



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**Dovilė Šmuilienė**

**TARPUSAVIO SINCHRONIZACIJOS**  
**SISTEMOS ANALIZINIS TYRIMAS**

Magistro darbas

**Vadovai**  
**prof. dr. J. Rimas**  
**dokt. I. Ivanovienė**

**KAUNAS, 2014**



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS  
MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS  
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**TVIRTINU  
Katedros vedėjas  
doc. dr. N. Listopadskis  
2014 06 03**

**TARPUSAVIO SINCHRONIZACIJOS  
SISTEMOS ANALIZINIS TYRIMAS**

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

**Vadovai  
prof. dr. J. Rimas  
dakt. I. Ivanovienė  
2014 06 02**

**Recenzentas  
doc. A. Zajančkauskas  
2014-05-30**

**Atliko  
FMMM 8/2 gr. stud.  
D. Šmuilienė  
2014 05 23**

**KAUNAS, 2014**

## KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

**Pirmininkas:** Juozas Augutis, Vytauto Didžiojo universiteto Matematikos ir statistikos katedros profesorius (VDU)

**Sekretorius:** Eimutis Valakevičius, Matematinio modeliavimo katedros profesorius (KTU)

**Nariai:** Jonas Valantinas, Taikomosios matematikos katedros profesorius  
Vytautas Janilionis, Taikomosios matematikos katedros docentas  
Kristina Šutienė, Matematinio modeliavimo katedros docentė  
Zenonas Navickas, Taikomosios matematikos katedros profesorius  
Arūnas Barauskas, UAB „Danet Baltic“ direktoriaus pavaduotojas

**Šmuilienė D. The analysis of the mutual synchronization system. Master 's work in applied mathematics / supervisors prof. J. Rimas, PhD student I. Ivanovienė; Department of Applied mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2014 – 67 p.**

## **SUMMARY**

Time delay is often encountered in various technical systems, such as electric, pneumatic and hydraulic networks, chemical processes, long transmission lines, robotics, etc. The existence of pure time lag, regardless if it is present in the control or/and the state, may cause undesirable system transient response, or even instability [5].

The aim of this work is to investigate the mutual synchronization system, composed of five oscillators. The mathematical model of the synchronization system is the matrix differential equation with delayed argument. It is solved applying the Laplace transformation method. Using this method the analytical expressions for step responses and differences between phases are found. The results of consequent integration method are compared with the results got using method with dde23 function.

## TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS .....	6
ĮVADAS .....	7
1. BENDROJI DALIS .....	8
1.1. LAPLASO TRANSFORMACIJA .....	8
1.2. APIBENDRINTOSIOS FUNKCIJOS .....	10
1.3. RUNGĖS – KUTO METODAS.....	13
1.4. SKAITINIS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SU VĒLUOJANČIU ARGUMENTU SPRENDIMO METODAS, PAREMTAS DDE23 FUNKCIJOS APRAŠYTOS MATLAB PAKETE .....	13
1.5. PROGRAMINĖ REALIZACIJA .....	17
2. TIRIAMOJI DALIS .....	18
2.1. SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS MATEMATINIS MODELIS .....	18
2.2. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES, APRAŠANČIOS SINCHRONIZACIJOS SISTEMĄ, SPRENDIMAS.....	20
2.3. MATRICOS K-TOJO LAIPSNIO IR MATRICOS, PAKELTOS SVEIKUOJU LAIPSNIU, ELEMENTŲ RADIMAS .....	27
2.4. SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS PEREINAMŲJŲ PROCESŲ TYRIMAS .....	30
2.4.1. PEREINAMŲJŲ FUNKCIJŲ SKAIČIAVIMAS .....	30
2.4.2. PEREINAMŲJŲ FUNKCIJŲ RIBINIŲ REIKŠMIŲ SKAIČIAVIMAS.....	37
2.5. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ REIKŠMĖS .....	37
2.5.1. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ RIBINIŲ REIKŠMIŲ SKAIČIAVIMAS .....	43
IŠVADOS.....	53
LITERATŪRA .....	54
1 PRIEDAS .....	56
2 PRIEDAS .....	59
3 PRIEDAS .....	62

## PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1.1 pav. Hevisaido vienetinė funkcija .....	11
1.2 pav. Vėluojančios vienetinės funkcijos grafikas .....	11
1.3 pav. Funkcijos $f(t)l(t)$ (a) ir vėluojančios funkcijos (b) grafikai .....	12
1.4 pav. Funkcijos $\delta_h(t)$ grafikas .....	12
2.1 pav. Tiriamos tarpusavio sinchronizacijos schema .....	18
2.2 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i1}(\kappa\tau)$ grafikai prie skirtingų $\kappa\tau$ .....	32
2.3 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i2}(\kappa\tau)$ grafikai prie skirtingų $\kappa\tau$ .....	33
2.4 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i3}(\kappa\tau)$ grafikai prie skirtingų $\kappa\tau$ .....	34
2.5 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i4}(\kappa\tau)$ grafikai prie skirtingų $\kappa\tau$ .....	35
2.6 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i5}(\kappa\tau)$ grafikai prie skirtingų $\kappa\tau$ .....	36
2.7 pav. Fazių skirtumų grafikas gautas naudojant metodą su DDE23 funkcija, kai $\kappa\tau = 0.5$ .....	48
2.8 pav. Fazių skirtumų grafikas gautas naudojant metodą su DDE23 funkcija, kai $\kappa\tau = 1.5$ .....	49
2.9 pav. Fazių skirtumų grafikas gautas naudojant metodą su DDE23 funkcija, kai $\kappa\tau = 3.5$ .....	49
2.10 pav. Fazių skirtumų grafikas gautas naudojant metodą su DDE23 funkcija, kai $\kappa\tau = 3$ .....	50
2.11 pav. Fazių skirtumų grafikas gautas naudojant nuoseklaus integravimo metodą, kai $\kappa\tau = 3.5$ .....	50
3.1 pav. Maksimalios santykinės paklaidos priklausomybė nuo vėlavimo argumento .....	51
3.2 pav. Generatorių virpesių fazių skirtumo $x_1(\kappa\tau) - x_2(\kappa\tau)$ grafikas, kai santykinė paklaida didžiausia, t.y. $\delta_{\max} = 0.0152$ .....	52
3.3 pav. Generatorių virpesių fazių skirtumo $x_1(\kappa\tau) - x_2(\kappa\tau)$ grafikas, kai santykinė paklaida mažiausia, t.y. $\delta_{\max} = 0.0009$ .....	52

## ĮVADAS

Įvairiose valdymo sistemose egzistuoja laiko vėlavimas, pavyzdžiui, elektros tinkluose, cheminiuose procesuose, ilgose perdavimo linijose ir t.t. Šie vėlavimai gali iššaukti nepageidaujamus pereinamuosius procesus sistemoje. Norint suprasti šių procesų priežastis, būtina atlikti sistemos analizinį tyrimą.

Darbo tikslas - išnagrinėti tarpusavio sinchronizacijos sistemą sudaryta iš penkių tarpusavyje sujungtų generatorių.

Remiantis sinchronizacijos sistemos struktūrine schema sudaromas jos matematinis modelis – matricinė diferencialinė lygtis su vėluojančiu argumentu. Ši lygtis yra sprendžiama nuoseklaus integravimo metodu ir gauti rezultatai lyginami su rezultatais gautais metodu, paremtu dde23 funkcijos taikymu. [9]. Sprendžiant matricinę diferencialinę lygtį nuoseklaus integravimo metodu intervalas  $[0; +\infty)$  dalijamas į vėlavimo  $\tau$  ilgio dalinius intervalus ir kiekviename intervale lygtis sprendžiama atskirai, kaip matricinė diferencialinė lygtis be vėluojančio argumento. Ieškodami sprendinio kiekviename intervale, taikome Laplaso transformaciją.

Naudojantis matricinės diferencialinės lygties su vėluojančiu argumentu sprendiniu, išvedame sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų ir generatorių virpesių fazių skirtumų analizes išraiškas. Remiantis gautomis išraiškomis atliekame pereinamųjų procesų tyrimus.

Šia tematika pristatytas straipsnis „XII taikomosios matematikos studentų konferencijoje“. Straipsnis išleistas „Taikomoji matematika“ XII studentų konferencijos pranešimų medžiagoje.

# 1. BENDROJI DALIS

## 1.1. LAPLASO TRANSFORMACIJA

Laplaso transformacija skirta spręsti tiesines diferencialines lygtis. Šis metodo privalumas, kad diferencialinės lygtys paverčiamos į algebrines ir joms spręsti galima taikyti algebrinių lygčių sprendimo metodus, o galutinį sprendimą gauti naudojant atvirkštinę Laplaso transformaciją [12].

Realaus kintamojo  $t$  kompleksinę funkciją  $f(t)$  vadiname pirmavaizdžiu, kai:

- funkcija  $f(t)$  intervale  $0 \leq t < \infty$  yra tolygi arba turi tiksliai pirmojo tipo trūkio taškus, kurių skaičius bet kuriame baigtiniame intervale yra baigtinis;
- $f(t) = 0$ , kai  $t < 0$ ;
- Didėjant  $t$ , funkcijos  $f(t)$  modulis didėja ne greičiau, kaip eksponentinė funkcija, t.y. egzistuoja tokie skaičiai  $M > 0$  ir  $\sigma > 0$ , su kuriais

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}, \text{ kai } t > 0.$$

Pirmavaizdžio  $f(t)$  vaizdu vadiname kompleksinio kintamojo  $p = \sigma + i\omega$  funkciją  $F(p)$ , apibrėžiamą netiesioginiu integralu:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (1.1)$$

(1.1) integralas vadinamas funkcijos  $f(t)$  Laplaso transformacija (kartais Laplaso integralu).

Veiksmas, kuriuo randamas pirmavaizdžio  $f(t)$  vaizdas  $F(p)$ , taip pat vadinamas Laplaso transformacija.

Svarbiausios Laplaso transformacijos teoremos [14]:

### 1. Tiesiškumas

Jeigu pirmavaizdžių  $f_1(t)$  ir  $f_2(t)$  vaizdai yra atitinkamai  $F_1(p)$  ir  $F_2(p)$ , t.y.  $f_1(t) \div F_1(p)$ ,  $f_2(t) \div F_2(p)$  ir  $C_1, C_2$  - kompleksiniai skaičiai, tai

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p)$$

Laplaso transformacijos tiesiškumo savybė gali būti apibendrinta, imant bet kurią baigtinį dėmenų skaičių: jeigu  $f_k(t) \div F_k(p)$ ,  $k = \overline{1, n}$  ir  $C_k \in C$ , tai

$$\sum_{k=1}^n C_k f_k(t) \div \sum_{k=1}^n C_k F_k(p).$$



## 2. Panašumas

Jeigu  $f(t) \div F(p)$  ir  $\lambda > 0$ , tai

$$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

## 3. Postūmis

Jeigu  $\alpha$  yra bet koks kompleksinis skaičius ir  $F(p) \div f(t)$ , tai

$$F(p - \alpha) \div e^{\alpha t} f(t).$$

## 4. Vėlavimas

Jeigu  $\tau > 0$  ir  $f(t) \div F(p)$ , tai

$$f(t - \tau) \div e^{-p\tau} F(p).$$

Pirmavaizdžio vėlavimas laiku  $\tau$  atitinka vaizdo dauginimą iš  $e^{-p\tau}$ .

## 5. Pirmavaizdžio diferencijavimo

Jeigu  $f(t)$  yra tolydi, dalimis diferencijuojama funkcija, kai  $t > 0$ , be to,  $f(t)$  ir  $f'(t)$  yra pirmavaizdžiai ir  $f(t) \div F(p)$ , tai

$$f'(t) \div pF(p) - f(0);$$

čia  $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$  - pradinė pirmavaizdžio reikšmė.

## 6. Vaizdo diferencijavimas).

Jeigu  $F(p) \div f(t)$ , tai  $F'(p) \div -tf(t)$ .

Vaizdo diferencijavimas atitinka pirmavaizdžio dauginimą iš  $(-t)$ .

## 7. Pradinė reikšmė

Jeigu  $f(t)$  ir  $f'(t)$  yra pirmavaizdžiai ir  $f(t) \div F(p)$ , tai

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(0).$$

## 8. Ribinė reikšmė

Jeigu  $f(t) \div F(p)$  ir  $f'(t)$  yra pirmavaizdis, be to, egzistuoja riba  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ , tai

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

## 9. Vaizdų sandauga

Jeigu  $F_1(p) \div f_1(t)$  ir  $F_2(p) \div f_2(t)$ , tai

$$F_1(p)F_2(p) \div \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau.$$

## 1.2. APIBENDRINTOSIOS FUNKCIJOS

Bet kurią tiesinį funkcionalą, apibrėžtą pagrindinių funkcijų erdvėje  $D(\Omega)$ , vadiname apibendrintąja funkcija. Apibendrintųjų funkcijų erdvę žymėsime  $D^*(\Omega)$ , arba trumpiau  $D^*$ . Simboliu  $\langle f, \varphi \rangle$  žymėsime funkcionalo  $f \in D^*(\Omega)$  reikšmę taške  $\varphi \in D(\Omega)$ .

1. Apibendrintoji funkcija  $f$  yra funkcionalas erdvėje  $D(\Omega)$ , t.y. kiekvienai funkcijai  $\varphi \in D(\Omega)$  priskiria skaičių  $\langle f, \varphi \rangle$  [16];

2. Apibendrintoji funkcijų  $f$  yra tiesinis funkcionalas erdvėje  $D(\Omega)$ , t.y. jeigu  $\varphi, \psi \in D(\Omega)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , tai

$$\langle f, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda\langle f, \varphi \rangle + \mu\langle f, \psi \rangle$$

3. Apibendrintoji funkcija  $f$  yra tolydus funkcionalas erdvėje  $D(\Omega)$ , t.y. jeigu  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ , kai  $k \rightarrow \infty$ , tai  $\langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ , kai  $k \rightarrow \infty$ .

Apibendrintųjų funkcijų  $f, g \in D^*(\Omega)$  tiesinį darinį apibrėžkime pagal formulę:

$$\langle \lambda f + \mu g, \varphi \rangle = \lambda\langle f, \varphi \rangle + \mu\langle g, \varphi \rangle$$

Tada apibendrintųjų funkcijų aibė  $D^*(\Omega)$  tampa tiesinė.

Sakysime, kad apibendrintų funkcijų seka  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  iš  $D^*(\Omega)$  konverguoja į apibendrintąją funkciją  $f \in D^*(\Omega)$ , jeigu  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\langle f_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Aibė  $D^*(\Omega)$  su taip apibrėžta topologija yra tiesinė erdvė. Šitas apibrėžimas sutampa su žinomu iš funkcinės analizės silpnuoju tiesinių funkcionalų konvergavimu. Todėl galime sakyti, kad erdvėje  $D^*(\Omega)$  yra apibrėžta silpnoji topologija. Tiesinę erdvę su taip apibrėžtu konvergavimu vadinsime apibendrintųjų funkcijų erdve  $D^*(\Omega)$ . Išskirsime dvi plačias apibendrintų funkcijų klases.

1. Reguliariosios apibendrintosios funkcijos. Tegu  $f$  yra lokaliai integruojama srityje  $\Omega$  funkcija. Integralas apibrėžia apibendrintą funkciją  $f \in D^*(\Omega)$

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in D(\Omega) \quad (1.2)$$

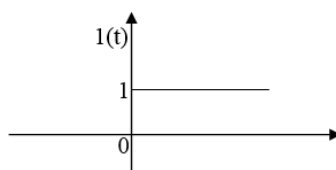
Taip apibrėžta apibendrinta funkcija yra vadinama reguliariąja apibendrintąja funkcija ir žymima ta pačia raide  $f$  kaip ir ją generuojanti funkciją.

2. Singuliariosios apibendrintosios funkcijos. Apibendrintąsias funkcijas  $f \in D^*(\Omega)$ , kurių negalima išreikšti (1.2) formule, vadinsime singuliariosiomis apibendrintomis funkcijomis.

Funkciją

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

vadiname Hevisaido vienetine funkcija



**1.1 pav. Hevisaido vienetinė funkcija**

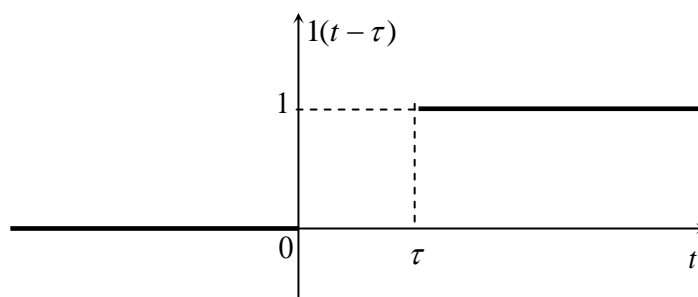
Kiekvieną pirmavaizdį, naudojant vienetinę funkciją, galima užrašyti taip:

$$f(t)1(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Funkciją

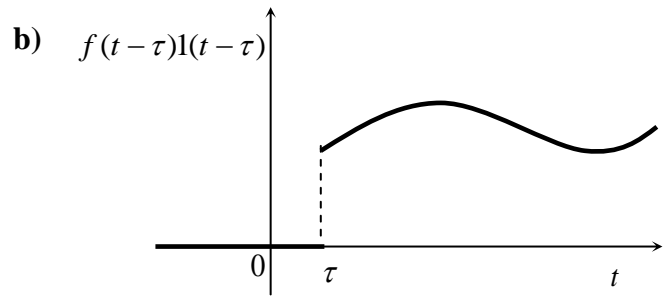
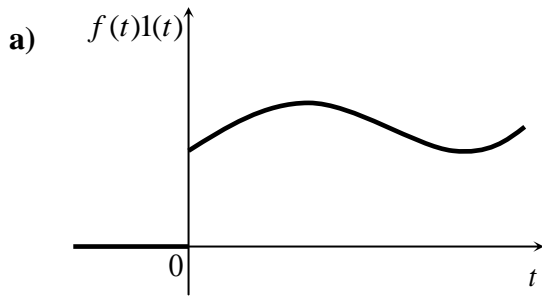
$$1(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau \end{cases}$$

vadiname vėluojančiąja vienetine funkcija (1.2 pav.).



**1.2 pav. Vėluojančiosios vienetinės funkcijos grafikas**

Funkciją  $f(t - \tau)1(t - \tau)$  vadiname vėluojančiąja funkcija. Vėluojančiosios funkcijos grafikas (1.3 pav. b) gaunamas iš funkcijos  $f(t)1(t)$  grafiko (1.3 pav. a), pastūmus jį į dešinę atstumu  $\tau$ .

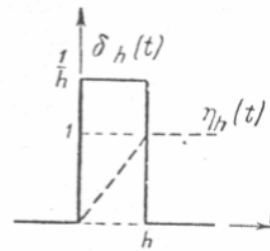


**1.3 pav. Funkcijos  $f(t)l(t)$  (a) ir vėluojančiosios funkcijos (b) grafikai**

Dirako delta funkcijos taikomos uždaviniuose, kuriuose susiduriame su dydžiais, apibūdinančiais momentinius postūmius. Nagrinėjame funkciją  $\delta_h(t)$ ,

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, t > h, \\ \frac{1}{h}, & 0 < t < h \end{cases}$$

kuri pavaizduota 1.4 pav.



**1.4 pav. Funkcijos  $\delta_h(t)$  grafikas**

Ši funkcija atkarpoje  $(0, h)$  turi pastovią reikšmę  $\frac{1}{h}$ , impulso plotas yra lygus vienetui, t.y.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t) dt = \int_0^h \frac{dt}{h} = 1.$$

Tarkim, kad  $h \rightarrow 0$ . Akivaizdu, kad funkcijų  $\delta_h(t)$  šeima diverguoja. Įveskime funkciją  $\delta(t)$ , kuri yra funkcijų  $\delta_h(t)$  šeimos riba:

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t).$$

Šią funkciją vadiname nulinės eilės impulsine funkcija.  $\delta(t)$  lygi nuliui visuose taškuose, išskyrus tašką  $t = 0$ , kuriame  $\delta(t) = \infty$ . Be to,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Fizikine prasme delta funkcija gali būti suprantama kaip vienetinio krūvio, esančio koordinatų pradžioje, tankis. Jei krūvio dydis  $m$ , tai jo tankis  $\rho(x) = m\delta(x)$ .

### 1.3. RUNGĖS – KUTO METODAS

Tobulindami Oilerio metodą, Rungė ir Kutas sudarė formulę, pagal kurią ieškomo sprendinio apytikslės reikšmės apskaičiuojamos žymiai tiksliau [17]. Pagal šį metodą žingsnio  $h$  atžvilgiu tikslusis sprendinys  $y = y(x)$  išreiškiamas Teiloro eilute. Tarkime, turime diferencialinę lygtį ir pradines sąlygas:  $x = x_0, y = y(x_0) = y_0$  ir tikslusis sprendinys  $y = y(x)$  gali būti išreikštas Teiloro eilute. Diferencialinės lygties sprendinio  $y = y(x)$  Rungės ir Kuto skaitmeninės aproksimacijos  $y_i$  apskaičiuojamos naudojant Teiloro formulę:

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2!} y_i'' + \frac{h^3}{3!} y_i''' + \frac{h^4}{4!} y_i'''' + \dots; \quad (1.3)$$

čia  $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1}$ . Ketvirtosios eilės Rungės ir Kuto metodas pagrįstas tuo, kad iš (1.3) lygybės paimami dėmenys iki trečiosios eilės išvestinės ir sudaromos formulės, kuriose nereikia apskaičiuoti funkcijos  $f$  1-osios, 2-osios ir 3-iosios eilių išvestinių. Įrodyta, kad apytiksles sprendinio reikšmes galima apskaičiuoti taip:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(f_i + 2m_i + 2n_i + p_i)h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad (1.4)$$

čia dydžiai  $f, f_i, m_i, n_i, p_i$  apskaičiuojami pagal lygybes:

$$f_i = f(x_i, y_i), \quad m_i = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{f_i h}{2}), \quad n_i = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{m_i h}{2}), \quad p_i = f(x_i + h, y_i + n_i h).$$

### 1.4. SKAITINIS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SU VĖLUOJANČIU ARGUMENTU SPRENDIMO METODAS, PAREMTAS DDE23 FUNKCIJOS APRAŠYTOS MATLAB PAKETE

Autoriai L.F. Shampine ir S.Thompson sukūrė DDE23 programą, kuri sprendžia diferencialines lygtis su vėluojančiu argumentu Matlab aplinkoje. Šios programos tikslas, kiek įmanoma greičiau ir efektyviau išspręsti aukštesnės eilės diferencialines lygtis su vėlavimais, kurias vėliau vadinsime DDE [15].

Aprašome sistemoje lygtis tokioje formoje:

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x - \tau_1), y(x - \tau_2), \dots, y(x - \tau_k)). \quad (1.5)$$

Su vėlavimu  $\tau_j$ , kad  $\tau = \min(\tau_1, \dots, \tau_k) > 0$ . Lygtis turi atitikti  $a \leq x \leq b$ , kuri reikalauja, kad pradinė sąlyga  $y(x) = S(x)$  būtų pateikiama  $x \leq a$ .

Sprendžiant DDE lygtis yra panaudojamas paprastų diferencialinių lygčių sprendimas (vadinsime ODE lygtimis). Autorių dėmesys yra sutelkiamas į paprastųjų diferencialinių lygčių sprendimą Rungės-Kuto metodu, nes yra tam tikrų ypatingų savybių, kurias jie panaudoja spręsdami diferencialines lygtis su vėlavimais. Todėl yra pateikiama, kaip tripakopis Rungės-Kuto metodas gali būti išplėstas ir panaudotas sprendžiant DDE lygtis. Šis išplėtimas yra labai supaprastintas, kai žingsnio dydis  $H$  mažesnis už  $\tau_j$ , tada lieka formulės, kurių nereikia sudėtingai skaičiuoti.

Tripakopis Rungės-Kuto metodas aprašomas trimis formulėmis:

Tarkime, kad turime aproksimaciją  $y_n$  prie  $y(x)$  ir  $x_n$ , reikia apskaičiuoti  $x_{n+1} = x_n + h_n$ . Etapai  $f_{ni} = f(x_{ni} + y_{ni})$  su  $\forall i = 1, \dots, s$  yra apibrėžiami  $x_{n+1} = x_n + c_i h_n$ :

$$y_{ni} = y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f_{nj}. \quad (1.6)$$

Aproksimacija remiasi integravimu:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i f_{ni}. \quad (1.7)$$

Apibrėžiame funkciją:

$$\phi(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^s b_i f_{ni}. \quad (1.8)$$

Sprendinys tenkina lygtį su liekana, kurią vadinsime aproksimacijos paklaida  $lte_n$ , tai yra  $O(h_n^{p+1})$ :

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + h_n \Phi(x_n, y(x_n)) + lte_n, \\ y_{n+1}^* &= y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i^* f_{ni} = y_n + h_n \Phi^*(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Antroji formulė skaičiuoja žingsnio dydį. Trečioji formulė:

$$y_{n+\sigma} = y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i(\sigma) f_{ni}. \quad (1.10)$$

Koeficientai  $b_i$  yra  $\sigma$  polinomiali, tai žymi polinomų aproksimaciją  $y(x_n + \sigma h_n)$ , kai  $0 \leq \sigma \leq 1$ .

Yra manoma, kad remiantis šia formule skaičiuojamos reikšmės  $y_n$ , kai  $\sigma = 0$ , o  $y_{n+1}$ , kai  $\sigma = 1$ .

Trečioji formulė naudojama plėsti pirmąją formulę. Lygtimi siekiama integruoti ypatingu atveju, kai  $\sigma = 1$

$$y_{n+\sigma} = y_n + h_n \Phi(x_n, y_n, \sigma). \quad (1.11)$$

Manoma, kad  $f$  ir  $y(x)$  yra lygūs, kur  $C_1$  yra konstanta taip, kad  $\|lte_n\| \leq C_1 h_n^{p+1}, 0 \leq \sigma \leq 1$ .

Norėdami naudoti Rungės-Kuto metodą sprendžiant diferencialines lygtis su vėlavimais, reikalinga formulė naudojanti pradinę sąlygą  $y(x_{ni} - \tau_j)$ :

$$f_{ni} = f(x_{ni}, y_{ni}, y(x_{ni} - \tau_1), \dots, y(x_{ni} - \tau_k)). \quad (1.12)$$

*Teorema:*

Tarkime išplėstas triapakopis Rungės-Kuto metodas naudojamas spręsti diferencialines lygtis su vėlavimais. Sakome, kad didžiausias žingsnio dydis tenkina lygtis:

$$HL \max_i \left( \sum_j^{i-1} |a_{ij}| \right) \leq 1, \\ H\Gamma = HL \sum_{i=1}^s \max(|b_i(\sigma)|) \leq \frac{1}{2}. \quad (1.13)$$

Jei  $f$  tenkina Lipšico sąlygą priklausomiems kintamiesiems ir yra lygi visiems kintamiesiems, tada egzistuoja konstanta  $C$  tokia, kad  $a \leq x \leq b$

$$\|y(x) - S(x)\| \leq CH^p. \quad (1.14)$$

Ši teorema parodo, kaip veikia mūsų metodas.

*1 lema:*

Egzistuoja konstanta  $\mathfrak{I}$  tokia, kad  $0 \leq \sigma \leq 1$

$$\left\| \Phi(x_n, \tilde{y}_n, \sigma; g(x)) - \Phi(x_n, y_n, \sigma; g(x)) \right\| \leq \mathfrak{I} \left\| \tilde{y}_n - y_n \right\|. \quad (1.15)$$

➤ Žingsnio dydyje  $h_n$  iš  $(x_n, \tilde{y}_n)$ , tarpinis dydis  $\tilde{y}_{ni}$  apibrėžiamas:

$$\tilde{y}_{ni} = \tilde{y}_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f \left( x_{nj}, y_{nj}, g(x_{nj} - \tau) \right). \quad (1.16)$$

Naudojant Lipšico sąlygą, paprasta įrodyti, kad kiekvienai  $i$  yra konstanta  $L_i$  tokia, kad

$$\left\| \tilde{y}_{ni} - y_{ni} \right\| \leq \left( 1 + HL \sum_{j=1}^{i-1} L_j |a_{ij}| \right) \left\| \tilde{y}_n - y_n \right\| = L_i \left\| \tilde{y}_n - y_n \right\|. \quad (1.17)$$

Šiuo rezultatu parodoma, kad  $\mathfrak{S} = L \sum_{i=1}^s L_i \max(|b_i(\sigma)|)$ .

2 lema:

Tegul  $\Delta$  riba  $\|G(x) - g(x)\|$  visiems  $x \leq x_{n+1}$ . Jei didžiausias žingsnio dydis  $H$  yra pakankamai mažas, tai  $HL \max_i \left( \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \right) \leq 1$ , kur konstanta  $\Gamma$

$$\|\Phi(x_n, y_n, \sigma; G(x)) - \Phi(x_n, y_n, \sigma; g(x))\| \leq \Gamma \Delta. \quad (1.18)$$

➤ Tegul tarpinis dydis tarp dviejų formulių bus

$$r_{ni} = y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(x_{nj}, r_{nj}, G(x_{nj} - \tau)),$$

$$s_{ni} = y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(x_{nj}, s_{nj}, G(x_{nj} - \tau)).$$

Naudojant Lipšico sąlygą  $f$ , nelygybė  $HL \max_i \left( \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \right) \leq 1, \forall i$

$$\|r_{ni} - s_{ni}\| \leq h_n \sum_{i=1}^{i-1} |a_{ij}| L \Delta \leq \Delta. \quad (1.19)$$

Jei žingsnio dydis  $H$  yra pakankamai mažas, tarpiniai dydžiai  $y_{ni}$  yra aprašyti formulėmis

$$y_{ni} = y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(x_{nj}, y_{nj}, S(x_{nj} - \tau)). \quad (1.20)$$

Bet jei  $h_n > \tau$ , galime turėti keletą  $x_{nj} - \tau_j > x_n$  taip, kad  $S(x)$  būtų vertinamas pagal dabartinį žingsnio ilgį. Naudojame lemą apie maksimalų žingsnio dydį, kuri užtikrina paprastos iteracijos konvergenciją. Tegul  $\delta_m$  yra  $\|S^{(m+1)}(x) - S^{(m)}(x)\|$  maksimumas. (1.18) Nelygybė išreiškiama  $\delta_m \leq h_n \Gamma \delta^{(m-1)} \leq H \Gamma \delta^{(m-1)}$ .

Įrodome, kad konvergencija  $H \rightarrow 0$ . Atsiranda aproksimacijos paklaida, kurią apibrėžiame

$$y(x_n + \sigma h_n) = y(x_n) + h_n \Phi(x_n, y(x_n), \sigma; y(x)) + l e_n(\sigma). \quad (1.21)$$

Jeigu įvedame  $\omega_{n+\sigma} = y_n + h_n \Phi(x_n, y_n, \sigma; y(x))$ , tada nelygybė

$$\left\| \Phi(x_n, \tilde{y}_n, \sigma; g(x)) - \Phi(x_n, y_n, \sigma; g(x)) \right\| \leq \mathfrak{S} \left\| \tilde{y}_n - y_n \right\|. \quad (1.22)$$

ir mūsų prielaida apie aproksimacijos paklaidą reiškia, kad  $0 \leq \sigma \leq 1$ .

Skaitinis sprendimas:



$$y_{n+o} = y_n + h_n \Phi(x_n, y_n, \sigma; S(x)). \quad (1.23)$$

Jei sakome, kad  $\Delta$  yra  $f\|y(x) - S(x)\|, x \leq x_{n+1}$  maksimumas, tai (1.16) nelygybė teigia, kad

$$\|y_{n+o} - \omega_{n+\sigma}\| = h_n \|\Phi(x_n, y_n, \sigma; S(x)) - \Phi(x_n, y_n, \sigma; y(x))\| \leq h_n \Gamma \Delta. \quad (1.24)$$

Galime daryti išvadą, kad

$$\Delta \leq (1 + h_n \mathfrak{S}) E_n + C_1 h_n^{p+1} + h_n \Gamma \Delta. \quad (1.25)$$

Su prielaida, kad  $H$  tenkina (1.11) (nelygybę) išplaukia

$$\Delta \leq \frac{1 + h_n \mathfrak{S}}{1 - h_n \Gamma} E_n + \frac{C_1}{1 - h_n \Gamma} h_n^{p+1} \leq (1 + 2(\mathfrak{S} + \Gamma) h_n) E_n + 2C_1 h_n^{p+1}. \quad (1.26)$$

Jei leidžiame, kad

$$C_2 = 2(\mathfrak{S} + \Gamma), C_3 = 2C_1.$$

Iš to seka, kad  $E_{n+1} = (1 + h_n C_2) E_n + C_3 h_n^{p+1}$  ir būtinai tenkina  $\|y(x) - S(x)\|$  su visais  $x \leq x_n$ .

## 1.5. PROGRAMINĖ REALIZACIJA

Šio darbo metu naudota programinė įranga - Matlab. Matlab –yra daugiaplatformė Mathworks programinė įranga, skirta įvairių mokslo šakų problemoms spręsti, ypač matematinių, techninių ir ekonominių uždavinių sprendimui. Matlab terpėje galima dirbti dviem režimais:

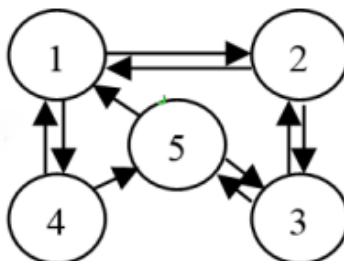
- Tiesiogiai darbiname lange arba dar vadinamame kalkuliatoriuje. Komandos įvedamos atskirai.
- M-files kūrimo režimu. M-files saugomos vartotojo sukurtos ir vidinės Matlab funkcijos. Skirtingai nuo darbinio lango M-files turi galimybę programą redaguoti, komentuoti, taisyti klaidas, daryti pakeitimus ir išsaugoti kietame diske. M-files vykdomi tik jį sukompilavus arba padarius tiesioginį kreipimąšį iš darbinio lango arba kitos programos.

Matlab paketu skaičiuojamos pereinamosios funkcijos, kai vėlavimai vienodi, ribinės reikšmės ir jų grafikai, bei generatorių virpesių fazių skirtumai, jų ribinės reikšmės ir grafikai. Palyginome fazių skirtumus gautas nuoseklaus integravimo metodu su sprendiniais gautais taikant pakete aprašytą „dde23“ metodą.

## 2. TIRIAMOJI DALIS

### 2.1. SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS MATEMATINIS MODELIS

Nagrinėjame tarpusavio sinchronizacijos sistemą, sudarytą iš penkių, tarpusavyje sujungtų generatorių, kurie schemoje (2.1 pav.) vaizduojami skrituliukais, o ryšio linijos, kuriomis yra perduodami sinchronizacijos signalai, – orientuotomis tiesės atkarpomis.



2.1 pav. Tiriamos tarpusavio sinchronizacijos schema

Remdamiesi 2.1 pav. galime parašyti kiekvieno generatoriaus valdymo lygtį,  $i$ -tojo generatoriaus valdymo signalas  $\Delta f_i(t)$  proporcingas generatorių virpesių fazių skirtumams fazinių detektorių  $FD_{ij}$ ,  $j = \overline{1, m}$  įėjimuose. Nagrinėsime atvejį, kai visose ryšio linijose vėlavimai yra vienodi.

$$f_i(t) = f_{0i} + \Delta f_i(t), i = \overline{1, 5} \quad (2.1)$$

čia

$$\Delta f_1(t) = \frac{\kappa}{2} [(\varphi_2(t - \tau) - \varphi_1(t)) + (\varphi_4(t - \tau) - \varphi_1(t))],$$

$$\Delta f_2(t) = \frac{\kappa}{2} [(\varphi_1(t - \tau) - \varphi_2(t)) + (\varphi_3(t - \tau) - \varphi_2(t))],$$

$$\Delta f_3(t) = \frac{\kappa}{2} [(\varphi_2(t - \tau) - \varphi_3(t)) - (\varphi_5(t - \tau) - \varphi_3(t))],$$

$$\Delta f_4(t) = \frac{\kappa}{2} [(\varphi_1(t - \tau) - \varphi_4(t)) - (\varphi_5(t - \tau) - \varphi_4(t))],$$

$$\Delta f_5(t) = \frac{\kappa}{2} [(\varphi_1(t - \tau) - \varphi_5(t)) + (\varphi_3(t - \tau) - \varphi_5(t))],$$

čia  $\tau$  - perduodamo signalo vėlavimas ryšio linijoje,  $\kappa$  - stiprinimo ( $\kappa > 1$ ) ar slopinimo ( $\kappa < 1$ ) koeficientas.

Įvertinę  $i$ -tojo generatoriaus virpesio fazės  $\varphi_i(t)$  ryšį su to generatoriaus dažniu  $\varphi'_i(t) = f_i(t)$  ir panaudoję (2.1) lygtį, gauname diferencialinių lygčių sistemą su vėluojančiu argumentu – nagrinėjamos sistemos matematinį modelį:

$$\varphi'_i(t) = f_{0i} + \Delta f_i(t), i = \overline{1,5}. \quad (2.2)$$

Diferencialinių lygčių sprendinio ieškojimui naudojame apibendrinto diferencijavimo operatorių D. (2.2) abi lygties puses padauginame iš Hevisaido vienetinės funkcijos:

$$\varphi'_i(t) \cdot 1(t) = f_{0i} \cdot 1(t) + \Delta \varphi_i(t) \cdot 1(t), i = \overline{1,5}. \quad (2.3)$$

Apibendrintoji išvestinė:

$$Dx_i(t) = D(\varphi_i(t) \cdot 1(t)) = \varphi'_i(t) \cdot 1(t) + \varphi_i(0) \cdot \delta(0), i = \overline{1,5}. \quad (2.4)$$

$\delta(t)$  - Dirako delta funkcija,  $1(t)$  - Hevisaido funkcija

Panaudoję (2.4), perrašome (2.3) išraišką:

$$Dx_i(t) = f_{0i} \cdot 1(t) + \Delta \varphi_i(t) \cdot 1(t) + \varphi_i(0) \cdot \delta(t), i = \overline{1,5}. \quad (2.5)$$

(2.5) diferencialinių lygčių sistemos pradinėmis sąlygomis laikysime šias:

- 1) kai  $t \leq 0$ ,  $\varphi'_i(t) = f_{0i}$ ,
- 2) kai  $t = 0$ ,  $\varphi_i(0) = \varphi_{0i}$ ;  $i = \overline{1,5}$ . (2.6)

Pirmoji pradinė sąlyga teigia, jog, kai  $t \leq 0$ , visi generatoriai dirba savaisiais dažniais, antroji – laiko momentu  $t = 0$  visiems generatoriams įjungiamas valdymas.

(2.6) diferencialinių lygčių sistemoje įvertinę pradines sąlygas, gauname sinchronizacijos sistemos matematinį modelį:

$$\begin{cases} Dx_1(t) = \frac{\kappa}{2} x_2(t - \tau) + \frac{\kappa}{2} x_4(t - \tau) - \kappa x_1(t) + z_1(t), \\ Dx_2(t) = \frac{\kappa}{2} x_1(t - \tau) + \frac{\kappa}{2} x_3(t - \tau) - \kappa x_2(t) + z_2(t), \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{2} x_2(t - \tau) + \frac{\kappa}{2} x_5(t - \tau) - \kappa x_3(t) + z_3(t), \\ Dx_4(t) = \frac{\kappa}{2} x_1(t - \tau) + \frac{\kappa}{2} x_5(t - \tau) - \kappa x_4(t) + z_4(t), \\ Dx_5(t) = \frac{\kappa}{2} x_1(t - \tau) + \frac{\kappa}{2} x_3(t - \tau) - \kappa x_5(t) + z_5(t). \end{cases} \quad (2.7)$$

čia  $z_i(t)$ ,  $i = \overline{1,5}$  - laisvieji nariai, priklausantys nuo pradinių sąlygų:

$$\begin{aligned}
z_1(t) &= f_{01} \cdot 1(t) + \varphi_{01} \cdot 1(t) + \frac{\kappa}{2} \cdot \varphi_2(t-\tau)[1(t)-1(t-\tau)] + \frac{\kappa}{2} \cdot \varphi_4(t-\tau)[1(t)-1(t-\tau)], \\
z_2(t) &= f_{02} \cdot 1(t) + \varphi_{02} \cdot 1(t) + \frac{\kappa}{2} \cdot \varphi_1(t-\tau)[1(t)-1(t-\tau)] + \frac{\kappa}{2} \cdot \varphi_3(t-\tau)[1(t)-1(t-\tau)], \\
z_3(t) &= f_{03} \cdot 1(t) + \varphi_{03} \cdot 1(t) + \frac{\kappa}{2} \cdot \varphi_2(t-\tau)[1(t)-1(t-\tau)] + \frac{\kappa}{2} \cdot \varphi_5(t-\tau)[1(t)-1(t-\tau)], \\
z_4(t) &= f_{04} \cdot 1(t) + \varphi_{04} \cdot 1(t) + \frac{\kappa}{2} \cdot \varphi_1(t-\tau)[1(t)-1(t-\tau)] + \frac{\kappa}{2} \cdot \varphi_3(t-\tau)[1(t)-1(t-\tau)], \\
z_5(t) &= f_{05} \cdot 1(t) + \varphi_{05} \cdot 1(t) + \frac{\kappa}{2} \cdot \varphi_1(t-\tau)[1(t)-1(t-\tau)] + \frac{\kappa}{2} \cdot \varphi_3(t-\tau)[1(t)-1(t-\tau)]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

## 2.2. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES, APRAŠANČIOS SINCHRONIZACIJOS SISTEMA, SPRENDIMAS

Nagrinėjamos sistemos matematinis modelis – matricinė tiesinė diferencialinė lygtis su vėluojančiu argumentu.

$$Dx(t) = B_1 x(t) + B_2 x(t-\tau) + z(t); \tag{2.9}$$

čia  $D$  - apibendrinto diferencijavimo operatorius (taikomas apibendrintoms funkcijoms);

$B_1, B_2$  – skaitinės matricos,  $B_1 = -\kappa E$ ,  $\kappa$  - koeficientas,  $E$  – penktos eilės vienetinė matrica;

$$B_2 = \frac{\kappa}{2} B, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

(matrica  $B$  nusako sistemos vidinių ryšių struktūrą);

$$\tau - \text{pastovus vėlavimas; } x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} - \text{ieškoma vektorinė funkcija.}$$

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} - \text{laisvasis narys (vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių sąlygų)}.$$

(2.9) diferencialinę lygtį spręsimė žingsnių metodu. Intervalą  $0 \leq t \leq +\infty$  dalijame į vienodo ilgio  $\tau$  intervalus. Kiekviename intervale  $\kappa\tau \leq t < (k+1)\tau, k = 0,1,2,\dots$  (2.9) diferencialinę lygtį sprendžiame atskirai, kaip paprastą matricinę diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento.

Sprendinys, gautas  $k$ -tajame intervale, yra pradinė sąlyga (t.y. pradinė funkcija) sprendžiant lygtį  $(k+1)$ -jame intervale  $k = 0,1,2,\dots$ . Ieškodami sprendinio kiekviename intervale, naudosime Laplaso transformaciją. (2.9) matricinės diferencialinės lygties sprendinį  $x(t)$   $k$ -tajame daliniame intervale pažymėkime simboliu  $x_k(t)$ :

$$x(t) = x_k(t), \kappa\tau \leq t < (k+1)\tau, k = -1,0,1,2,\dots \quad (2.11)$$

Pradžioje sprendžiame (2.9) diferencialinę lygtį intervale  $[0, \tau)$ :

$$[0, \tau): Dx(t) = B_1x(t) + B_2x(t - \tau) + z(t).$$

Įvertinę, kad intervale  $[0, \tau)$  sprendinys  $x(t)$  pažymėtas  $x_0(t)$ , o intervale  $[-\tau, 0)$ : pažymėtas  $x_{-1}(t)$ , (2.9) diferencialinę lygtį perrašome taip:

$$Dx_0(t) = B_1x_0(t) + B_2x_{-1}(t - \tau) + z(t). \quad (2.12)$$

Kadangi

$$x_{-1}(t) = 0, \quad -\tau \leq t < 0,$$

$$x_{-1}(t - \tau) = 0 \quad 0 \leq t < \tau; (-\tau \leq t - \tau < 0),$$

tai

$$Dx_0(t) = B_1x_0(t) + z(t). \quad (2.13)$$

Šią lygtį sprendžiame operaciniu metodu (naudojant Laplaso transformaciją):

$$pX_0(p) = B_1x_0(p) + Z(p),$$

$$pX_0(p) - B_1x_0(p) = Z(p),$$

$$(pE - B_1)X_0(p) = Z(p),$$

$$X_0(p) = (pE - B_1)^{-1}Z(p),$$

$$(pE - B_1) = pE + \kappa E = (p + \kappa)E,$$

$$X_0(p) = \frac{Z(p)}{p + \kappa} = L\{z(t)\}L\{e^{-\kappa t}\} = \left[ \int_0^t z(\tau)e^{-\kappa(t-\tau)} d\tau \right] 1(t) = x_0(t). \quad (2.14)$$

Gautas sprendinys atitinka sąlygas:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x(t) \quad 0 \leq t < \tau, \\ x_0(t) &= x_1(t), \quad -\tau \leq t < 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Toliau spęsimė (2.9) lygtį intervale  $[\tau, 2\tau)$ :

$$[\tau, 2\tau) : Dx(t) = B_1x(t) + B_2x(t - \tau) + z(t).$$

Įvertinus (2.11) pažymėjimus, (2.9) diferencialinę lygtį užrašome taip:

$$Dx_1(t) = B_1x_1(t) + B_2x_0(t - \tau) + z(t). \quad (2.16)$$

Kadangi  $x_0(t)$ , ( $t < \tau$ ) yra žinoma funkcija, parašome jai atitinkančią operatorinę lygtį ir tos lygties operatorinį sprendinį:

$$\begin{aligned} pX_1(p) &= B_1X_1(p) + B_2X_0(p)e^{-p\tau} + Z(p), \\ X_1(p) &= \frac{B_2X_0(p)}{p + \kappa}e^{-p\tau} + \frac{Z(p)}{p + \kappa}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.17) išraišką perrašome įvertinę, kad

$$X_1(p) = \frac{B_2X_0(p)}{p + \kappa}e^{-p\tau} + X_0(p).$$

Panaudoję Laplaso transformacijos simbolį  $L$ , turime:

$$X_1(p) = B_2L\{x_0(t)\}L\{e^{-\kappa t}\}e^{-p\tau} + X_0(p) = B_2 \left\{ \int_0^t x_0(\theta)e^{-\kappa(t-\theta)} d\theta \right\} e^{-p\tau} + X_0(p).$$

Taikydami vaizdų sandaugos teoremą, gauname:

$$X_1(p) = B_2 \left[ \int_0^{t-\tau} x_0(\theta)e^{-\kappa(t-\theta-\tau)} d\theta \right] 1(t-\tau) + x_0(t) = x_1(t) = \begin{cases} x_0(t), t < \tau, \\ \neq x_0(t), t \geq \tau. \end{cases} \quad (2.18)$$

Gautas sprendinys atitinka sąlygas:

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), \tau \leq t < 2\tau, \\ \neq x(t), t \geq 2\tau, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), t < 2\tau, \\ \neq x(t), t \geq 2\tau. \end{cases} \quad (2.21)$$

Toliau (2.9) diferencialinę lygtį sprendžiame intervale  $[2\tau, 3\tau)$ :

$$[2\tau, 3\tau) : Dx(t) = B_1x(t) + B_2x(t - \tau) + z(t).$$

Įvertinus (2.11) pažymėjimus šią lygtį perrašome taip:

$$Dx_2(t) = B_1x_2(t) + B_2x_1(t - \tau) + z(t). \quad (2.22)$$

Kadangi  $x_1(t)$  [ $t < \tau$ ] yra žinoma funkcija, užrašome jai atitinkančią operatorinę lygtį ir operatorinį sprendinį:

$$\begin{aligned} pX_2(p) &= B_1X_2(p) + B_2X_1(p)e^{-p\tau} + Z(p), \\ X_2(p) &= \frac{B_2X_1(p)}{p + \kappa}e^{-p\tau} + \frac{Z(p)}{p + \kappa}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Įrašę (2.17) išraišką į (2.18), gauname:

$$\begin{aligned} X_2(p) &= \frac{B_2}{p + \kappa} \left[ \frac{B_2X_0(p)}{p + \kappa}e^{-p\tau} + X_0(p) \right] e^{-p\tau} + \frac{Z(p)}{p + \kappa} = B_2^2 \frac{X_0(p)}{(p + \kappa)^2}e^{-2p\tau} + \frac{B_2X_0(p)}{p + \kappa}e^{-p\tau} + \frac{Z(p)}{p + \kappa} \\ X_2(p) &= B_2^2 \frac{X_0(p)}{(p + \kappa)^2}e^{-2p\tau} + X_1(p). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Pasinaudoję Laplaso transformacijos savybėmis, randame:

$$X_2(p) = B_2^2 L\{x_0(t)\} \cdot L\{te^{-\kappa\tau}\} e^{-2p\tau} + X_1(p) = B_2^2 L\left\{ \int_0^t x_0(\theta)(t - \theta)e^{-\kappa(t - \theta)} d\theta \right\} e^{-2p\tau} + X_1(p).$$

$$\text{Tada } X_2(p) = B_2^2 \left[ \int_0^{t-\tau} x_0(\theta)(t - \theta - 2\tau)e^{-\kappa(t - \theta - 2\tau)} d\theta \right] 1(t - 2\tau) + x_1(t) = x_2(t) = \begin{cases} x_1(t), t < 2\tau, \\ \neq x_1(t), t \geq 2\tau. \end{cases} \quad (2.25)$$

Pastebėsime, kad gautas sprendinys atitinka sąlygas

$$x_2(t) = \begin{cases} x(t), 2\tau \leq t < 3\tau, \\ \neq x(t), t \geq 3\tau, \end{cases} \quad (2.26)$$

$$x_2(t) = \begin{cases} x(t), t < 3\tau, \\ \neq x(t), t \geq 3\tau. \end{cases} \quad (2.27)$$

Toliau tęsdami tą pačią procedūrą  $k$  kartų, gautume tokius rezultatus:

$$x_k(t) = \begin{cases} x_{k-1}(t), t < k\tau, \\ \neq x_{k-1}(t), t \geq k\tau, \end{cases} \quad (2.28)$$

$$x_k(t) = \begin{cases} x(t), k\tau \leq t < (k+1)\tau, \\ \neq x(t), t \geq (k+1)\tau, \end{cases} \quad (2.29)$$

$$x_k(t) = \begin{cases} x(t), t < (k+1)\tau, \\ \neq x(t), t \geq (k+1)\tau. \end{cases} \quad (2.30)$$

Rasime sprendinio  $x(t)$  analizinę išraišką.

Pažymėkime:

$$\varepsilon_0(t) = x_0(t) - x_1(t) = x_0(t),$$

$$\varepsilon_1(t) = x_1(t) - x_0(t),$$

$$\varepsilon_2(t) = x_2(t) - x_1(t),$$

-----

$$\varepsilon_k(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t), \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \Theta_L(t) &= \sum_{k=0}^L \varepsilon_k(t) = \varepsilon_0(t) + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) + \dots + \varepsilon_L(t) = \\ &= x_0(t) + [x_1(t) - x_0(t)] + [x_2(t) - x_1(t)] + \dots + [x_L(t) - x_{L-1}(t)] = \\ &= x_L(t) = \begin{cases} x(t), & t < (L+1)\tau, \\ \neq x(t), & t \geq (L+1)\tau, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.32)$$

t.y.

$$\Theta_L(t) = \begin{cases} x(t), & t < (L+1)\tau, \\ \neq x(t), & t \geq (L+1)\tau. \end{cases} \quad (2.33)$$

Panaudoję šiuos pažymėjimus, sprendinį  $x(t)$  užrašome taip:

$$x(t) = \Theta_L(t) = \sum_{k=0}^L \varepsilon_k(t), \quad (2.34)$$

Pritaikius šios lygties dešiniajai pusei Laplaso transformaciją, gauname:

$$x(t) = \sum_{k=0}^L \int_0^{\infty} \varepsilon_k(x) e^{-px} dx, \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.35)$$

Rasime funkcijos  $\varepsilon_k(t)$  Laplaso transformaciją:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(x) e^{-px} dx. \quad (2.36)$$

Tuo tikslu sudarome diferencialinę lygtį vektoriaus  $\varepsilon_k(t)$   $k = 0, 1, 2, \dots$  atžvilgiu. Kadangi

$$\varepsilon_k(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t)$$

ir

$$Dx_k(t) = B_1 x_k(t) + B_2 x_{k-1}(t - \tau) + z(t),$$

$$Dx_{k-1}(t) = B_1 x_{k-1}(t) + B_2 x_{k-2}(t - \tau) + z(t),$$

tai atėmę paskutinę lygtį iš prieš paskutinės, gausime:

$$D\varepsilon_k(t) = B_1 \varepsilon_k(t) + B_2 \varepsilon_{k-1}(t - \tau). \quad (2.37)$$



Ieškome operatorinės lygties, atitinkančios (2.37) diferencialinę lygtį. Tuo tikslu, abiem lygties pusėms taikome Laplaso transformaciją (prieš tai pirmąjį dešinės pusės narį perkėlę į kairę pusę):

$$\int_0^{\infty} [D\varepsilon_k(t) - B\varepsilon_k(t)]e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} B_2\varepsilon_{k-1}(t-\tau)e^{-pt} dt.$$

Tvarkydami toliau, gauname:

$$pL\{\varepsilon_k(t)\} - B_1L\{\varepsilon_k(t)\} = B_2L\int_0^t \varepsilon_{k-1}(t-\tau)e^{-p\tau} d\tau. \quad (2.38)$$

Pertvarkome dešinės pusės integralą:

$$\int_0^{\tau} \varepsilon_{k-1}(t-\tau)e^{-pt} dt = \begin{cases} t-\tau = \theta, dt = d\theta \\ t=0, \theta = -\tau \\ t = \infty, \theta = \infty \end{cases} = \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\theta) e^{-p(\tau+\theta)} d\theta = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\theta) e^{-p\theta} d\theta = \quad (2.39)$$

$$= e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\theta} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt.$$

Pasinaudodami (2.36) ir (2.39) išraiška, (2.38) perrašome taip:

$$(pE - B_1) \cdot \int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) \cdot e^{-pt} dt = B_2 \cdot e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Pažymėkime:  $A = (pE - B_1) = (p + \kappa)E$ ,

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) \cdot e^{-pt} dt = A^{-1} B_2 e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt. \quad (2.40)$$

Įvertiname funkcijos  $\varepsilon_k(t)$  savybes:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(t) &= 0, t < k\tau, \\ \varepsilon_{k-1}(t) &= 0, t < (k-1)\tau. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Pažymėję:

$$M = A^{-1} B_2 e^{-p\tau},$$

gauname rekurentinę formulę:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = M \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt. \quad (2.42)$$

Įvertinus funkcijos  $\varepsilon_k(t)$  savybes (žr. 2.41), galime užrašyti:  $\varepsilon_{k-1}(t) = 0$  su visais  $t < 0$  ir  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Žinome, kad  $\varepsilon_0(t) = x_0(t)$ . Taikant šiai lygybei Laplaso transformaciją, gauname:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_0(t) e^{-pt} dt = X_0(p).$$

Skirtingiems  $k = 0, 1, 2, \dots$  iš (2.42) randame:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_1(t) e^{-pt} dt = M \int_0^{\infty} \varepsilon_0(t) e^{-pt} dt = M X_0(p),$$

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_2(t) e^{-pt} dt = M \int_0^{\infty} \varepsilon_1(t) e^{-pt} dt = M^2 X_0(p),$$

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = M \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt = M^k X_0(p), k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.43)$$

Iš (2.35), įvertinę (2.43), randame:

$$x(t) = \sum_{k=0}^L M^k X_0(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau$$

arba, įvertinę pažymėjimą  $M = A^{-1} B_2 e^{-p\tau}$ , turėsime:

$$x(t) = \sum_{k=0}^L (A^{-1} B_2 e^{-p\tau})^k X_0(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau.$$

Kadangi

$$X_0(p) = A^{-1} Z(p),$$

$$A^{-1} = \frac{1}{p + \kappa} E,$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^L \left( \frac{\kappa}{4} \right)^k \cdot \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} \cdot B^k \cdot e^{-pk\tau} \cdot Z(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.44)$$

Remdamiesi gautu sprendiniu, tirsime pereinamuosius procesus, kai vėlavimai visose ryšio linijose yra vienodi.

## 2.3. MATRICOS K-TOJO LAIPSNIO IR MATRICOS, PAKELTOS SVEIKUOJU LAIPSNIU, ELEMENTŲ RADIMAS

$$\text{Matricos } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ nusakančios vidinę ryšių struktūrą, } k\text{-tąjį laipsnį } k \in N$$

ieškosime remdamiesi lygybe  $B^k = TJ^kT^{-1}$ ;

čia  $J$  - matricos Žordano forma,  $T$  - transformuojančioji matrica. Abi šias matricas rasime žinodami matricos  $B$  tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius.

Užrašome matricos  $B$  charakteristinę lygtį:

$$|B - \lambda E| = 0. \tag{2.45}$$

Šios lygties šaknys yra matricos  $B$  tikrinės reikšmės. (2.45) lygtį užrašome taip:

$$\Delta = |B - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{2.46}$$

$$\Delta = A_{32} + A_{33} + A_{35} = -\lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda^2.$$

Skaičiuodami determinantą  $\Delta$ , pasinaudojame 3 eilutės elementais:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot M_{32} = -\lambda^3 + \lambda,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot (-\lambda) \cdot M_{33} = -\lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda^2,$$

$$A_{35} = (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot M_{35} = \lambda^3 - \lambda,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}, \quad \Delta_{M_{32}} = A_{11} + A_{13} = -\lambda^3 + \lambda,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-\lambda) \cdot M_{11} = -\lambda^3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot M_{13} = \lambda,$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda.$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}, \quad \Delta_{M_{33}} = A_{21} + A_{22} = \lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot M_{21} = -\lambda^2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-\lambda) \cdot M_{22} = \lambda^4 - \lambda^2 - \lambda,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda + 1,$$

$$M_{35} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{M_{35}} = A_{51} + A_{53} = -\lambda^3 + \lambda,$$

$$A_{51} = (-1)^{5+1} \cdot 1 \cdot M_{51} = -\lambda,$$

$$A_{53} = (-1)^{5+3} \cdot 1 \cdot M_{12} = -\lambda^3 + 2\lambda,$$

$$M_{51} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda, \quad M_{53} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda.$$

Išsprendus penktojo laipsnio lygtį, randame penkias realiąsias šaknis (matricos  $B$  tikrines reikšmes):

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}, \quad \lambda_5 = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Kadangi visos tikrinės reikšmės yra skirtingos, tai matricos  $B$  Žordano forma yra diagonalioji matrica, kurią užrašome taip:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Rasime matricos  $B$  tikrinius vektorius. Pasinaudosime lygybe:

$$BX_i = \lambda_i X_i, i = \overline{1,5}; \quad (2.47)$$

čia  $\lambda_i$  matricos  $B$  tikrinė reikšmė,  $X_i = (x_1^{(i)} \ x_2^{(i)} \ x_3^{(i)} \ x_4^{(i)} \ x_5^{(i)})^T$  - matricos tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinei reikšmei  $\lambda_i$ .

(2.47) matricinę lygtį perrašome taip:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_i & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda_i & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \\ x_4^{(i)} \\ x_5^{(i)} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.48)$$

Remdamiesi (2.48), užrašome lygčių sistemas, kurias spęsdami rasime matricos  $B$  tikrinių vektorių komponentes. Išsprendę sistemas, gauname tikrinius vektorius  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ .

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} b - \frac{2}{b} \\ 1 \\ \frac{2}{b} \\ b - \frac{2}{b} \\ 1 \end{pmatrix}, X_5 = \begin{pmatrix} a - \frac{2}{a} \\ 1 \\ \frac{2}{a} \\ a - \frac{2}{a} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kadangi visos matricos  $B$  tikrinės reikšmės yra skirtingos, tai transformuojančios matricos  $T$  stulpelius sudaro matricos  $B$  tikriniai vektoriai. Įvertinę tai, gauname matricą  $T$ :

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & b - \frac{2}{b} & a - \frac{2}{a} \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \frac{2}{b} & \frac{2}{a} \\ 1 & -2 & 1 & b - \frac{2}{b} & a - \frac{2}{a} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Apskaičiuojame (2.49) matricai atvirkštinę matricą  $T^{-1}$ :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2a+2b+2ab+8}{6a+6b-3ab-12} & \frac{10a+10b+ab+4}{12a+12b-6ab-24} & \frac{ab+2}{2a+2b-ab-4} & \frac{2a+2b+2ab+2}{6a+6b-3ab-12} & \frac{1}{6} \\ \frac{2a-2b+b^2-ab}{2a+ab} & \frac{2a-2b+b^2-ab}{2a+ab} & \frac{2a-2b+b^2-ab}{(b+1)(2a+ab)} & \frac{2a-2b+b^2-ab}{(b+1)(2a+ab)} & 0 \\ \frac{2a-2b-a^2+ab}{2a-2b-a^2+ab} & \frac{2a-2b-a^2+ab}{2a-2b-a^2+ab} & \frac{(b+2)(2a-2b-a^2+ab)}{(b+2)(2a-2b-a^2+ab)} & \frac{(b+2)(2a-2b-a^2+ab)}{(b+2)(2a-2b-a^2+ab)} & 0 \end{bmatrix} \cdot \quad (2.50)$$

Matricą  $B^k$  ieškome remdamiesi formule:

$$B^k = TJ^k T^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \quad (2.51)$$

$B^k$  elementai pateikti 1 priede.

## 2.4. SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS PEREINAMŪJŲ PROCESŲ TYRIMAS

Sistemos pereinamuosius procesus tirsime remdamiesi jos reakcija į vienetinį šuolį. Sistemos  $i$ -tojo generatoriaus virpesio fazės reakciją į  $j$ -tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį vadinsime pereinamąja funkcija  $h_{ij}(t)$ . Matricą  $h(t) = h_{ij}(t)$  vadinsime sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matrica. Rasime sinchronizacijos sistemos pereinamąsias funkcijas ir jų ribines reikšmes.

### 2.4.1. PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ SKAIČIAVIMAS

Pereinamųjų funkcijų matricos elementus rasime remdamiesi matricine diferencialine lygtimi

$$Dx(t) = B_1 x(t) + B_2 (x - \tau) + z(t) \quad (2.52)$$

ir jos sprendiniu

$$x(t) = \sum_{k=0}^L \left( \frac{\kappa}{4} \right)^k \cdot \frac{e^{-p\kappa t}}{(p + \kappa)^{k+1}} \cdot B^k Z(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.53)$$

$j$  - tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį galime pakeisti delta funkcija  $\delta(t)$ , veikiančia to generatoriaus dažnį. Kai vienetinis fazės šuolis veikia  $j$  - tojo generatoriaus virpesio fazę, tai (2.52) lygties laisvasis narys  $z(t)$  įgauna pokytį:

$$\Delta z(t) = \delta(t)I^{(j)}; \quad (2.54)$$

čia  $I^{(j)}$  - matrica – stulpelis, kurio  $j$  - tasis elementas lygus 1, o likusieji - nuliui.

Pažymime pereinamųjų funkcijų matricos  $j$  - tąjį stulpelį simboliu

$$h_j(t) = (h_{1j}(t), h_{2j}(t), h_{3j}(t), h_{4j}(t), h_{5j}(t))^T, j = \overline{1,5}; \quad (2.55)$$

čia  $h_j(t)$  - sistemos generatorių virpesių fazių reakcijų į  $j$  - tojo generatoriaus fazės vienetinį šuolį vektorius.

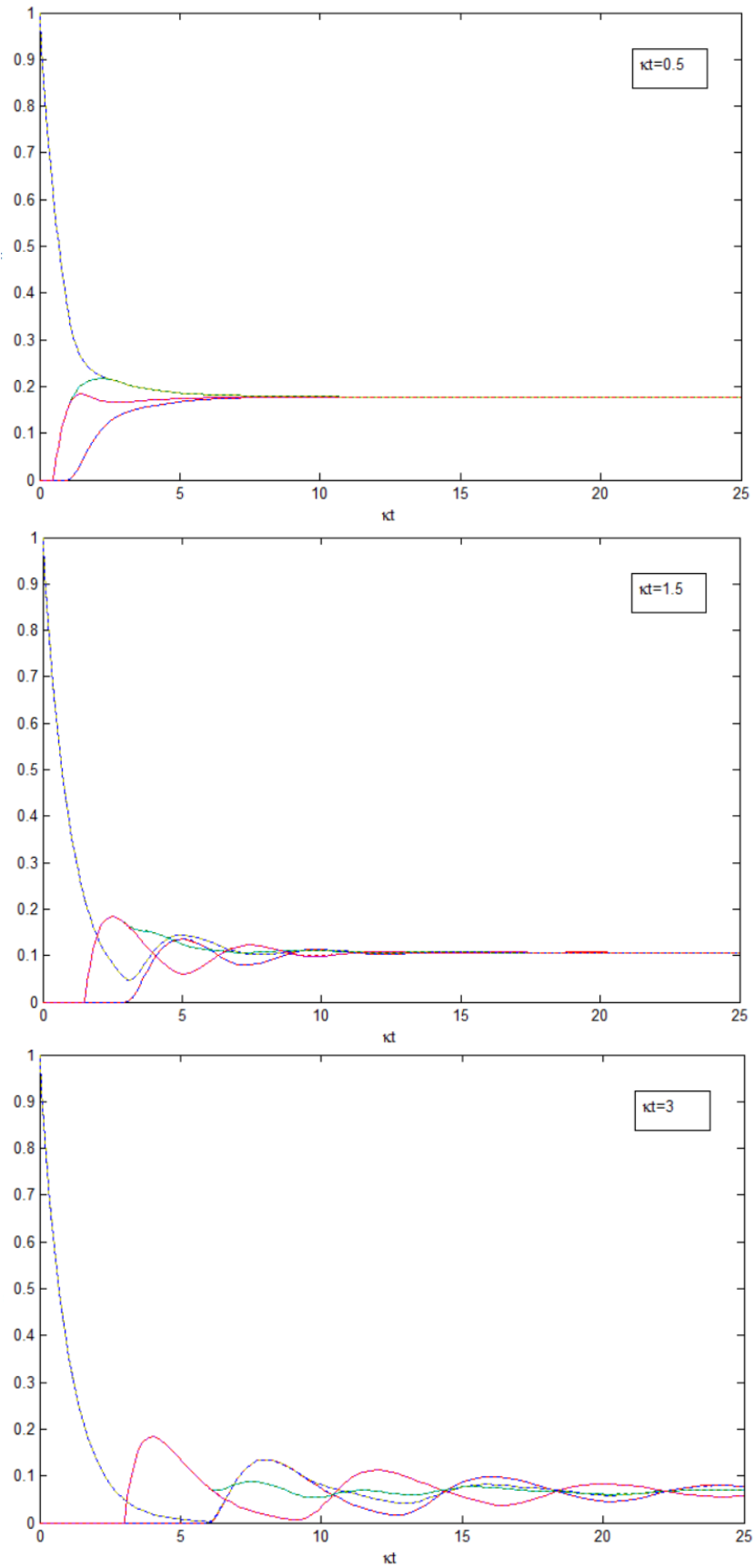
Remdamiesi (2.52) ir (2.54) išraiškomis, užrašome matricinę diferencialinę vektoriaus  $h_j(t)$  atžvilgiu

$$Dh_j(t) = B_1 h_j(t) + B_2 h_j(x - \tau) + \delta(t)I^{(j)}. \quad (2.56)$$

Randame šios lygties sprendinį remdamiesi (2.53) sprendiniu ir įvertinę, kad fiksuoto indekso  $j$  reikšmės yra 1,2,3,4,5, bei pritaikę atvirkštinę Laplaso transformaciją matricą, gauname pereinamųjų funkcijų matricos skaičiavimo formulę:

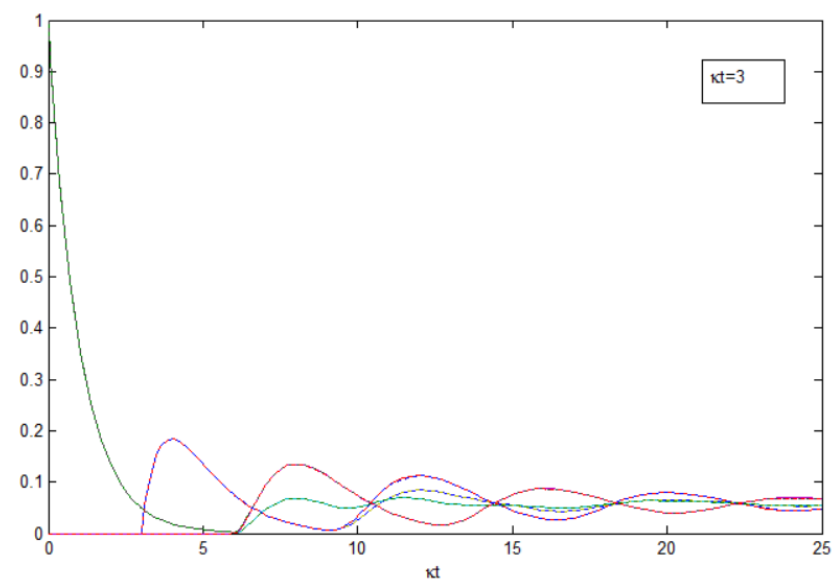
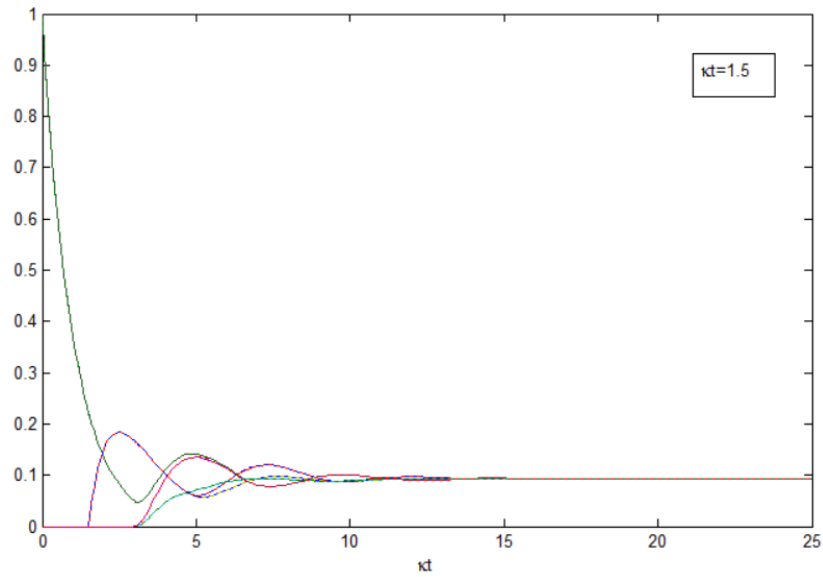
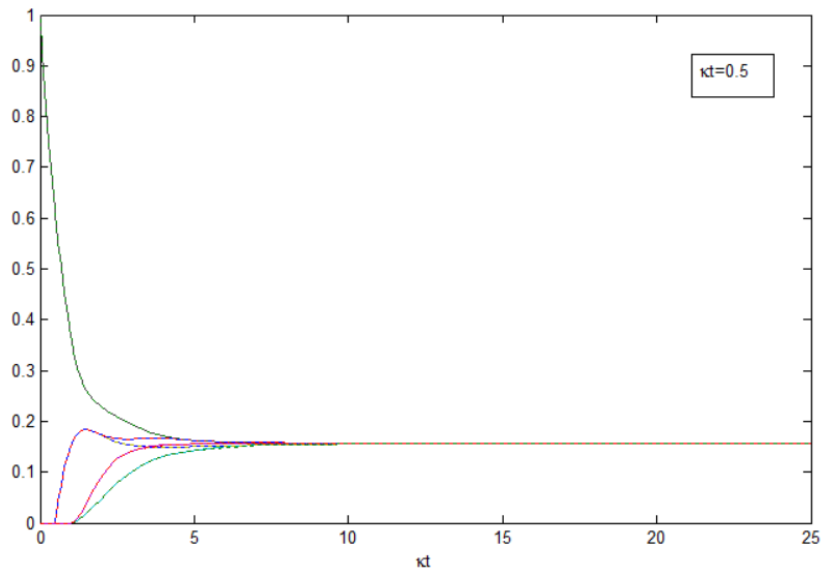
$$h(t) = \sum_{l=0}^L \left(\frac{\kappa}{4}\right)^k \frac{(t - k\tau)^k}{k!} e^{-\kappa(t-k\tau)} B^k \mathbf{1}(t - k\tau), 0 \leq t < (L+1)\tau, j = \overline{1,5}. \quad (2.57)$$

Pereinamojo proceso pobūdis sinchronizacijos sistemoje priklauso nuo parametrų  $\kappa$  ir  $\tau$  sandaugos. Paveiksluose 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 pavaizduoti grafikai prie skirtingų sandaugos  $\kappa\tau$  reikšmių.

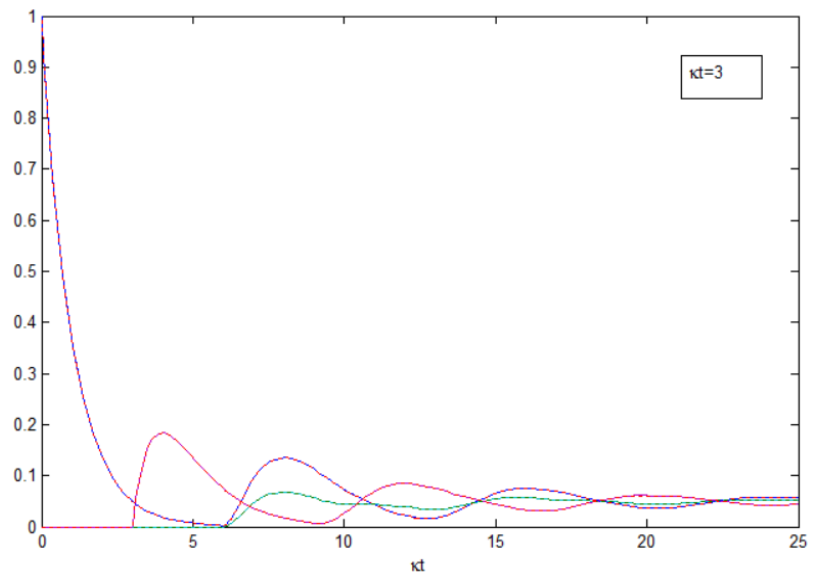
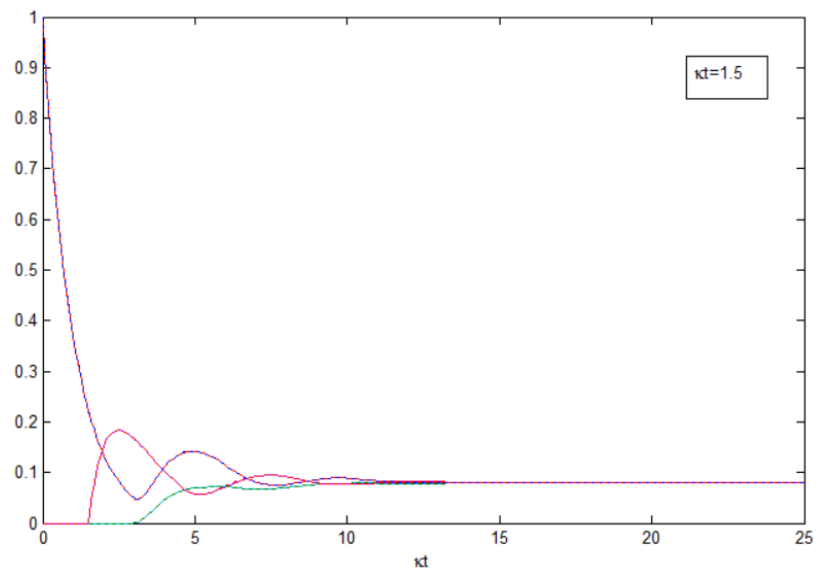
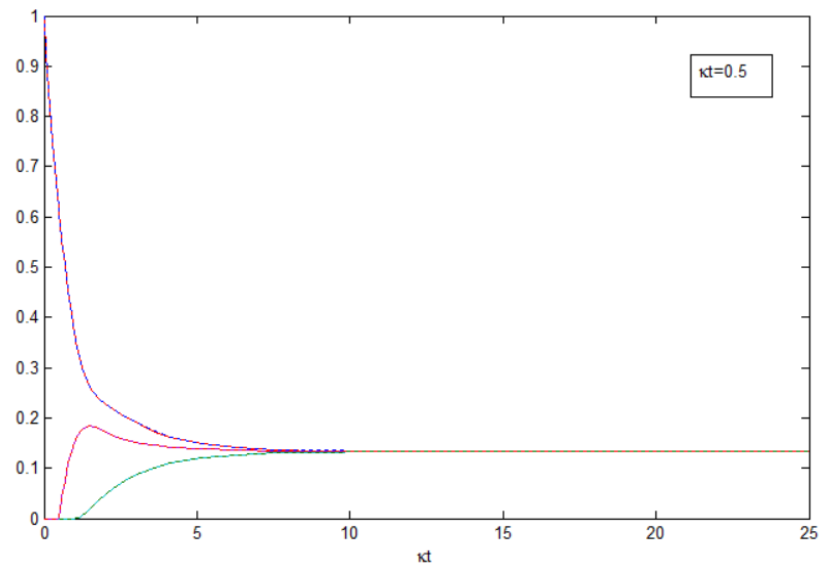


2.2 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{i1}(\kappa t)$  grafikai prie skirtingų  $\kappa \tau$

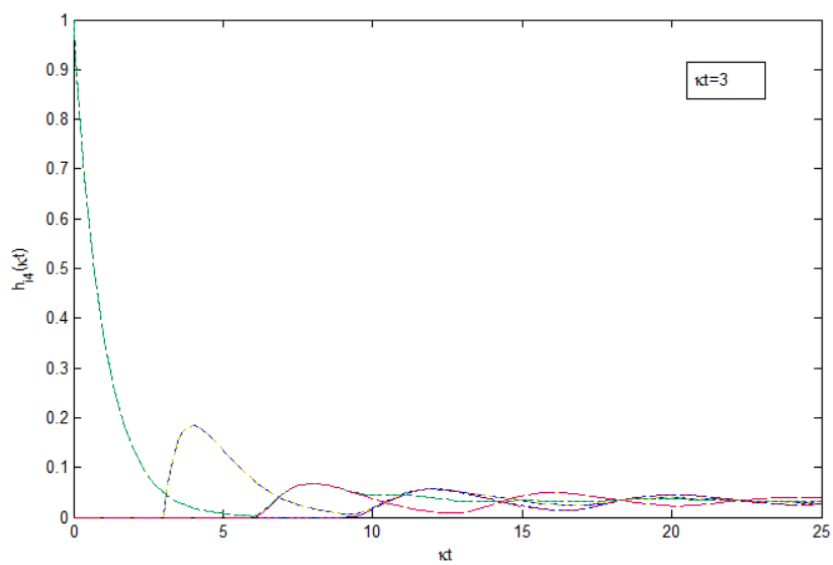
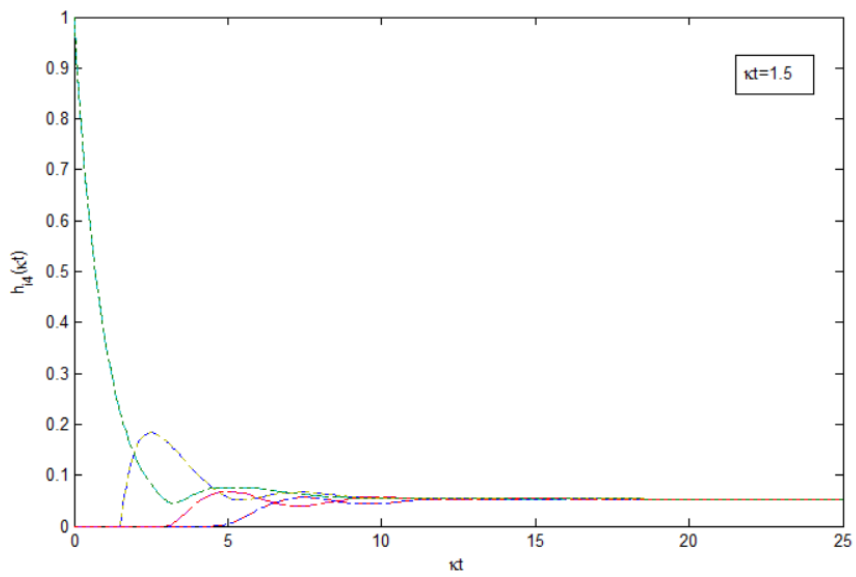
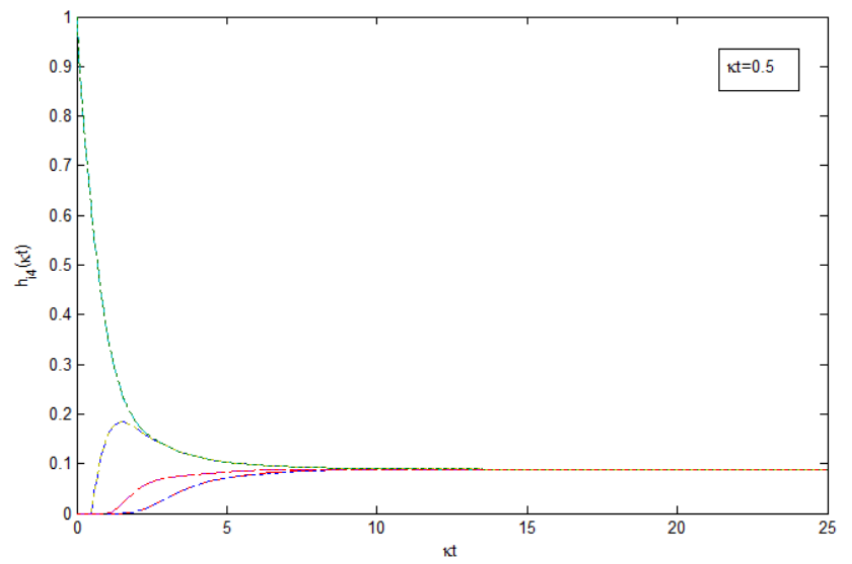




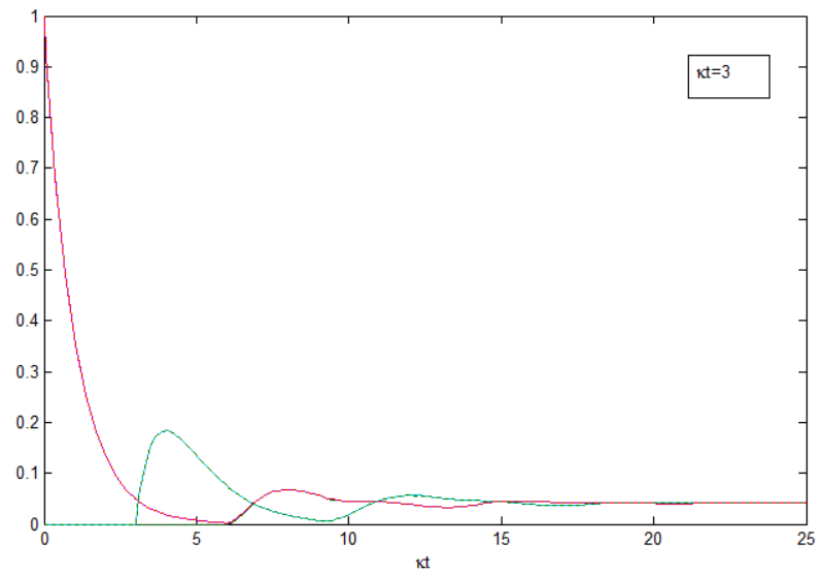
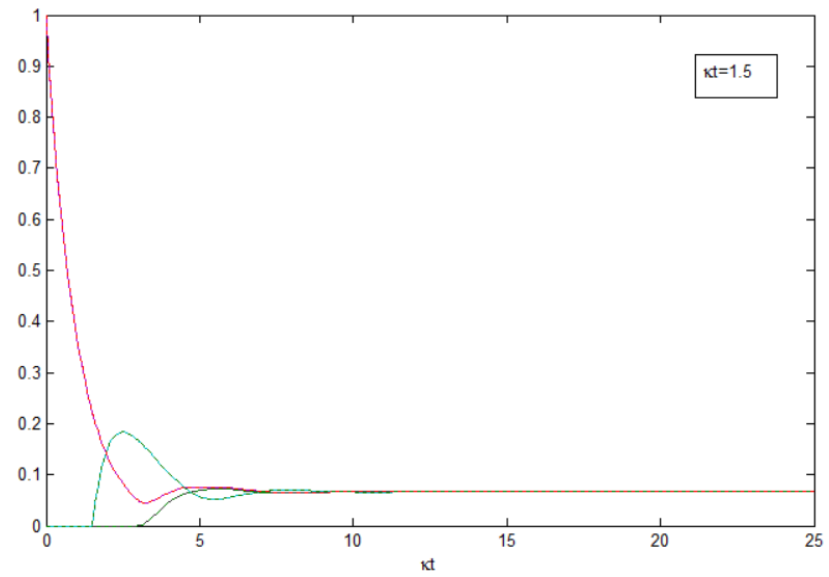
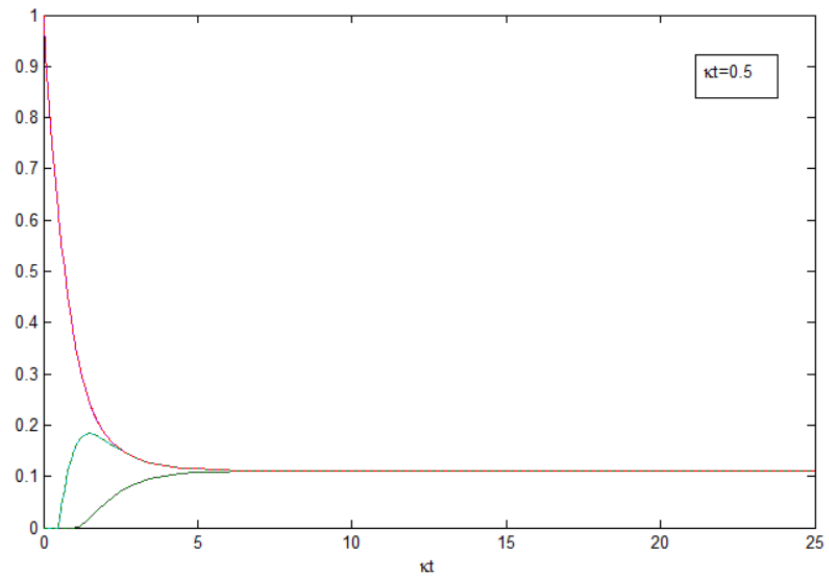
2.3 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{i_2}(\kappa\tau)$  grafikai prie skirtingų  $\kappa\tau$



2.4 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{i3}(\kappa t)$  grafikai prie skirtingų  $\kappa\tau$



2.5 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{i4}(\kappa t)$  grafikai prie skirtingų  $\kappa \tau$



2.6 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{i5}(\kappa\tau)$  grafikai prie skirtingų  $\kappa\tau$

## 2.4.2. PEREINAMŲJŲ FUNKCIJŲ RIBINIŲ REIKŠMIŲ SKAIČIAVIMAS

Pateiksime pereinamųjų funkcijų ribas:

$$h_{ij}(t) = \sum_{l=0}^L \left(\frac{\kappa}{4}\right)^k \frac{(t-k\tau)^k}{k!} e^{-\kappa(t-k\tau)} \{B^k\}_{ij} 1(t-k\tau)$$

$$h_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} h_{ij}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pH_{ij}(p)$$

Rasime pereinamosios funkcijos  $H_{11}$  ribą.

Pažymime prie  $2^k$  esantį elementą:

$$F \equiv \left(b - \frac{2}{b}\right) \left(\frac{2b+ab}{2a-2b+b^2-ab}\right).$$

Apskaičiavę gauname, kad prie vėlavimo  $\kappa\tau = 0.5$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_{11}(t) = \frac{F}{1+\kappa\tau} = \frac{0.2667}{1.5} = 0.1778.$$

Analogiškai gauname ir kitus rezultatus.

## 2.5. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ REIKŠMĖS

Tiriame sistemos pereinamuosius procesus, įvertindami pradines sąlygas. Jas apibrėšime taip:

Laiko momentu  $t = 0$  visiems generatoriams įjungiamas valdymas. Kai  $t < 0$ , generatorių dažniai  $f_i(t) = f_{0i}$ , o fazės  $\varphi_i(t) = f_{0i}t + \varphi_{0i}$ , ( $i = \overline{1,5}$ );  $f_{0i}$  -  $i$ -tojo generatoriaus savasis dažnis,  $\varphi_i(t)$  -  $i$ -tojo generatoriaus virpesio pradinė fazė.

Remdamiesi išraiška:

$$x(t) = \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{4}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} \cdot B^k Z(p), \quad (2.58)$$

rasime  $x_i(t) = \overline{1,5}$

Pažymime:

$$G(k) = B^k Z(p) = \begin{pmatrix} g_1(k) \\ g_2(k) \\ g_3(k) \\ g_4(k) \\ g_5(k) \end{pmatrix}.$$

Panaudojus (2.58) išraišką, galime užrašyti:

$$\begin{aligned} x_j(t) &= \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} \cdot \{G(k)\} = \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} \cdot g_i(k), \\ x_i(t) - x_j(t) &= \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} \cdot (g_i(k) - g_j(k)). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Ieškome skirtumo  $(g_i(k) - g_j(k))$ :

$$\begin{aligned} (g_i(k) - g_j(k)) &= b_{i1}(k)Z_1(p) + b_{i2}(k)Z_2(p) + b_{i3}(k)Z_3(p) + b_{i4}(k)Z_4(p) + b_{i5}(k)Z_5(p) - \\ &- (b_{j1}(k)Z_1(p) + b_{j2}(k)Z_2(p) + b_{j3}(k)Z_3(p) + b_{j4}(k)Z_4(p) + b_{j5}(k)Z_5(p)) = \\ &= (b_{i1}(k) - b_{j1}(k))Z_1(p) + (b_{i2}(k) - b_{j2}(k))Z_2(p) + (b_{i3}(k) - b_{j3}(k))Z_3(p) + \\ &+ (b_{i4}(k) - b_{j4}(k))Z_4(p) + (b_{i5}(k) - b_{j5}(k))Z_5(p). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Pažymime:

$$\begin{aligned} B_1(k) &= (b_{i1}(k) - b_{j1}(k)), \\ B_2(k) &= (b_{i2}(k) - b_{j2}(k)), \\ B_3(k) &= (b_{i3}(k) - b_{j3}(k)), \\ B_4(k) &= (b_{i4}(k) - b_{j4}(k)), \\ B_5(k) &= (b_{i5}(k) - b_{j5}(k)). \end{aligned}$$

Pirmiausiai, pasirašome pradines sąlygas:

$$\begin{aligned} f_i(t) &= (f_{0i} + \Delta f_i(t)), i = \overline{1,5}, \\ \varphi_i'(t) &= f_i(t), i = \overline{1,5}. \end{aligned}$$

Užrašome diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = f_{01} + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau) + \varphi_4(t-\tau)) - \kappa\varphi_1(t), \\ \varphi_2'(t) = f_{02} + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau)) - \kappa\varphi_2(t), \\ \varphi_3'(t) = f_{03} + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau) + \varphi_5(t-\tau)) - \kappa\varphi_3(t), \\ \varphi_4'(t) = f_{04} + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_5(t-\tau)) - \kappa\varphi_4(t), \\ \varphi_5'(t) = f_{05} + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau)) - \kappa\varphi_5(t). \end{cases} \quad (2.61)$$

Padauginę abi puses iš  $1(t)$  (vienetinės Hevisaido funkcijos):

$$\begin{cases} \varphi_1'(t)1(t) = f_{01}1(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau)1(t) + \varphi_4(t-\tau)1(t)) - \kappa\varphi_1(t)1(t), \\ \varphi_2'(t)1(t) = f_{02}1(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau)1(t) + \varphi_3(t-\tau)1(t)) - \kappa\varphi_2(t)1(t), \\ \varphi_3'(t)1(t) = f_{03}1(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau)1(t) + \varphi_5(t-\tau)1(t)) - \kappa\varphi_3(t)1(t), \\ \varphi_4'(t)1(t) = f_{04}1(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau)1(t) + \varphi_5(t-\tau)1(t)) - \kappa\varphi_4(t)1(t), \\ \varphi_5'(t)1(t) = f_{05}1(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau)1(t) + \varphi_3(t-\tau)1(t)) - \kappa\varphi_5(t)1(t). \end{cases} \quad (2.62)$$

Šios sistemos narius su vėlavimais pertvarkome taip:

$$\begin{cases} \varphi_1(t-\tau)1(t) = \varphi_1(t-\tau)1(t-\tau) + \varphi_1(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)), \\ \varphi_2(t-\tau)1(t) = \varphi_2(t-\tau)1(t-\tau) + \varphi_2(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)), \\ \varphi_3(t-\tau)1(t) = \varphi_3(t-\tau)1(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)), \\ \varphi_4(t-\tau)1(t) = \varphi_4(t-\tau)1(t-\tau) + \varphi_4(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)), \\ \varphi_5(t-\tau)1(t) = \varphi_5(t-\tau)1(t-\tau) + \varphi_5(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)). \end{cases} \quad (2.63)$$

Pažymime

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \varphi_i(t)1(t), \\ x_i(t-\tau) &= \varphi_i(t-\tau)1(t-\tau), \overline{i=1,5}. \end{aligned}$$

Tada

$$\begin{aligned} Dx_i(t) &= \varphi_i'(t)1(t) + \varphi_i(t)\delta(t) = \varphi_i'(t)1(t) + \varphi_i(0)\delta(t), \\ Dx_i(t) - \varphi_i(0)\delta(t) &= \varphi_i'(t)1(t). \end{aligned}$$

Pasinaudojame lygybe

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Dx_1(t) - \varphi_1(0)\delta(t) = f_{01}1(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau) + \varphi_4(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau) + \varphi_4(t-\tau))(1(t) - 1(t-\tau)) - \kappa\varphi_1(t), \\ Dx_2(t) - \varphi_2(0)\delta(t) = f_{02}1(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau))(1(t) - 1(t-\tau)) - \kappa\varphi_2(t), \\ Dx_3(t) - \varphi_3(0)\delta(t) = f_{03}1(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau) + \varphi_5(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau) + \varphi_5(t-\tau))(1(t) - 1(t-\tau)) - \kappa\varphi_3(t), \\ Dx_4(t) - \varphi_4(0)\delta(t) = f_{04}1(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_5(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_5(t-\tau))(1(t) - 1(t-\tau)) - \kappa\varphi_4(t), \\ Dx_5(t) - \varphi_5(0)\delta(t) = f_{05}1(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau))(1(t) - 1(t-\tau)) - \kappa\varphi_5(t), \end{array} \right. \quad (2.64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Dx_1(t) = \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau) + \varphi_4(t-\tau)) + \kappa\varphi_1(t) + z_1(t), \\ Dx_2(t) = \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau)) + \kappa\varphi_2(t) + z_2(t), \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau) + \varphi_5(t-\tau)) + \kappa\varphi_3(t) + z_3(t), \\ Dx_4(t) = \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_5(t-\tau)) + \kappa\varphi_4(t) + z_4(t), \\ Dx_5(t) = \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau)) + \kappa\varphi_5(t) + z_5(t). \end{array} \right. \quad (2.65)$$

Taigi,

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1(t) = f_{01}1(t) + \varphi_1(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2}\varphi_2(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}\varphi_4(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)), \\ z_2(t) = f_{02}1(t) + \varphi_2(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2}\varphi_1(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}\varphi_3(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)), \\ z_3(t) = f_{03}1(t) + \varphi_3(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2}\varphi_2(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}\varphi_5(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)), \\ z_4(t) = f_{04}1(t) + \varphi_4(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2}\varphi_1(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}\varphi_5(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)), \\ z_5(t) = f_{05}1(t) + \varphi_5(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2}\varphi_1(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}\varphi_3(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)). \end{array} \right. \quad (2.66)$$

Pasinaudojame turimomis  $z_i(t)$ ,  $i = \overline{1,5}$  išraiškomis ir atitiktimis

$$1(t) = \frac{1}{p};$$

$$\delta(t) = 1;$$

$$\varphi_i(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)) = \frac{\varphi_{0i}}{p} + \frac{f_{0i}}{p^2} - \frac{f_{0i}\tau}{p} - \frac{\varphi_{0i}}{p}e^{-p\tau} - \frac{f_{0i}}{p^2}e^{-p\tau}$$

Randame vektoriaus  $z(t) = (z_1(p), z_1(p), z_3(p), z_4(p), z_5(p))^T$  dedamąsias:



Rastus vektoriaus  $Z(p)$  elementus taikysime generatorių virpesių fazių skirtumų išraiškose.

$$\left\{ \begin{aligned} Z_1(p) &= \frac{f_{01}}{p} + \varphi_{01} + \frac{\kappa}{2} \left( \frac{\varphi_{02} + \varphi_{04}}{p} + \frac{f_{02} + f_{04}}{p^2} - \frac{(f_{02} + f_{04}) \cdot \tau}{p} - \frac{(\varphi_{02} + \varphi_{04}) \cdot e^{-p\tau}}{p} - \frac{(f_{02} + f_{04}) \cdot e^{-p\tau}}{p^2} \right), \\ Z_2(p) &= \frac{f_{02}}{p} + \varphi_{02} + \frac{\kappa}{2} \left( \frac{\varphi_{01} + \varphi_{03}}{p} + \frac{f_{01} + f_{03}}{p^2} - \frac{(f_{01} + f_{03}) \cdot \tau}{p} - \frac{(\varphi_{01} + \varphi_{03}) \cdot e^{-p\tau}}{p} - \frac{(f_{01} + f_{03}) \cdot e^{-p\tau}}{p^2} \right), \\ Z_3(p) &= \frac{f_{03}}{p} + \varphi_{03} + \frac{\kappa}{2} \left( \frac{\varphi_{02} + \varphi_{05}}{p} + \frac{f_{02} + f_{05}}{p^2} - \frac{(f_{02} + f_{05}) \cdot \tau}{p} - \frac{(\varphi_{02} + \varphi_{05}) \cdot e^{-p\tau}}{p} - \frac{(f_{02} + f_{05}) \cdot e^{-p\tau}}{p^2} \right), \\ Z_4(p) &= \frac{f_{04}}{p} + \varphi_{04} + \frac{\kappa}{2} \left( \frac{\varphi_{01} + \varphi_{05}}{p} + \frac{f_{01} + f_{05}}{p^2} - \frac{(f_{01} + f_{05}) \cdot \tau}{p} - \frac{(\varphi_{01} + \varphi_{05}) \cdot e^{-p\tau}}{p} - \frac{(f_{01} + f_{05}) \cdot e^{-p\tau}}{p^2} \right), \\ Z_5(p) &= \frac{f_{05}}{p} + \varphi_{05} + \frac{\kappa}{2} \left( \frac{\varphi_{01} + \varphi_{03}}{p} + \frac{f_{01} + f_{03}}{p^2} - \frac{(f_{01} + f_{03}) \cdot \tau}{p} - \frac{(\varphi_{01} + \varphi_{03}) \cdot e^{-p\tau}}{p} - \frac{(f_{21} + f_{03}) \cdot e^{-p\tau}}{p^2} \right). \end{aligned} \right. \quad (2.67)$$

I (2.60) išraišką įstatę  $Z_i(p)$  ir  $B_i$ ,  $i = \overline{1,5}$ , bei atlikę pertvarkymų, gauname:

$$\left\{ \begin{aligned} g_i(k) - g_j(k) &= [\varphi_{01} B_1(k) + \varphi_{02} B_2(k) + \varphi_{03} B_3(k) + \varphi_{04} B_4(k) + \varphi_{05} B_5(k)] + \\ &+ \frac{1}{p} \cdot [f_{01} B_1(k) + f_{02} B_2(k) + f_{03} B_3(k) + f_{04} B_4(k) + f_{05} B_5(k)] + \\ &+ \frac{\kappa}{p} \cdot \left[ \frac{\varphi_{24}}{2} B_1(k) + \frac{\varphi_{13}}{2} B_2(k) + \frac{\varphi_{25}}{2} B_3(k) + \frac{\varphi_{15}}{2} B_4(k) + \frac{\varphi_{13}}{2} B_5(k) \right] - \\ &- \frac{\kappa}{p} \cdot \left[ \frac{\varphi_{24}}{2} B_1(k) + \frac{\varphi_{13}}{2} B_2(k) + \frac{\varphi_{25}}{2} B_3(k) + \frac{\varphi_{15}}{2} B_4(k) + \frac{\varphi_{13}}{2} B_5(k) \right] \cdot e^{-p\tau} + \\ &+ \frac{\kappa}{p^2} \cdot \left[ \frac{f_{24}}{2} B_1(k) + \frac{f_{13}}{2} B_2(k) + \frac{f_{25}}{2} B_3(k) + \frac{f_{15}}{2} B_4(k) + \frac{f_{13}}{2} B_5(k) \right] - \\ &- \frac{\kappa\tau}{p} \cdot \left[ \frac{f_{24}}{2} B_1(k) + \frac{f_{13}}{2} B_2(k) + \frac{f_{25}}{2} B_3(k) + \frac{f_{15}}{2} B_4(k) + \frac{f_{13}}{2} B_5(k) \right] - \\ &- \frac{\kappa}{p^2} \cdot \left[ \frac{f_{24}}{2} B_1(k) + \frac{f_{13}}{2} B_2(k) + \frac{f_{25}}{2} B_3(k) + \frac{f_{15}}{2} B_4(k) + \frac{f_{13}}{2} B_5(k) \right] \cdot e^{-p\tau}. \end{aligned} \right. \quad (2.68)$$

Čia

$$f_{24} = f_{02} + f_{04},$$

$$f_{13} = f_{01} + f_{03},$$

$$\varphi_{24} = \varphi_{02} + \varphi_{04},$$

$$\varphi_{13} = \varphi_{01} + \varphi_{03}.$$

Pažymime:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(k) &= \varphi_{01}B_1(k) + \varphi_{02}B_2(k) + \varphi_{03}B_3(k) + \varphi_{04}B_4(k) + \varphi_{05}B_5(k), \\
\alpha_2(k) &= f_{01}B_1(k) + f_{02}B_2(k) + f_{03}B_3(k) + f_{04}B_4(k) + f_{05}B_5(k), \\
\alpha_3(k) &= \frac{f_{24}}{2}B_1(k) + \frac{f_{13}}{2}B_2(k) + \frac{f_{25}}{2}B_3(k) + \frac{f_{15}}{2}B_4(k) + \frac{f_{13}}{2}B_5(k), \\
\alpha_4(k) &= \frac{\varphi_{24}}{2}B_1(k) + \frac{\varphi_{13}}{2}B_2(k) + \frac{\varphi_{25}}{2}B_3(k) + \frac{\varphi_{15}}{2}B_4(k) + \frac{\varphi_{13}}{2}B_5(k).
\end{aligned}$$

Ir gauname:

$$\begin{aligned}
g_i(k) - g_j(k) &= \alpha_1(k) + \frac{\alpha_2(k) + \kappa\alpha_4(k) - \kappa\tau\alpha_3(k)}{p} + \frac{\kappa\alpha_3(k)}{p^2} - \frac{\kappa\alpha_3(k)}{p^2} \cdot e^{-p\tau} - \frac{\kappa\alpha_4(k)}{p} \cdot e^{-p\tau} = \\
&= [\alpha_{22}(k) = \alpha_2(k) - \kappa\tau\alpha_3(k) + \kappa\alpha_4(k)] = \alpha_1(k) + \frac{\alpha_{22}(k)}{p} + \frac{\kappa\alpha_3(k)}{p^2} - \frac{\kappa\alpha_3(k)}{p^2} \cdot e^{-p\tau} - \frac{\kappa\alpha_4(k)}{p} \cdot e^{-p\tau}.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Į (2.59) įstatome (2.69):

$$\begin{aligned}
x_i(t) - x_j(t) &\rightarrow \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \cdot \alpha_1(k) \cdot \frac{e^{-p\kappa\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} + \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \cdot \alpha_{22}(k) \cdot \frac{e^{-p\kappa\tau}}{p(p+\kappa)^{k+1}} + \\
&+ \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \cdot \kappa\alpha_3(k) \cdot \frac{e^{-p\kappa\tau}}{p^2(p+\kappa)^{k+1}} - \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \cdot \kappa\alpha_3(k) \cdot \frac{e^{-p\kappa\tau}}{p^2(p+\kappa)^{k+1}} \cdot e^{-p\tau} - \\
&- \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \cdot \kappa\alpha_4(k) \cdot \frac{e^{-p\kappa\tau}}{p(p+\kappa)^{k+1}} \cdot e^{-p\tau}.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Pažymime:

$$\begin{aligned}
x_1(t) - x_2(t) &= G_{12}(\kappa\tau) + S_{12}(\kappa\tau), \\
S_{12}(\kappa\tau) &= S_{12,1}(\kappa\tau) + S_{12,2}(\kappa\tau) + S_{12,3}(\kappa\tau) - S_{12,3}(\kappa\tau - \kappa\tau) - S_{12,4}(\kappa\tau - \kappa\tau), \\
S_{12,4}(\kappa\tau) &= \sum_{k=1}^L \frac{1}{2^k} a_{12,3}(k) \left(1 - \sum_{r=0}^k \frac{(\kappa\tau - k\kappa\tau)^r}{r!} e^{-(\kappa\tau - k\kappa\tau)}\right) \cdot 1(\kappa\tau - k\kappa\tau), \\
S_{12,3}(\kappa\tau) &= \sum_{k=1}^L \frac{1}{2^k} a_{ij,4}(k) \left((\kappa\tau - k\kappa\tau) - (k+1) + \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^k \frac{(\kappa\tau - k\kappa\tau)^s}{s!} e^{-(\kappa\tau - k\kappa\tau)}\right) \cdot 1(\kappa\tau - k\kappa\tau), \\
S_{12,2}(\kappa\tau) &= \sum_{k=1}^L \frac{1}{2^k} b_{ij}(k) \left(1 - \sum_{r=0}^k \frac{(\kappa\tau - k\kappa\tau)^r}{r!} e^{-(\kappa\tau - k\kappa\tau)}\right) \cdot 1(\kappa\tau - k\kappa\tau), \\
S_{12,1}(\kappa\tau) &= \sum_{k=1}^L \frac{1}{2^k} a_{ij,1}(k) \cdot \frac{(\kappa\tau - k\kappa\tau)^k}{k!} e^{-(\kappa\tau - k\kappa\tau)} \cdot 1(\kappa\tau - k\kappa\tau).
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Įvedame pažymėjimą  $G$ , taip pat pateikiamos jo elementų išraiškos:

$$\begin{aligned}
G_{12,1}(\kappa\tau) &= \alpha_{12,1} e^{-\kappa\tau} 1(\kappa\tau), \\
G_{12,2}(\kappa\tau) &= \beta_{12} (1 - e^{-\kappa\tau}) 1(\kappa\tau), \\
G_{12,3}(\kappa\tau) &= \alpha_{12,4} (\kappa\tau - 1 + e^{-\kappa\tau}) 1(\kappa\tau), \\
G_{12,4}(\kappa\tau) &= \alpha_{12,3} (1 - e^{-\kappa\tau}) 1(\kappa\tau),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{12,1} &= \varphi_{01} - \varphi_{02}, \\
\alpha_{12,2} &= f_{01} - f_{03}, \\
\alpha_{12,3} &= \frac{\varphi_{24}}{2} - \frac{\varphi_{13}}{2}, \\
\alpha_{12,4} &= \frac{f_{24}}{2} - \frac{f_{13}}{2}, \\
\beta_{12} &= \alpha_{12,2} + \alpha_{12,3} - \kappa\tau\alpha_{12,4}, \\
b_{ij} &= a_{ij,2}(k) + a_{ij,3}(k) - \kappa\tau a_{ij,4}(k), \\
a_{ij,1}(k) &= \sum_{m=1}^5 \varphi_{om}(d_{im}(k) - d_{jm}(k)), \\
a_{ij,2}(k) &= \sum_{m=1}^5 \frac{f_{om}}{\kappa} (d_{im}(k) - d_{jm}(k)), \\
a_{ij,3}(k) &= \sum_{m=1}^5 \varphi_{m-1,m+1} (d_{im}(k) - d_{jm}(k)), \\
a_{ij,4}(k) &= \sum_{m=1}^5 f_{m-1,m+1} (d_{im}(k) - d_{jm}(k)).
\end{aligned}$$

### 2.5.1. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ RIBINIŲ REIKŠMIŲ SKAIČIAVIMAS

Generatorių virpesių fazių skirtumų ribines reikšmes skaičiuosime, naudodami ribinės reikšmės teoremą:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_j(t) - x_i(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p(X_j(p) - X_i(p)), i, j = \overline{1,5}, i \neq j. \quad (2.72)$$

Turime (2.7) diferencialinių lygčių sistemą, jai pritaikome Laplaso transformaciją:

$$\begin{cases}
pX_1(p) = \frac{k}{2} e^{-p\tau} [(X_2(p) + X_4(p)) - \kappa X_1(p) + Z_1(p), \\
pX_2(p) = \frac{k}{2} e^{-p\tau} [(X_1(p) + X_3(p)) - \kappa X_2(p) + Z_2(p), \\
pX_3(p) = \frac{k}{2} e^{-p\tau} [(X_2(p) + X_5(p)) - \kappa X_3(p) + Z_3(p), \\
pX_4(p) = \frac{k}{2} e^{-p\tau} [(X_1(p) + X_5(p)) - \kappa X_4(p) + Z_4(p), \\
pX_5(p) = \frac{k}{2} e^{-p\tau} [(X_1(p) + X_3(p)) - \kappa X_5(p) + Z_5(p).
\end{cases} \quad (2.73)$$

Šios sistemos sprendinių radimui naudosime Kramerio taisyklę. Rasime  $\lim_{p \rightarrow 0} p(X_j(p) - X_i(p))$ , kur

$$X_i(p) = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = \overline{1,5}.$$

Iš koeficientų prie  $X_i$  sudarome matricą:

$$Q = \begin{pmatrix} p + \kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & p + \kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & p + \kappa & 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 & 0 & p + \kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 & p + \kappa \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Šios matricos determinantas  $\Delta$  yra:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p + \kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & p + \kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & p + \kappa & 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 & 0 & p + \kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 & p + \kappa \end{vmatrix} = x^5 + p^5 + 5\kappa^4 p + 5\kappa p^4 + \\ + 10\kappa^2 p^3 + 10\kappa^3 p^2 - \left( \frac{6\kappa^3 p^3 + \kappa^3 + p^3}{\kappa e^{2p\tau}} \right) - \left( \frac{\kappa^2 p^2 + \kappa^2 + p^2}{8\kappa e^{3p\tau}} \right) + \left( \frac{\kappa + p}{8\kappa e^{4p\tau}} \right).$$

Sistemos laisvųjų narių stulpelis  $b = (Z_1(p), Z_2(p), Z_3(p), Z_4(p), Z_5(p))^T$ . Determinanto  $\Delta$  stulpelius paeiliui keiskime sistemos laisvųjų narių stulpeliu  $b$  ir gausime tokius determinantus:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} Z_1(p) & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ Z_2(p) & p + \kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & 0 \\ Z_3(p) & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & p + \kappa & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ Z_4(p) & 0 & 0 & p + \kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ Z_5(p) & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & p + \kappa \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} p + \kappa & Z_1(p) & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & Z_2(p) & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & Z_3(p) & p + \kappa & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & Z_4(p) & 0 & p + \kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & Z_5(p) & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & p + \kappa \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} p+\kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & Z_1(p) & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & p+\kappa & Z_2(p) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & Z_3(p) & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & Z_4(p) & p+\kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & Z_5(p) & 0 & p+\kappa \end{vmatrix}; \Delta_4 = \begin{vmatrix} p+\kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & Z_1(p) & 0 \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & p+\kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & Z_2(p) & 0 \\ 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & p+\kappa & Z_3(p) & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & 0 & Z_4(p) & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & Z_5(p) & p+\kappa \end{vmatrix};$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} p+\kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & Z_1(p) \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & p+\kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & Z_2(p) \\ 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & p+\kappa & 0 & Z_3(p) \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & 0 & p+\kappa & Z_4(p) \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & Z_5(p) \end{vmatrix}.$$

Ieškome  $\lim_{p \rightarrow 0} p(X_2 - X_1)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_2(p) - X_1(p)) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{\Delta} (Z_1(p)(\Delta_{12} - \Delta_{11}) + (Z_2(p)(\Delta_{22} - \Delta_{21}) + \\ &+ (Z_3(p)(\Delta_{32} - \Delta_{31}) + (Z_4(p)(\Delta_{42} - \Delta_{41}) + (Z_5(p)(\Delta_{52} - \Delta_{51})), \end{aligned} \quad (2.75)$$

čia  $\Delta_{ij}$ ,  $j = 1, 2, i = \overline{1, 5}$  matricos  $Q$  adjunktai.

Gauname neapibrėžtumą, taikome Liopitalio taisyklę. Pertvarkome (2.8.5.3) išraišką:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_2 - X_1) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_1(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{12} - \Delta_{11}}{p} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_2(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{22} - \Delta_{21}}{p} + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_3(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{32} - \Delta_{31}}{p} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_4(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{42} - \Delta_{41}}{p} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_5(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{52} - \Delta_{51}}{p} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_1(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{12} - \Delta_{11})'_p + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_2(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{22} - \Delta_{21})'_p + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_3(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{32} - \Delta_{31})'_p + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_4(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{42} - \Delta_{41})'_p + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_5(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{52} - \Delta_{51})'_p. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Tuomet

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \Delta' &= \lim_{p \rightarrow 0} \left( x^5 + p^5 + 5\kappa^4 p + 5\kappa p^4 + \right. \\ &\quad \left. + 10\kappa^2 p^3 + 10\kappa^3 p^2 - \left( \frac{6\kappa^3 p^3 + \kappa^3 + p^3}{\kappa e^{2p\tau}} \right) - \left( \frac{\kappa^2 p^2 + \kappa^2 + p^2}{8\kappa e^{3p\tau}} \right) + \left( \frac{\kappa + p}{8\kappa e^{4p\tau}} \right) \right) = \\ &= \frac{\tau^4 \kappa^4 + \tau^3 \kappa^3}{8} - \tau^2 \kappa^2 + 1, \end{aligned}$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} p + \kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & p + \kappa & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ 0 & 0 & p + \kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & p + \kappa \end{vmatrix},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{11} = \frac{8\kappa^4 \tau + 24\kappa^3}{\kappa^4 \tau^4 + \kappa^3 \tau^3 - 8\tau^2 \kappa^2 + 8},$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & p + \kappa & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ 0 & 0 & p + \kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & p + \kappa \end{vmatrix},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{21} = \frac{6\kappa^4 \tau + 34\kappa^3}{\kappa^4 \tau^4 + \kappa^3 \tau^3 - 8\tau^2 \kappa^2 + 4\kappa \tau + 8},$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ p + \kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ 0 & 0 & p + \kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & p + \kappa \end{vmatrix},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{31} = -\kappa^4 + 11\kappa^3 - 4\kappa + 2,$$

$$\Delta_{41} = \begin{vmatrix} \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ p + \kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & p + \kappa & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & p + \kappa \end{vmatrix},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{41} = \frac{4\kappa^4\tau + \frac{2}{\kappa e^{3p\tau}} - 4\kappa^3 - \frac{12\kappa}{e^{p\tau}}}{\kappa^4\tau^4 + \kappa^3\tau^3 - 8\tau^2\kappa^2 + 8},$$

$$\Delta_{51} = \begin{vmatrix} \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ p + \kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} & 0 & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ 0 & 0 & p + \kappa & \frac{-\kappa e^{-p\tau}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & p + \kappa \end{vmatrix},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{51} = \frac{-\kappa^4\tau + 11\kappa^3 - \frac{4}{e^{2p\tau}}}{\kappa^4\tau^4 + \kappa^3\tau^3 - 8\tau^2\kappa^2 + 8}.$$

Apskaičiuosime  $\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 Z_i(p))'$ :

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 (\varphi_{01} + \frac{f_{01}}{p} - \frac{\kappa f_{24}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{24}\tau}{2p} + \frac{\kappa \varphi_{24}}{2p} - \frac{\kappa f_{24}e^{-p\tau}}{p^2} - \frac{\kappa \varphi_{24}e^{-p\tau}}{2p}))' = f_{01},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 (\varphi_{02} + \frac{f_{02}}{p} - \frac{\kappa f_{13}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{13}\tau}{2p} + \frac{\kappa \varphi_{13}}{2p} - \frac{\kappa f_{13}e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{13}e^{-p\tau}}{2p}))' = f_{02},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 (\varphi_{03} + \frac{f_{03}}{p} - \frac{\kappa f_{25}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{25}\tau}{2p} + \frac{\kappa \varphi_{25}}{2p} - \frac{\kappa f_{25}e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{25}e^{-p\tau}}{2p}))' = f_{03},$$

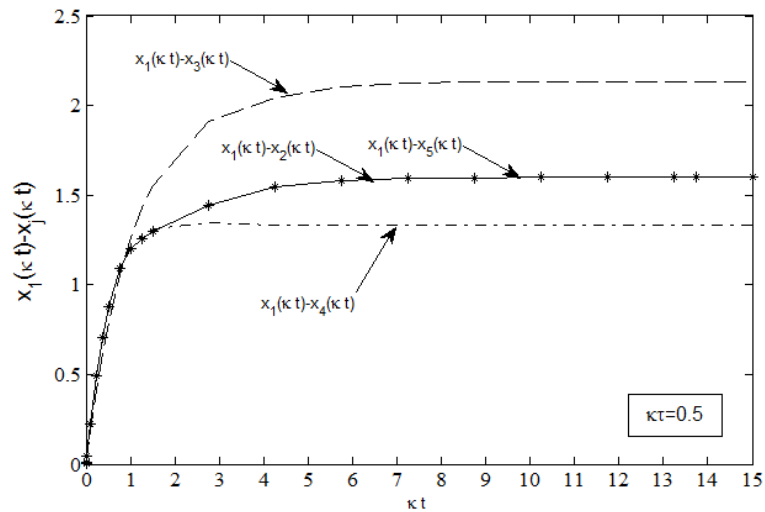
$$\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 (\varphi_{04} + \frac{f_{04}}{p} - \frac{\kappa f_{15}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{15}\tau}{2p} + \frac{\kappa \varphi_{15}}{2p} - \frac{\kappa f_{15}e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{15}e^{-p\tau}}{2p}))' = f_{04},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 (\varphi_{05} + \frac{f_{05}}{p} - \frac{\kappa f_{13}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{13}\tau}{2p} + \frac{\kappa \varphi_{13}}{2p} - \frac{\kappa f_{13}e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{13}e^{-p\tau}}{2p}))' = f_{05}.$$

Gautus rezultatus įstatome į (2.76):

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta' = \lim_{p \rightarrow 0} \left( x^5 + p^5 + 5\kappa^4 p + 5\kappa p^4 + \right. \\ \left. + 10\kappa^2 p^3 + 10\kappa^3 p^2 - \left( \frac{6\kappa^3 p^3 + \kappa^3 + p^3}{\kappa e^{2p\tau}} \right) - \left( \frac{\kappa^2 p^2 + \kappa^2 + p^2}{8\kappa e^{3p\tau}} \right) + \left( \frac{\kappa + p}{8\kappa e^{4p\tau}} \right) \right) = \\ = \frac{\tau^4 \kappa^4 + \tau^3 \kappa^3}{8} - \tau^2 \kappa^2 + 1,$$

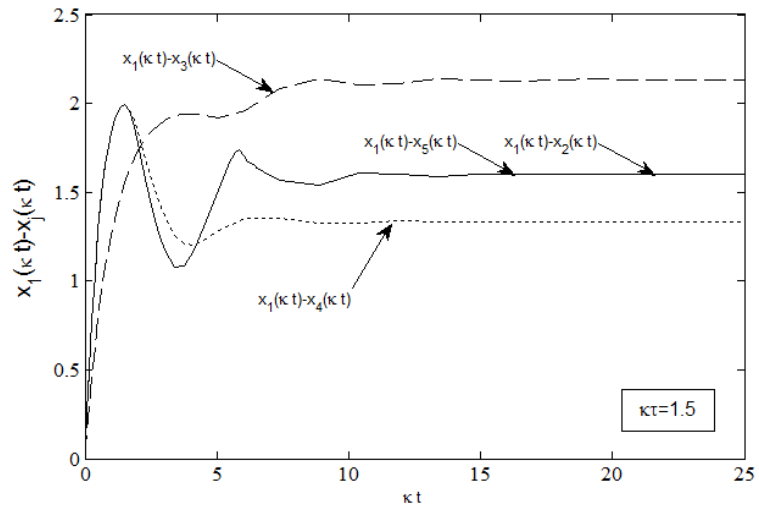
$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_2(p) - X_1(p)) = \frac{2f_{01}}{\frac{\tau^4 \kappa^4 + \tau^3 \kappa^3}{8} - \tau^2 \kappa^2 + 1} \left( \frac{8\kappa^4 \tau + 24\kappa^3}{\kappa^4 \tau^4 + \kappa^3 \tau^3 - 8\tau^2 \kappa^2 + 8} \right) + \\ + \frac{2f_{02}}{\frac{\tau^4 \kappa^4 + \tau^3 \kappa^3}{8} - \tau^2 \kappa^2 + 1} \left( \frac{6\kappa^4 \tau + 34\kappa^3}{\kappa^4 \tau^4 + \kappa^3 \tau^3 - 8\tau^2 \kappa^2 + 4\kappa \tau + 8} \right) + \\ + \frac{2f_{03}}{\frac{\tau^4 \kappa^4 + \tau^3 \kappa^3}{8} - \tau^2 \kappa^2 + 1} (-\kappa^4 + 11\kappa^3 - 4\kappa + 2) + \\ + \frac{2f_{04}}{\frac{\tau^4 \kappa^4 + \tau^3 \kappa^3}{8} - \tau^2 \kappa^2 + 1} \left( \frac{4\kappa^4 \tau + \frac{2}{\kappa e^{3p\tau}} - 4\kappa^3 - \frac{12\kappa}{e^{p\tau}}}{\kappa^4 \tau^4 + \kappa^3 \tau^3 - 8\tau^2 \kappa^2 + 8} \right) + \\ + \frac{2f_{05}}{\frac{\tau^4 \kappa^4 + \tau^3 \kappa^3}{8} - \tau^2 \kappa^2 + 1} \left( \frac{-\kappa^4 \tau + 11\kappa^3 - \frac{4}{e^{2p\tau}}}{\kappa^4 \tau^4 + \kappa^3 \tau^3 - 8\tau^2 \kappa^2 + 8} \right).$$



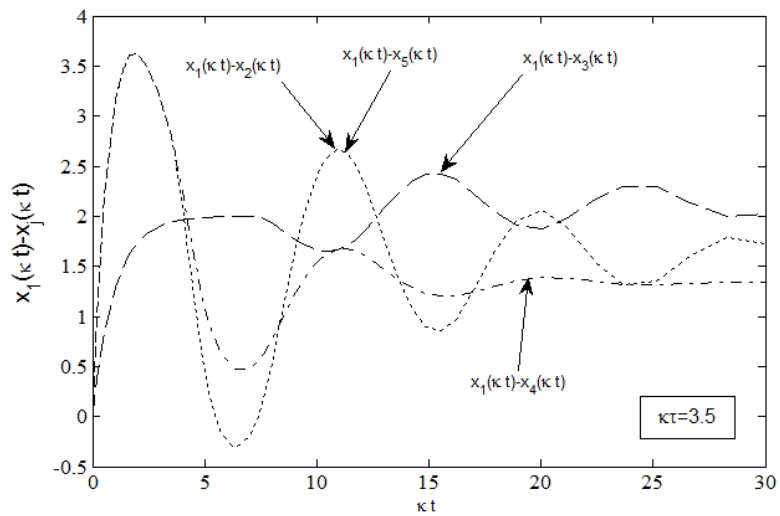
2.7 pav. Fazių skirtumų grafikas gautas naudojant metodą su dde23 funkcija, kai

$$\kappa\tau = 0.5$$

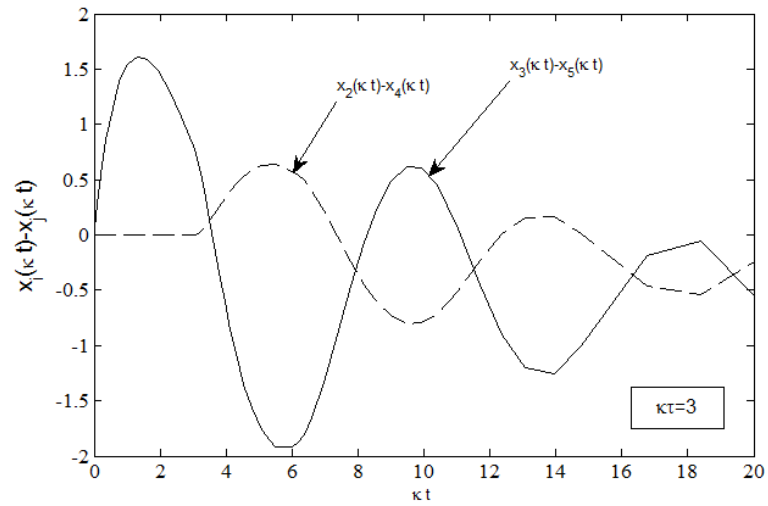




2.8 pav. Fazių skirtumų grafikas gautas naudojant metodą su dde23 funkcija, kai  $\kappa\tau = 1.5$

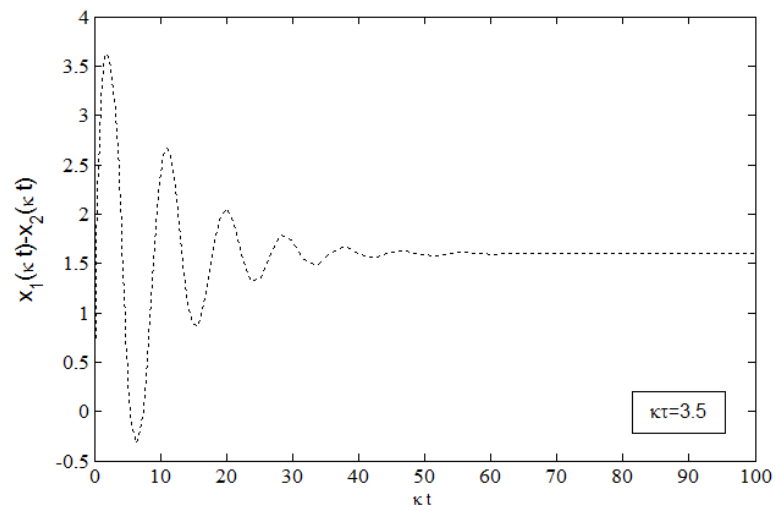


2.9 pav. Fazių skirtumų grafikas gautas naudojant metodą su dde23 funkcija, kai  $\kappa\tau = 3.5$



2.10 pav. Fazių skirtumų grafikas gautas naudojant metodą su dde23 funkcija, kai

$$\kappa\tau = 3$$



2.11 pav. Fazių skirtumų grafikas gautas naudojant nuoseklaus integravimo metodą, kai

$$\kappa\tau = 3.5$$

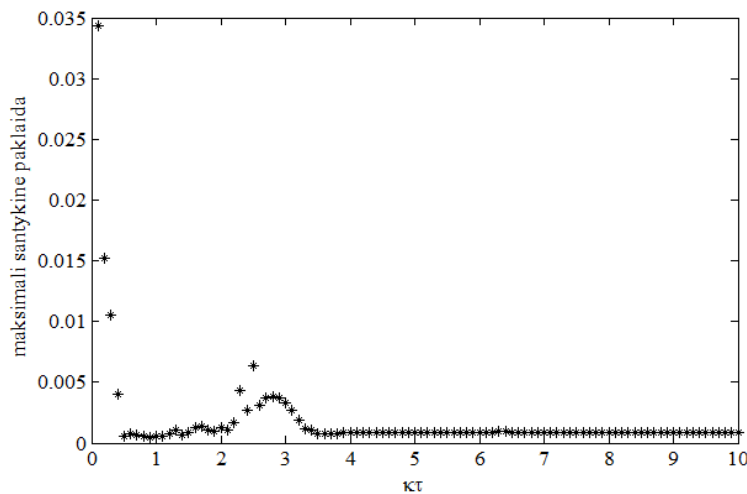
### 3. SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS MATEMATINIO MODELIO LYGINIMAS, TAIKANT NUOSEKLAUS INTEGRAVIMO IR DDE23 METODUS

Matricinės diferencialinės lygties su vėluojančiu argumentu sprendinys buvo gautas taikant nuoseklaus integravimo metodą. Naudojant gautą sprendinį tiriama sistemos generatorių virpesių fazių skirtumai. Rezultatai, gauti nuoseklaus integravimo metodu, lyginami su rezultatais, gautais dde23 metodu, aprašytu Matlab pakete.

Tirsime tokios sistemos generatorių virpesių fazių skirtumų pereinamuosius procesus naudodami nuoseklaus integravimo metodą. Gautus rezultatus palyginome su skaitiniu metodu, kuris paremtas dde23 funkcija, naudodami santykinę paklaidą (3.1):

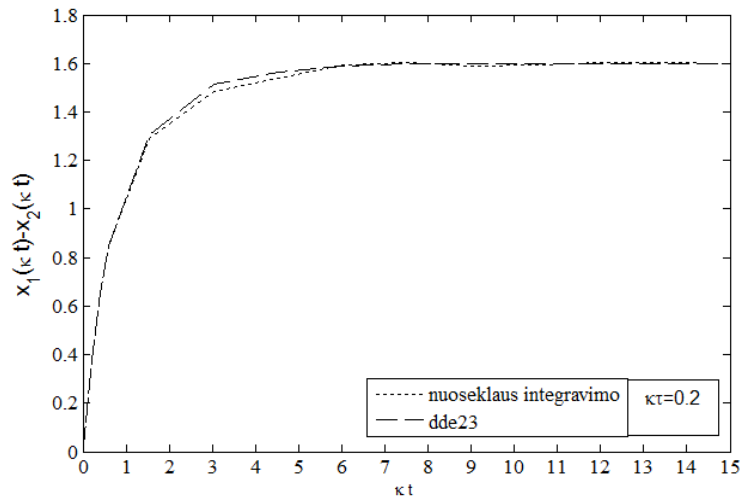
$$\sigma_{\max} = \frac{|x_{dde23}(\kappa\tau)_{\max} - x_{nuoseklaus\_integravimo}(\kappa\tau)_{\max}|}{x_{nuoseklaus\_integravimo}(\kappa\tau)_{\max}} \quad (3.1)$$

Maksimalios santykinės paklaidos priklausomybė nuo vėlavimo argumento, lyginant du metodus pateikta 3.1 pav.

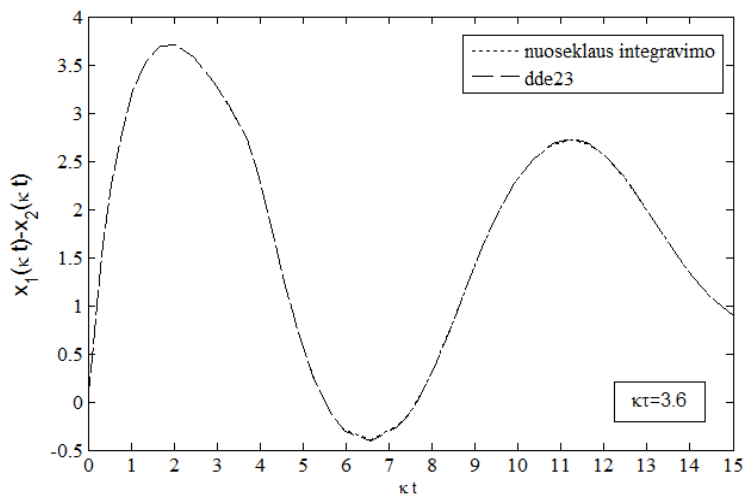


**3.1 pav. Maksimalios santykinės paklaidos priklausomybė nuo vėlavimo argumento**

Atlikus tyrimą nustatyta, kad mažiausia santykinė paklaida gaunama prie vėlavimų  $\kappa\tau > 3.4$  ir yra lygi  $\sigma_{\max} = 0.0009$ . Santykinė paklaida yra didžiausia, kai  $\kappa\tau = 0.2$  ir lygi  $\sigma_{\max} = 0.035$ .



**3.2 pav. Generatorių virpesių fazių skirtumo  $x_1(\kappa t) - x_2(\kappa t)$  grafikas, kai santykinė paklaida didžiausia, t.y.  $\sigma_{\max} = 0.035$**



**3.3 pav. Generatorių virpesių fazių skirtumo  $x_1(\kappa t) - x_2(\kappa t)$  grafikas, kai santykinė paklaida mažiausia, t.y.  $\sigma_{\max} = 0.0009$**

Tyrimui galime naudoti dde23 metodą, aprašytą Matlab pakete, jeigu mus tenkina rezultatai su paklaida  $\sigma_{\max} = 0.035$ .

## IŠVADOS

Darbe nagrinėjome tarpusavio sinchronizacijos sistemą, sudarytą iš penkių generatorių. Atlikę skaičiavimus bei išanalizavus grafikus, darome tokias išvadas:

1. Pereinamojo proceso trukmė sinchronizacijos sistemoje priklauso nuo parametrų  $\kappa$  ir  $\tau$  sandaugos. Didėjant  $\kappa\tau$ , pereinamojo proceso trukmė turi tendenciją didėti. Kuo didesnis  $\kappa\tau$ , tuo priverstinės sinchronizacijos sistemą sudarantiems generatoriams reikia daugiau laiko pasiekti sinchroniškumą.

2. Kai vėlavimo  $\tau$  ir koeficiento  $\kappa$  sandauga daug mažesnė už vienetą ( $\kappa\tau < 0.001$ ), pereinamosios funkcijos praktiškai nepriklauso nuo vėlavimo dydžio. Tuo atveju galima nagrinėti paprastesnį matematinį modelį – matricinę diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento.

3. Pereinamasis procesas sinchronizacijos sistemoje tampa virpamu, kai  $\kappa\tau > 1$ . Toliau didinant sandaugos  $\kappa\tau$  reikšmę, pereinamojo proceso virpamasis pobūdis stiprėja.

4. Naudojant „DDE23“ metodą gauname pereinamųjų funkcijų reikšmes ir generatorių virpesių fazių skirtumus daug greičiau negu nuoseklaus integravimo („žingsnių“) metodu. Metodą „DDE23“ lengvą ir patogų naudoti, jeigu mums pakanką žinoti tik apytiksles reikšmes.

## LITERATŪRA

1. Aksomaitis A., Dosinas G.S. Matricos ir tiesinė algebra. Kaunas: Raidės, 1976, 212 psl.
2. Ambrazevičius A., Domarkas A. Matematinės fizikos lygtys II d. Vilnius: Aldorija, 1999, 245-247 psl.
3. Barauskas A., Navickas Z., Tėvelis V. Kompleksinio kintamojo funkcijos ir operacinis skaičiavimas. Vilnius: Mokslas, 1986, 308 psl.
4. Bregni S. Historical Perspective on telecommunications networks. IEEE Communications Magazine. June 1998, 158-166 psl.
5. Dragutin Debeljkovic, Time-Delay Systems Ed, ISBN 978-953-307-559-4, Hard cover, 226 pages, Publisher: InTech, Published: February 10, 2011 under CC BY-NC-SA 3.0 license, in subject Control Engineering
6. Gečys S., Kalvaitis A., Smolskas P. Elektros mašinos IId. Sinchroninės mašinos nuolatinės srovės mašinos. Kaunas: Technologija, 2010, 96psl.
7. Ivanovienė I. and Rimas J. Analysis of a multidimensional control system with delays Electrical and Control Technologies : proceedings of the 6th international conference on Electrical and Control Technologies ECT 2011 / Kaunas University of Technology, IFAC Committee of National p. 124-129.
8. Ivanovienė I. and Rimas J. Investigation of the Multidimensional Automatic Control System, Having Structure of the Chain, Applying Lambert W Function. Analysis of a multidimensional control system with delays Electrical and Control Technologies: proceedings of the 6th international conference on Electrical and Control Technologies ECT 2012 / Kaunas University of Technology, IFAC Committee of National p. 194-200.
9. Ivanovienė I. ir Šmulienė D. Sinchronizacijos sistemos matematinio modelio tyrimas, taikant nuoseklaus integravimo ir DDE23 metodus / XII taikomosios matematikos konferencija 2014 / Kauno Technologijos universitetas.
10. Krivickas R. Jočys A. Grandinių teorijos pagrindai. Vilnius: Mokslas, 1980, 234-235 psl.
11. Kvedaras B. Matricų teorija. Kaunas: Vytauto Didžiojo universiteto leidykla, 1999, 32-40 psl.
12. Lisauskas S., Automatinio valdymo teorija, Vilnius: „Technika“, 2012, 25-41 psl.

13. Paulauskas V., Račkauskas A. Funkcinė analizė II knyga, Funkcijos ir lygtys. Vilnius, 2007, 182-190 psl.
14. Rimas J. Operacinis skaičiavimas. Kaunas: Technologija, 2006, 4-23 psl.
15. Shampine L.F. and Thompson S. Solving DDEs in Matlab, Applied Numerical Mathematics, 2001, 441 – 458 psl.
16. [www.mif.vu.lt/~algirdas/mflk2/mflk27.pdf](http://www.mif.vu.lt/~algirdas/mflk2/mflk27.pdf)
17. [www.asu.lt/nm/failai/Matematinis\\_modeliavimas/7.htm](http://www.asu.lt/nm/failai/Matematinis_modeliavimas/7.htm)

# 1 PRIEDAS

## $B^k$ elementų išraiškos

$$a_{11} = (-1)^k \cdot \frac{1}{3} - 2^k \cdot \frac{2a + 2b + 2ab + 8}{6a + 6b - 3ab - 12} + \left( b^k \left( b - \frac{2}{b} \right) \left( \frac{2b + ab}{2a - 2b + b^2 - ab} \right) \right) -$$

$$- \left( a^k \left( a - \frac{2}{b} \right) \left( \frac{2a + ab}{2a - 2b - a^2 + ab} \right) \right);$$

$$a_{12} = -(-1)^k \cdot \frac{1}{3} + 2^k \cdot \frac{10a + 10b + ab + 4}{12a + 12b - 6ab - 24} - \left( b^k \left( b - \frac{2}{b} \right) \left( \frac{2b + ab}{2a - 2b + b^2 - ab} \right) \right) -$$

$$- \left( a^k \left( a - \frac{2}{a} \right) \left( \frac{2a + ab}{2a - 2b - a^2 + ab} \right) \right);$$

$$a_{13} = -2^k \cdot \frac{ab + 2}{2a + 2b - ab - 4} + \left( b^k \left( b - \frac{2}{b} \right) \left( \frac{b + ab}{2a - 2b + b^2 - ab} \right) \right) -$$

$$- \left( a^k \left( a - \frac{2}{a} \right) \left( \frac{(b+1)(2a+ab)}{(b+2)(2a-2b-a^2+ab)} \right) \right);$$

$$a_{14} = -(-1)^k \cdot \frac{1}{3} + 2^k \cdot \frac{2a + 2b + 2ab + 2}{6a + 6b - 3ab - 12} - \left( b^k \left( b - \frac{2}{b} \right) \left( \frac{b + ab}{2a - 2b + b^2 - ab} \right) \right) +$$

$$+ \left( a^k \left( a - \frac{2}{a} \right) \left( \frac{(b+1)(2a+ab)}{(b+2)(2a-2b-a^2+ab)} \right) \right);$$

$$a_{15} = (-1)^k \cdot \frac{1}{3} - 2^k \cdot \frac{1}{6}.$$

$$a_{21} = (-1)^k \cdot \frac{1}{3} - 2^k \cdot \frac{2a + 2b + 2ab + 8}{6a + 6b - 3ab - 12} + \left( b^k \left( \frac{2b + ab}{2a - 2b + b^2 - ab} \right) \right) - \left( a^k \left( \frac{2a + ab}{2a - 2b - a^2 + ab} \right) \right);$$

$$a_{22} = -(-1)^k \cdot \frac{1}{3} + 2^k \cdot \frac{10a + 10b + ab + 4}{12a + 12b - 6ab - 24} + \left( b^k \left( \frac{2b + ab}{2a - 2b + b^2 - ab} \right) \right) - \left( a^k \left( \frac{2a + ab}{2a - 2b - a^2 + ab} \right) \right);$$

$$a_{23} = -2^k \cdot \frac{ab + 2}{2a + 2b - ab - 4} + \left( b^k \left( \frac{b + ab}{2a - 2b + b^2 - ab} \right) \right) - \left( a^k \left( \frac{(b+1)(2a+ab)}{(b+2)(2a-2b-a^2+ab)} \right) \right);$$

$$a_{24} = -(-1)^k \cdot \frac{1}{3} + 2^k \cdot \frac{2a + 2b + 2ab + 2}{6a + 6b - 3ab - 12} + \left( b^k \left( \frac{b + ab}{2a - 2b + b^2 - ab} \right) \right) - \left( a^k \left( \frac{(b+1)(2a+ab)}{(b+2)(2a-2b-a^2+ab)} \right) \right);$$

$$a_{25} = a_{15}$$



$$\begin{aligned}
a_{31} &= 2^k \cdot \frac{1}{3} - 2^k \cdot \frac{2a+2b+2ab+8}{6a+6b-3ab-12} + \left( 2^k \left( \frac{2b+ab}{2a-2b+b^2-ab} \right) \right) - \left( 2^k \left( \frac{2a+ab}{2a-2b-a^2+ab} \right) \right); \\
a_{32} &= -2^k \cdot \frac{1}{3} + 2^k \cdot \frac{10a+10b+ab+4}{12a+12b-6ab-24} - \left( 2^k \left( \frac{2b+ab}{2a-2b+b^2-ab} \right) \right) + \left( 2^k \left( \frac{2a+ab}{2a-2b-a^2+ab} \right) \right); \\
a_{33} &= -2^k \cdot \frac{ab+2}{2a+2b-ab-4} + \left( 2^k \left( \frac{b+ab}{2a-2b+b^2-ab} \right) \right) - \left( 2^k \left( \frac{(b+1)(2a+ab)}{(b+2)(2a-2b-a^2+ab)} \right) \right); \\
a_{34} &= -2^k \cdot \frac{1}{3} + 2^k \cdot \frac{2a+2b+2ab+2}{6a+6b-3ab-12} - \left( 2^k \left( \frac{b+ab}{2a-2b+b^2-ab} \right) \right) + \left( 2^k \left( \frac{(b+1)(2a+ab)}{(b+2)(2a-2b-a^2+ab)} \right) \right); \\
a_{35} &= 2^k \cdot \frac{1}{6} + 2^k \cdot \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{41} &= 2^k \cdot \frac{1}{3} - 2^k \cdot \frac{2a+2b+2ab+8}{6a+6b-3ab-12} + \left( b^k \left( b - \frac{2}{b} \right) \left( \frac{2b+ab}{2a-2b+b^2-ab} \right) \right) - \\
&\quad - \left( a^k \left( a - \frac{2}{a} \right) \left( \frac{2a+ab}{2a-2b-a^2+ab} \right) \right); \\
a_{42} &= -2^k \cdot \frac{1}{3} + 2^k \cdot \frac{10a+10b+ab+4}{12a+12b-6ab-24} - \left( b^k \left( b - \frac{2}{b} \right) \left( \frac{2b+ab}{2a-2b+b^2-ab} \right) \right) + \\
&\quad + \left( a^k \left( a - \frac{2}{a} \right) \left( \frac{2a+ab}{2a-2b-a^2+ab} \right) \right); \\
a_{43} &= a_{13}; \\
a_{44} &= -2^k \cdot \frac{1}{3} + 2^k \cdot \frac{2a+2b+2ab+2}{6a+6b-3ab-12} - \left( b^k \left( b - \frac{2}{b} \right) \left( \frac{b+ab}{2a-2b+b^2-ab} \right) \right) + \\
&\quad + \left( a^k \left( a - \frac{2}{a} \right) \left( \frac{(b+1)(2a+ab)}{(b+2)(2a-2b-a^2+ab)} \right) \right); \\
a_{45} &= a_{35}.
\end{aligned}$$

$$a_{51} = (-1)^k \cdot \frac{1}{3} - 2^k \cdot \frac{2a + 2b + 2ab + 8}{6a + 6b - 3ab - 12} + \left( b^k \left( \frac{2b + ab}{2a - 2b + b^2 - ab} \right) \right) -$$

$$- \left( a^k \left( \frac{2a + ab}{2a - 2b - a^2 + ab} \right) \right);$$

$$a_{52} = -(-1)^k \cdot \frac{1}{3} + 2^k \cdot \frac{10a + 10b + ab + 4}{12a + 12b - 6ab - 24} - \left( b^k \left( \frac{2b + ab}{2a - 2b + b^2 - ab} \right) \right) -$$

$$- \left( a^k \left( \frac{2a + ab}{2a - 2b - a^2 + ab} \right) \right);$$

$$a_{53} = a_{23};$$

$$a_{54} = a_{24}'$$

$$a_{55} = (-1)^k \cdot \frac{1}{3} + 2^k \cdot \frac{1}{6}.$$

## 2 PRIEDAS

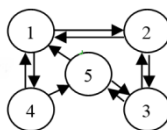
### Straipsnis iš taikomosios matematikos XII konferencijos

#### SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS MATEMATINIO MODELIO TYRIMAS, TAIKANT NUOSEKLAUS INTEGRAVIMO IR DDE23 METODUS

D. Šmuilienė, I. Ivanovienė

Kauno technologijos universitetas

Tiriamas tarpusavio sinchronizacijos sistemos, kurios struktūra yra pavaizduota 1 pav., matematinis modelis. Sistemos matematinis modelis yra matricinė diferencialinė lygtis su vėluojančiu argumentu. Matricinės diferencialinės lygties su vėluojančiu argumentu sprendinys yra gaunamas taikant nuoseklaus integravimo metodą. Naudojant gautą sprendinį tiriami sistemos generatorių virpesių fazių skirtumai. Rezultatai, gauti nuoseklaus integravimo metodu, lyginami su rezultatais, gautais dde23 metodu, aprašytu Matlab pakete.



1.pav. Sinchronizacijos sistemos struktūra

Nagrinėjamos sinchronizacijos sistemos matematinis modelis aprašomas šia matricine diferencialine lygtimi su vėluojančiu argumentu:

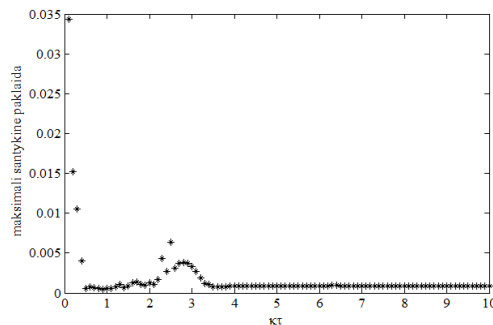
$$\begin{aligned}x'(t) + B_1 x(t) + B_2 x(t - \tau) &= z(t), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0];\end{aligned}$$

čia  $\tau$  – pastovus vėlavimas,  $\phi(t)$  – pradinė vektorinė funkcija,  $z(t)$  – laisvasis narys (tolydi funkcija priklausanti nuo pradinių sąlygų),  $\kappa$  – koeficientas,  $B_1$  ir  $B_2$  skaitinės kvadratinės matricos

$$B_2 = \frac{\kappa}{2} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

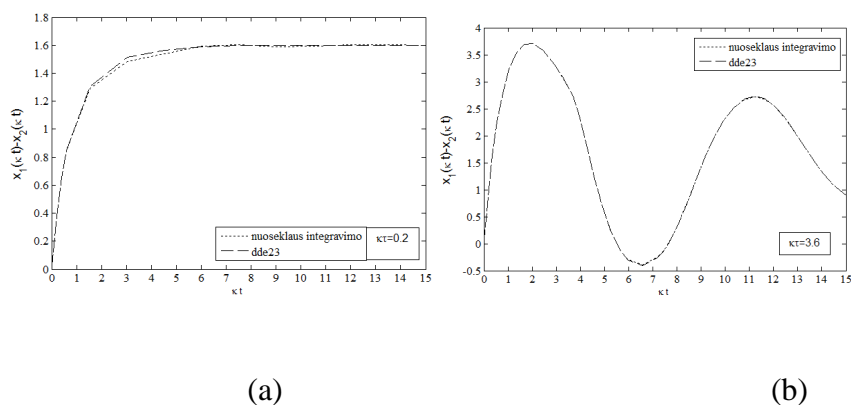
Tirsime tokios sistemos generatorių virpesių fazių skirtumų pereinamuosius procesus naudodami nuoseklaus integravimo metodą, palyginsime gautus rezultatus su dde23 metodu, naudodami santykinę paklaidą:

$$\sigma_{\max} = \frac{|x_{\text{dde23}}(\kappa\tau)_{\max} - x_{\text{nuoseklaus\_integravimo}}(\kappa\tau)_{\max}|}{x_{\text{nuoseklaus\_integravimo}}(\kappa\tau)_{\max}}$$



**2.pav. Maksimalios santykinės paklaidos priklausomybė nuo vėlavimo argumento, lyginant du metodus (dde23 ir nuoseklaus integravimo)**

Atlikus tyrimą nustatyta, kad mažiausia santykinė paklaida gaunama prie vėlavimų  $\kappa\tau > 3.4$  ir yra lygi  $\sigma_{\max} = 0.0009$ . Santykinė paklaida yra didžiausia, kai  $\kappa\tau = 0.2$  ir lygi  $\sigma_{\max} = 0.035$ .



**3.pav. Generatorių virpesių fazių skirtumų  $x_1(\kappa\tau) - x_2(\kappa\tau)$  grafikai: a) kai  $\kappa\tau = 0.2$ , b) kai  $\kappa\tau = 3.6$ .**

Tyrimui galime naudoti dde23 metodą, aprašytą Matlab pakete, jeigu mus tenkina rezultatai su paklauda  $\sigma_{\max} = 0.035$  .

#### **Literatūra**

1. Rimas J. Operacinis skaičiavimas. Kaunas, 1999, 51 p.
2. Matlab M-Files for the dde23 Tutorial, prieiga per internetą: <http://www.radford.edu/~thompson/webddes/etable.html>

## 3 PRIEDAS

### Matlab programos M-failai

#### heavis.m

```
function [h]=heavis(T)
if T>=0
    h=1;
else
    h=0;
end
```

#### history.m

```
function s = history(t)
% s = exp(t)*heavis(t);
kapa=1;
s = [0;0;0;0;exp(-kapa*t)*heavis(t)];
```

#### lap1.m

```
function [B]=lap1(t,T,kapa,ii,jj)
[n,m]=size(t);%//Pasižymime, koks duomenų kiekis užduotas
if n>m
    l=n;
    t=t';
else
    l=m;
end
Ad=[0 1 0 1 0;
    1 0 1 0 0;
    0 1 0 0 1;
    1 0 0 0 1;
    1 0 1 0 0];
b=0; %//Pasižymime kad kapa bus konstanta
for i=1:l %//Pasižymime, kad t imsime iš eilės, t.y. t(1)=0,t(2)=1. . . t(l)=20,
jeigu pasirinksimė intervalą [0; 20]
L=t(l)/T+1;
    for k=0:L;%//Pasižymime, kad mūsų suma bus nuo 0 iki L
a1=Ad^k;
        b=b+((1/(2.^k))*(1/factorial(k))*a1(ii,jj)*(((kapa*t(i)-
k*kapa*T)).^k)*exp(-(kapa*t(i)-k*kapa*T))*(heavis((kapa*t(i))-k*kapa*T)));
    end
    B(i)=b;
    b=0;
end
```

#### nim.m

```
function B=nim(t,T,kapa)
tic;
n=5;
```

```

B1={ [n,1]};
for i=1:n
    B1{i,1}=lapl(t,T,kapa,i,5);
end
B=cell2mat(B1);
toc;
end

```

### skaiciuoti.m

```

function skaiciuoti
kapa=1;%Stiprinimo koeficientas
T=3; %V?lavimo argumentas
sol=dde23('dde23z',T,'history',[0,01:25]);%dde23 metodu skai?iuojama hil(t)
pereinamosios funkcijos
% plot(sol.x,SP(sol.x,Ck(N,T,A,A1),T,A,A1),':',sol.x,sol.y,'--
',sol.x,lapl(sol.x,T,kapa,A1)) %Brai?oma pereinamosios funkcijos trims metodais
plot(sol.x,sol.y,'--',sol.x,nim(sol.x,T,kapa),':') %Brai?oma pereinamosios
funkcijos trims metodais
end

```

### dde23z.m

```

function v= dde23z(t,y,Z)
ylag1=Z(:,1);
v=zeros(5,1);
    kapa=1;
v(1)= -kapa*y(1)+      (kapa/2)*ylag1(2)+      (kapa/2)*ylag1(4);
v(2)=  -kapa*y(2)+      (kapa/2)*ylag1(1)+      (kapa/2)*ylag1(3);
v(3)=  -kapa*y(3)+      (kapa/2)*ylag1(2)+      (kapa/2)*ylag1(5);
v(4)=  -kapa*y(4)+      (kapa/2)*ylag1(1)+      (kapa/2)*ylag1(5);
v(5)=  -kapa*y(5)+      (kapa/2)*ylag1(1)+      (kapa/2)*ylag1(3);

```

```

function [s1]=ssa1(t,T)
[b,m]=size(t);
if b>m
    l=b;
    t=t';
else
    l=m;
end
f01=(2001);
f02=(1999);
f03=(1999);
f04=(1999);
f05=(1999);
fi01=0.3;
fi02=0.3;
fi03=0.3;
fi04=0.3;
fi05=0.3;
s1=0;
kapa=1;
L=t(l)+1;
for j=1:l

```

```

for k=1:L
    B=[0 1 0 1 0 ;
        1 0 1 0 0;
        0 1 0 0 1;
        1 0 0 0 1;
        1 0 1 0 0]^k;
    a1=fi01.*(B(1,1)-B(2,1))+fi02.*(B(1,2)-B(2,2))+fi03.*(B(1,3)-
B(2,3))+fi04.*(B(1,4)-B(2,4))+fi05.*(B(1,5)-B(2,5));
    s1=s1+(1/(2.^k)).*a1.*(((kapa*t(j))-k.*kapa.*T).^k)./factorial(k))*exp(-
(kapa*t(j)-k.*kapa.*T))*heavis(kapa*t(j)-k*kapa*T);
end
end
end

```

```

function [s2]=ssa2(t,T)
[b,m]=size(t);
if b>m
    l=b;
    t=t';
else
    l=m;
end
u=0;
s2=0;
kapa=1;
f01=(2001);
f02=(1999);
f03=(1999);
f04=(1999);
f05=(1999);
fi01=0.3;
fi02=0.3;
fi03=0.3;
fi04=0.3;
fi05=0.3;
fi13=fi01+fi03;
fi24=fi02+fi04;
fi25=fi02+fi05;
fi15=fi01+fi05;
f13=f01+f03;
f24=f02+f04;
f25=f02+f05;
f15=f01+f05;
L=t(l)+1;
for j=1:l
    for k=1:L
        B=[0 1 0 1 0 ;
            1 0 1 0 0;
            0 1 0 0 1;
            1 0 0 0 1;
            1 0 1 0 0]^k;
        a2=f01.*(B(1,1)-B(2,1))+f02.*(B(1,2)-B(2,2))+f03.*(B(1,3)-
B(2,3))+f04.*(B(1,4)-B(2,4))+f05.*(B(1,5)-B(2,5));
        a4=fi24/2*(B(1,1)-B(2,1))+fi13/2*(B(1,2)-B(2,2))+fi25/2*(B(1,3)-
B(2,3))+fi15/2*(B(1,4)-B(2,4))+fi13/2*(B(1,5)-B(2,5));
        a3=f24/2*(B(1,1)-B(2,1))+f13/2*(B(1,2)-B(2,2))+f25/2*(B(1,3)-
B(2,3))+f15/2*(B(1,4)-B(2,4))+f13/2*(B(1,5)-B(2,5));
        a22=a2+kapa*a4-kapa*T*a3;
    for r=0:k

```



```

    u=u+(((t(j)-k*kapa*T).^r)/factorial(r))*exp(-(t(j)-k*kapa*T));
    end
    s2=s2+((1/(2.^k))*a22*(1-u))* heavis(t(j)-k*kapa*T);
u=0;
    end
end
end

function [s3]=ssa3(t,T)
[b,m]=size(t);
if b>m
    l=b;
    t=t';
else
    l=m;
end
u=0;
s3=0;
kapa=1;
f01=(2001);
f02=(1999);
f03=(1999);
f04=(1999);
f05=(1999);
f13=f01+f03;
f24=f02+f04;
f25=f02+f05;
f15=f01+f05;
L=t(l)+1;
for j=1:l
    for k=1:L
B=[0 1 0 1 0 ;
    1 0 1 0 0;
    0 1 0 0 1;
    1 0 0 0 1;
    1 0 1 0 0]^k;
        a3=f24/2*(B(1,1)-B(2,1))+f13/2*(B(1,2)-B(2,2))+f25/2*(B(1,3)-
B(2,3))+f15/2*(B(1,4)-B(2,4))+f13/2*(B(1,5)-B(2,5));
        for r=0:k
            for s=0:r
                u=u+(((t(j)-k*kapa*T).^s)/factorial(s))*exp(-(t(j)-k*kapa*T));
            end
        end
        s3=s3+((1/(2.^k))*a3*((t(j)-k*kapa*T)-(k+1)+u))* heavis(t(j)-k*kapa*T);
    u=0;
    end
end
end

function [s4]=ssa4(t,T)
[b,m]=size(t);
if b>m
    l=b;
    t=t';
else
    l=m;
end
end

```

```

s4=0;
f01=(2001);
f02=(1999);
f03=(1999);
f04=(1999);
f05=(1999);
fi01=0.3;
fi02=0.3;
fi03=0.3;
fi04=0.3;
fi05=0.3;
fi13=fi01+fi03;
fi24=fi02+fi04;
fi25=fi02+fi05;
fi15=fi01+fi05;
f13=f01+f03;
f24=f02+f04;
f25=f02+f05;
f15=f01+f05;
kapa=1;
u=0;
L=t(1)+1;
for j=1:l
    for k=1:L
        B=[0 1 0 1 0 ;
            1 0 1 0 0;
            0 1 0 0 1;
            1 0 0 0 1;
            1 0 1 0 0]^k;
        a4=fi24/2*(B(1,1)-B(2,1))+fi13/2*(B(1,2)-B(2,2))+fi25/2*(B(1,3)-
B(2,3))+fi15/2*(B(1,4)-B(2,4))+fi13/2*(B(1,5)-B(2,5));
        for r=0:k
            u=u+(((t(j)-k*kapa*T).^r)/factorial(r))*exp(-(t(j)-k*kapa*T));
        end
        s4=s4+((1/(2.^k))*a4*(1-u))* heavis(t(j)-k*kapa*T);
    end
end
end

function [P]=penki(t,T)
[b,m]=size(t);
if b>m
    l=b;
    t=t';
else
    l=m;
end
kapa=1;
f01=(2001);
f02=(1999);
f03=(1999);
f04=(1999);
f05=(1999);
fi01=0.3;
fi02=0.3;
fi03=0.3;
fi04=0.3;
fi05=0.3;

```

```

fi13=fi01+fi03;
fi24=fi02+fi04;
fi25=fi02+fi05;
fi15=fi01+fi05;
f13=f01+f03;
f24=f02+f04;
f25=f02+f05;
f15=f01+f05;
bb11=1;
bb12=0;
bb13=0;
bb14=0;
bb15=0;
bb21=0;bb22=1;bb23=0;bb24=0;bb25=0;
L=t(1)+1;
for j=1:L
    aa121=fi01*(bb11-bb21)+fi02*(bb12-bb22)+fi03*(bb13-bb23)+fi04*(bb14-
bb24)+fi05*(bb15-bb25);
    aa122=f01*(bb11-bb21)+f02*(bb12-bb22)+f03*(bb13-bb23)+f04*(bb14-
bb24)+f05*(bb15-bb25);
    aa123=fi24/2*(bb11-bb21)+fi13/2*(bb12-bb22)+fi25/2*(bb13-
bb23)+fi15/2*(bb14-bb24)+fi13/2*(bb15-bb25);
    aa124=f24/2*(bb11-bb21)+f13/2*(bb12-bb22)+f25/2*(bb13-bb23)+f15/2*(bb14-
bb24)+f13/2*(bb15-bb25);
    aa1222=aa122+aa123-kapa*T*aa124;
    ss1=aa121*exp(-t(j))*heavis(t(j));
    ss2=aa1222*(1-exp(-t(j)))*heavis(t(j));
    ss3=aa124*(t(j)-1+exp(-t(j)))*heavis(t(j));
    ss33=aa124*((t(j)-kapa*T)-1+exp(-(t(j)-kapa*T)))*heavis(t(j)-kapa*T);
    ss44=aa123*(1-exp(-(t(j)-kapa*T)))*heavis(t(j)-kapa*T);
    s1=ssa1(t(j),T);
    s2=ssa2(t(j),T);
    s3=ssa3(t(j),T);
    s4=ssa4(t(j),T);
    s33=ssa3(t(j)-kapa*T,T);
    s44=ssa4(t(j)-kapa*T,T);
    P(j)=ss1+ss2+ss3-ss33-ss44+s1+s2+s3-s33-s44;
end
end

```