokime S ilgio sekas. Sugeneravus S ilgio atsitiktinių dydžių sekas, gauname empirines sekų pasiskirstymų funkcijas $T+1$ momentu:

$$F_{\hat{u}_{j,T+1}}(x) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S I_{\{\hat{u}_{j,T+1}^{(s)} \leq x\}}, x \in R, j = 1 \dots K \quad (1.29)$$

Kur $\hat{u}_{j,T+1}^{(s)}$ ($1 \leq s \leq S$) yra j -ojo faktoriaus standartizuoto triukšmo s -oji reikšmės realizacija laiko momentu $T+1$.

4 žingsnis: Priklausomų triukšmų modeliavimas asimetrinės Stjudento kopulos pagalba.

K -matį empirinių standartizuotų triukšmų vektorių $\hat{u} = [\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_K]$ aproksimuojame asimetriniu Stjudento pasiskirstymu $V = [V_1, \dots, V_K]$ su ν laisvės laipsniu:

$$V = \mu + \gamma Y + \sqrt{Y} Z, \quad (1.30)$$

kur μ ir γ yra vektoriai konstantos, Y – pasiskirstęs pagal atvirkštinį gama pasiskirstymą $IG(\frac{\nu}{2}; \frac{\nu}{2})$ ir yra nepriklausomas nuo vektoriaus $Z \sim N(0, \Sigma)$, $\Sigma = [\sigma_{ij}]$. Maksimalaus tikėtimumo metodu randami nežinomi parametrai ($\nu, \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_{ii}, \hat{\gamma}_i$) kiekvienai faktoriaus triukšmo sekai, kur $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_K)$.

Apskaičiavus visus dydžių Y ir Z parametrus, galime sugeneruoti S scenarijų Y ir nepriklausomai S scenarijų Z , tada iš (1.30) galime rasti S scenarijų standartizuotų triukšmų vektoriui $\hat{u} = [\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_K]$, kurie pasiskirstę pagal asimetrinį Stjudento pasiskirstymą. Pažymėkime šiuos scenarijus $(V_1^{(s)}, \dots, V_K^{(s)})$, $s = 1, \dots, S$ ir pažymėkime ribinius pasiskirstymus $F_V(x_1, \dots, x_K) = P(V_1 \leq x_1, \dots, V_K \leq x_K)$. Tada žinodami, kad $U_1^{(s)} = F_{V_j}(V_j^{(s)})$, $1 \leq j \leq K; 1 \leq s \leq S$, galime sugeneruoti S tolydžiai pasiskirsčiusio atsitiktinio vektoriaus (U_1, \dots, U_K) scenarijų $(U_1^{(s)}, \dots, U_K^{(s)})$, $s = 1, \dots, S$, kurio pasiskirstymas aprašomas kopulos pagalba:

$$C(t_1, \dots, t_K) = F_V(F_{V_1}^{-1}(t_1), \dots, F_{V_K}^{-1}(t_K)); 0 \leq t_i \leq 1; 1 \leq i \leq K \quad (1.31)$$

Turėdami j -ojo faktoriaus triukšmo pasiskirstymo funkciją $F_{\hat{u}_{j,T+1}}$ (α -stabilioji, Stjudento arba asimetrinė Stjudento), ir realizacijas $U_j^{(s)}$, $1 \leq j \leq K; 1 \leq s \leq S$, galime sugeneruoti S standartizuotų liekanų vektoriaus realizacijų (įvertinant priklausomybes tarp vektoriaus elementų ir ribinius pasiskirstymus) $u_{T+1}^{(s)} = (u_{T+1}^{(1,s)}, \dots, u_{T+1}^{(K,s)})$, $s = 1, \dots, S$ laiko momentu $T+1$, su prielaida

$$u_{T+1}^{(j,s)} = (F_{\hat{u}_{j,T+1}})^{-1}(U_j^{(s)}); 1 \leq j \leq K; 1 \leq s \leq S \quad (1.32)$$

Sugeneravus daugiamatį vektorių $(u_{T+1}^{(1,s)}, \dots, u_{T+1}^{(K,s)})$, galime sugeneruoti S triukšmų realizacijų iš (1.28):

$$\varepsilon_{T+1}^{(s)} = (\varepsilon_{T+1}^{(1,s)}, \dots, \varepsilon_{T+1}^{(K,s)}) = (\sigma_{1,T+1} u_{T+1}^{(1,s)}, \dots, \sigma_{K,T+1} u_{T+1}^{(K,s)}), s = 1, \dots, S \quad (1.33)$$

Taigi iš (1.28) galime sugeneruoti S faktorių vektoriaus scenarijų

$$f_{T+1}^{(s)} = (f_{1,T+1}^{(s)}, \dots, f_{K,T+1}^{(s)}) \text{ laiko momentu } T+1.$$

5 žingsnis: Regresinio modelio liekanų aproksimavimas ARMA-GARCH modeliu.

Sekančiame algoritmo žingsnyje aproksimuosime regresinio modelio (1.27) liekanas. Išsireiškę empirines liekanas:

$$\hat{e}_{i,t} = r_{i,t} - \hat{\alpha}_i - \sum_{j=1}^K \hat{\beta}_{i,j} f_{j,t} \quad t = 1 \dots T; i = 1, \dots, N,$$

randame ARMA(p,q)-GARCH(r,s) modelio parametrus $\hat{e}_{i,t}$ sekoms

$$\hat{e}_{i,t} = g_{i,0} + \sum_{k=1}^p g_{i,k} \hat{e}_{i,t-k} + \sum_{m=1}^q h_{i,m} q_{i,t-m} + q_{i,t} \quad (1.34)$$

$$q_{i,t} = v_{i,t} z_{i,t}$$

$$v_{i,t}^2 = k_{i,0} + \sum_k^r k_{i,k} v_{i,t-k}^2 + \sum_m^s p_{i,m} q_{i,t-m}^2$$

6 žingsnis: Portfelijų gražų generavimas

Atlikę aukščiau aprašytus žingsnius, į regresinį modelį (1.27) įstatę apskaičiuotus parametrus, sumodeliuotų faktorių $f_{j,t}$ ($j = 1, \dots, K$) ir triukšmų $\hat{e}_{i,t}$ ($i = 1, \dots, N$) eilutes, gauname S realizacijų sumodeliuotų akcijų gražų laiko momentu $T + 1$.

1.13. RIZIKOS IR EFEKTYVUMO MATAI

Norint, kad investicinis portfelis atneštų didesnę pelną, reikia teisingai parinkti, kokiomis dalimis investuoti į kiekvieną portfelyje esantį aktyvą. Dažniausiai naudojami rizikos ir efektyvumo matai: standartinis nuokrypis, VaR, CVaR, Šarpo, MAD, Rachev ir pusiau dispersija koeficientas.

- 1) Standartinis nuokrypis ir dispersija – kintamumą apibrėžiantys dydžiai yra dažniausiai taikomi rizikos matai. Didelis gražos kintamumas reiškia didesnę netikrumą dėl investicijų gražos, taigi ir didesnę riziką [33].
- 2) VaR (angl. *Value at risk*)

Kitas pastaraisiais metais vis plačiau naudojamas rizikos matas yra vertės pokyčio rizika (angl. *value at risk, VaR*). Paprastai tariant, šis matas nurodo tikimybę, kad per tam tikrą laikotarpį bus prarasta tam tikra investicijų dalis – kitaip tariant, tai bandymas apskaičiuoti didžiausius nuostolius, kokių investuotojas patirtų įvykus mažiausiai tikėtinam įvykiui [33]. Mažiausiai tikėtinas įvykis nustatomas pagal pasirinktą lygmenį α .

Matematinis VaR apibrėžimas:

$$P(R < VaR_\alpha) \leq \alpha. \quad (1.35)$$

Taigi VaR – tai portfelio vertės α kvantilis.

VaR matas labai populiarus dėl interpretavimo paprastumo t. y. rizika vertinama tik vienu skaičiumi – nuostolių dydžiu atsitikus mažos tikimybės nepalankiam įvykiui. Tačiau VaR turi ir trūkumų. Svarbiausia tai, kad jis nėra adityvus, t. y. suma dviejų portfelijų VaR gali būti mažesnė už

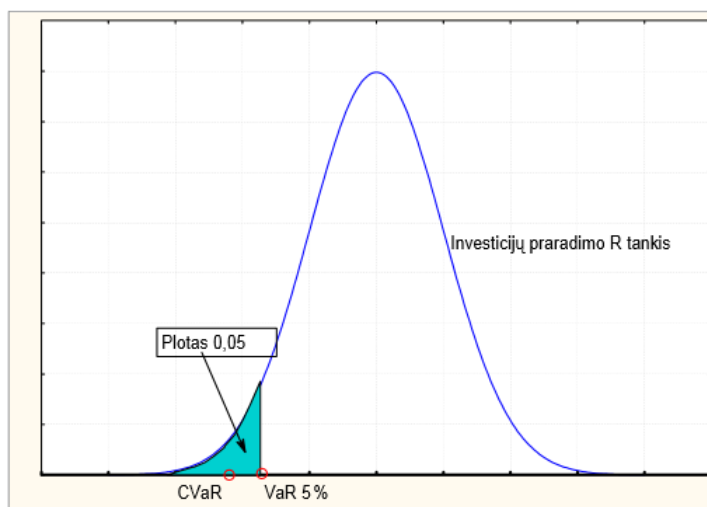
suminio portfelio vertės pokyčio riziką. Kita vertus, VaR vertina tik ribinį praradimą ir neatsižvelgia į galimus gerokai didesnius investicijų praradimus. Siekdamas panaikinti šį trūkumą, Artzner[4] pasiūlė alternatyvų rinkos rizikos matą CVaR, tenkinantį adityvumo savybę.

3) CVaR

CVaR vadinamas sąlyginiu VaR (angl. *Conditional VaR*), tikėtiniu vertės stygiumi (angl. *Expected Shortfall*) ar tikėtiniu kraštiniu praradimu (angl. *Expected Tail Loss*) ir reiškia labiausiai tikėtiną investicijų praradimo dydį, viršijantį VaR, išreiškiamą sąlyginiu vidurkiu [31]:

$$CVaR = E(R|R \geq VaR) \quad (1.36)$$

Geometrinė VaR ir CVaR interpretacija pateikiame paveiksle žemiau:



12 pav. VaR ir CVaR geometrinė interpretacija

Šaltinis: Sakalauskas V., 2005 [31]

4) Šarpo rodiklis (angl. *Sharpe ratio*)

Vienas dažniausiai naudojamų grąžą ir riziką siejančių rodiklių yra Šarpo rodiklis. Jis leidžia palyginti perteklinę grąžą (faktinė grąža minus nerizikinga grąža) su portfelio kintamumu, vertinamu pagal standartinį nuokrypį. Šarpo koeficientas leidžia apskaičiuoti grąžą, gaunamą už kiekvieną prisiimtinos rizikos vienetą [33].

$$\text{Šarpo rodiklis} = \frac{\text{portfelio grąža} - \text{nerizikinga grąža}}{\text{portfelio standartinis nuokrypis}} \quad (1.37)$$

Šio rodiklio trūkumas yra tas, kad jis vertina vienintelį rizikos matą - standartinį nuokrypį.

5) MAD (angl. *Mean absolute deviation*) rodiklis

MAD rodiklis parodo vidutinį teigiamą nuokrypį tarp stebimo dydžio ir duomenų vidurkio.

$$MAD = E(|R_X - \mu_X|) \quad (1.38)$$

Šio rodiklio reikšmė yra lengviau interpretuojama negu standartinis nuokrypis, tačiau dažnai yra sunkiau apskaičiuojama. Didžiausias šio rodiklio privalumas, lyginant su standartiniu nuokrypiu – jis geriau

apibrėžia nuokrypį nesimetriniams skirstiniams. Be to optimizuojant portfelį pagal šį rodiklį, nėra naudojama kovariacijų matrica ir tokiu būdu yra sprendžiamas tiesinio programavimo uždavinys, tuo tarpu pagal standartinį nuokrypį – kvadratinio programavimo uždavinys (žr. 1.14 sk.).

6) Rachev rodiklis

Rachev rodiklis buvo pasiūlytas Biglova ir kt. (2004)[6] metais, ir juo išreiškiamas santykis tarp vidutinio pelno dešiniojoje pasiskirstymo uodegoje (CGVaR) ir vidutinio nuostolio kairiojoje pasiskirstymo uodegoje (CVaR):

$$Rachev = \frac{Pelnas\ uodegoje}{Nuostolis\ uodegoje} = \frac{CGVaR_{1-\beta}}{CVaR_{1-\alpha}} \quad (1.39)$$

Akivaizdu, kad investuotojas pageidauja kuo didesnės rodiklio reikšmės, tačiau reikia prisiminti, kad šis rodiklis vertina tik ekstremaliąsias grąžų pasiskirstymo reikšmes, ir ignoruoja vidutines grąžas, kurios sudaro didžiąją visų įgyjamų reikšmių dalį, todėl negalima daryti išvadų tik pagal šį rodiklį.

7) Pusiau dispersija (angl. *Semivariance*)

Pusiau dispersija charakterizuoja neigiamą pasiskirstymo riziką (angl. *downside risk*) ir vertina, grąžų esančių žemiau (kairiau) nuo grąžų vidurkio, riziką.

$$Semivariance = \frac{1}{n} \sum_{r_i < \bar{r}} (r_i - \bar{r})^2 \quad (1.40)$$

Dėl savo paprastos interpretacijos šis rodiklis yra labai plačiai naudojamas.

1.14. SVORIŲ OPTIMIZAVIMAS

Optimalių svorių apskaičiavimas gali būti atliekamas minimizuojant (maksimizuojant) vieną iš aukščiau aprašytų rizikos ar efektyvumo matų. Šiam tikslui sudaromi optimizavimo uždaviniai.

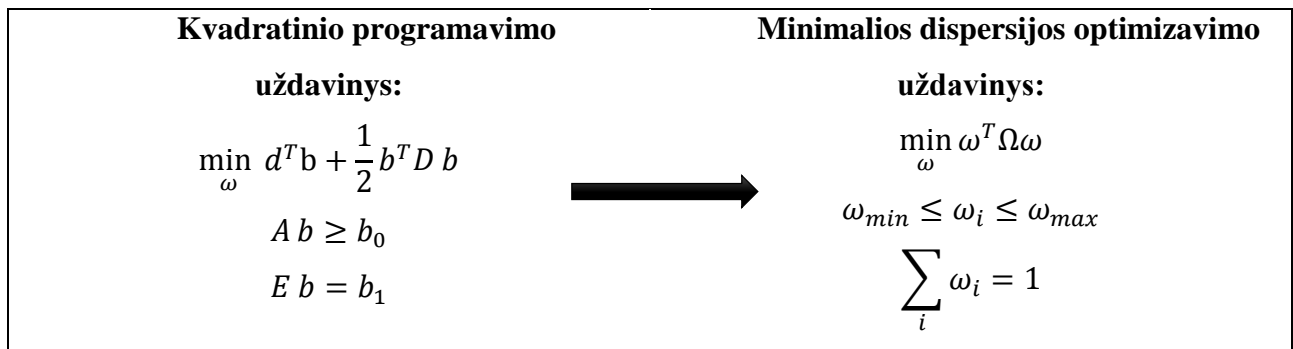
1) Dispersijos minimizavimas

Minimalios dispersijos optimizavimo uždavinys užrašomas:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \omega^T \Omega \omega, \\ \sum_i \omega_i = 1, \\ \omega_{min} \leq \omega_i \leq \omega_{max}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

čia ω - ieškomi svoriai, Ω – akcijų grąžų kovariacijų matrica, ω_{min} , ω_{max} – svorių apribojimai.

Šis uždavinys gali būti pertvarkytas ir sprendžiamas, kaip kvadratinio programavimo uždavinys:



13 pav. Vidurkio-dispersijos kvadratinis optimizavimo uždavinys

Čia $D = \Omega$, $b = \omega$, $d = 0$, A – apribojimų (nelygybių) matrica, E - apribojimų (lygybių) matrica, b_0 , b_1 - apribojimai.

2) Šarpo koeficiento maksimizavimas

Svorių apskaičiavimo uždavinys, maksimizuojant Šarpo koeficientą, užrašomas:

$$\max_{\omega} \frac{\mu^T \omega - r_f}{(\omega^T \Omega \omega)^{1/2}}, \quad (1.42)$$

$$\sum_i \omega_i = 1,$$

$$\omega_{min} \leq \omega_i \leq \omega_{max}.$$

Čia r_f – nerizikinga grąža.

Tačiau tokioje formoje nėra paprasta rasti sprendinį, nes tikslo funkcija nėra iškila. Todėl viena iš optimizavimo strategijų yra efektyviųjų portfelių kreivės radimas vidutinės grąžos ir standartinio nuokrypio ašyse. Nubrėžus liestinę iš taško $(0, r_f)$ per efektyviųjų portfelių kreivę, sąlyčio taške randamas portfelis su maksimaliu Šarpo koeficientu [38].

Kita strategija, yra pertvarkyti uždavinį taip, kad tikslo funkcija taptų iškili ir tada užduoties sprendimas atliekamas panaudojant kvadratinį programavimą.

Teiginys 1: Portfelių aibėje \mathbb{W} su savybe $e^T \omega = 1$, $e = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T, \forall \omega \in \mathbb{W}$, optimalusis portfelis x^* su maksimalia Šarpo koeficiento reikšme randamas, sprendžiant uždavinį su iškila tikslo funkcija, įvedus papildomą apribojimą, kuris nekeičia optimalaus sprendinio [38]:

$$\min_{\omega} \omega^T \Omega \omega, \text{ su papildoma sąlyga } (\mu - r_f e)^T \omega = 1$$

Pastaba: Sprendinys iš uždavinio teiginyje 1 turi būti normalizuotas, tam kad sutaptų su uždavinio iš (1.42) sprendiniu [38].

Kvadratinio programavimo uždavinys:	Šarpo optimizavimo uždavinys:
$\min_{\omega} d^T b + \frac{1}{2} b^T D b$ $A^T b \geq b_0$ $E^T b = b_1$	$\min_{\omega} \omega^T \Omega \omega$ <p style="text-align: center;">Sąlygos: $\omega_{min} \leq \omega_i \leq \omega_{max}$</p> $(\mu - r_f e)^T b = 1$

14 pav. Šarpo koeficiento kvadratinis optimizavimo uždavinys

Čia $D = \Omega$, $b = \omega$, $d = 0$, A – apribojimų (nelygybių) matrica, E - apribojimų (lygybių) matrica

3) CVaR koeficiento maksimizavimas

Modeliuojant portfelio grąžas, CVaR reikšmė su pasirinktu lygmeniu β apskaičiuojama:

$$R_{CVAR}(w, \beta) = R_{VAR} + \frac{\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \max(R_{VAR} - w^T R_s, 0)}{1 - \beta}$$

vidutinis perteklinis nuostolis

perteklinio nuostolio tikimybė

šalyginis perteklinis nuostolis

vidutinis nuostolis, jei įvyksta nuostolis

15 pav. CVaR formulės interpretacija

Šaltinis: Yollin, G., 2009 [14]

Iš čia, portfelio svorių radimo uždavinys maksimizuojant CVaR koeficiento reikšmę, apibrėžiamas:

$$\min \left(R_{VaR} + \frac{1}{S} \frac{1}{1 - \beta} \sum_{s=1}^S d_s \right)$$

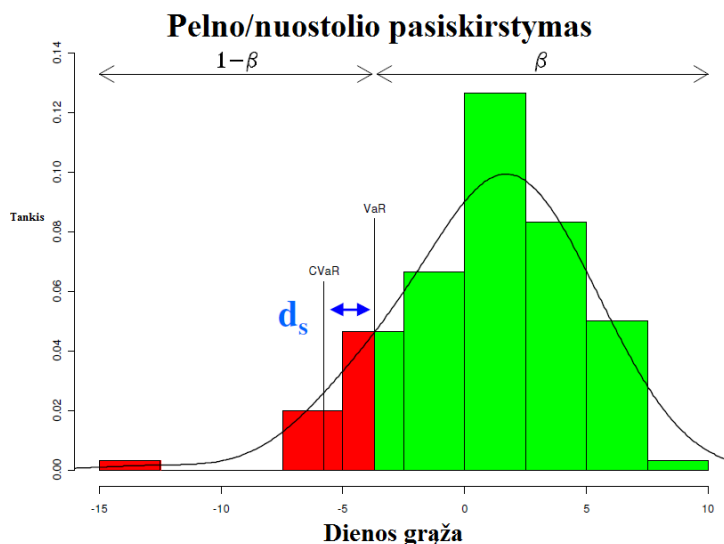
Apribojimai: $d_s \geq R_{VaR} + \omega R_s$

$d_s \geq 0$

$\sum_i \omega_i = 1$

16 pav. CVaR koeficiento optimizavimo uždavinys

Čia R_s –grąža, $d_s = \max(R_{VaR} - \omega^T R_s, 0)$. Atstumas d_s pavaizduotas 17 paveiksle.



17 pav. VaR, CVaR ir atstumo tarp jų geometrinė interpretacija

Šaltinis: Yollin, G., 2009 [14]

Koeficientų radimą galima spręsti kaip tiesinio programavimo uždavinį.

Tiesinio programavimo uždavinys:	CVaR optimizavimas
$\min c^T x$	$\min \left(R_{VaR} + \frac{1}{S} \frac{1}{1-\beta} \sum_{s=1}^S d_s \right)$
$Ax \geq b_0$	Apribojimai: $d_s \geq R_{VaR} + \omega R_s$ $d_s \geq 0$ $\sum_i \omega_i = 1$
Čia, $c^T = \left[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \frac{-1}{(1-\beta)S} \ \dots \ \frac{-1}{(1-\beta)S} \ -1 \right]$ $x^T = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_n \ d_1 \ \dots \ d_s \ R_{Var}]$	
$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{r}_1 & \dots & \bar{r}_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{11} & \dots & r_{1n} & 1 & 0 & \dots & 1 \\ r_{21} & \vdots & r_{2n} & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ r_{s1} & \dots & r_{sn} & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$	

18 pav. CVaR tiesinio optimizavimo uždavinys

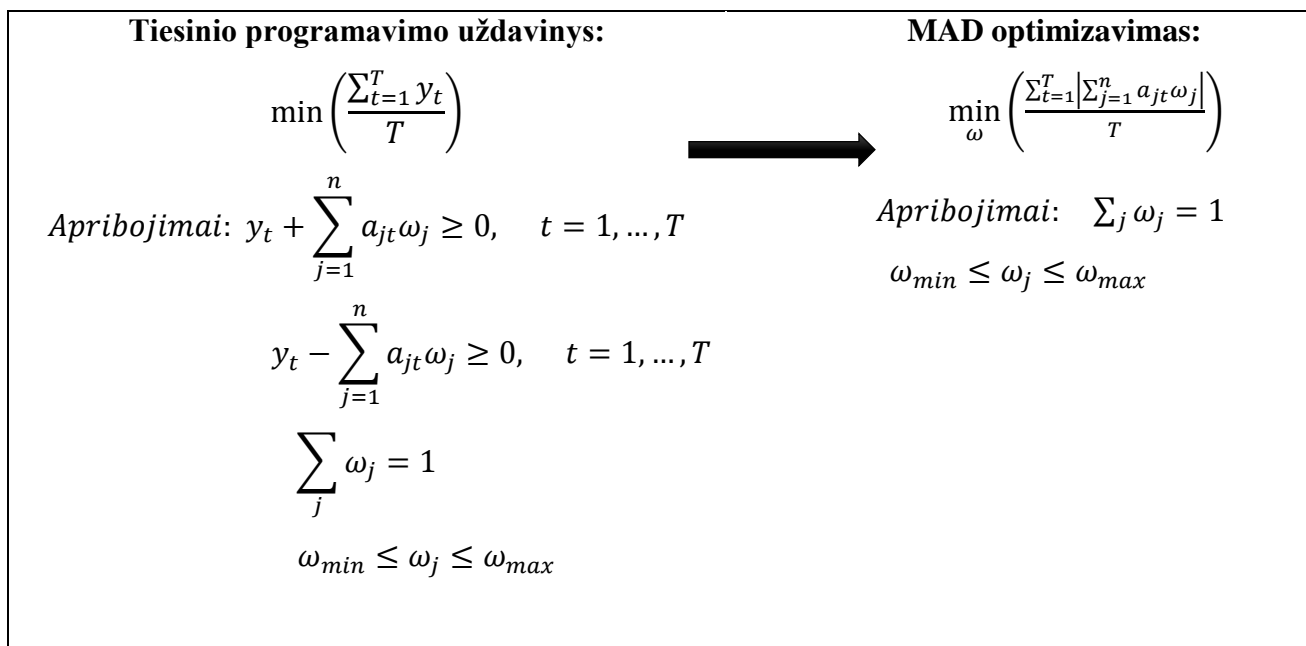
4) MAD rodiklio optimizavimo uždavinys

MAD dydį galime užrašyti:

$$MAD = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \left| \sum_{i=1}^n (r_{ij} - r_j) \omega_j \right| = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \left| \sum_{i=1}^n a_{jt} \omega_j \right|, \quad (1.43)$$

Čia $a_{jt} = (r_{ij} - r_j)$, $j = 1, \dots, n$; $t = 1, \dots, T$ - yra centruota j-osios akcijos grąža laiko momentu t .

Tada MAD minimizavimo uždavinys susiveda į tiesinio programavimo uždavinius:



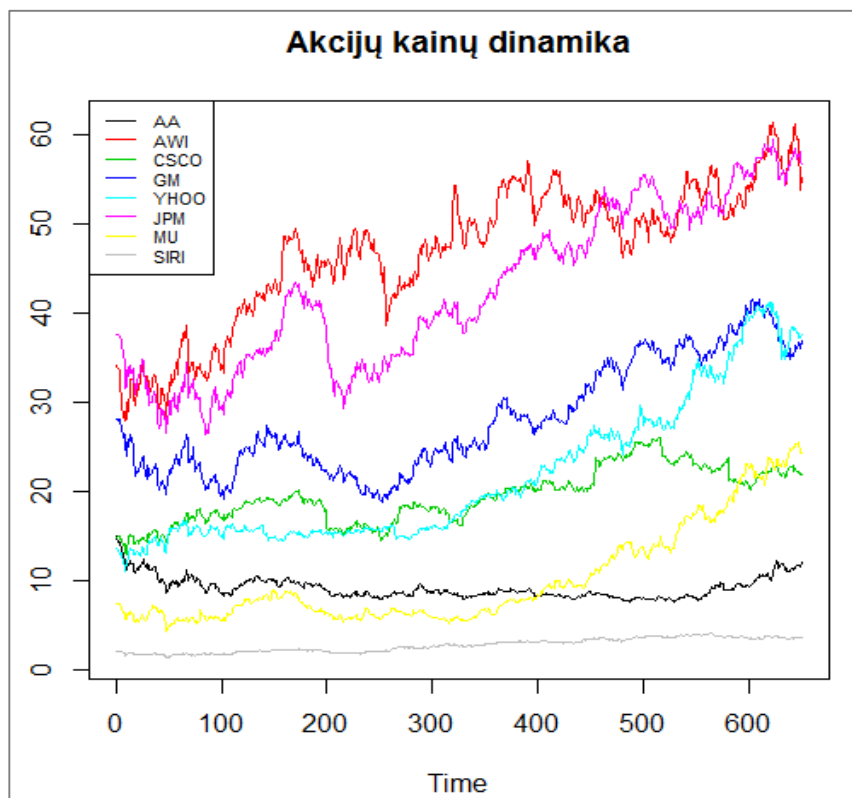
19 pav. MAD tiesinio programavimo uždavinys

Šaltinis: Konno[16]

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1. VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO SAVYBIŲ ANALIZĖ

Šiame darbe analizuojamos aštuonių akcijų gražos, stebėtos laikotarpyje 2011.07.27-2014.02.26 (650 stebėjimai). Akcijų gražų istorinių duomenų šaltinis „Yahoo Finance“.



20 pav. Portfelį sudarančių akcijų kainų dinamika

Akcijų gražų grafikai pateikti priede 1.

Norėdami parinkti tinkamą ir adekvatų akcijų log-gražų modelį, analizuojame pagrindines akcijų statistikas: vidurkį, dispersiją, ekscesą, asimetriją, taip pat atliekame suderinamumo testą su normaliuoju, Stjudento, asimetriniu Stjudento ir stabiliuoju pasiskirstymais.

2.1 lentelė. Istorinių akcijų gražų statistikos

Pavadinimas\Statistika	Vidurkis	Dispersija	Asimetrijos koeficientas	Ekscesas
Alcoa Inc.(AA)	-0.00033	0.00047	-0.24731	3.59899
Armstrong World Industries, Inc. (AWI)	0.00074	0.00044	-0.70841	4.44471
Cisco Systems, Inc. (CSCO)	0.00061	0.00032	0.48928	15.75270
General Motors Company (GM)	0.00041	0.00047	-0.01918	3.19421
Yahoo! Inc (YHOO)	0.00157	0.00037	0.44835	4.40097
JPMorgan Chase & Co.(JPM)	0.00064	0.00040	-0.18618	3.43320
Micron Technology Inc. (MU)	0.00182	0.00101	0.25882	5.12957
Sirius XM Holdings Inc.(SIRI)	0.00083	0.00049	-0.15279	5.23622

Iš pateiktos 2.1 lentelės galime daryti prielaidą, kad akcijų dienos log-gražos neturėtų būti suderinamos su normaliuoju pasiskirstymu dėl asimetriškumo ir teigiamo eksceso. Šią hipotezę patikriname atlikdami Kolmogorovo-Smirnovo testą.

2.2 Lentelė. Kolmogorovo-Smirnovo testo p-reikšmės

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
p-value	< 2.2e-16	<2.2e-16	< 2.2e-16	<2.2e-16	< 2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16	<2.2e-16

Hipotezė apie normalųjį gražų pasiskirstymą yra atmetama su reikšmingumo lygmeniu 0.05.

Atlikdami Anderson-Darling suderinamumo testą, tikriname suderinamumą su stabiliuoju, Stjudento, asimetriniu Stjudento pasiskirstymais. Pasiskirstymų parametrai pateikiami priede 2,3,4.

2.3 Lentelė. A-D suderinamumo testo p-reikšmės

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
Stabilusis	0.59957	0.26449	0.09587	0.19864	0.4328	0.1966	0.2997	0.4463
Stjudento	0.31977	0.36563	0.60362	0.43468	0.50644	0.46229	0.41202	0.51190
Asim.Stjudento	0.58860	0.61154	0.56729	0.54800	0.58197	0.56711	0.54013	0.57624

Su patikimumo lygmeniu $\alpha = 0.05$ priimame hipotezę apie suderinamumą su stabilioju, Stjudento ir asimetriniu Stjudento pasiskirstymais visoms akcijų log-grąžoms. Todėl parenkant modelį, turime pagrindo manyti, kad šie pasiskirstymai gali būti tinkami modeliavimui atlikti.

Priklausomybės tarp šių akcijų log-grąžų pateiktos Pirsono koreliacijos matricoje 2.4 lentelėje.

2.4 lentelė. Pirsono koreliacijos koeficientai portfelio grąžoms

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
AA	1.000	0.523	0.465	0.549	0.355	0.644	0.462	0.414
AWI	0.523	1.000	0.409	0.584	0.415	0.555	0.432	0.344
CSCO	0.465	0.409	1.000	0.492	0.333	0.486	0.416	0.318
GM	0.549	0.584	0.492	1.000	0.391	0.606	0.444	0.397
YHOO	0.355	0.415	0.333	0.391	1.000	0.381	0.351	0.337
JPM	0.644	0.555	0.486	0.606	0.381	1.000	0.465	0.410
MU	0.462	0.432	0.416	0.444	0.351	0.465	1.000	0.313
SIRI	0.414	0.344	0.318	0.397	0.337	0.410	0.313	1.000

2.4 lentelėje matome, kad tarp akcijų yra vidutinio stiprumo koreliacija. Laikantis grąžų stabilumo prielaidos, Pirsono koreliacijos koeficiento apskaičiuoti negalima, nes tuomet neegzistuoja antras momentas (žr. skyrių 1.9). Tokiais atvejais gali tiktį Spirmeno ranginis koreliacijos koeficientas.

2.5 lentelė. Spirmeno ranginės koreliacijos koeficientai portfelio grąžoms

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
AA	1.000							
AWI	0.490	1.000						
CSCO	0.471	0.438	1.000					
GM	0.529	0.541	0.491	1.000				
YHOO	0.339	0.370	0.348	0.361	1.000			
JPM	0.564	0.494	0.480	0.563	0.368	1.000		
MU	0.408	0.402	0.443	0.429	0.376	0.443	1.000	
SIRI	0.334	0.356	0.302	0.347	0.308	0.367	0.284	1.000

Lentelėje 2.5 matome, kad Spirmeno ranginės koreliacijos koeficientai yra šiek tiek mažesni negu Pirsono, tačiau visos reikšmės patenka į intervalą $[0.284; 0.564]$, todėl galima daryti išvadą, kad egzistuoja vidutinio stiprumo ryšiai tarp akcijų grąžų.

Paveiklsle 20 galime išvelgti, kad egzistuoja priklausomybė tarp retų įvykių: pikai (didesnės grąžos nei vidutinės) ir duobės (mažesnės nei vidutinės grąžos) stebimi tuo pačiu metu tarp daugelio nagrinėjamų akcijų. Priklausomybių matų reikšmės tarp apatinių ir viršutinių 20% reikšmių pateiktos priede 5. Palyginkime, ar egzistuoja asimetrinė priklausomybė, t.y. ar priklausomybė tarp apatinių kvantilių yra didesnė nei tarp viršutinių.. Lentelėje 2.6 „+“ pažymėtos tos akcijų poros tarp kurių koreliacijos apatinėse uodegose yra didesnės negu viršutinėse.

2.6 lentelė. Priklausomybių tarp apatinių ir viršutinių uodegų palyginimas

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
AA								
AWI	-							
CSCO	+	+						
GM	+	+	+					
YHOO	+	+	+	+				
JPM	+	+	+	+	+			
MU	+	+	+	+	+	+		
SIRI	+	+	+	+	+	+	+	

Tik vienos poros atveju, priklausomybė tarp viršutinių uodegų yra didesnė nei tarp apatinių, todėl daroma išvada, kad egzistuoja priklausomybinė asimetrija, o sudaromas modelis turi atspindėti šią savybę. Tokiai priklausomybei atvaizduoti bus taikoma asimetrinė Stjudento kopula.

2.2. ARMA-GARCH MODELIO ADEKVATUMO TYRIMAS

Įvertinus nagrinėjamų akcijų savybes (koreliacijas, priklausomybes tarp įvykių esančių uodegose) pagrįsta manyti, kad prielaida apie grąžų nepriklausomumą ir vienodą pasiskirstymą negali būti naudojama modelyje. Kadangi rinkoje stebimos akcijų kainos apima informaciją apie praeities pokyčius rinkoje, natūralu, kad modelis galėtų atspindėti priklausomybę nuo praeities kainų. Todėl autoregresinių (ARMA) modelių klasė yra kandidatas, norint atvaizduoti priklausomybę nuo praeities duomenų. Tačiau, kaip parodo empiriniai duomenys, sąlyginis ARMA modelio homoskedastiškumas yra pažeidžiamas finansiniuose duomenyse. Iš čia išplaukia, kad visas išvardintas savybes gali atspindėti ARMA(p,q)-GARCH(r,s) modelis su liekanomis turinčiomis sunkesnes uodegas.

Kai portfelis yra sudarytas iš didelio skaičiaus akcijų, kiekvienai akcijai atskirai nustatyti optimaliausias modelio parametrų p,q,r,s reikšmes, yra nemažai laiko reikalaujantis uždavinys. Todėl siūloma kiekvienai portfelyje esančiai akcijai parinkti vienodą modelį, kurio negalima būtų atmesti daugeliui akcijų. Apžvelgtoje literatūroje (A.Biglova, S.Ortobelli)[7] portfelio modeliavimui, siūloma naudoti ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modelį:

$$r_{j,t} = a_{j,0} + a_{j,1}r_{j,t-1} + b_{j,1}\varepsilon_{j,t-1} + \varepsilon_{j,t}$$

$$\varepsilon_{j,t} = \sigma_{j,t}u_{j,t}$$

$$\sigma_{j,t}^2 = c_{j,0} + c_{j,1}\sigma_{j,t-1}^2 + d_{j,1}\varepsilon_{t-1}^2$$

$$j = 1, \dots, 8; t = 1, \dots, T$$

Čia $r_{j,t}$ – j -osios akcijos t -ojo stebėjimo log-graža, T – stebėjimo dienų skaičius. Kadangi turime 650 istorinių stebėjimų, tai $T = 650$.

Jei šis modelis bus suderinamas su didžiaja dalimi portfelyje esančių akcijų, tada jį galėtume taikyti tolimesniame tyrime, neieškant kitokio, galbūt geresnio.

Toliau patikriname, ar nagrinėjamos log-gražoms galima taikyti šį modelį.

- 1) Iš pradžių patikriname, ar nagrinėjamos laiko eilutės yra stacionarios. ADF testo rezultatai kiekvienai portfelyje esančiai akcijai pateikti 2.7 lentelėje.

2.7 lentelė. ADF testo rezultatai

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
p-value	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01

Remiantis ADF testo rezultatais, atmetame H_0 hipotezę (eilutė nestacionari ir yra integruota bent viena eile) su reikšmingumo lygmeniu $p = 0.05$ ir darome išvadą, kad visų nagrinėjamų gražų stacionarumas yra statistiškai reikšmingas.

- 2) Atliekame Box-Ljung testą akcijų gražoms $r_{j,t}$ ir kvadratinėms gražoms $r^2_{j,t}$, norint nustatyti ar yra statistiškai reikšmingi autokoreliaciniai ryšiai. Šio testo pagalba tikrinama hipotezė, kad autokoreliacijų įverčiai iki m lago lygūs nuliui (m siūloma parinkti $m = \log(N)$, kur N – stebėjimų skaičius). Šį testą pakartojus kvadratinėms modelio paklaidoms, patikrinsime hipotezę apie sąlyginį heteroskedastiškumą.

2.8 lentelė. Q, Q², Lagranžo daugiklio testų p-reikšmės akcijų gražoms

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
$Q(5)$	0.046	0.003	0.194	0.077	0.012	0.0003	0.002	0.013
$Q(10)$	0.134	0.010	0.507	0.180	0.006	0.0002	0.004	0.027
$Q^2(5)$	< 2.2e-16	0.004	0.342	0.064	<2.2e-16	<2.2e-16	1.25e-08	4.15e-09
$Q^2(10)$	< 2.2e-16	0.001	0.786	3.25e-12	1.99e-15	<2.2e-16	3.78e-08	1.69e-09
ARCH-LM(10)	2.76e-13	0.008	0.754	5.36e-10	5.49e-06	8.1e-15	1.17e-06	7.26e-06

Iš 2.8 lentelėje pateiktų duomenų matome, kad tik *CISCO* ir *GM* atveju, nebuvo nustatyta statistiškai reikšmingos autokoreliacijos tarp akcijų gražų, bei kvadratinėms akcijų gražų. Kitų akcijų atveju, darome 0.95 reikšmingumo išvadą, kad gražos yra autokoreliuotos, bei egzistuoja ARCH efektas.

- 3) Toliau sudarome ARMA(1,1) modelį ir tikriname, ar tarp modelio liekanų ε_t egzistuoja priklausomybė. Jei hipotezė apie autokoreliacijos koeficiento lygybę nuliui atmetama, tada tai yra nuoroda į tai, kad liekanos yra autokoreliuotos ir ARMA modelis neaprašo duomenų korektiškai. Hipotezę apie liekanų nepriklausomumą tikriname Box-Ljung testo pagalba. Testo rezultatai pateikiami 2.9 lentelėje.

2.9 lentelė. Q, Q², Lagranžo daugiklio testų p-reikšmės ARMA modelio liekanoms

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
Q(5)	0.253	0.2267	0.132	0.5247	0.024	0.7594	0.4972	0.071
Q(10)	0.3855	0.015	0.7349	0.1546	0.033	0.6581	0.0014	0.0908
Q ² (5)	<2.2e-16	0.0004	0.316	0.01885	<2.2e-16	<2.2e-16	2.44e-08	4.31e-05
Q ² (10)	< 2.2e-16	0.0007	0.7148	8.76e-14	<2.2e-16	<2.2e-16	5.53e-10	7.33e-07
ARCH-LM(10)	1.982e-12	0.2875	0.9989	1.59e-10	0.01063	1.15e-11	5.27e-06	2.69e-05

Pateiktoje lentelėje matome, kad hipotezę apie autokoreliacinio ryšio liekanose nebuvimą iki 5-ojo lago su reikšmingumo lygmeniu $\alpha = 0.05$, galime priimti 7 atvejais, iki 10 lago – 5 atvejais. Autokoreliacinis ryšys tarp kvadratinių liekanų yra statistiškai reikšmingas septyniais atvejais, t.y. ne visi autokoreliaciniai ryšiai iki 5-ojo arba 10-ojo lago yra lygūs nuliui, kas nurodo į sąlyginį heteroskedastiškumą. ARCH efekto egzistavimą patvirtina ir Lagranžo daugiklio testas (H₀ hipotezė: ARCH efektas neegzistuoja). Šios išvados leidžia įtarti, ARMA-GARCH modelio tinkamumą beveik visoms nagrinėjamoms akcijoms. ARMA-GARCH gali netikti „YAHOO“ akcijoms, nes yra nustatytas statistiškai reikšmingas autokoreliacinis ryšys iki 10-ojo lago (t.y. reiktų aukštesnės eilės ARMA proceso), ir „CSCO“ akcijoms dėl ARCH efekto ARMA modelio liekanose neegzistavimo.

- 4) Pasirinkę modelį ARMA(1,1)-GARCH(1,1) tikriname šio modelio tinkamumą atlikdami tuos pačius testus, tik šį kartą ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modelio liekanoms.

2.10 lentelė. Q, Q², Lagranžo daugiklio testų p-reikšmės ARMA-GARCH modelio liekanoms

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
Q(5)	0.18	0.04	3.51e-06	0.19	0.31	0.67	0.018	0.18
Q(10)	0.36	0.17	2.20e-16	0.14	0.33	0.73	0.06	0.21
Q ² (5)	0.15	0.80	1.216e-13	0.96	0.91	0.48	0.36	0.16
Q ² (10)	0.03	0.97	2.20e-16	0.55	0.97	0.84	0.51	0.39
ARCH-LM(10)	0.06	0.96	< 2.20e-16	0.26	0.97	0.97	0.37	0.82

Iš gautų rezultatų 2.10 lentelėje darome išvadą, kad 6 akcijų atveju („AA“, „AWI“, „GM“, „YHOO“, „JPM“, „SIRI“) nėra nustatyta statistiškai reikšmingos autokoreliacijos tarp ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modelio liekanų (Box-Ljung testo p reikšmės yra didesnės už pasirinktą reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0.05$). Taip pat šešioms akcijoms („AWI“, „GM“, „YHOO“, „MU“, „JPM“, „SIRI“) nenustatyta statistiškai reikšmingo sąlyginio heteroskedastiškumo arba ARCH efekto. ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modelį galima atmesti tik „CSCO“ gražoms (liekanos yra statistiškai reikšmingai autokoreliuotos ir yra reikšmingas ARCH efektas). Kadangi daugumai portfelyje esančių akcijų log-gražoms negalime atmesti ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modelio, todėl būtent šį modelį naudosime tolimesniame tyrime.

2.3. PORTFELIO PAGRINDINIŲ KOMPONENČIŲ ANALIZĖ

Nagrinėjamas portfelis yra sudarytas iš 8 akcijų stebėjimų, todėl reikėtų kiekvienai akcijai parinkti adekvatų modelį. Nemažinant portfelio dydžio, užduotis pareikalautų nemažai laiko, bei didelis parametru skaičius galėtų lemti modelio rezultatų nepatikimumą. PK analizės pagalba randame pagrindines komponentes, taip sumažindami portfelio dimensiją.

PK analizės, atliktos akcijų log-gražoms, rezultatai pateikiami 2.11 lentelėje.

2.11 lentelė. Pagrindinių komponentių analizės rezultatai

	Komp.1	Komp.2	Komp.3	Komp.4	Komp.5	Komp.6	Komp.7	Komp.8
St. nuokrypis	0.046	0.023	0.018	0.016	0.015	0.014	0.013	0.012
Bendros dispersijos dalis	0.523	0.134	0.085	0.069	0.055	0.053	0.044	0.037
Kumuliacinė dispersijos dalis	0.523	0.657	0.743	0.811	0.866	0.919	0.963	1.000

2.11 lentelėje matome, kad pirmoji komponentė paaiškina 52% visos dispersijos, o pirmos šešios komponentės paaiškina daugiau nei 90% visos portfelio dispersijos. Kiekviena iš likusių komponentių turi mažiau nei po 5% įtakos bendrajai dispersijai. Nėra griežtai apibrėžtos taisyklės, kiek kintamųjų dispersijos turi paaiškinti faktoriai, tačiau atsižvelgiame į tai, kad kuo daugiau dispersijos paaiškina faktoriai, tuo daugiau informacijos apie kintamųjų elgesį išlaikome pereidami prie faktorių. Šiuo atveju pasirenkame 90% dispersijos paaiškinimo ribą, t.y. pirmas šešias komponentes.

Tokiu būdu, PK analizė leidžia aštuonias koreliuotas akcijų gražas r_i pakeisti šešiomis nekoreliuotomis laiko eilutėmis P_i , tardami, kad r_i yra tiesinis komponentių P_i darinys. Likusias dvi P_i komponentes su maža dispersija apibendrina klaida ε . Pagrindines komponentes toliau bus vadinamos

– faktoriais. Tokiu būdu, kiekviena eilutė r_i – tai tiesinis faktorių darinys su nedideliu nekoreliuotu triukšmu.

$$r_i = \sum_{i=1}^6 c_i f_i + \sum_{i=7}^8 c_i P_i = \sum_{i=1}^6 c_i f_i + \varepsilon$$

Nustatę šešis faktorius, paaiškinančius daugiau nei 90% visos dispersijos, faktorinio modelio pagalba galime generuoti būsimas grąžas r_i . Perrašome formulę (1.27), įstatę konkrečias kintamųjų K, T, N reikšmes: K=6 (pagrindiniai faktoriai), T=650 (dienų stebėjimų skaičius), N=8 (portfelį sudarančių akcijų skaičius):

$$r_{i,t} = \alpha_i + \sum_{j=1}^6 \beta_{i,j} f_{j,t} + e_{i,t} \quad t = 1, \dots, 650; \quad i = 1, \dots, 8 \quad (2.1)$$

Priede 6 pateikiami faktorinio modelio koeficientai $\alpha_i, \beta_{i,j}$. Priede 7 pateikiami stebėti regresinio modelio koeficientų statistinio reikšmingumo lygmenys (p-reikšmės). Kadangi net 5 modeliams visi koeficientai statistiškai reikšmingai skiriasi nuo nulio, galime laikyti, kad modelio taikymas yra adekvatus.

2.4. FAKTORIŲ IR LIEKANŲ ARMA(1,1)-GARCH (1,1) APROKSIMAVIMAS

Nustatę šešis pagrindinius faktorius ir faktorinio (regresinio) modelio koeficientus, toliau „dirbama“ nebe su pačiomis akcijų grąžomis, bet faktorių eilutėmis, o regresinio modelio pagalba (2.1), grįžtama prie grąžų.

Kadangi buvo parodyta (2.2. skyriuje), kad ARMA(1,1) - GARCH(1,1) modelio negalima atmesti daugeliui akcijų grąžų, todėl būtent šį modelį taikome faktorių modeliavimui. Faktorių ARMA(1,1) - GARCH(1,1) modelis:

$$\begin{aligned} f_{j,t} &= a_{j,1} f_{j,t-1} + b_{j,1} \varepsilon_{j,t-1} + \varepsilon_{j,t} \\ \varepsilon_{j,t} &= \sigma_{j,t} u_{j,t} \\ \sigma_{j,t}^2 &= c_{j,0} + c_{j,1} \sigma_{j,t-1}^2 + d_{j,1} \varepsilon_{t-1}^2 \\ j &= 1, \dots, 6; \quad t = 1, \dots, 650 \end{aligned}$$

ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modelio koeficientų MTM reikšmės su prielaida, kad triukšmo dedamosios $u_{j,t}$ pasiskirsčiusios pagal Stjudento skirstinį, pateikiamos 2.12 lentelėje.

2.12 lentelė. Faktorių ARMA(1,1)-GARCH (1,1) modelio MTM koeficientų įverčiai

	F1	F2	F3	F4	F5	F6
$a_{j,1}$	4.365e-02	6.828e-01	7.588e-01	-8.630e-01	-6.939e-03	6.265e-01
$b_{j,1}$	-2.026e-03	-6.642e-01	-8.377e-01	8.840e-01	2.632e-02	-6.551e-01
$c_{j,0}$	2.884e-05	2.549e-05	1.664e-06	2.212e-05	6.647e-06	4.850e-05
$c_{j,1}$	6.403e-02	4.344e-02	2.079e-02	8.273e-02	2.464e-02	3.779e-02
$d_{j,1}$	9.165e-01	9.100e-01	9.724e-01	8.364e-01	9.444e-01	7.308e-01
ν	9.6347	3.7971	5.2015	4.935	5.7492	3.7171

Iš šių modelių koeficientų p-statistikos reikšmių, pateiktų 8 priede, matome, kad ne visi koeficientai yra statistiškai reikšmingi, tačiau modeliuojant eilutę tai nėra taip svarbu, kaip prognozuojant. O šio darbo tikslas, sukurti modelį kuris, imituotų „praeties elgesį“.

Faktorinio (regresinio) modelio liekanas (2.1) $e_{i,t}$ kiekvienai akcijai taip pat aproksimuojame ARMA(1,1)-GARCH (1,1) modeliu:

$$\hat{e}_{i,t} = g_{i,1}\hat{e}_{i,t-1} + h_{i,1}q_{i,t-m_1} + q_{i,t} \quad (2.2)$$

$$q_{i,t} = v_{i,t}z_{i,t}$$

$$v_{i,t}^2 = k_{i,0} + k_{i,1}v_{i,t-1}^2 + p_{i,1}q_{i,t-1}^2$$

$$i = 1, \dots, 8; t = 1, \dots, 650$$

Koeficientų MTM reikšmės pateiktos 2.13 lentelėje.

2.13 lentelė. Liekanų ARMA(1,1)-GARCH (1,1) modelio MTM koeficientų įverčiai

	\hat{e}_1	\hat{e}_2	\hat{e}_3	\hat{e}_4	\hat{e}_5	\hat{e}_6	\hat{e}_7	\hat{e}_8
$g_{i,1}$	1.014e-01	0.38015	3.88e-01	1.885e-01	3.200e-01	5.392e-01	1.761e-01	1.477e-01
$h_{i,1}$	-1.24e-01	-0.42722	-4.356e-01	-2.136e-01	-3.61e-01	-5.71e-01	-2.13e-01	-1.832e-01
$k_{i,0}$	3.035e-06	0.000027	3.4714e-05	8.160e-07	2.034e-06	1.149e-05	1.83e-07	9.688e-07
$k_{i,1}$	9.507e-0	0.072071	7.6183e-02	1.572e-02	4.704e-02	1.115e-01	5.94e-02	4.997e-02
$p_{i,1}$	8.155e-01	0.354933	3.0585e-01	9.731e-01	5.361e-01	7.818e-01	1.00e-08	1.000e-08
ν	6.3503	5.17871	5.193561	5.675	5.1884	6.1641	5.258	5.8746

Šių modelių koeficientų p-statistikų reikšmės pateiktos 9 priede. Šių modelių koeficientai nėra statistiškai reikšmingi, tačiau aproksimavus ARMA-GARCH modeliu, portfelio grąžoms suteiksime sunkesnes pasiskirstymų uodegas, bei atsispindės priklausomybė laike.

2.5.ARMA-GARCH MODELIO TRIUKŠMO APROKSIMAVIMAS

2.4. skyriuje ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modelio MTM parametrų įverčiai buvo apskaičiuoti, darant prielaidą, kad triukšmas yra pasiskirstęs pagal Stjudento dėsnį. Norėdami parinkti tinkamiausią pasiskirstymą, išreiškiame triukšmų eilutes ir papildomai aproksimuojame jas asimetriniu Stjudento ir stabiliuoju pasiskirstymais. Nežinomus pasiskirstymų parametrus randame MTM būdu. Norėdami nustatyti su kuriuo pasiskirstymu faktorių liekanos yra geriausiai suderinamos, atliekame A-D suderinamumo testą.

2.14 lentelė. A-D suderinamumo testo p-reikšmės

	Stjudento	Asimetrisis Stjudento	Stabilusis
$u_{1,t}$	0.58288	0.64428	0.49485
$u_{2,t}$	0.49297	0.57045	0.50195
$u_{3,t}$	0.45254	0.59671	0.56220
$u_{4,t}$	0.48749	0.50642	0.45627
$u_{5,t}$	0.47005	0.59256	0.64460
$u_{6,t}$	0.55526	0.62288	0.51326

Lentelėje 2.14 matome, visi šie pasiskirstymai yra suderinami su ARMA-GARCH modelių liekanomis, esant pasiklovimo lygmeniui $p = 0.05$. Penkioms liekanoms ($u_{1,t}, u_{2,t}, u_{3,t}, u_{4,t}, u_{6,t}$) didžiausia suderinamumo testo p reikšmė gaunama, parinkus asimetrinį Stjudento pasiskirstymą, o penktojo faktoriaus atveju – stabilųjį pasiskirstymą. Kitame žingsnyje, daug kartų pakartojus portfelio grąžų modeliavimą esant skirtingoms triukšmų pasiskirstymo funkcijoms, atlikime suderinamumo testą su pradiniais duomenimis. ARMA-GARCH liekanos buvo modeliuojamos:

- Visų šešių faktorių liekanos pasiskirsčiusios pagal Stjudento
- Visų šešių faktorių liekanos pasiskirsčiusios pagal asimetrinį Stjudento
- Visų šešių faktorių liekanos pasiskirsčiusios pagal stabilųjį
- Penkių faktorių (1,2,3,4,6) liekanos pasiskirsčiusios pagal asimetrinį Stjudento, o penktojo faktoriaus - α -stabilųjį. Tokį pasiskirstymų derinį vadinsime - mišiniu.

Pakartojus testą 1000 kartų buvo apskaičiuotas procentinis santykis tarp įvykių, kai suderinamumas yra priimamas su pasiklovimo lygmeniu p , ir įvykdytų testų skaičiumi.

2.15 lentelė. A-D suderinamo procentinis dažnis, esant skirtingiems pasiskirstymams

	Stjudento	Asimetrinis Stjudento	Stabilusis	Mišinys
p=0.05	80%	77%	40%	83%
p=0.01	91%	87%	52%	92%

Iš 2.15 lentelės rezultatų matome, kad didžiausias suderinamumo santykio procentas įgyjamas, naudojant pasiskirstymų mišinį. Todėl tolimesniam tyrimui naudosime asimetrinio Stjudento ir stabiliojo pasiskirstymų mišinį. Pasiskirstymų parametrai pateikti 10 priede.

Regresinio modelio (2.1) triukšmo komponentių $e_{i,t}$ ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modelio (2.2) liekanoms modeliuoti pasirinktas stabilusis pasiskirstymas. Šis pasiskirstymas yra suderinamas su visomis liekanomis (žr. 11 priedą), o kadangi regresinio modelio triukšmo komponentės neturi tokios didelės įtakos portfelio grąžų dispersijai kaip faktoriai, todėl nebuvo giliau analizuojami, tiriami ir tarpusavyje lyginami modeliavimo rezultatai, esant skirtingoms pasiskirstymų funkcijoms.

2.6.KOPULOS PARAMETRŲ APSKAIČIAVIMAS

Išreiškę triukšmų sekas $u_{i,t}$ iš faktorių ARMA-GARCH modelių, aproksimuosime jas daugiamačiu asimetriniu Stjudento pasiskirstymu $V = [V_1, \dots, V_6]$, kurio stochastinis apibrėžimas:

$$V = \mu + \gamma Y + \sqrt{Y}Z \quad (1.24)$$

Lentelėje žemiau pateikiami apskaičiuoti koeficientai kiekvienam faktoriui.

2.16 lentelė. Daugiamačio asimetrinio Stjudento dėsnio parametrai

	<i>F1</i>	<i>F2</i>	<i>F3</i>	<i>F4</i>	<i>F5</i>	<i>F6</i>
γ	0.0753	0.0690	0.0732	-0.082	-0.0639	-0.045
μ	-0.0739	-0.065	-0.066	0.0804	0.0596	0.0580
ν	5.44					
Matrica Σ						
	<i>F1</i>	<i>F2</i>	<i>F3</i>	<i>F4</i>	<i>F5</i>	<i>F6</i>
<i>F1</i>	0.3535	-0.1065	-0.1072	0.0066	-0.0655	-0.0322
<i>F2</i>	-0.1065	0.2475	-0.0871	-0.0311	-0.0244	-0.0359
<i>F3</i>	-0.1072	-0.0871	0.3116	-0.0443	0.0099	-0.0510
<i>F4</i>	0.0066	-0.0311	-0.0443	0.2471	-0.0967	-0.0454
<i>F5</i>	-0.0655	-0.0244	0.0099	-0.0967	0.3065	-0.1311
<i>F6</i>	-0.0322	-0.0359	-0.0510	-0.0454	-0.1311	0.2432

Apskaičiavus šiuos koeficientus, galime generuoti daugiamačius asimetrinius Stjudento atsitiktinius dydžius. Tačiau esame nustatę, kad $u_{i,t}$ geriausiai modeliuoti ne tik pagal asimetrinį Stjudento, bet ir pagal stabilųjį, todėl priklausomų dydžių modeliavimas buvo atliekamas pagal 1.12 skyriuje 4 žingsnyje aprašytą kopulos sudarymo algoritmą.

Sumodeliavus portfelio grąžas, pereinama prie kitos darbo užduoties – portfelio svorių optimizavimo.

2.7. PORTFELIO OPTIMIZAVIMO REZULTATAI

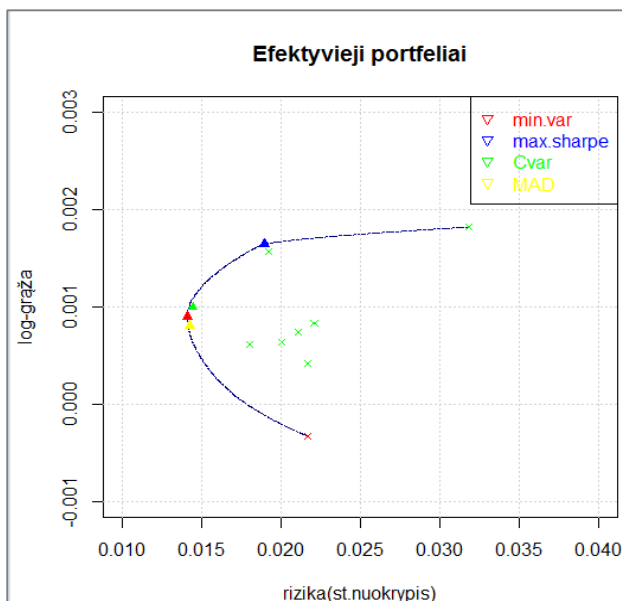
Šiame darbe portfelio optimizavimas atliekamas maksimizuojant/minimizuojant sekančius koeficientus:

- Minimizuojant standartinį nuokrypį
- Maksimizuojant Šarpo koeficientą
- Maksimizuojant CVaR koeficientą
- Minimizuojant MAD

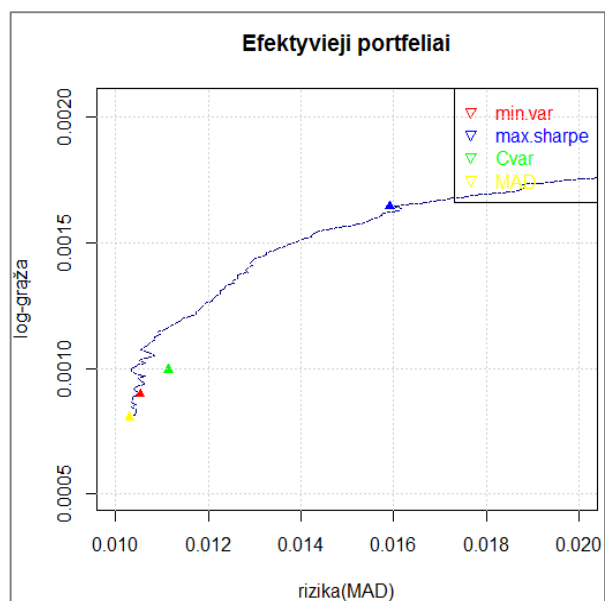
Sutrumpintai šias keturias optimizavimo strategijas žymėsime: *minvar*, *Sharpe*, *CVaR*, *MAD*.

2.6.1 EFEKTYVIEJI PORTFELIAI IR EFEKTYVIŲJŲ PORTFELIŲ KRAŠTAS EMPIRINIAMS DUOMENIMS

Iš pradžių atlikime optimalių svorių apskaičiavimą iš istorinių duomenų. Log-grąžų ir standartinio nuokrypio, o taip pat log-grąžų ir MAD ašyse randamas efektyviųjų portfelių kraštas ir pažymimi 4 portfeliai, kuriems buvo apskaičiuoti optimalūs svoriai, minimizuojantys pasirinktą rizikos rodiklį.



21 pav. Efektyvieji portfeliai (σ ašyje)



22 pav. Efektyvieji portfeliai (MAD ašyje)

Apskaičiuoti optimalūs svoriniai koeficientai pateikti lentelėje 2.17.

2.17 lentelė. Optimalūs svoriai pagal pasirinktą optimizavimo strategiją

Optimizavimas/Svoriai	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8
Minimali dispersija	0.031	0.101	0.337	0	0.278	0.096	0	0.157
Maksimalus Sharpe	0	0	0	0	0.706	0	0.294	0
Maksimalus CVaR	0.072	0.022	0.259	0	0.441	0.096	0	0.110
Minimalus MAD	0.058	0.063	0.440	0	0.224	0.098	0	0.116

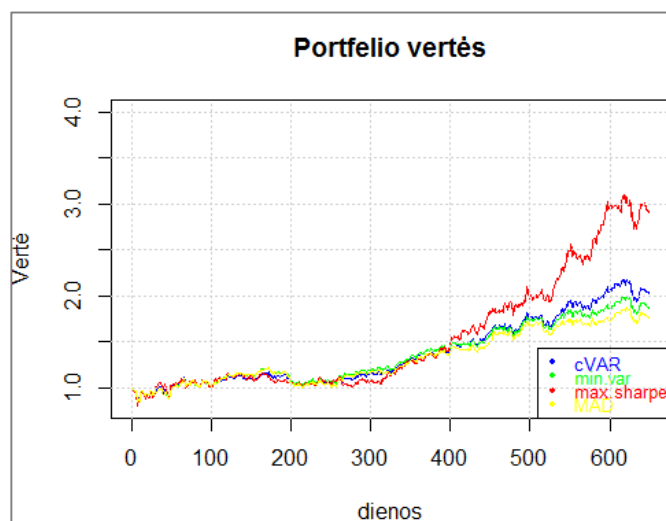
Palyginimui pateikiami portfelio grąžų statistikos, pagal pasirinktą optimizavimo strategiją.

2.18 lentelė. Optimaliųjų portfelių rizikos matai pagal pasirinktą optimizavimo strategiją

Optimizavimas/ Matas	St. nuokrypis	Šarpo	CVaR	MAD
Minimali dispersija	0.0141	0.0636	-0.0324	0.0105
Maksimalus Sharpe	0.0189	0.0866	-0.0402	0.0159
Maksimalus CvaR	0.0144	0.0688	-0.0310	0.0111
Minimalus MAD	0.0142	0.0565	-0.0327	0.0103

Iš lentelės 2.18 matome, kad optimizavimas atliktas korektiškai, nes „geriausia“ statistikos reikšmė gaunama taikant atitinkamą optimizavimo strategiją.

23 paveiksle pateikiamas viso portfelio verčių grafikas, taikant skirtingas svorių optimizavimo strategijas.



23 pav. Portfelio verčių dinamika, taikant optimalius svorio koeficientus

Akivaizdu, kad 650 dienų periodo pabaigoje didžiausia portfelio vertė būtų gauta, taikant svorius, optimizuojančius Šarpo koeficientą, tačiau ir verčių dispersija yra didžiausia. Periodo pabaigoje mažiausia portfelio vertė gaunama taikant MAD optimizavimo strategiją.

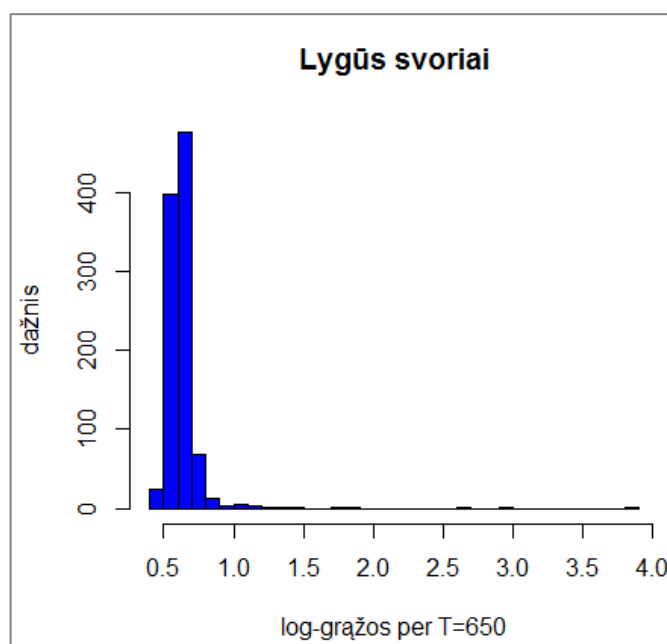
Svarbu pažymėti, kad išvadą apie pelningiausią ir rizikingiausią strategiją negalime priimti vienareikšmiškai, kadangi šie svoriai apskaičiuoti iš praeities duomenų, o būsima akcijų elgsena gali skirtis. Todėl rizikos vertinimas bus atliekamas modeliavimo pagalba.

2.6.2 MODELIAVIMAS, PASKIRSTANT SVORIUS LYGIOMIS DALIMIS

Atlikime 1000 portfelio grąžų realizacijų 650 dienų horizonte. Svoriai šiame modeliavime nėra apskaičiuojami, o paskirstomi lygiomis dalimis. Šis modeliavimas atliekamas tam, kad galėtume palyginti rezultatus su gautais, kai yra taikomi svoriai, optimizuojantys standartinį nuokrypį, Šarpo, CVaR ir MAD koeficientus. Atlikus visas realizacijas, gaunamas log-grąžų per modeliuojamą periodą empirinis pasiskirstymas. Gauto log-grąžų per periodą pasiskirstymo statistikos ir rizikos koeficientai pateikiami lentelėje 2.19.

2.19 lentelė. Statistikos ir rizikos matai paskirstant svorius lygiomis dalimis

	Vidurkis	St.nuokrypis	Asimetrija	Ekscesas	VaR	CVaR	Sharpe	MAD	Rachev
Lygūs svoriai	0.631	0.176	11.024	163.54	0.521	0.497	3.590	0.0584	2.788

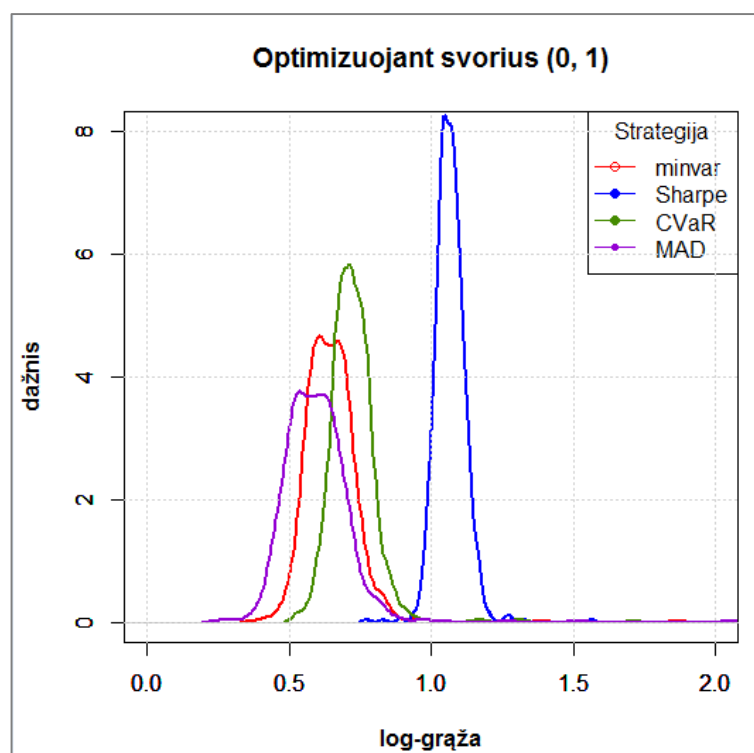


24 pav. Log-grąžų histograma, svorius paskirstant lygiomis dalimis

Iš gautų rezultatų matome, kad vienodais svoriais paskirsčius investicijas į visas portfelyje esančias akcijas, vidutinė log-grąža per periodą sudaro 0.631. VaR ir CVaR koeficientų reikšmės parodo, kad net blogiausių scenarijų atveju portfelio grąža išlieka teigiama.

2.6.3 MODELIAVIMAS, OPTIMIZUOJANT SVORIOUS INTERVALE (0,1)

Šiame skyriuje apskaičiuojamos portfelio log-grąžos per periodą ($T=650$), taikant optimalius svorio koeficientus, kurie gali įgyti reikšmes iš intervalo $(0,1)$, t.y. visa pradinė investicija gali būti skirta tik vienai akcijai ($\omega = 1$), o į likusias visai neinvestuojama ($\omega = 0$). Svoriai apskaičiuojami optimizuojant standartinę nuokrypį (minvar strategija), Šarpo koeficientą (Sharpe strategija), CVaR (CVaR strategija) ir MAD (MAD strategija) koeficientus. Svoriai buvo pateikti lentelėje 2.17. Gautų grąžų pasiskirtymų tankio grafikai pateikti 25 paveiksle.



25 pav. Portfelio grąžos, kai $\omega=(0,1)$

Iš gautų empirinių tankio funkcijų pateiktų 25 paveiksle, matome, kad didžiausios portfelio grąžos įgyjamos Šarpo optimizavimo atveju (tankio funkcija yra labiausiai pasislinkusi į dešinę). Mažiausios grąžos įgyjamos MAD optimizavimo atveju. Lyginant šiuos optimizavimo metodus tarpusavyje, akivaizdu, kad MAD atveju dešinės pasiskirstymo uodegos reikšmės (t.y. didžiausios reikšmės) yra mažesnės negu Šarpo kairiosios uodegos reikšmės (blogiausios reikšmės).

Gauto grąžų pasiskirtymo charakteristikos pateiktos 2.20 lentelėje.

2.20 lentelė. Portfelio grąžų statistikos, kai $\omega=(0,1)$

Statistika/Strategija	Minimali dispersija	Šarpo strategija	CVaR strategija	MAD strategija
Vidurkis	0.651	1.067	0.724	0.602
St. nuokrypis	0.081	0.062	0.104	0.097
Asimetrija	9.064	4.519	8.261	8.110
Ekscesas	149.61	64.26	123.30	127.05
VaR	0.530	0.989	0.617	0.445
CVaR	0.484	0.937	0.566	0.395
Šarpo	7.970	19.025	6.936	6.081
MAD	0.073	0.0422	0.0631	0.0877
Rachev	1.958	1.268	1.765	2.448
Pusiau dispersija	0.0027	0.0012	0.0023	0.0042

Pastaba: mėlyna spalva pažymėta geriausia (naudingiausia investuotojui) reikšmė, raudona – blogiausia reikšmė.

Pagal gautas statistikas ir nubraižytas tankio funkcijas akivaizdu, kad didžiausia vidutinė grąža ir mažiausia rizika pagal visus, išskyrus Rachev, rodiklius įgaunama taikant svorius, optimizuojančius Šarpo koeficientą. Tačiau kaip minėta 1.13 skyriuje, negalima daryti išvadų atsižvelgiant tik į Rachev koeficiento reikšmę, nes jis vertina tik ekstremaliąsias reikšmes, ir neatsižvelgia į vidutines grąžas, kurios sudaro didžiąją dalį visų grąžų. Šis atvejis yra puikus to pavyzdys.

Mažiausia vidutinė grąža gaunama MAD optimizavimo atveju. Didžiausia rizika ir mažiausias efektyvumas pagal VaR, CVaR, Šarpo, MAD ir pusiau dispersijos koeficientus įgaunama taip pat MAD svorių atveju.

Visų portfelių asimetrijos koeficientas yra teigiamas, tai nurodo į didesnę riziką įgyti mažesnes už vidurkį grąžas, o didelė eksceso koeficiento reikšmė nurodo į didesnę ekstremaliųjų įvykių tikimybę. Įvertinus visas portfelių charakteristikas darome išvadą, kad pelningiausias ir efektyviausias portfelis gaunamas taikant Šarpo optimizavimo strategiją, o didžiausia rizika ir mažiausia grąža – optimizuojant pagal MAD reikšmę.

Lyginant rezultatus su gautais, kai pradinė investicija buvo paskirstyta vienodais svoriais kiekvienai portfelyje esančiai akcijai, matome, kad trimis optimizavimo atvejais (minvar, Sharpe, CVaR) buvo gauta didesnė vidutinė portfelio grąža (be optimizavimo $\mu = 0.631$, optimizuojant $\mu_{min} = 0.651, \mu_{max} = 1.067$), tik MAD optimizavimo atveju vidutinė portfelio grąža yra mažesnė $\mu_{MAD} = 0.602$. Standartinis nuokrypis optimizuojant portfelio svorius sumažėjo keliskart

(be optimizavimo $\sigma = 0.17$, optimizuojant $\sigma_{min} = 0.062, \sigma_{max} = 0.104$). Tačiau MAD reikšmė sumažėjo tik Šarpo optimizavimo atveju $MAD_{Sharpe} = 0.0422 < 0.0584$, kitais atvejais ji išaugo.

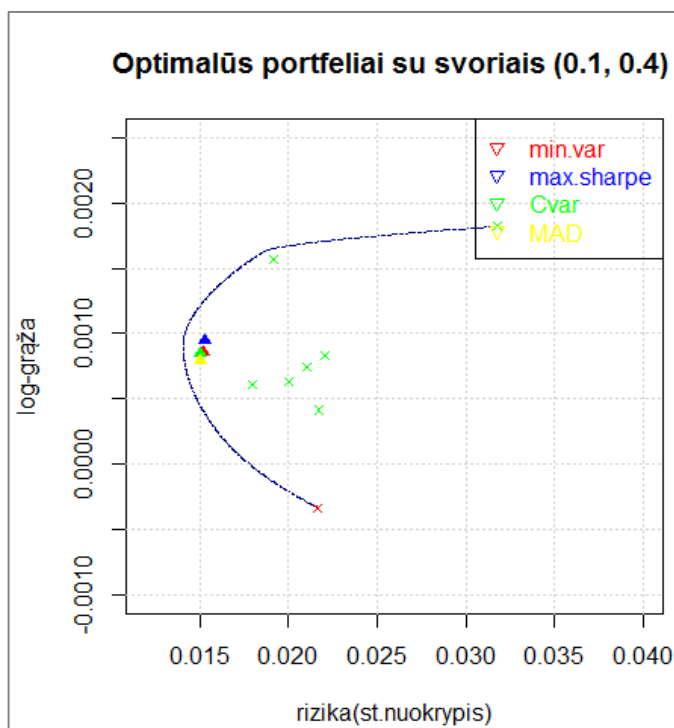
2.6.4 MODELIAVIMAS, OPTIMIZUOJANT SVORIUS INTERVALE (0,1,0,4)

Tarkime, kad investuotojas nusprendžia pradinę investiciją paskirstyti su svorių apribojimais (0,1,0,4), t.y. minimali investicija į kiekvieną akciją lygi 0.1, o maksimali 0.4. Apskaičiuoti svoriai, optimizuojant dispersiją, Šarpo, CVaR ir MAD pateikti 2.21 lentelėje.

2.21 lentelė. Optimalūs svoriai (0,1, 0,4) pagal pasirinktą optimizavimo strategiją

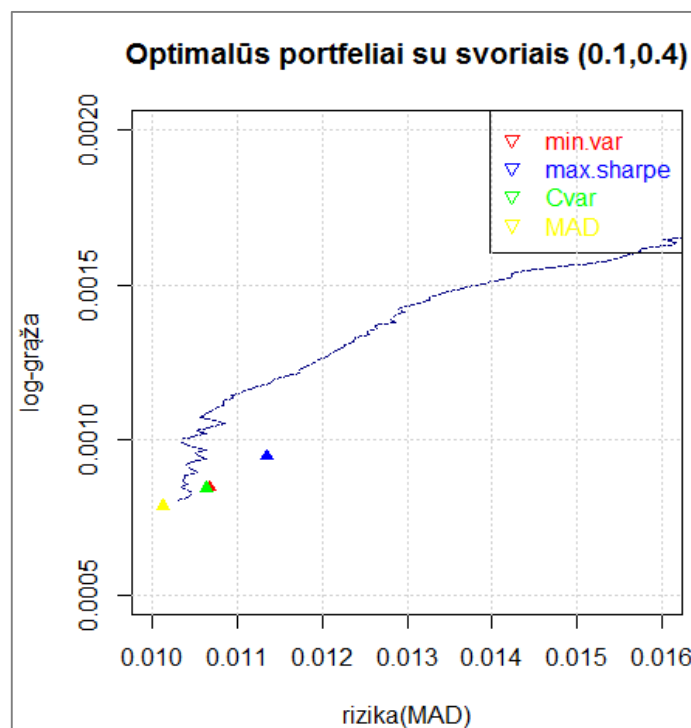
Strategija / Svoriai	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8
minvar	0.100	0.100	0.201	0.100	0.199	0.100	0.100	0.100
Sharpe	0.100	0.100	0.100	0.100	0.286	0.100	0.114	0.100
CVaR	0.100	0.100	0.202	0.100	0.198	0.100	0.100	0.100
MAD	0.100	0.100	0.262	0.100	0.138	0.100	0.100	0.100

26 ir 27 paveiksluose pavaizduoti optimalūs portfeliai su apribojimams svorių koeficientams. Akivaizdu, kad šie portfeliai neguli ant efektyviųjų portfelių krašto.



26 pav. Efektyvieji portfeliai, kai $\omega=(0,1,0,4)$

(σ ašyje)



27 pav. Efektyvieji portfeliai, kai $\omega=(0,1,0,4)$

(MAD ašyje)

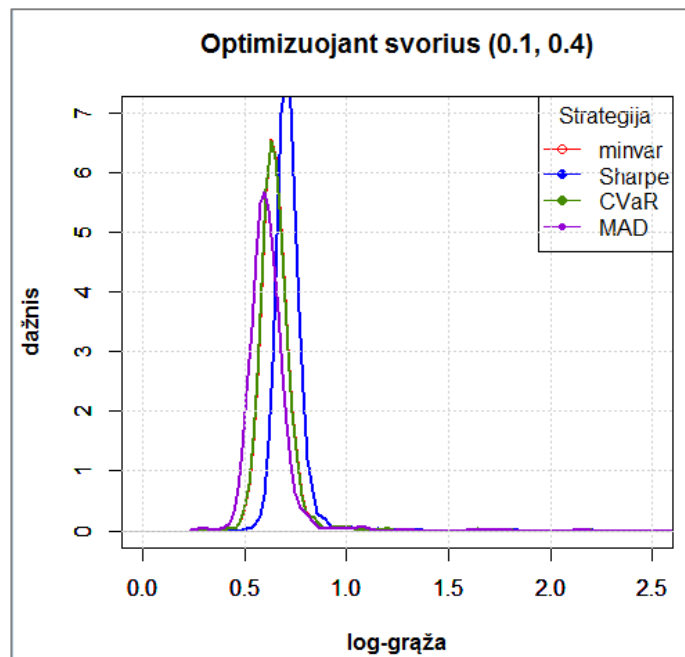
Kartodami modeliavimą su svorių koeficientais iš intervalo (0.1, 0.4), apskaičiuojame gauto log-gražų per periodą $T = 650$ pasiskirstymo statistikas ir rizikos matus.

2.22 lentelė. Portfelio gražų statistikos, kai $\omega=(0.1,0.4)$

Statistika/Strategija	Minimali dispersija	Šarpo strategija	CVaR strategija	MAD strategija
Vidurkis	0.666	0.729	0.665	0.628
St. nuokrypis	0.251	0.220	0.252	0.266
Asimetrija	15.09	14.539	15.093	15.003
Ekscesas	272.43	252.99	272.51	271.87
VaR	0.548	0.628	0.547	0.498
CVaR	0.519	0.599	0.517	0.463
Šarpo	2.649	3.308	2.641	2.356
MAD	0.058	0.049	0.058	0.065
Rachev	2.262	1.962	2.268	2.531
Pusiau dispersija	0.0030	0.0023	0.0031	0.0038

Iš gautų statistikų reikšmių darome išvadą, kad net įvedus svorių apribojimus, portfelio gražų vidurkis, taikant Šarpo optimizavimą, išlieka didžiausiu. Rizika pagal standartinį nuokrypį, VaR, CVaR, Šarpo, MAD ir pusiau dispersijos koeficientus taip pat išliko mažiausia Šarpo optimizavimo atveju (tik Rachev efektyvumo rodiklio reikšmė yra blogiausia, o tai nurodo į ekstremaliųjų reikšmių didesnę riziką). Tačiau portfelio charakteristikos, įvedus svorio apribojimus pablogėjo: Šarpo strategijos vidurkio reikšmė nuo $\mu = 1.067$ sumažėjo iki $\mu = 0.729$, standartinio nuokrypio reikšmė nuo $\sigma = 0.062$ padidėjo iki $\sigma = 0.220$, VaR reikšmė sumažėjo nuo $VaR = 0.989$ iki $VaR = 0.628$.

Lyginant visų keturių optimizavimo strategijų statistikas ir rizikos koeficientus su reikšmėmis gautomis neoptimizuojant portfelio svorius, matome, kad net taikant apribojimus portfelio svoriams, gaunamas didesnės vidutinės gražos portfeliai beveik visomis optimizavimo strategijoms: be optimizavimo $\mu = 0.631$, optimizuojant $\mu_{min} = 0.628$, $\mu_{max} = 0.729$ (μ_{MAD} nedaug mažesnė už $\mu_{min} = 0.631$). Portfelio efektyvumas pagal VaR ir CVaR koeficientus taip pat padidėjo visoms strategijoms, išskyrus MAD. Tačiau portfelio efektyvumas pagal Šarpo ir Rachev koeficientus, taikant apribojimus svoriams, mažesnis negu modeliavime, kai svoriai paskirstomi vienodai. Gautų pasiskirstymų tankio funkcijos pavaizduotos 28 paveiksle.



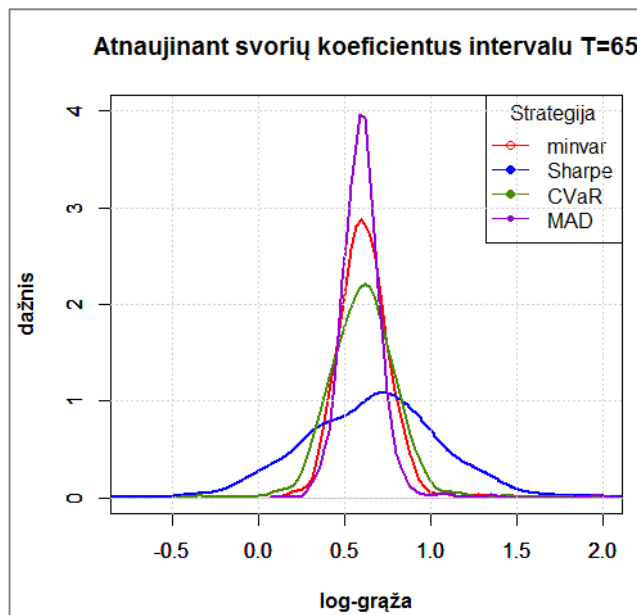
28 pav. Portfelio gražos, kai $\omega=(0.1,0.4)$

2.6.5 MODELIAVIMAS, ATNAUJINANT SVORIO KOEFICIENTUS PAGAL NETOLIMĄ PRAEITĮ

Kitą modeliavimą atlikime perskaičiuojant svorio koeficientus tam tikrų laiko intervalu, netaikant jokių apribojimų svorių koeficientams. Šiame modeliavime buvo pasirinkta svorius atnaujinti kas 65 dienas pagal paskutinių 65 dienų sumodeliuotas gražas, t.y. tolina praeitis (ilgesnė nei 65 dienos) nebeturi įtakos svorių optimizavimui.

2.23 lentelė. Portfelio gražų statistikos, atnaujinant svorių reikšmes pagal netolimą praeitį

Statistika/Strategija	Minimali dispersija	Šarpo strategija	CVaR strategija	MAD strategija
Vidurkis	0.633	0.652	0.624	0.616
St. nuokrypis	0.416	0.388	0.375	0.410
Asimetrija	20.07	-0.060	12.20	22.52
Ekscesas	515.96	0.359	212.05	608.57
VaR	0.387	0.0086	0.317	0.424
CVaR	0.332	-0.161	0.208	0.367
Šarpo	1.520	1.678	1.661	1.502
MAD	0.133	0.376	0.175	0.098
Rachev	4.207	9.040	6.660	3.547
Pusiau dispersija	0.0123	0.077	0.0208	0.0078



29 pav. Portfelio grąžos, perkaičiuojant svorių koeficientus pagal netolimą praeitį

Iš pateiktų rezultatų lentelėje 2.23, matome, kad perskaičiuojant svorius kas 65 dienas, vidutinė portfelio grąža yra mažesnė nei tais atvejais, kai svoriai nebuvo atnaujinami (visame 650 dienų modeliuojame laikotarpyje buvo naudoti svoriai apskaičiuoti pagal praeities informaciją). Standartinis nuokrypis, VaR, CVaR, Šarpo, MAD ir pusiau dispersijos koeficientų reikšmės pablogėjo lyginant su reikšmėmis gautomis be svorių atnaujinimo:

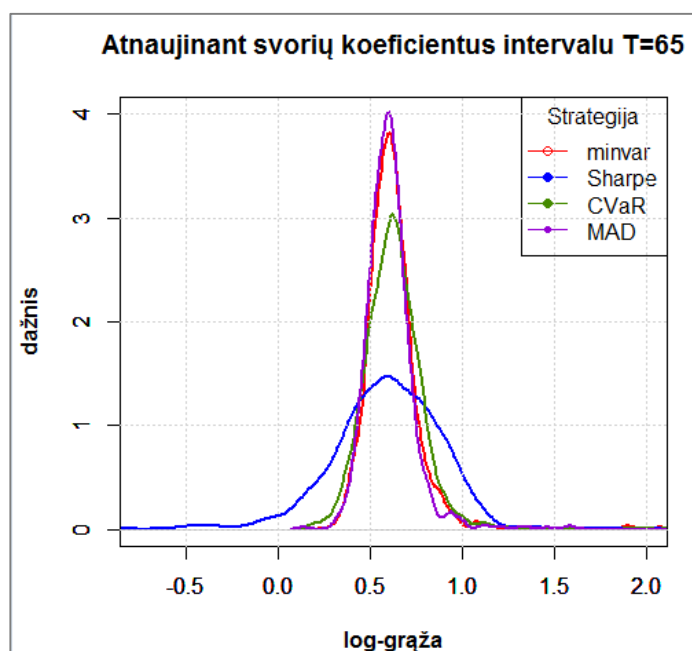
- MAD reikšmės optimizuojant be svorių atnaujinimo ir apribojimų yra intervale $[0.0422; 0.0877]$, tuo tarpu atnaujinant svorius MAD reikšmės patenka į intervalą $[0.098; 0.376]$, t.y. rizika padidėjo.
- VaR reikšmių intervalo reikšmės sumažėjo nuo $[0.530; 0.989]$ iki $[0.086; 0.424]$, t.y. rizika padidėjo.
- CVaR nuo $[0.395; 0.937]$ iki $[-0.161; 0.367]$, t.y. rizika padidėjo.
- Šarpo nuo $[6.081; 19.025]$ iki $[1.502; 1.678]$, t.y. efektyvumas sumažėjo.

Iš visų keturių optimizavimo strategijų efektyviausias pagal VaR, CVaR, MAD ir pusiau dispersijos koeficientus – yra MAD minimizavimo strategija (prisiminkime, kad prieš tai vykdytuose modeliavimuose MAD strategija buvo viena neefektyviausių). Šarpo optimizavimo strategija efektyvi pagal Šarpo koeficientą, bei turi didžiausią vidurkį, tačiau visų keturių strategijų vidutinės grąžos yra labai panašios savo reikšmėmis, todėl atsižvelgiant į tai, daroma išvada, kad MAD optimizavimo strategija šiame modeliavime efektyviausia pagal daugelį charakteristikų.

Gauti rezultatai parodė, kad svorių atnaujinimas pagal sumodeliuotą netolimą praeitį nesuteikia portfeliui geresnių charakteristikų (vidurkis sumažėjo, o rizika padidėjo).

2.6.6 MODELIAVIMAS, ATNAUJINANT SVORIO KOEFICIENTUS PAGAL VISĄ SUMODELIUOTĄ PRAEITĮ

Ankstesniame skyrelyje vykdytame modeliavime svoriai būsimajam laikotarpiui (65 dienų trukmės) buvo apskaičiuojami tik pagal paskutiniajame intervale gautas grąžas. Šiame modeliavime svorius atnaujinkime atsižvelgiant į visą praeitį, t.y. 66-130 dienų laikotarpiui svoriai apskaičiuojami pagal 1-65 dienų sumodeliuotas grąžas, laikotarpyje nuo 131 iki 186 dienos bus naudojami svoriai apskaičiuoti iš intervalo 1-130 ir t.t.



30 pav. Portfelio grąžos, atnaujinant svorių koeficientus pagal visą sumodeliuotą praeitį

2.24 lentelė. Portfelio grąžų statistikos, atnaujinant svorių reikšmes pagal visą praeitį

Statistika/Strategija	Minimali dispersija	Šarpo strategija	CVaR strategija	MAD strategija
Vidurkis	0.618	0.587	0.623	0.603
St. nuokrypis	0.159	0.302	0.170	0.140
Asimetrija	4.933	-1.264	2.749	3.458
Ekscesas	53.668	11.218	23.623	31.365
VaR	0.429	0.131	0.392	0.428
CVaR	0.388	-0.139	0.328	0.384
Šarpo	3.882	1.941	3.649	4.287
MAD	0.105	0.264	0.135	0.099
Rachev	2.672	8.159	3.195	2.570
Pusiau dispersija	0.0065	0.0532	0.0102	0.0059

Lyginant gautus rezultatus su rezultatais, kai svoriai buvo apskaičiuojami pagal netolimą (65 dienų) praeitį, matome, kad vidutinės portfelio grąžos per visą modeliuojamą periodą $T = 650$ šiek tiek sumažėjo – šiame modeliavime grąžų vidurkiai yra intervale $[0.587, 0.623]$, o prieš tai atliktame modeliavime $[0.616, 0.652]$. Tačiau rizikos ir efektyvumo rodiklių reikšmės pakito investuotojo naudai:

- VaR įgyjamų reikšmių intervalo pokytis $[0.0086, 0.424] \rightarrow [0.131, 0.429]$, t.y. stipriai padidėjo apatinio intervalo krašto reikšmė ir šiek tiek viršutinio. Iš čia seka, kad sumažėjo portfelio rizika.
- CVaR įgyjamų reikšmių intervalas pakito $[-0.161, 0.367] \rightarrow [-0.139, 0.388]$, t.y. visas intervalas pasistūmė į dešinę. Iš čia seka, kad sumažėjo portfelio rizika.
- Šarpo koeficientų reikšmės: $[1.502, 1.678] \rightarrow [1.941, 4.287]$, t.y. visas intervalas pasistūmė į dešinę (ypatingai padidėjo maksimali Šarpo koeficiento reikšmė), taigi išaugo portfelio efektyvumas.
- MAD koeficiento reikšmės: $[0.098, 0.376] \rightarrow [0.099, 0.264]$, t.y. sumažėjo viršutinio intervalo krašto reikšmė, o kartu ir portfelio rizika.
- Pusiau dispersija: $[0.0078, 0.077] \rightarrow [0.0059, 0.0532]$, t.y. rizika sumažėjo.

Iš šių rezultatų darome išvadą, kad optimizuojant pagal ilgesnę praeitį, gaunami mažesnės rizikos ir didesnio efektyvumo portfeliai.

Lyginant tarpusavyje svorių optimizavimo strategijas, pagal gautus rezultatus matome, kad mažiausia vidutinė grąža ir didžiausia rizika tenka portfeliui su optimizuotais svoriais pagal Šarpo koeficientą. Didžiausia vidutinė grąža gaunama optimizuojant svorius pagal CVaR koeficientą, o mažiausia rizika ir didžiausias efektyvumas pagal standartinį nuokrypį, VaR, CVaR, Šarpo, MAD ir pusiau dispersijos rodiklius gaunama optimizuojant pagal minimalią dispersiją ir MAD.

PROGRAMINĖ REALIZACIJA

Šiame darbe skaičiavimai buvo atlikti „R“ programa. Šį pasirinkimą lėmė programos prieinamumas ir siūlomų nemokamų paketų gausa. Programos svarbiausių funkcijų kodų fragmentai yra pateikiami priede 13.

DISKUSIJA

Portfelio optimizavimo uždaviniui spręsti labai svarbus tinkamo modelio parinkimas. Šiame darbe ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modelio parinkimas buvo sąlygojamas atliktais tyrimais (A. Biglova ir kiti, 2009[7]; Rachev ir kiti, 2005[28]) ir empirinių vertybinių popierių grąžų savybėmis: sunkios uodegos, dispersijos klasteriškumas, akcijų autokoreliacija (Tavares ir kt., 2008)[37]. Kiti autoriai be šių savybių išskiria ir svarto efektą (angl. *leverage effect*) (Black, 1976)[8], kuris apibūdina grąžų ir dispersijos neigiamą priklausomybę. Šiai savybei atvaizduoti siūloma taikyti ARMA modelį su asimetriniu

GARCH: ARMA (1, 1) - EGARCH (1, 1), ARMA (1, 1)- GJRGARCH(1, 1)[26][29]. Tačiau Radha[29], Pakizeh[26], tyrimų rezultatai parodė, kad ARMA-GARCH daug tinkamesnis, nes svarto efektas ne visada itin reikšmingas per nagrinėjamą laikotarpį. Shamiri ir Abu Hassan [34] tirdami Malaizijos vertybinių popierių rinką, nustatė, kad asimetriniai GARCH modeliai buvo tikslesni. Atsižvelgiant į tai, kad sudaromo modelio tikslas buvo ne kuo tiksliau atkartoti praeities įvykius, o tik imituoti portfelio elgesį, bei faktas, kad ARMA-GARCH nebuvo atmestas pagal Q testo rezultatus, galima teigti, kad šio modelio pasirinkimas yra pagrįstas.

Šiame darbe buvo nustatyta, kad ARMA-GARCH modelio liekanų generavimui tinkamiausi yra asimetriniai Stjudento (5 faktoriams) ir α -stabilusis skirstinys (1 faktoriui). Tačiau Rachev[28], A.Biglova[7] siūlo liekanas modeliuoti tik pagal stabilųjį pasiskirstymą. Šio darbo tyrimo metu, taip pat nei vienam faktoriui nebuvo atmesta hipotezė dėl suderinamumo su stabiluoju, tačiau modeliuojant portfelio grąžas duomenų dispersija buvo gaunama per didelė, dėl to (žr. lentelę 2.12) procentinis santykis tarp atliktų modeliavimų skaičiaus ir įvykių, kai sumodeliuotas skirstinys buvo statistiškai suderinamas su duomenimis, buvo mažiausias stabilųjų liekanų atveju. Tokį skirtumą galima paaiškinti konkrečiau portfelio savybėmis ir nagrinėjamu laikotarpiu (Biglova [7] tyrinėjo akcijų grąžas ir krizės laikotarpiu).

Portfelio dimensijos mažinimas buvo atliktas pagrindinių komponentių analizės rezultatais. PKA parodė, kad 6 faktoriai paaiškina 91% portfelio dispersijos. Esant periodams, kai grąžos yra stipriai koreliuotos gali prireikti mažiau faktorių, norint pasiekti užsibrėžtą tikslumo lygį. Biglova[7] siūlo nusistatyti minimalią 80% ribą. C. Alexander[1] naudoja 70%-90% dispersijos paaiškinamumo intervalą, argumentuodama tuo, kad pasirenkant virš 90% slenkstį, modelis gali pasigauti „triukšmą“, kuris nėra svarbus modeliuojant grąžas ilgalaikėje perspektyvoje. Kadangi nėra griežtos taisyklės, kiek kintamųjų dispersijos turi paaiškinti faktoriai, remdamasi apžvelgta literatūra, darome išvadą, kad 6 komponentės turėtų adekvačiai paaiškinti duomenis.

Šiame darbe buvo nustatyta, kad apskaičiuojant svorio koeficientus pagal istorinius duomenis, pelningiausias ir efektyviausias portfelis gaunamas maksimizuojant Šarpo koeficiento reikšmę. Tačiau perskaičiuojant svorius pagal sumodeliuotą praeitį tam tikrais intervalais, Šarpo portfelis pasidarė neefektyviausias. MAD portfelio atveju situacija buvo priešinga: modeliuojant pagal visą istorinę praeitį, šio portfelio rizika ir efektyvumas buvo nepalankiausia investuotojui, tačiau perskaičiuojant MAD svorius tam tikru laikotarpiu, portfelio charakteristikos pagal daugelį parametrų buvo geriausios. Tokius rezultatus galima paaiškinti tuo, kad pirmuoju atveju MAD optimizavimas neišnaudojo palankios investuotojui rizikos, ir svoriai buvo paskirstyti šešioms akcijoms, didžiausi koeficientai – akcijoms su mažiausiu nuokrypiu, tuo tarpu Šarpo svoriai – tik dviem akcijoms, kurių vidutinė grąža buvo didžiausia (nuokrypis taip pat didesnis). Vis dėlto, reikėtų prisiminti, atliekant optimizavimą, rezultatams daro įtaką ne tik pasirinkta optimizavimo strategija, bet ir pačio portfelio sudėtis ir situacija rinkoje. Panašią

išvadą suformulavo P. Krokhmal [17], parodydamas, kad, rezultatai labai priklauso nuo pradinių duomenų pasirinkimo.

IŠVADOS

1. Atlikus tyrimą buvo nustatyta, kad akcijų grąžos yra suderinamos su Stjudento, asimetriniu Stjudento ir α -stabilioju pasiskirstymais.
2. Atlikus pagrindinių komponentių analizę, buvo nustatyti 6 faktoriai, kurie paaiškina daugiau nei 90% visos dispersijos. Tokiu būdu, uždavinio dimensija buvo sumažinta nuo 8 akcijų iki 6 faktorių.
3. Kiekvienam faktoriui nustačius ARMA(1,1) - GARCH(1,1) modelio parametrus, didžiausias suderinamumas tarp sumodeliuotų ir istorinių portfelio grąžų gautas generuojant triukšmą pagal asimetrinį Stjudento (penkiems faktoriams) ir α -stabilųjį (vienam faktoriui) pasiskirstymus.
4. Apskaičiavus portfelio svorio koeficientus pagal istorines grąžas, esant skirtingoms optimizavimo strategijoms, buvo nustatyta, kad didžiausias portfelio grąžos vidurkis ir geriausias rizikos bei efektyvumo rodiklių reikšmės pagal daugumą nagrinėjamų rodiklių, gaunama su svoriais, maksimizuojančiais Šarpo koeficientą. Blogiausios portfelio grąžų charakteristikos gautos MAD optimizavimo atveju.
5. Atlikus modeliavimą, kuriuo metu svoriai buvo perskaičiuojami pagal netolimą praeitį (65 dienos), nustatyta, kad efektyviausias portfelis gaunamas su svoriais minimizuojančiais MAD rodiklių. Perskaičiuojant svorius pagal visą sumodeliuotą praeitį, efektyviausi portfeliai gauti – MAD ir CVaR svorių atvejais.
6. Lyginant portfelių charakteristikas, kai svoriai perskaičiuojami pagal skirtingo ilgio praeities duomenis, nustatyta, kad didesnis portfelio efektyvumas ir mažesnė rizika gaunami, optimizuojant pagal ilgesnę praeitį, tačiau vidutinė grąža mažėja.

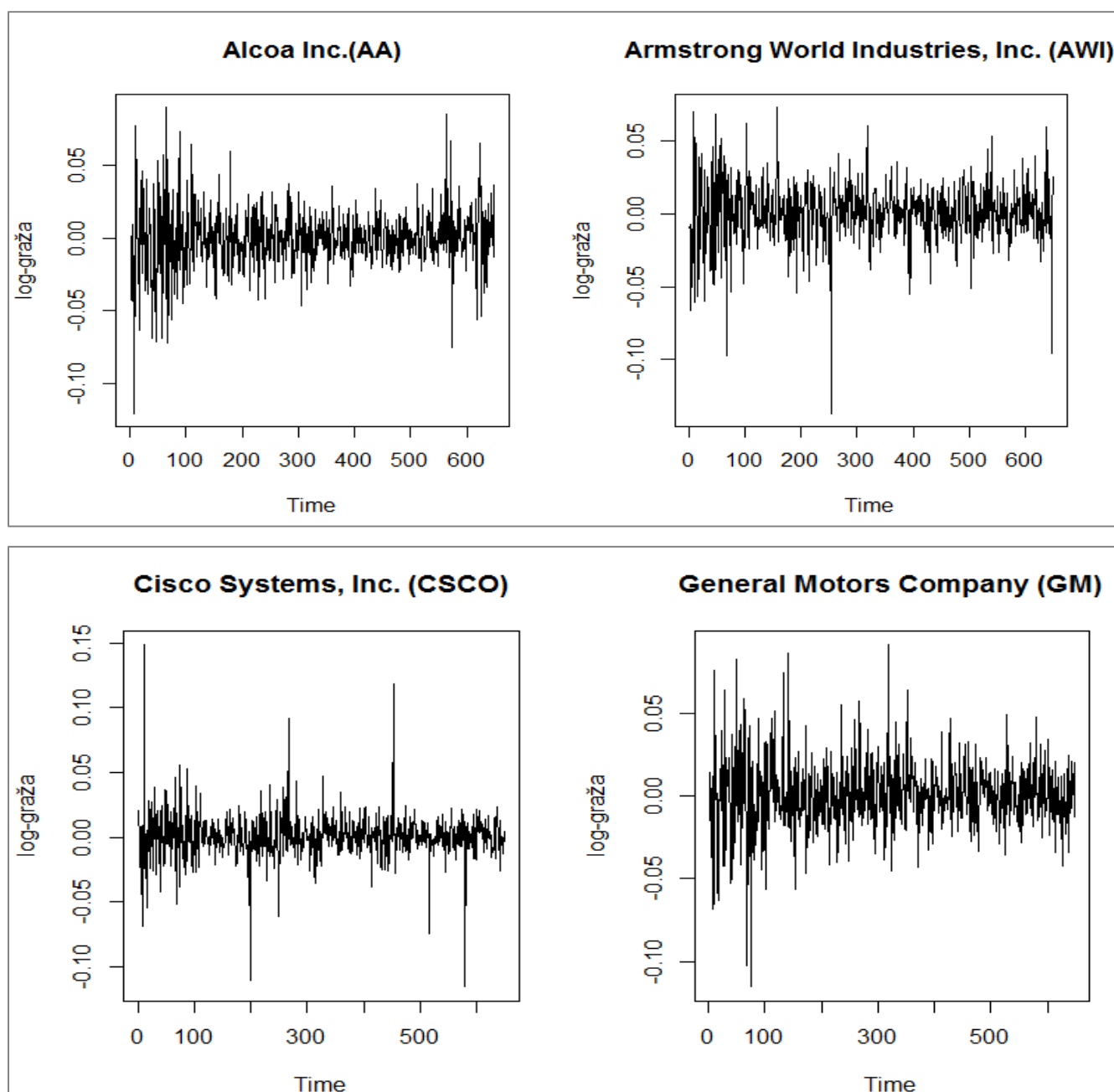
LITERATŪRA

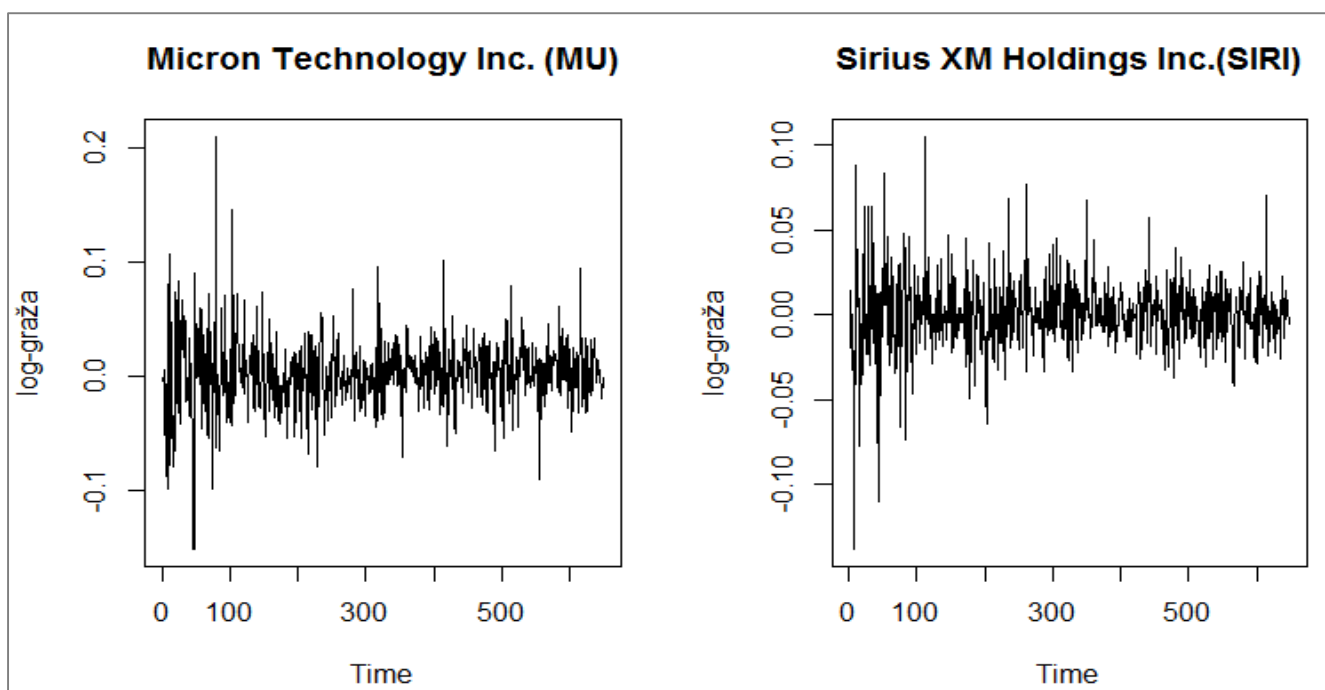
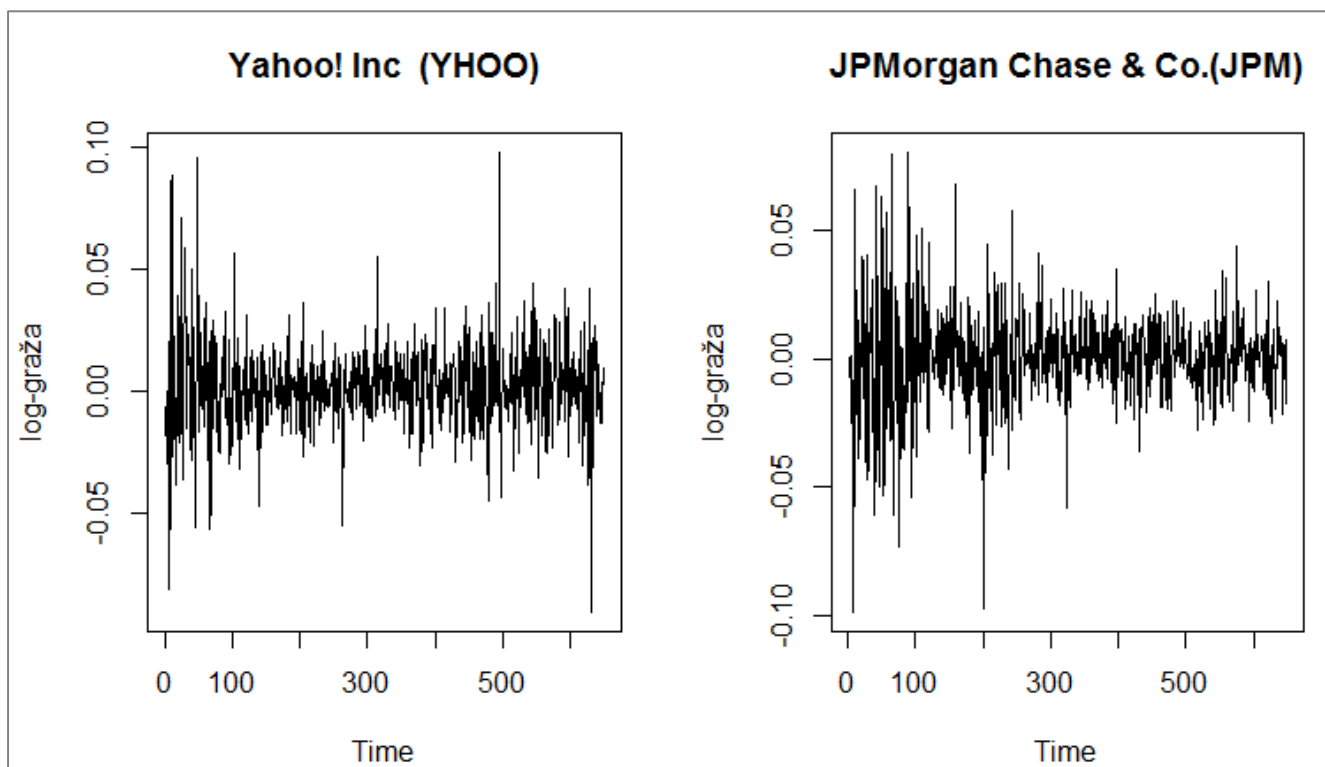
1. Alexander, C., 2008, *Market Risk Analysis: Practical Financial Econometrics, Volume II*, John Wiley and Sons Ltd., West Sussex, England.
2. Ang, A., J. Chen, 2002, "Asymmetric Correlations of Equity Returns," *Journal of Financial Economics*, 63, 3, 443-494.
3. Ang, A., Bekaert G., 2001, „Stock Return Predictability: Is it There?“, NBER Working Papers 8207, National Bureau of Economic Research, Inc.
4. Artzner, P., Delbaen F., Eber, J. M. and D. Heath (1999) Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9,203-228
5. Authors: P. Olivares, L. Seco. Stable distribution: A survey on simulation and calibration methodologies. Technical Report, 2003. URL: <http://www.risklab.ca/Stableproject.pdf>
6. Biglova A., Ortobelli S., Rachev S.T., Stoyanov S.V. Different Approaches to Risk Estimation in Portfolio Theory. *Journal of Portfolio Management* 3, 2004 ,pp 103-112.
7. Biglova, A., Ortobelli, S., Rachev, S., Fabozzi, F. (2009). Modeling, estimation, and optimization of equity portfolios with heavy-tailed distributions. In: Satchel, S. (ed.). *Optimizing Optimization: The Next Generation of Optimization Applications and Theory*. Amsterdam: Academic Press, pp. 117–141.
8. Black, F., (1976). Studies in stock price volatility changes, *Proceedings of the 1976 business meeting of the business and economics statistics section*. American Statistical Association, pp.177-181.
9. Bollerslev, T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity *Journal of Econometrics* 31, pp. 307-327.
10. Brooks, C., Kat, H., 2002. "The statistical properties of hedge fund index returns and their implications for investors", *Journal of Alternative Investments*, 5, pp. 26-44.
11. Coles, S., Heffernan, J.; Tawn, J. Dependence measures for extreme value analyses. *Extremes*, 1999, 2, 339-365.
12. Ghose, D., Kroner, K. , (1993) The relationship between GARCH and symmetric stable processes: Finding the source of fat tails in financial data.
13. Hong, Y., J. Tu, and G. Zhou (2006), Asymmetries in Stock Returns: Statistical Tests and Economic Evaluation, *Review of Financial Studies* 20, 1547 - 1581
14. Yollin.G, (2009). „R Tools for Portfolio Optimization", *R/Finance 2009 in Chicago*, IL
15. Kavaliauskas, M., Rudzkis R., (2013). Laiko eilučių analizė: paskaitų medžiaga.
16. Konno, Hiroshi, and Yamazaki, Hiroaki, Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization and Its Applications to Tokyo Stock Market, *Management Science* Vol. 37 (1991) No. 5, pp.519-531.
17. Krokmal, Pavlo A. and Uryasev, Stanislav P. and Zrazhevsky, Grigory M., Comparative Analysis of Linear Portfolio Rebalancing Strategies: An Application to Hedge Funds (November 2001). U of

Florida ISE Research Report No. 2001-11. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=297639> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.297639>

18. Lam Weng Hoe, Jaaman Saiful Hafizah, Isa Zaidi, 2010, „An empirical comparison of different risk measures in portfolio optimization“, *Journal of Business and Economic Horizons*, Vol. 1 (2010), pp.39-45
19. Longin, F., Solnik B. „Extreme correlation of international equity markets“, *Journal of Finance*, No. 56, (2001), pp 651-678.
20. Machiwal, D., Mishra, A., Jha, M.K., Sharma, A. and Sisodia, S.S. „Modeling Short-Term Spatial and Temporal Variability of Groundwater Level using Geostatistics and GIS“, *Natural Resources Research*, 2012, 21(1), pp 117-136.
21. Mandelbrot, B. B., *The Variation of Certain Speculative Prices*, *The Journal of Business* 36, No. 4, (1963), 394-419
22. Markowitz, H.M. (1952) *Portfolio Selection*. *Journal of finance*, 7(1),77–91
23. Nelsen, R. B. (1999). *An introduction to copulas*, volume 139 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York.
24. Nystrom, K. and Skoglund, J. (2002b) *Univariate extreme value theory, garch and measures of risk*. Preprint, Swedbank, Sweden.
25. Nolan, J. P. *Modeling Financial Data with Stable Distributions*, Invited chapter in *Book 1 of the Handbooks of Finance*, North Holland, Chapter 3. Volume editor S. T. Rachev, Series editor W. T. Ziemba. (2003)
26. Pakizeh, Kamran, *Stylized Facts of Financial Markets and Modeling Volatility (The Case of Tehran Stock Exchange)* (August 31, 2010). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1669167> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1669167>
27. Patton, Andrew J., 2004. "On the Out-of-Sample Importance of Skewness and Asymmetric Dependence for Asset Allocation," *Journal of Financial Econometrics*, Society for Financial Econometrics, vol. 2(1), pages 130-168.
28. Rachev, S., Stoyanov, S., Biglova, S., Fabozzi, F., *An Empirical examination of daily stock return distributions for U.S. stocks*, in: Daniel Baier, Reinhold Decker, and Lars Schmidt-Thieme (eds.), *Data Analysis and Decision Support*, Springer Series in Studies in Classification, Data Analysis, and Knowledge Organization: (Berlin: Springer-Verlag) 269-281, 2005
29. Radha, S., Thenmozhi, M. (2006), "Forecasting Short Term Interest Rates Using ARMA, ARMA-GARCH and ARMA-EGARCH Models," *Indian Institute of Capital Markets 9th Capital Markets Conference Paper*, 2006
30. Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000) *Optimization of Conditional Value-at-Risk*. *Journal of Risk*, 2, 21–41.

31. Sakalauskas, V. (2004). Trumpalaikių investicijų rizikos tyrimas finansų rinkose //Informacijos mokslai Nr.30/2004, p. 110 –118.
32. Sato, Renato Cesar. (2013). Risk assessment in airlines stocks market. Journal of Transport Literature,7(2), 352-372.Retrieved May21, 2014, from http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S223810312013000200019&lng=en&tlng=en n. 10.1590/S2238-10312013000200019.
33. SEB bankas: Leidinys „Investavimo menas“. SEB Privačiosios bankininkystės padalinio Investavimo strategijos skyriaus parengta mokomoji medžiaga, paskelbta 2010 m. spalio mėn. Prieiga per internetą: https://www.seb.lt/sites/default/files/web/pdf/Investavimo_menas.pdf [žiūrėta: 2014.05]
34. Shamiri, A., Abu Hassan. “Modeling and Forecasting Volatility of the Malaysian and the Singaporean stock indices using Asymmetric GARCH models and Non-normal Densities,” Journal of Malaysian Mathematical Sciences, 2007,vol. 1, pp 83 – 102.
35. Shimizu, Kenichi. Bootstrapping Stationary ARMA-GARCH Models. 1. ed. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009.
36. Simaan, Yusif, Estimation Risk in Portfolio Selection: The Mean Variance Model versus the Mean Absolute Deviation Model, Management Science Vol. 43 (1997) No. 10, pp. 1437-1446.
37. Tavares, A.B., Curto, J.D., and Tavares, G.N. (2008). Modelling heavy tails and asymmetry using ARCH–type models with stable Paretian distribution. Nonlinear Dyn.,51, 231–243.
38. Tutuncu, R. H. (2003). *Optimization in Finance: Advance Lecture on Mathematical Science and Information Science*.

1 PRIEDAS. AKCIJŲ LOG-GRAŽŲ GRAFIKAI



2 PRIEDAS. AKCIJŲ APROKSIMAVIMO STJUDENTO PASISKIRTŲŲ PARAMETRAI

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
μ	-0.0001	0.0013	0.0005	0.0001	0.0010	0.0010	0.0017	0.0004
σ	0.0228	0.0214	0.0181	0.0224	0.0194	0.0223	0.0321	0.0225
ν	3.4868	4.0665	2.9245	4.0000	3.8599	2.9990	4.0279	3.6276

3 PRIEDAS. AKCIJŲ APROKSIMUOTŲ ASIMETRINIŲ STJUDENTO PASISKIRTYMŲ PARAMETRAI

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
μ	-0.0002	0.0010	0.0007	0.0006	0.0015	0.0006	0.0017	0.0009
σ	0.0227	0.0213	0.0182	0.0221	0.0192	0.0223	0.0321	0.0225
ν	3.4921	4.1243	2.9112	4.2437	3.9989	2.9995	4.0262	3.6454
γ	0.9908	0.9492	1.0269	1.0798	1.0803	0.9584	0.9945	1.0637

4 PRIEDAS. AKCIJŲ APROKSIMUOTŲ STABILIUOJŲ PASISKIRTYMŲ PARAMETRAI

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
α	1.506	1.6160	1.6080	1.654	1.670	1.489	1.6150	1.6760
β	-0.1180	-0.176	-0.0400	0.098	0.213	-0.125	0.0230	0.2330
γ	0.0110	0.0115	0.00836	0.0125	0.0106	0.0099	0.0168	0.0118
δ	0.00033	0.0017	0.000072	-0.0011	0.00021	0.0010	0.00155	-0.0005

5 PRIEDAS. MATRICOS A (PRIKLAUSOMYBĖ TARP APATINIŲ UODEGŲ) IR B (PRIKLAUSOMYBĖ TARP VIRSUTINIŲ UODEGŲ)

Priklausomybės tarp apatinių uodegų (matrica A):

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
AA								
AWI	0.407							
CSCO	0.473	0.406						
GM	0.559	0.490	0.487					
YHOO	0.408	0.347	0.373	0.397				
JPM	0.591	0.501	0.484	0.592	0.405			
MU	0.503	0.422	0.472	0.471	0.342	0.468		
SIRI	0.447	0.367	0.382	0.412	0.366	0.446	0.372	

Priklausomybės tarp viršutinių uodegų (matrica B):

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
AA								
AWI	0.429							
CSCO	0.450	0.341						
GM	0.255	0.409	0.403					
YHOO	0.229	0.312	0.273	0.272				
JPM	0.509	0.495	0.476	0.363	0.310			
MU	0.295	0.283	0.410	0.336	0.290	0.393		
SIRI	0.247	0.215	0.218	0.282	0.225	0.248	0.216	

6 PRIEDAS. PKA ANALIZES KOEFICIENTAI ALPHA IR BETA

Faktorinio(regresinio) modelio koeficientai (alpha ir beta), parodo kaip isreikti konkrečia akcija per faktorius

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
alpha	-0.00033	0.00074	0.00061	0.00041	0.00157	0.00064	0.00182	0.00083
beta 1	-0.36188	-0.33521	-0.25165	-0.36268	-0.23749	-0.33954	-0.55871	-0.27922
beta 2	-0.21677	-0.21513	-0.09016	-0.09016	-0.12775	-0.12775	0.81893	-0.31608
beta 3	-0.13927	-0.30289	-0.11276	-0.24866	0.11916	-0.17282	0.10292	0.87158
beta 4	0.39731	-0.25616	0.06461	0.00600	-0.84147	0.21088	0.02362	0.13861
beta 5	-0.44733	0.55474	-0.36459	0.35190	-0.41154	-0.15733	0.06746	0.19164
beta 6	0.46113	0.31729	-0.67847	-0.45324	0.08938	0.10897	0.01958	-0.02607

7 PRIEDAS. FAKTORINIO(REGRESINIO) MODELIO KOEFICIENTU P-REIKŠMĖS

	AA	AWI	CSCO	GM	YHOO	JPM	MU	SIRI
Alpha, p-value	0.148	0.00705	0.038813	0.209	<2e-16 ***	0.1197	<2e-16 ***	<2e-16 ***
beta 1, p-value	<2e-16 ***	2e-16 ***	< 2e-16 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***	< 2e-16 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***
beta 2, p-value	<2e-16 ***	2e-16 ***	3.91e-12 ***	2e-16 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***
beta 3, p-value	<2e-16 ***	2e-16 ***	4.56e-12 ***	2e-16 ***	<2e-16 ***	2.52e-14 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***

beta 4, p-value	<2e-16 ***	2e-16 ***	0.000314 ***	2e-16 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***
beta 5, p-value	<2e-16 ***	2e-16 ***	< 2e-16 ***	0.764	<2e-16 ***	1.77e-08 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***
beta 6, p-value	<2e-16 ***	2e-16 ***	< 2e-16 ***	2e-16 ***	<2e-16 ***	0.000118 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***

8 PRIEDAS. FAKTORIŲ ARMA-GARCH MODELIO, KOEFICIENTŲ P-REIŠMĖS

	F1	F2	F3	F4	F5	F6
$a_{j,1}$	0.933	0.0053 **	3.11e-08 ***	<2e-16 ***	0.993	1.09e-06 ***
$b_{j,1}$	0.996	0.00577 **	1.32e-12 ***	<2e-16 ***	0.975	3.79e-07 ***
$c_{j,0}$	0.146	0.222	0.2304	0.1789	0.482	0.2983
$c_{j,1}$	0.027 *	0.118	0.0156 *	0.0615	0.293	0.3013
$d_{j,1}$	<2e-16 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***	<2e-16 ***	0.0022 **
ν	0.00611 **	3.05e-10 ***	2.59e-08 ***	1.22e-07 ***	1.61e-06 ***	2.89e-11 ***

9 PRIEDAS. TRIUKSMO E ARMA-GARCH MODELIŲ KOEFICIENŲ P REIŠMĖS

	\hat{e}_1	\hat{e}_2	\hat{e}_3	\hat{e}_4	\hat{e}_5	\hat{e}_6	\hat{e}_7	\hat{e}_8
$g_{i,1}$	0.80901	0.165	0.152	0.597	0.282	0.12731	0.64696	0.70272
$h_{i,1}$	0.76547	0.114	0.104	0.542	0.224	0.09329	0.58378	0.64000
$k_{i,0}$	0.04910 *	0.717	0.516	0.291	0.593	0.02910	0.00214 **	0.00974 **
$k_{i,1}$	0.00724 **	0.365	0.219	0.140	0.351	0.00879 **	0.19165	0.27200
$p_{i,1}$	<2e-16 ***	0.830	0.759	< 2e-16 ***	0.507	<2e-16 ***	1.00000	1.00000
ν	1.05e-05 ***	1.82e-06 ***	1.09e-06 ***	3.62e-06 ***	6.09e-07 ***	1.19e-05 ***	3.29e-05 ***	1.56e-05 ***

10 PRIEDAS. FAKTORIŲ ARMA-GARCH MODELIO LIEKANŲ PASISKIRSTYMŲ PARAMETRAI

		F1	F2	F3	F4	F5	F6
Asimetrinio Stjudento parametrai	μ	- 0.00272	-0.0066	0.00307	-0.0018	-	-0.0045
	σ	0.999	1.000	1.0001	1.0093	-	1.0000
	ν	9.3233	3.8047	4.8942	4.8325	-	3.6893
	χ	1.1280	1.0464	1.1680	0.8537	-	0.9492
Stabilaus pasiskirstymo parametrai	α	-	-	-	-	1.8189	-
	β	-	-	-	-	-0.047	-
	γ	-	-	-	-	0.6191	-
	δ	-	-	-	-	0.0124	-

11 PRIEDAS. A-D SUDERINAMUMO TESTO TARP ARMA-GARCH MODELIO TRIUKŠMŲ IR STABILIAUS PASISKIRSTYMU P-REIŠMĖS

	$Z_{1,t}$	$Z_{2,t}$	$Z_{3,t}$	$Z_{4,t}$	$Z_{5,t}$	$Z_{6,t}$	$Z_{7,t}$	$Z_{8,t}$
p-value	0.589	0.4736	0.2489	0.6519	0.2623	0.4117	0.4936	0.3321

12 PRIEDAS. TRIUKSMO E ARMA-GARCH MODELIŲ LIEKANŲ PASISKIRSTYMŲ PARAMETRAI

		e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8
Stabilaus pasiskirstymo parametrai	α	1.885	1.808	1.8052	1.8210	1.8042	1.8744	1.8264	1.8042
	β	0.2613	-0.103	-0.100	0.3228	0.1308	-0.4176	0.0958	-0.130
	γ	0.6362	0.613	0.612	0.6282	0.6142	0.6362	0.6221	0.6142
	δ	-0.0327	0.025	0.0250	-0.0522	-0.030	0.0496	-0.0232	0.0300

13 PRIEDAS. PROGRAMOS KODAS

```
#Stabilaus pasiskirstymo parametru apskaičiavimas
.mleStableFit <-
function(x, alpha = 1.75, beta = 0, gamma = 1, delta = 0, doplot = TRUE,
  algorithm = c("nlminb", "nlm"), trace = FALSE,
  title = NULL, description = NULL)
{
  # A function implemented by Diethelm Wuertz
  # Description:
```



```

# Estimates stable parameters by MLE approach
# Note:
# This implementation assumes delta=1 and gamma=0
# FUNCTION:
# Transform:
x.orig = x
x = as.vector(x)
# Settings:
CALL = match.call()
# Log-likelihood Function:
establemle = function(x, y = x, trace = FALSE) {
  alpha = 2/(1+exp(-x[1]))
  beta = tanh(x[2])
  gamma = exp(x[3])
  delta = x[4]
  f = -sum(log(dstable(y, alpha = alpha, beta = beta,
    gamma = gamma, delta = delta, pm=0)))
  # Print Iteration Path:
  if (trace) {
    cat("\n Objective Function Value: ", -f)
    cat("\n Stable Estimate:      ", alpha, beta, gamma, delta)
    cat("\n")
  }
  f
}

# Minimization:
if (algorithm == "nlminb") {
  r <- nlminb(start = c(log(alpha/(2-alpha)), atanh(beta), gamma, delta),
    objective = establemle, y = x, trace = trace)
  r$estimate = r$par
} else if (algorithm == "nlm") {
  r <- nlm(f = establemle, p = c(log(alpha/(2 - alpha)), atanh(beta),
    log(gamma), delta), y = x, trace = trace)
}
alpha = 2/(1+exp(-r$estimate[1]))
beta = tanh(r$estimate[2])
gamma = exp(r$estimate[3])
delta = r$estimate[4]
# Optional Plot:
if (doplot) {
  span.min = qstable(0.01, alpha, beta)
  span.max = qstable(0.99, alpha, beta)
  span = seq(span.min, span.max, length = 100)
  par(err = -1)
  z = density(x, n = 100)
  x = z$x[z$y > 0]
  y = z$y[z$y > 0]
  y.points = dstable(span, alpha, beta)
}

```

```

ylim = log(c(min(y.points), max(y.points)))
plot(x, log(y), xlim = c(span[1], span[length(span)]),
     ylim = ylim, type = "p", xlab = "x", ylab = "log f(x)")
title("Stable Distribution: Parameter Estimation")
lines(x = span, y = log(y.points), col = "steelblue")
if (exists("grid")) grid()
}

# Add Title and Description:
if (is.null(title)) title = "Stable Parameter Estimation"
if (is.null(description)) description = description()
# Fit:
# fit = list(estimate = c(alpha = alpha, beta = beta, gamma = gamma,
#   delta = delta), minimum = -r$minimum, code = r$code, gradient =
#   r$gradient)
fit = c(alpha = alpha, beta = beta, gamma = gamma, delta = delta)
return(fit)
# Return Value:
# new("fDISTFIT",
#   # call = as.call(CALL),
#   # model = "Stable Distribution",
#   # data = as.data.frame(x.orig),
#   # fit = fit,
#   # title = as.character(title),
#   # description = description() )
}

#Portfelio gražų modeliavimas

newgen_BAND_pca6<-function(S,td4,T,PCA_LM,sigkv_prev,eps_prev,
ret_prev,eS_ret_prev,eS_sigma2_prev,
eS_eps_prev,agS1,agS2,agS3,agS4,agS5,agS6,agES1,agES2,agES3,agES4,agES5,agES6,agES7,agES8) {
#****NAUJAS GENERAVIMAS*****
#S scenariju skaicius
  alphaS=matrix(PCA_LM[1,],8,S)
  betaS=t(PCA_LM[-1,])
  nu=td4@lambda*(-2)
  gamma = td4@gamma
  var_covar = td4@sigma
  mu = td4@mu
  sigg=(cov(Us_hat)-(2*nu^2/(nu-2)^2/(nu-4)*as.matrix(gamma%*%t(gamma))))*(nu-2)/2
  nn=mvrnorm(n=S,c(0,0,0,0,0,0),sigg) a=rinvgamma(S,nu/2,nu/2)
  E=as.matrix(data.frame(a,a,a,a,a,a))
  mum=matrix(mu,nrow=S,ncol=length(mu),byrow=TRUE)
  Vum=mum++gamma*(E)+sqrt(E)*nn
  Vum1=data.frame(Vum[,1],Vum[,2],Vum[,3],Vum[,4],Vum[,5],Vum[,6])
  V<-Vum
  #Marginalieji empiriniai pasiskirtymai Fvj(x)
  Fn1<-ecdf(V[,1])
  Fn2<-ecdf(V[,2])
  Fn3<-ecdf(V[,3])

```

```

Fn4<-ecdf(V[,4])
Fn5<-ecdf(V[,5])
Fn6<-ecdf(V[,6])
#####Liekanu asim. Stjudento ir stabiliojo pasiskirstymo MTM parametrai
u1<-rsstd(1000,-0.002729421, 0.999683978 , 9.323398626 , 1.128069233)
u2<-rsstd(1000,-0.00663801, 1.00035544, 3.80475469, 1.04641354)
u3<-rsstd(1000,0.003075551, 1.000152185, 4.894266038, 1.168010752)
u4<-rsstd(1000,-0.001894688, 1.009352903, 4.832554578, 0.853784104)
u5<-rstable(1000, 1.81898010, -0.04736943, 0.61917403, 0.01242152)
u6<-rsstd(1000,-0.004518078 , 1.000033424, 3.689301258, 0.949200901)
#####
U_hat<-array(1:S,dim=6)
U_hat<-data.frame(u1,u2,u3,u4,u5,u6)
Ut_plus_1<-array(1:S,dim=6)
#Uniform random vector (U1,..U4) ilgio S, and whose distribution is given by copula
U<-data.frame(Fn1(V[,1]),Fn2(V[,2]),Fn3(V[,3]),Fn4(V[,4]),Fn5(V[,5]),Fn6(V[,6])) #gaunu dydzius
[0;1]~T
Ut_plus_1<-data.frame(quantile(U_hat[,1],U[,1],names=FALSE,type=4),
quantile(U_hat[,2],U[,2],names=FALSE,type=4),quantile(U_hat[,3],U[,3],names=FALSE,type=4),quantile
(U_hat[,4],U[,4],names=FALSE,type=4),quantile(U_hat[,5],U[,5],names=FALSE,type=4),quantile(U_hat[,
6],U[,6],names=FALSE,type=4))
Ut_plus_1<-unnname(Ut_plus_1)
Ut_plus_1<-as.matrix(Ut_plus_1)
#*****
#STUD parametrai
omega =agS1@fit$coef[3]
alpha =agS1@fit$coef[4]
beta =agS1@fit$coef[5]
ar=agS1@fit$coef[1]
ma=agS1@fit$coef[2]
n<-S
ret2<-matrix(,n,6)
eps<-matrix(,n,6)
sigkv<-matrix(,n,6)
ret2[1,1]<-ret_prev[1]
eps[1,1]<-eps_prev[1]
sigkv[1,1]<-sigkv_prev[1]
for (i in 2:n) {
sigkv[i,1]<-omega+alpha*eps[i-1,1]^2+beta*sigkv[i-1,1]
eps[i,1]<-sqrt(sigkv[i,1])*Ut_plus_1[i,1]
ret2[i,1]<-ar*ret2[i-1,1]+ma*eps[i-1,1]+eps[i,1]
}
#ret2 reikesmes priskyriau Fak1-Fak6
Fak1<-ret2[,1]
#####2
#S=500
y<-pca.scores$Comp.2
omega =agS2@fit$coef[3]
alpha =agS2@fit$coef[4]

```

```

beta =agS2@fit$coef[5]
ar=agS2@fit$coef[1]
ma=agS2@fit$coef[2]
ret<-y
n<-S
ret2[1,2]<-ret_prev[2]
eps[1,2]<-eps_prev[2]
sigkv[1,2]<-sigkv_prev[2]
for (i in 2:n) {
  sigkv[i,2]<-omega+alpha*eps[i-1,2]^2+beta*sigkv[i-1,2]
  eps[i,2]<-sqrt(sigkv[i,2])*Ut_plus_1[i,2]
  ret2[i,2]<-ar*ret2[i-1,2]+ma*eps[i-1,2]+eps[i,2]
}
#ret2 reikesmes priskyriau Fak1-Fak6
Fak2<-ret2[,2]
#####3
y<-pca.scores$Comp.3
omega =agS3@fit$coef[3]
alpha =agS3@fit$coef[4]
beta =agS3@fit$coef[5]
ar=agS3@fit$coef[1]
ma=agS3@fit$coef[2]
ret<-y
n<-S
ret2[1,3]<-ret_prev[3]
eps[1,3]<-eps_prev[3]
sigkv[1,3]<-sigkv_prev[3]
for (i in 2:n) {
  sigkv[i,3]<-omega+alpha*eps[i-1,3]^2+beta*sigkv[i-1,3]
  eps[i,3]<-sqrt(sigkv[i,3])*Ut_plus_1[i,3]
  ret2[i,3]<-ar*ret2[i-1,3]+ma*eps[i-1,3]+eps[i,3]
}
#ret2 reikesmes priskyriau Fak1-Fak6
Fak3<-ret2[,3]
#####4
#S=500
y<-pca.scores$Comp.4
omega =agS4@fit$coef[3]
alpha =agS4@fit$coef[4]
beta =agS4@fit$coef[5]
ar=agS4@fit$coef[1]
ma=agS4@fit$coef[2]
ret<-y
n<-S
ret2[1,4]<-ret_prev[4]
eps[1,4]<-eps_prev[4]
sigkv[1,4]<-sigkv_prev[4]
for (i in 2:n) {
  sigkv[i,4]<-omega+alpha*eps[i-1,4]^2+beta*sigkv[i-1,4]

```

```

eps[i,4]<-sqrt(sigkv[i,4])*Ut_plus_1[i,4]
ret2[i,4]<-ar*ret2[i-1,4]+ma*eps[i-1,4]+eps[i,4]
}
Fak4<-ret2[,4]
#####5
#S=500
y<-pca.scores$Comp.5
omega =agS5@fit$coef[3]
alpha =agS5@fit$coef[4]
beta =agS5@fit$coef[5]
ar=agS5@fit$coef[1]
ma=agS5@fit$coef[2]
ret<-y
n<-S
ret2[1,5]<-ret_prev[5]
eps[1,5]<-eps_prev[5]
sigkv[1,5]<-sigkv_prev[5]
for (i in 2:n) {
  sigkv[i,5]<-omega+alpha*eps[i-1,5]^2+beta*sigkv[i-1,5]
  eps[i,5]<-sqrt(sigkv[i,5])*Ut_plus_1[i,5]
  ret2[i,5]<-ar*ret2[i-1,5]+ma*eps[i-1,5]+eps[i,5]
}
Fak5<-ret2[,5]
#####6
#S=500
y<-pca.scores$Comp.6
omega =agS6@fit$coef[3]
alpha =agS6@fit$coef[4]
beta =agS6@fit$coef[5]
ar=agS6@fit$coef[1]
ma=agS6@fit$coef[2]
ret<-y
n<-S
ret2[1,6]<-ret_prev[6]
eps[1,6]<-eps_prev[6]
sigkv[1,6]<-sigkv_prev[6]
for (i in 2:n) {
  sigkv[i,6]<-omega+alpha*eps[i-1,6]^2+beta*sigkv[i-1,6]
  eps[i,6]<-sqrt(sigkv[i,6])*Ut_plus_1[i,6]
  ret2[i,6]<-ar*ret2[i-1,6]+ma*eps[i-1,6]+eps[i,6]
}
Fak6<-ret2[,6]
#####
FAK=data.frame(Fak1,Fak2,Fak3,Fak4,Fak5,Fak6) #S scenariju T+1 laiko momentu kiekvienam faktoriui
###Jei stable aproksimavimas
stab_u1<-c(1.88555325, 0.26137505, 0.63622209, -0.03272889)
stab_u2<-c(1.80843479, -0.10305626, 0.61393620, 0.02540426)
stab_u3<-c(1.80520445, -0.10042746, 0.61238868, 0.0250976)
stab_u4<-c(1.82101722, 0.32282581, 0.62822012, -0.05226359)

```

```

stab_u5<-c(1.80426407, 0.13088924, 0.61423648, -0.03004514)
stab_u6<-c(1.87449553, -0.41760466, 0.63624565, 0.04965988)
stab_u7<-c(1.82649323, 0.09585452, 0.62212279, -0.02327182)
stab_u8<-c(1.80426406, -0.13082074, 0.61423007, 0.03003474)

```

```

ff1<-AG_t_mult(agES1,stab_u1, S,eS_ret_prev[1],eS_sigma2_prev[1],eS_eps_prev[1],"1")
ff2<-AG_t_mult(agES2,stab_u2, S,eS_ret_prev[2],eS_sigma2_prev[2], eS_eps_prev[2],"2")
ff3<-AG_t_mult(agES3,stab_u3, S,eS_ret_prev[3],eS_sigma2_prev[3], eS_eps_prev[3],"3")
ff4<-AG_t_mult(agES4,stab_u4, S,eS_ret_prev[4],eS_sigma2_prev[4], eS_eps_prev[4],"4")
ff5<-AG_t_mult(agES5,stab_u5, S,eS_ret_prev[5],eS_sigma2_prev[5], eS_eps_prev[5],"5")
ff6<-AG_t_mult(agES6,stab_u6, S,eS_ret_prev[6],eS_sigma2_prev[6], eS_eps_prev[6],"6")
ff7<-AG_t_mult(agES7,stab_u7, S,eS_ret_prev[7],eS_sigma2_prev[7], eS_eps_prev[7],"7")
ff8<-AG_t_mult(agES8,stab_u8, S,eS_ret_prev[8],eS_sigma2_prev[8], eS_eps_prev[8],"8")
eSim<-t(data.frame(ff1$gra_eS,ff2$gra_eS,ff3$gra_eS,ff4$gra_eS,ff5$gra_eS,ff6$gra_eS,ff7$gra_eS,
ff8$gra_eS))
FAKK<-data.frame(Fak1=mean(Fak1),Fak2=mean(Fak2),Fak3=mean(Fak3),Fak4=mean(Fak4),Fak5=
mean(Fak5),Fak6=mean(Fak6))
rrr1<-alphaS+betaS%*%t(FAKK)+eSim
#ARMa-GARCH SUGENERUOTOS REIKSMES FAK
rrr<-alphaS+betaS%*%t(FAK)+eSim
names(rrr)<-NULL
return(list(gra=rrr1,ret_m=FAK, eps_m=eps, sig2_mean= sigkv,eS=eSim))
}

```

#Regresines lygties liekanu modeliavimo funkcija

```

AG_t_mult<-function(koef,koef_st, number_iter, eS_ret_prev,eS_sigma2_prev, eS_eps_prev, ind) {
omega =koef@fit$coef[3]
alpha =koef@fit$coef[4]
beta =koef@fit$coef[5]
ar=koef@fit$coef[1]
ma=koef@fit$coef[2]
n<-number_iter
a1=rstable(n, koef_st[1], koef_st[2],koef_st[3],koef_st[4])
ret2<-array(1:n,dim=1)
sigma2_es<-array(1:n,dim=1)
eps_es<-array(1:n,dim=1)
ret2_es<-array(1:n,dim=1)
sigma2_es[1]<-eS_sigma2_prev
eps_es[1]<-eS_eps_prev
ret2_es[1]<-eS_ret_prev
for (i in 2:n) {
sigma2_es[i]<-omega+alpha*(eps_es[i-1])^2+beta*sigma2_es[i-1]
eps_es[i]<-sqrt(sigma2_es[i])*a1[i]
ret2_es[i]<-ar*ret2_es[i-1]+ma*eps_es[i-1]+eps_es[i]
}
return(list(gra_eS=ret2_es))
}

```

#Efektyvūs portfolio krastai

```

efront <- function(prepare_data, nport = 1000, shorts = FALSE) {
ef <- matrix(0, nport, 2 + ncol(prepare_data$rets))

```

```

pm <- seq((min(prepare_data$mean) + .1^10), (max(prepare_data$mean) - .1^10),
  length.out = nport)
for (i in 1:nport) {
  port <- NULL
  try (port <- portfolio.optim(prepare_data$rets, pm = pm[i], shorts = shorts))
  if (!is.null(port)) {
    ef[i, 1] <- port$ps
    ef[i, 2] <- port$pm
    ef[i, 3:ncol(ef)] <- port$pw
  }
}
list(ef = ef[, 1:2], wts = ef[, -1:-2])
}
#Minvar ir Sharpe svoriu apskaičiavimas
opt.port <- function(prepare_data, req = -100, reshigh = 1, reslow = 0.1^10,
  meq = 1, obj = 'minvar') {
  Dmat <- 2 * prepare_data$covar
  if (obj == 'minvar') {
    dvec <- rep(0, length(prepare_data$mean))
  } else if (obj == 'sharpe') {
    dvec <- prepare_data$mean
  }
  Amat_eq1 <- rep(1, length(prepare_data$mean))
  Amat_eq2 <- prepare_data$mean
  Amat_ineq1 <- -diag(length(prepare_data$mean))
  Amat_ineq2 <- diag(length(prepare_data$mean))
  bvec_eq1 <- 1
  bvec_eq2 <- req
  bvec_ineq1 <- rep(-reshigh, length(prepare_data$mean))
  bvec_ineq2 <- rep(reslow, length(prepare_data$mean))
  Amat <- cbind(Amat_eq1, Amat_eq2, Amat_ineq1, Amat_ineq2)
  bvec <- c(bvec_eq1, bvec_eq2, bvec_ineq1, bvec_ineq2)
  port_solu <- NULL
  try(port_solu <- solve.QP(Dmat = Dmat, dvec = dvec, Amat = Amat,
    bvec = bvec, meq = meq))
  if (!is.null(port_solu)) {
    pm = port_solu$solution %*% prepare_data$mean
    if (obj == 'minvar') {
      ps = sqrt(port_solu$value)
    } else if (obj == 'sharpe') {
      ps = sqrt((port_solu$value) + pm)
    }
  }
  list(pw = port_solu$solution, pm = pm, ps = ps)
}
#CVaR svoriu apskaičiavimas
cvarOpt = function(rmat, alpha=0.05, rmin=-50, wmin=0.00001, wmax=1, weight.sum=1)
{
  require(Rglpk)

```

```

n = ncol(rmat) # number of assets
s = nrow(rmat) # number of scenarios i.e. periods
averet = colMeans(rmat)
# creat objective vector, constraint matrix, constraint rhs
Amat = rbind(cbind(rbind(1,averet),matrix(data=0,nrow=2,ncol=s+1)),
cbind(rmat,diag(s),1))
objL = c(rep(0,n), rep(-1/(alpha*s), s), -1)
bvec = c(weight.sum,rmin,rep(0,s))
# direction vector
dir.vec = c("==",">=",rep(">=",s))
# bounds on weights
bounds = list(lower = list(ind = 1:n, val = rep(wmin,n)),
upper = list(ind = 1:n, val = rep(wmax,n)))
res = Rglpk_solve_LP(obj=objL, mat=Amat, dir=dir.vec, rhs=bvec,
types=rep("C",length(objL)), max=T, bounds=bounds)
w = as.numeric(res$solution[1:n])
return(list(w=w,status=res$status))
}
#MAD svoriu apskaiciavimas
MAD<-function(x,lw,hw) {
ia=create.ia(aaa)
ia$symbols<-c(1,2,3,4,5,6,7,8)
nn = ia$n
# 0 <= x.i <= 1
constraints = new.constraints(nn, lb = lw, ub = hw)
# SUM x.i = 1
constraints = add.constraints(rep(1, nn), 1, type = '=', constraints)
# Set target return (or Minimum Acceptable Returns (MAR))
# and consider only returns that are less than the target
ia$parameters.mar = 1000 #0/100
# convert annual to monthly
ia$parameters.mar = ia$parameters.mar / 12
return( min.mad.portfolio(ia, constraints))
}

```