



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS  
MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS  
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**Giedrė Jančytė**

**NEŽINOMO SKIRSTINIO TANKIO  
PAVIDALO NUSTATYMAS IR  
VIZUALIZAVIMAS**

Magistro darbas

**Vadovas  
doc. dr. T. Ruzgas**

**KAUNAS, 2014**



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**TVIRTINU**  
**Katedros vedėjas**  
**doc. dr. N. Listopadskis**  
**2014 06 02**

**NEŽINOMO SKIRSTINIO TANKIO**  
**PAVIDALO NUSTATYMAS IR**  
**VIZUALIZAVIMAS**

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

**Vadovas**  
**doc. dr. T. Ruzgas**  
**2014 05 29**

**Recenzentas**  
**prof.dr. V. Sakalauskas**  
**2014 05 30**

**Atliko**  
**FMMM 2 gr. stud.**  
**G. Jančytė**  
**2014 05 28**

**KAUNAS, 2014**

## KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

**Pirmininkas:** Juozas Augutis, profesorius (VDU)

**Sekretorius:** Eimutis Valakevičius, profesorius (KTU)

**Nariai:** Jonas Valantinas, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Kristina Štutienė, docentė (KTU)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., direktoriaus pavaduotojas (UAB „Danet Baltic“)

**Jančytė G. Unknown distribution density visualization and determination: Master's work in applied mathematics / supervisor dr. assoc. prof. T. Ruzgas; Department of Applied mathematics, Faculty of Mathematics and Natural sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2014. – 123 p.**

## SUMMARY

This Master's work examines the use of flexible methods to approximate an unknown density function, and techniques appropriate for visualization of densities in up to  $d$  - dimensions. A very natural use of density estimates is in the informal investigation of the properties of a given set of data. Statistical modeling of data has two general purposes:

1. Understanding the shape and features of data through the density function, such as skewness and multimodality in the data;

2. Prediction of  $y$  through the joint density function,  $f(x, y)$ .

Let  $X(1), \dots, X(n)$  are monitored by independent  $d$  - dimensional random variables with unknown distribution density  $f(x)$ . If the function  $f(x)$  is not parametrized, nonparametric approaches are always appropriate for exploratory purposes, and should be used if the data do not follow a simple parametric form. In the following sections, these algorithms and theory of nonparametric density estimation will be described: histogram method,  $k$  - nearest neighbour and poorly studied kernel gradient method. For the visualization of multivariate data were implemented multidimensional scaling method.

While constructing various probability density estimation methods the most difficult task is to find optimal parameters. Every algorithm for nonparametric density estimation has one or more design parameters which are called the smoothing parameters or bandwidths of the procedure. The smoothing parameter controls the final appearance of the estimate. For an equally-spaced histogram, the bin width plays the primary role of a smoothing parameter. For a kernel estimator, the scale or width of the kernel serves as the smoothing parameter and for a  $k$  - nearest neighbour estimator, the smoothing parameter is the number of neighbours.

To objectively compare the performance, Monte Carlo approximation was used for fifteen types Gaussian mixtures and then an empirical analysis was made.

The master thesis is published in article of XII students Conference on Applied Mathematics.

## TURINYS

ĮVADAS.....	8
1. TEORINĖ DALIS.....	10
1.1 HISTOGRAMOS ĮVERTINYS.....	10
1.2 $K$ ARTIMIAUSIO KAIMYNO METODAS.....	10
1.3 GRADIENTINIS METODAS.....	12
1.4 DAUGIAMATĖS SKALĖS.....	14
1.5 PROGRAMINĖS ĮRANGOS APŽVALGA.....	15
2. TIRIAMOJI DALIS.....	16
2.1 TYRIMO DUOMENYS.....	16
2.2 TYRIMO REZULTATAI VIENMAČIU ATVEJU.....	18
2.4 TYRIMO REZULTATŲ APIBENDRINIMAS.....	31
2.5 EMPIRINIS TYRIMAS.....	32
2.6 EMPIRINIO TYRIMO REZULTATŲ APIBENDRINIMAS.....	37
3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI.....	39
IŠVADOS.....	40
LITERATŪRA.....	41
1 PRIEDAS. TYRIMO REZULTATAI, KAI $d = 1, d = 2$ .....	43
2 PRIEDAS. KONKRETAUS MIŠINIO TYRIMO REZULTATAI KINTANT IMTIES TŪRIUI IR DIMENSIJAI.....	99
3 PRIEDAS. PROGRAMOS TEKSTAS.....	115

## PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1.1 pav. $k$ artimiausio metodo idėja, kai $k = \sqrt{n}$ .....	11
1.2 pav. Gauso branduolio funkcija.....	13
1.3 pav. Reikšmingo gradiento sritis.....	14
1.4 pav. Reikšmingo išlinkio sritis.....	14
2.1 pav. Dvimodalinio su vienu koncentruotu centru mišinio grafikas, $d=1$ .....	18
2.2 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N = 50$ , $d=1$ .....	18
2.3 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N = 200$ , $d=1$ .....	18
2.4 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N=800$ , $d=1$ .....	19
2.5 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N = 3200$ , $d=1$ .....	19
2.6 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 50$ , $d=1$ .....	19
2.7 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 200$ , $d=1$ .....	19
2.8 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 800$ , $d=1$ .....	20
2.9 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 3200$ , $d=1$ .....	20
2.10 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 50$ , $d=1$ .....	20
2.11 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 200$ , $d=1$ .....	20
2.12 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 800$ , $d=1$ .....	21
2.13 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 3200$ , $d=1$ .....	21
2.14 pav. Diskrečių „šukų“ mišinio grafikas, $d=1$ .....	21
2.15 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N = 50$ , $d=1$ .....	22
2.16 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N = 200$ , $d=1$ ... 22	22
2.17 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N = 800$ , $d=1$ ... 22	22
2.18 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N=3200$ , $d=1$ ... 22	22
2.19 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 50$ , $d=1$ .....	23
2.20 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 200$ , $d=1$ .....	23
2.21 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 800$ , $d=1$ .....	23
2.22 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 3200$ , $d=1$ .....	23
2.23 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 50$ , $d=1$ .....	24
2.24 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 200$ , $d=1$ .....	24
2.25 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 800$ , $d=1$ .....	24
2.26 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 3200$ , $d=1$ .....	24
2.27 pav. Dvimodalinio su vienu koncentruotu centru mišinio grafikas, $d=2$ .....	25
2.28 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N = 50$ , $d=2$ .....	25
2.29 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N = 200$ , $d=2$ .....	25
2.30 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N = 800$ , $d=2$ .....	26
2.31 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N= 3200$ , $d=2$ .....	26
2.32 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 50$ , $d=2$ .....	26
2.33 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 200$ , $d=2$ .....	26

2.34 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 800$ , $d=2$ .....	27
2.35 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 3200$ , $d=2$ .....	27
2.36 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 50$ , $d=2$ .....	27
2.37 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 200$ , $d=2$ .....	27
2.38 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 800$ , $d=2$ .....	28
2.39 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 3200$ , $d=2$ .....	28
2.40 pav. Diskrečių „šukų“ mišinio grafikas, $d=2$ .....	28
2.41 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N = 50$ , $d=2$ .....	29
2.42 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N = 200$ , $d=2$ ..	29
2.43 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N = 800$ , $d=2$ ..	29
2.44 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas $k$ artimiausio kaimyno metodu, kai $N=3200$ , $d=2$ ..	29
2.45 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 50$ , $d=2$ .....	30
2.46 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 200$ , $d=2$ .....	30
2.47 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 800$ , $d=2$ .....	30
2.48 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai $N = 3200$ , $d=2$ .....	30
2.49 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 50$ , $d=2$ .....	31
2.50 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 200$ , $d=2$ .....	31
2.51 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 800$ , $d=2$ .....	31
2.52 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai $N = 3200$ , $d=2$ .....	31
2.53 pav. Kutaisi miesto komunalinių atliekų atvaizdavimas .....	33
taikant branduolio tankio gradientinį metodą .....	33
2.54 pav. Kutaisi miesto komunalinių atliekų.....	34
atvaizdavimas taikant $k$ artimiausio kaimyno metodą .....	34
2.55 pav. Kauno miesto komunalinių atliekų .....	34
atvaizdavimas taikant branduolio tankio gradientinį metodą .....	34
2.56 pav. Kauno miesto komunalinių atliekų .....	35
atvaizdavimas taikant $k$ artimiausio kaimyno metodą .....	35
2.57 pav. Borispilio miesto komunalinių atliekų .....	35
atvaizdavimas taikant branduolio tankio gradientinį metodą .....	35
2.58 pav. Borispilio miesto komunalinių atliekų atvaizdavimas $k$ artimiausio kaimyno metodu	36
2.59 pav. Sankt Peterburgo miesto komunalinių atliekų.....	36
atvaizdavimas taikant branduolio tankio gradientinį metodą .....	36
2.60 pav. Sankt Peterburgo miesto komunalinių atliekų.....	37
atvaizdavimas $k$ artimiausio kaimyno metodu .....	37
2.61 pav. Kutaisi miesto komunalinių atliekų tankio pavidalo aproksimavimas.....	38
2.62 pav. Kauno miesto komunalinių atliekų tankio pavidalo aproksimavimas.....	38
2.63 pav. Borispilio miesto komunalinių atliekų tankio pavidalo aproksimavimas .....	38
2.64 pav. Sankt Peterburgo miesto komunalinių atliekų tankio pavidalo aproksimavimas.....	38
3.1 pav. Parametrai mišinio generavimui .....	39

## IVADAS

Statistikoje ir jos taikyme vienas dažniausiai sprendžiamų uždavinių yra tankių vertinimas. Pagal tai, ar žinoma stebimo atsitiktinio dydžio skirstinio šeima, tankių vertinimas skirstomas į parametrinį ir neparametrinį vertinimą. Vertinant tankį parametriniais metodais turi būti tenkinamos sąlygos:

- nepriekaištinga kiekybinė skalė;
- pagrįsta empirinio skirstinio aproksimacija į statistikoje gerai išnagrinėtą normalų teorinį skirstinį.

Būtent todėl tyrimų praktikoje reikšmingi neparametriniai statistiniai kriterijai, kurie leidžia operuoti įvairių skalių (intervalinės, tvarkos, vardų) duomenimis ir neatsižvelgti į empirinio skirstinio tipą. Nors šiuolaikinėje duomenų analizėje žinoma gausybė pasiskirstymo tankio įvertinimo metodų, praktikoje nėra lengva parinkti efektyvią vertinimo procedūrą, jei duomenų pasiskirstymo tankis daugiamodalinis, o imties tūris nėra didelis [1].

### **Tiriamoji problema.**

Tegul  $X(1), \dots, X(n)$  yra stebimi nepriklausomi  $d$ -mačiai atsitiktiniai vektoriai su nežinomu pasiskirstymo tankiu  $f(x)$ . Jei funkcija  $f(x)$  nėra parametrizuota, jai įvertinti taikomi neparametriniai metodai, kurių parinkimas priklauso nuo nežinomo pasiskirstymo tankio  $f(x)$  glodumo taško  $X(t)$  aplinkoje, ką nustatyti beveik neįmanoma jei imtis nėra didelė, o tankis yra daugiamatis.

Magistro baigiamajame darbe Monte Karlo metodu buvo siekiama atlikti įvairių neparametrinėjų įvertinimų tikslumo lyginamąją analizę naudojantis histogramos, menkai nagrinėtu gradientiniu ir  $k$  artimiausio kaimyno metodais, tačiau pagrindinis dėmesys buvo skiriamas nežinomo skirstinio tankio formos nustatymui. Vizualizavimas – svarbi neparametrinės duomenų analizės dalis. Modernus duomenų analizės iššūkis – išnagrinėti sudėtingiausius duomenis, pavyzdžiui, duomenys gali būti stipriai besiskiriantys nuo normaliųjų, turėti daugiau nei vieną modą arba būti asimetriški, o didėjant duomenų dimensijai šių charakteristikų tyrimas tik sudėtingėja [2,3].

### **Tikslas ir uždaviniai:**

*Darbo tikslas* - ištirti daugiamatnio pasiskirstymo tankio neparametrinio vertinimo algoritmus, kurie būtų efektyvūs nustatant skirstinio tankio funkcijos formą.

*Pagrindiniai darbo uždaviniai:*

- atlikti populiarių neparametrinėjų tankių statistinių įverčių lyginamąją analizę daugiamodaliniu atveju;
- palyginti pasiskirstymo tankio įvairių vizualizavimo procedūrų taikymo efektyvumą;
- pritaikyti neparametrinėjų tankių vertinimo metodus atliekant empirinį tyrimą.



**Mokslinis naujumas.**

1. Iširtas gradientinis bei  $k$  artimiausio kaimyno metodas, skirtas tiek vienmačių, tiek daugiamačių tankių vizualizavimui daugiamodaliniu atveju.
2. Palyginti rezultatai, gauti vertinant anksčiau minėtu būdu penkiolikos tipų Gauso skirstinių mišinius.
3. Daugiamačių duomenų atvaizdavimui iširtas daugiamačių skalių metodas.
4. Pasiūlytas išnagrinėtų metodų tinkamumas praktikoje – atliktas empirinis tyrimas komunalinių atliekų duomenų analizei, kad būtų palengvinami atliekų tvarkymo sprendimų priėmimai, jų pagrindimas, atliekų tvarkymo darbų organizavimas ir atliekų kiekio stebėjimas.

**Rezultatų aprobavimas.** Magistrinio darbo tematika yra išspausdintas straipsnis 2014 m. XII studentų konferencijos „Taikomoji matematika“ medžiagoje. Šioje konferencijoje skaitytas pranešimas.

**Magistrinio darbo struktūra.** Darbą sudaro:

- Įvadas;
- Teorinė dalis, skirta tankio vertinimo, vizualizavimo algoritmų bei programinės įrangos aprašymui;
- Tiriamoji dalis ir rezultatai, jų interpretacija;
- Programinė realizacija ir instrukcija vartotojui;
- Išvados;
- Literatūros sąrašas;
- Priedai, kuriuose pateikiami nagrinėtų mišinių grafikai, rezultatų grafikai ir programos tekstas.

# 1. TEORINĖ DALIS

## 1.1 HISTOGRAMOS ĮVERTINYS

Vienas seniausių ir plačiausiai naudojamų neparimetrinio tankio įvertinių – histograma. Aproximuojant tankį  $f(x)$  srityje  $\Omega$ , yra skaičiuojamas stebinių  $X(t)$  skaičius, patenkantis į  $\Omega$ , ir dalinamas iš  $n$  bei srities  $\Omega$  tūrio. Konstruojant įvertinį, pirmiausia randama erdvės sritis, į kurią patenka visi stebiniai, t.y. randami visų  $X$  projekcijų į ašis  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(d)}$  svyravimo intervalai. Stebinių svyravimo intervalai padalijami į  $l$  dalinių intervalų ir jais apribotuose hiperkubuose  $\Omega_j$  ( $j=1, \dots, r$ ) apskaičiuojamas tankio įvertis:

$$f(x) = \frac{n(\Omega_j)}{n \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_d} \quad (1.1)$$

čia  $n(\Omega_j)$  – hiperkubą  $\Omega_j$  patenkančių stebinių skaičius, o  $h_j, j=1, \dots, d$  yra hiperkubo kraštinės [4,5,6]. Hiperkubų skaičių rekomenduojama [7,8,9] parinkti  $r \cong 1 + 3,32 \log n$ , o  $l = \sqrt[d]{r}$  turi būti sveikasis skaičius, kur  $r$  parenkamas taip:  $\lceil \sqrt[d]{1 + 3,32 \log n} \rceil^d$ , čia  $\lceil \cdot \rceil$  – sveikas, suapvalintas į didesnę pusę, skaičius.

Histograma yra viena iš paprasčiausių duomenų pateikimo priemonių, kuri lengvai suprantama ir patogi. Šis įvertis yra funkcija, įgyjanti neneigiamas reikšmes, o jos integralas lygus vienetui. Tačiau susiduriama su esminiu trūkumu – jis nėra tolydus. Dėl to kyla problemų, kai svarbu žinoti tankio įverčio išvestines ir ypač, kai tankio vertinimas naudojamas tarpiniuose kitų metodų žingsniuose, pavyzdžiui, klasterizavimui taikant gradientinį algoritmą ar formuojant didelio matavimo duomenų lygio linijų grafiką.

## 1.2 K ARTIMIAUSIO KAIMYNO METODAS

$k$  artimiausio kaimyno metodas – tai neparimetrinis algoritmas, kuris taikomas kai nėra jokių prielaidų dėl pagrindinių duomenų pasiskirstymo. Tarkime, kad turime  $d$  - mačių stebinių imtį  $\{y_i, i=1, \dots, n\}$ . Tegu  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai vektoriai, o jų tankis  $f(y)$ . Fix ir Hodges (1951) bei Loftsgaarden ir Quesenberry (1965) pasiūlytas  $k$  artimiausio kaimyno tankio įvertinys:

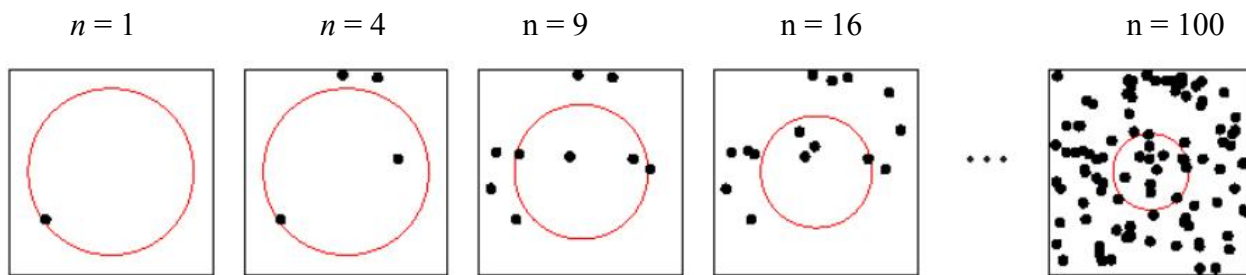
$$f_{k,n}(y) = \frac{k}{nV_d \|y - y_{(k,y)}\|^d}, \quad (1.2)$$

čia  $V_d$  – vienetinio rutulio tūris,  $y_{(k,y)}$  –  $k$  – tasis artimiausias stebinio  $y$  kaimynas iš visos imties stebinių  $\{y_i, i=1, \dots, n\}$ . Viena pagrindinių savybių – beveik visoms  $y$  reikšmėms  $f_{k,n}(y) \rightarrow f(y)$ , kai  $n \rightarrow \infty$ , jei  $k = o(n)$  ir  $k \rightarrow \infty$ . Kadangi  $k$  artimiausio kaimyno tankio įvertinys priklauso nuo koordinatių sistemos – ją pakeitus pakinta atstumai tarp stebinių  $\|y - y_i\|$ ,  $1 \leq i \leq n$ , buvo įvesti pakeitimai:

$$f_{k,n}(y) = \frac{k(d-1)!}{n \log^{d-1}(n/k(d-1)!) 2^d \prod_{j=1}^d |y^j - y_{(k)}^j|}, \quad (1.3)$$

čia  $y = (y^1, y^2, \dots, y^d)$ , o  $y^j$  –  $d$  – mačio vektoriaus projekcija į  $j$  – tąją ašį, o  $y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}$  – imties  $y_1, y_2, \dots, y_n$  perstatinys sandaugos  $\prod_{j=1}^d |y^j - y_{(k)}^j|$  didėjimo tvarka. Šis perstatinys yra nekintantis koordinatių ašių atliekamoms tiesinėms transformacijoms (bet ne posūkiams). Šis įvertis buvo nagrinėjamas tik trivialiu vienmačiu atveju ( $d = 1$ ), kai gaunamas standartinis  $k$  artimiausio kaimyno įvertinys. Kadangi koordinatių sistemos parinkimas skaičiavimuose yra labai svarbus, todėl šiuo aspektu  $k$  artimiausio kaimyno įvertinys labai naudingas [10].

Svarbiausias šio metodo uždavinys – parinkti parametą  $k$ . Būtent remiantis duomenimis apie  $k$  – ajį kaimyną yra atliekami skaičiavimai. Vertinant tankį taške  $x$ , brėžiamas hiperkubas, kurio centre – taškas  $x$ . Hiperkubas didinamas tol, kol užfiksuojama  $k$  reikšmių [11] (žr. 1.1 Pav).



1.1 pav.  $k$  artimiausio metodo idėja, kai  $k = \sqrt{n}$ .

Darbe bus naudojama Devroye ir Krzyżak (1991) pasiūlyta  $k$  išraiška:

$$k = \log(n), \quad (1.4)$$

čia  $n$  – imties tūris

### 1.3 GRADIENTINIS METODAS

Gradientinio metodo charakteristikų reikšmingumas remiasi branduolio tankio funkcijos gradiento (pirmosios išvestinės) ir išlinkio (antrosios išvestinės) tyrimu. Šį tyrimą vienos dimensijos duomenims išnagrinėjo Chaudhuri ir Marron (1999), dviejų dimensijų - Godtlielsen, Marron ir Chaudhuri (2002), o trijų bei keturių dimensijų - Duong, Cowling, Koch & Wand (2007). Didėjant duomenų dimensijai, svarbiausia charakteristika tampa lokalinis maksimumas, todėl šio maksimumo nustatymas yra pagrindinis metodo tikslas [12].

Tankio įverčiai suteikia naudingos informacijos apie duomenų charakteristikas. Kol kiekybinė charakteristikų informacija pateikta pirmoje ir antroje tikrojo tankio  $f$  išvestinėse, natūralu, kad  $f$  išvestinių įverčiai yra branduolio tankio įvertinio  $\hat{f}$  išvestinės [13,14].

$d$  - matis branduolio tankio įvertinys su branduolio funkcija  $K$  ir branduolio pločio parametru  $h$ , kuriuo galima įvertinti daugiamačių duomenų  $X \in R^d$  tankį  $f(x)$ , apibrėžiamas taip:

$$\hat{f} = \frac{1}{nh^d} \sum_{t=1}^n K\left(\frac{x - X(t)}{h}\right) \quad (1.5)$$

Tyrimui bus naudojama plačiai paplitusi ir matematinuose skaičiavimuose naudojama Gauso (Gaussian) branduolio funkcija (žr. Pav.3):

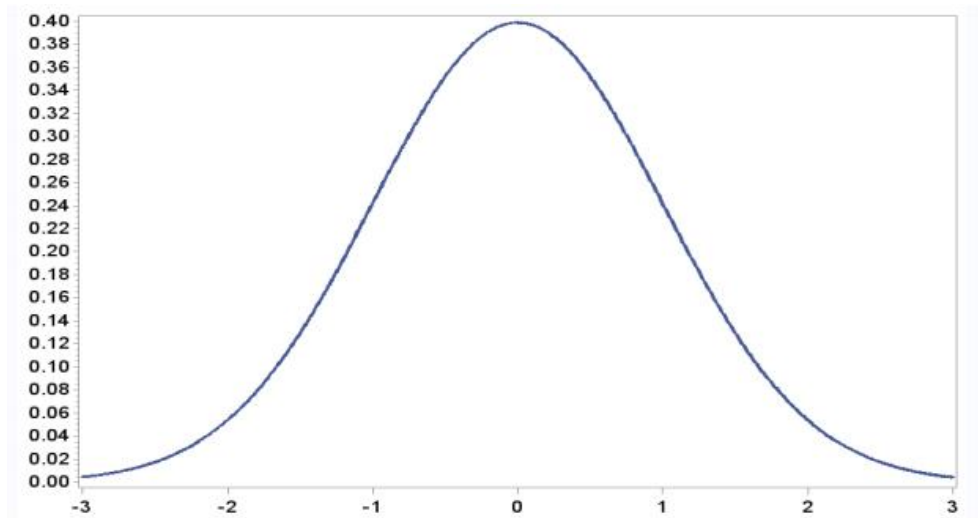
$$K(u) = \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}, \quad (1.6)$$

su pločio parametru, pasiūlytu Silverman (1986) Gauso branduolių atveju vienmačiu atveju:

$$h^* = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot n^{-\frac{1}{5}} \quad (1.7)$$

bei daugiamačiu, kur dydis  $q$  – duomenų dimensija [15]:

$$h^* = \left( \frac{(2!)^2 q \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^q}{4 \cdot \frac{q}{\pi^{q/2}} \cdot 2^{q+2} \cdot ((4-1)!! + (q-1)((2-1)!!)^2)} \right)^{1/(4+q)} \cdot n^{-1/(4+q)} \quad (1.8)$$



1.2 pav. Gauso branduolio funkcija

Gradiento reikšmingumo tyrimui taške  $x$  tikrinama hipotezė:

$$H_0(x) : \|\nabla f(x)\| = 0 \quad (1.9)$$

Skaičiuojama statistika:

$$W(x) = \|\hat{\nabla} f(x; H)\|^2, \quad (1.10)$$

kur  $\hat{\nabla} f(x; H)$  branduolio gradiento įvertinys su pločiu  $H$ , o  $\|\cdot\|$  – Euklido norma:

$$\hat{\nabla} f(x; H) = \nabla \hat{f}(x; H) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \nabla K_H(x - X_i), \quad (1.11)$$

Dvimačių duomenų reikšmingo gradiento regionas pateiktas 1.3 pav.

Išlinkio reikšmingumo tyrimui tikrinama hipotezė:

$$H_0(x) : \|\text{vech} \nabla^{(2)} f(x)\| = 0 \quad (1.12)$$

Čia:  $\text{vech} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} = [a \ b \ c \ d \ e \ f]^T$

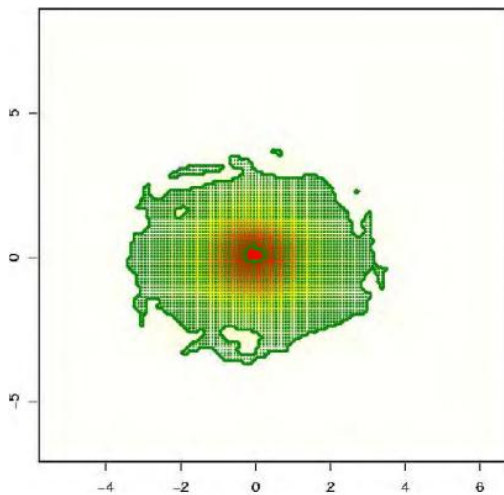
Skaičiuojama statistika:

$$W(x) = \|\nabla^{(2)} \hat{f}(x; H)\|^2, \quad (1.13)$$

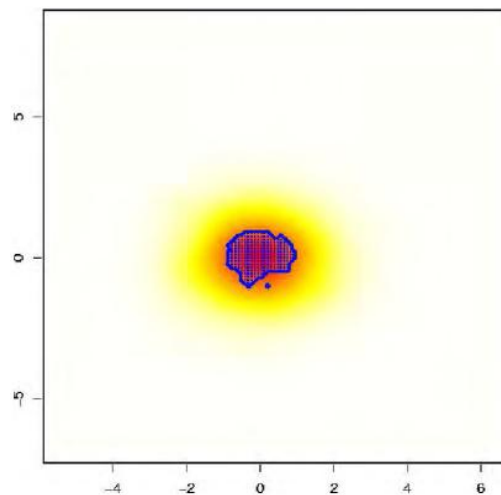
čia

$$\nabla^{(2)} \hat{f}(x; H) = \nabla^{(2)} \hat{f}(x; H) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \nabla^{(2)} K_H(x - X_i) \quad (1.14)$$

Dvimačių duomenų reikšmingo išlinkio sritis pateikta 1.4 pav.



1.3 pav. Reikšmingo gradiento sritis



1.4 pav. Reikšmingo išlinkio sritis

## 1.4 DAUGIAMATĖS SKALĖS

Daugiamačių duomenų atvaizdavimui magistriniame darbe bus naudojamas daugiamačių skalių (multidimensional scaling, MDS) metodas. Daugiamatės skalės - tai vienmačių skalių, kai objektai išdėstomi atkarpoje, apibendrinimas daugiamatėje erdvėje. Teoriškai objektų atvaizdavimą galima nagrinėti bet kokio skaičiaus matmenų erdvėje, tačiau praktiškai naudingos tik tokios, kurias galima vizualizuoti turimomis priemonėmis. Naudojant daugiamačių skalių metodą, ne tik daugiamačiai vektoriai, bet ir bendresnės daugiamačių duomenų aibės gali būti vizualizuojamos, nes pakankama informacija šiam metodui yra objektų artumas, apibrėžtas objektų porų skirtingumu. Šio metodo esmė – minimizuoti įtempimo funkciją, kuria naudojantis lyginami objektų skirtingumai su atstumais tarp tuos objektus atvaizduojančių taškų vaizdo erdvėje.

Daugiamačių skalių metodu sprendžiamas uždavinys, kaip  $m$  objektų, apibrėžtų panašumo duomenimis, gali būti patikimai atvaizduoti taškais mažo skaičiaus matmenų vaizdo erdvėje. Objektų panašumas yra apibrėžiamas jų porų skirtingumu (nepanašumu),  $i$ -ojo ir  $j$ -ojo objektų skirtingumas nusakomas realiuoju skaičiumi  $\delta_{ij}, i, j = 1, \dots, m$ . Taigi,  $d$ -matėje erdvėje ieškoma taškų  $Y_i \in R^d, i = 1, \dots, m$ , tarp kurių atstumai atitiktų skirtingumus. Atvaizdavimo kokybė matuojama įtempimo funkcija, kuria naudojantis lyginamas objektų skirtingumas su atstumu tarp juos atvaizduojančių taškų.

Dažniausiai naudojami Minkovskio atstumai, kurie apibrėžiami formule:

$$d_q(Y_i, Y_j) = \left( \sum_{k=1}^d |y_{ik} - y_{jk}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.15)$$

čia  $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{id})$  ir  $Y_j = (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jd})$ . Kai  $q = 2$ , pagal šią formulę apskaičiuojami Euklido atstumai, kurie ir buvo naudojami darbe. Dažniausiai naudojama mažiausiųjų kvadratų įtempimo funkcija:

$$S(Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_{ij} (d(Y_i, Y_j) - \delta_{ij})^2 \quad (1.16)$$

čia  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ ,  $d_q(Y_i, Y_j)$  žymi atstumą tarp taškų  $Y_i$  ir  $Y_j$ ,  $w_{ij} > 0$  yra teigiami svoriai.

Objektų vaizdas randamas minimizuojant įtempimo funkciją:  $d$ -matėje erdvėje ieškoma tokių  $m$  taškų koordinatų, kad įtempimo funkcija būtų minimali [16,17].

## 1.5 PROGRAMINĖS ĮRANGOS APŽVALGA

Neparametrinių tankio vertinimo algoritmų lyginamojo tyrimo atlikimui Monte Karlo metodu buvo pasirinkta R programinė įranga. R – tai matematinis statistikos paketas, skirtas spręsti praktiškai visus statistikos uždavinius. R iš esmės yra programavimo kalba su specializuota (statistikos reikmėms skirta) aplinka. Pagrindinės R charakteristikos:

- R kalba sukurta specialiai darbui su duomenimis. Jeigu SAS, SPSS arba STATISTICA neturi kokios nors funkcijos, ją beveik visada galima rasti R;
- R yra atvirojo kodo programa. Kiekvienas vartotojas gali naudotis R nemokamai, atsisiuntęs ją iš internetinio puslapio <http://www.r-project.org> ;
- R funkcijos yra apjungtos į bibliotekas (angl. packages), kurios gali būti prijungtos prie darbinės srities arba, kai nebereikalingos, atjungtos;
- Išplėtotas pagalbos mygtukas (angl. help) – realizuota labai daug pavyzdžių bei metodų, kurie padeda vartotojui naudoti juos tolimesnėje analizėje;
- Dauguma klasikinių statistinių ir kai kurios naujausios metodikos yra prieinamos naudojimui R, tačiau vartotojams gali tekti pasistengti norint juos rasti;
- Trūkumas yra tas, kad darbas su R vyksta per komandinę eilutę, o įprasti mygtukai, išsiskleidžiantys meniu beveik neegzistuoja, todėl nėra ir gerai suprantamos vartotojo sąsajos.

R statistinė analizė atliekama atskirais žingsniais, tarpinius rezultatus išsaugant objektuose. Tuo tarpu kai SAS ir SPSS pateiks gausų rezultatą sudarytą iš regresijų ar determinantų analizės, R pateiks minimalų rezultatą ir išsaugos tarpinius rezultatus patogiam tolesniam naudojimui kitomis R funkcijomis [18,19].

## 2. TIRIAMOJI DALIS

### 2.1 TYRIMO DUOMENYS

Ankstesnėje dalyje aprašytų neparametrinių tankių vertinimo algoritmų efektyvumo tyrimas atliktas Monte Karlo metodu.

Modeliavimui buvo panaudota penkiolika skirtingų Gauso skirstinių mišinių, kurie aprašomi:

$$f(x) = \sum_{i=1}^q p_i \varphi_i(x) = f(x, \theta), \quad (2.1)$$

$x \in \mathbf{R}^d$ , čia  $\theta = (p_i, M_i, R_i, i=1, 2, \dots, q)$ , su vidurkais  $M_i$  ir kovariacinėmis matricomis  $R_i$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ .

1) Gauso (angl. gaussian):

$$p_1 = 1, M_1 = (0, \dots, 0), R_1 = I = \text{diag}([1, \dots, 1])$$

2) Nukrypęs vienamodalinis (angl. skewed unimodal)

$$p_1 = 1/5, M_1 = (0, \dots, 0), R_1 = I = \text{diag}([1, \dots, 1])$$

$$p_2 = 1/5, M_2 = (1/2, 0, \dots, 0), R_2 = \text{diag}([(2/3)^2, \dots, (2/3)^2])$$

$$p_3 = 3/5, M_3 = (13/12, 0, \dots, 0), R_3 = \text{diag}([(5/9)^2, \dots, (5/9)^2])$$

3) Stipriai nukrypęs (angl. strongly skewed)

$$p_l = 1/8, M_l = (3((2/3)^l - 1), 0, \dots, 0), R_l = \text{diag}([(2/3)^{2l}, \dots, (2/3)^{2l}]), l = 0, \dots, 7$$

4) Smailas vienamodalinis (angl. kurtotic unimodal)

$$p_1 = 2/3, M_1 = (0, \dots, 0), R_1 = I = \text{diag}([1, \dots, 1])$$

$$p_2 = 1/3, M_2 = (0, \dots, 0), R_2 = \text{diag}([(1/10)^2, \dots, (1/10)^2])$$

5) Išsiskiriantis (angl. outlier)

$$p_1 = 1/10, M_1 = (0, \dots, 0), R_1 = I = \text{diag}([1, \dots, 1])$$

$$p_2 = 9/10, M_2 = (0, \dots, 0), R_2 = \text{diag}([(1/10)^2, \dots, (1/10)^2])$$

6) Dvimodalinis (angl. bimodal)

$$p_1 = 1/2, M_1 = (-1, 0, \dots, 0), R_1 = \text{diag}([(2/3)^2, \dots, (2/3)^2])$$

$$p_2 = 1/2, M_2 = (1, 0, \dots, 0), R_2 = \text{diag}([(2/3)^2, \dots, (2/3)^2])$$

7) Dvimodalinis su atskiriančiais centrais (angl. *separated bimodal*):

$$p_1 = 1/2, M_1 = (-3/2, 0, \dots, 0), R_1 = \text{diag}([(1/2)^2, \dots, (1/2)^2])$$

$$p_2 = 1/2, M_2 = (3/2, 0, \dots, 0), R_2 = \text{diag}([(1/2)^2, \dots, (1/2)^2])$$

8) Nukreiptas dvimodalinis (angl. skewed bimodal)

$$p_1 = 3/4, M_1 = (0, \dots, 0), R_1 = I = \text{diag}([1, \dots, 1])$$

$$p_2 = 1/4, M_2 = (3/2, 0, \dots, 0), R_2 = \text{diag}([(1/3)^2, \dots, (1/3)^2])$$

9) Trimodalinis (angl. trimodal):

$$p_1 = 9/20, M_1 = (-6/5, 0, \dots, 0), R_1 = \text{diag}([(3/5)^2, \dots, (3/5)^2])$$

$$p_2 = 9/20, M_2 = (6/5, 0, \dots, 0), R_2 = \text{diag}([(3/5)^2, \dots, (3/5)^2])$$



$$p_3 = 1/10, M_3 = (0, \dots, 0), R_3 = \text{diag}([(1/4)^2, \dots, (1/4)^2])$$

10) „Žnyplės“ (angl. claw)

$$p_1 = 1/2, M_1 = (0, \dots, 0), R_1 = I = \text{diag}([1, \dots, 1])$$

$$p_l = 1/10, M_l = (l/2-1, 0, \dots, 0), R_l = \text{diag}([(1/10)^2, \dots, (1/10)^2]), l = 0, \dots, 4$$

11) Dvigubos „žnyplės“ (angl. double claw)

$$p_1 = 49/100, M_1 = (-1, 0, \dots, 0), R_1 = \text{diag}([(2/3)^2, \dots, (2/3)^2])$$

$$p_2 = 49/100, M_2 = (1, 0, \dots, 0), R_2 = \text{diag}([(2/3)^2, \dots, (2/3)^2])$$

$$p_l = 1/350, M_l = ((l-3)/2, 0, \dots, 0), R_l = \text{diag}([(1/100)^2, \dots, (1/100)^2]), l = 0, \dots, 6$$

12) Asimetrinės „žnyplės“ (angl. asymmetric claw)

$$p_1 = 1/2, M_1 = (0, \dots, 0), R_1 = I = \text{diag}([1, \dots, 1])$$

$$p_l = 2^{1-l}/31, M_l = (l+1/2, 0, \dots, 0), R_l = \text{diag}([(2^{-l}/10)^2, \dots, (2^{-l}/10)^2]), l = -2, \dots, 2$$

13) Asimetrinės dvigubos „žnyplės“ (angl. asymmetric double claw)

$$p_j = 46/100, M_j = (2l-1, 0, \dots, 0), R_j = \text{diag}([(2/3)^2, \dots, (2/3)^2]), j = 0, 1$$

$$p_l = 1/100, M_l = (-l/2, 0, \dots, 0), R_l = \text{diag}([(1/100)^2, \dots, (1/100)^2]), l = 1, 2, 3$$

$$p_k = 1/100, M_k = (k/2, 0, \dots, 0), R_k = \text{diag}([(1/100)^2, \dots, (1/100)^2]), k = 1, 2, 3$$

14) Tolygios šukos (angl. smooth comb)

$$p_l = 2^{5-l}/63, M_l = (65-96(1/2)^l/21, 0, \dots, 0), R_l = \text{diag}([(32/63)/2^{2l}, \dots, (32/63)/2^{2l}]), l = 0, \dots, 5$$

15) Diskrečios šukos (angl. discrete comb)

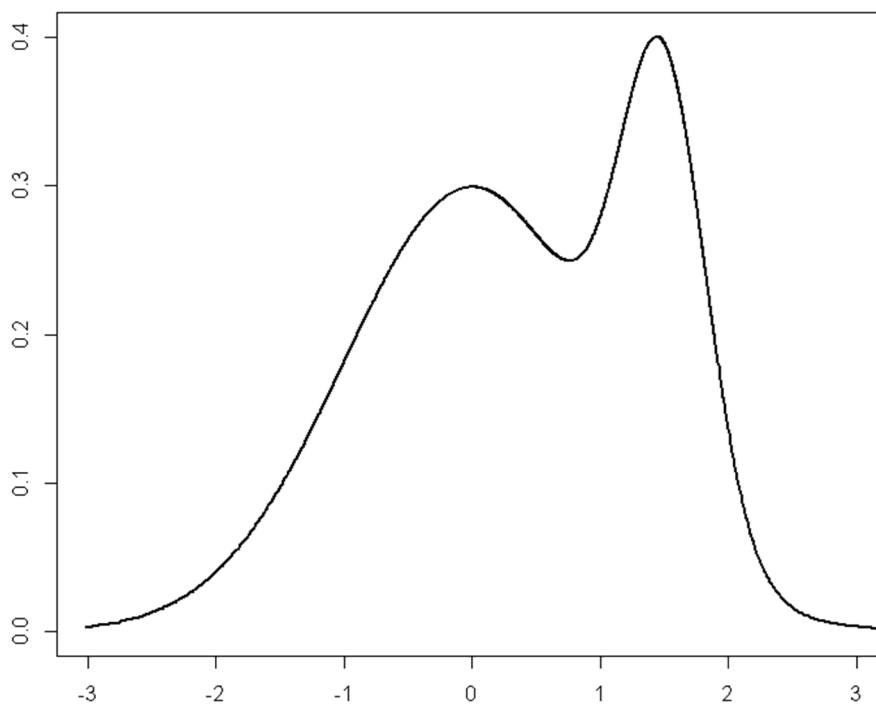
$$p_l = 2/7, M_l = ((12l-15)/7, 0, \dots, 0), R_l = \text{diag}([(2/7)^2, \dots, (2/7)^2]), l = 0, 1, 2$$

$$p_k = 1/21, M_k = (2l/7, 0, \dots, 0), R_k = \text{diag}([(1/21)^2, \dots, (1/21)^2]), k = 8, 9, 10$$

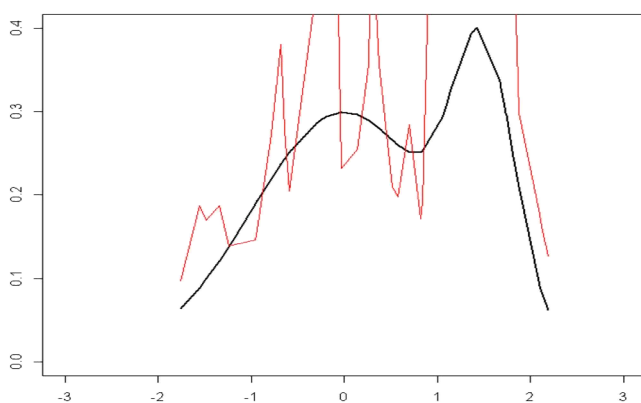
Tyrimui atlikti buvo naudotos vidutinio didumo imtys: 50, 100, 200, 400, 800, 1600, 3200, kai duomenų dimensija 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100. Daugelis svarbių tankio įvertinių yra pritaikyti daugiamačiams duomenims, bet kadangi visi daugiamačiai metodai yra vienmačių metodų apibendrinimas, pirmiausia reikėtų išnagrinėti vienmatį atvejį.

## 2.2 TYRIMO REZULTATAI VIENMAČIU ATVEJU

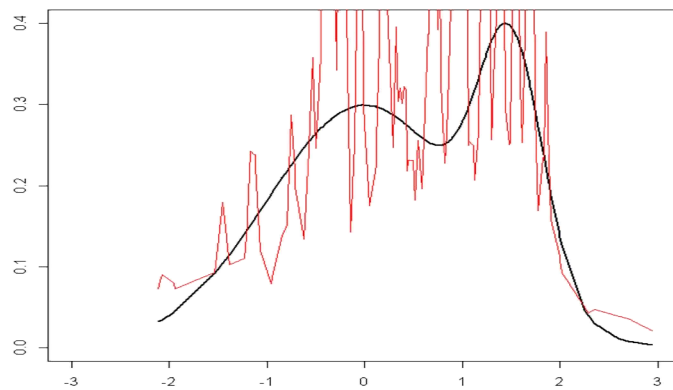
Atliekant modeliavimo analizę, lyginamajame tyrime kaip atskaitiniai tankiai buvo panaudoti Gauso skirstinių mišiniai. Tyrimo pavyzdžiui panagrinėkime dvimodalinį (2.1 pav) bei daugiamodalinį (2.14 pav.) mišinius, kai imties didumas lygus 50, 200, 800 ir 3200, o duomenų dimensija  $d = 1$ .



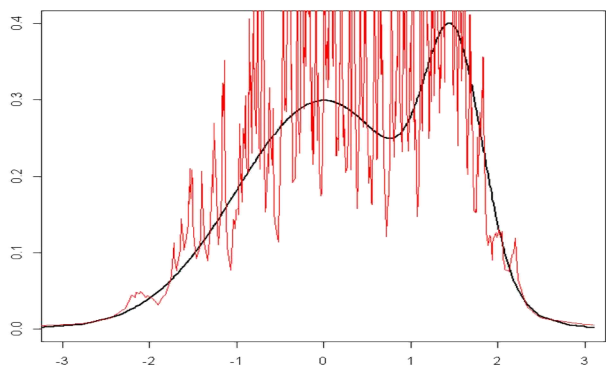
2.1 pav. Dvimodalinio su vienu koncentruotu centru mišinio grafikas,  $d=1$



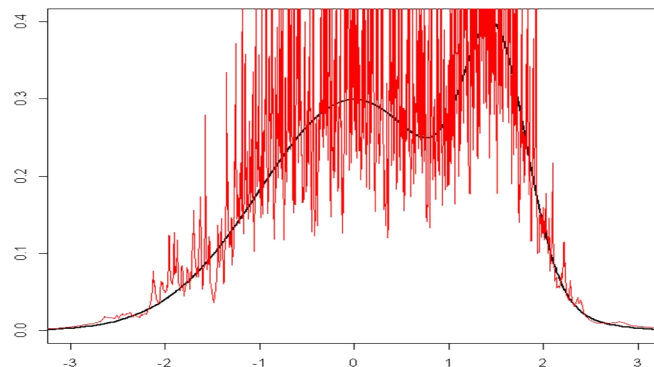
2.2 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N = 50$ ,  $d=1$



2.3 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N = 200$ ,  $d=1$

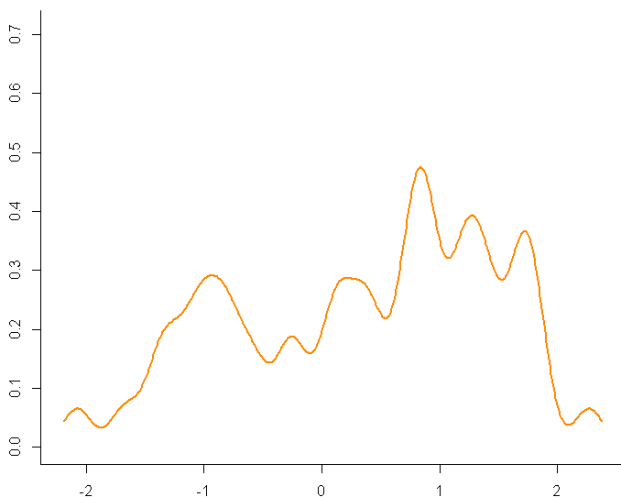


**2.4 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N=800$ ,  $d=1$**

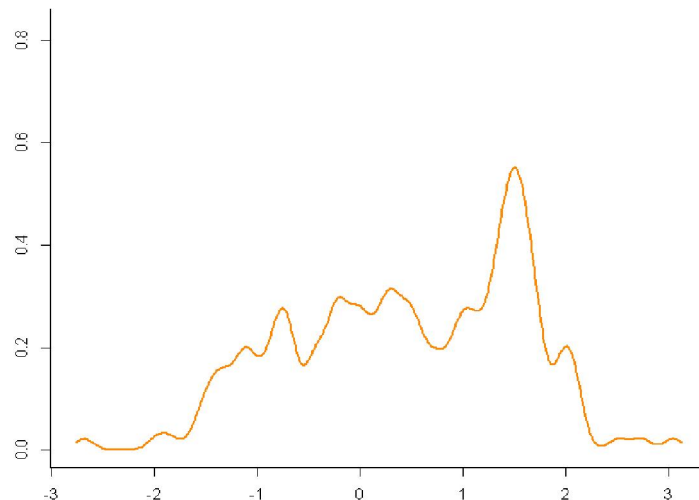


**2.5 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N = 3200$ ,  $d=1$**

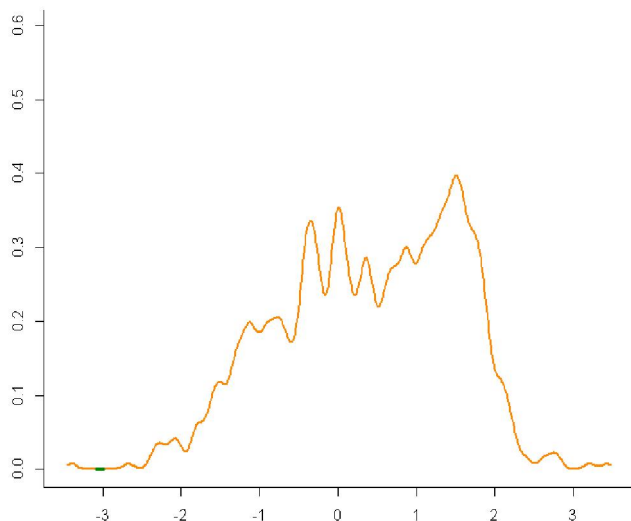
Iš 2.2 – 2.5 paveikslų matyti, kad  $k$  artimiausio kaimyno metodu vertinamą dvimodalinio tankio pavidalą nustatyti beveik neįmanoma, kadangi didėjant stebinių skaičiui, įverčiai pateikiami su didelėmis „uodegomis“, tankio pavidalą galima klaidingai aproksimuoti Gauso skirstinio mišiniu, turinčiu vieną modą. Remiantis pastebėjimais, galima daryti išvadą, kad  $k$  artimiausio kaimyno metodas nėra tinkamas besijungiančio dvimodalinio tankio formos nustatymui.



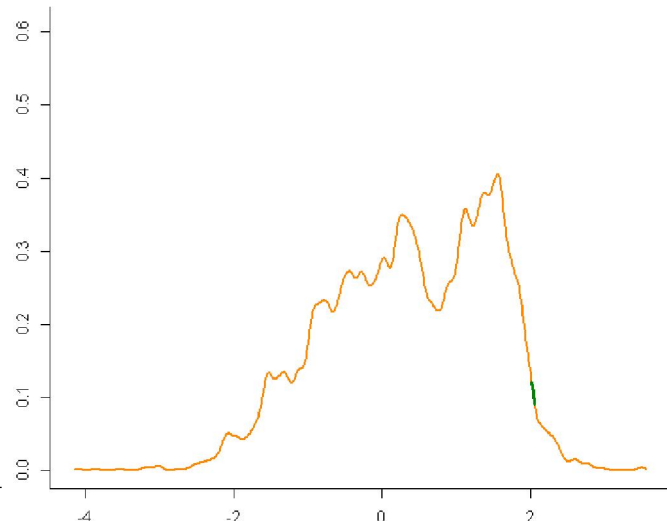
**2.6 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 50$ ,  $d=1$**



**2.7 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 200$ ,  $d=1$**

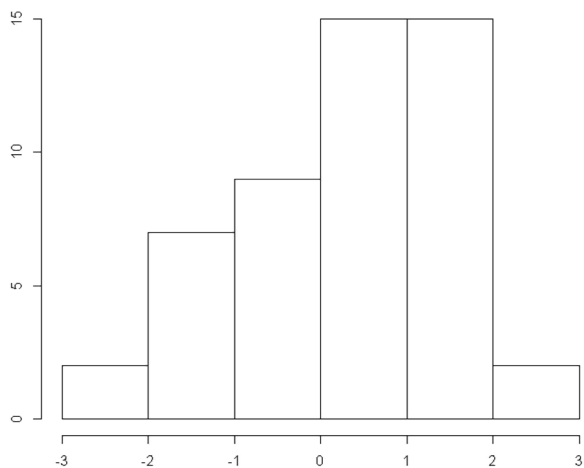


**2.8 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 800$ ,  $d=1$**

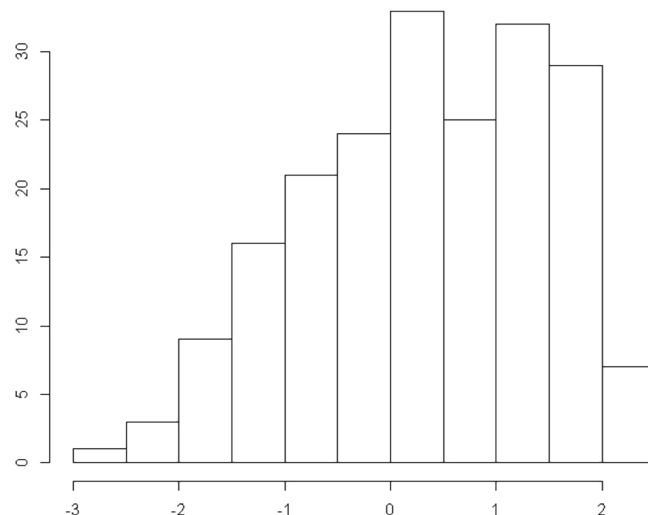


**2.9 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 3200$ ,  $d=1$**

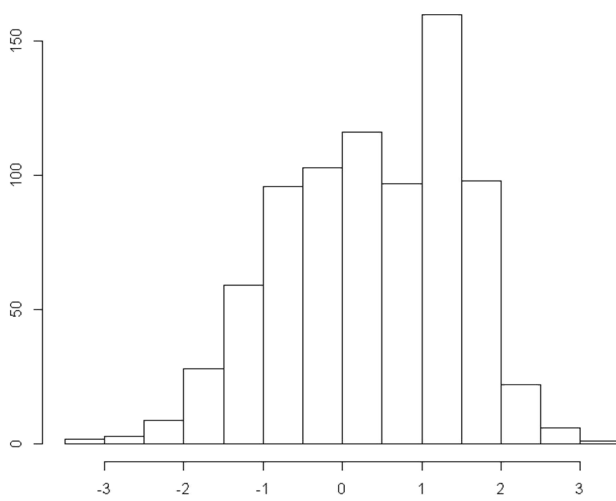
Iš 2.6 – 2.9 paveikslų matyti, kad vertinant dvimodalinę tankį branduolio tankio gradientiniu metodu vienmačiu atveju, tankio formą įmanoma nustatyti tik esant pakankamai dideliam imties tūriui (nagrinėtu atveju – 3200 stebinių). Rezultatų neefektyvumą esant mažiems imties tūriams lemia glodumo parametro parinkimas.



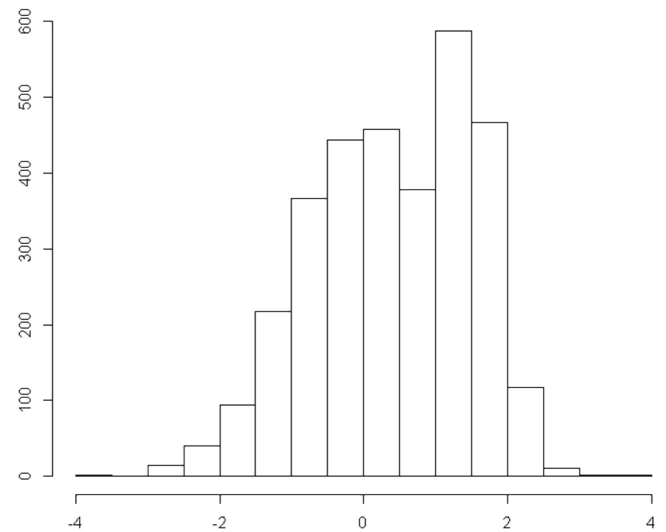
**2.10 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai  $N = 50$ ,  $d=1$**



**2.11 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai  $N = 200$ ,  $d=1$**

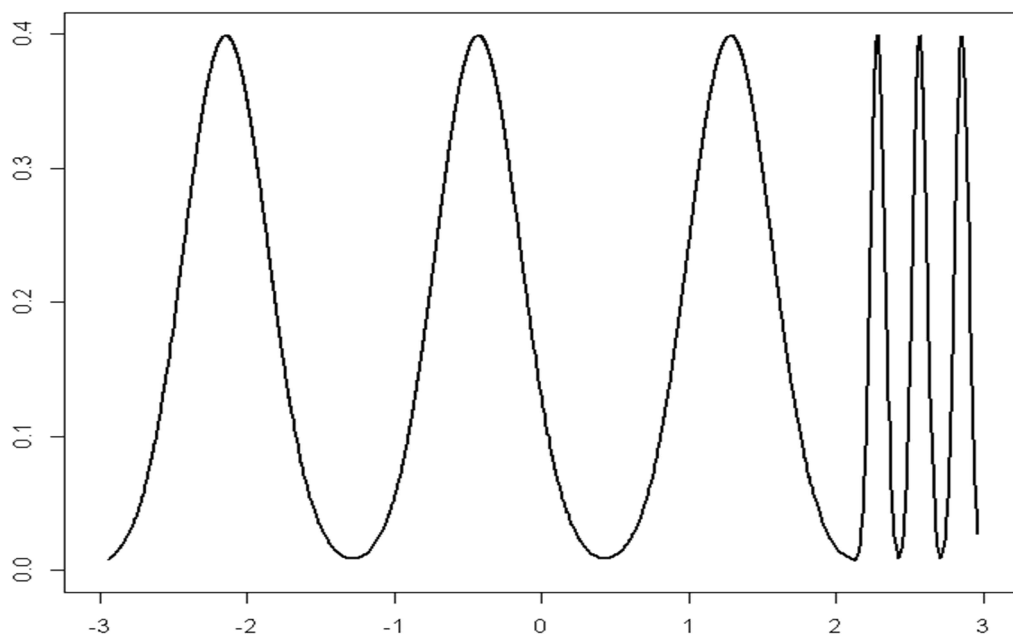


**2.12 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas  
histogramos metodu, kai  $N = 800$ ,  $d=1$**

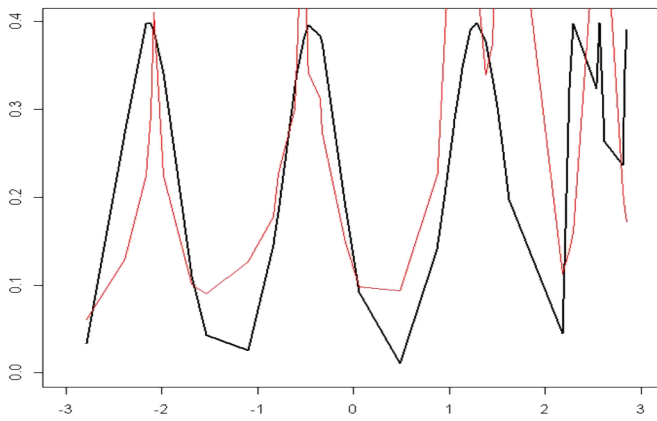


**2.13 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas  
histogramos metodu, kai  $N = 3200$ ,  $d=1$**

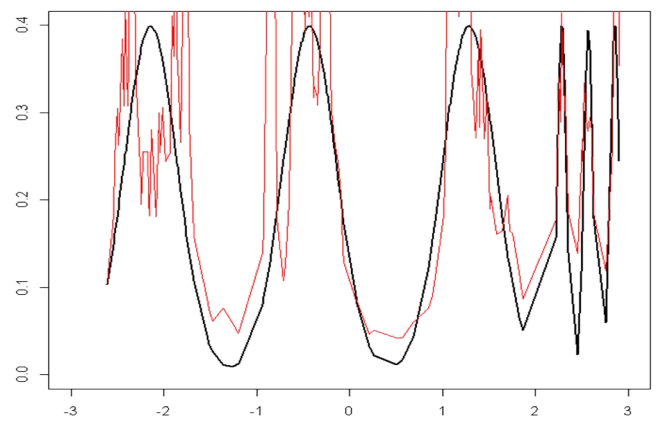
Vertinant tankį histogramos metodu, dvimodalinio tankio pavidalą nustatyti sudėtingiausia esant mažoms imtims ( 50, 200 stebinių).



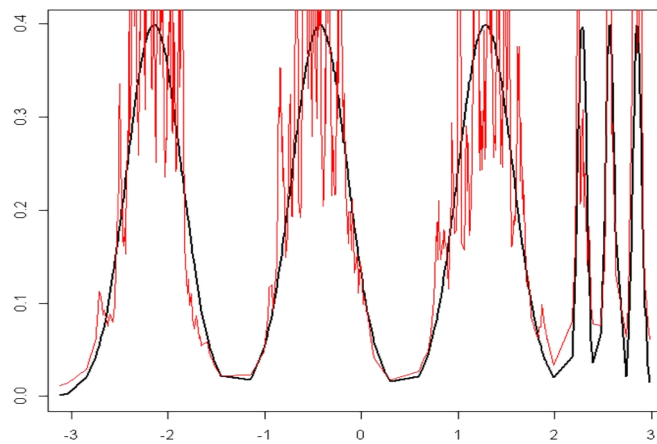
**2.14 pav. Diskrečių „šukų“ mišinio grafikas,  $d=1$**



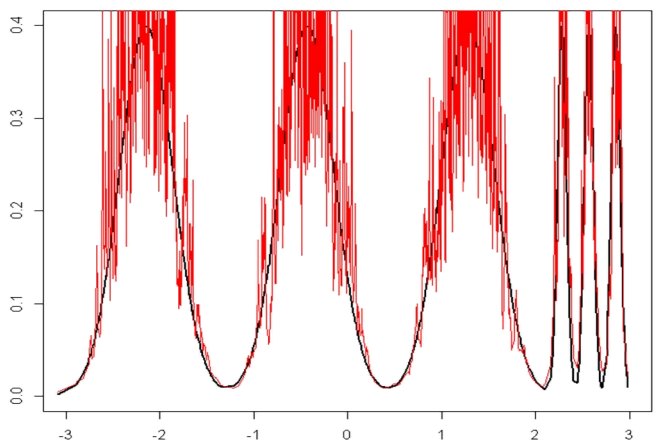
**2.15 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N = 50$ ,  $d=1$**



**2.16 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N = 200$ ,  $d=1$**

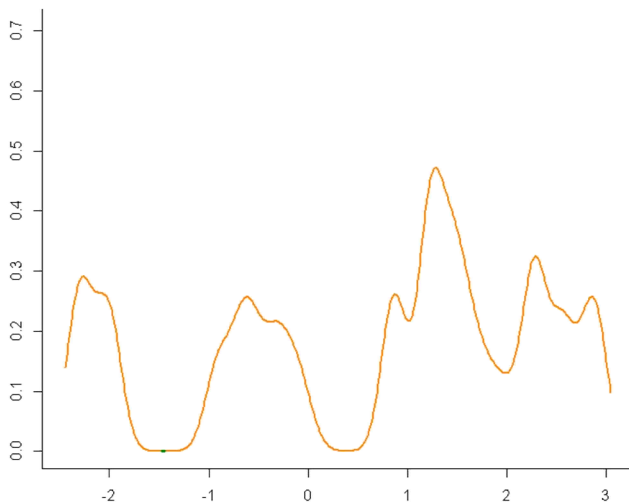


**2.17 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N = 800$ ,  $d=1$**

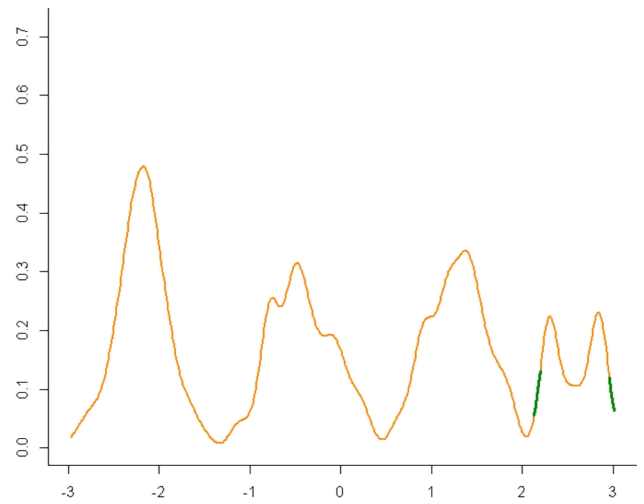


**2.18 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N=3200$ ,  $d=1$**

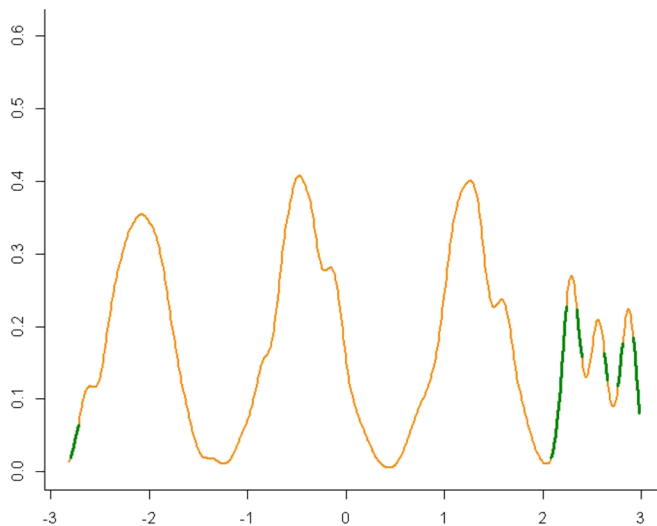
Iš 2.15 – 2.18 grafikų matyti, kad  $k$  artimiausio kaimyno metodu vertinamą daugiamodalinio tankio pavidalą nustatyti visais nagrinėtais atvejais nėra sudėtinga. Galima daryti išvadą, kad metodas yra tinkamas daugiamodalizmo nustatymui vienmačiu atveju, kai modos tarpusavyje nėra besijungiančios kaip dvimodalinio mišinio atveju (2.1 pav.).



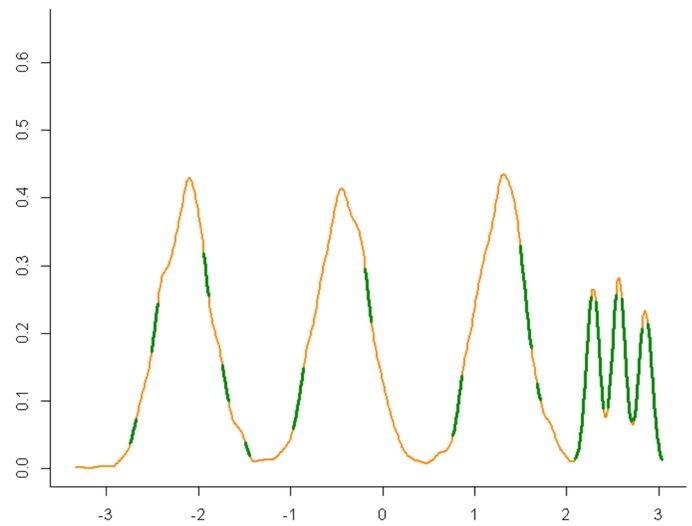
**2.19 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 50$ ,  $d=1$**



**2.20 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 200$ ,  $d=1$**

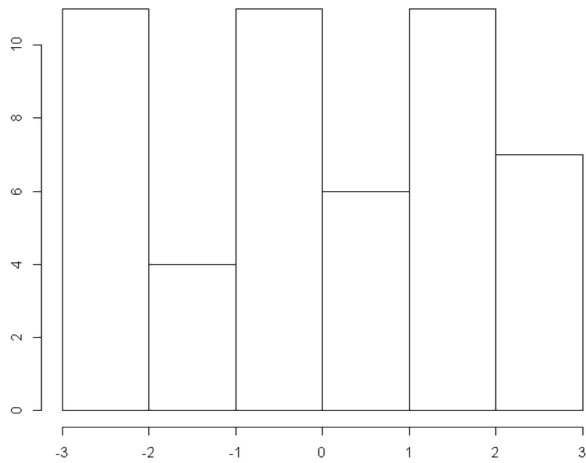


**2.21 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 800$ ,  $d=1$**

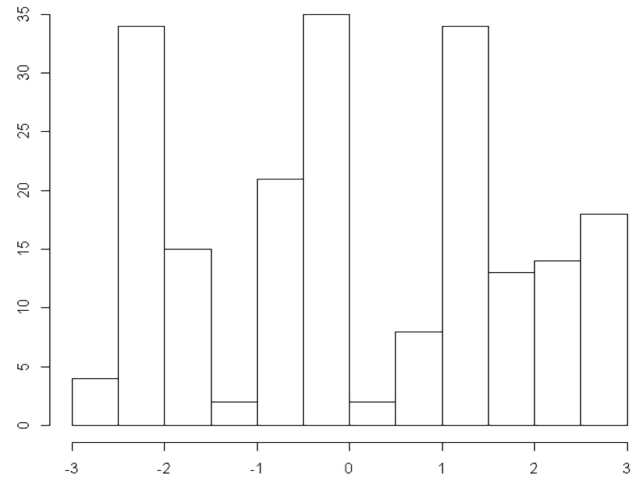


**2.22 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 3200$ ,  $d=1$**

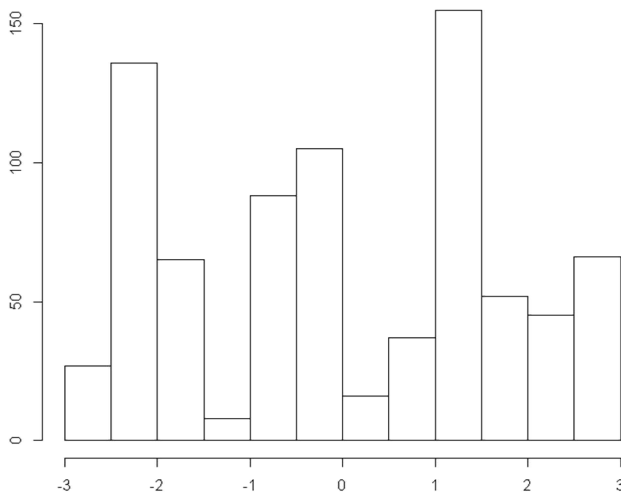
Remiantis gautais rezultatais (2.19 – 2.22 pav.) galima daryti išvadą, kad įvertinus tankį gradientiniu metodu, daugiamodaliskumo nustatymas taip pat nėra sudėtingas net esant mažoms imtims. 2.22 paveiksle buvo pažymėtas statistiškai reikšmingas gradientas, parodantis greičiausio augimo reikšmę bei kryptį.



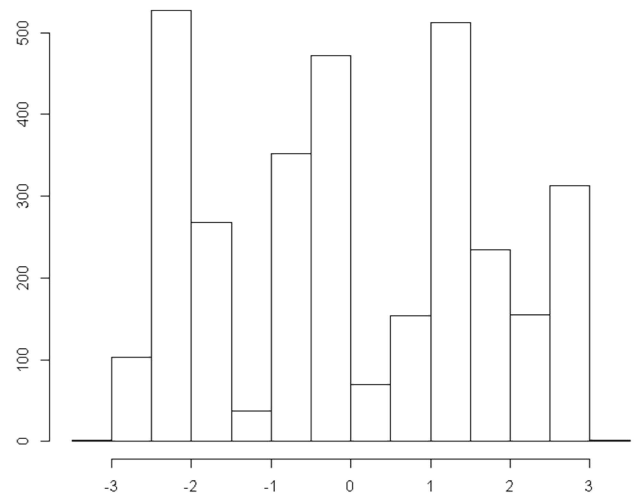
**2.23 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  
histogramos metodu, kai  $N = 50$ ,  $d=1$**



**2.24 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  
histogramos metodu, kai  $N = 200$ ,  $d=1$**



**2.25 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  
histogramos metodu, kai  $N = 800$ ,  $d=1$**



**2.26 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  
histogramos metodu, kai  $N = 3200$ ,  $d=1$**

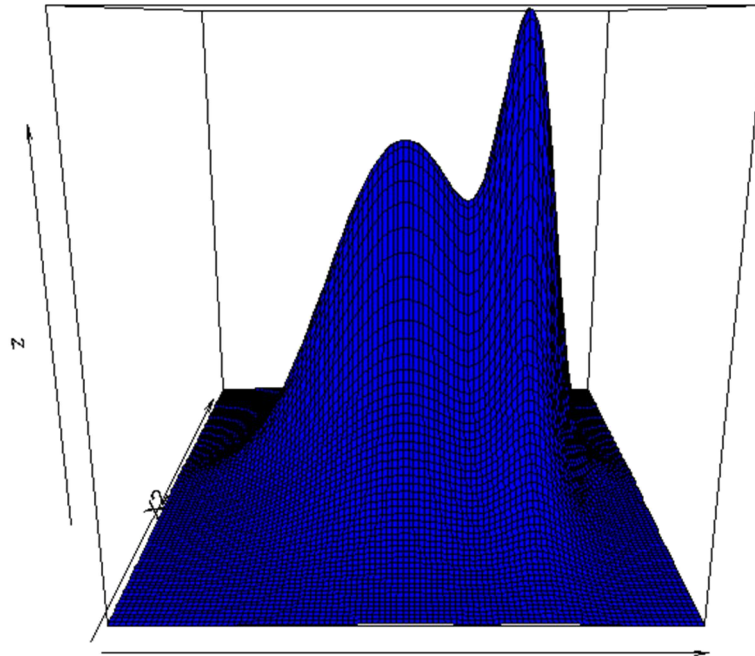
Kaip matyti iš 2.23 – 2.26 paveikslų, histogramos metodas yra taip pat efektyvus daugiamodalios atveju, nepasaint to, kad įvertinys nėra glodus.

Taigi, išnagrinėjus Gauso skirstinių dvimodalinių bei daugiamodalinių mišinius vienmačiu atveju, buvo nustatyta, kad dvimodalinio tankio pavidalo nustatymui nėra tinkamas  $k$  artimiausio kaimyno metodas, o daugiamodalinio tankio formai nustatyti yra tinkami visi nagrinėti metodai, t.y.  $k$  – artimiausio kaimyno, branduolio tankio gradiento bei histogramos, esant skirtingam stebinių skaičiui.

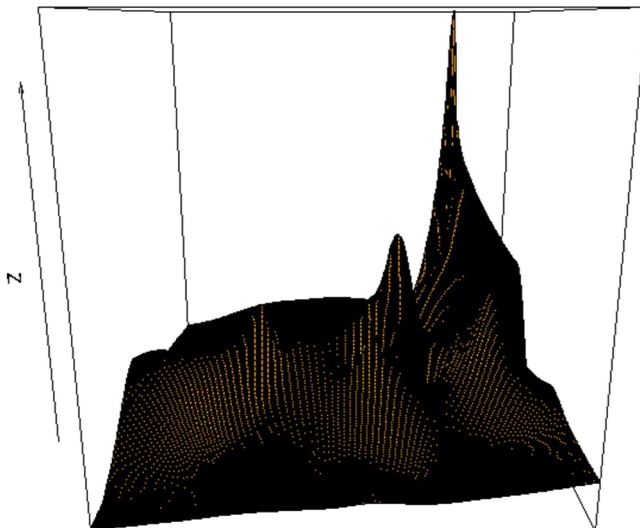


## 2.3 TYRIMO REZULTATAI DVIMAČIU ATVEJU

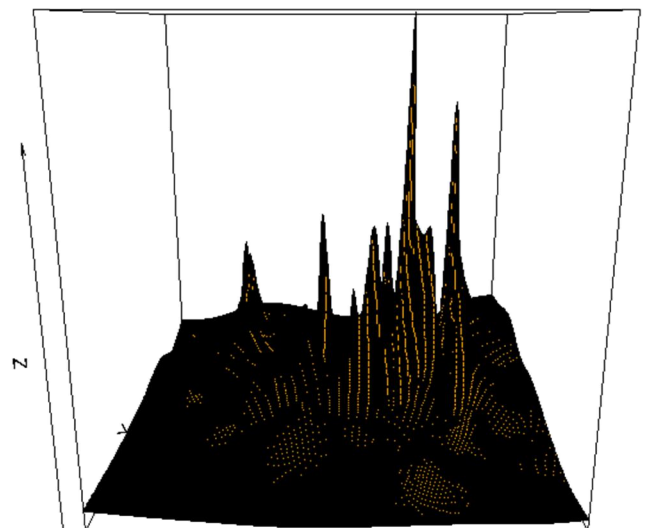
Tyrimo pavyzdžiui dvimačiu atveju taip pat bus nagrinėjamas dvimodalinis (2.27 pav.) bei daugiamodalinis (2.40 pav.) mišinys, kai imties didumas lygus 50, 200, 800 ir 3200, o duomenų dimensija  $d = 2$ .



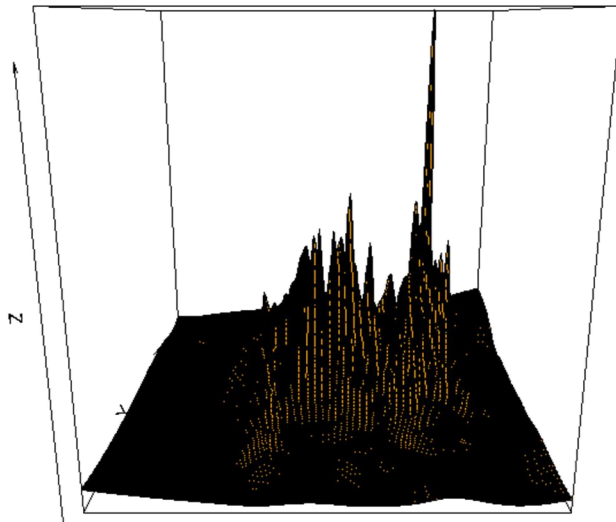
2.27 pav. Dvimodalinio su vienu koncentruotu centru mišinio grafikas,  $d=2$



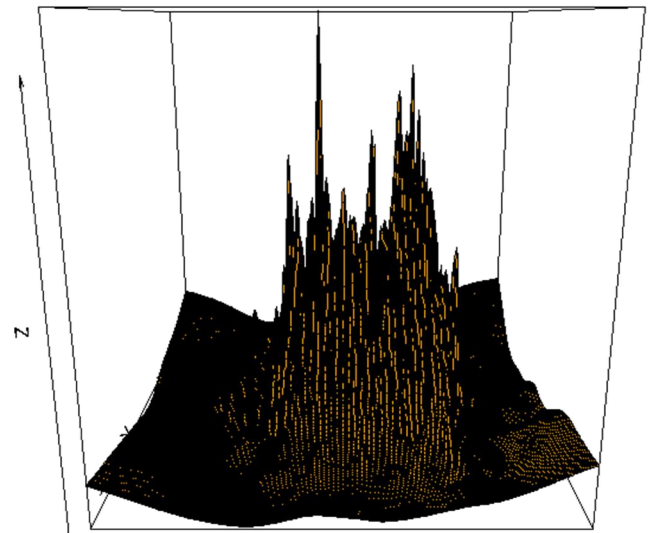
2.28 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N = 50$ ,  $d=2$



2.29 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N = 200$ ,  $d=2$

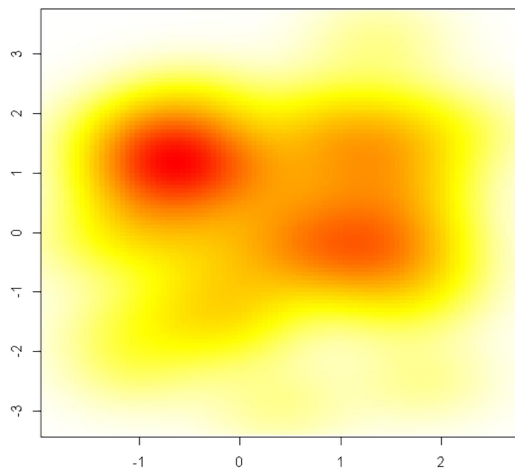


2.30 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N = 800$ ,  $d=2$

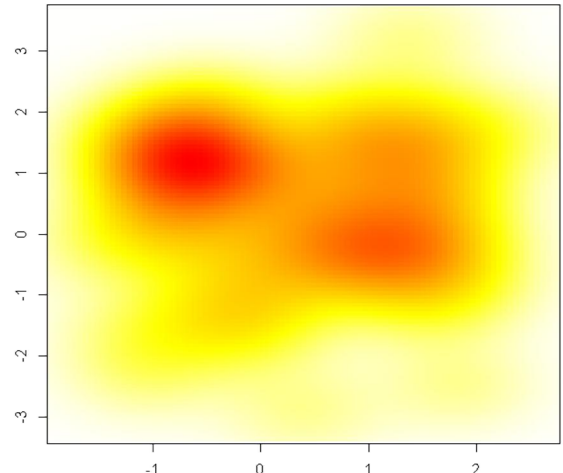


2.31 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N = 3200$ ,  $d=2$

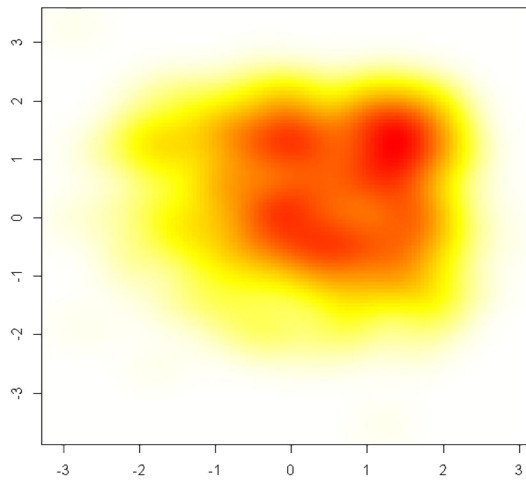
Nagrinėjant dvimodalinį mišinį dvimačiu atveju  $k$  artimiausio kaimyno metodo pagalba, pavidalą nustatyti yra kur kas paprasčiau nei vienmačiu atveju. 2.30 – 2.31 paveiksluose aiškiai matyti dvi išsiskiriančios modos. Nustatymą šiek tiek apsunkina jautrūs triukšmui įverčiai.



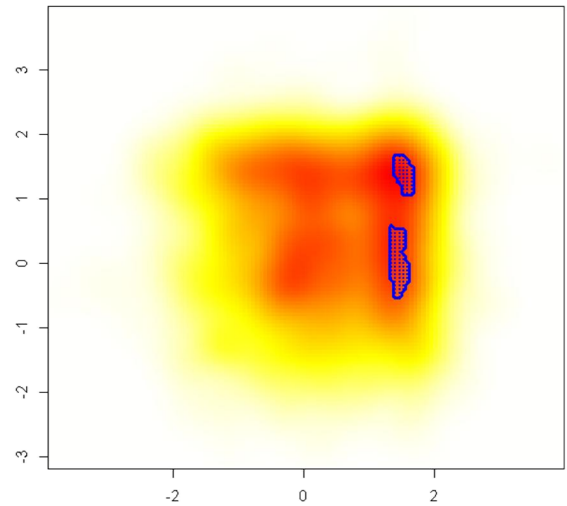
2.32 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 50$ ,  $d=2$



2.33 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 200$ ,  $d=2$

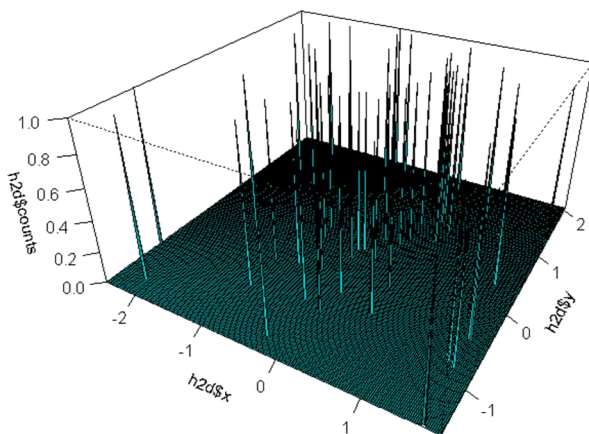


**2.34 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 800$ ,  $d=2$**

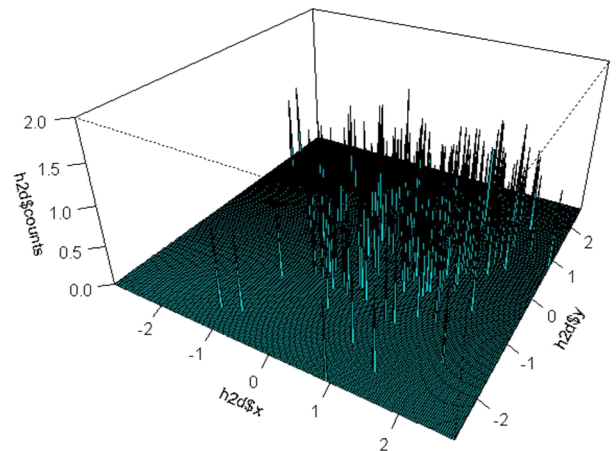


**2.35 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 3200$ ,  $d=2$**

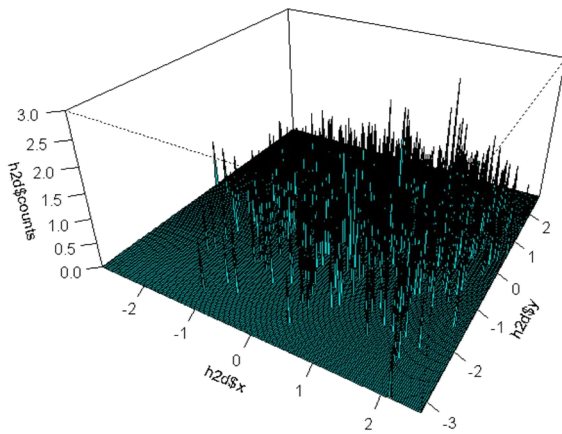
Branduolio tankio gradiento metodu vertinant dvimatį dvimodalinį mišinį, geriausi rezultatai buvo pasiekti esant didžiausiam stebinių skaičiui, t.y. kai  $N = 3200$  (žr. 2.35 pav.). Paveiksle taip pat matyti modas išskiriantys statistiškai reikšmingi gradientai.



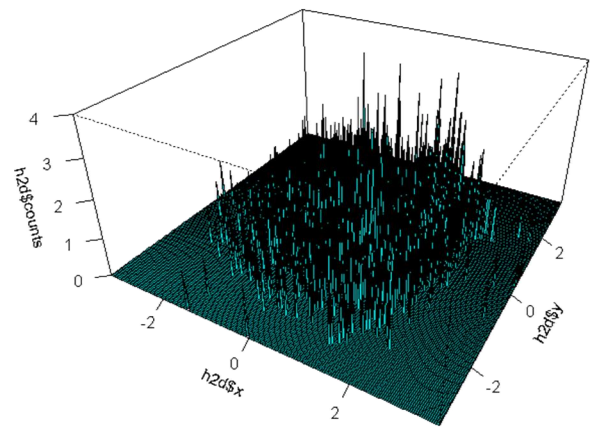
**2.36 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai  $N = 50$ ,  $d=2$**



**2.37 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas histogramos metodu, kai  $N = 200$ ,  $d=2$**

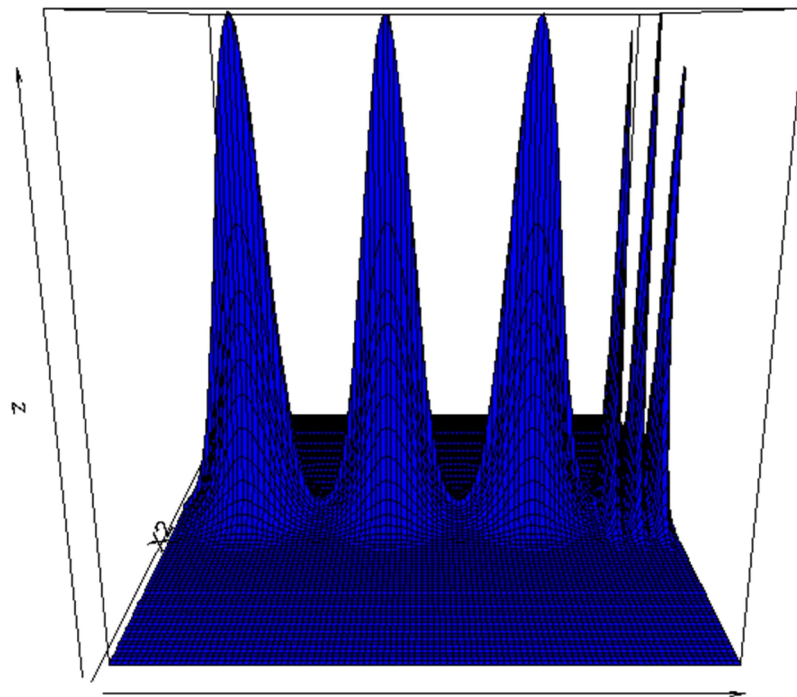


**2.38 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas  
histogramos metodu, kai  $N = 800$ ,  $d=2$**

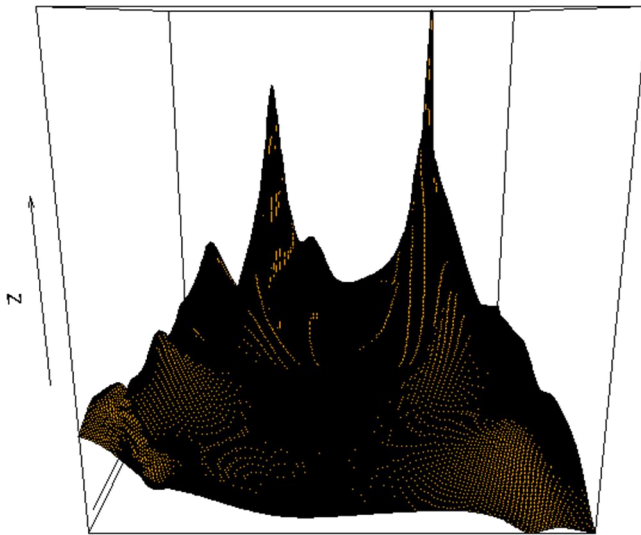


**2.39 pav. Dvimodalinio mišinio grafikas  
histogramos metodu, kai  $N = 3200$ ,  $d=2$**

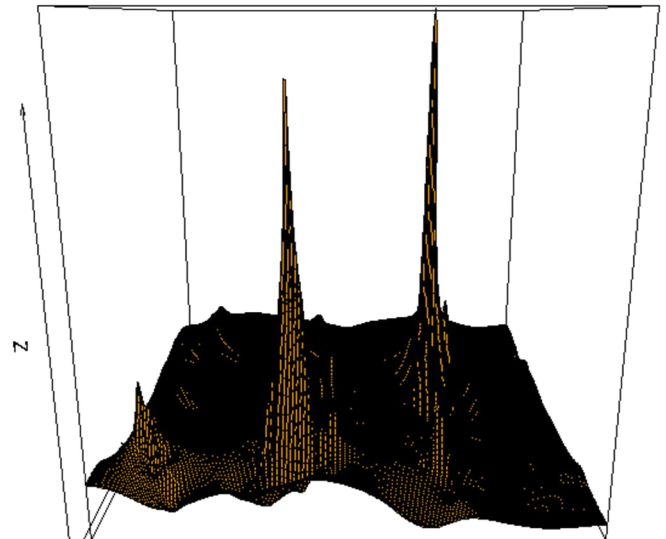
Kaip matyti 2.36 – 2.39 paveiksluose, dvimačiu atveju dvimodalinio tankio vertinimas ypatingai sudėtingėja histogramos metodu. Šiuo atveju šis metodas nėra tinkamas tankio pavidalui nustatyti.



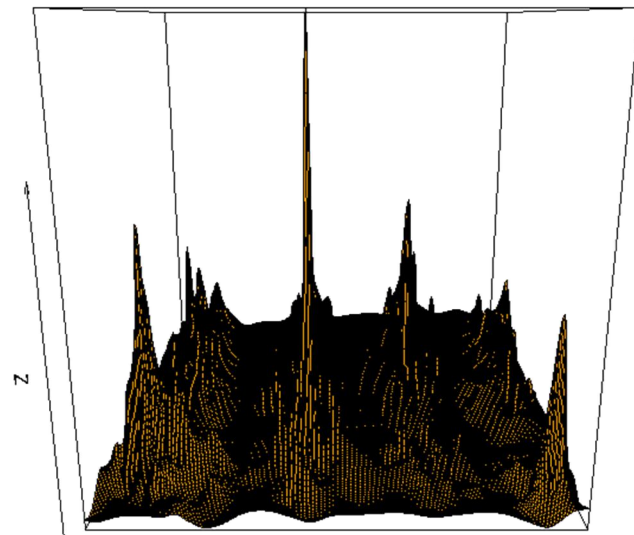
**2.40 pav. Diskrečių „šukų“ mišinio grafikas,  $d=2$**



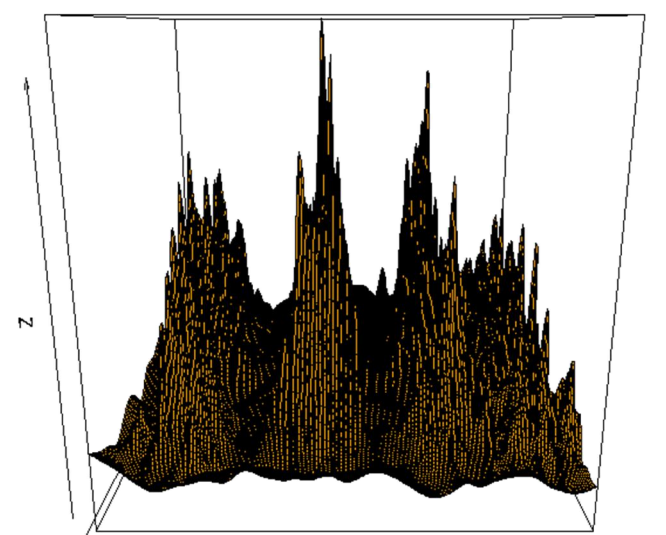
2.41 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N = 50$ ,  $d=2$



2.42 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N = 200$ ,  $d=2$

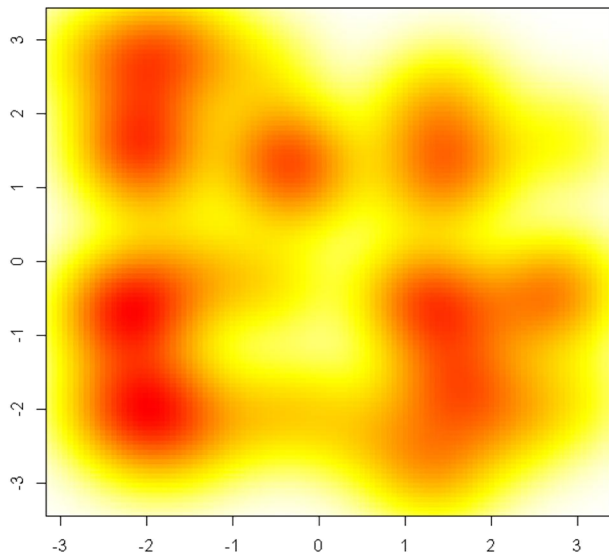


2.43 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N = 800$ ,  $d=2$

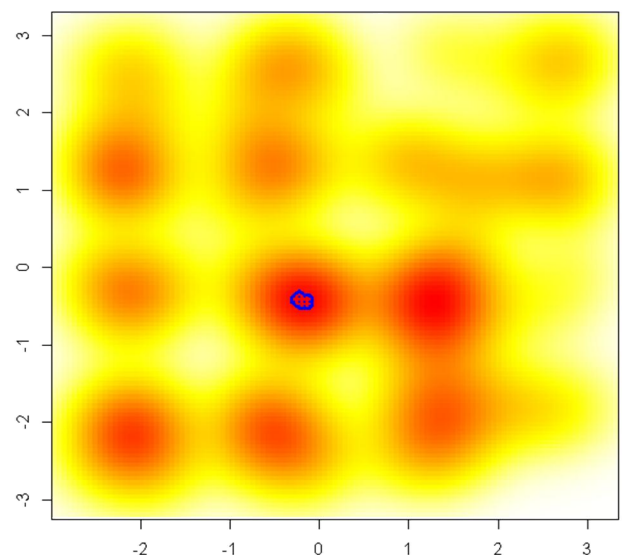


2.44 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  $k$  artimiausio kaimyno metodu, kai  $N=3200$ ,  $d=2$

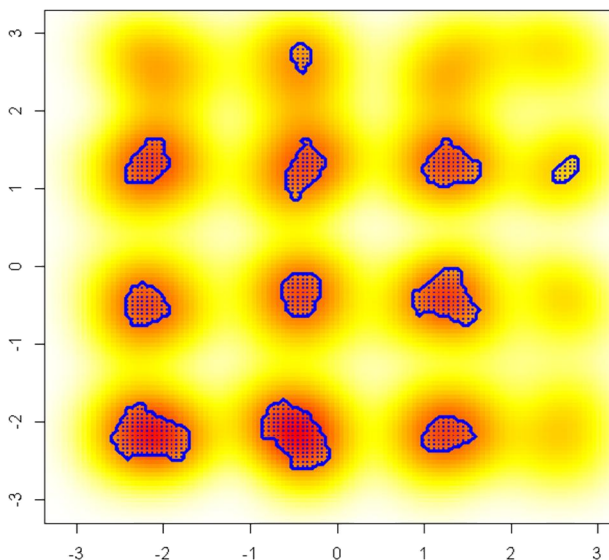
Daugiamodaliskumas, remiantis 2.41 – 2.44 paveikslais, aiškiausiai nustatomas esant didesnėms imtims (800, 3200 stebinių), kai tuo tarpu vienmačiu atveju tyrinėtą metodą buvo efektyvus tiek mažesnėms, tiek didesnėms imtims.



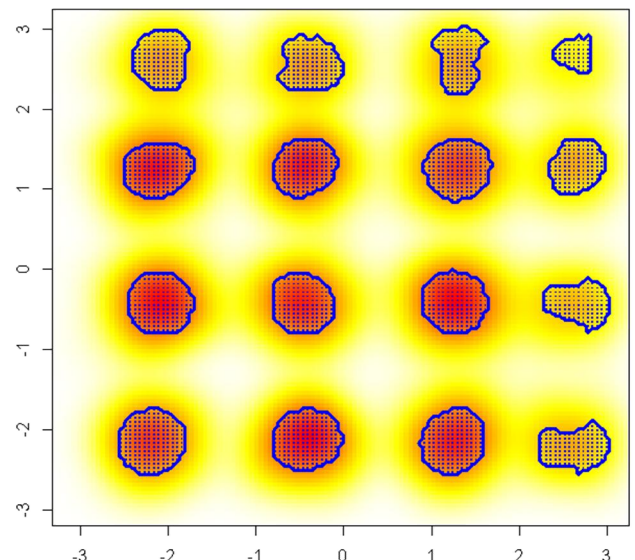
2.45 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 50$ ,  $d=2$



2.46 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 200$ ,  $d=2$

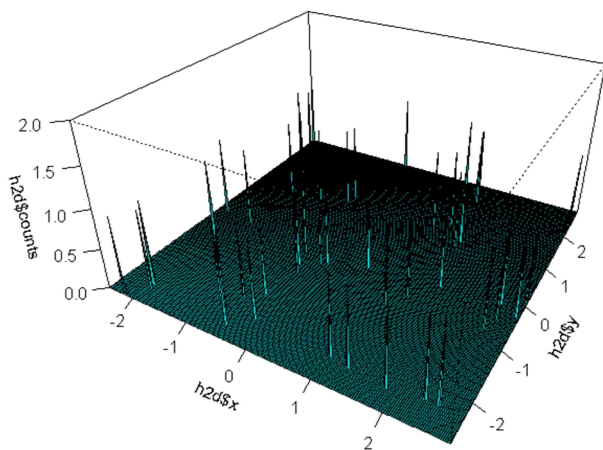


2.47 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 800$ ,  $d=2$

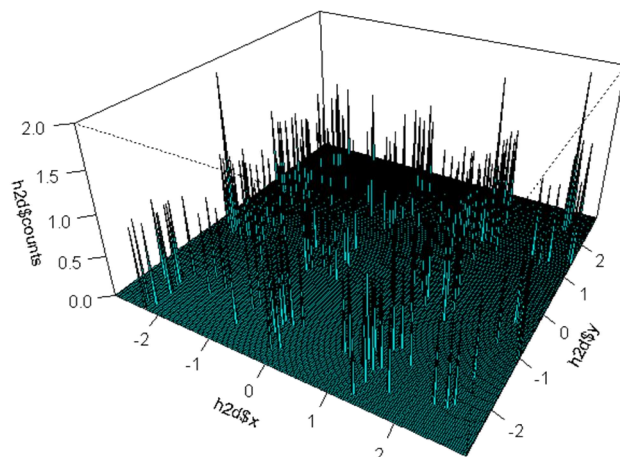


2.48 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas gradientiniu metodu, kai  $N = 3200$ ,  $d=2$

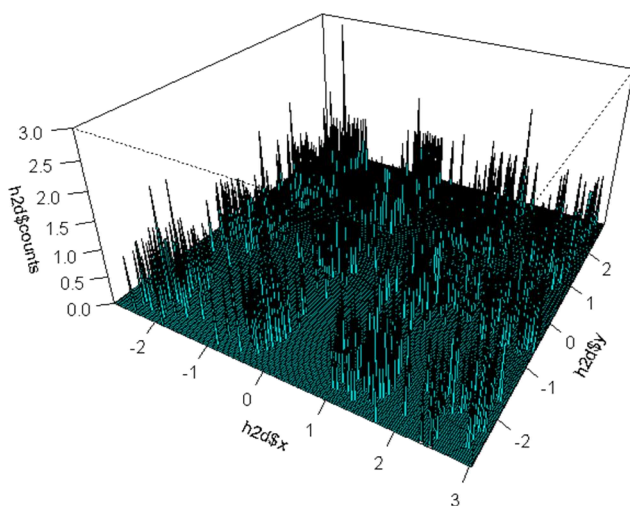
Vertinant daugiamodalinį tankį gradientiniu metodu (2.45 – 2.48 pav.), statistiškai reikšmingi gradiento regionai randami tik esant didesnėms imtims, tačiau tankio formą galima numatyti ir esant mažo tūrio imtims – 50, 200 stebėjimų.



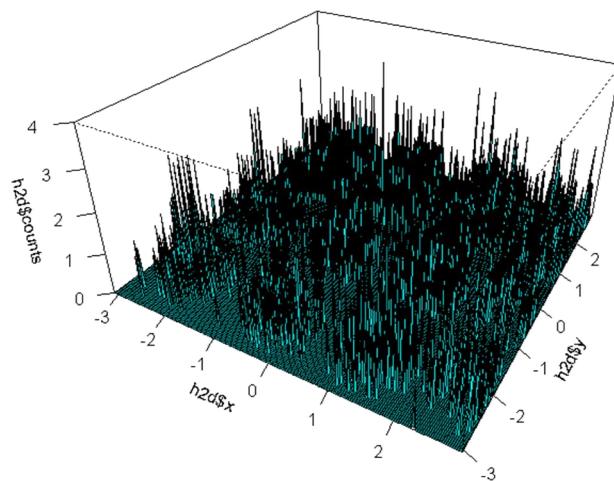
**2.49 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  
histogramos metodu, kai  $N = 50$ ,  $d=2$**



**2.50 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  
histogramos metodu, kai  $N = 200$ ,  $d=2$**



**2.51 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  
histogramos metodu, kai  $N = 800$ ,  $d=2$**



**2.52 pav. Daugiamodalinio mišinio grafikas  
histogramos metodu, kai  $N = 3200$ ,  $d=2$**

Histogramos metodu vertinant daugiamodalinį tankį, pavidalo nustatyti neįmanoma tik esant ypatingai mažoms imtims (nagrinėtu atveju imties tūris 50 stebinių).

Taigi, išnagrinėjus Gauso skirstinių dvimodalinį bei daugiamodalinį mišinius dvimačiu atveju, buvo nustatyta, kad priešingai nei vienmačiu atveju,  $k$  artimiausio kaimyno metodą galima taikyti dvimodališkumo nustatymui prie atitinkamo imties tūrio. Tankio pavidalą sudėtingiausia vertinti histogramos metodu, ypatingai esant mažam imties tūriui.

## 2.4 TYRIMO REZULTATŲ APIBENDRINIMAS

Vertinant tankį  $k$  artimiausio kaimyno metodu, buvo pastebėti šie pagrindiniai trūkumai:

- įverčiai jautrūs triukšmui;
- metodas pateikia įverčius su didelėmis uodegomis;

- jei funkcija, nusakanti atstumą tarp vertinamo taško  $x$  ir jo  $k$  – tojo artimiausio kaimyno nėra diferencijuojama, tankio įvertinys turės trūkių.

Taigi tankio vertinimui, šis metodas nebūtų tinkamas, kadangi įverčiai būtų su didelėmis paklaidomis, tačiau jis pakankamai tikslus tankio formos bei daugiamodališkumo nustatymui (žr. 2.15 -2.18 pav. bei 2.41 - 2.44 pav), net esant pakankamai mažiems imties tūriams. Reikėtų pastebėti, kad šiuo metodu sudėtingiausia išvelgti dvimodališkumą (žr. 2.2 – 2.5 pav.). Modeliuojant algoritmą dvimačiu atveju, ypatingai mažų tūrių imtims (sugeneruota mažiausia imtis - 50 atsitiktinių dydžių) tankio formą nustatyti labai sudėtinga (žr. 2.28, 2.41 pav.). Imčių tūriui didėjant – nustatymas žymiai supaprastėja.

Gradientinio metodo pagrindinis tikslas – surasti reikšmingą gradientą bei išlinkį. Vienmačiu atveju, geltona linija žymi branduolio tankio įvertį, su tam tikru glodinimo parametru, o žalia – atkarpa, kuriose įverčiai turi reikšmingą gradientą (reikšmingai besiskiriantį nuo 0). Daugiamačiu atveju – taškai, esantys mėlynuose plotuose žymi reikšmingus išlinkio taškus. *R* pakete realizuotas metodas taip pat turi prieigą vartotojui - funkcija „featureSignifGUI“, kuri iškviečiama norint tirti tankio formos kitimą, keičiantis glodumo parametru, kadangi pagal rekomenduojamo branduolio pločio parametro formulę, ne visada gaunamas norimas rezultatas. Maža  $h$  reikšmė įtakoja didelę įvertinio dispersiją ir mažas paklaidas, o parinkus didelį  $h$  gauname nedidelį standartinį nuokrypį išaugusiose paklaidose. Kaip matyti nagrinėtuose pavyzdžiuose ne visuomet randami statistiškai reikšmingi gradiento bei išlinkio taškai. 2.6 – 2.9 paveikluose vienmačiu atveju, ir 2.32 – 2.34 paveikluose dvimačiu atveju, metodas nubrėžė tik branduolio tankio įvertinio funkciją. Abiem atvejais buvo nagrinėtas dvi modas turintis skirstinys. Kadangi *R* pakete realizuotas branduolio tankio gradientinis metodas tinkamas iki 4 dimensijos, nagrinėtuose aukštesnės duomenų dimensijos pavyzdžiuose buvo panaudotas daugiamačių skalių metodas, t.y. pirmiausiai duomenys iš daugiamatės erdvės projektuojami į vienmatę arba dvimatę erdvę – priklausomai nuo imties tūrio (žr. 1 bei 2 priedą).

Histogramos metodas buvo realizuotas palyginimui, kadangi jis plačiai naudojamas bei išnagrinėtas. Šio metodo trūkumai akivaizdūs – tankio funkcija nėra glodi, be to esant mažo tūrio imtims, nustatyti tankio pavidalą beveik neįmanoma.

Prieduose pateiktas likusių mišinių tyrimas nagrinėtais  $k$  artimiausio kaimyno bei gradientiniu metodu, varijuojant imties tūrį bei duomenų dimensiją.

## 2.5 EMPIRINIS TYRIMAS

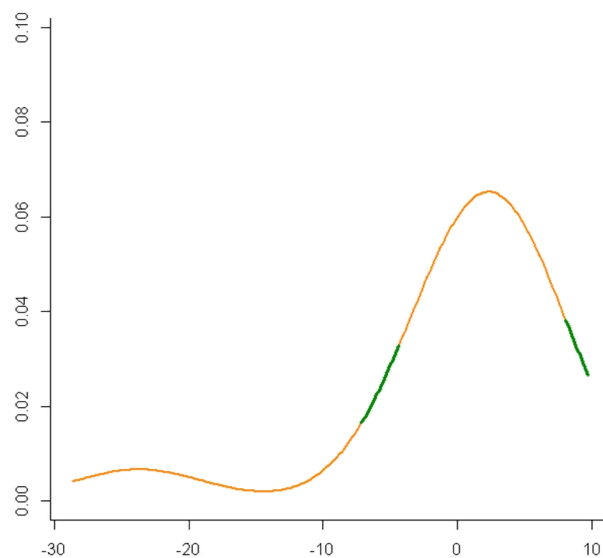
Ūkio atliekos yra nepageidaujamos, nenaudingos, dažniausiai dėl žmogaus veiklos susidariusios ir atlikusios medžiagos. Komunalinėmis atliekomis laikomos tokios atliekos, kurios susidaro žmonių gyvenamosiose patalpose, visuomeninės paskirties pastatuose, įmonėse, įstaigose, miestuose



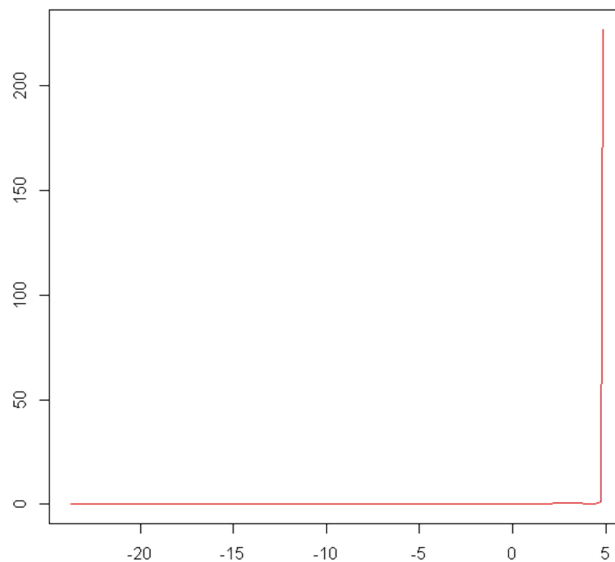
pastatytose šiukšliadėžėse ir gatvėse. Ekspertų vertinimais, gyventojų buityje susidaranti atliekos sudaro 75 – 85 procentus visų komunalinių atliekų [20].

Magistro baigiamajame darbe nagrinėti gradientinis bei  $k$  artimiausio kaimyno metodai bus pritaikyti atliekų duomenų analizei, kad būtų palengvinami atliekų tvarkymo sprendimų priėmimai, jų pagrindimas, atliekų tvarkymo darbų organizavimas ir atliekų kiekio stebėjimas.

Įgyvendindamas atliekų tvarkymo planą, kiekvienas miestas turi užtikrinti patikimą atliekų duomenų pateikimą. Tyrimui naudojami Kauno, Ukrainos miesto Borispilio, Rusijos miesto Sankt Peterburgo, Gruzijos miesto Kutaisi komunalinių atliekų 2010 metų laikotarpio duomenys. Duomenis sudaro mėnesiniai komunalinių atliekų frakcijų kiekiai kilogramais, tenkantys vienam gyventojui. Darbe nagrinėjamos šios atliekų frakcijos: popierius ir kartonas, plastikas, geležingi metalai, kiti metalai, stiklas, sulčių, nektarų ir kitų gėrimų pakuotės, maisto atliekos, buitinės (namų ūkio) atliekos, mediena ir kitos degančios atliekos, kitos nedegančios atliekos, pavojingos atliekos.

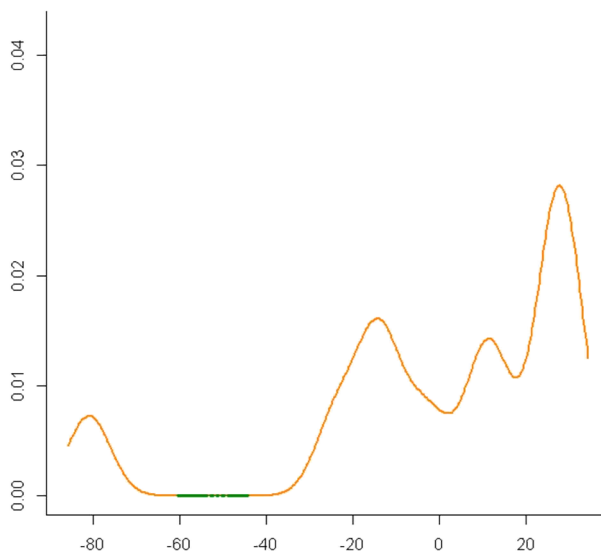


**2.53 pav. Kutaisi miesto komunalinių atliekų atvaizdavimas taikant branduolio tankio gradientinį metodą**

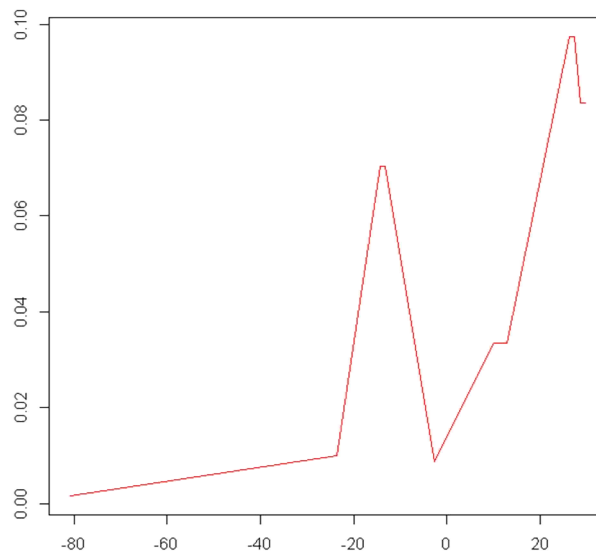


**2.54 pav. Kutaisi miesto komunalinių atliekų atvaizdavimas taikant  $k$  artimiausio kaimyno metodą**

Vertinat Gruzijos miesto Kutaisi komunalinių atliekų tankį tiek branduolio tankio gradientiniu metodu (žr. 2.53 pav), tiek  $k$  artimiausio kaimyno metodu (žr. 2.54 pav) galima išvelgti, kad viena frakcija užima didžiausią dalį viso miesto atliekų. Šiuo atveju, gradientinis metodas tikslesnis tankio pavidalui nustatyti.

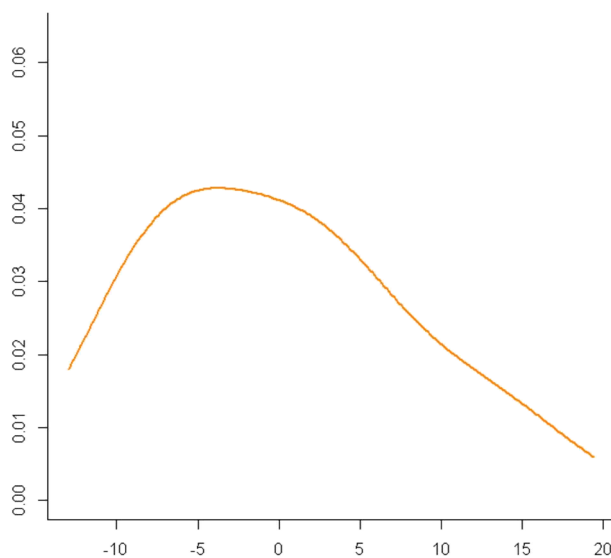


**2.55 pav. Kauno miesto komunalinių atliekų atvaizdavimas taikant branduolio tankio gradientinį metodą**

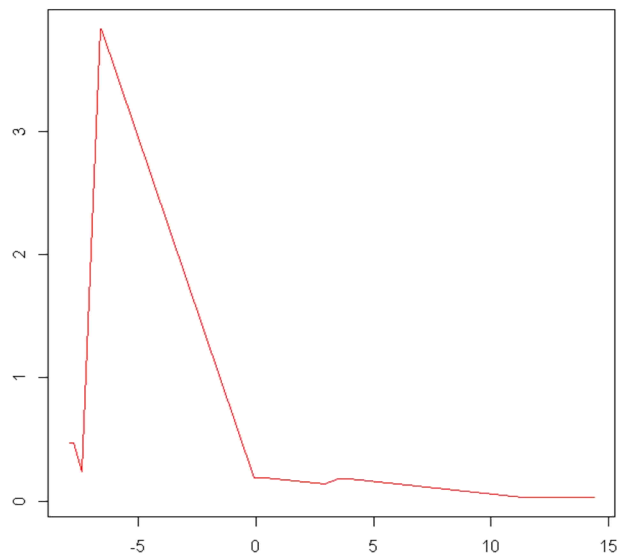


**2.56 pav. Kauno miesto komunalinių atliekų atvaizdavimas taikant  $k$  artimiausio kaimyno metodą**

Kaip matyti 2.55 ir 2.56 paveiksluose, Kauno mieste stipriai išsiskiriančios trys komunalinių atliekų frakcijos, tai rodo gautas trimodalinis tankio grafikas. Gradientiniu ir  $k$  artimiausio kaimyno metodai pateikia panašias tankio funkcijos formas, kas neleidžia abejoti rezultatų patikimumu.



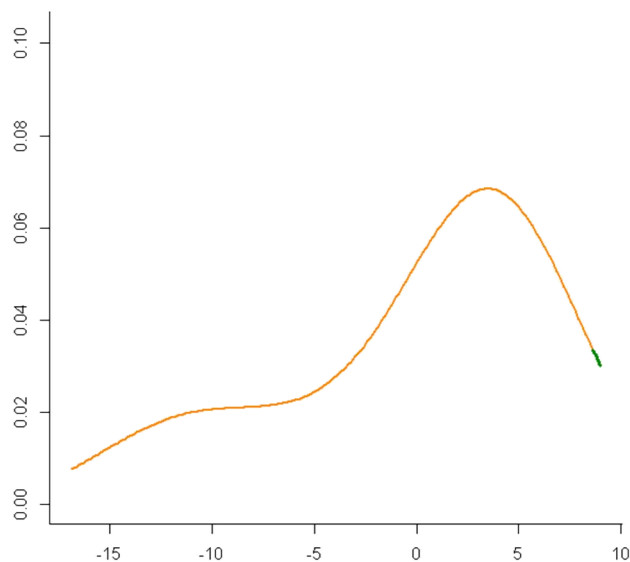
**2.57 pav. Borispilio miesto komunalinių atliekų atvaizdavimas taikant branduolio tankio gradientinį metodą**



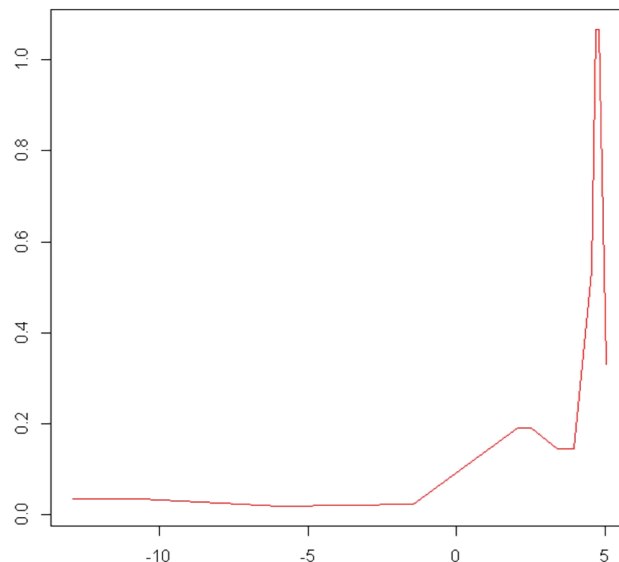
**2.58 pav. Borispilio miesto komunalinių atliekų atvaizdavimas  $k$  artimiausio kaimyno metodu**

Kaip matyti 2.57 ir 2.58 paveiksluose, Ukrainos mieste Borispilyje ekstremalios reikšmės susitelkę dešinėje pusėje – tankio pavidalui būdingas asimetriškumas iš dešinės, tai reiškia, kad moda mažesnė už vidurkį t.y. viena komunalinių atliekų frakcija sudaro ženkliai mažesnę dalį lyginant su kitomis komunalinių atliekų frakcijomis.

Gradientiniu ir  $k$  artimiausio kaimyno metodai pateikia panašias tankio funkcijos formas, kas neleidžia abejoti rezultatų patikimumu.



**2.59 pav. Sankt Peterburgo miesto komunalinių atliekų atvaizdavimas taikant branduolio tankio gradientinį metodą**



**2.60 pav. Sankt Peterburgo miesto komunalinių atliekų atvaizdavimas  $k$  artimiausio kaimyno metodu**

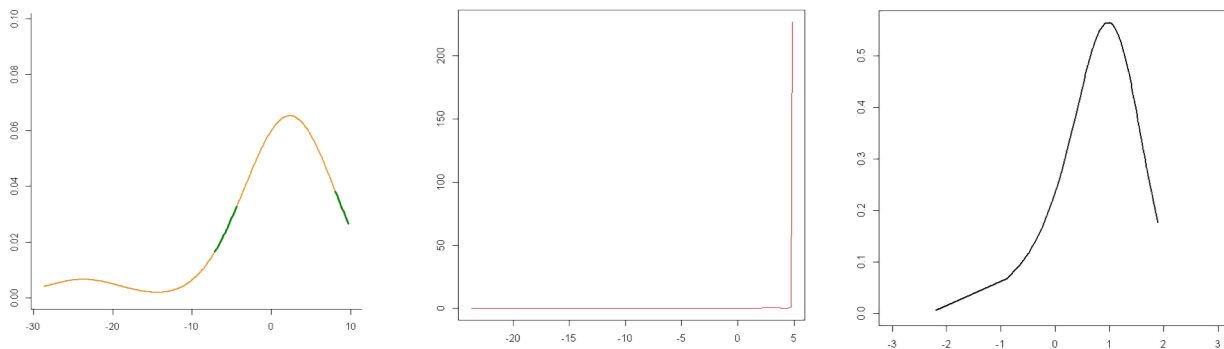
Remiantis 2.59 ir 2.60 paveikslais, Rusijos miesto Sankt Peterburgo komunalinių atliekų tankio grafikuose matyti akivaizdus asimetriškumas kairėje, o tai reiškia, kad vidurkis mažesnis už modą, ką galima interpretuoti kaip vienos komunalinių atliekų frakcijos dominavimą kitų frakcijų atžvilgiu. Šiuo atveju galima išskirti dvi dominuojančias komunalinių atliekų rūšis.

## 2.6 EMPIRINIO TYRIMO REZULTATŲ APIBENDRINIMAS

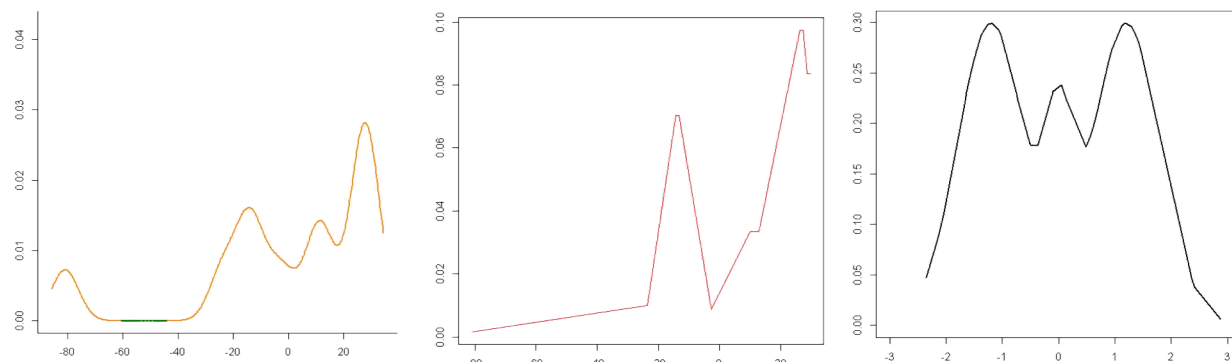
Šio tyrimo tikslas – mažo matmenų skaičiaus erdvėje rasti 12 frakcijų vaizduojančių taškų išsidėstymą, kuris padėtų interpretuoti duomenis. Kadangi empirinių duomenų nedaug, o dimensija pakankamai didelė, buvo pritaikytas daugiamačių skalių metodas, iš daugiamatės erdvės duomenis projektuojantis į vienmatę, o tankio formos pavidalui nustatyti buvo pritaikyti aukščiau išnagrinėti metodai –  $k$  artimiausio kaimyno ir branduolio tankio gradiento.

Rezultatai, gauti pritaikius nagrinėjimus metodus realiems duomenims, pasirodė pakankamai tiksliai atspindintys tankio funkcijos formą net esant itin mažam imties tūriui (12 stebinių). Gauti tankių pavidalai įvairiuose miestuose leidžia nustatyti asimetriškumą bei ekstremalias reikšmes, į kurias ir turėtų būti sutelktas visas dėmesys, norint sklandžiai organizuoti atliekų tvarkymo darbus ir palengvinti atitinkamų sprendimų priėmimus.

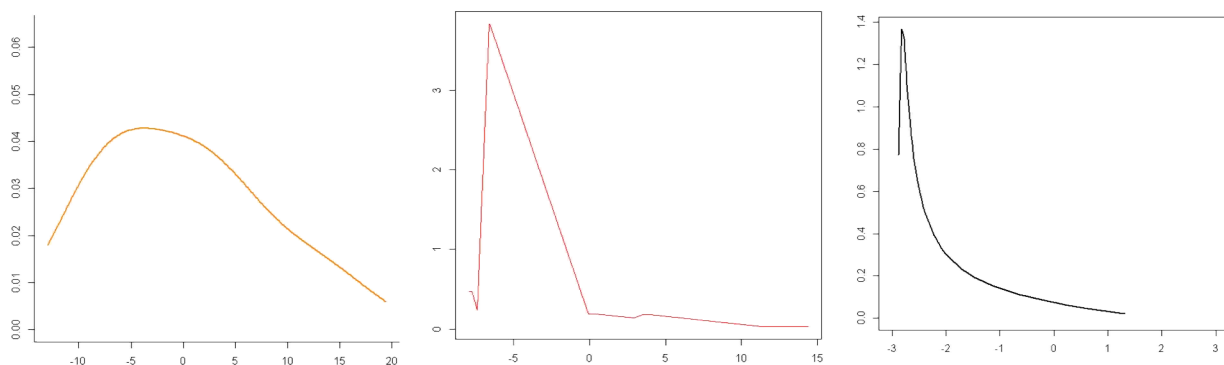
Gradientiniu bei  $k$  artimiausio kaimyno metodu modeliuotus nežinomo skirstinio tankio pavidalus galime aproksimuoti jau išnagrinėtais Gauso skirstinio mišiniais (žr. 2.61 – 2.64 pav.).



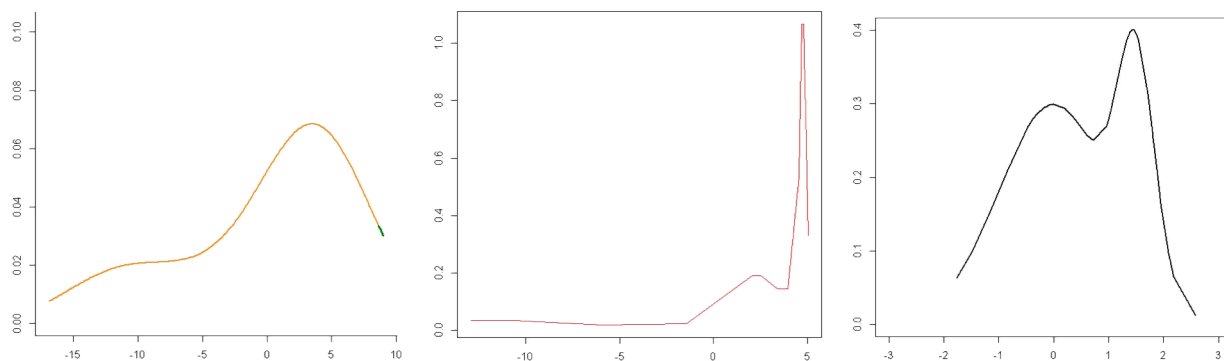
**2.61 pav. Kutaisi miesto komunalinių atliekų tankio pavidalo aproksimavimas**



**2.62 pav. Kauno miesto komunalinių atliekų tankio pavidalo aproksimavimas**



**2.63 pav. Borispolio miesto komunalinių atliekų tankio pavidalo aproksimavimas**



**2.64 pav. Sankt Peterburgo miesto komunalinių atliekų tankio pavidalo aproksimavimas**

Kutaisi miesto komunalinių atliekų nežinomą skirstinio tankio pavidalą galima aproksimuoti nukrypusio vienamodalinio Gauso skirstinio mišiniu (angl. skewed unimodal) (žr. 2.61 pav), Kauno miesto – trimodaliniu Gauso skirstinio mišiniu (angl. trimodal) (žr. 2.62 pav.), Borispolio miesto –

stipriai nukrypusiu Gauso skirstinio mišiniu (angl. strongly skewed) (žr. 2.63 pav.) ir Sankt Peterburgo miesto – nukreiptu dvimodaliniu Gauso skirstinio mišiniu (angl. skewed bimodal) (žr. 2.64 pav.).

### 3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Kadangi vartotojo sąsajos *R* pakete realizuota nėra, buvo sukurtas komandinis langas, kuriame suvedama visa reikalinga informacija mišinių generavimui (žr. 3.1 pav.):

```
## Misinio parametrai #####
tipas = 5
d = 50
N = 3200
## Misinio generavimas #####
misinys = Misinys(tipas,d,N)
#####
```

3.1 pav. Parametrai mišinio generavimui

*Tipas* – tai nurodomas skaičius nuo 1 iki 15, kuris nurodo generuojamą mišinį (visi mišiniai aprašyti ankstesniame skyriuje);

*d* – duomenų dimensija;

*N* – imties tūris.

*R* programos lango valdymas elementarus – pasinaudojus komanda „*ctrl* + *R*“ – vykdomas programos darbas. Kiekvienam metodui buvo realizuotas atskiras programos langas, kurį atidarius, visas pažymėtas programos kodas paleidžiamas vykdymui vėlgi pasinaudojus komanda „*ctrl* + *R*“ .

Buvo sukurti šie metodai:

- *Misinys.R* – programa, skirta generuoti Gauso skirstinių mišinius.
- *Gradientinis.R* – programa, skirta tankių vertinimui naudojantis gradientiniu metodu.
- *Knn.R* – programa, skirta tankių vertinimui naudojantis *k* artimiausio kaimyno metodu.
- *MDS.R* – programa, kurioje realizuotas daugiamačių skalių metodas.

## IŠVADOS

1. Pasiūlytas bei išnagrinėtas R pakete realizuotas gradientinio metodo algoritmas.
2. Monte Karlo metodu atliktas neparametrinio tankio metodų eksperimentinis tyrimas daugiamodališkumo atveju parodė tiek vienmačių, tiek daugiamatinių pasiskirstymo tankių vizualizavimo galimybes bei tikslumą.
3. Išnagrinėtas daugiamatinių duomenų atvaizdavimui naudoto daugiamatinių skalių metodo tinkamumas. Pastebėta, kad didėjant duomenų tūriui ir dimensijai dėl informacijos praradimo projektuojant duomenis į mažesnio dydžio erdvę, šis metodas pasidaro neinformatyvus tankio pavidalui nustatyti.
4. Nustatyta, kad nagrinėti metodai nėra tinkami dviejų modų skirstinių tyrimui – jų formą įvertinti sudėtingiausia, ypač vienmačiu atveju.
5. Sukurta patogi ir suprantama vartotojui komandinė eilutė, suteikianti galimybes įvykdyti visas funkcijas, reikalingas neparametrinį tankių vertinimo analizei atlikti.
6. Sukurtos programinės įrangos testavimas, atliktas naudojant įvairius daugiamatinius Gauso skirstinių mišinius, parodė, kad sistema yra pajėgi spręsti tankių vertinimo užduotis esant skirtingo dydžio imtims bei duomenų dimensijoms.
7. Atliktas empirinis tyrimas, paaiškinantis daugiamatinių skalių metodo taikymo galimybes, kurių pagalba buvo nustatyti nežinomo skirstinio tankio pavidalai.
8. Darbo tema buvo paruoštas ir išspausdintas straipsnis 2014 m. XII studentų konferencijos „Taikomoji matematika“ medžiagoje. Šioje konferencijoje skaitytas pranešimas.

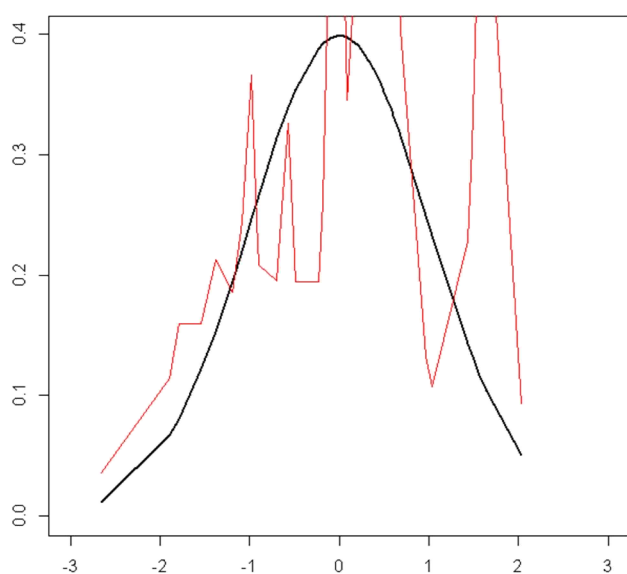


## LITERATŪRA

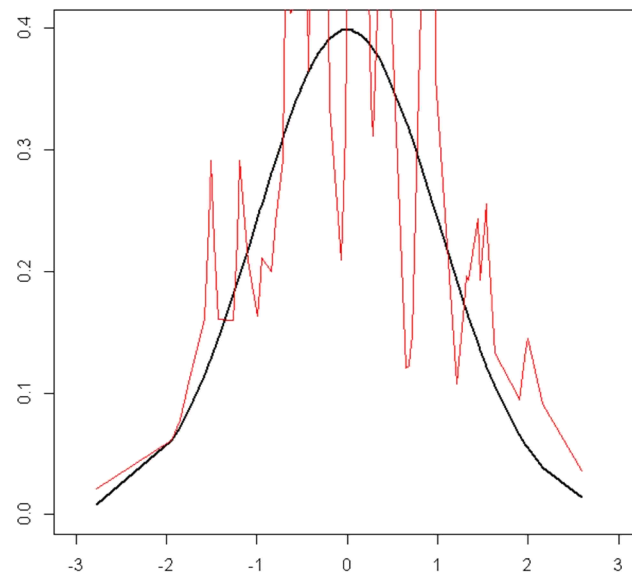
1. Drulytė I., Ruzgas T., Neparametrinių tankio įvertinių lyginamoji analizė Monte Karlo metodu. Lietuvos matematikos rinkinys, Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B 54 t., 2013, 1–14.
2. Dias R., Nonparametric Estimation: Smoothing and Visualization, Departamento de Estatística – IMECC, Universidade Estadual de Campinas.
3. Scott D.W., Multivariate Density Estimation and Visualization, Rice University, Department of Statistics, MS-138, Houston, TX 77005-1892 USA.
4. Hjort N. L., On frequency polygons and average shifted histograms in several dimensions, Technical Report, Stanford University, Vol. 22, 1986.
5. Jones M. C., Samiuddin M., Al-Harbey A. H. and Maatouk T. A. H., The edge frequency polygon, Biometrika, Vol. 85, 1998, p. 235–239.
6. Simonoff J. S., The anchor position of histograms and frequency polygons: quantitative and qualitative smoothing, Comm. Statist. Simul. Computat., Vol. 24, 1995, p. 691–710.
7. Delicato P., del Rio M., A generalization of histogram type estimators, UPF Economics and Business Working Papers Series, 422, 1999.
8. Scott D. W., On optimal and data-based histograms, Biometrika, Vol. 66, 1979, p. 605–610.
9. Scott D.W., Averaged shifted histograms: effective nonparametric density estimators in several dimensions, Annals of Statistics, Vol. 13, 1985, p. 1024–1040.
10. Devroye, L., Krzyżak, A. (2002). New multivariate product density estimators, J. Multivariate Anal. 82(1), pp. 88-110.
11. Gutierrez-Osuna R., Introduction to Pattern Analysis, Texas A&M University, Lecture 8: Nearest neighbors.
12. Duong T., Wand M., Feature significance for multivariate kernel density estimation, 2011 (Lecture notes).
13. Duong T., Wand M., Feature for multivariate kernel density estimation, 2006 (Lecture notes).
14. Duong T., Cowling A., Koch I., Wand M.P., Feature significance for multivariate kernel density estimation, School of Mathematics & Statistics, University of New South Wales, Sydney, Australia, 2008.
15. Hansen B.E., Lecture Notes on Nonparametrics, University of Wisconsin, 2009.
16. Dzemyda G., Kurasova O., Žilinskas J., Daugiamačių duomenų vizualizavimo metodai. Vadovėlis informatikos krypties doktorantams ir magistrantams, Mosklo aidai, Vilnius, 2008.
17. Holland S.M., Non-metric multidimensional scaling (MDS), Department of Geology, University of Georgia, Athens, GA 30602-2501, 2008.

18. Buinkovskaja K., Statistinis duomenų apdorojimas atvirojo kodo programomis, Magistro darbas, Vilnius, 2007.
19. Lapinskas R., Įvadas į statistiką su R, Vilniaus universitetas, 2013.
20. Valstybinis strateginis atliekų tvarkymo planas [interaktyvus]. Prieiga per internetą: <http://www.lrs.lt>

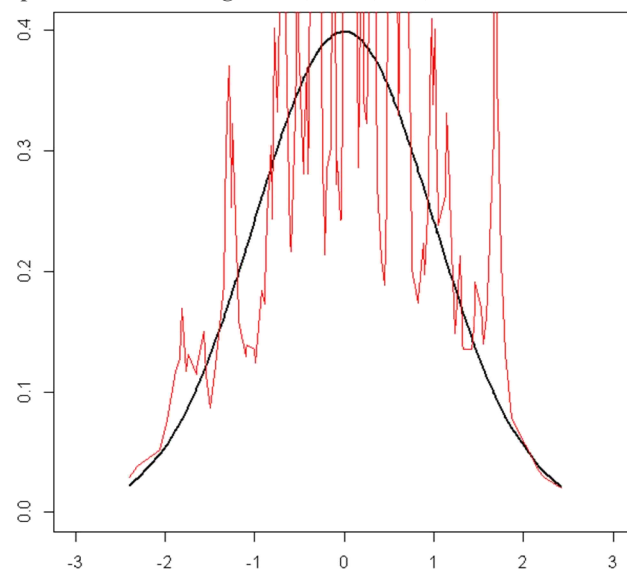
## 1 PRIEDAS. TYRIMO REZULTATAI, KAI $d = 1, d = 2$



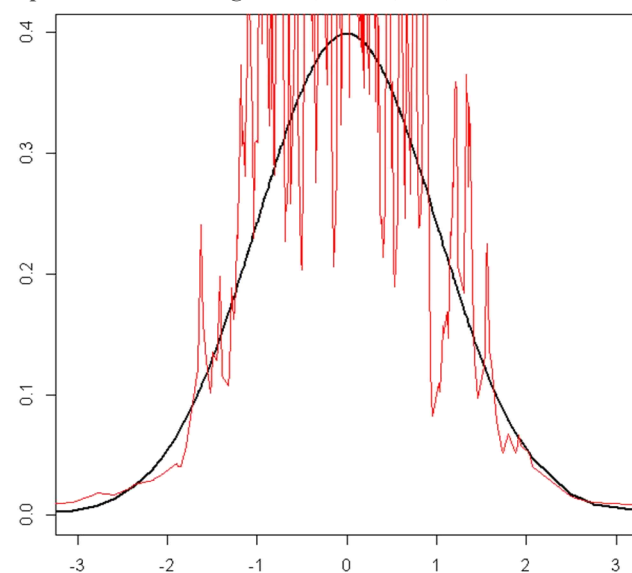
1 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=50, d=1, knn$



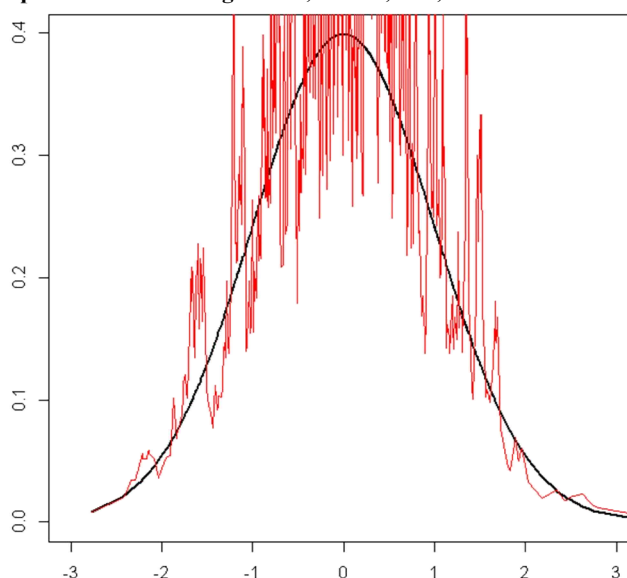
2 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=100, d=1, knn$



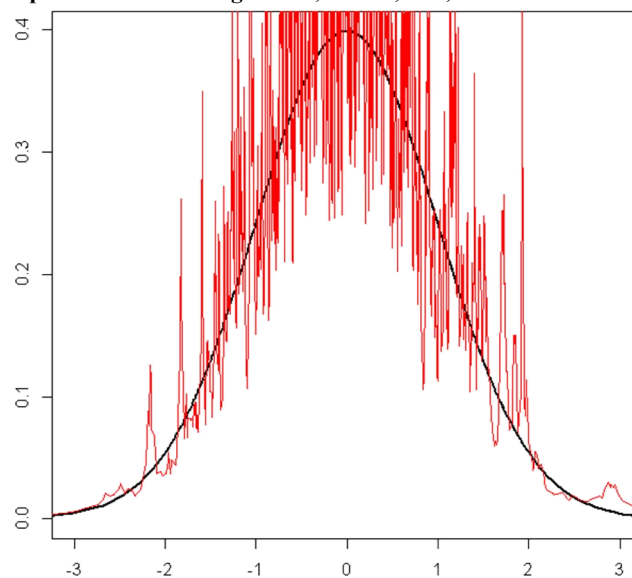
3 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=200, d=1, knn$



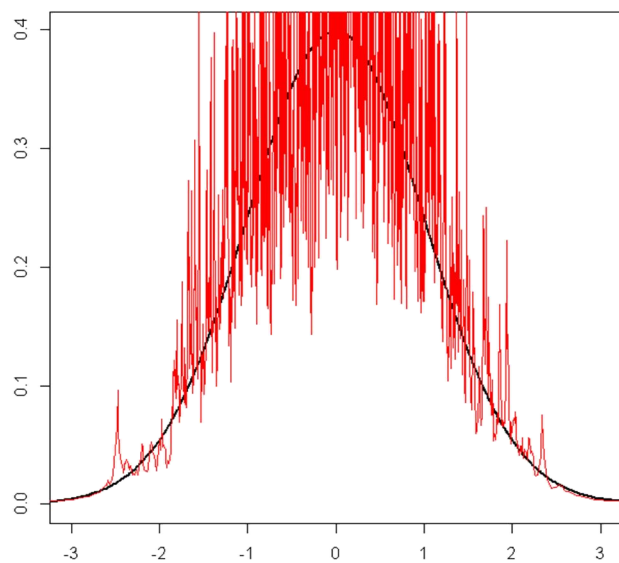
4 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=400, d=1, knn$



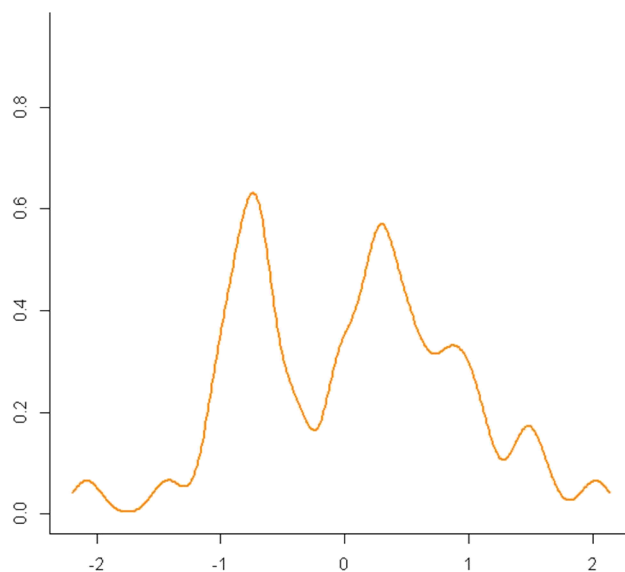
5 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=800, d=1, knn$



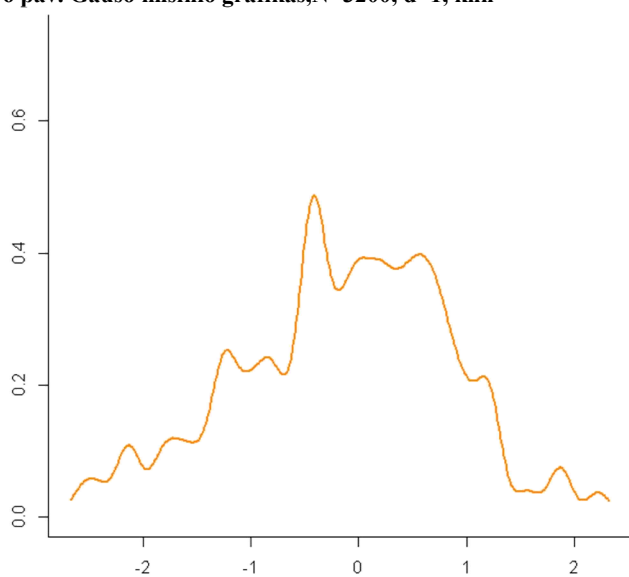
6 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=1600, d=1, knn$



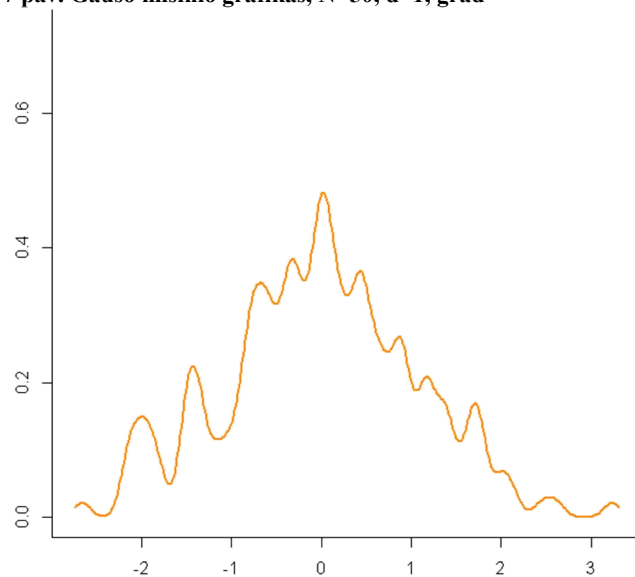
6 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , knn



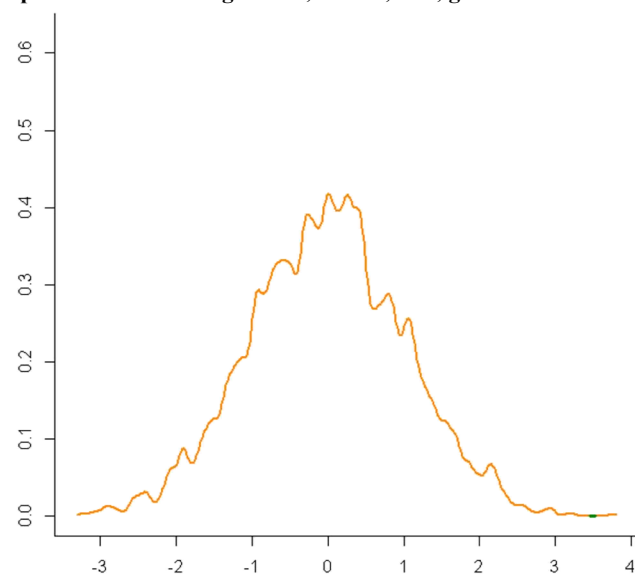
7 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , grad



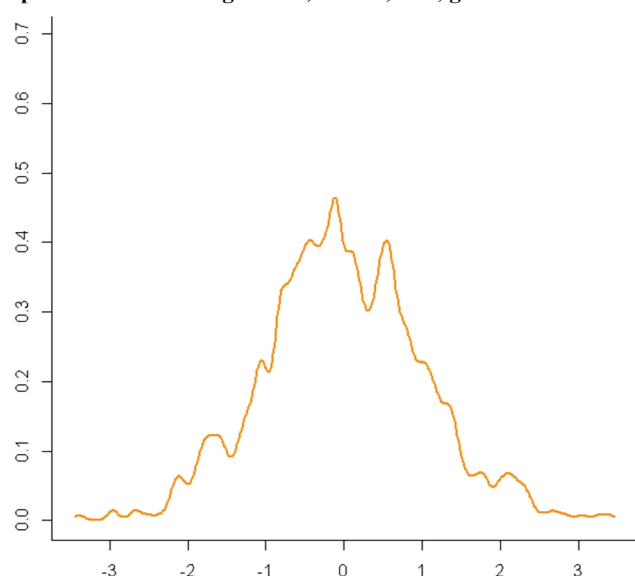
8 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , grad



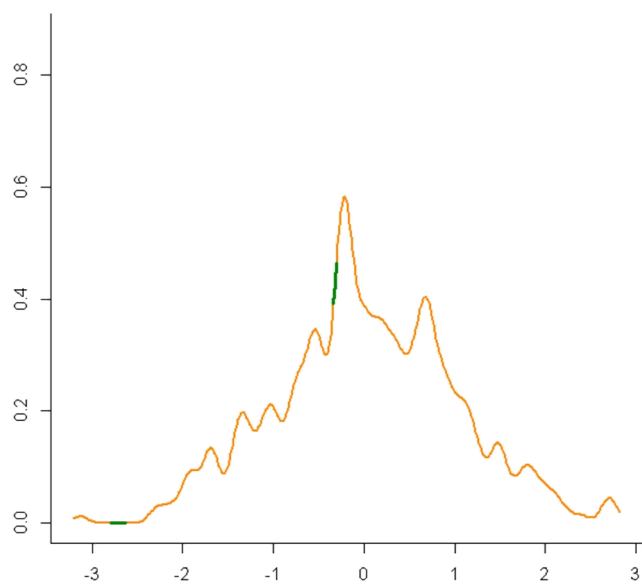
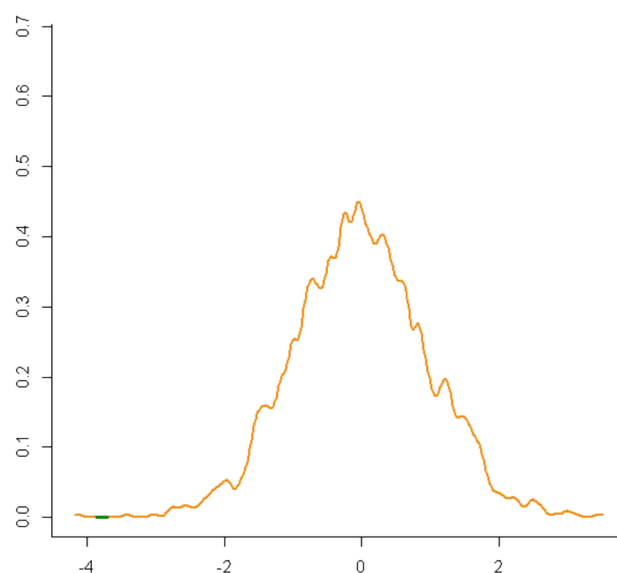
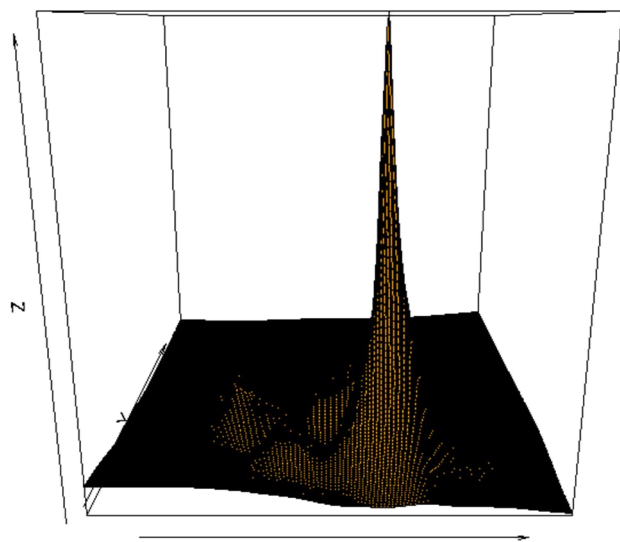
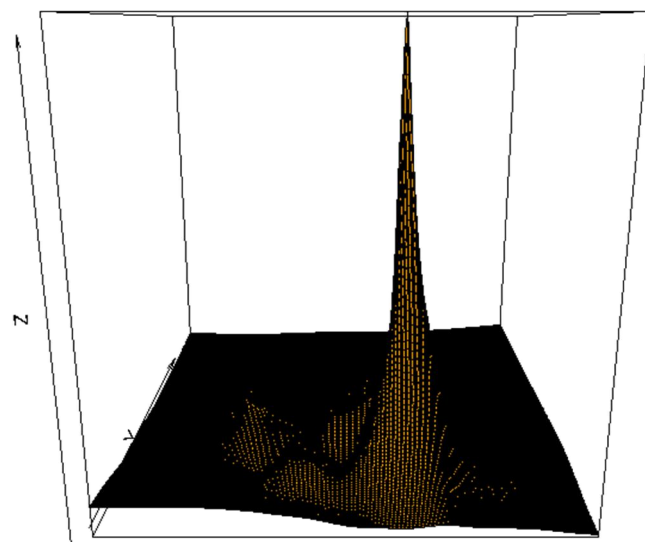
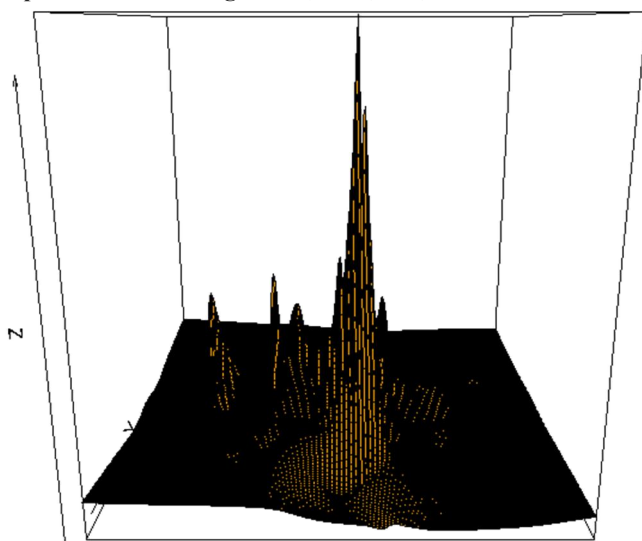
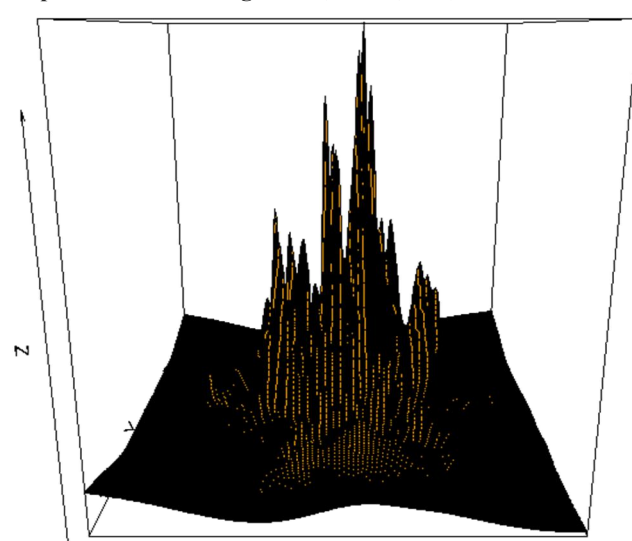
9 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , grad

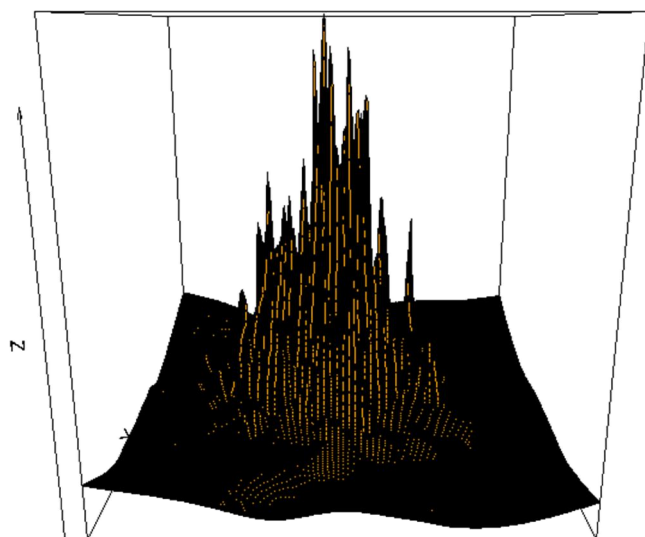
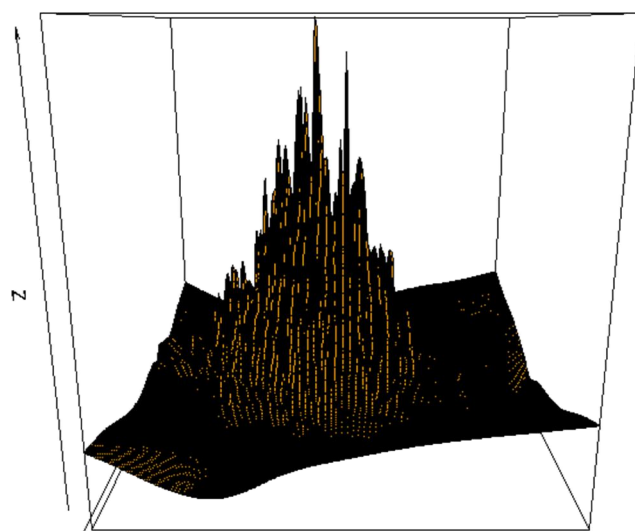
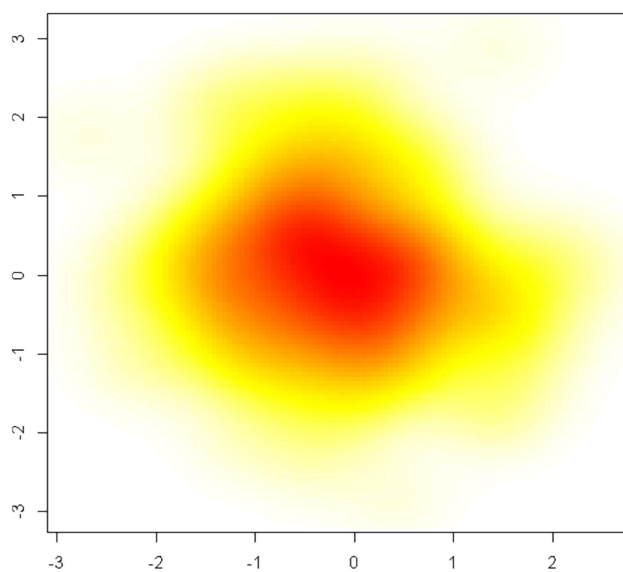
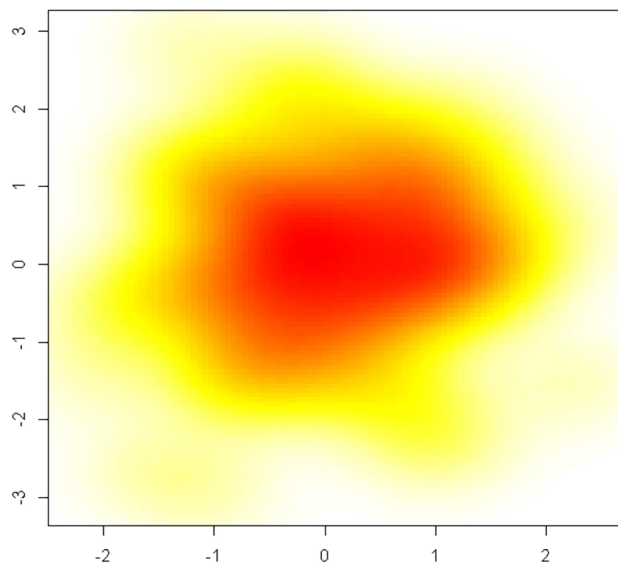
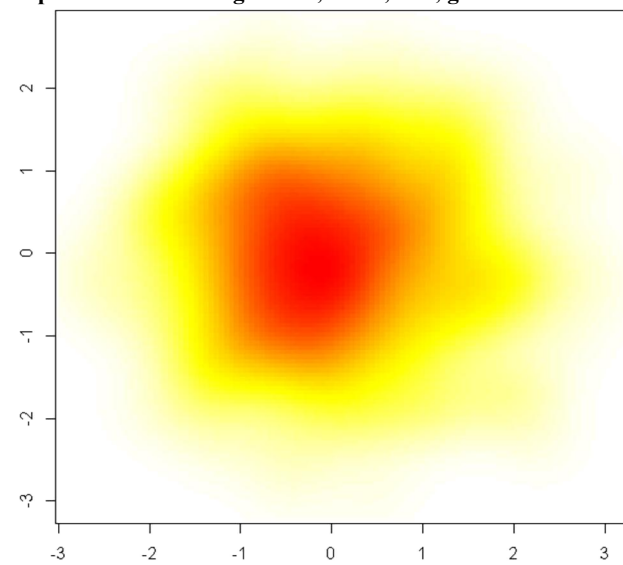
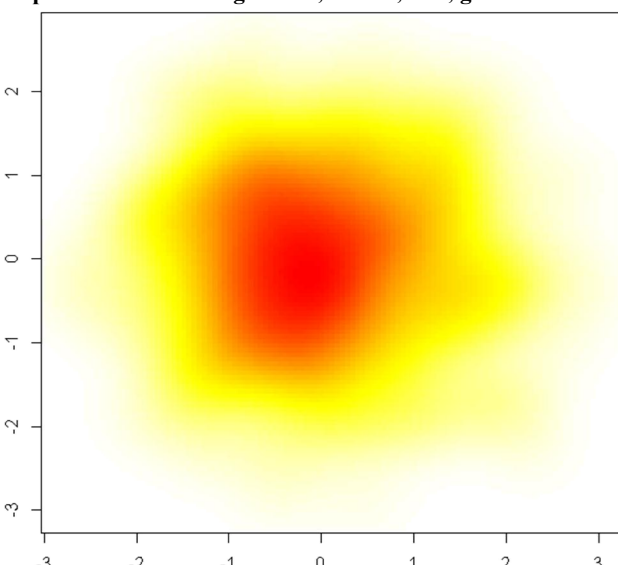


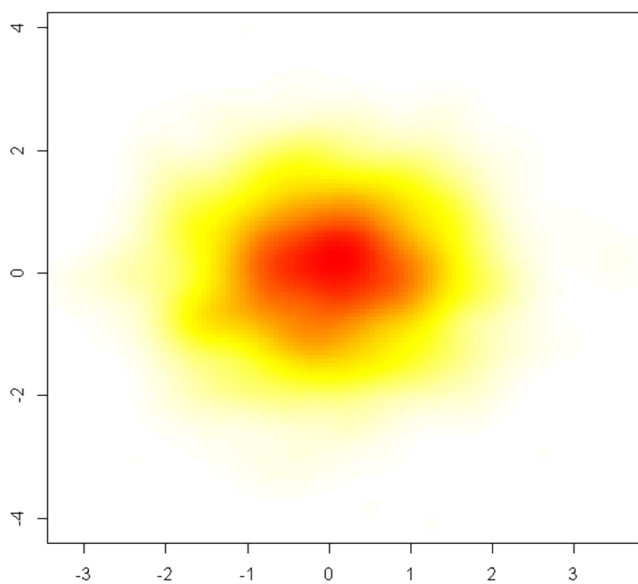
10 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , grad



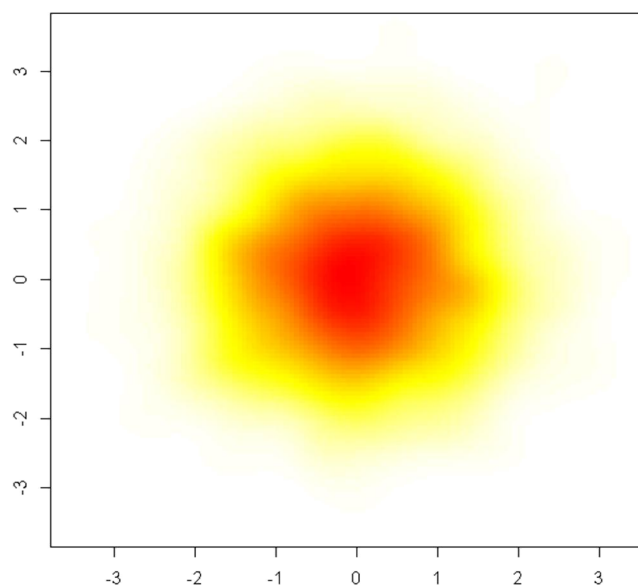
11 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , grad

12 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , grad13 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , grad14 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , knn15 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , knn16 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , knn17 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , knn

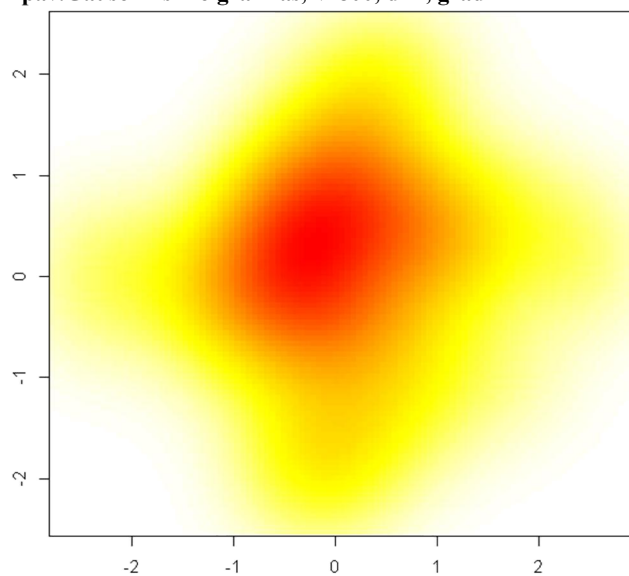
18 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , knn19 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , knn20 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , grad21 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , grad22 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , grad23 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , grad



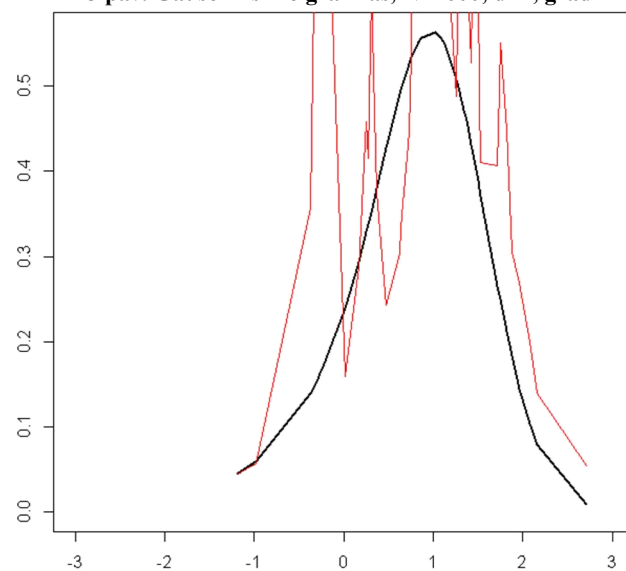
24 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , grad



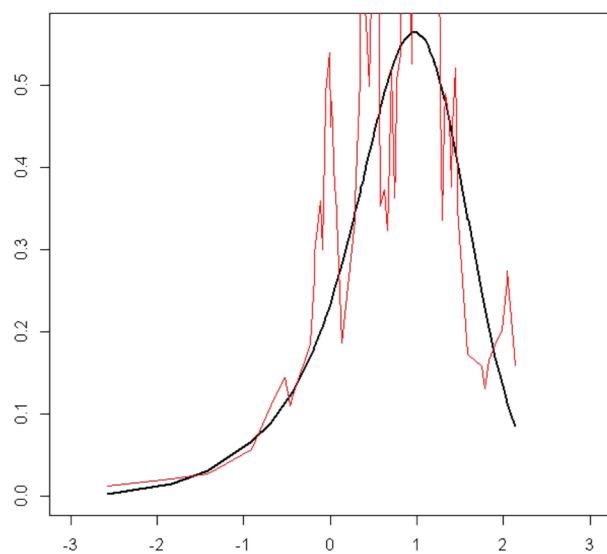
25 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , grad



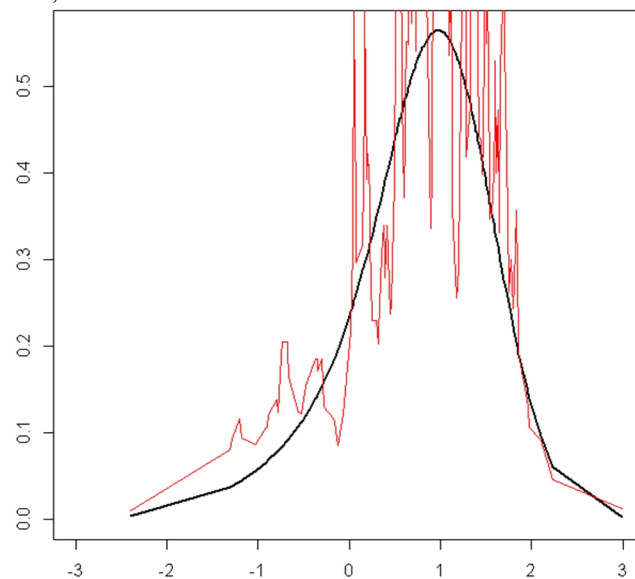
26 pav. Gauso mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , grad



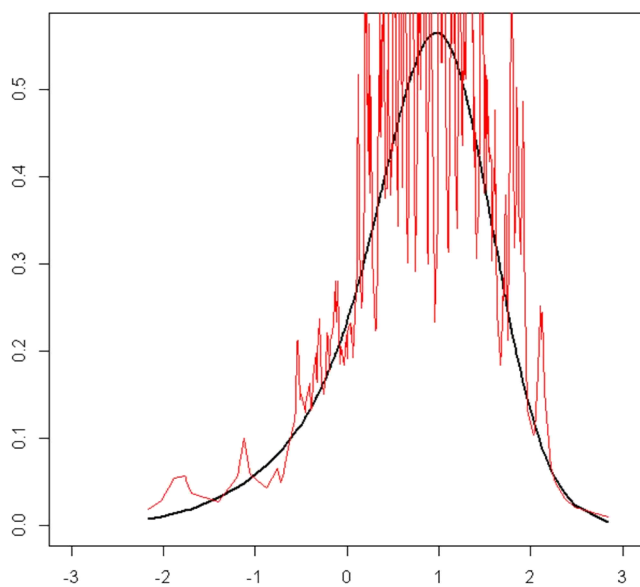
27 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , knn



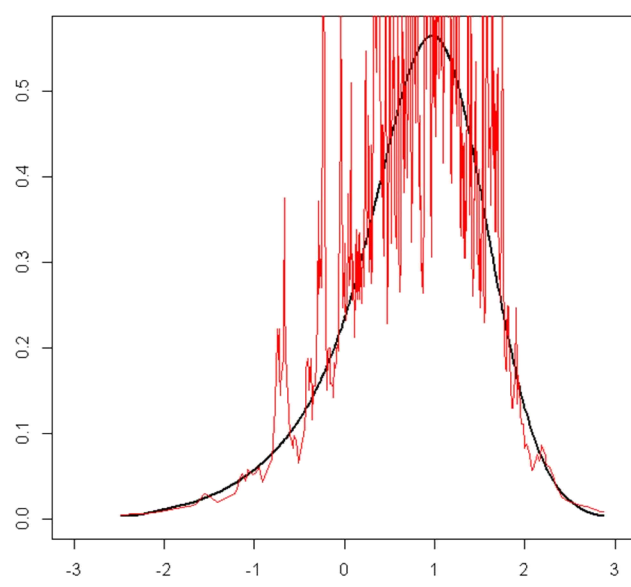
28 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , knn



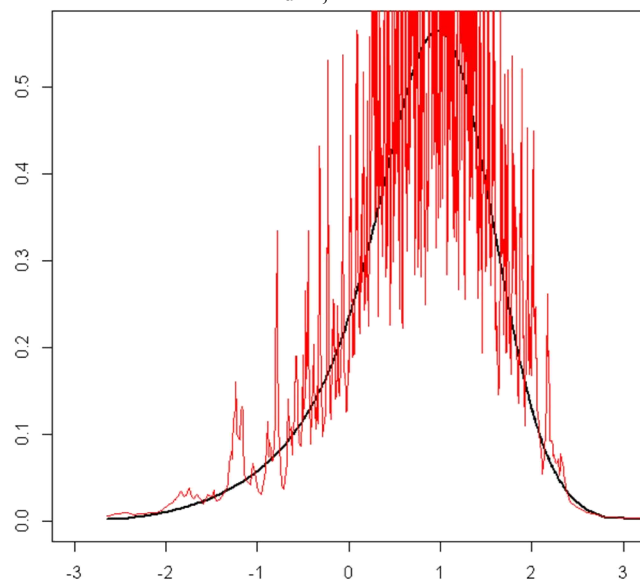
29 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , knn



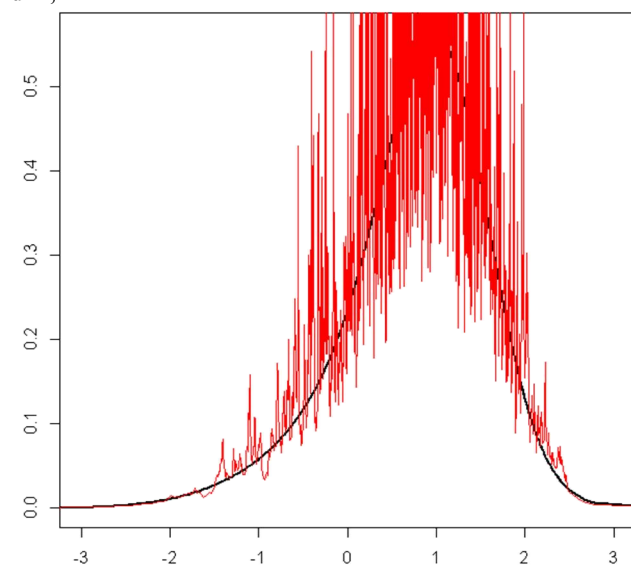
30 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , knn



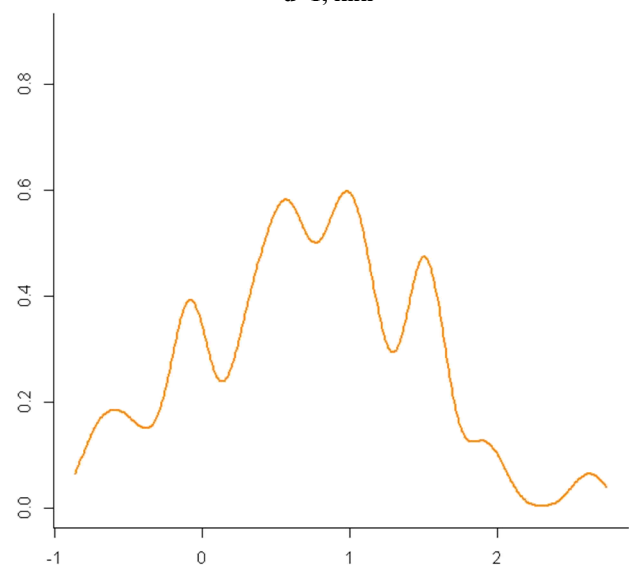
31 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , knn



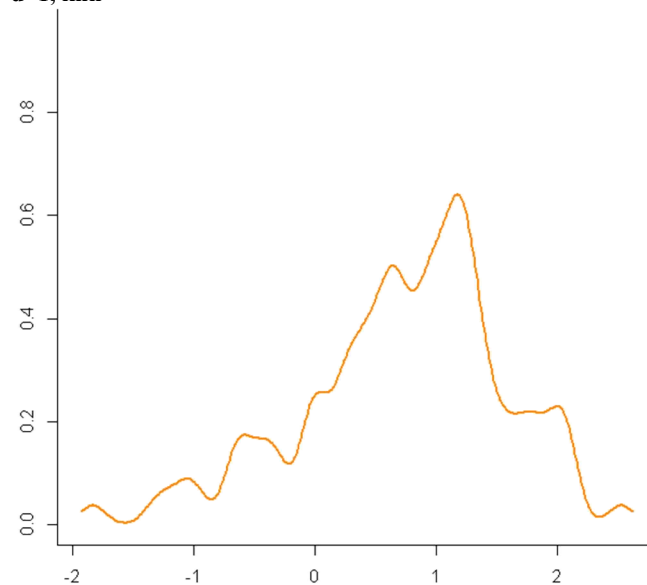
32 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , knn



33 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , knn

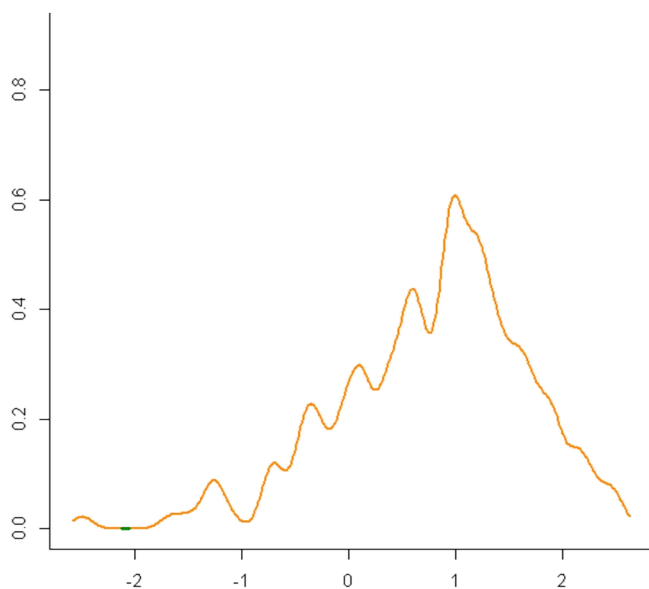


34 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , grad

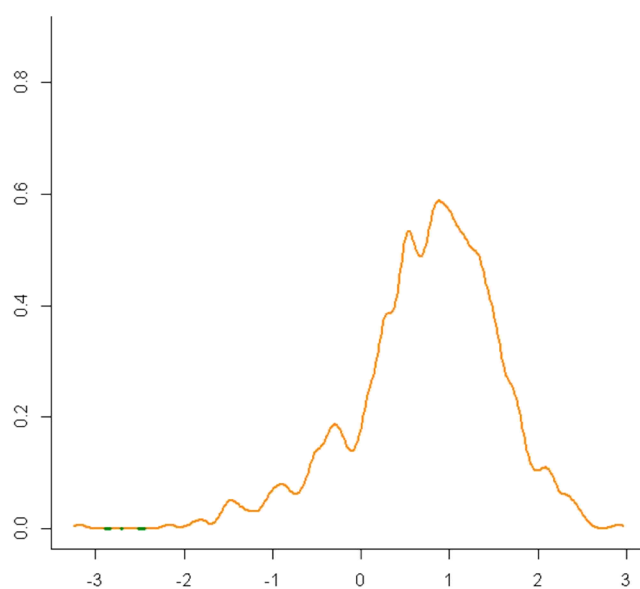


35 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , grad

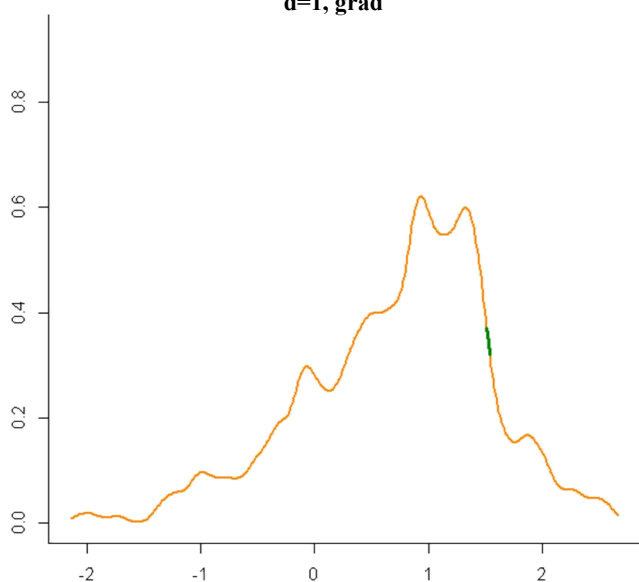




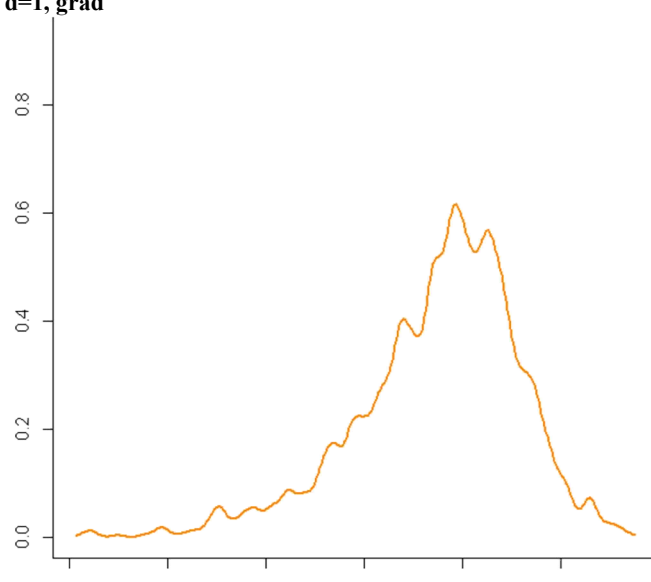
36 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , grad



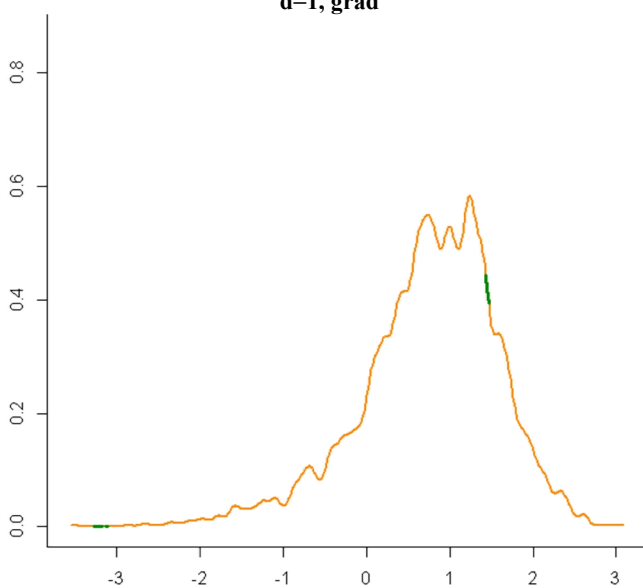
37 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , grad



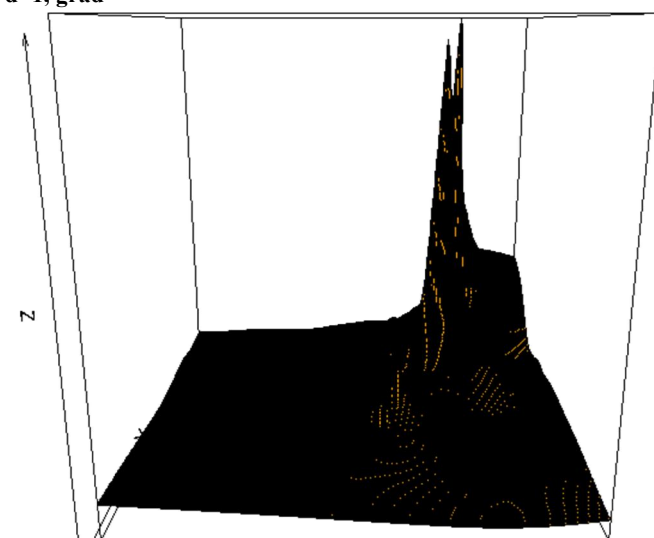
38 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , grad



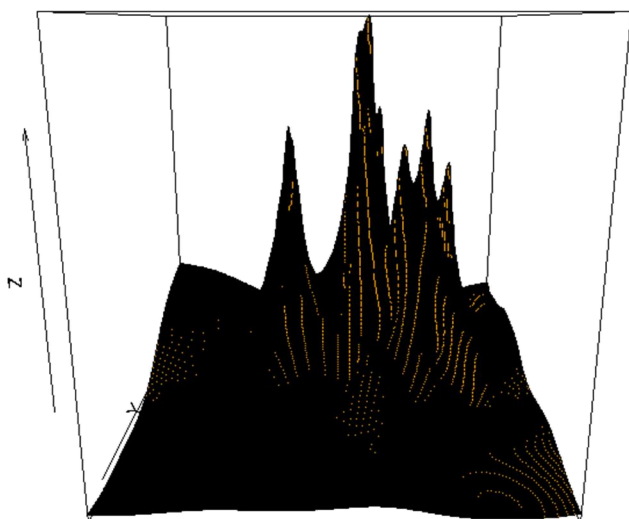
39 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , grad



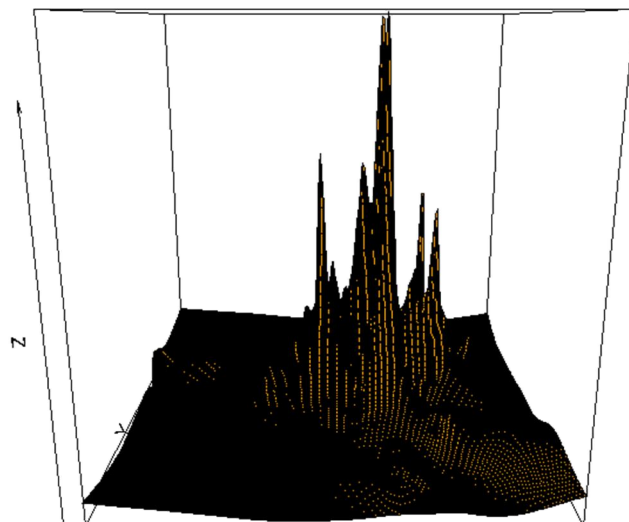
40 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , grad



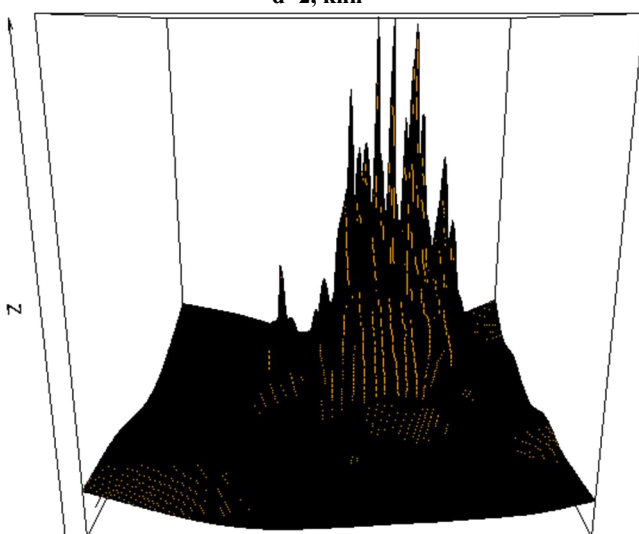
41 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , knn



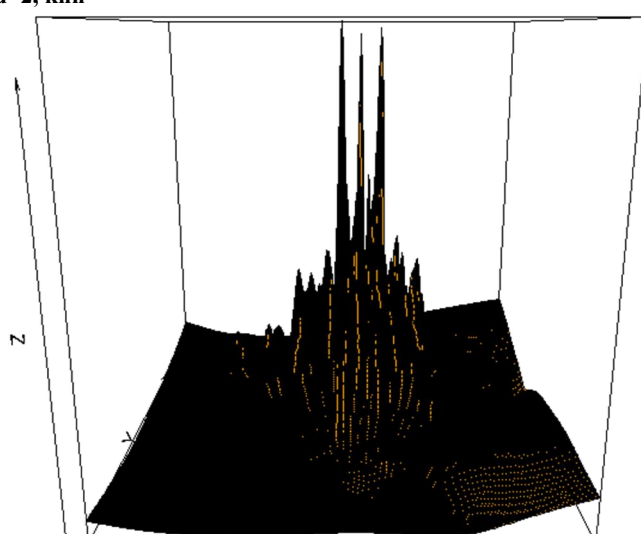
42 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , knn



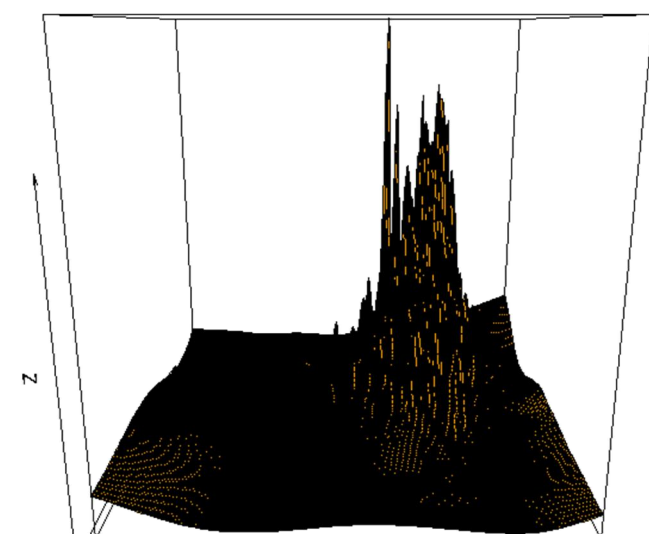
43 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , knn



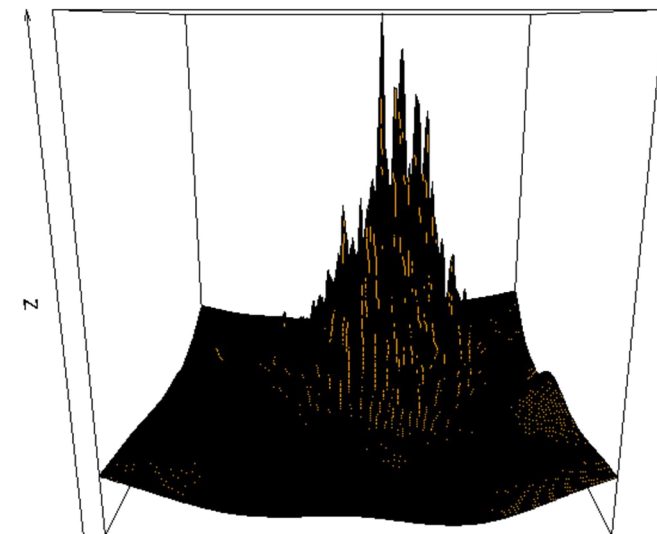
44 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , knn



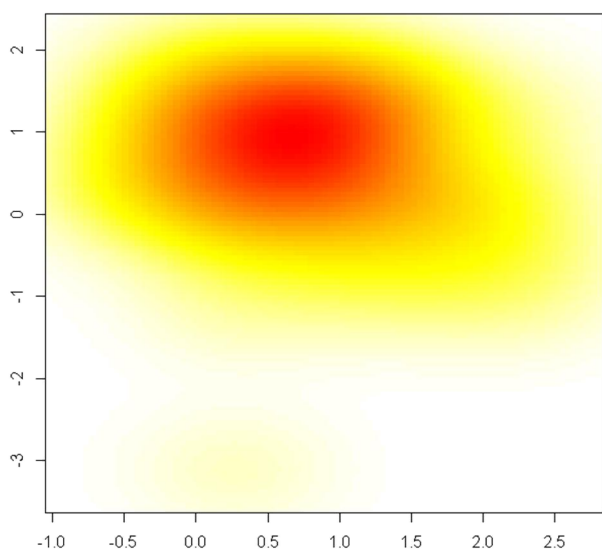
45 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , knn



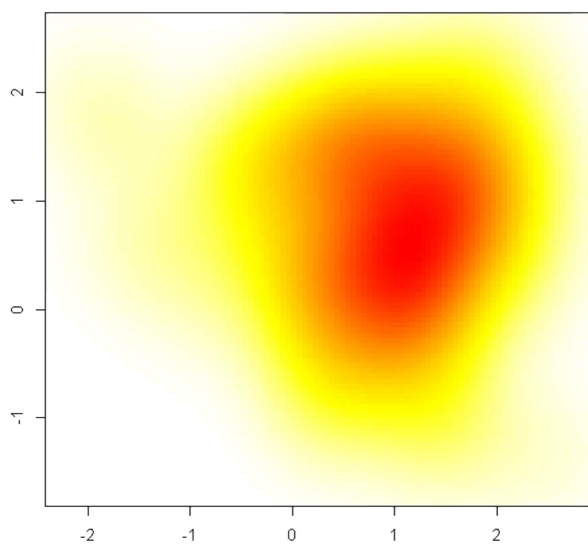
46 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , knn



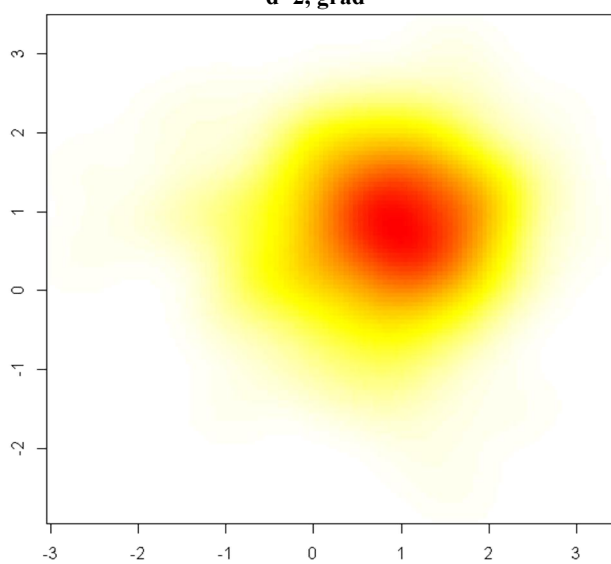
47 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=3600$ ,  $d=2$ , knn



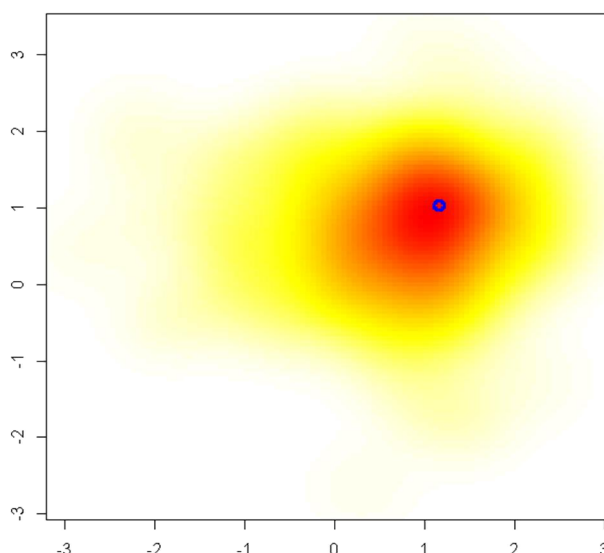
48 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , grad



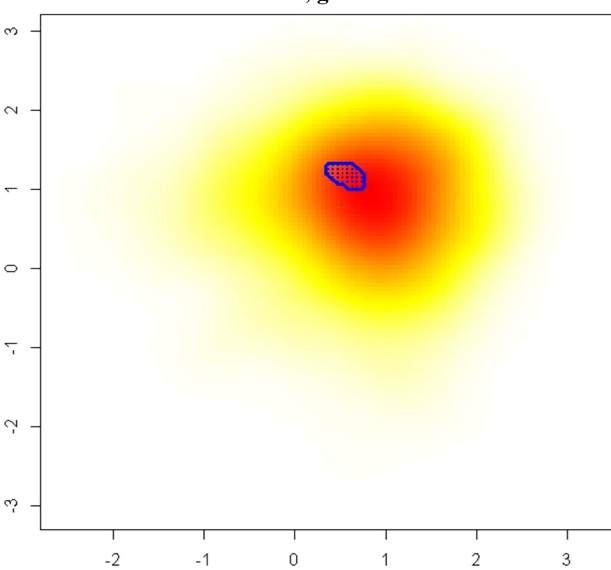
49 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , grad



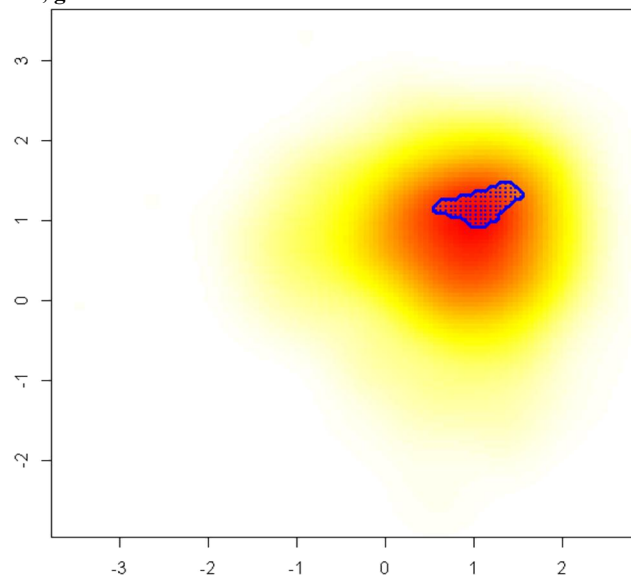
50 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , grad



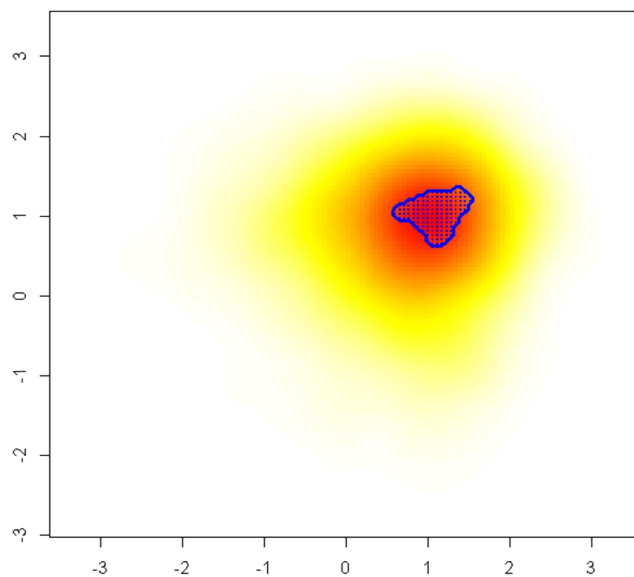
51 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , grad



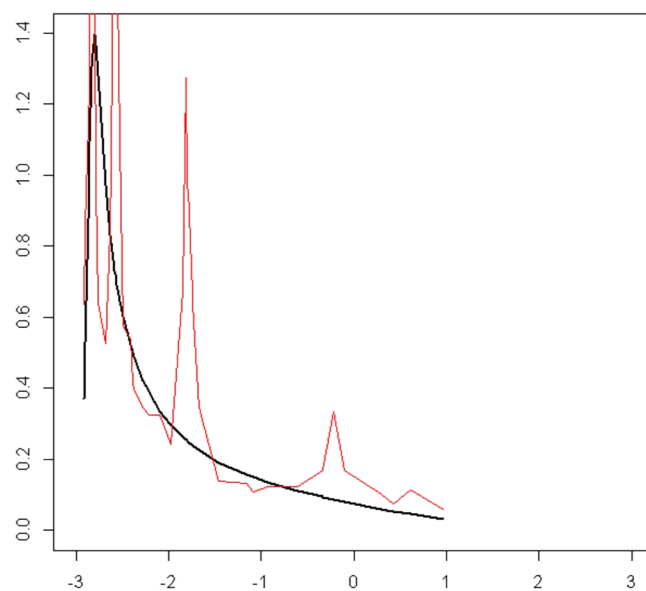
52 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , grad



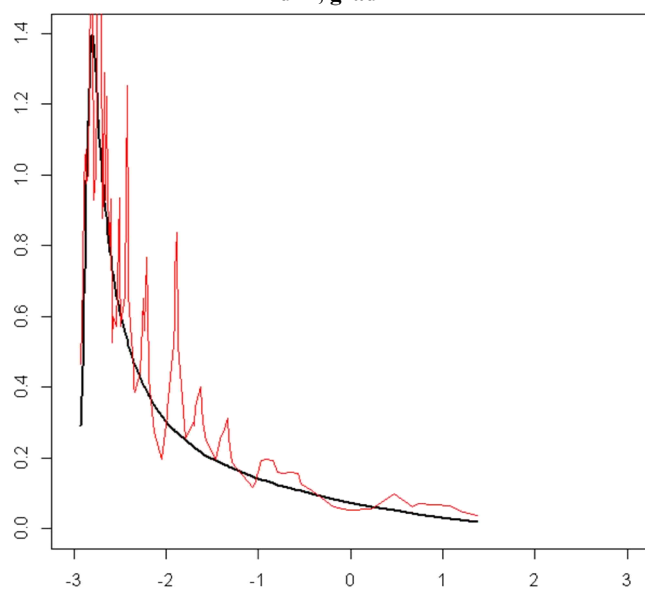
53 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , grad



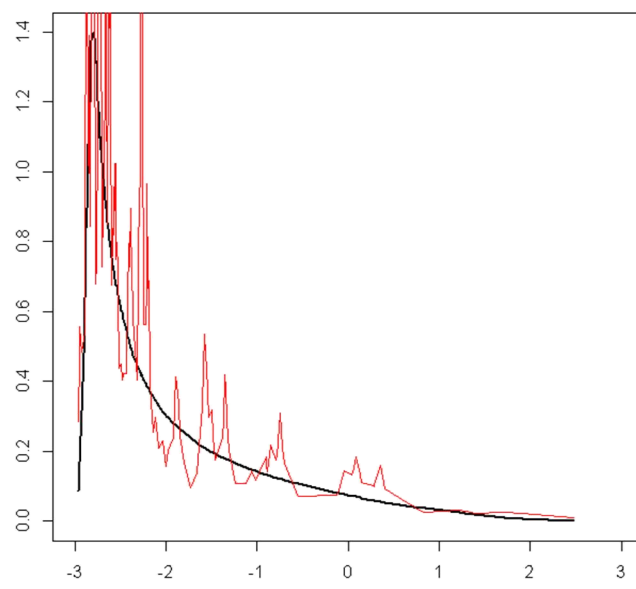
54 pav. Nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , grad



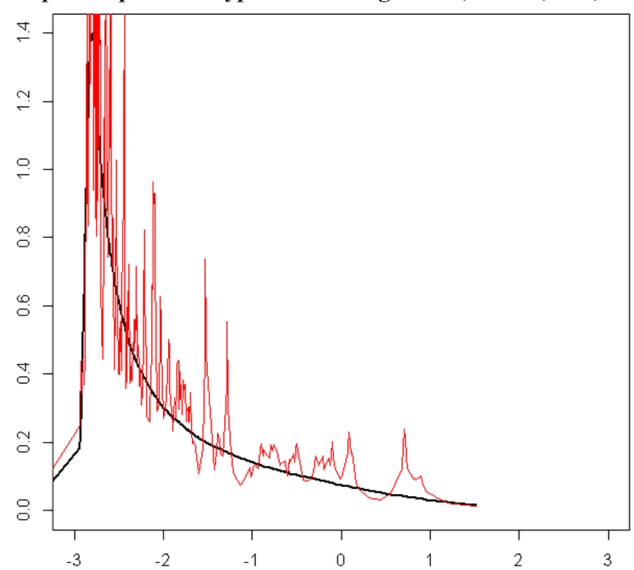
55 pav. Stipriai nukrypusio mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , knn



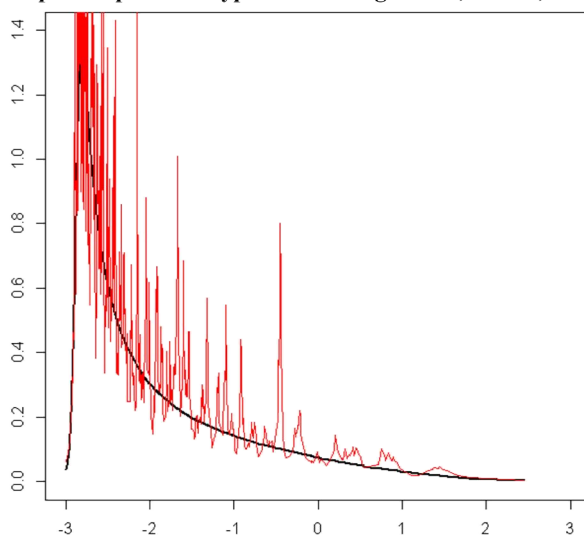
56 pav. Stipriai nukrypusio mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , knn



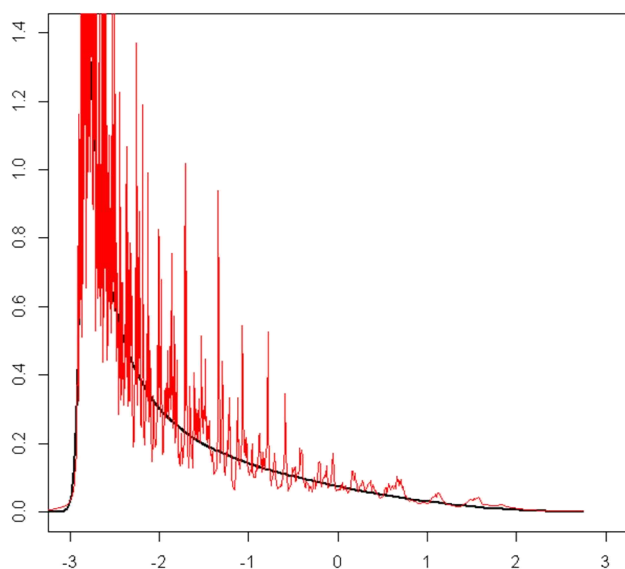
57 pav. Stipriai nukrypusio mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , knn



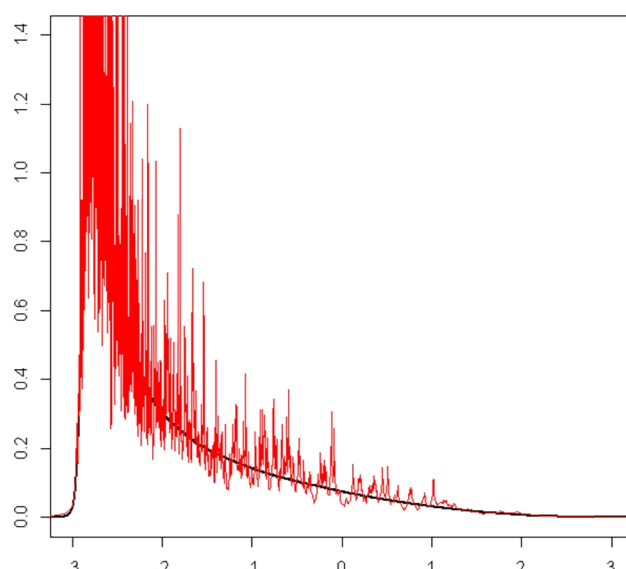
58 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , knn



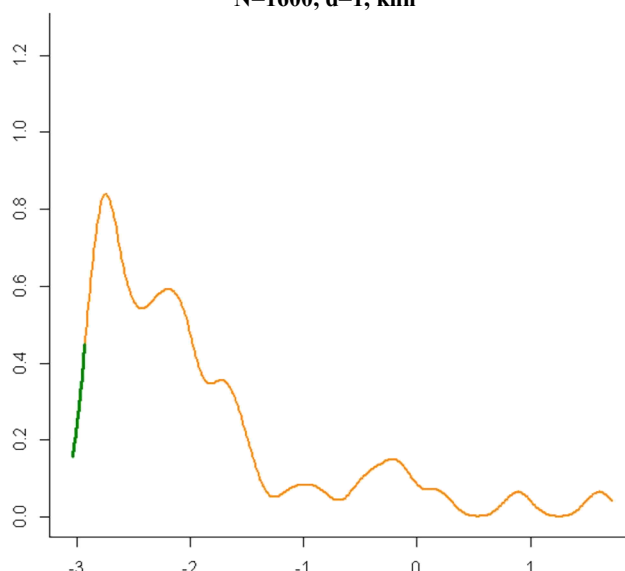
59 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , knn



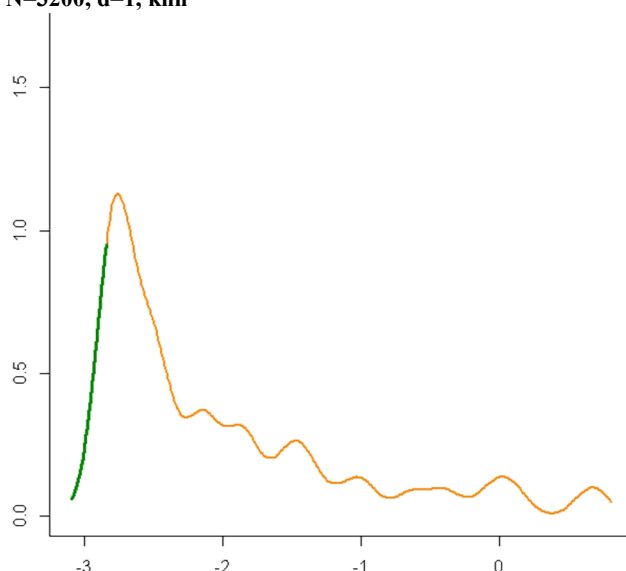
60 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=1600, d=1, knn



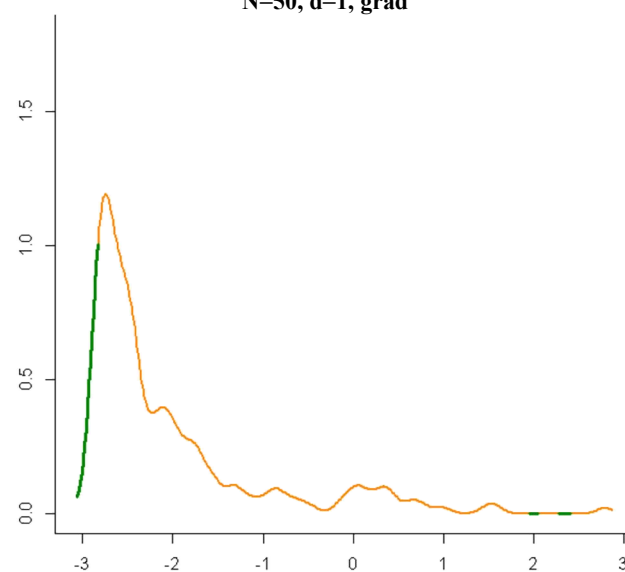
61 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=3200, d=1, knn



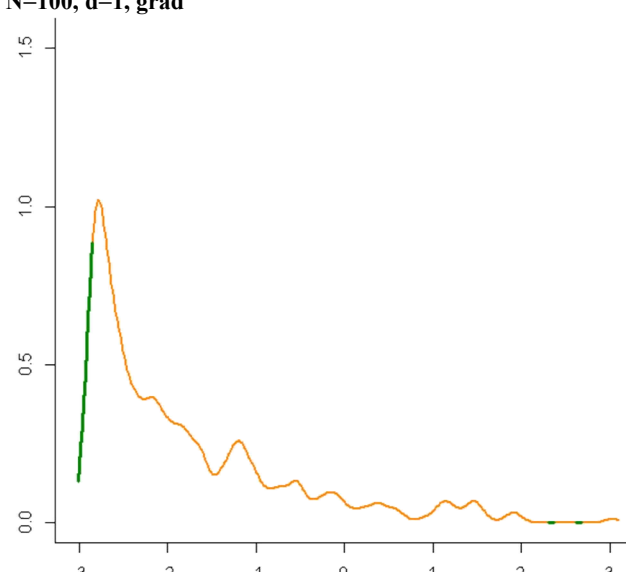
62 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=50, d=1, grad



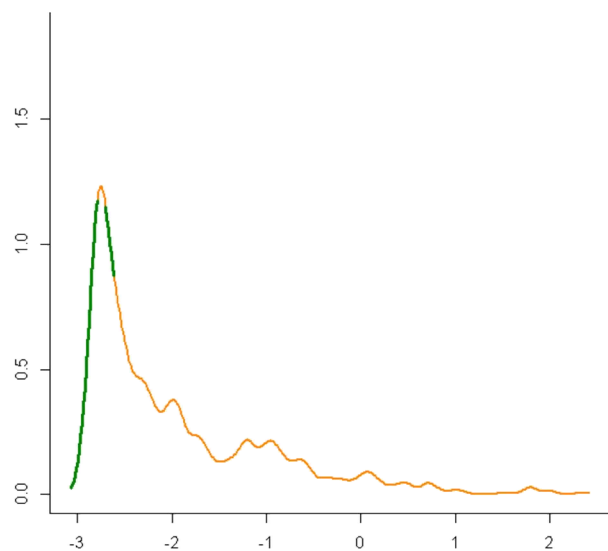
63 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=100, d=1, grad



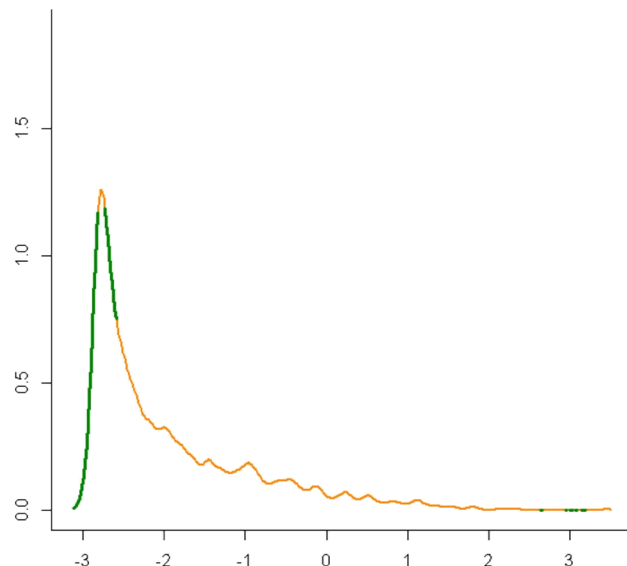
64 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=200, d=1, grad



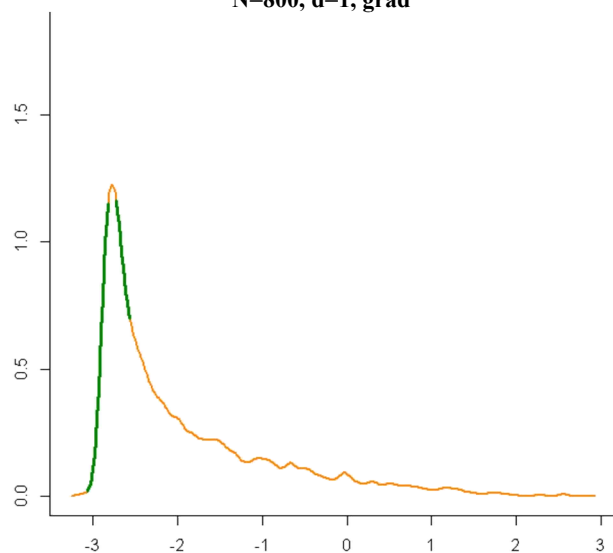
65 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=400, d=1, grad



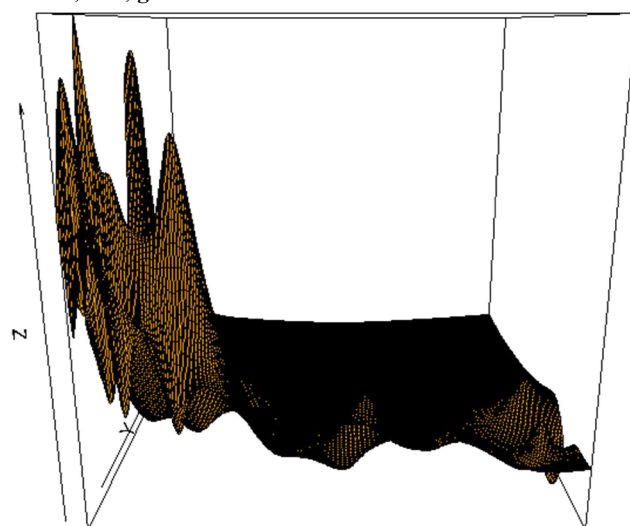
66 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=800, d=1, grad



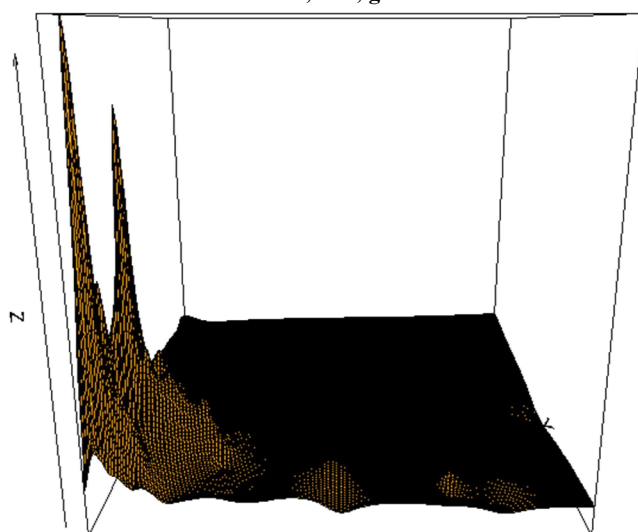
67 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=1600, d=1, grad



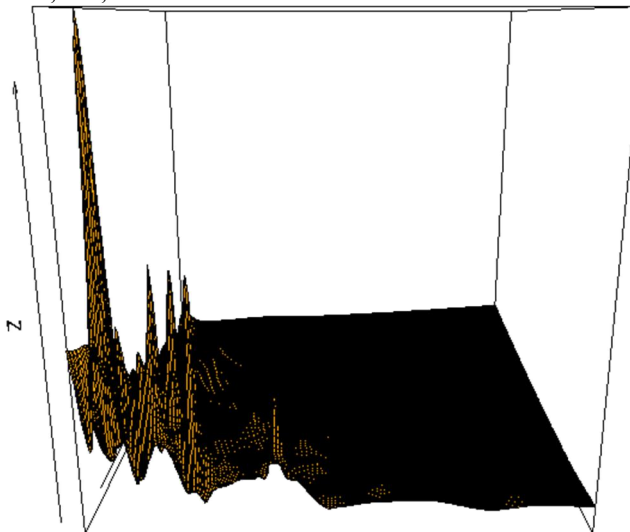
68 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=3200, d=1, grad



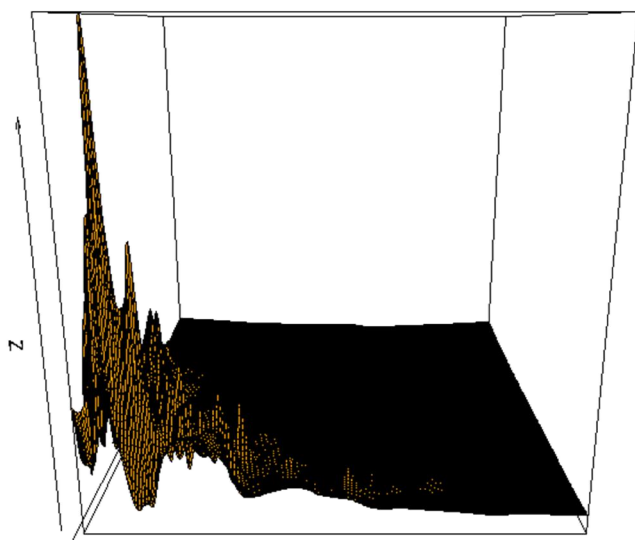
69 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=50, d=2, knn



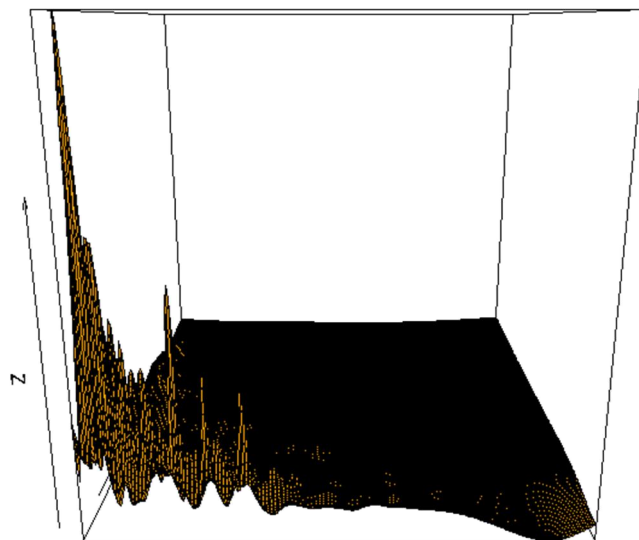
70 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=100, d=2, knn



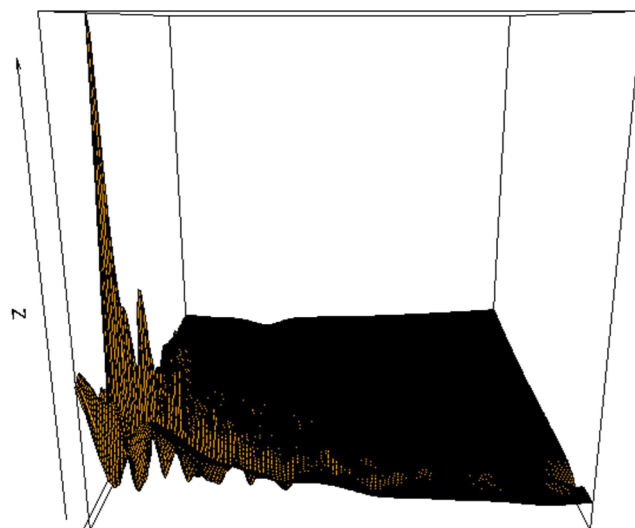
71 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=200, d=2, knn



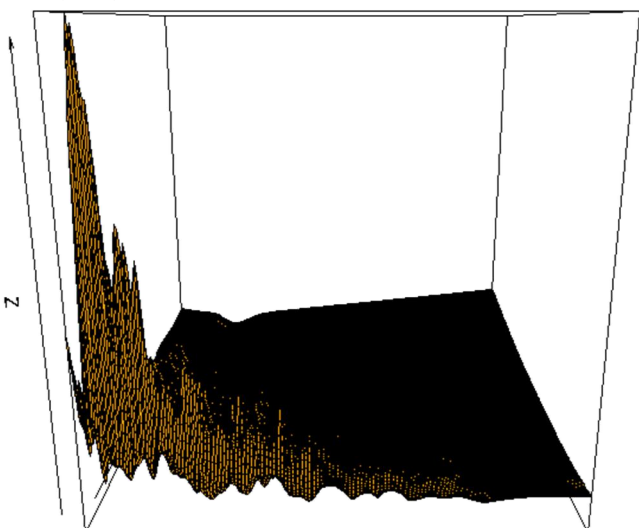
72 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=400, d=2, knn



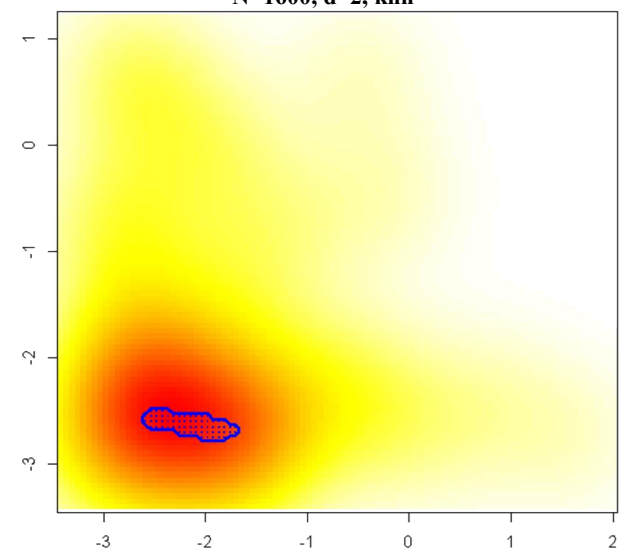
73 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=800, d=2, knn



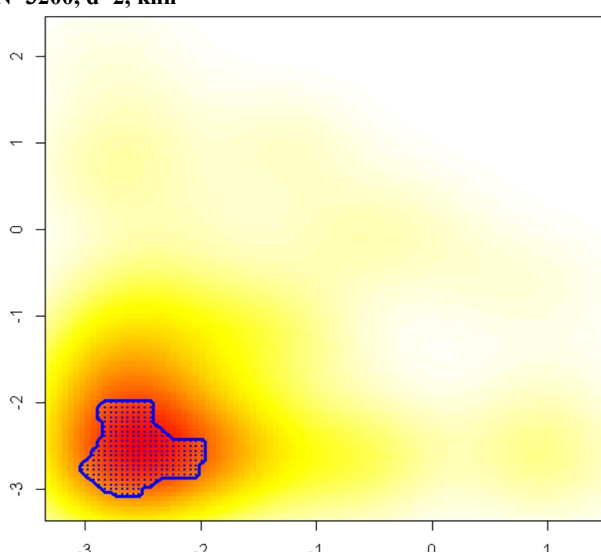
74 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=1600, d=2, knn



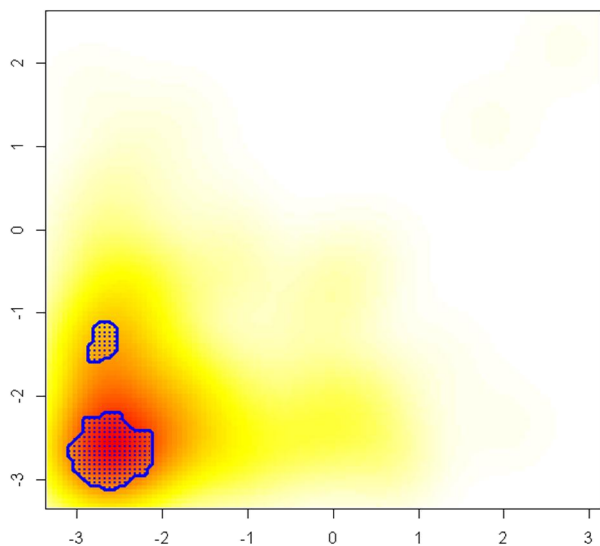
75 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=3200, d=2, knn



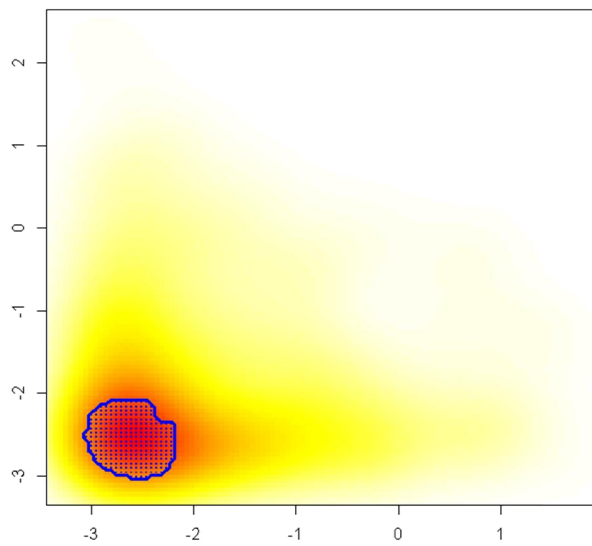
76 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=50, d=2, grad



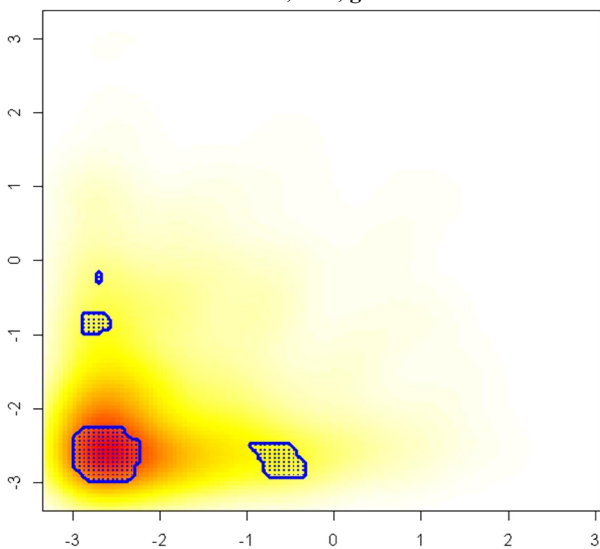
77 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=100, d=2, grad



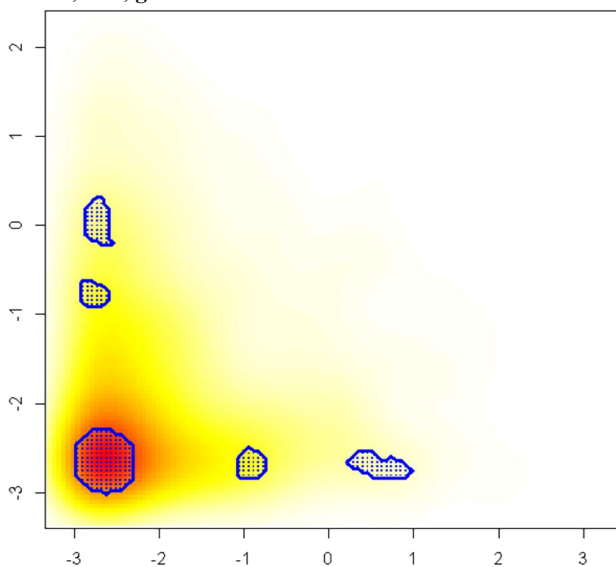
78 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=200, d=2, grad



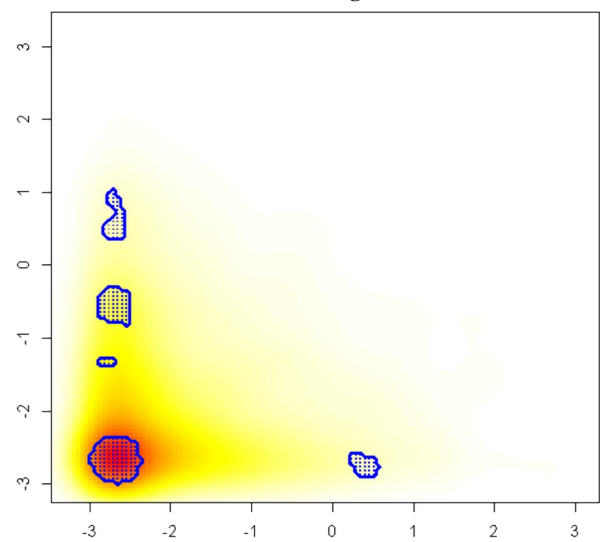
79 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=400, d=2, grad



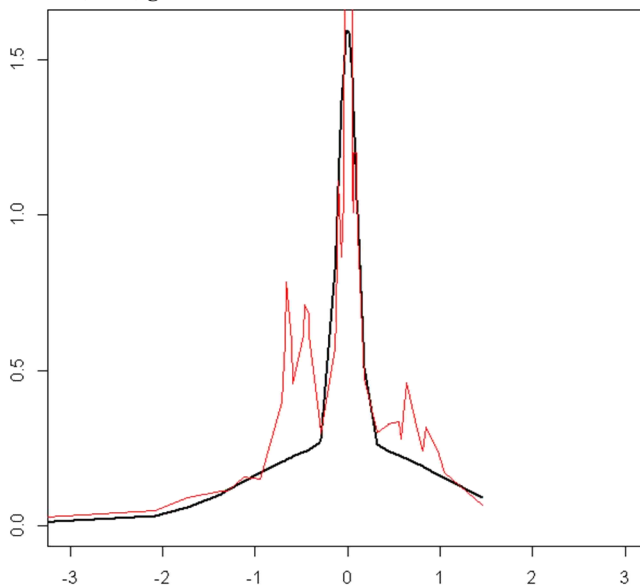
80 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=800, d=2, grad



81 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=1600, d=2, grad

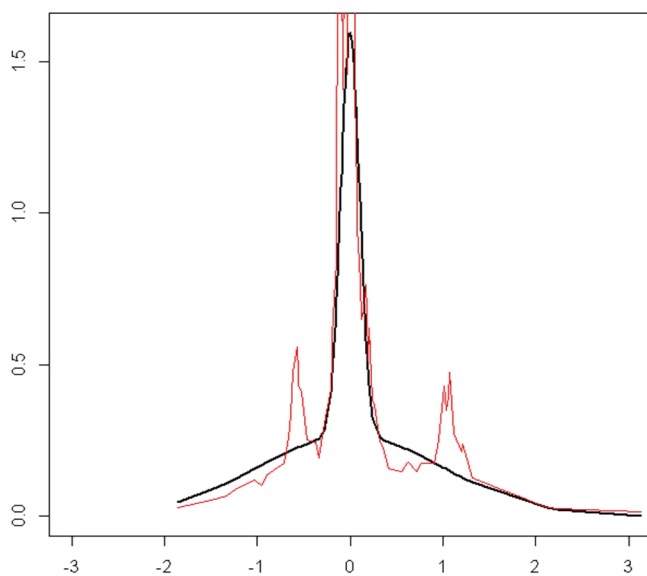


82 pav. Stipriai nukrypusio vienamodalinio mišinio grafikas,  
N=3200, d=2, grad

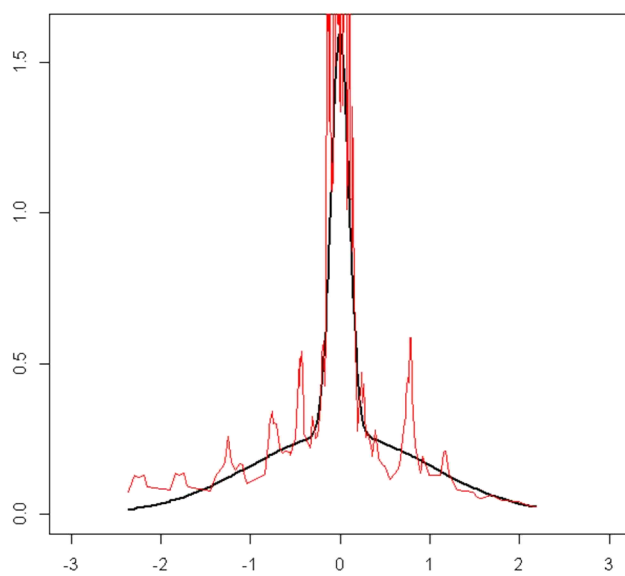


83 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas, N=50, d=1, knn

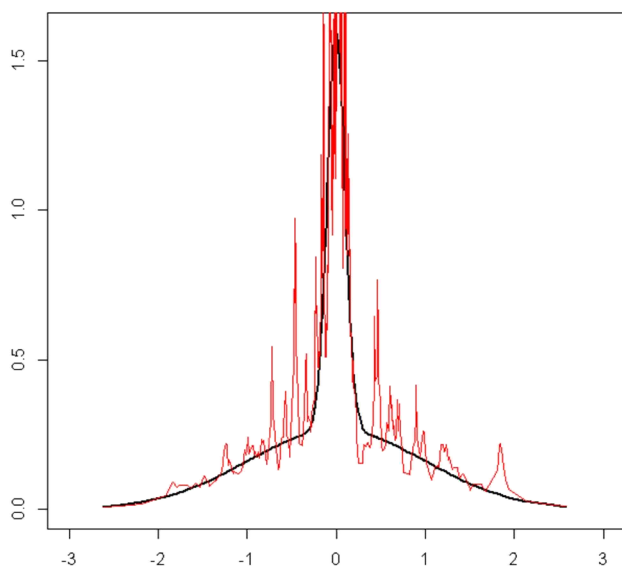




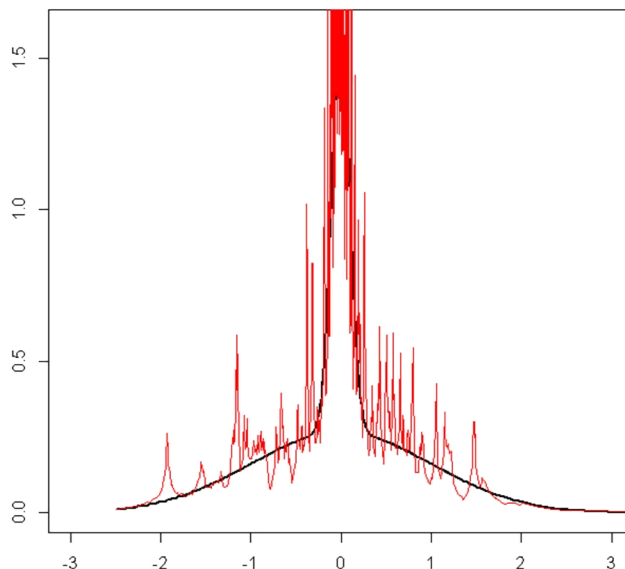
84 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ ,  $knn$



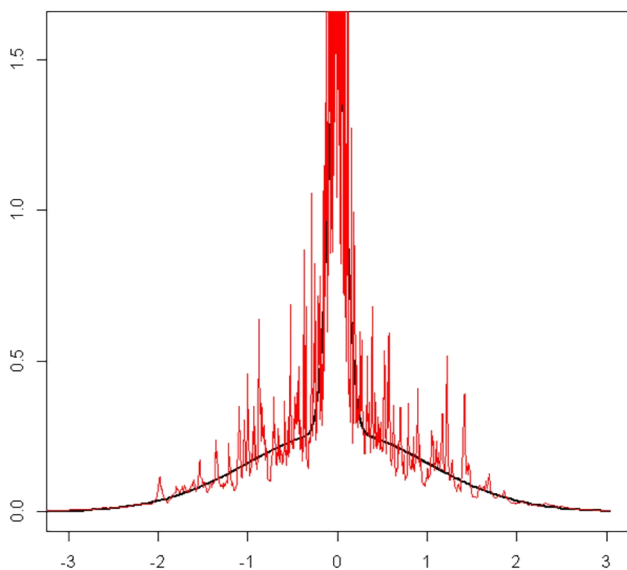
85 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ ,  $knn$



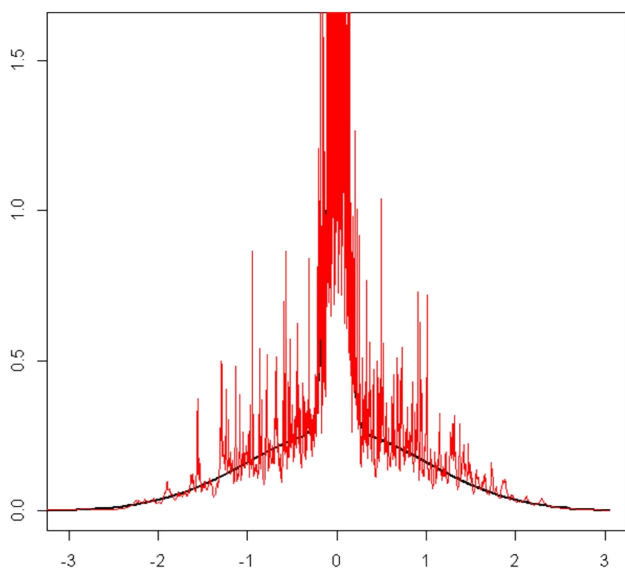
86 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ ,  $knn$



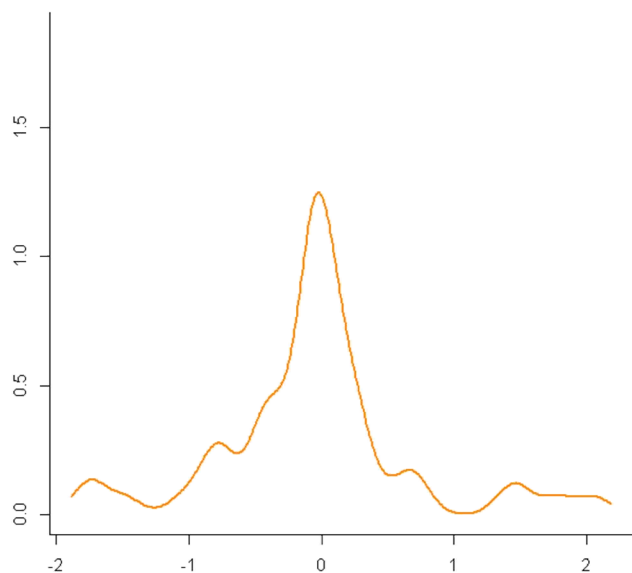
87 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ ,  $knn$



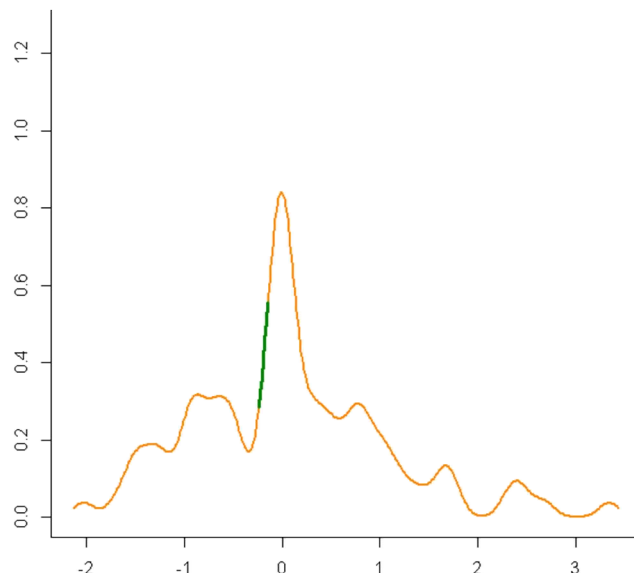
88 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ ,  $knn$



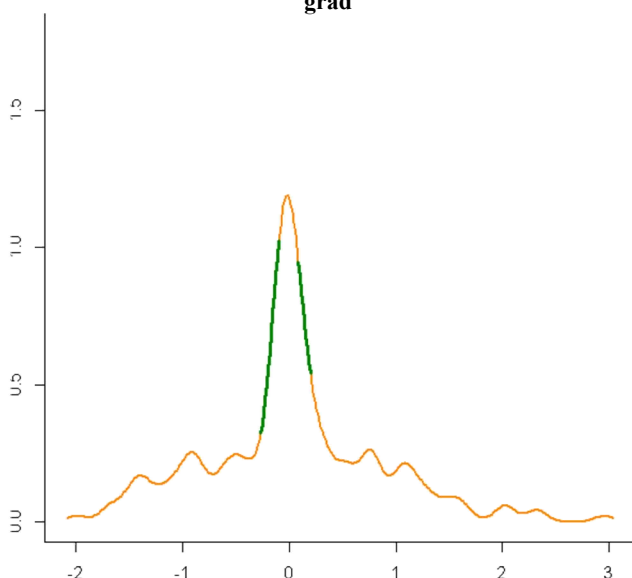
89 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ ,  $knn$



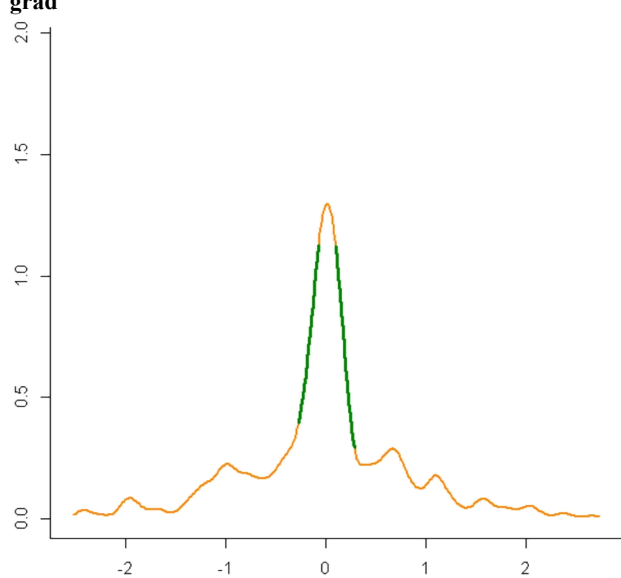
90 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , grad



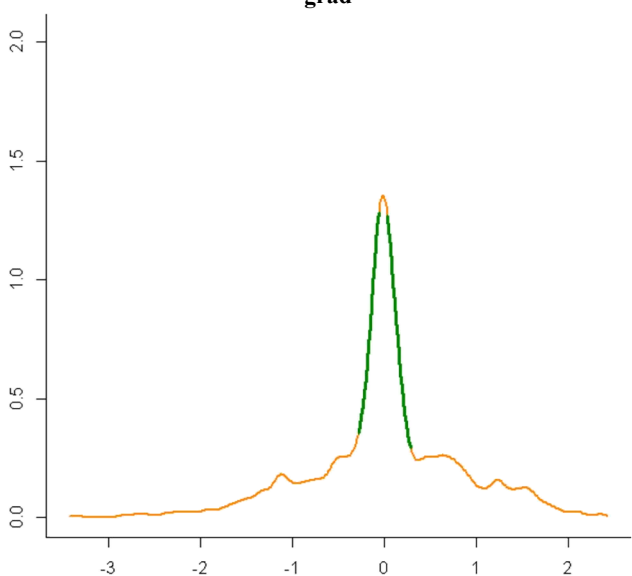
91 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , grad



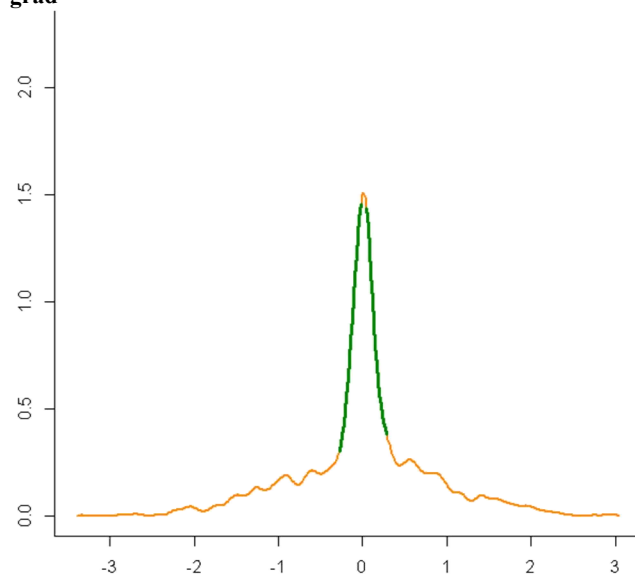
92 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , grad



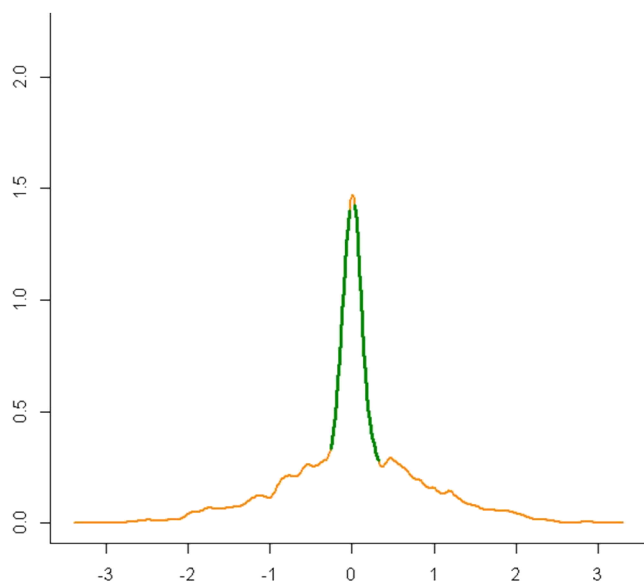
93 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , grad



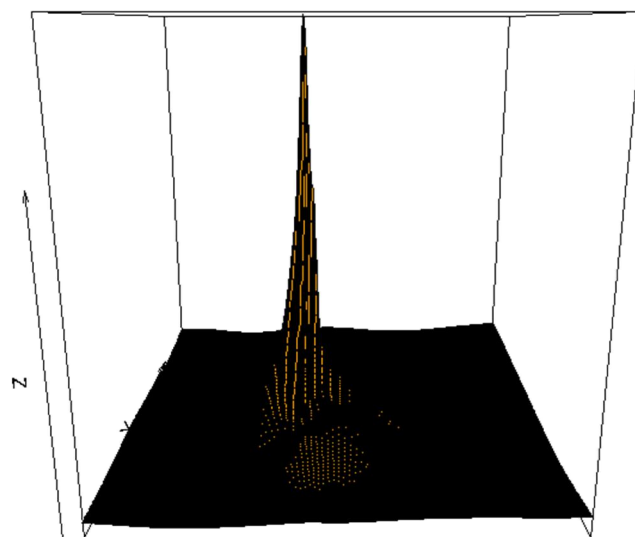
94 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , grad



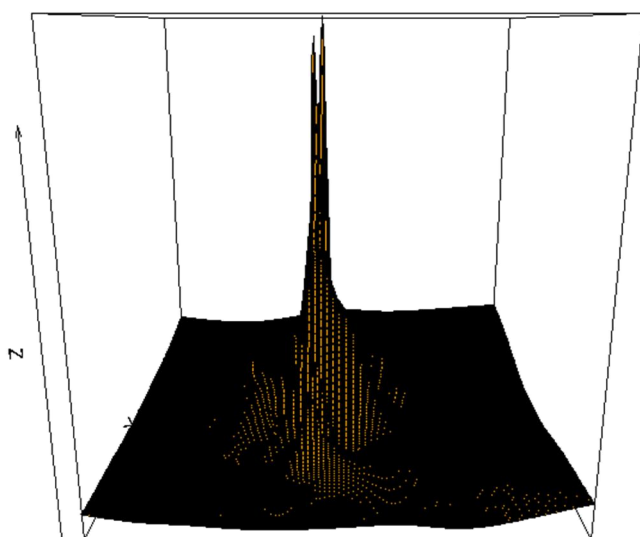
95 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , grad



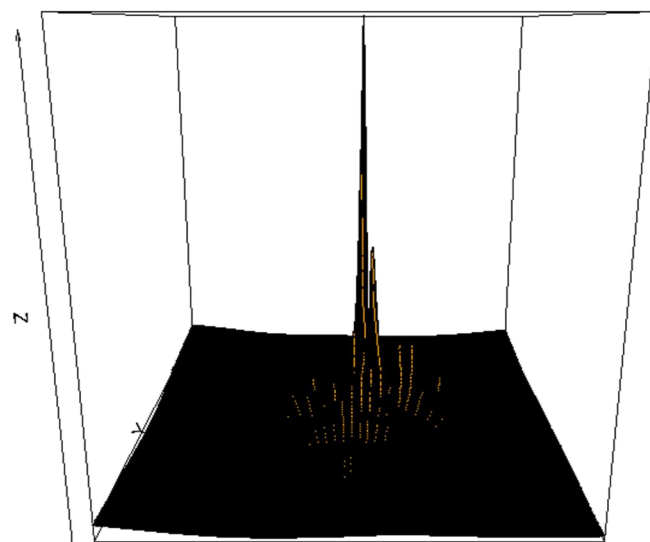
96 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , grad



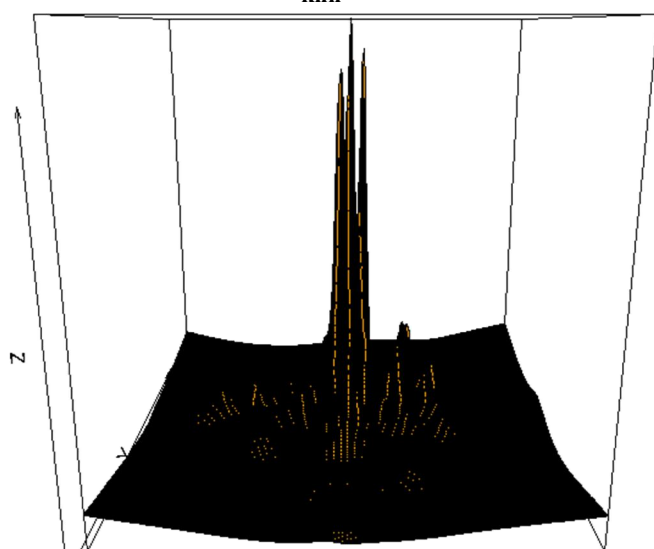
97 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , knn



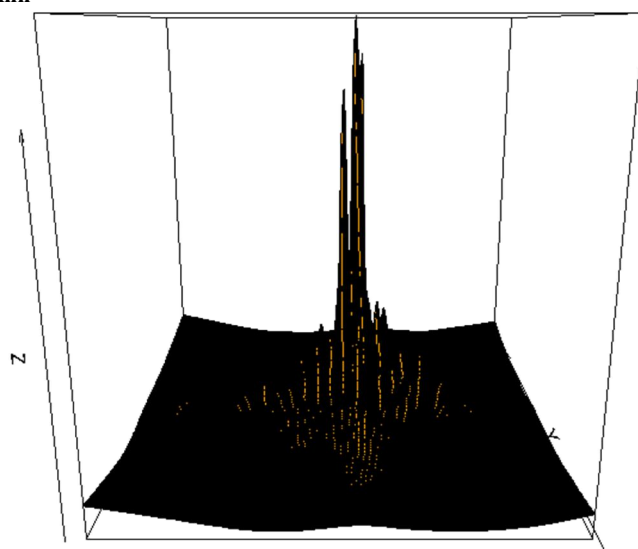
98 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , knn



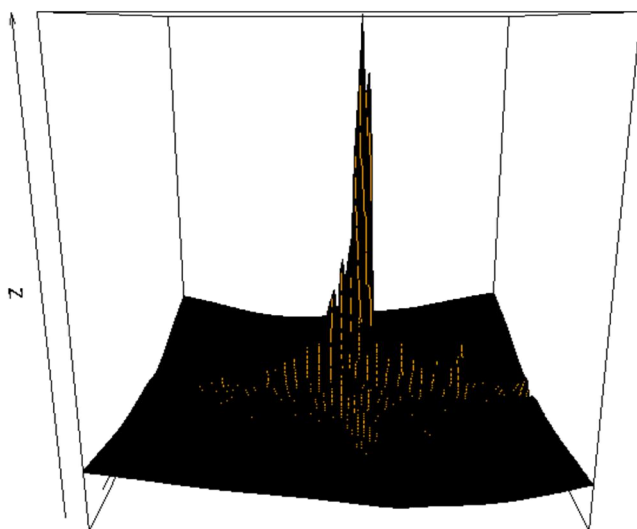
99 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , knn



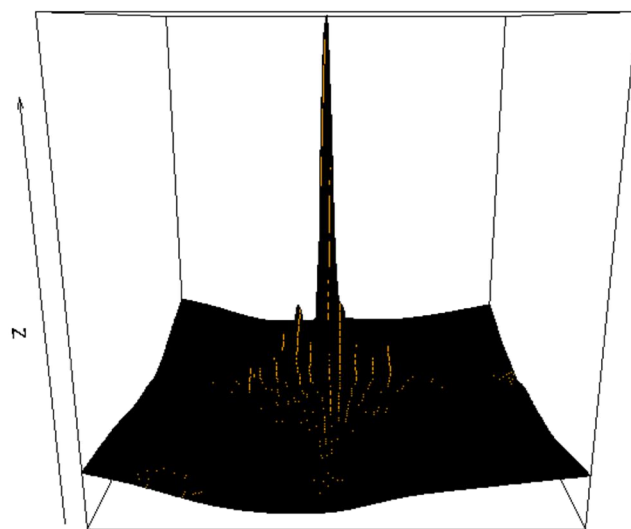
100 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , knn



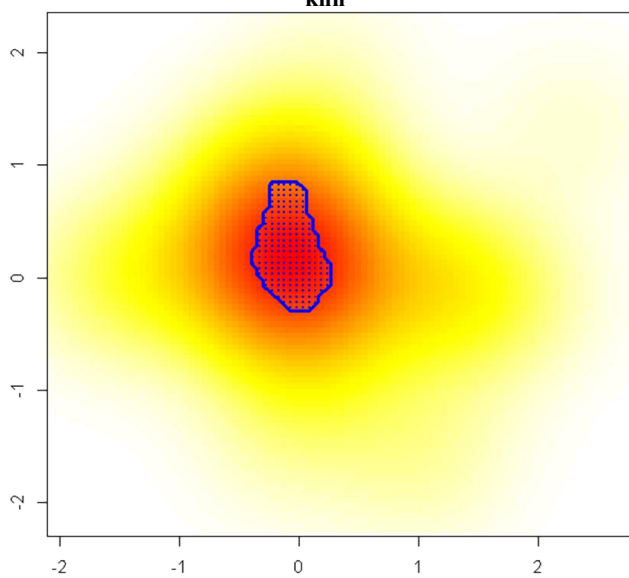
101 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , knn



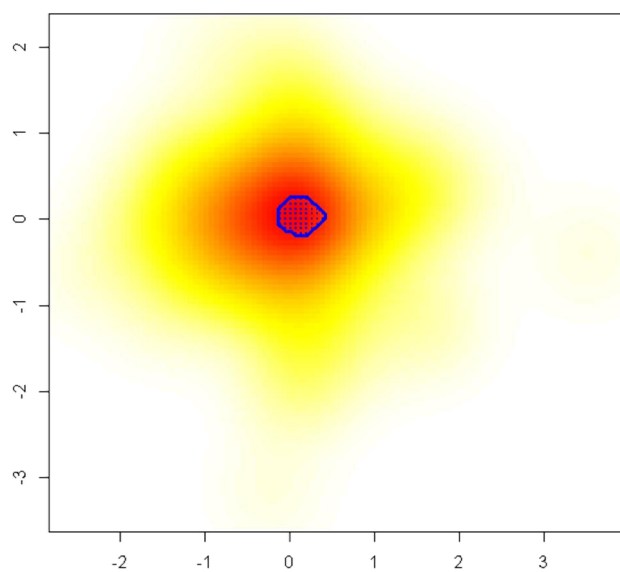
102 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , knn



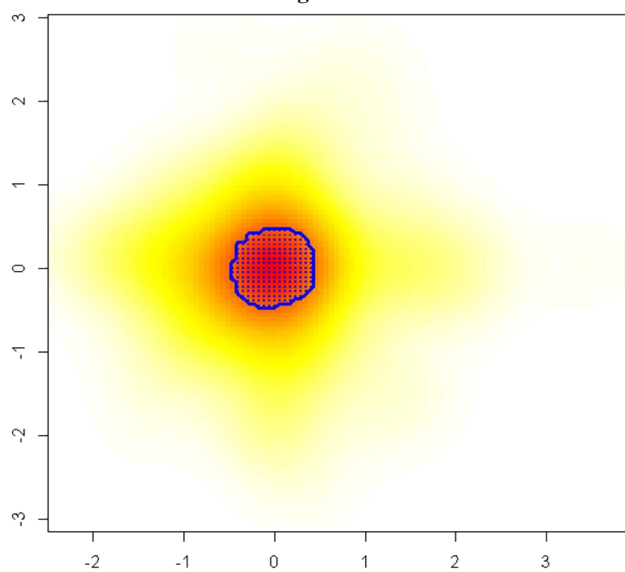
103 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , knn



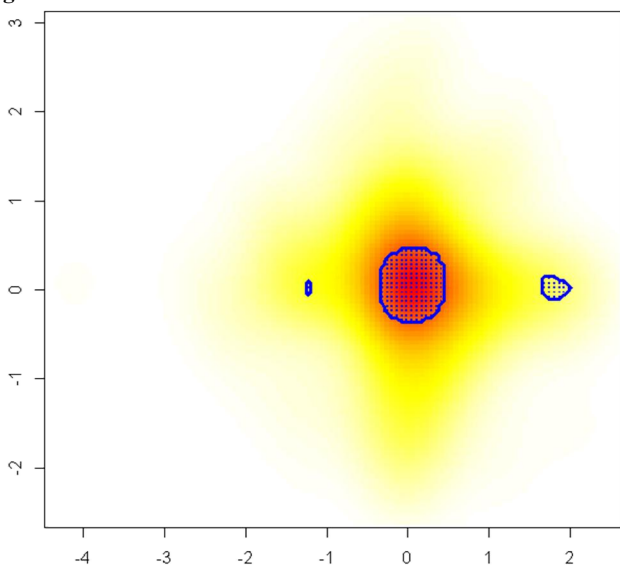
104 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , grad



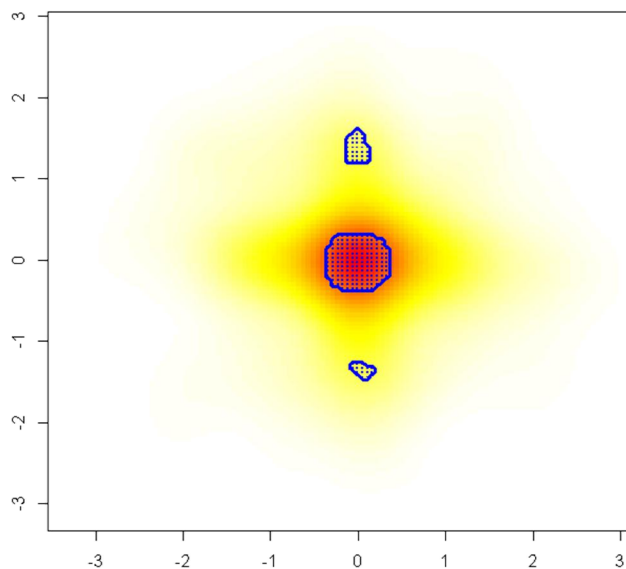
105 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , grad



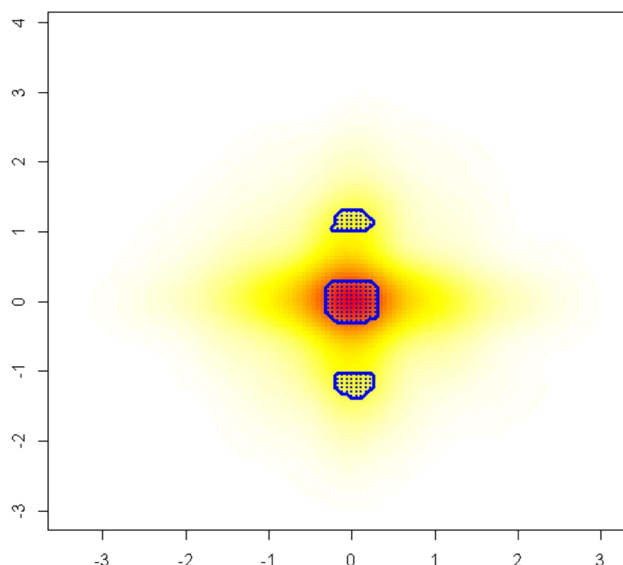
106 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , grad



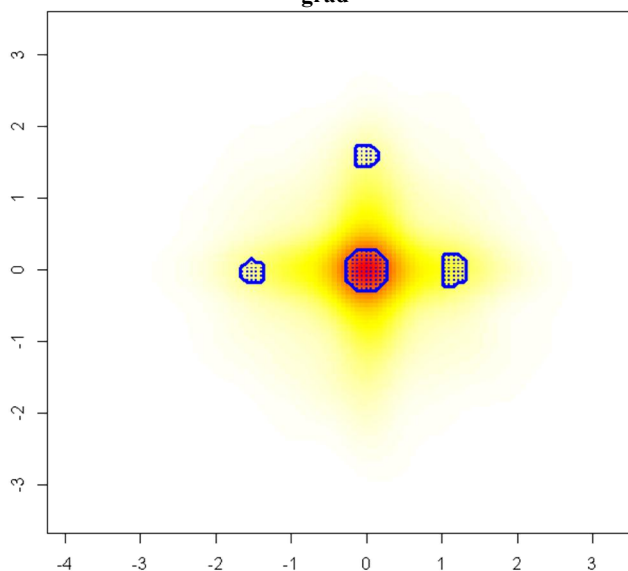
107 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , grad



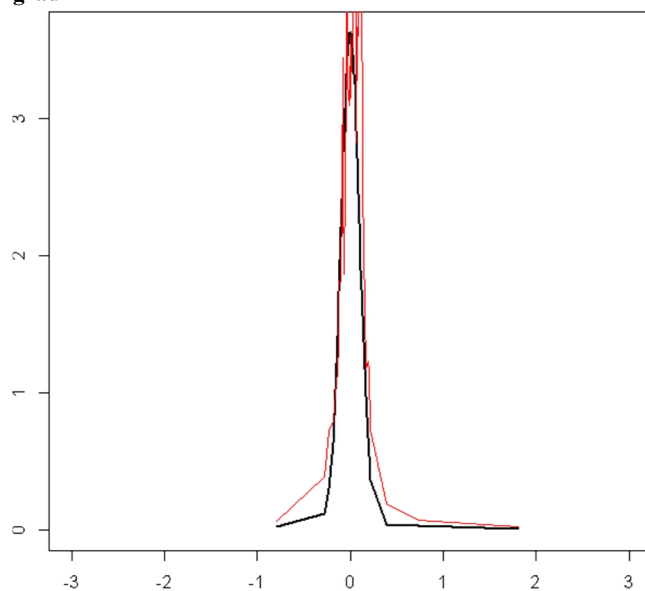
108 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , grad



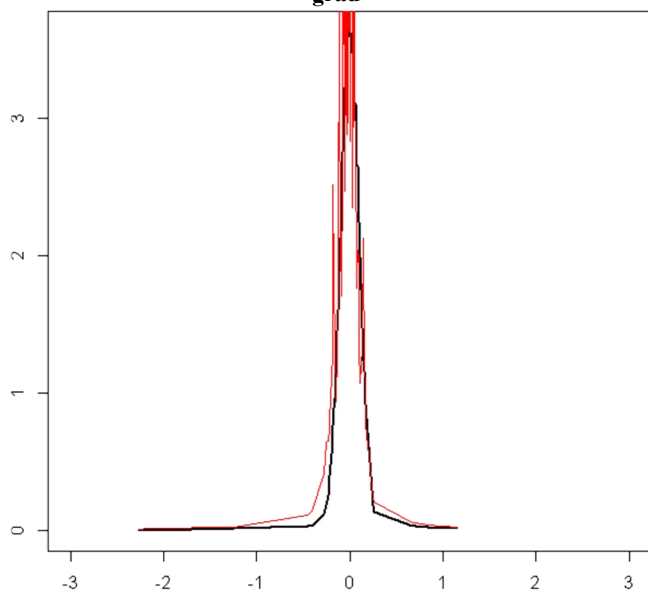
109 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , grad



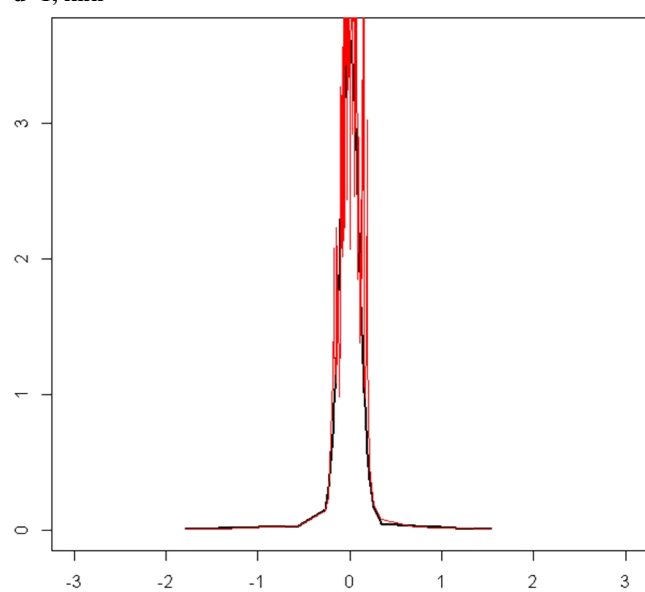
110 pav. Smailo vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , grad



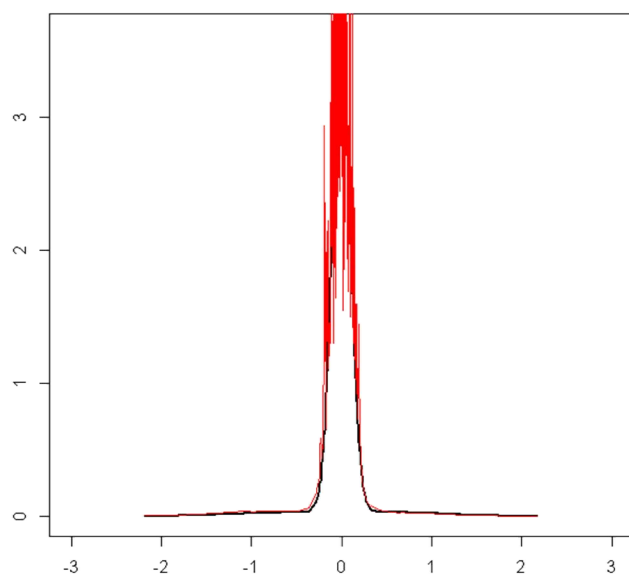
111 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , knn



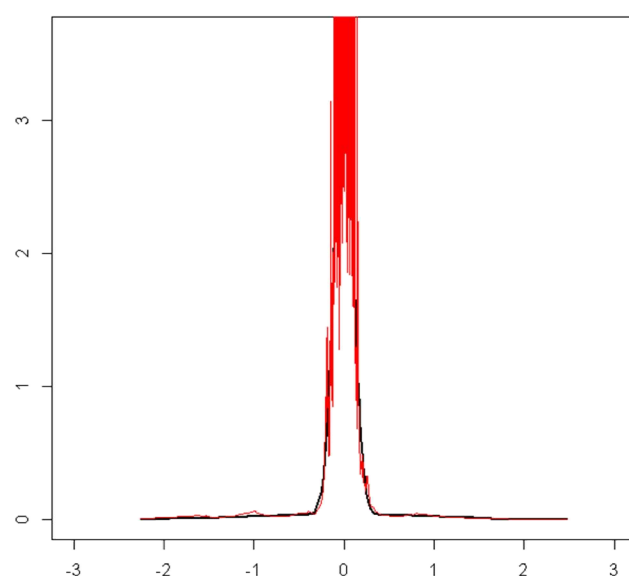
112 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , knn



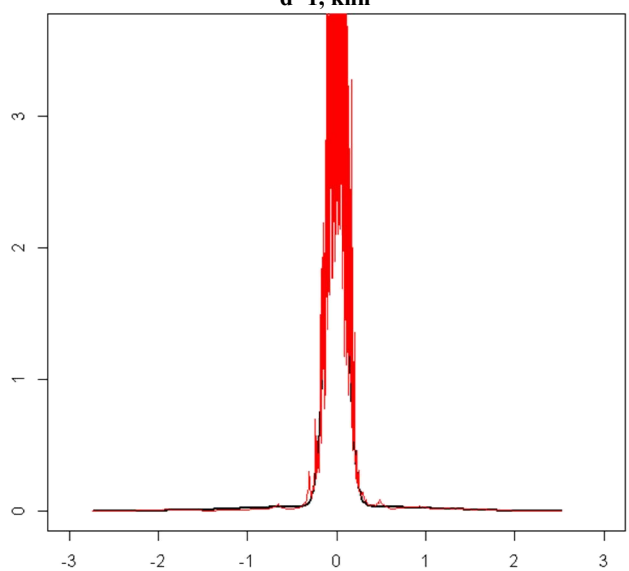
113 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , knn



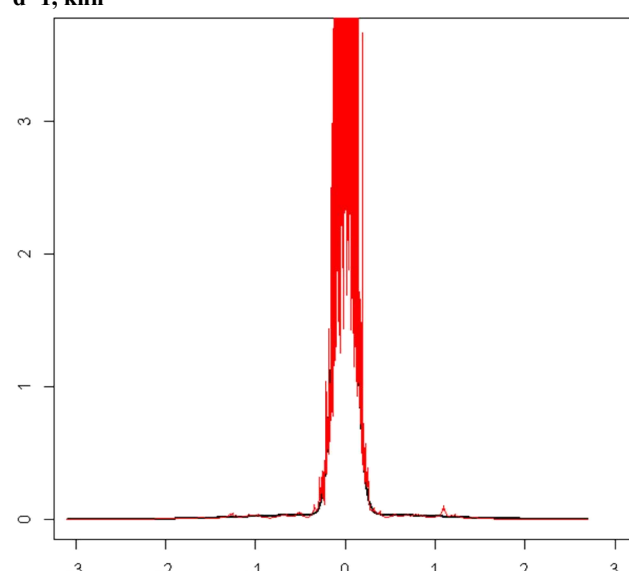
114 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , knn



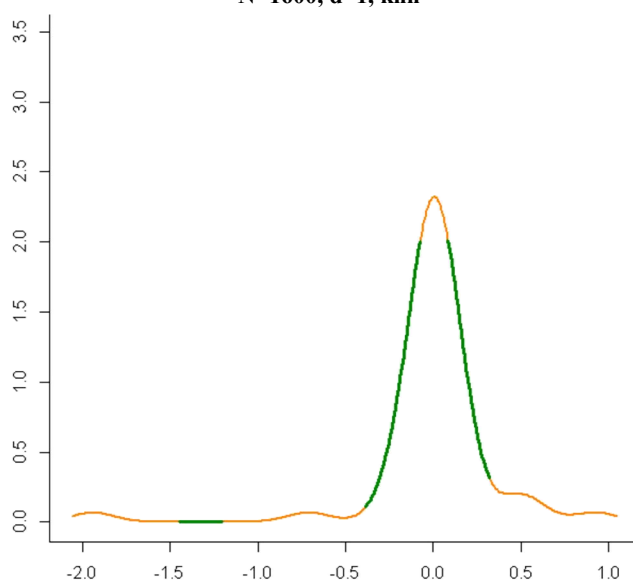
115 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , knn



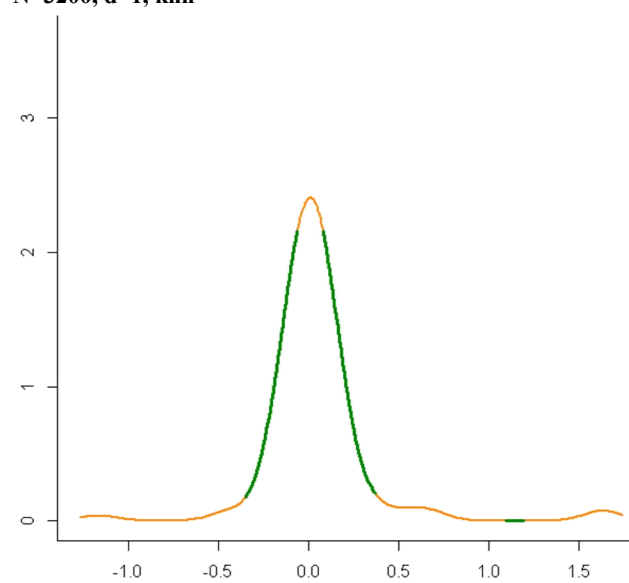
116 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , knn



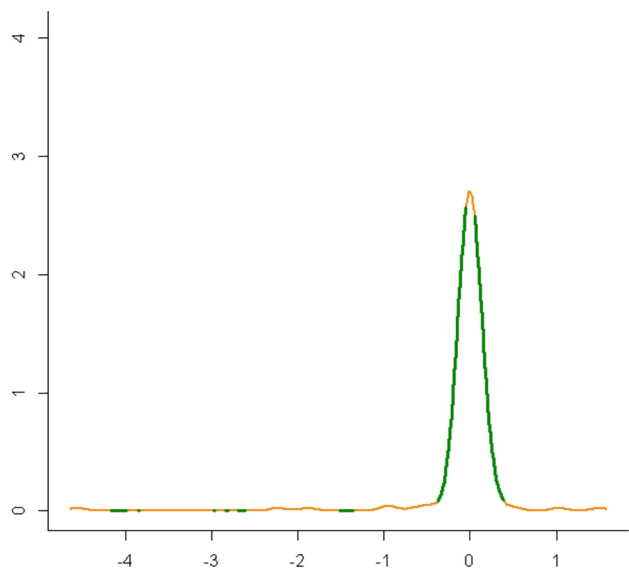
117 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , knn



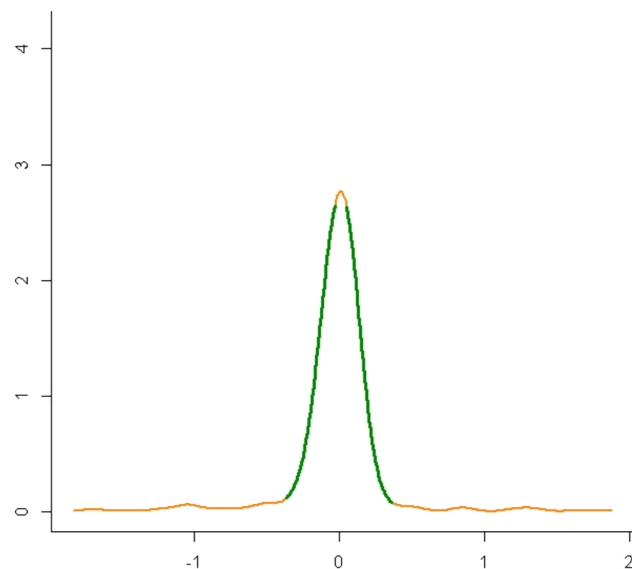
118 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , grad



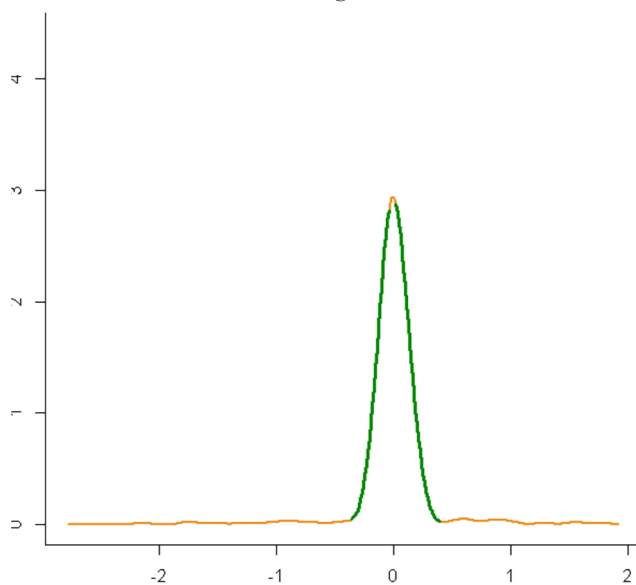
119 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , grad



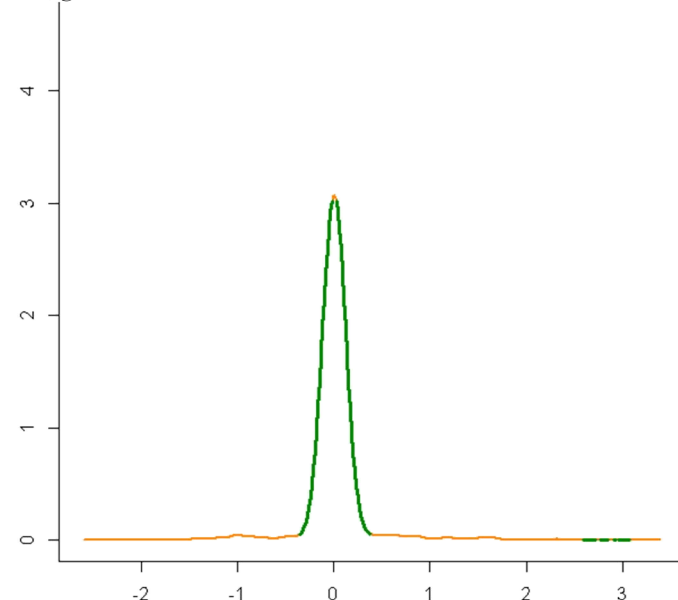
120 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , grad



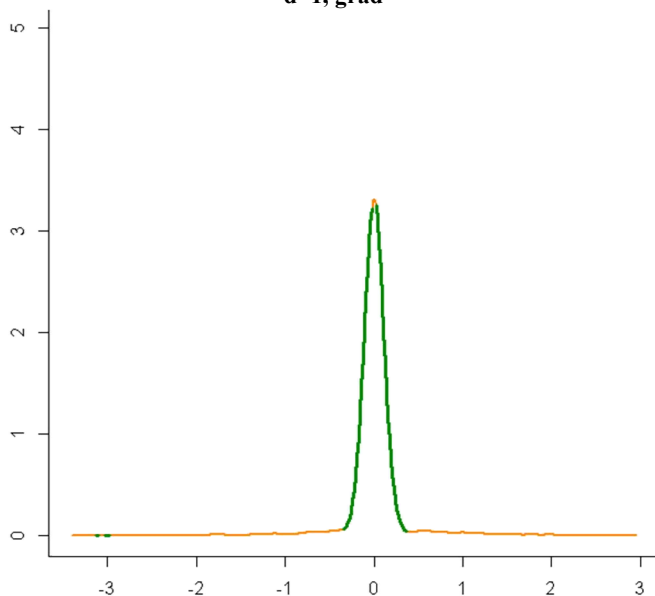
121 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , grad



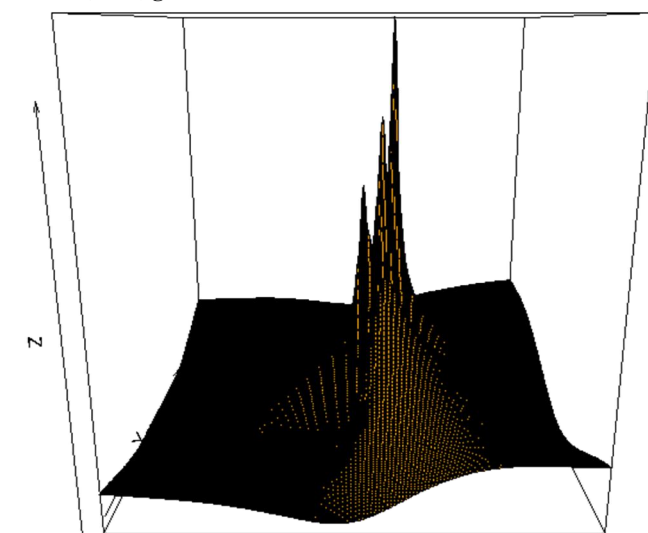
122 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , grad



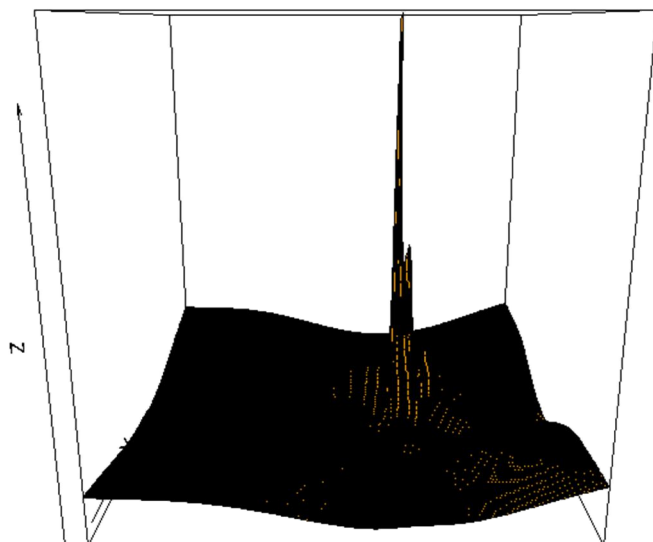
123 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , grad



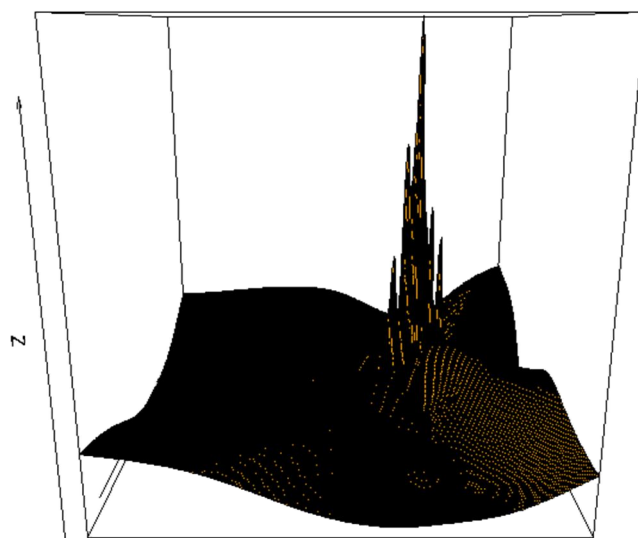
124 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , grad



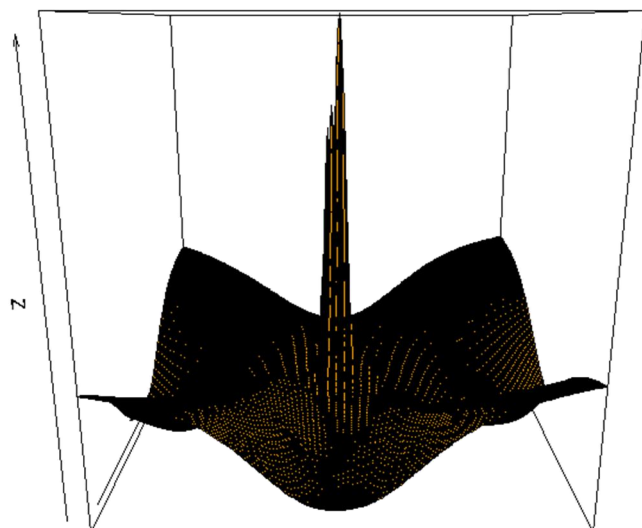
125 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , knn



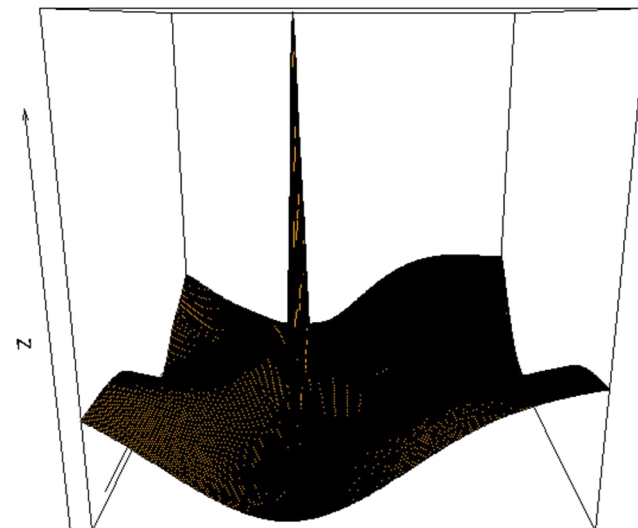
126 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , knn



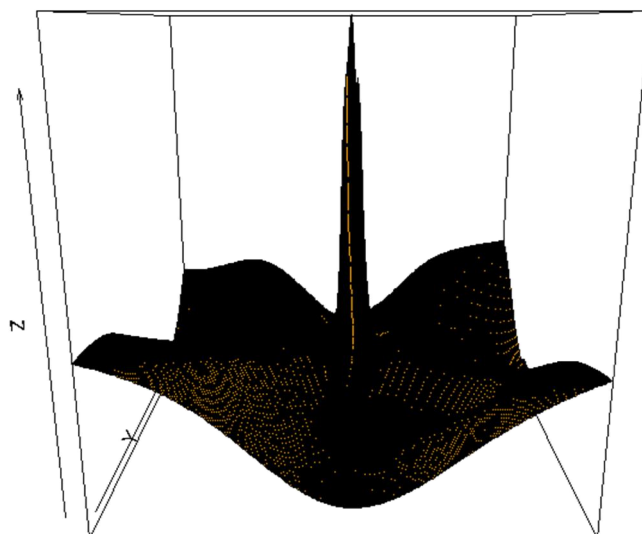
127 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , knn



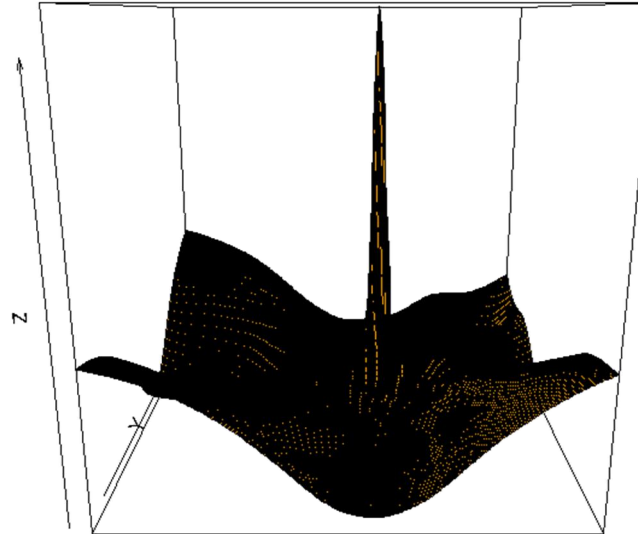
128 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , knn



129 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , knn

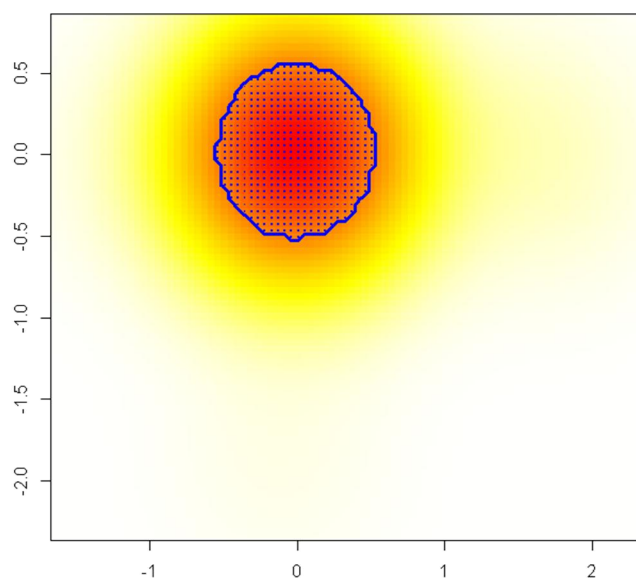


130 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , knn

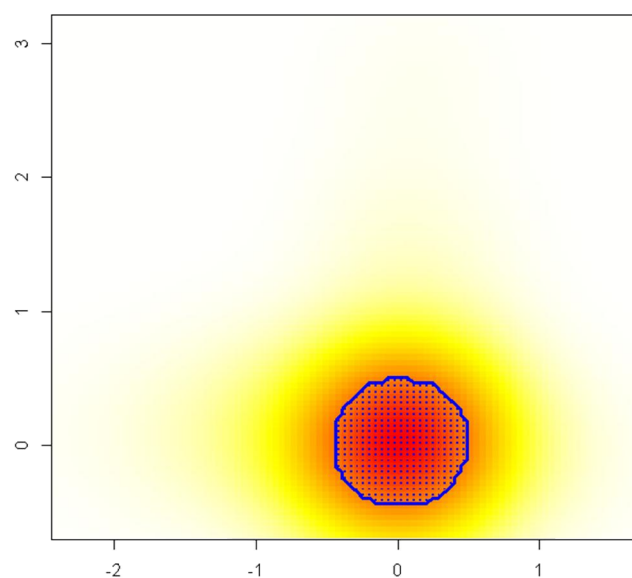


131 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , knn

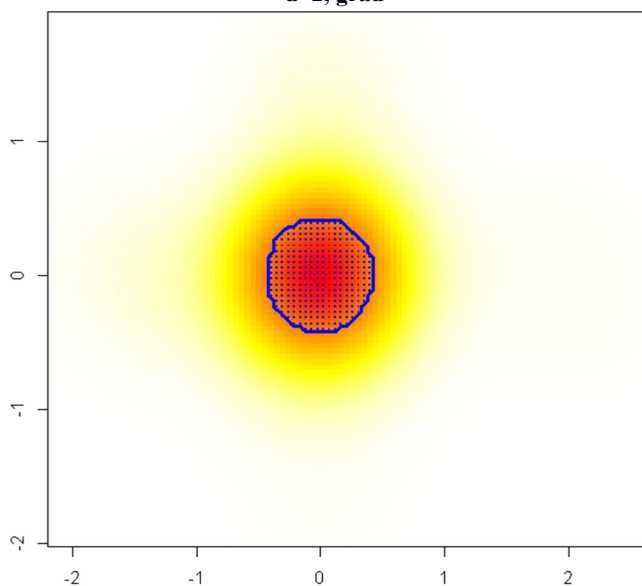




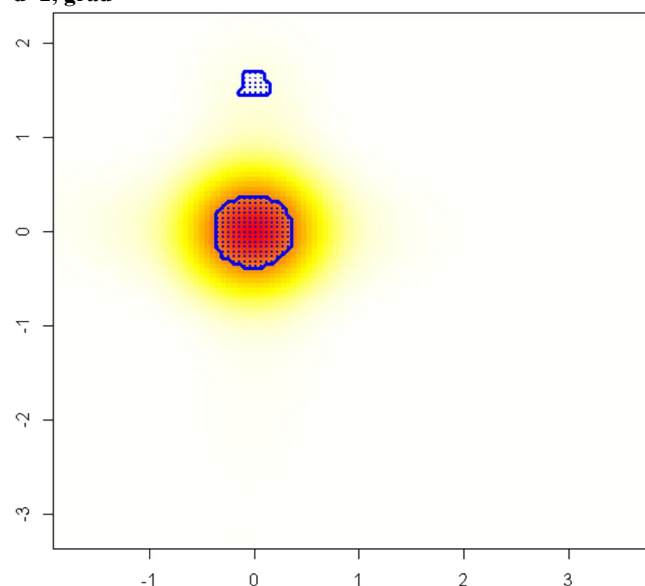
132 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , grad



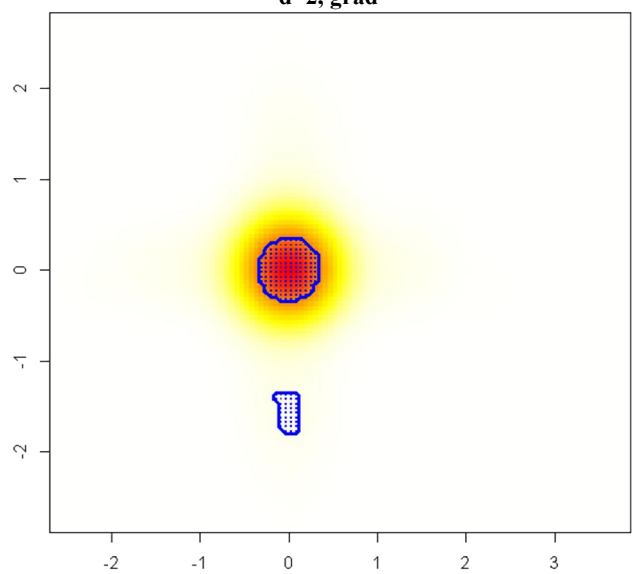
133 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , grad



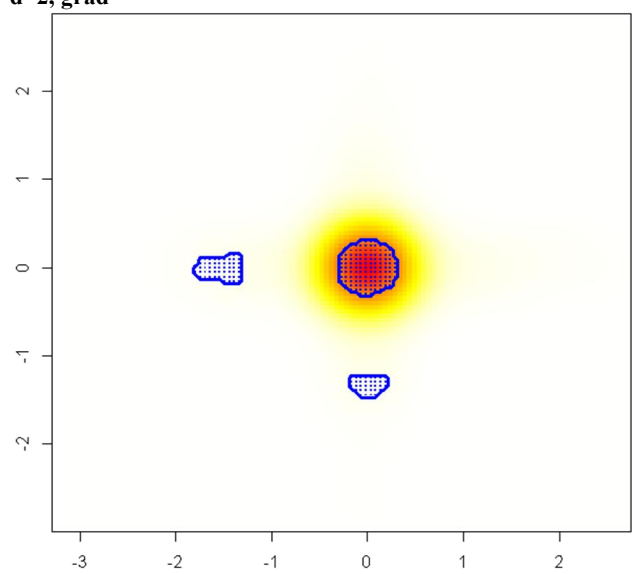
134 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , grad



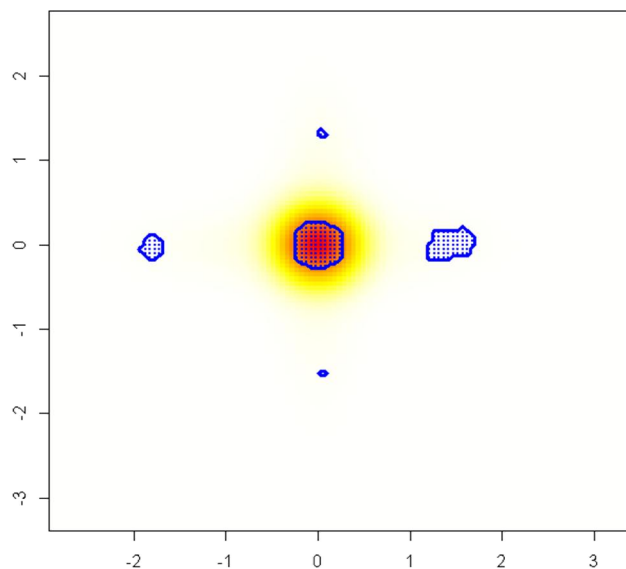
135 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , grad



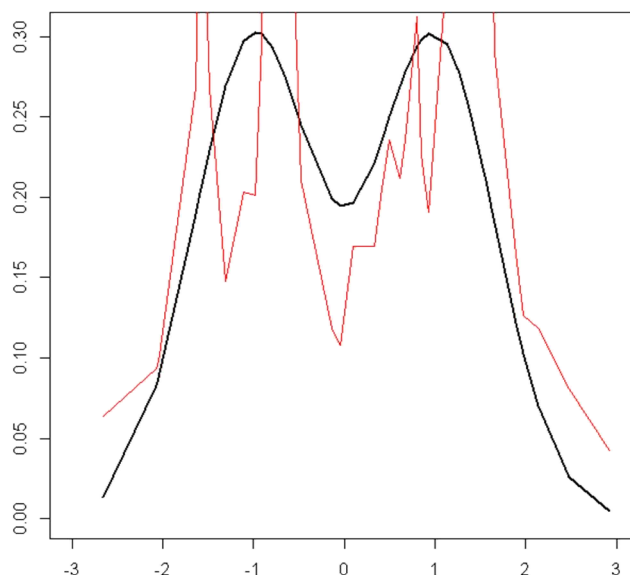
136 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , grad



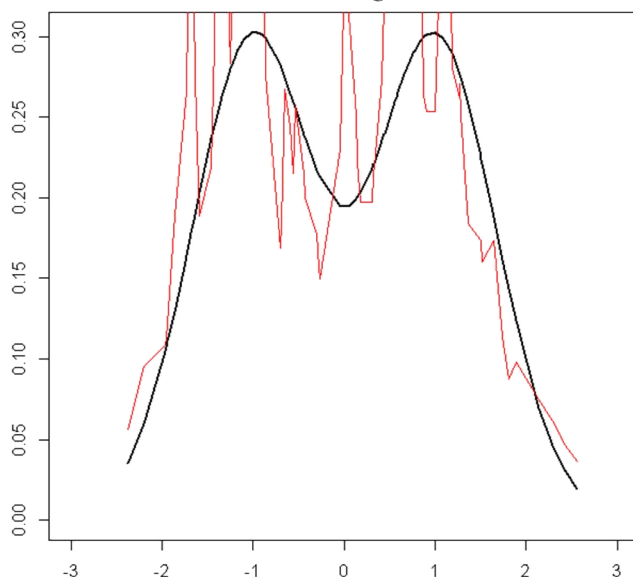
137 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , grad



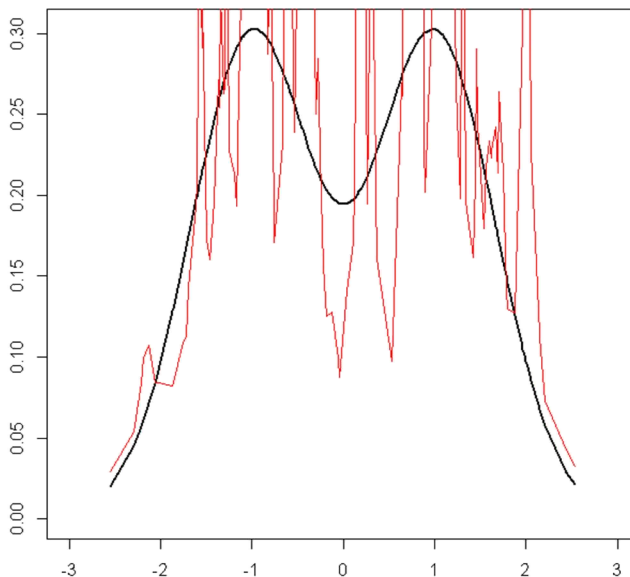
138 pav. Išsiskiriančio vienamodalinio mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , grad



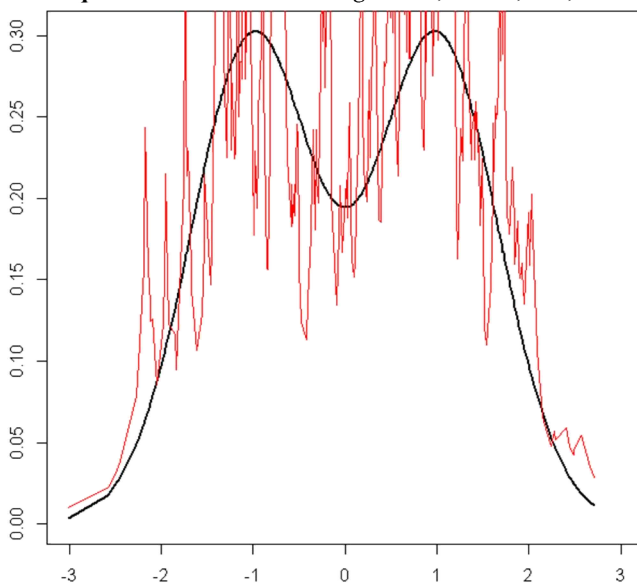
139 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , knn



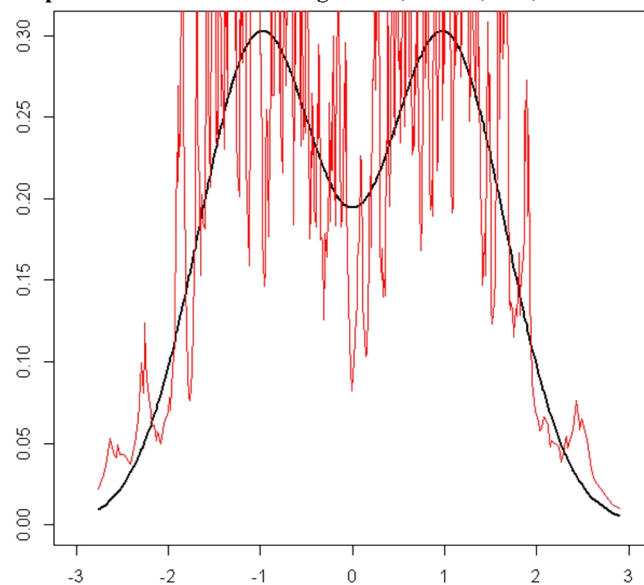
140 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , knn



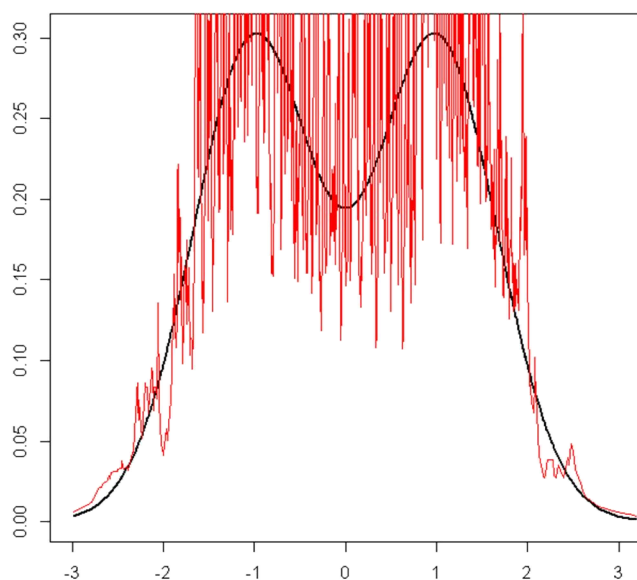
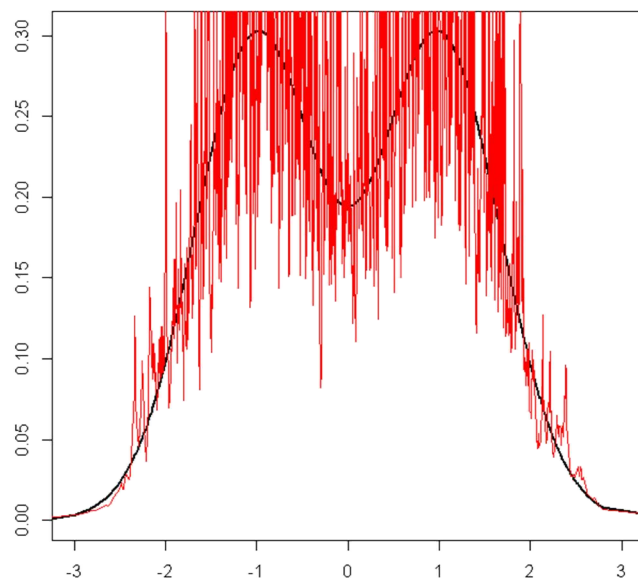
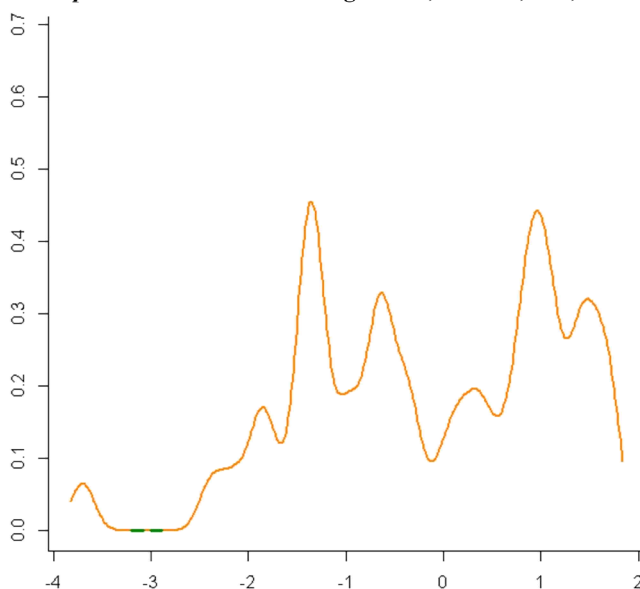
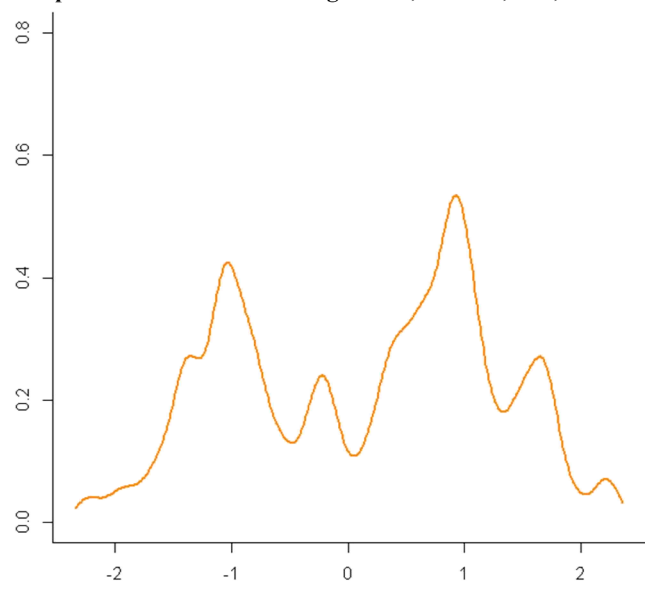
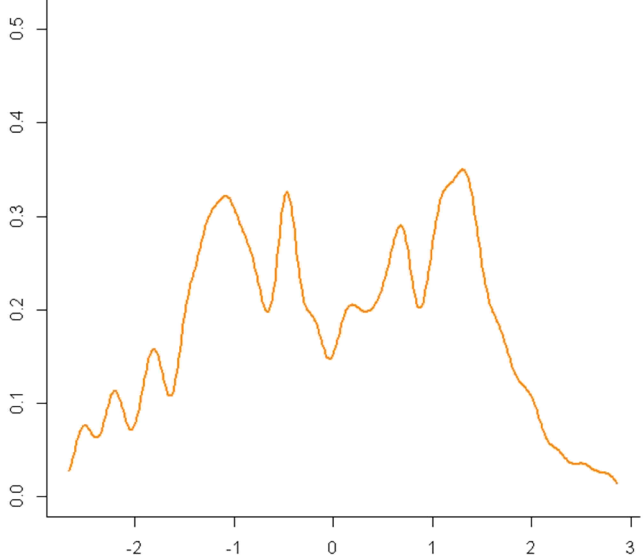
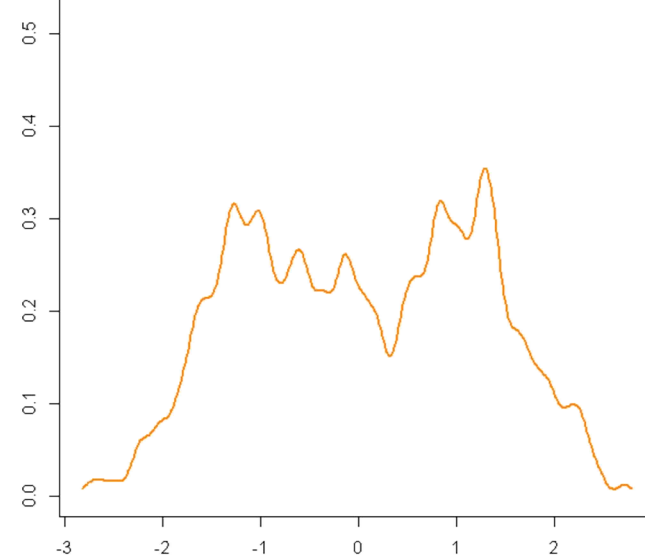
141 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , knn

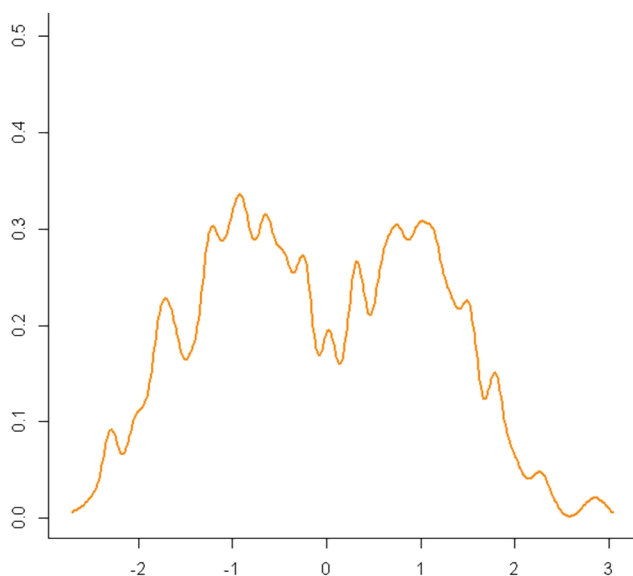
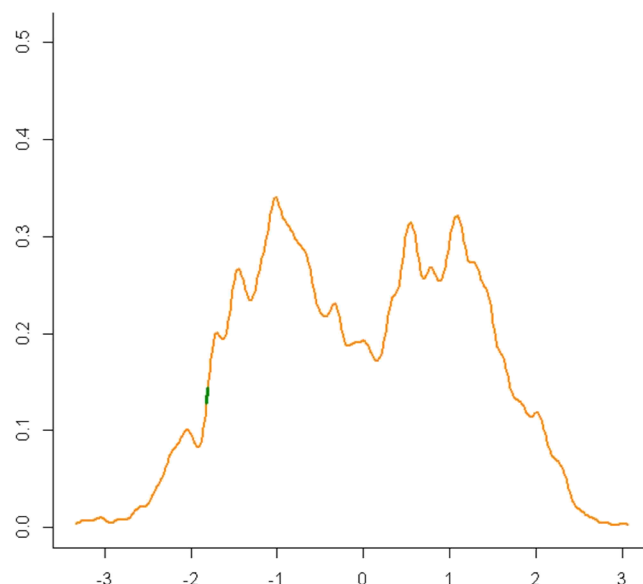
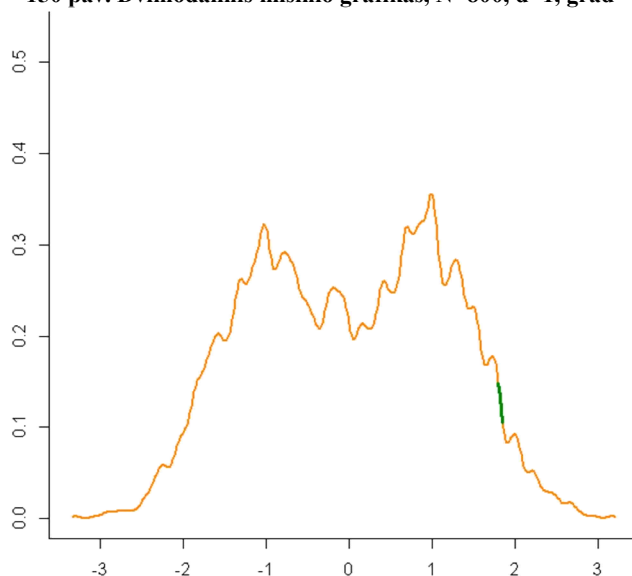
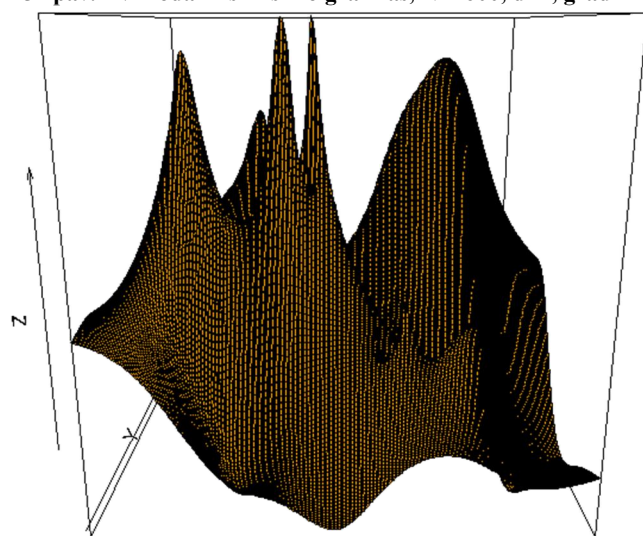
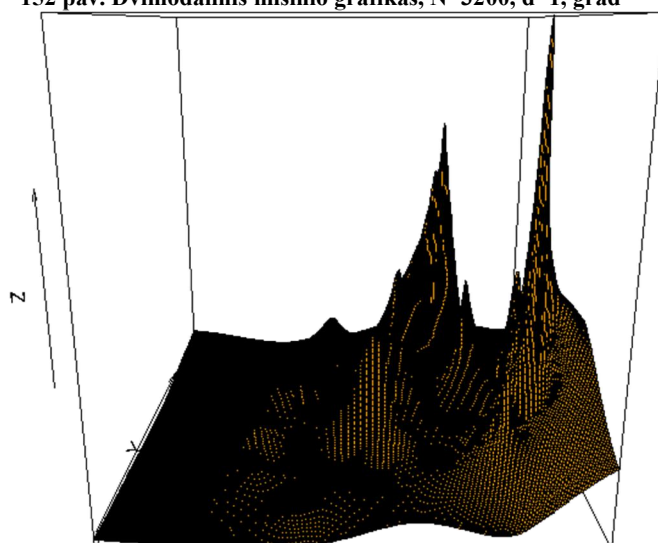
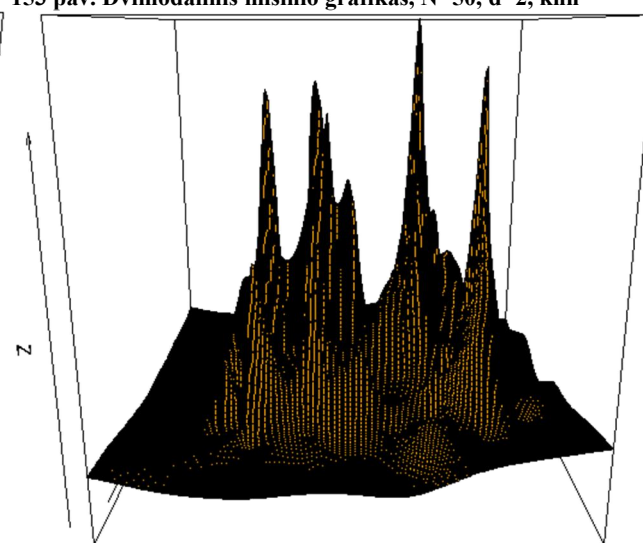


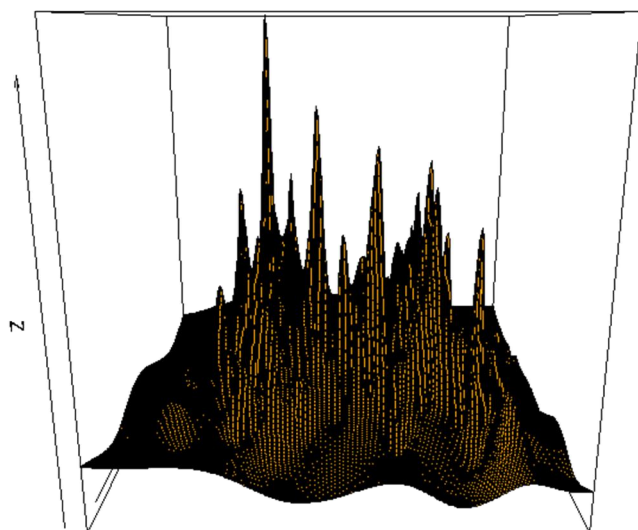
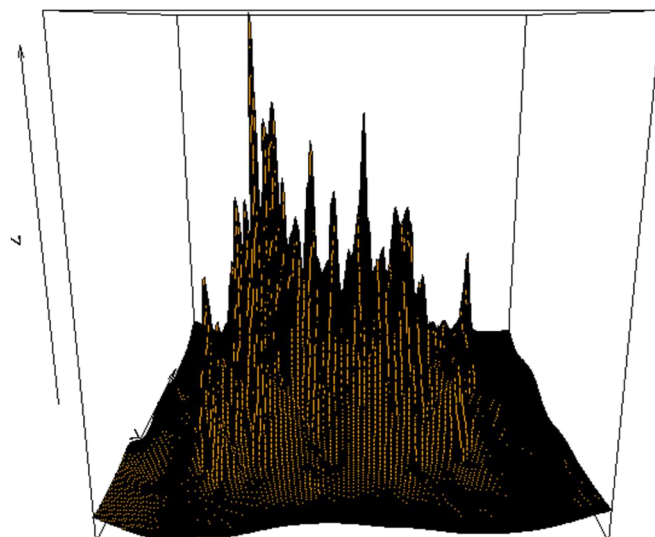
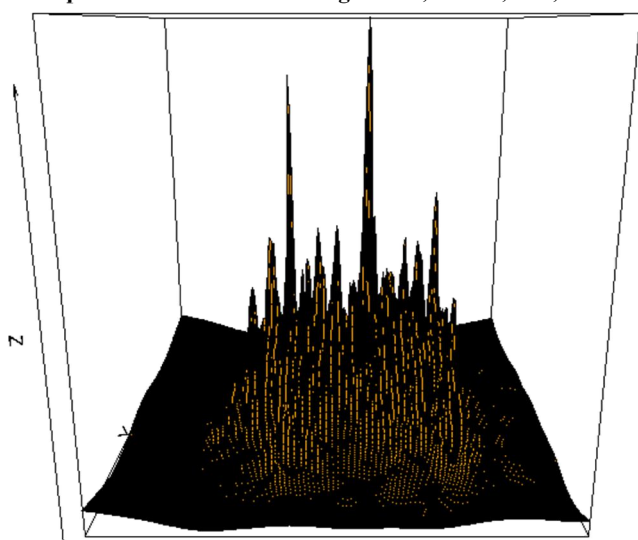
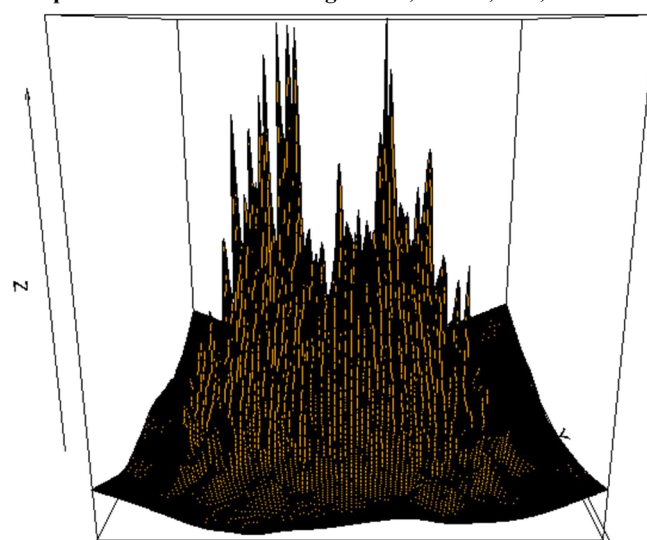
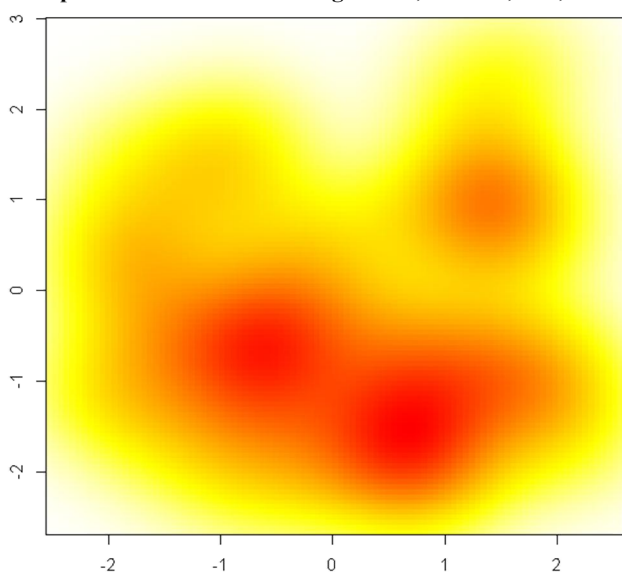
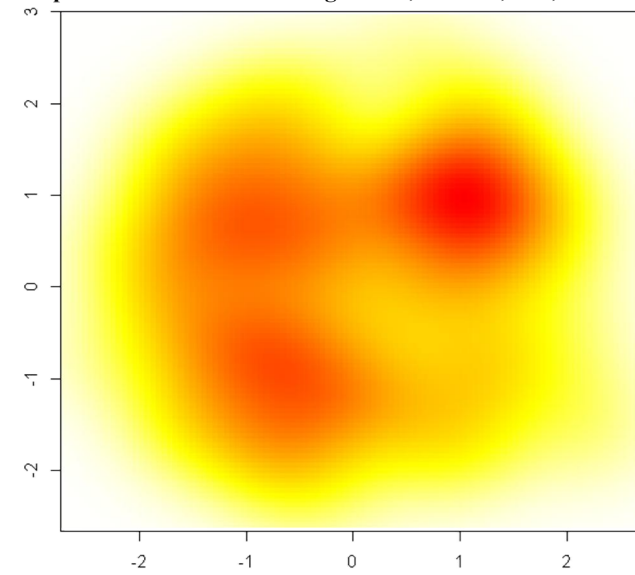
142 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , knn

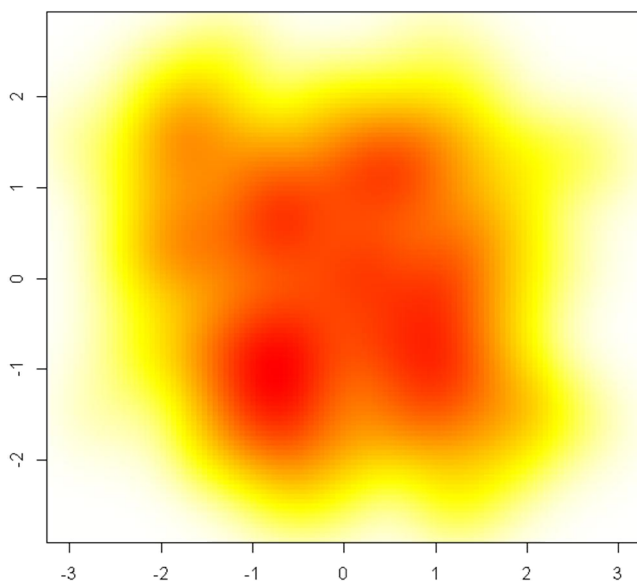
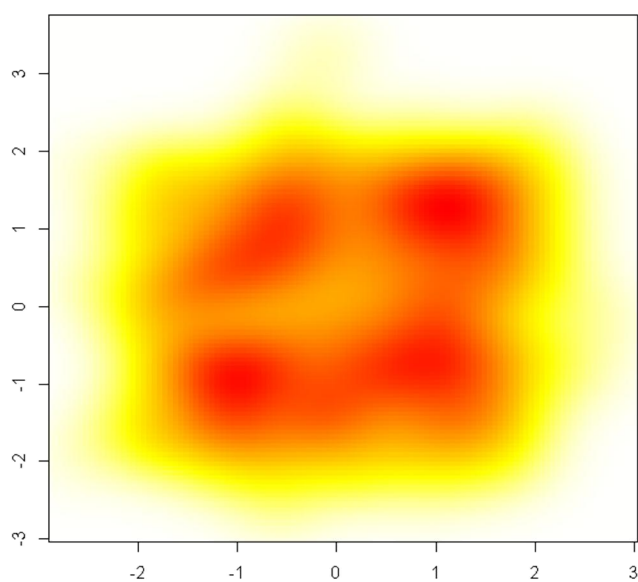
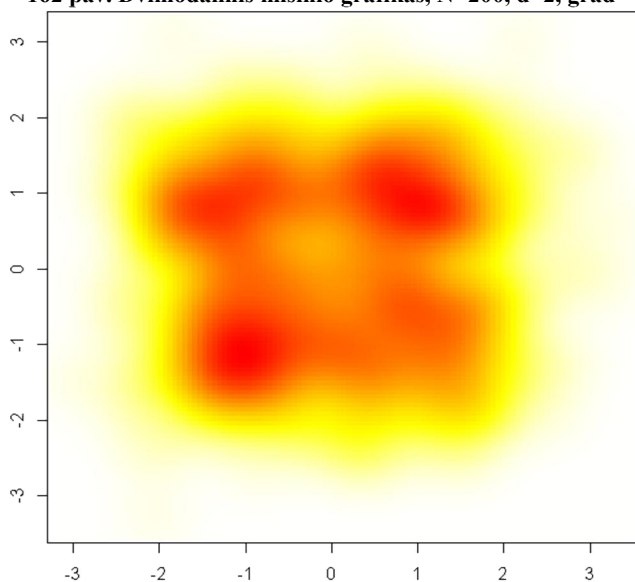
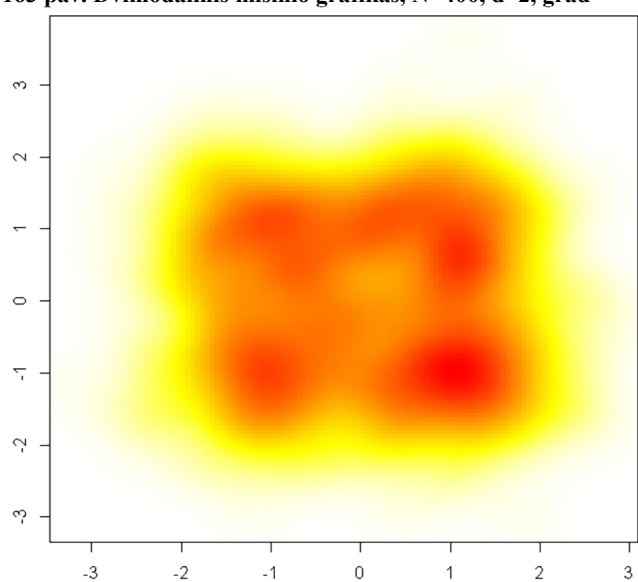
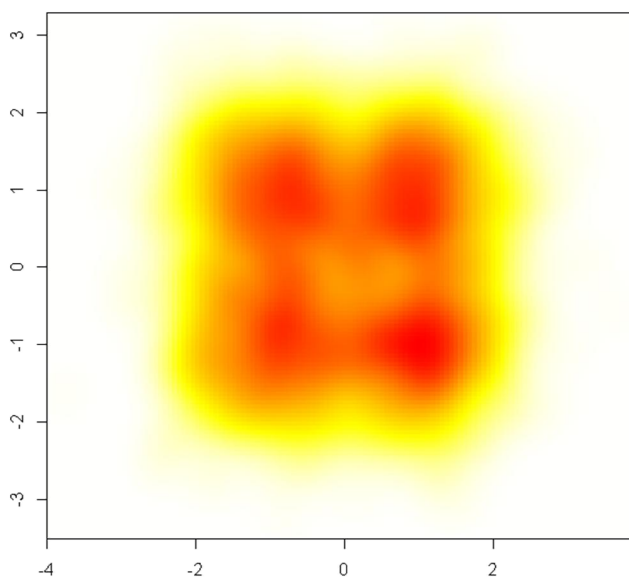
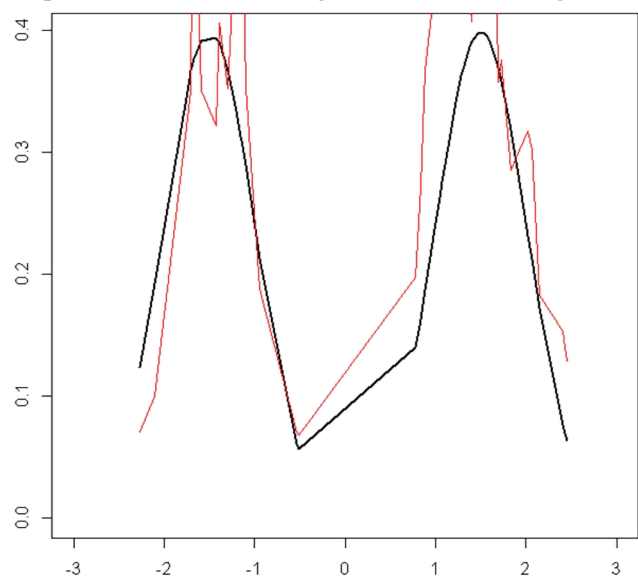


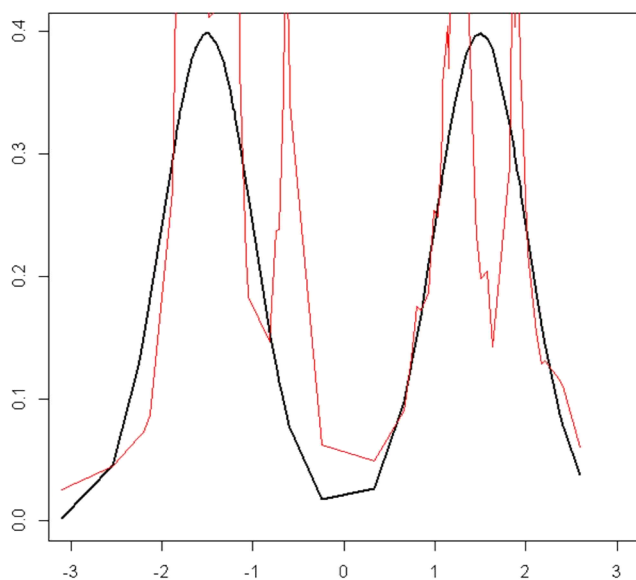
143 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , knn

144 pav. Dvitemodalinis mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , knn145 pav. Dvitemodalinis mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , knn146 pav. Dvitemodalinis mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , grad147 pav. Dvitemodalinis mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , grad148 pav. Dvitemodalinis mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , grad149 pav. Dvitemodalinis mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , grad

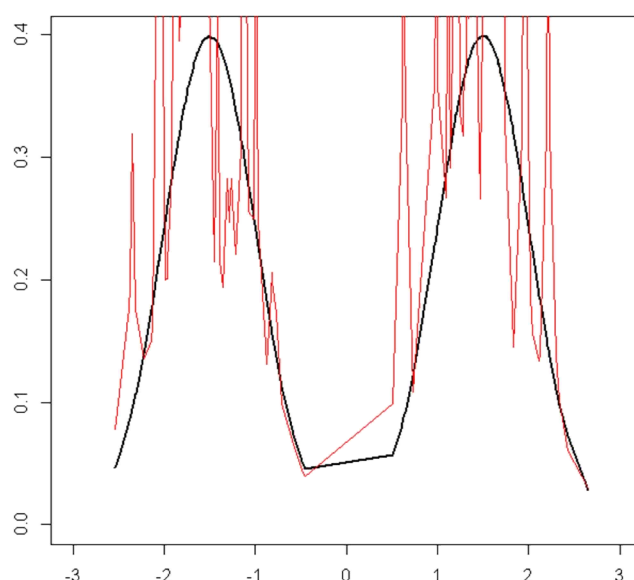
150 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , grad151 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , grad152 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , grad153 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , knn154 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , knn155 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , knn

156 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , knn157 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , knn158 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , knn159 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , knn160 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , grad161 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , grad

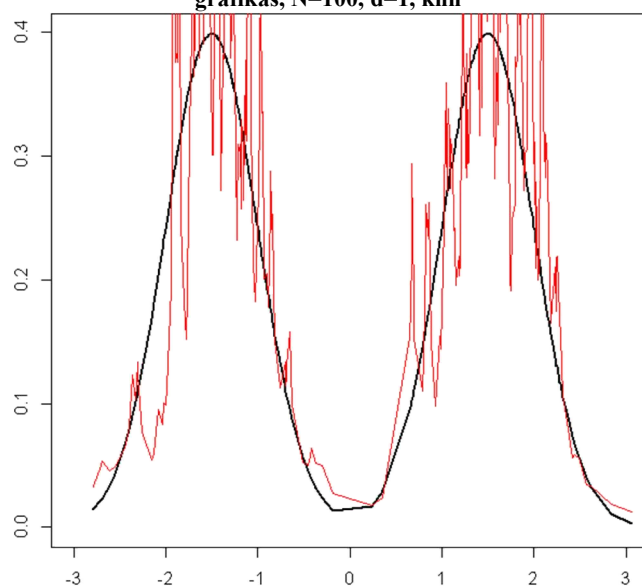
162 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , grad163 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , grad164 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , grad165 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , grad166 pav. Dvimodalinis mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , grad167 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , knn



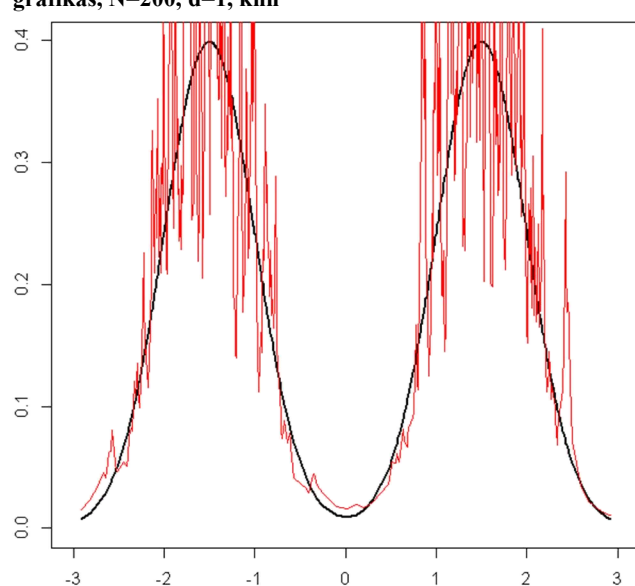
168 pav. Dvimodalis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , knn



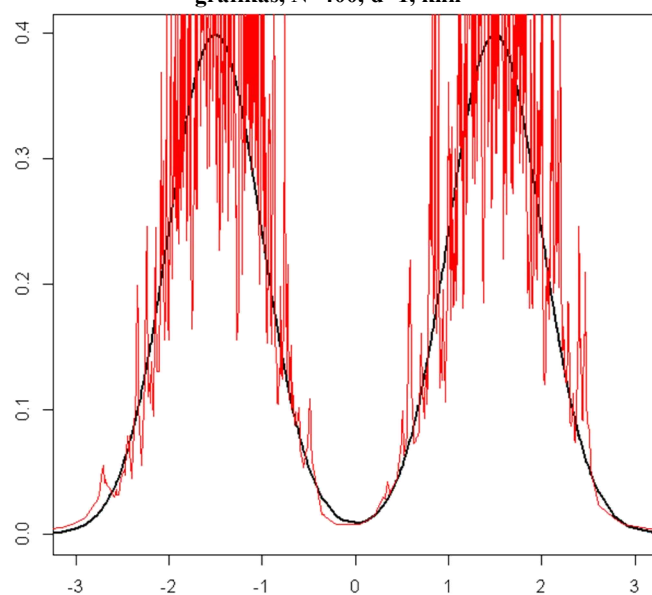
169 pav. Dvimodalis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , knn



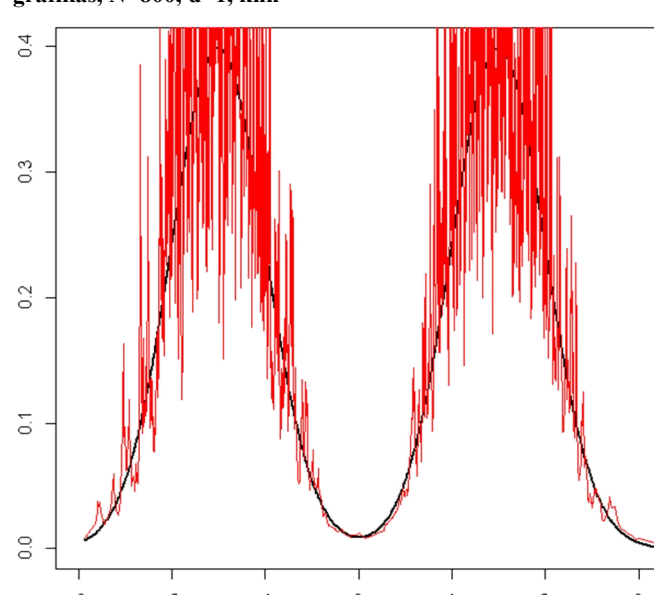
170 pav. Dvimodalis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , knn



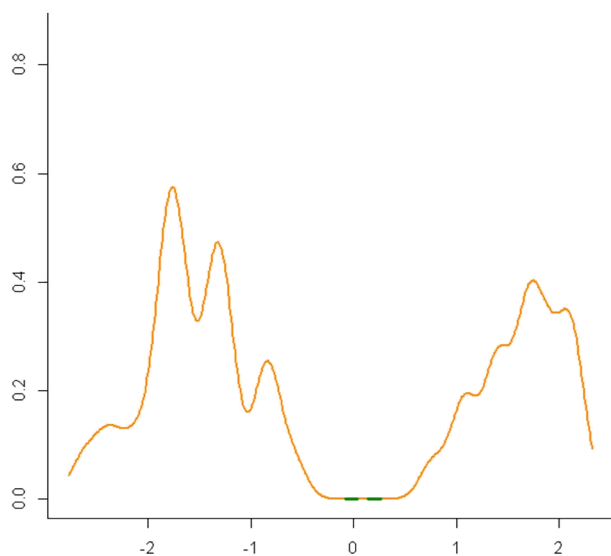
171 pav. Dvimodalis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , knn



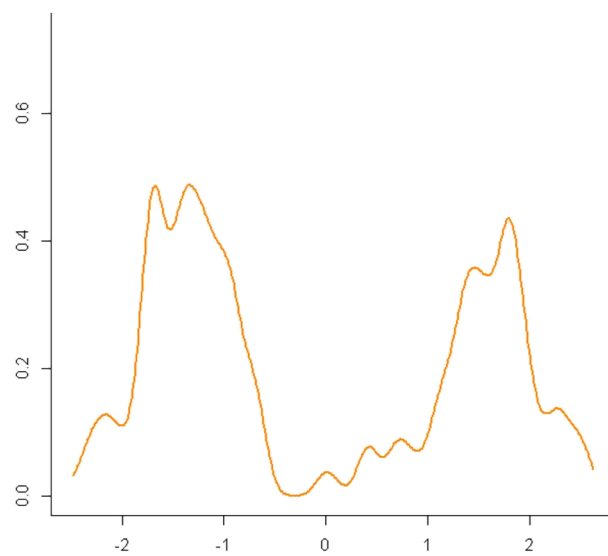
172 pav. Dvimodalis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , knn



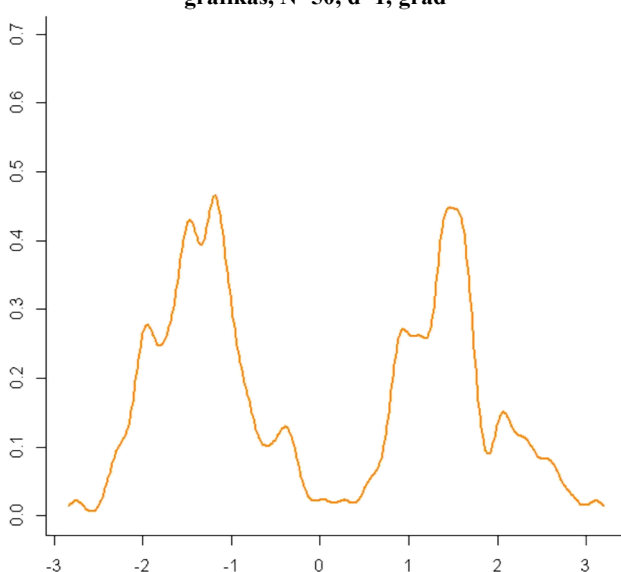
173 pav. Dvimodalis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , knn



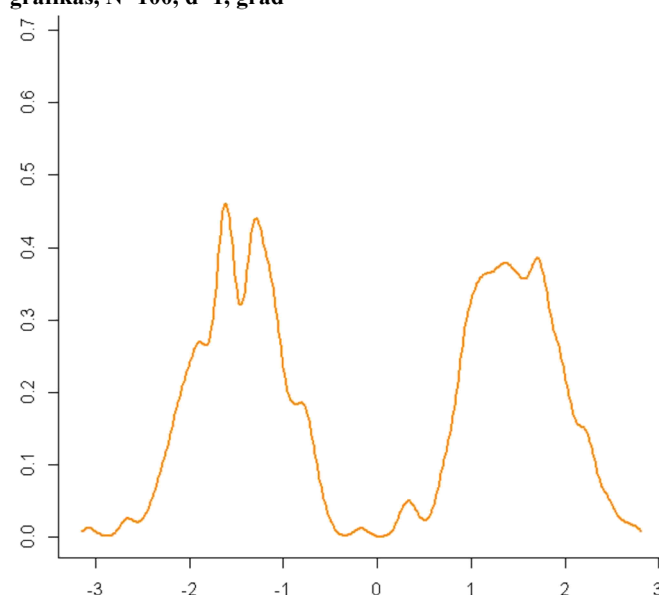
174 pav. Dvimodalis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , grad



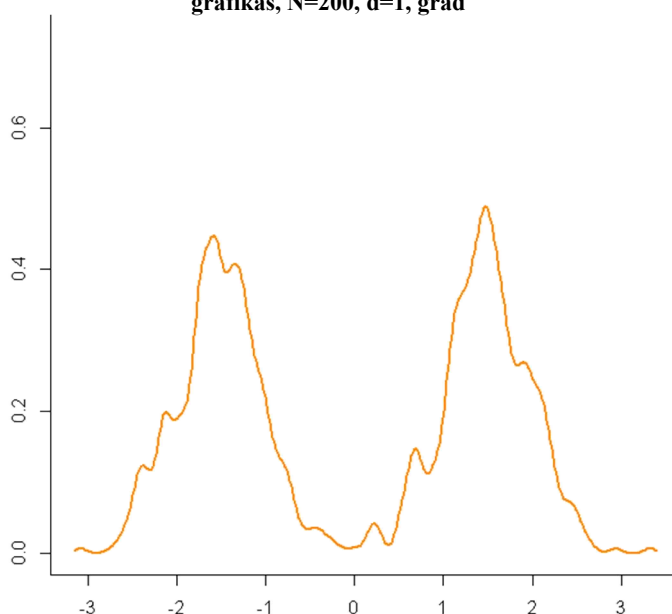
175 pav. Dvimodalis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , grad



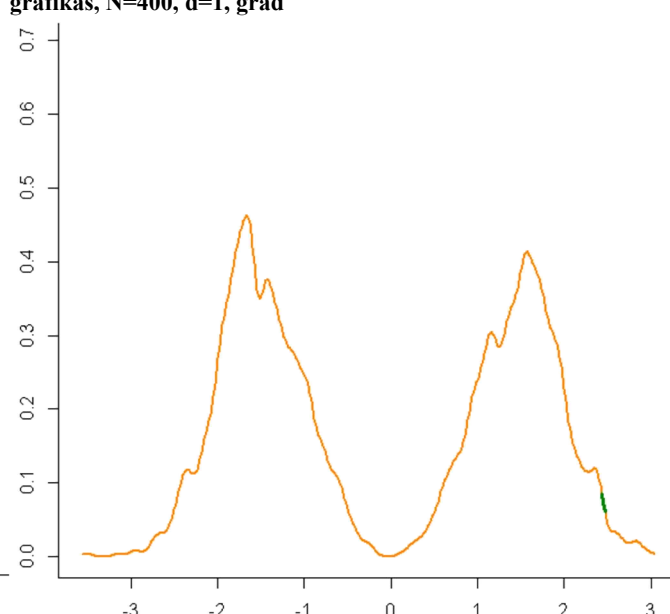
176 pav. Dvimodalis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , grad



177 pav. Dvimodalis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , grad

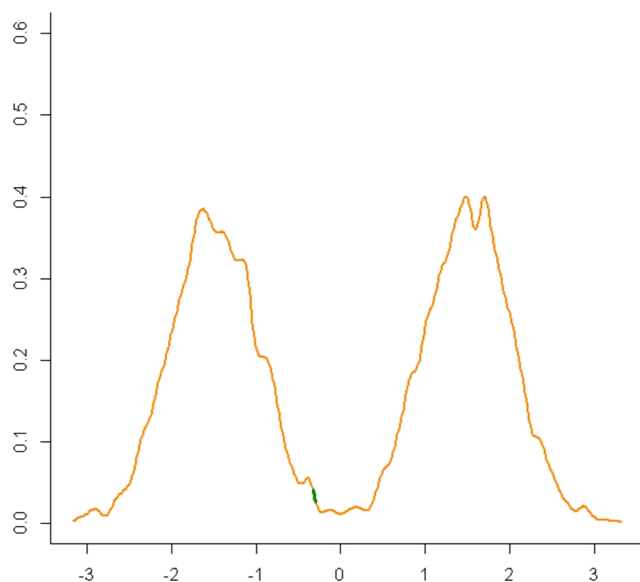


178 pav. Dvimodalis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , grad

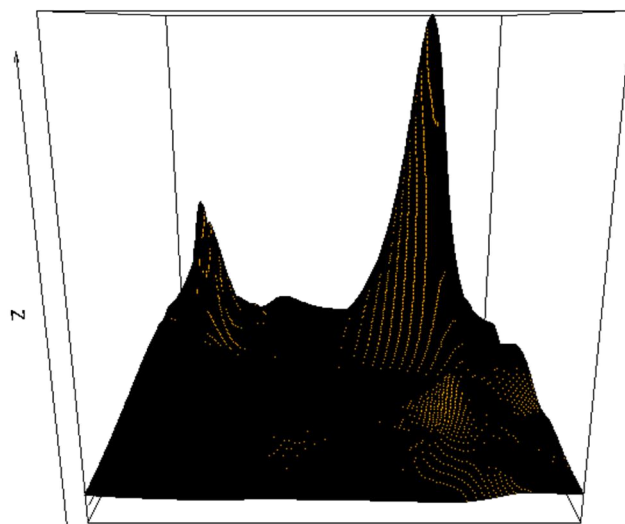


179 pav. Dvimodalis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , grad

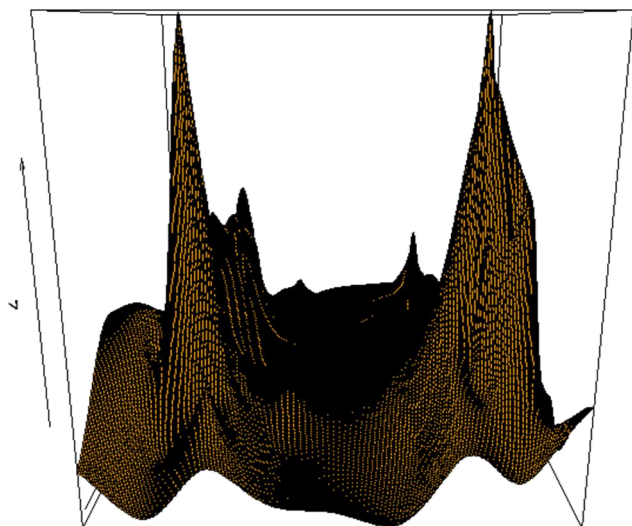




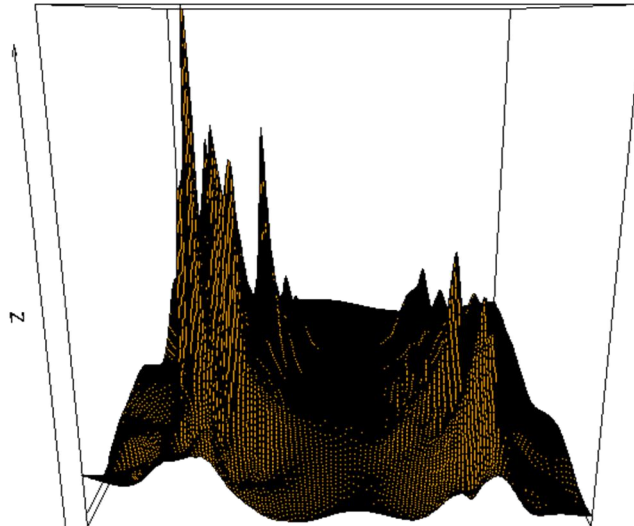
180 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , grad



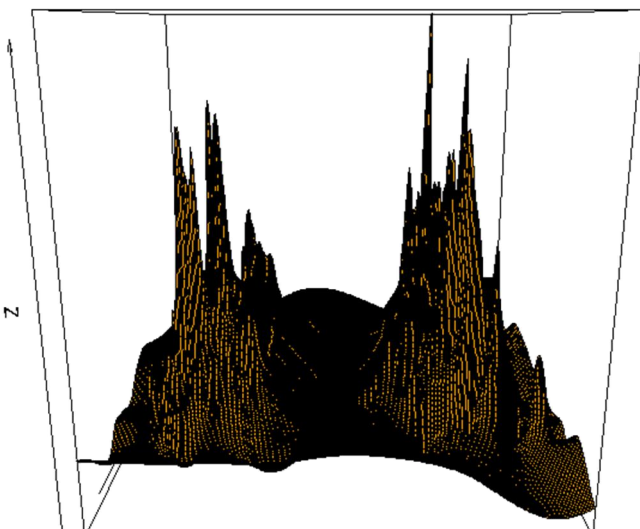
181 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , knn



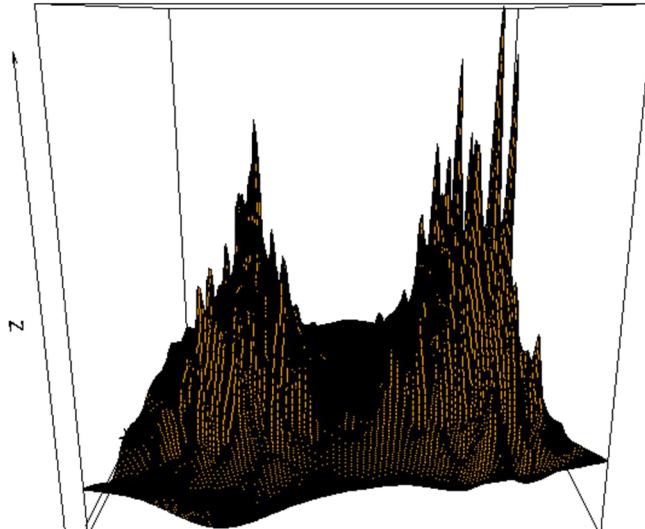
182 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , knn



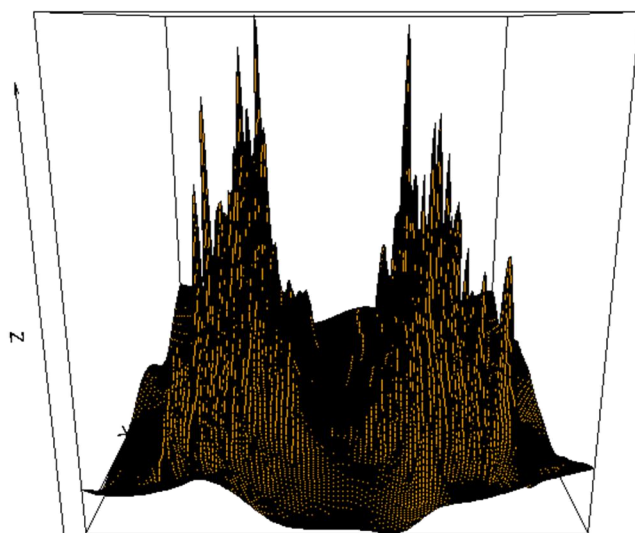
183 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , knn



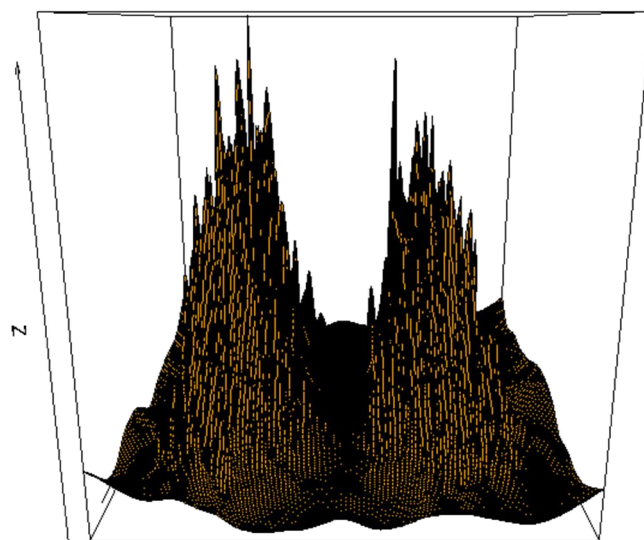
184 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , knn



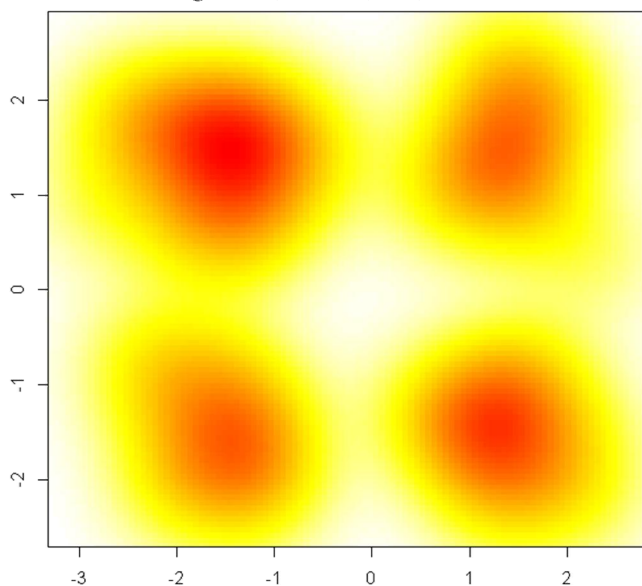
185 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , knn



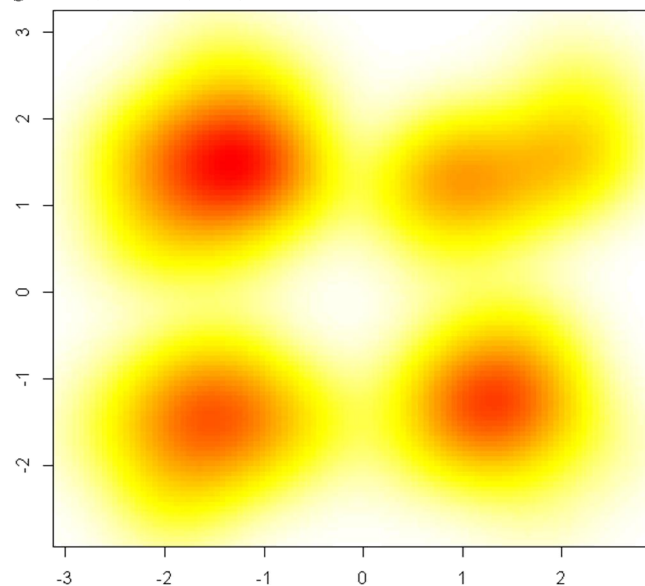
186 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , knn



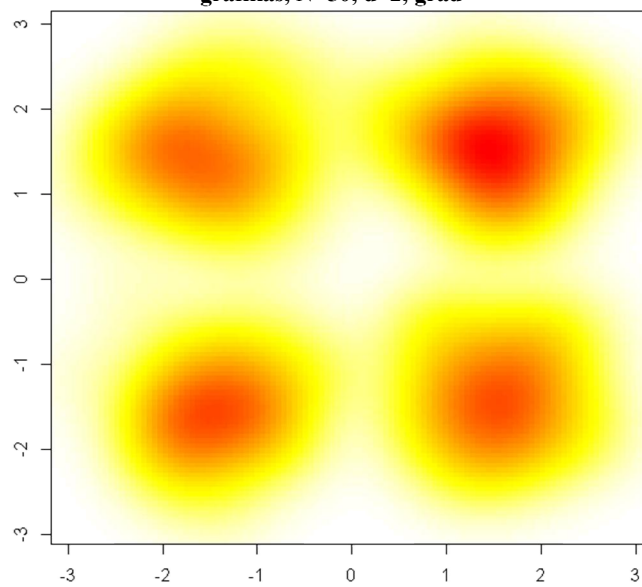
187 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , knn



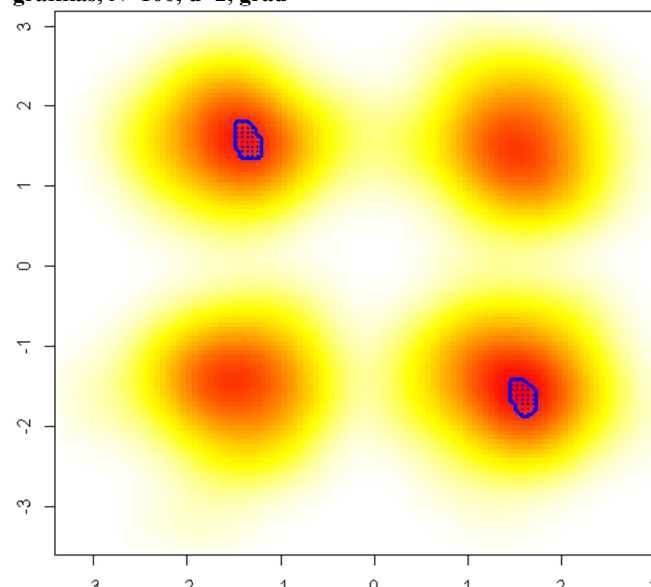
188 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , grad



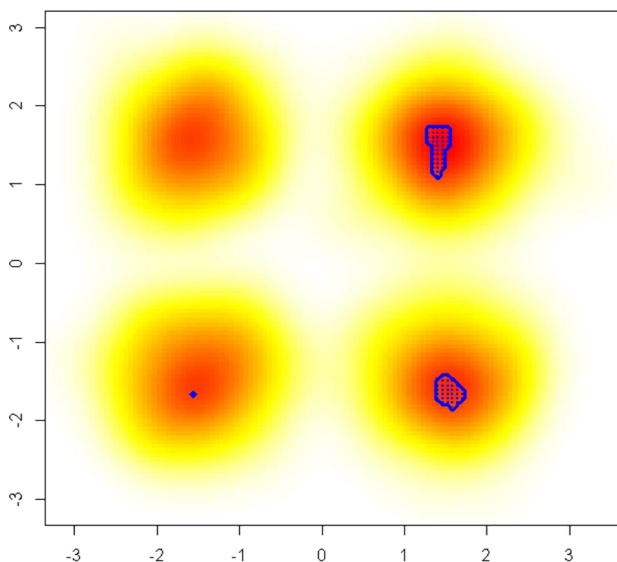
189 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , grad



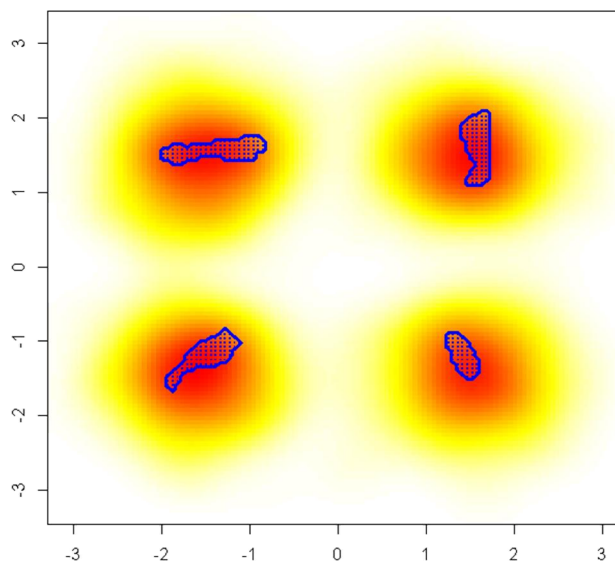
190 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , grad



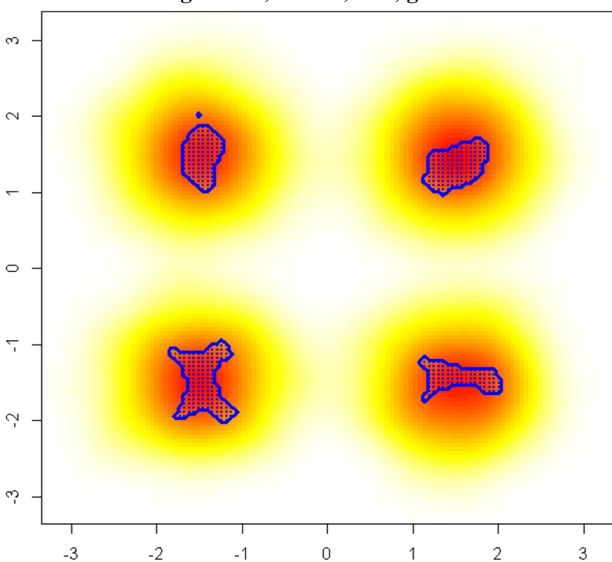
191 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , grad



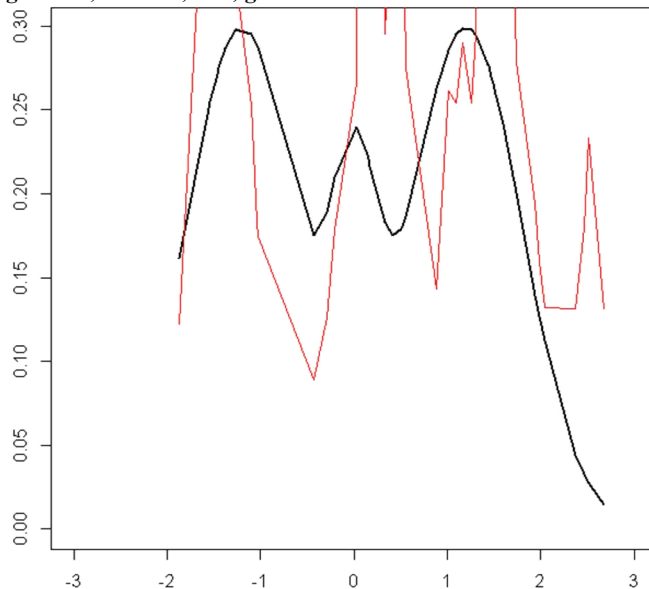
192 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , grad



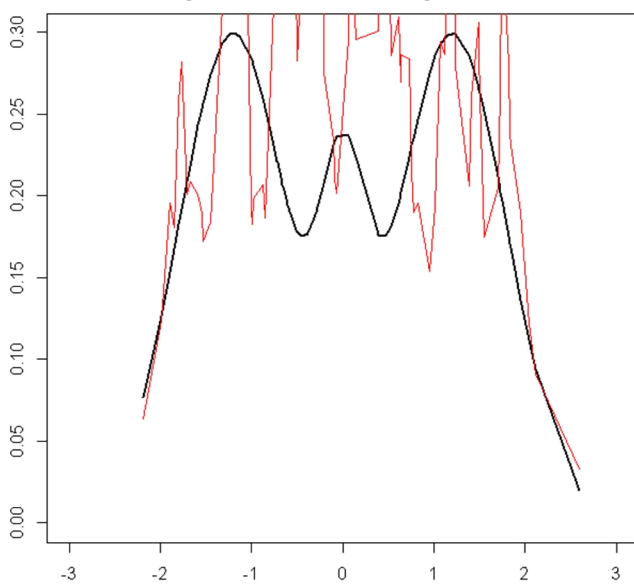
193 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , grad



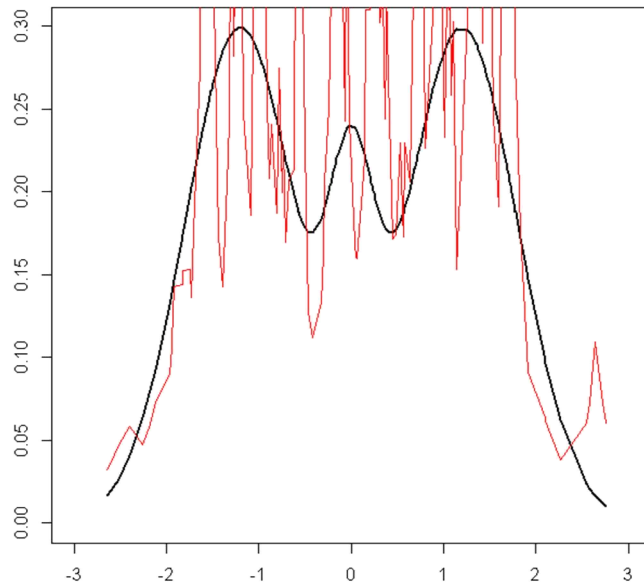
194 pav. Dvimodalinis su atskiriančiais centrais mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , grad



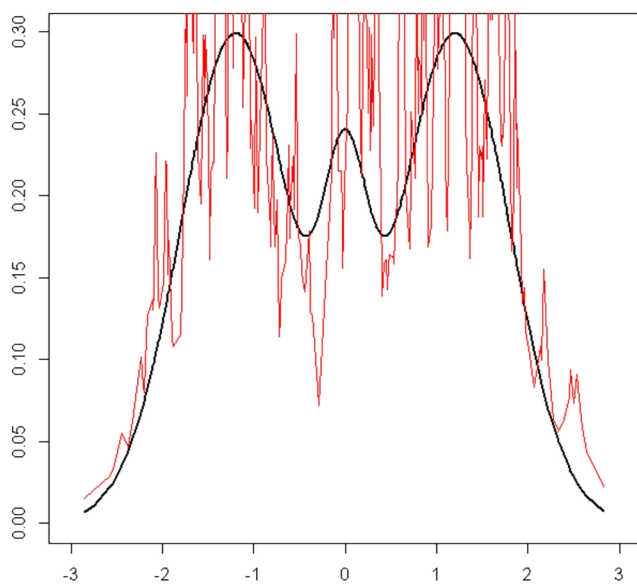
195 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , knn



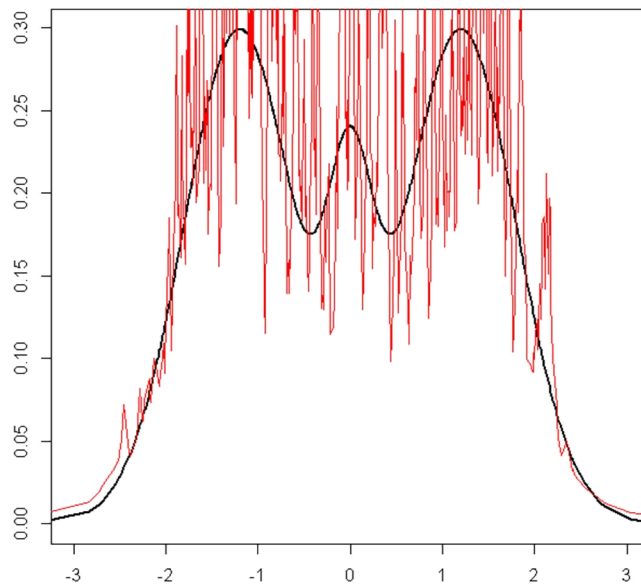
196 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , knn



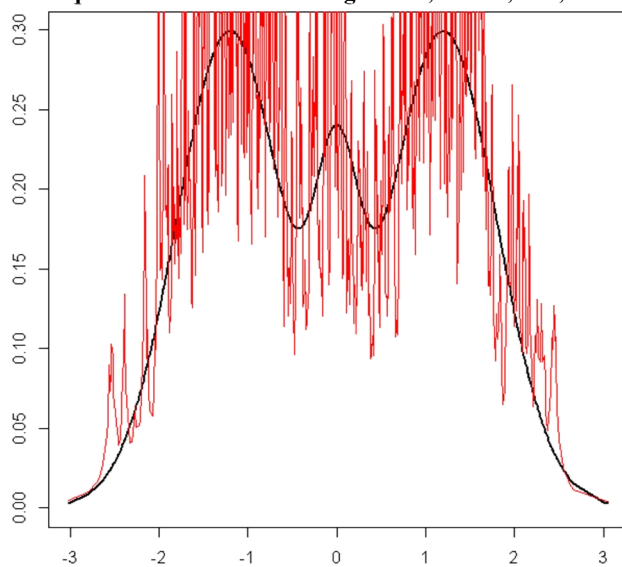
197 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , knn



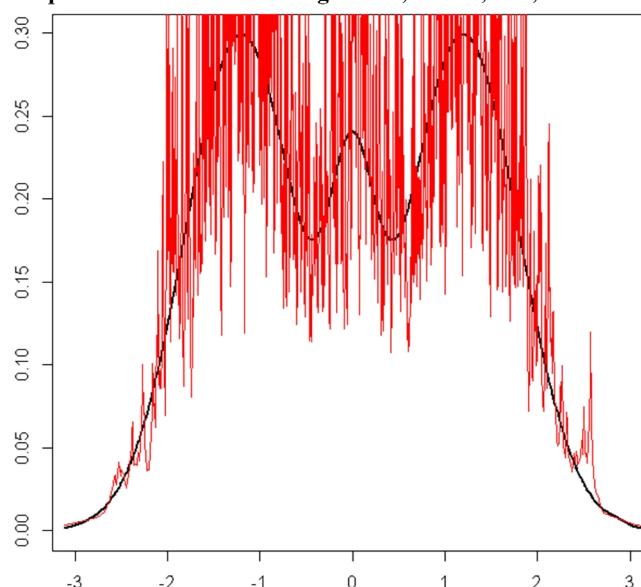
198 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , knn



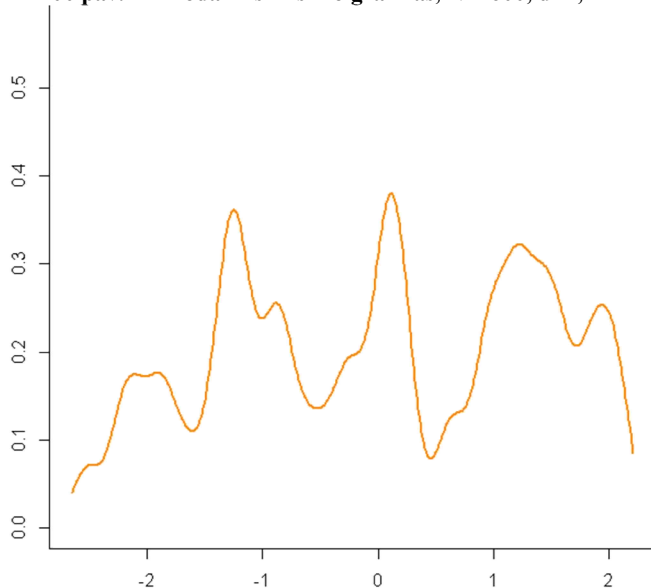
199 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , knn



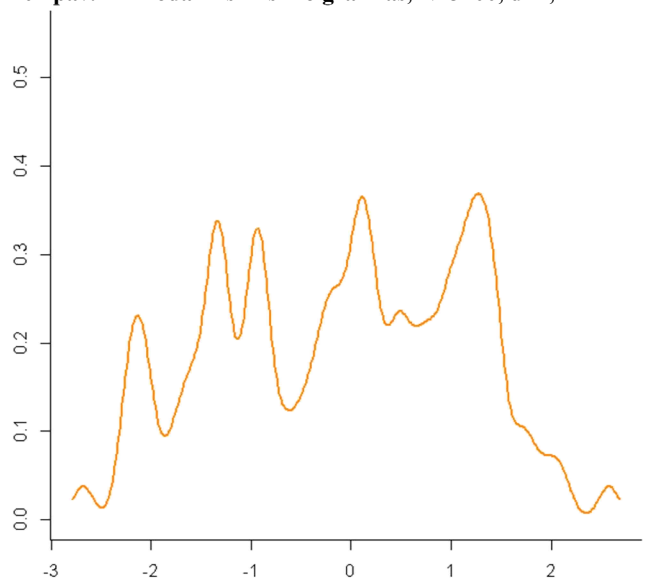
200 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , knn



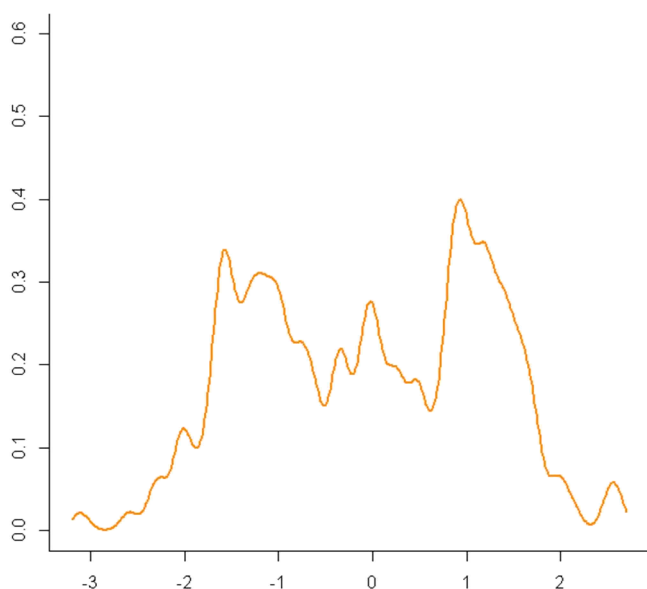
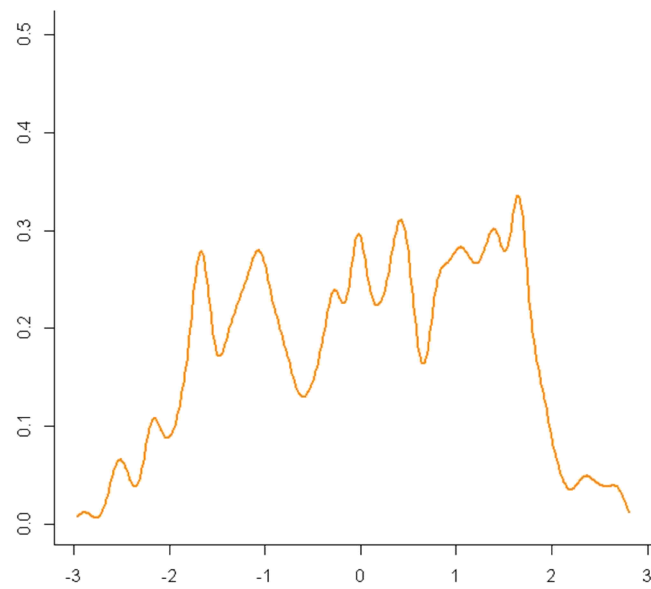
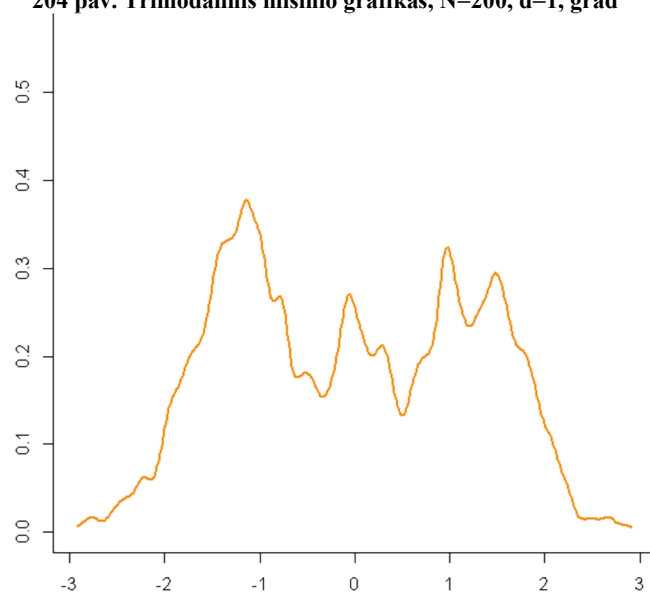
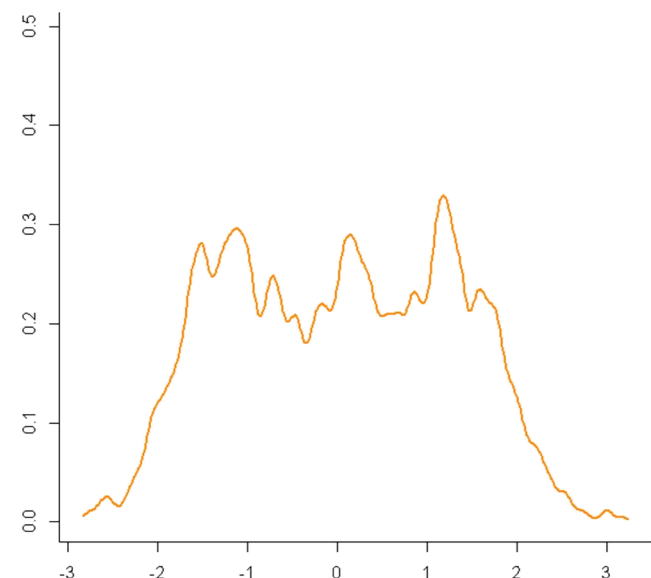
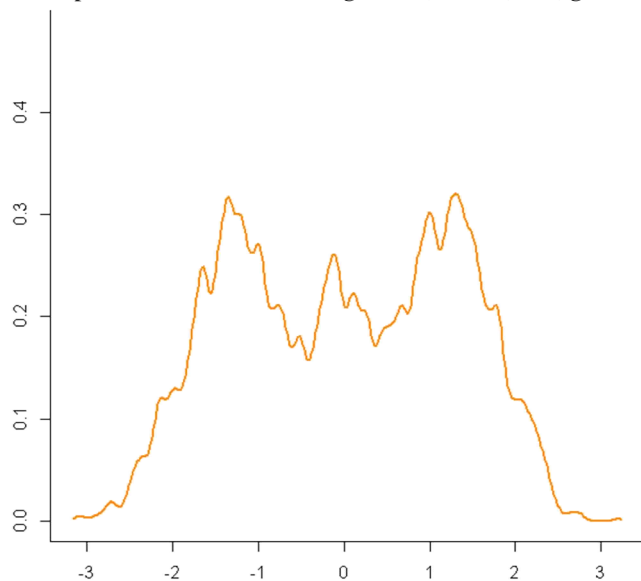
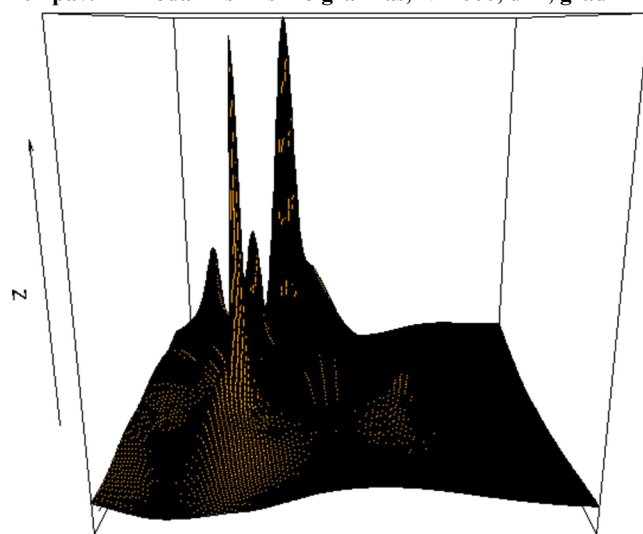
201 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , knn

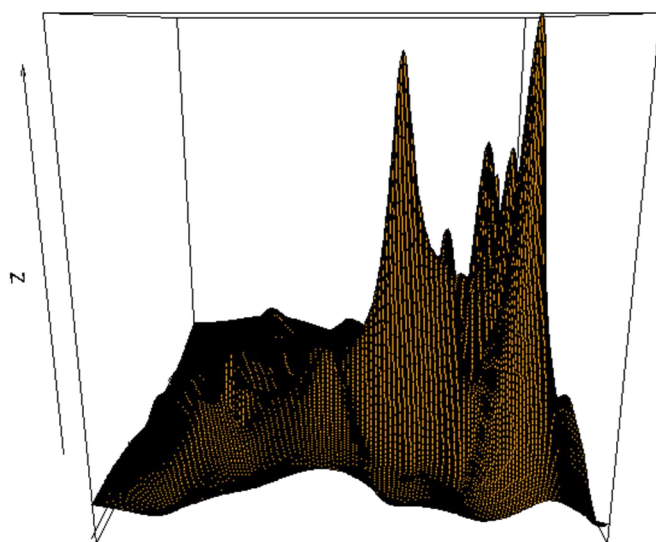
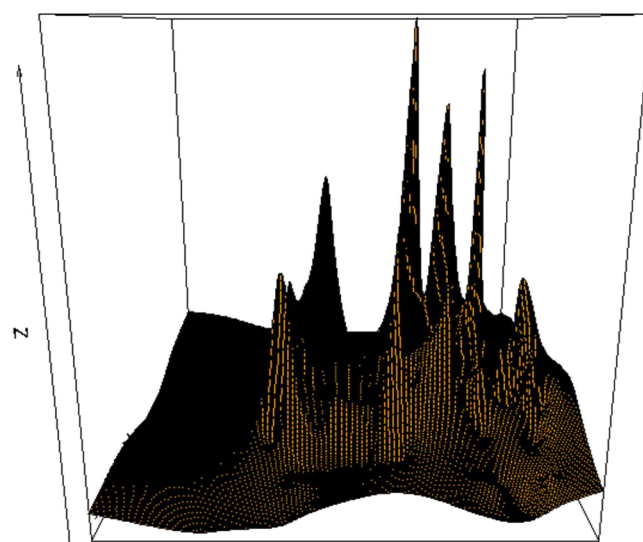
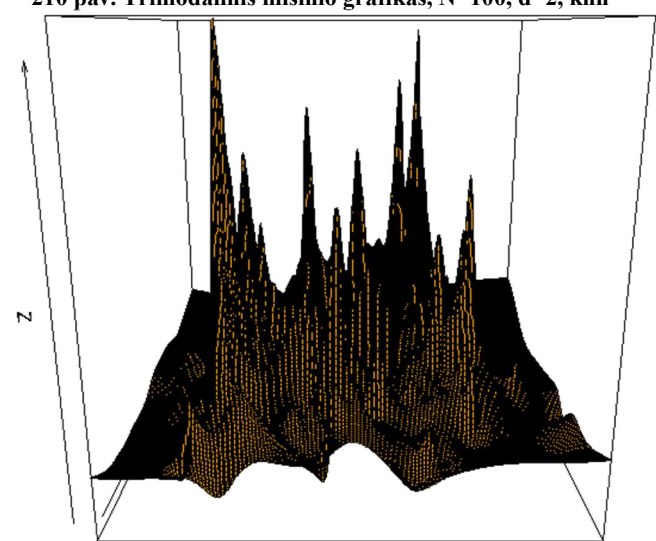
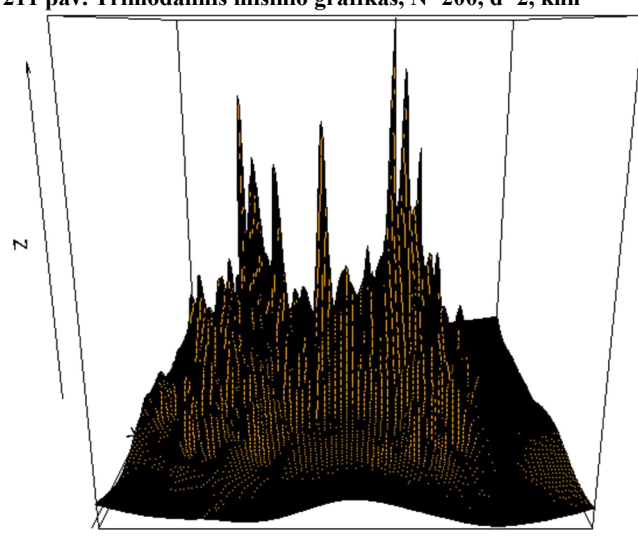
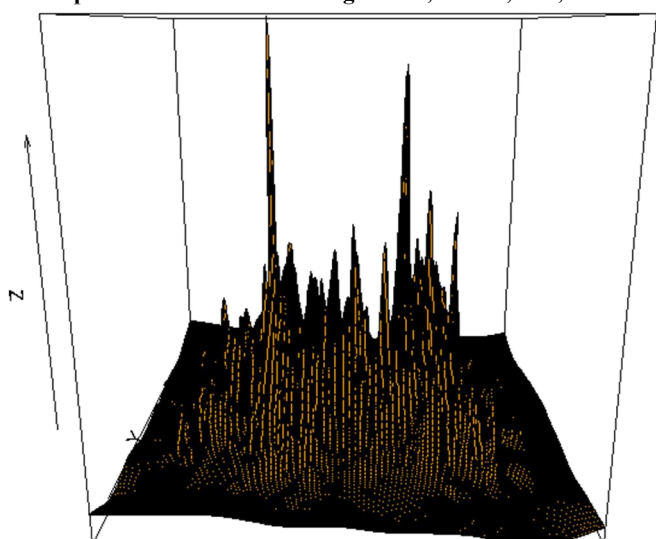
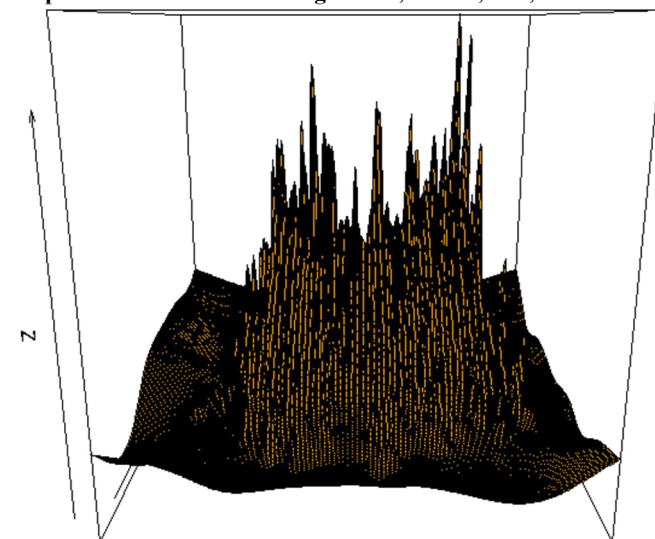


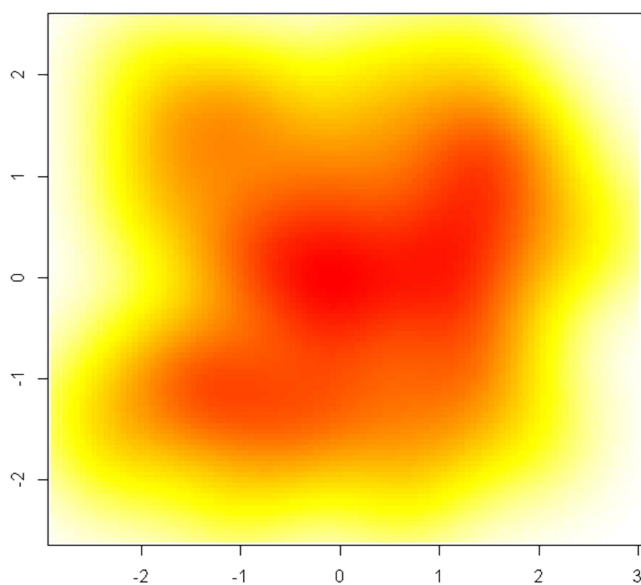
202 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , grad



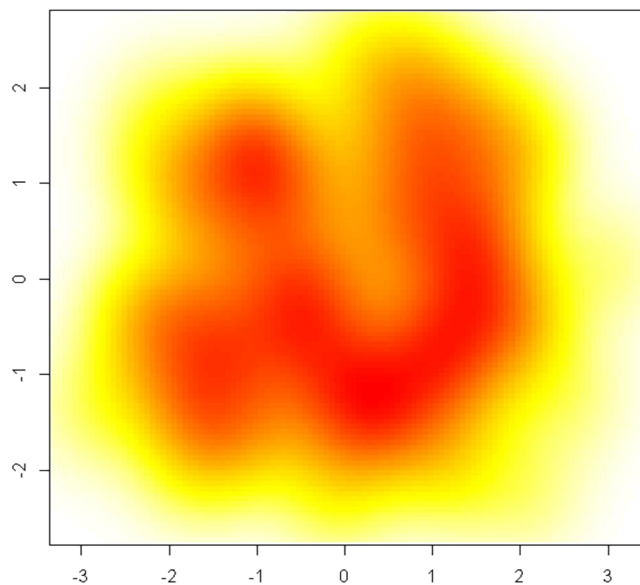
203 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , grad

204 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , grad205 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , grad206 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , grad207 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , grad208 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , grad209 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , knn

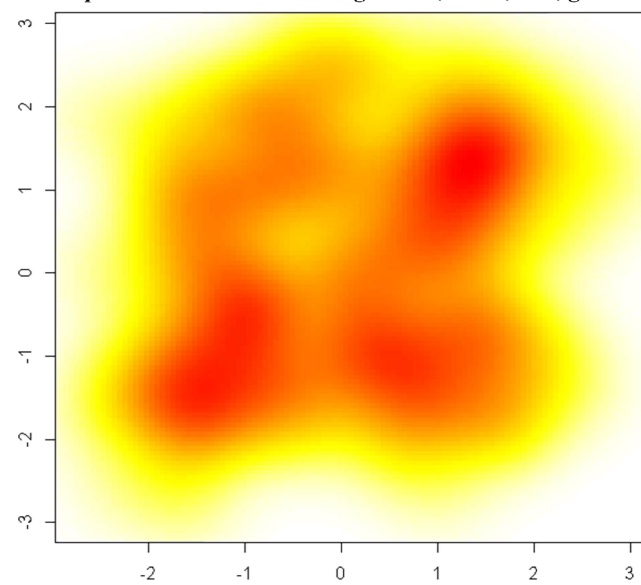
210 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , knn211 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , knn212 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , knn213 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , knn214 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , knn215 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , knn



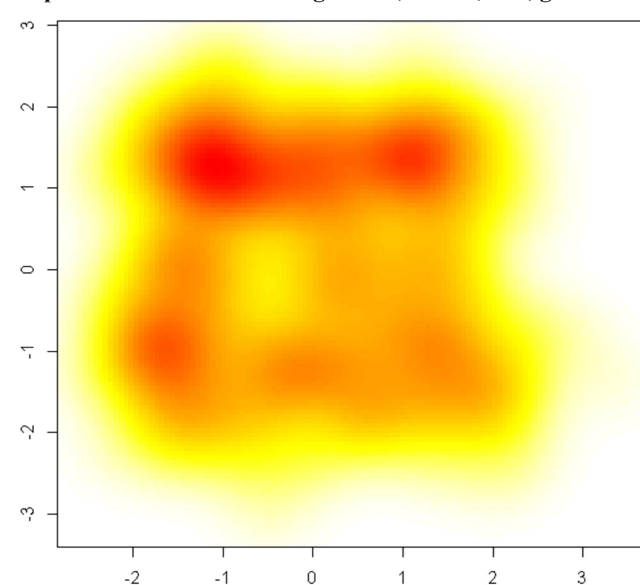
216 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , grad



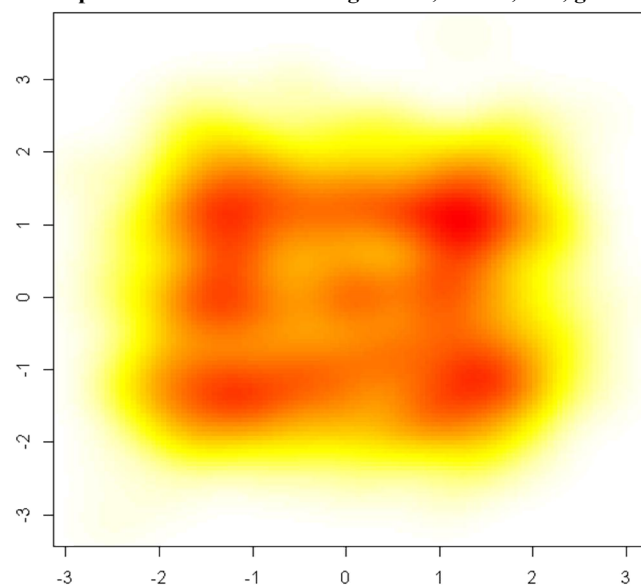
217 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , grad



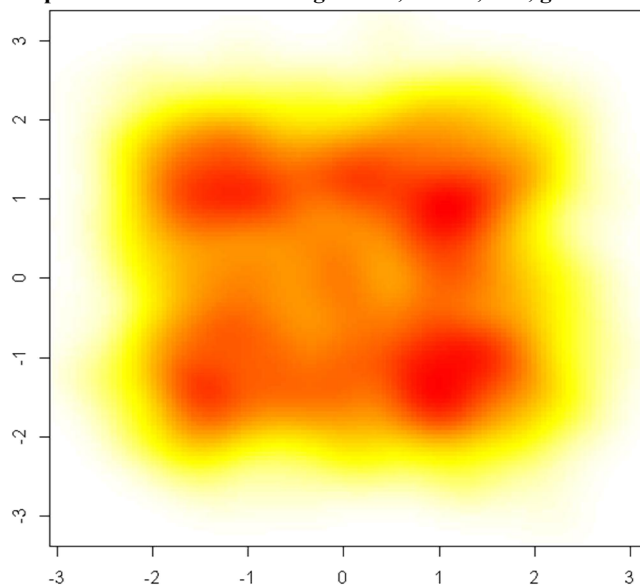
218 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , grad



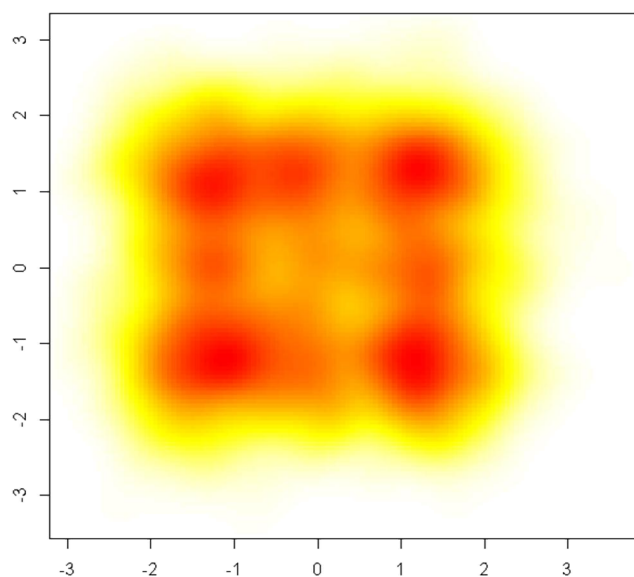
219 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , grad



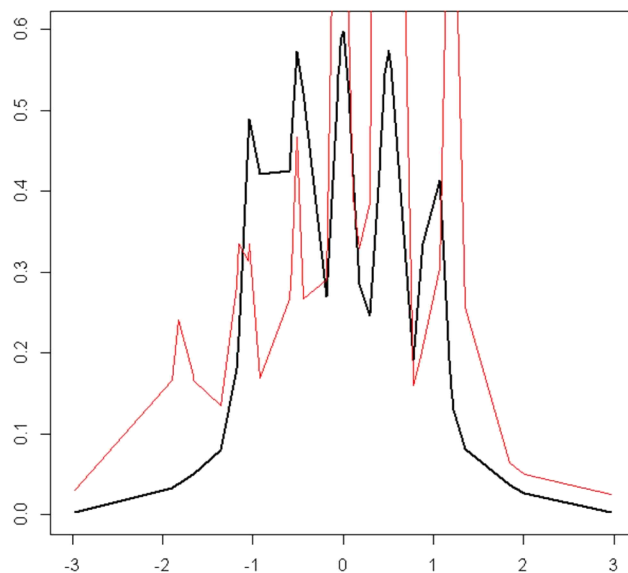
220 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , grad



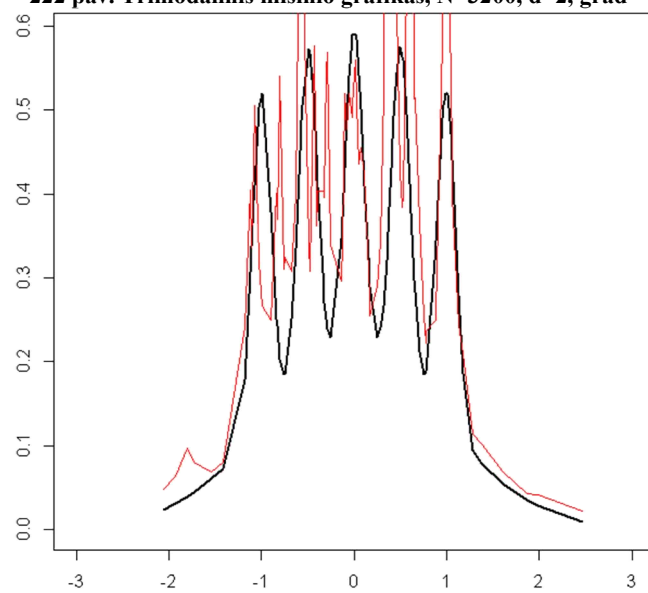
221 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , grad



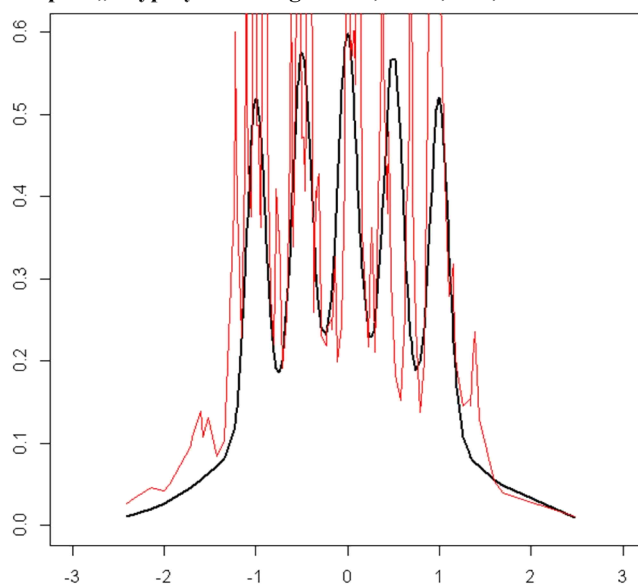
222 pav. Trimodalinis mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , grad



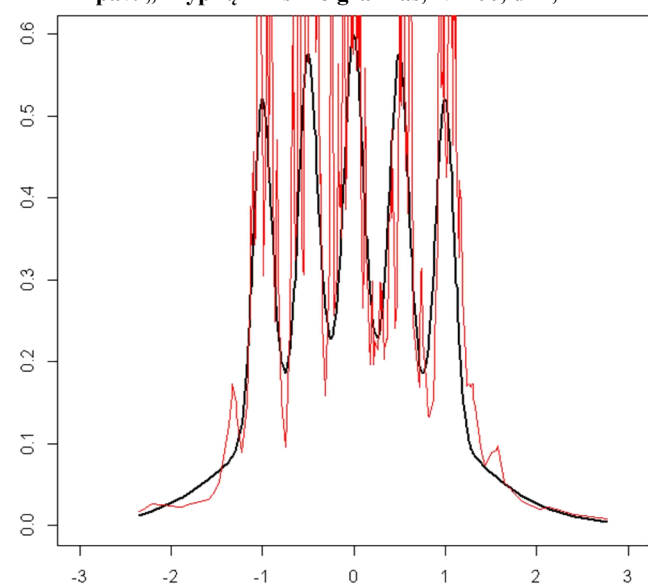
223 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , knn



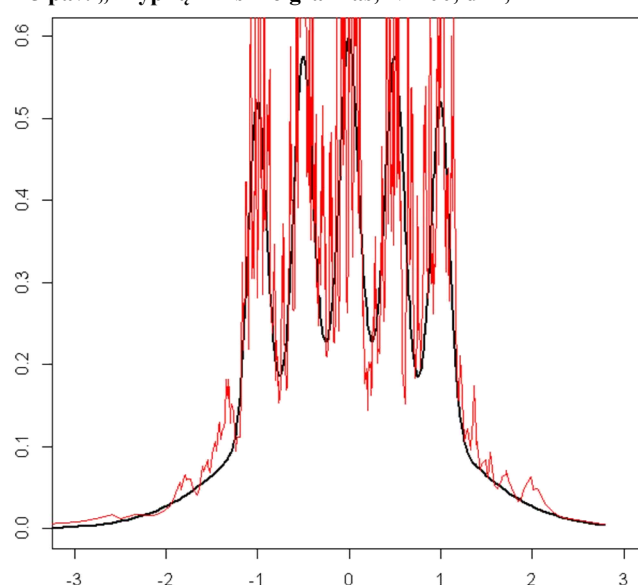
224 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , knn



225 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , knn

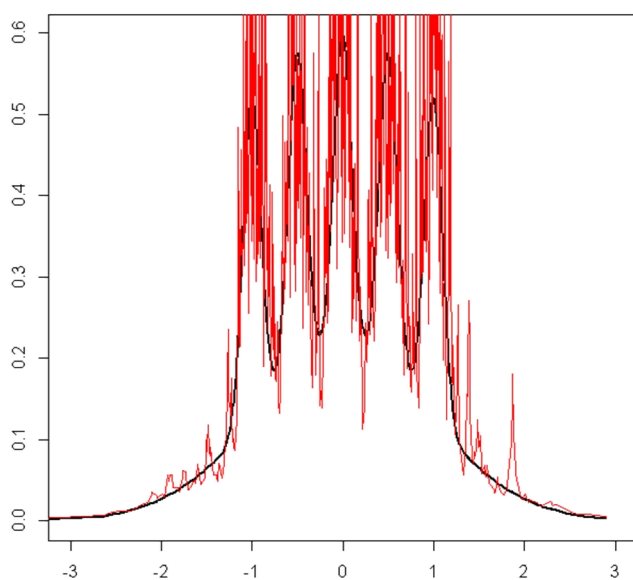


226 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , knn

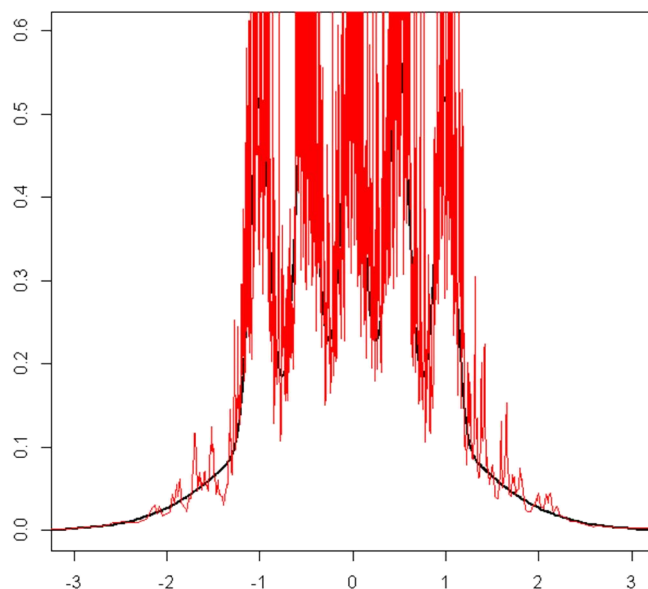


227 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , knn

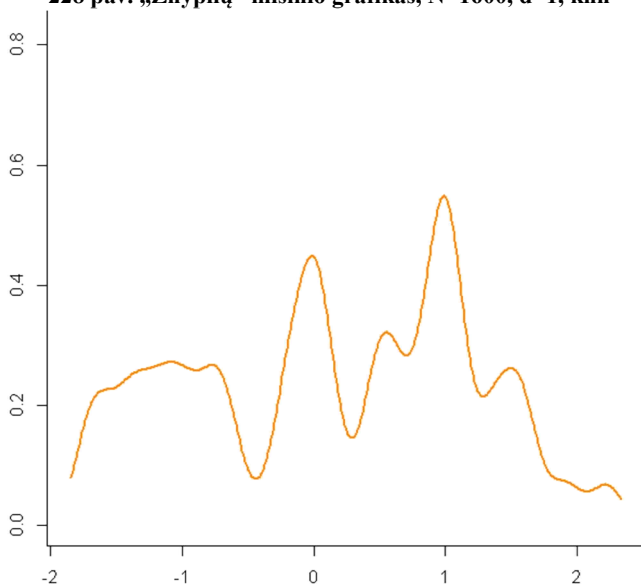




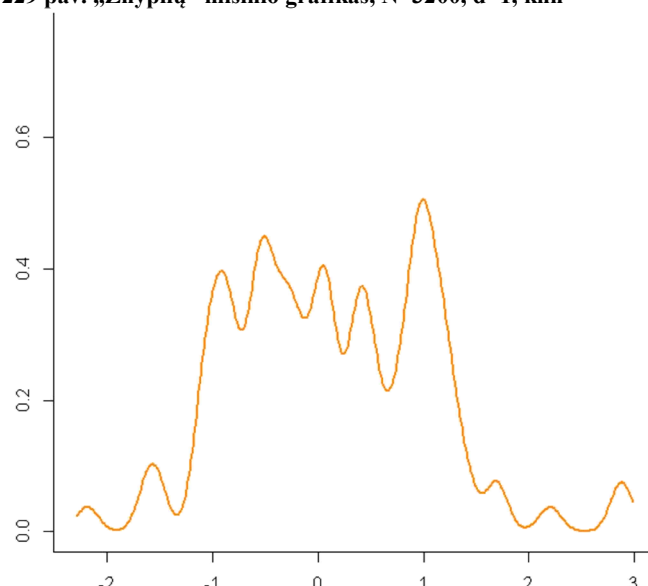
228 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , knn



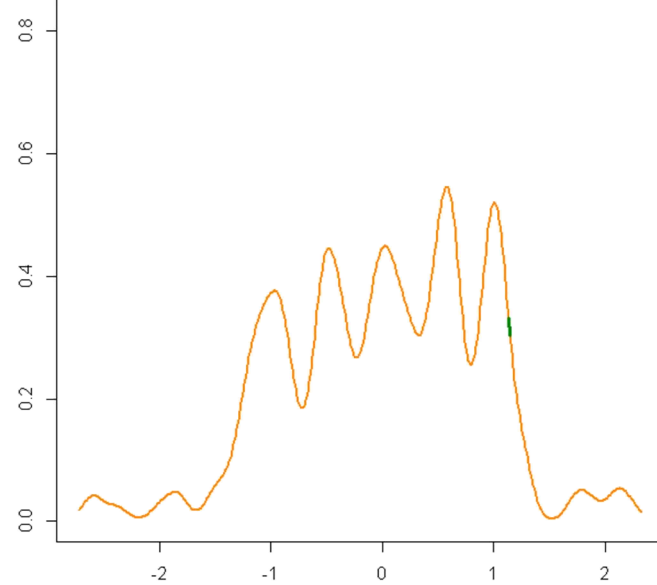
229 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , knn



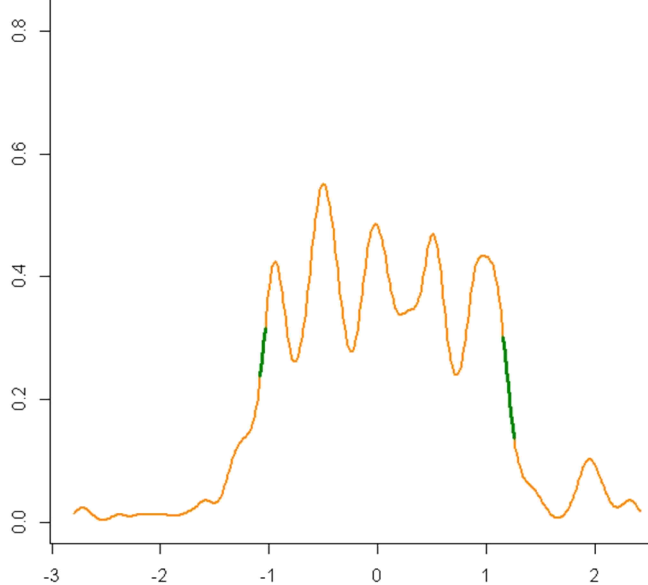
230 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , grad



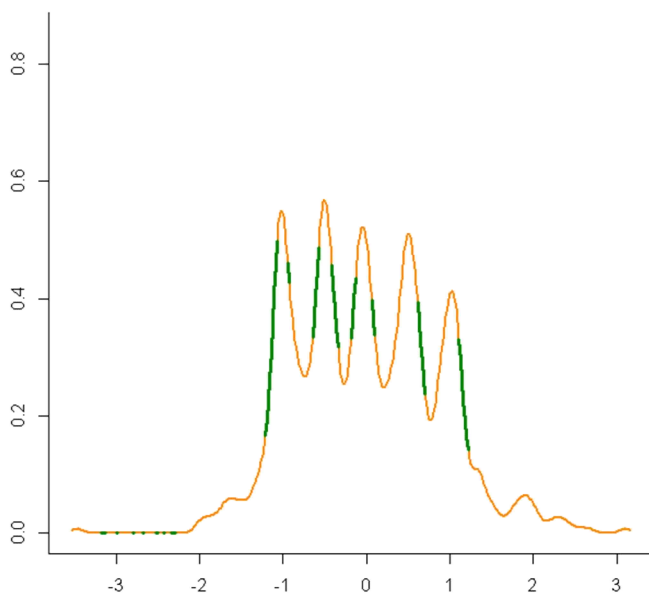
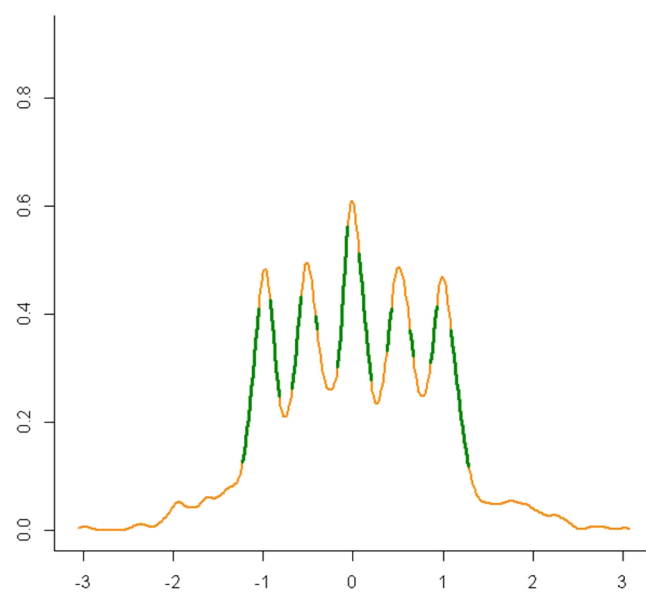
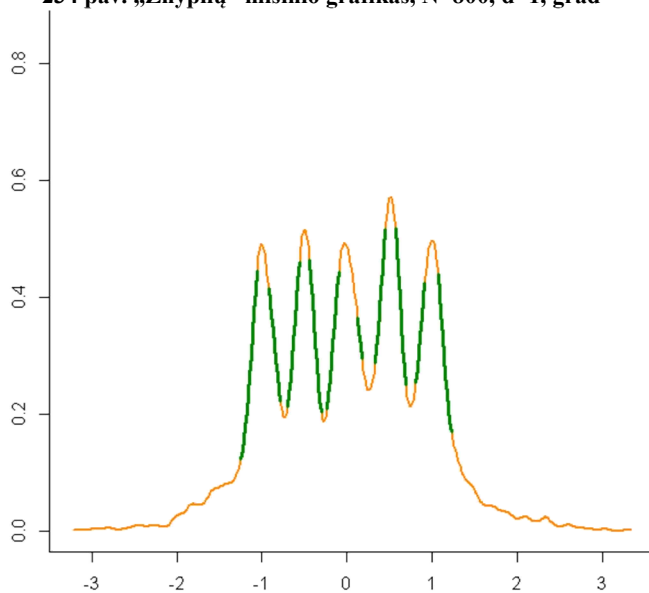
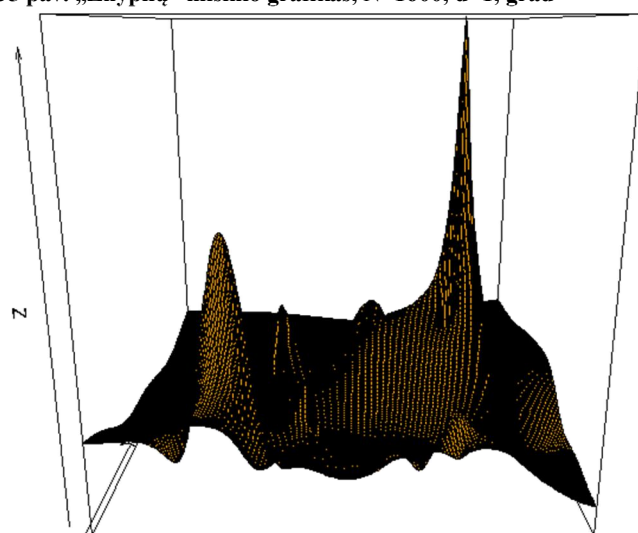
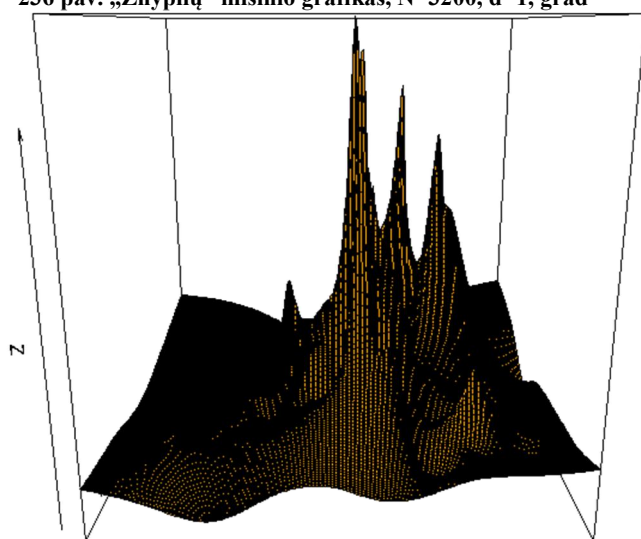
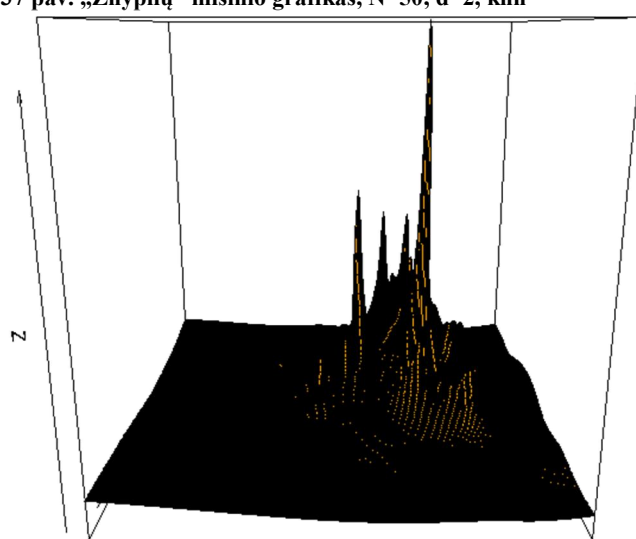
231 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , grad

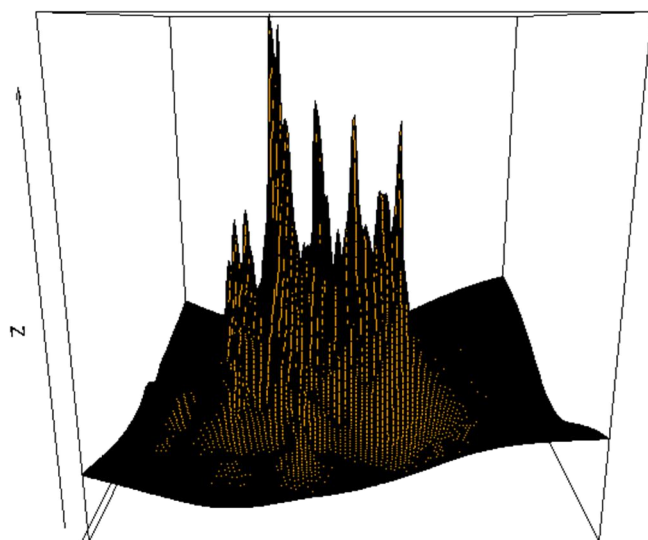
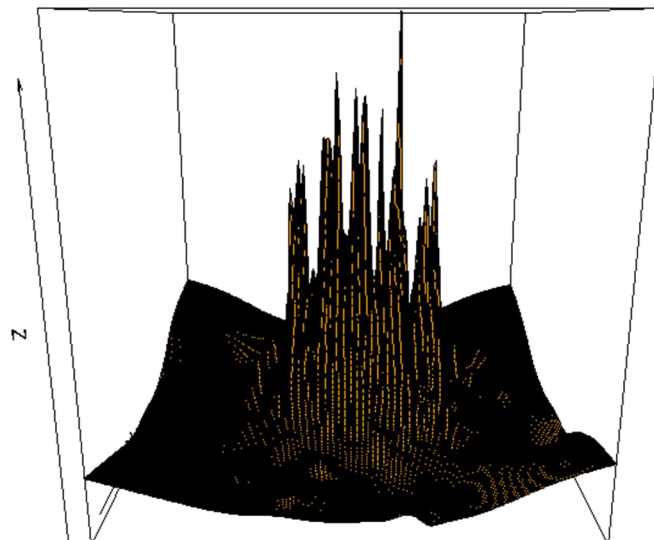
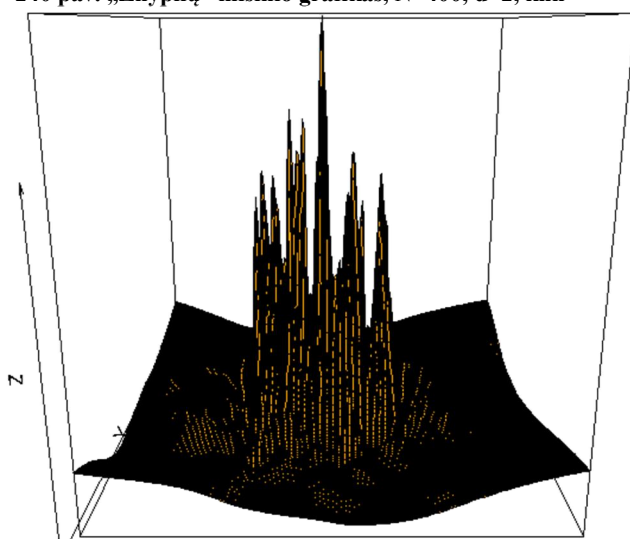
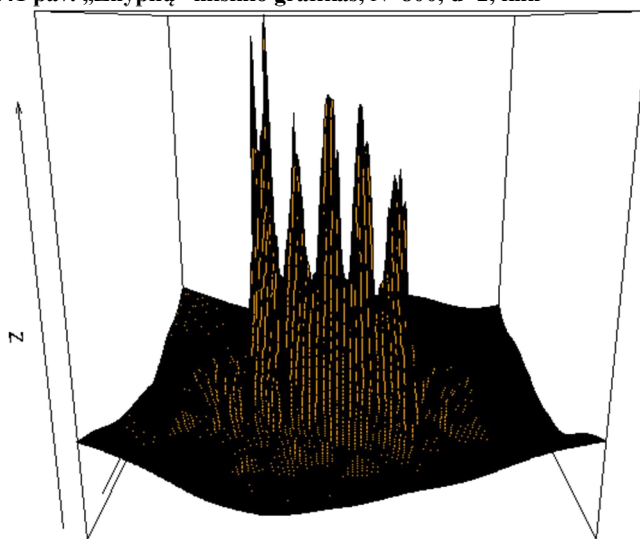
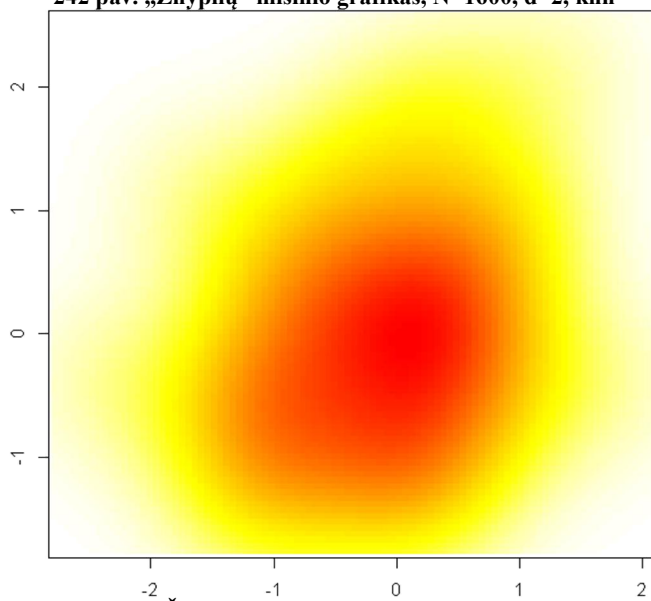
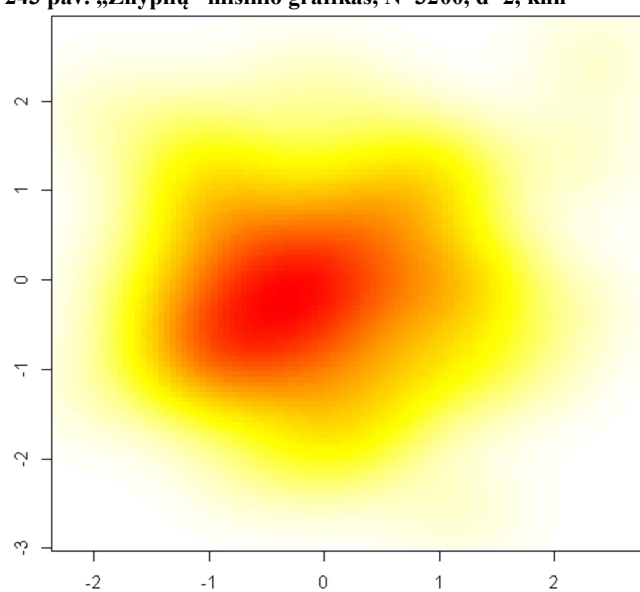


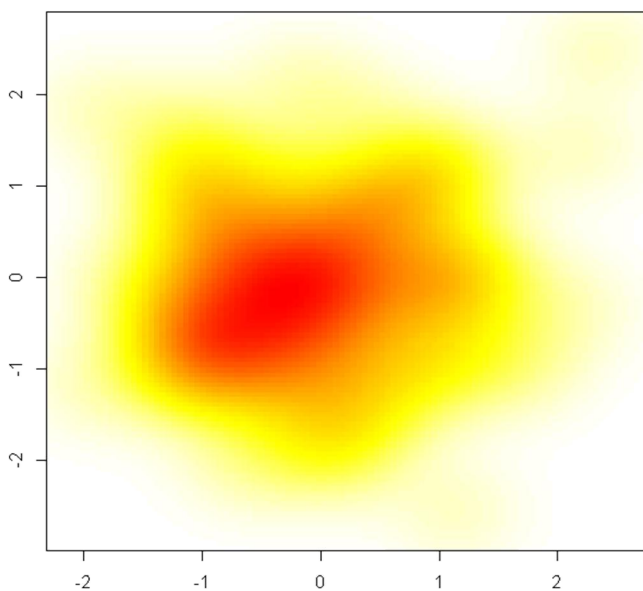
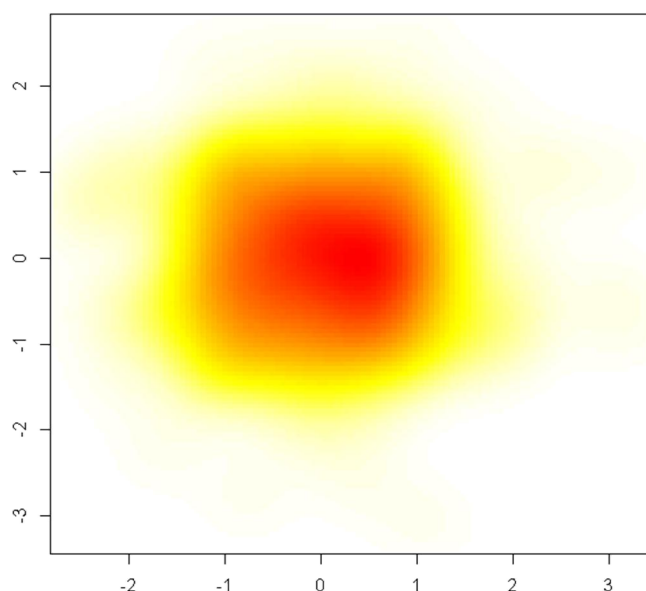
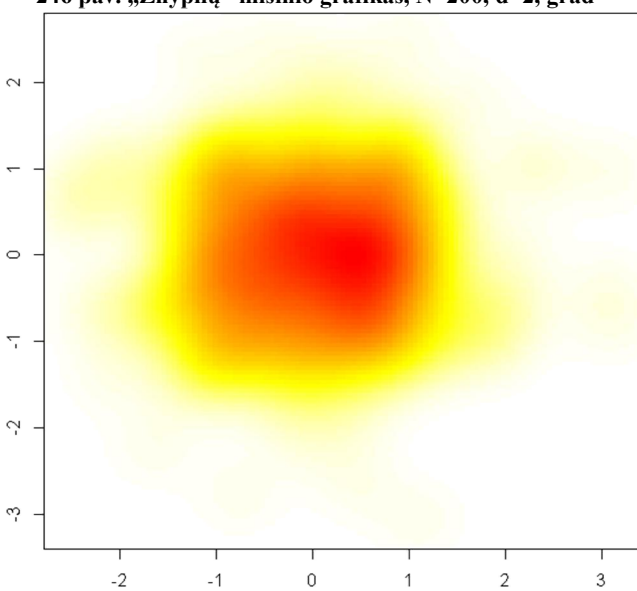
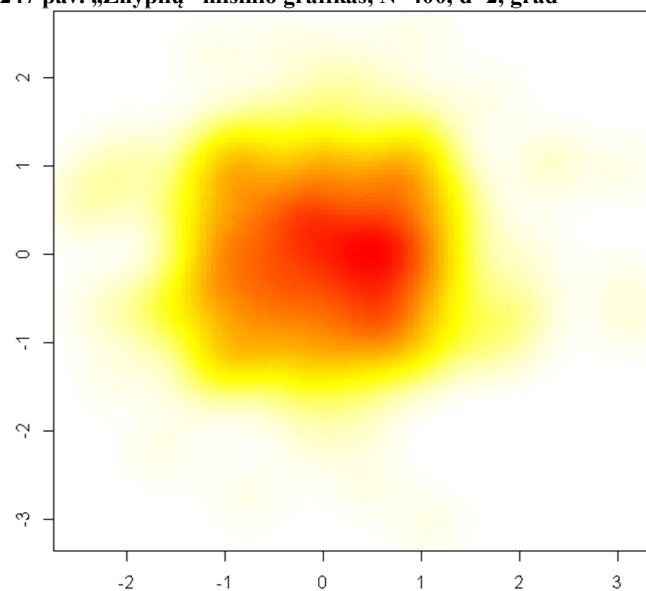
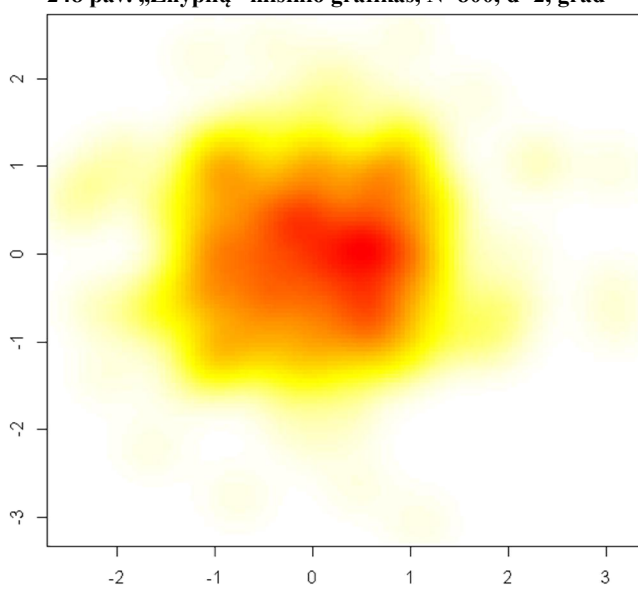
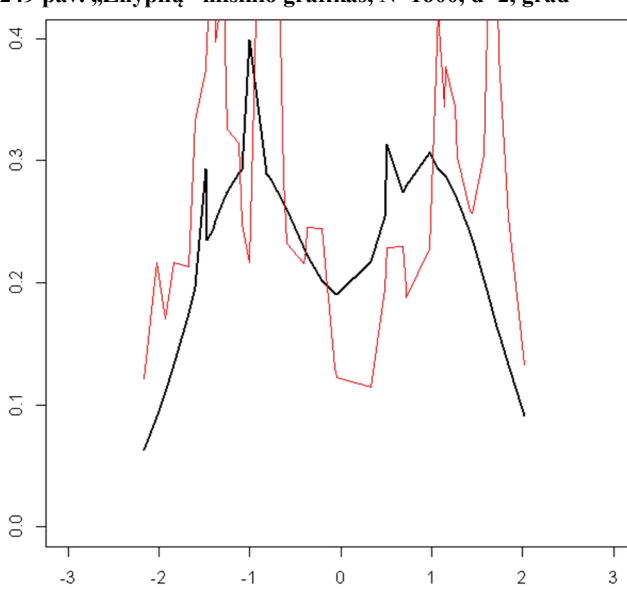
232 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , grad

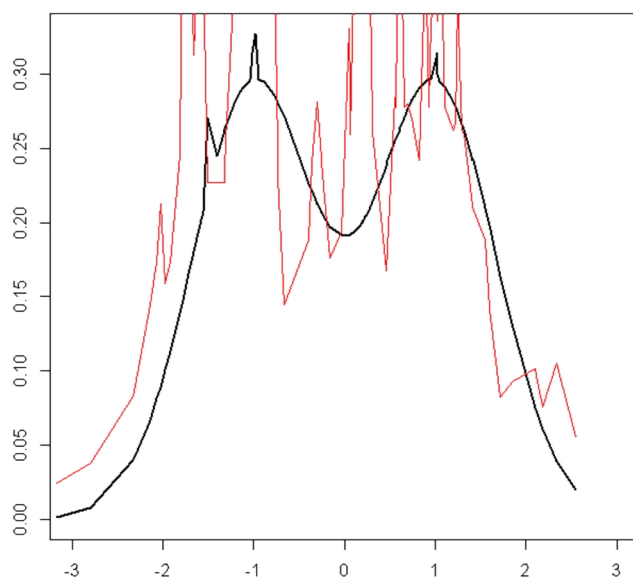
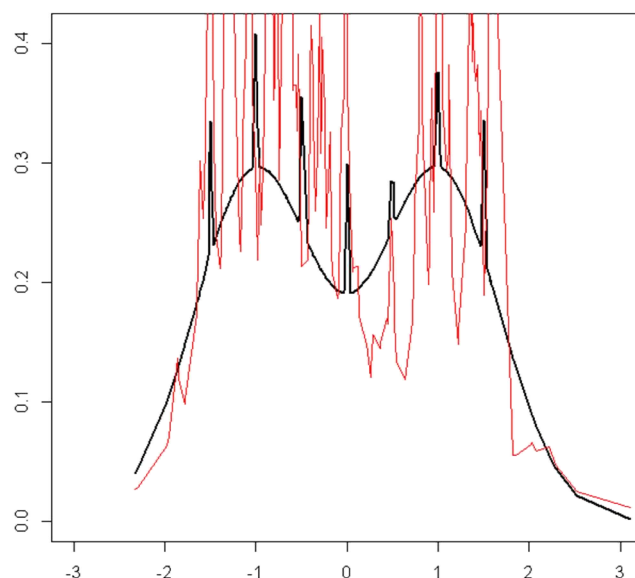
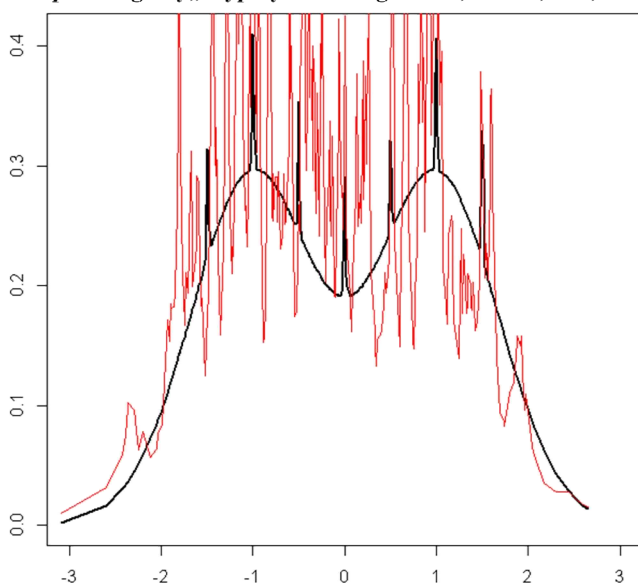
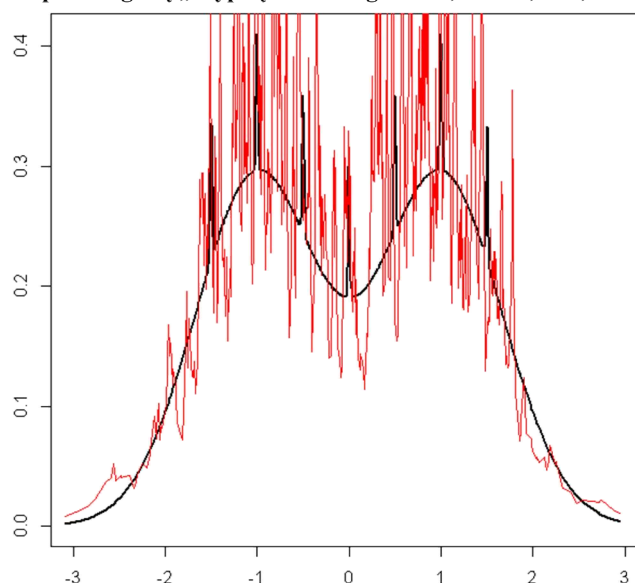
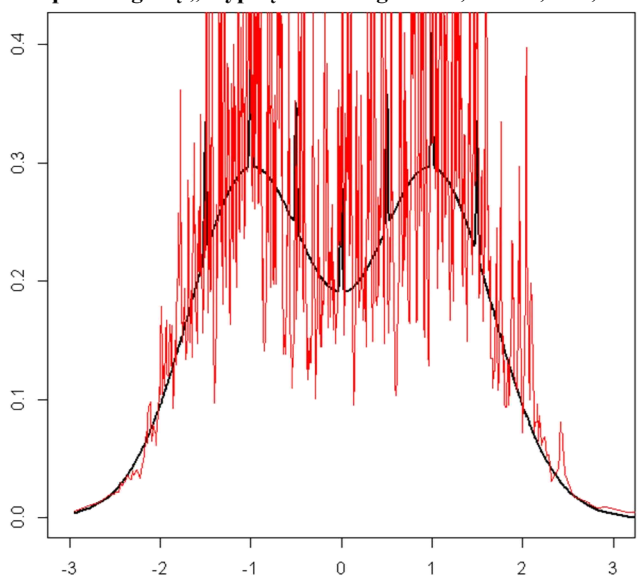
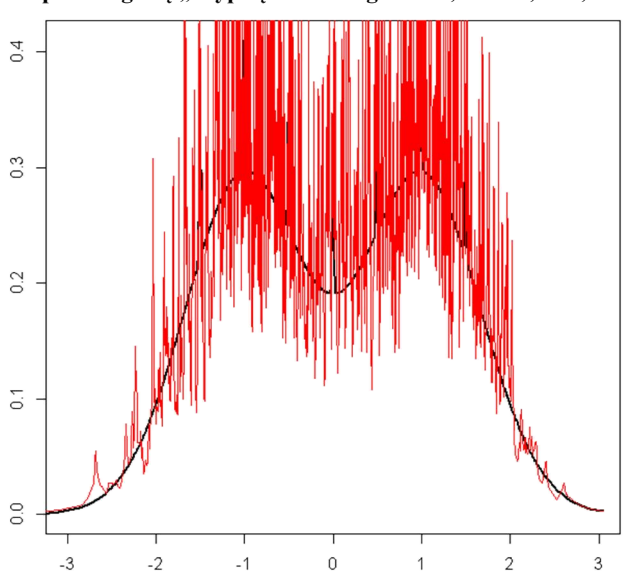


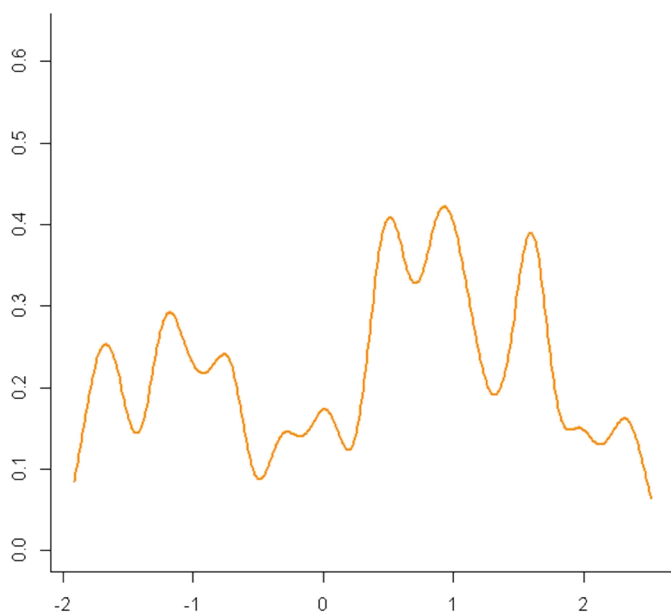
233 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , grad

234 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , grad235 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , grad236 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , grad237 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , knn238 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , knn239 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , knn

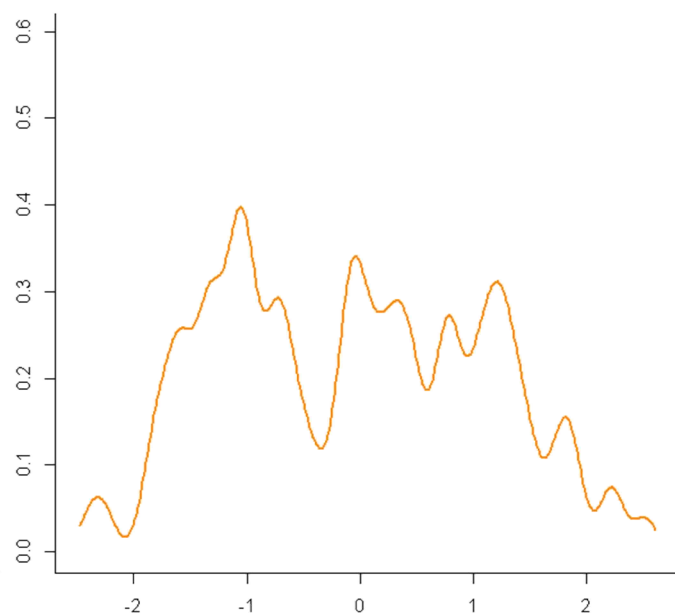
240 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , knn241 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , knn242 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , knn243 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , knn244 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , grad245 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , grad

246 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , grad247 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , grad248 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , grad249 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , grad250 pav. „Žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , grad251 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , knn

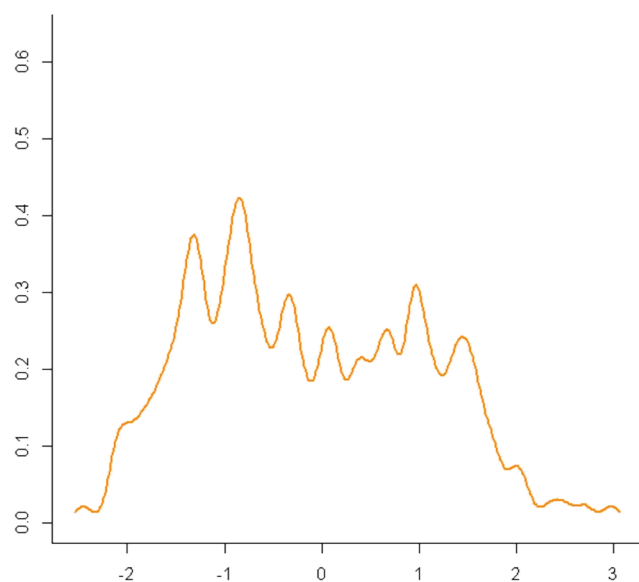
252 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , knn253 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , knn254 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , knn255 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , knn256 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , knn257 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , knn



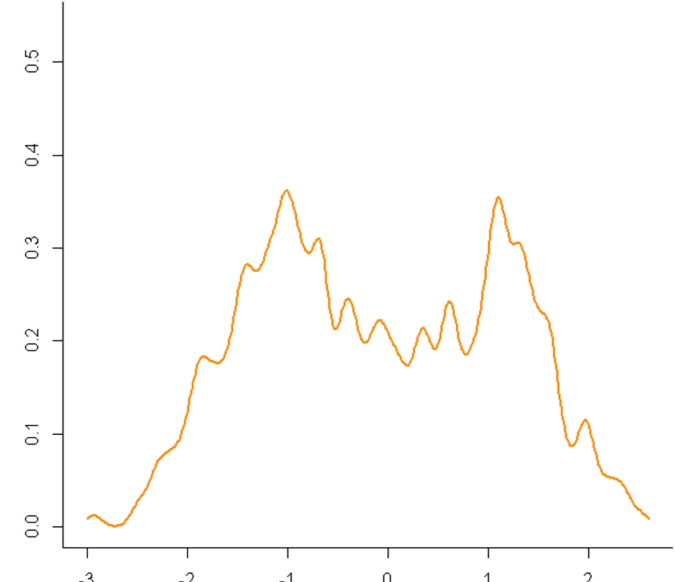
258 pav.Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas, N=50, d=1, grad



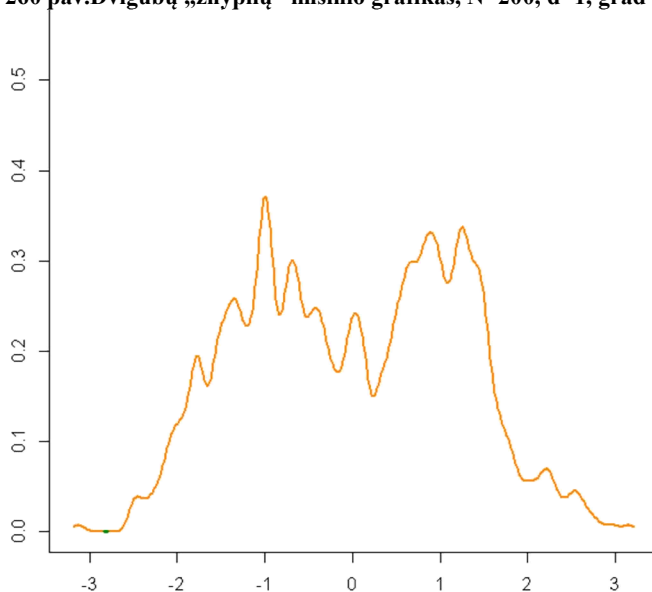
259 pav.Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas, N=100, d=1, grad



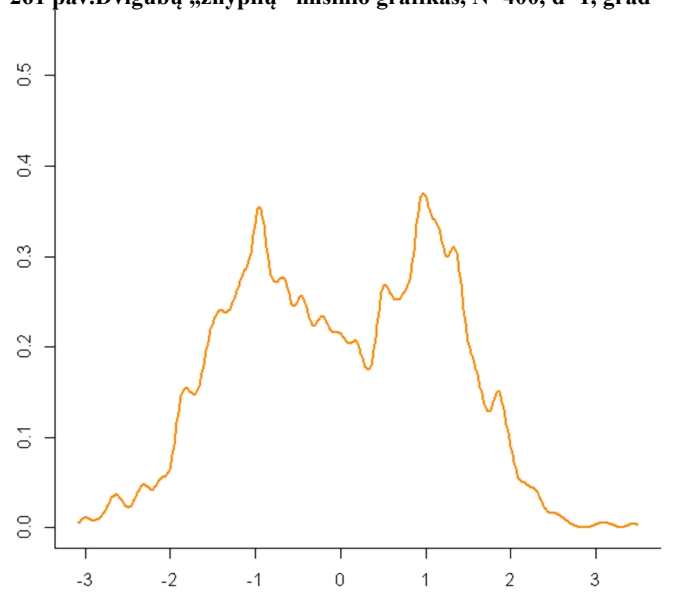
260 pav.Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas, N=200, d=1, grad



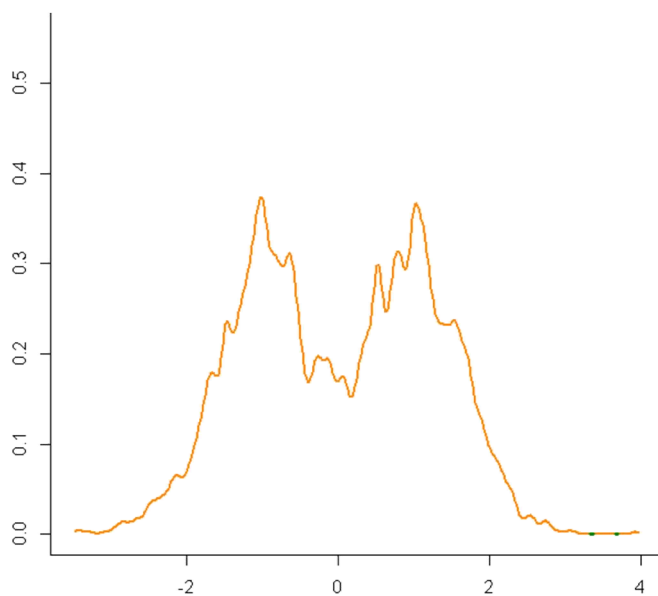
261 pav.Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas, N=400, d=1, grad



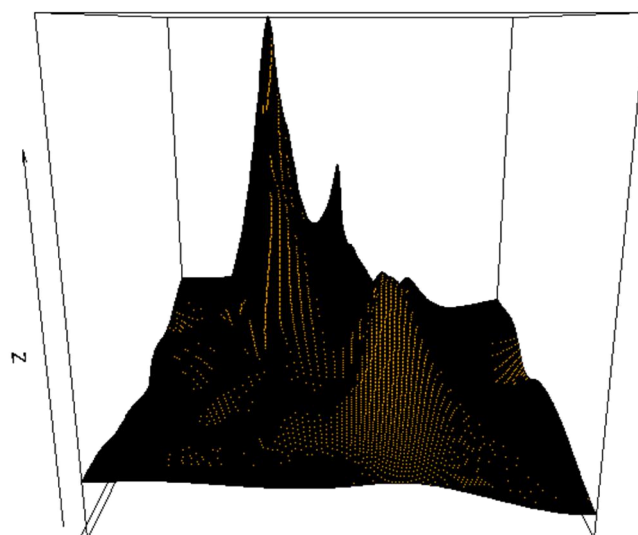
262 pav.Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas, N=800, d=1, grad



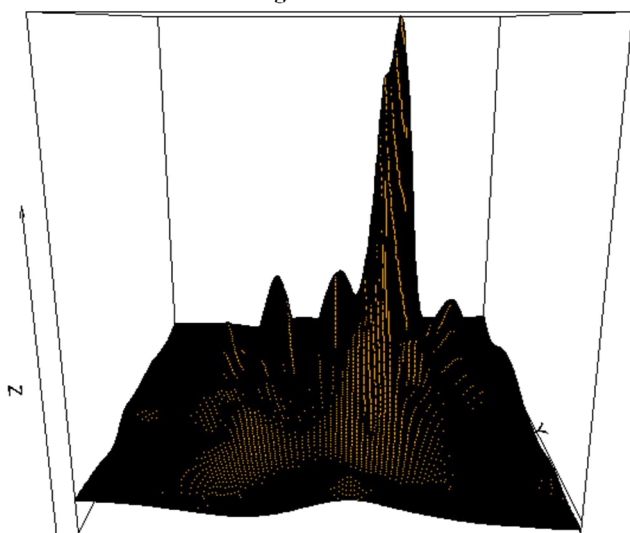
263 pav.Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas, N=1600, d=1, grad



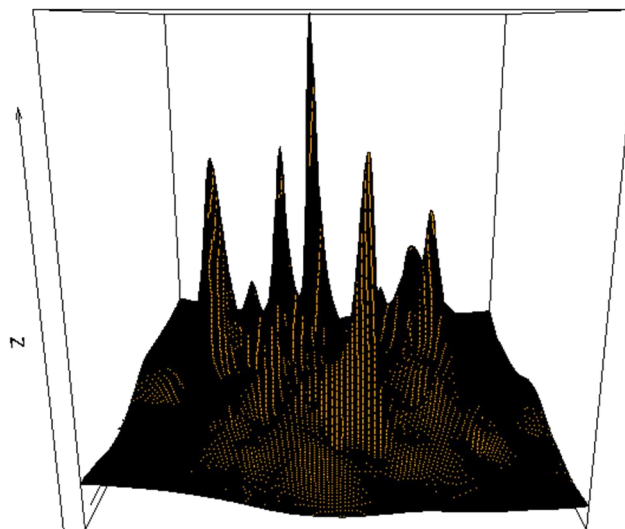
264 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , grad



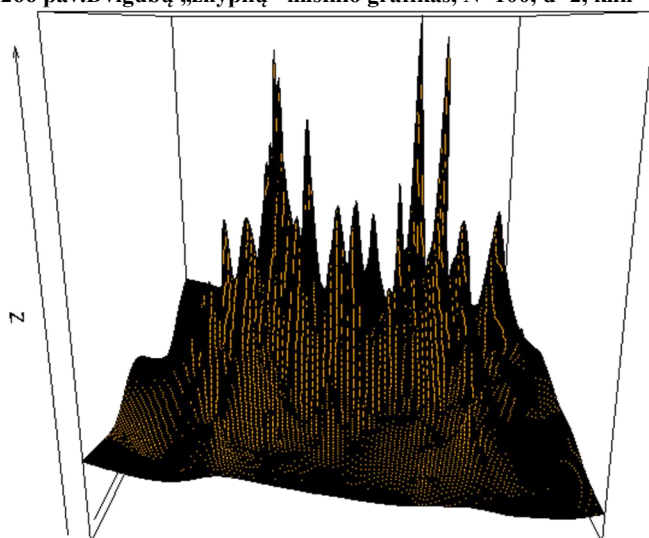
265 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , knn



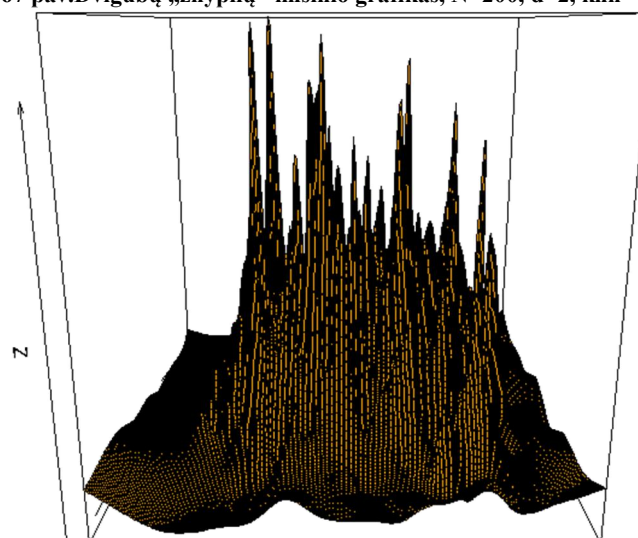
266 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , knn



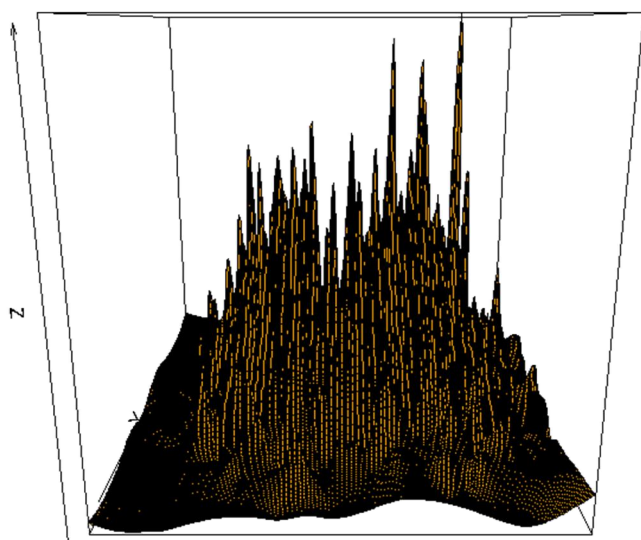
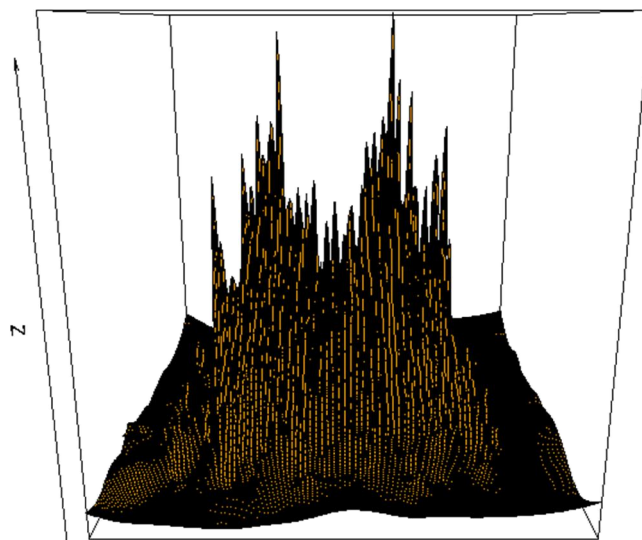
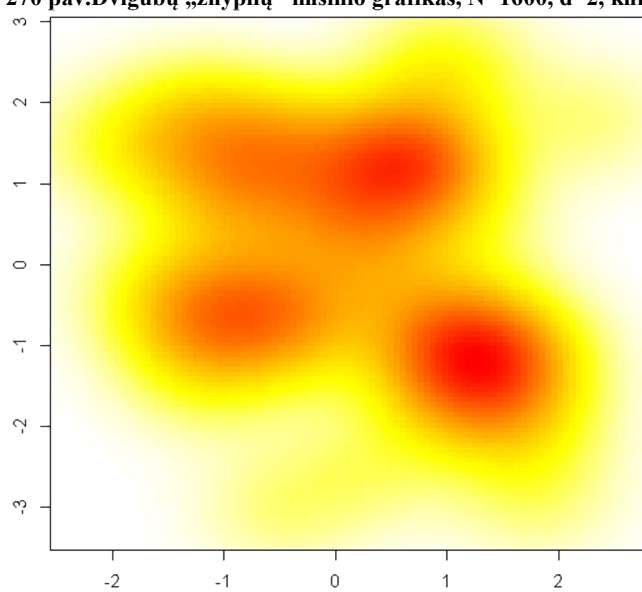
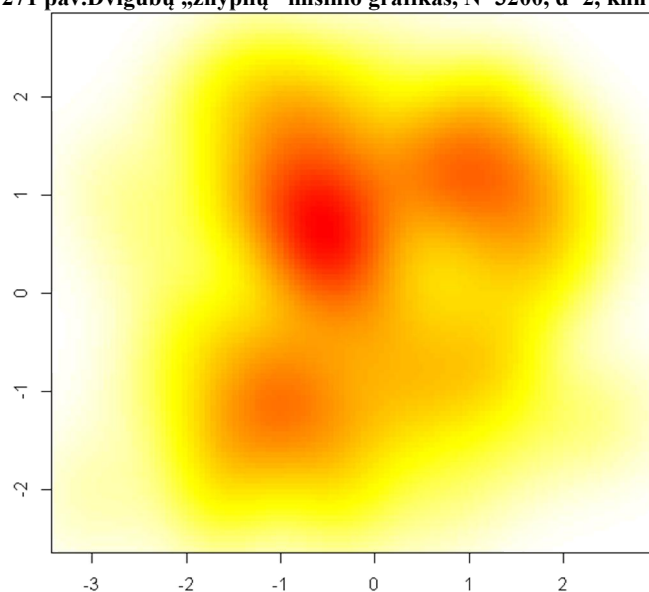
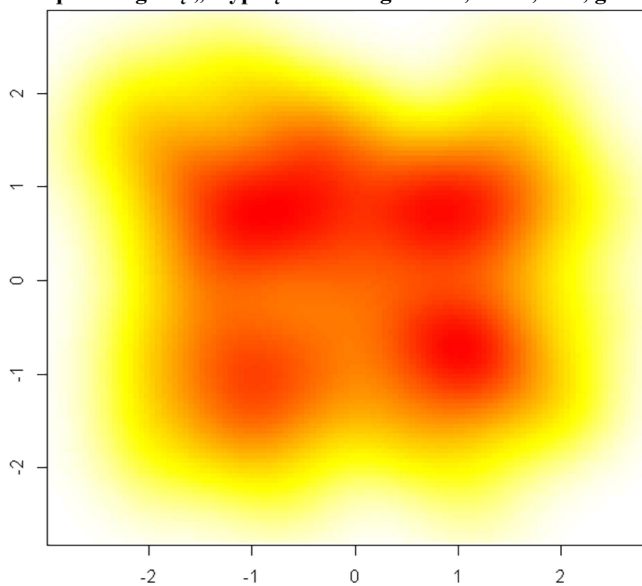
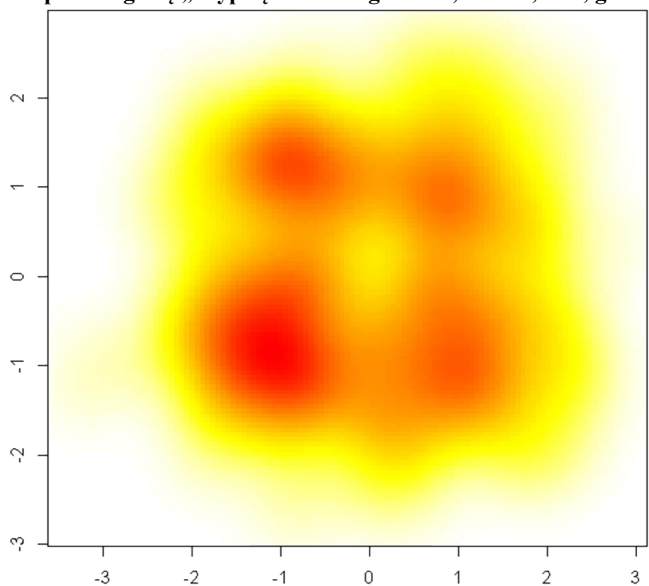
267 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , knn



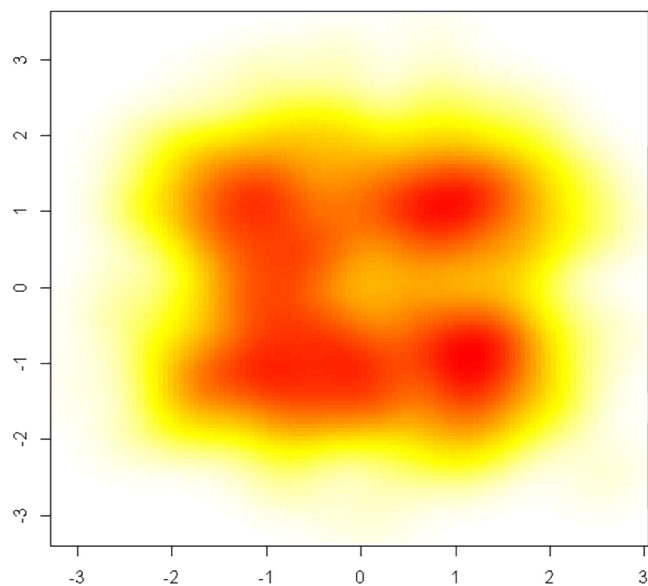
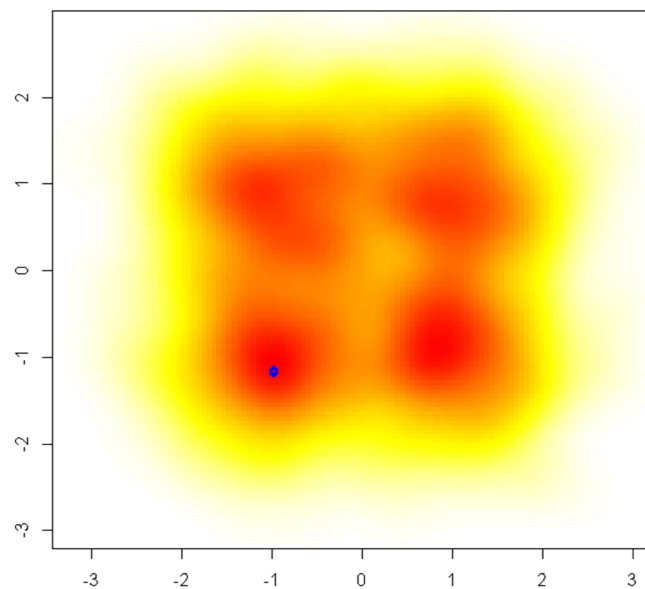
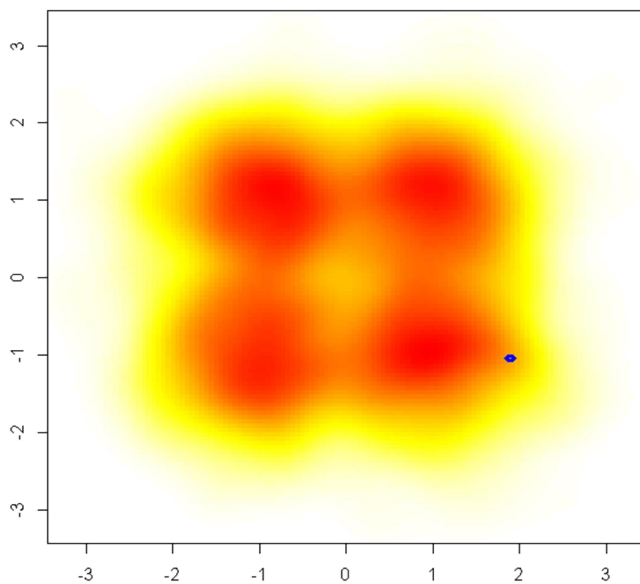
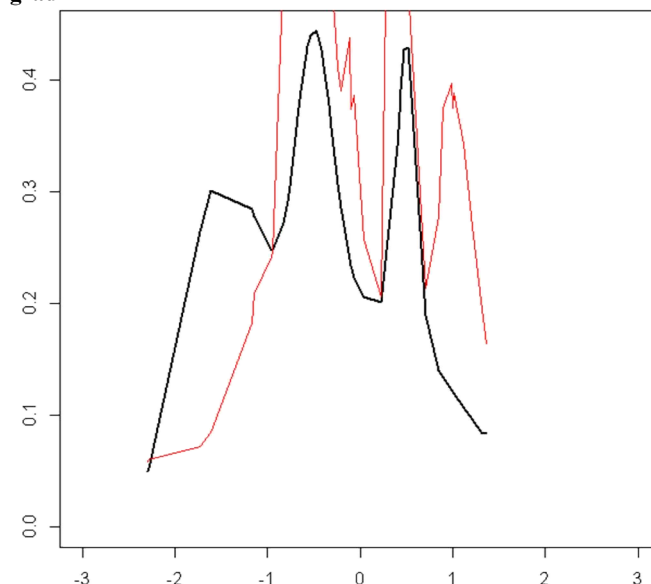
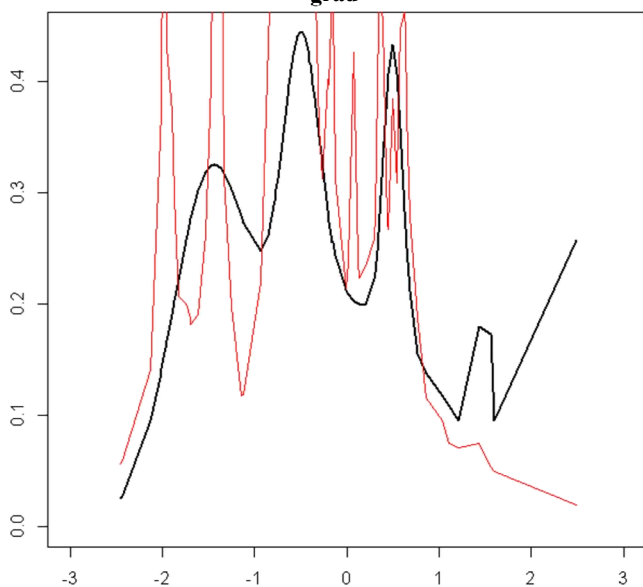
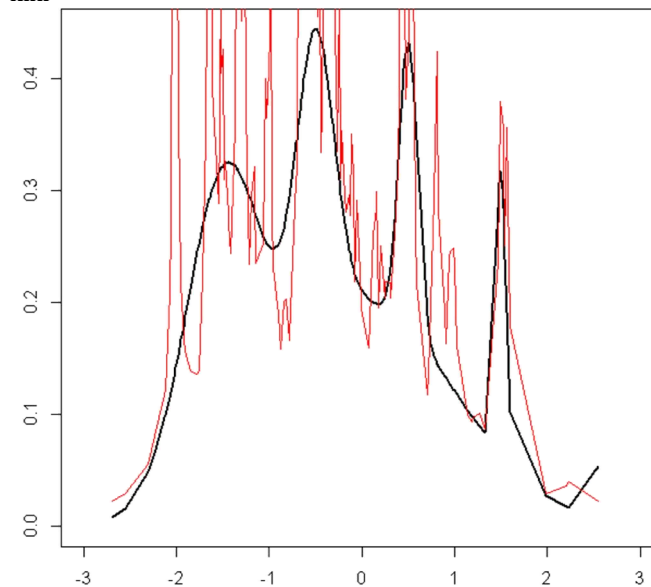
268 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , knn

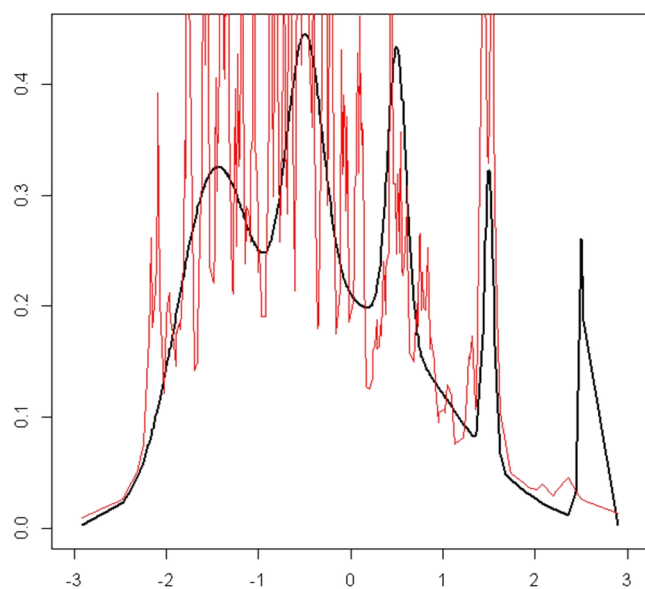


269 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , knn

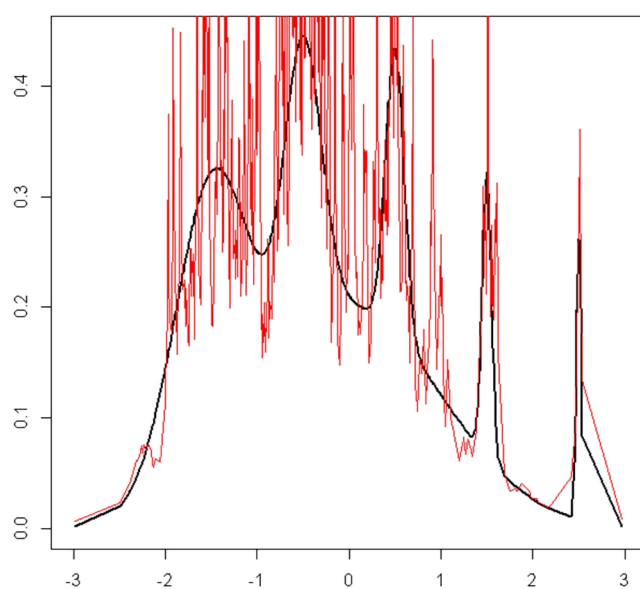
270 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , knn271 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , knn272 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , grad273 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , grad274 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , grad275 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , grad



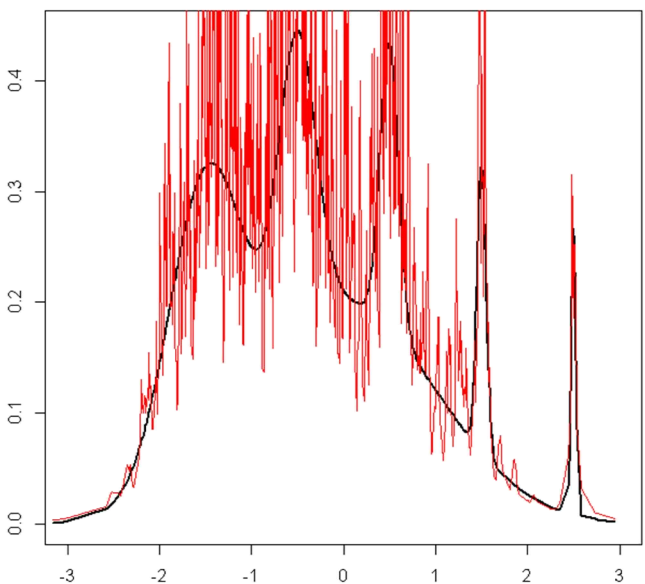
276 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , grad277 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , grad278 pav. Dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , grad279 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , knn280 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , knn281 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , knn



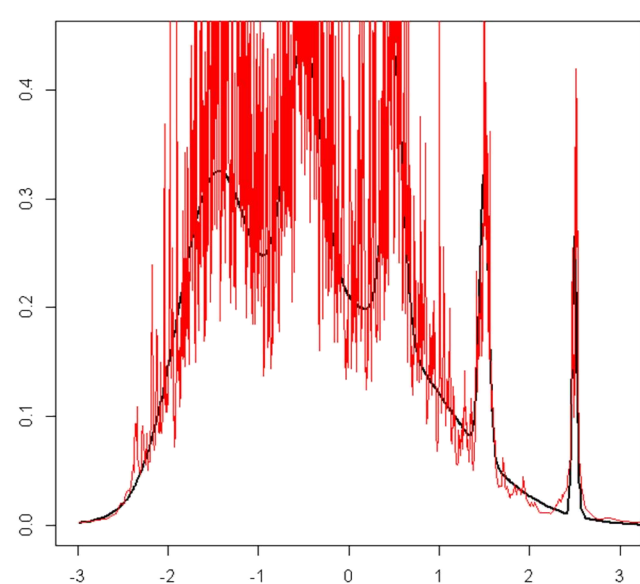
282 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , knn



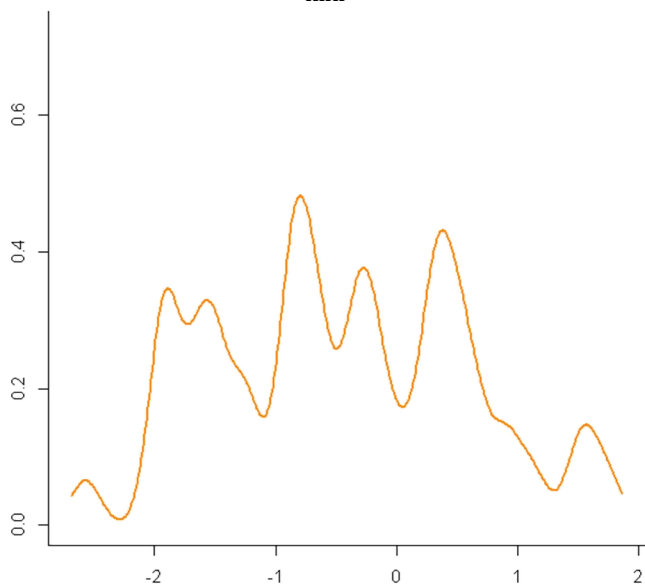
283 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , knn



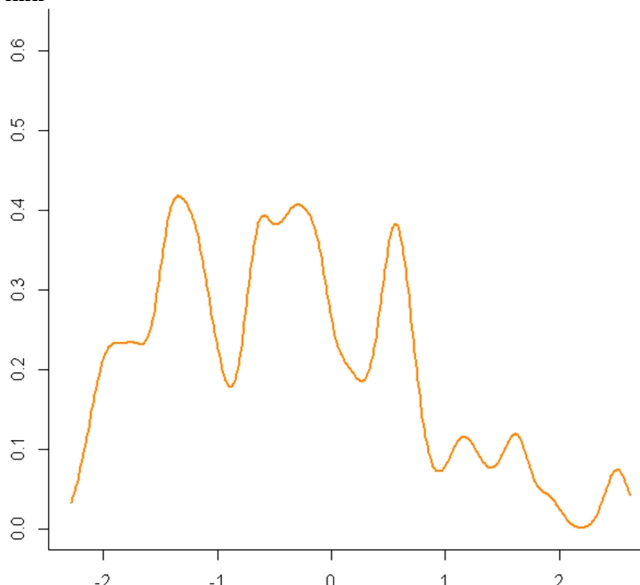
284 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , knn



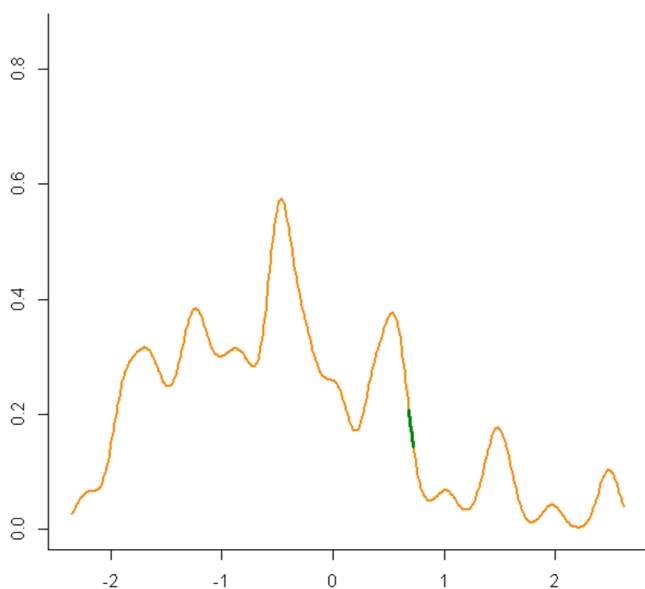
285 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , knn



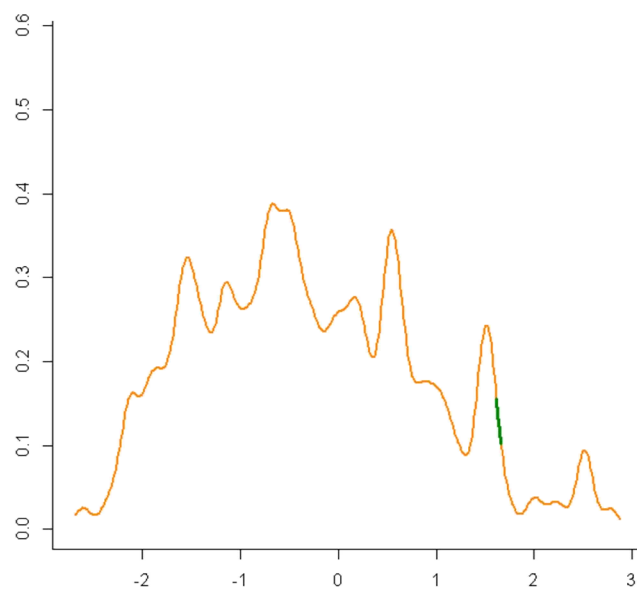
286 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , grad



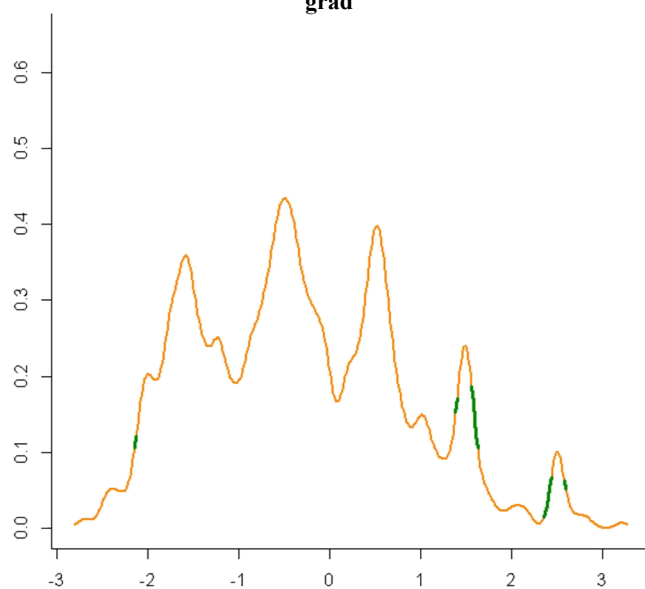
287 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , grad



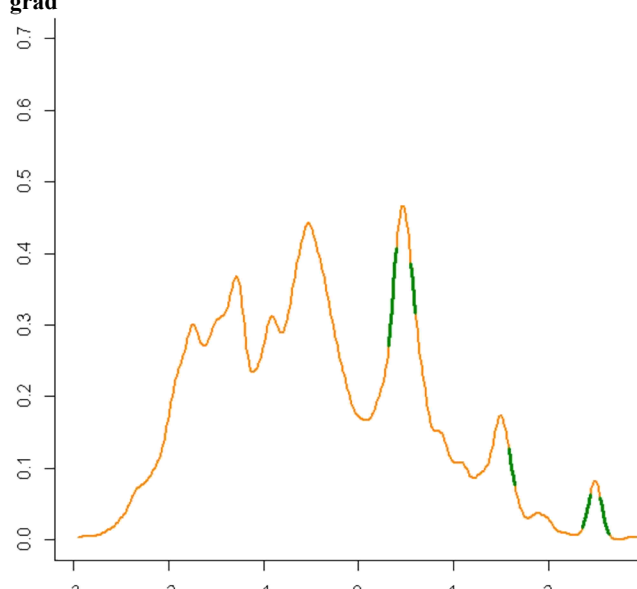
288 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , grad



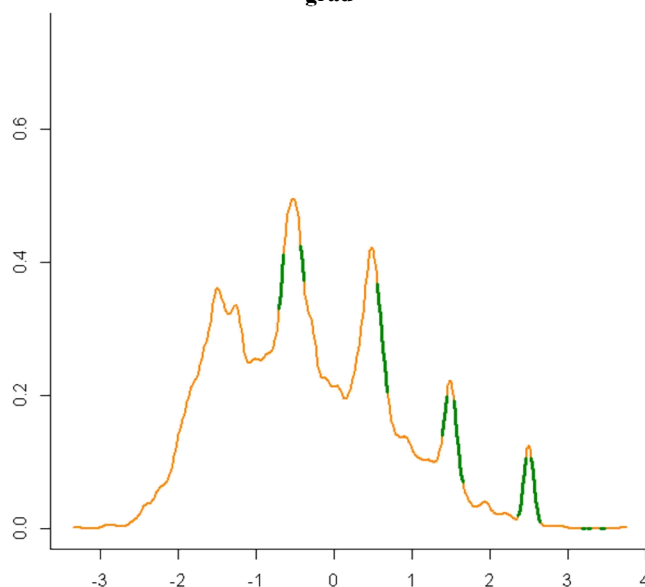
289 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , grad



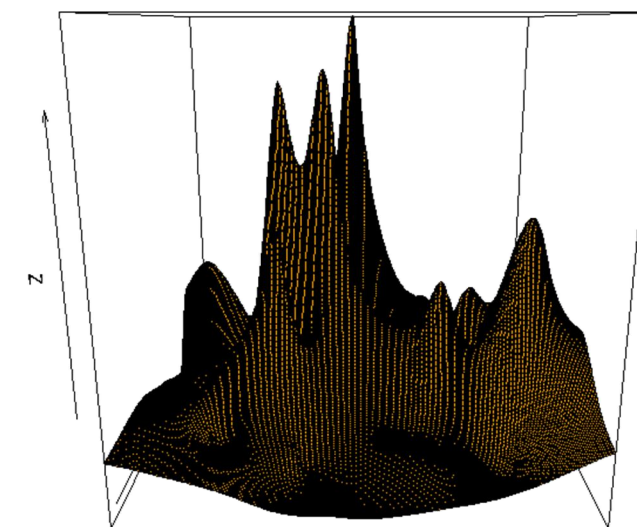
290 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , grad



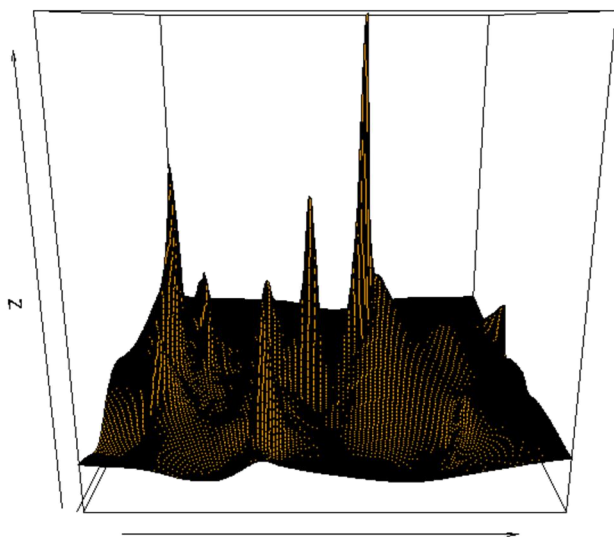
291 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , grad



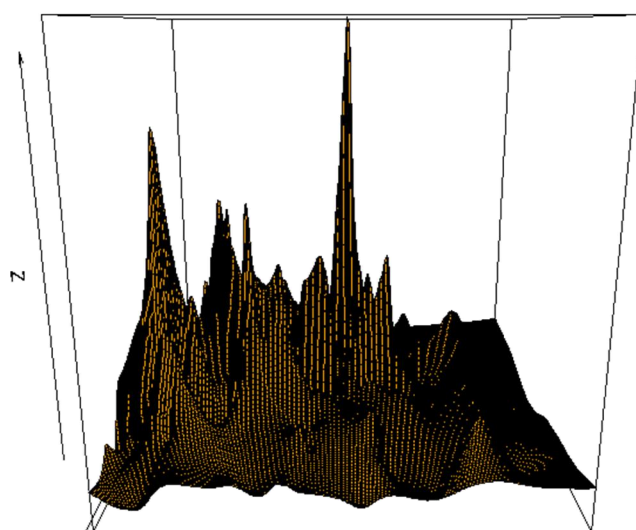
292 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , grad



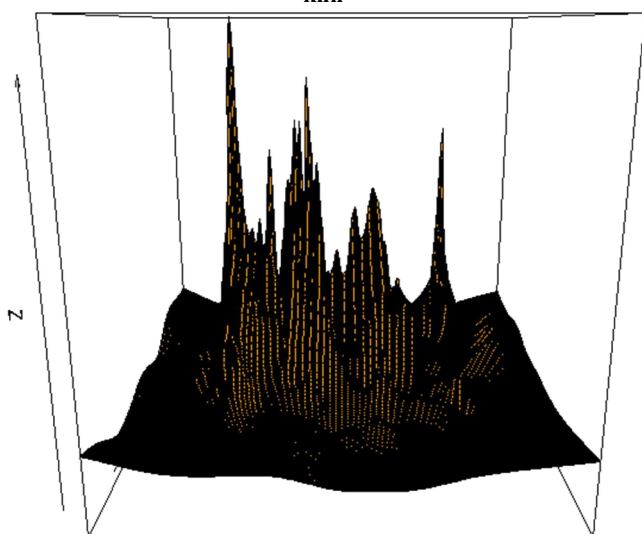
293 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , knn



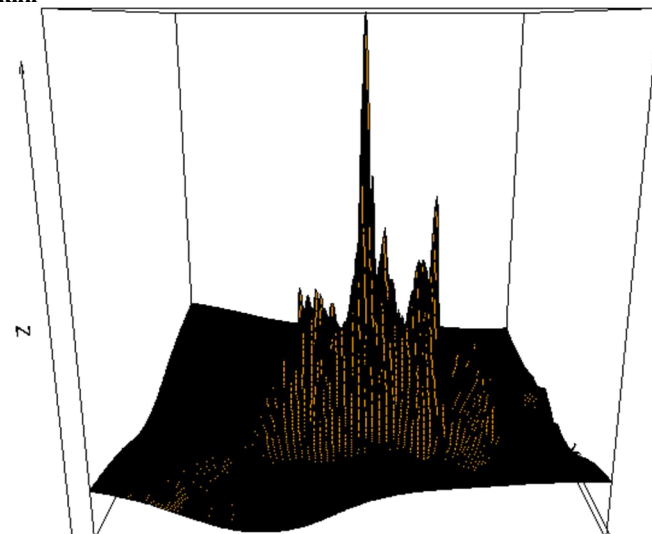
294 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ ,  $knn$



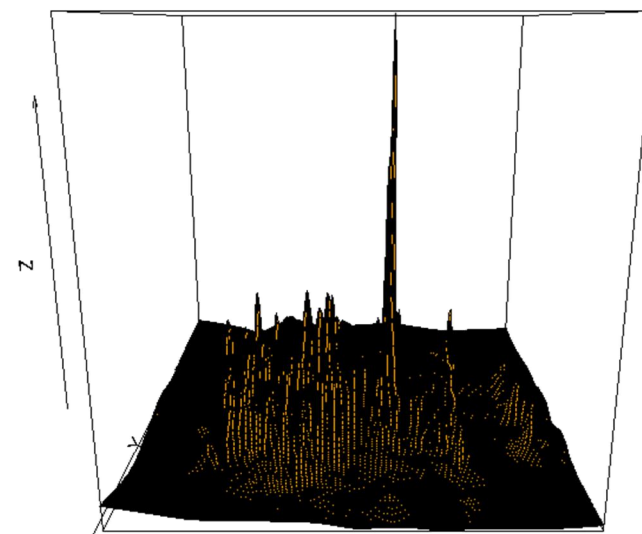
295 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ ,  $knn$



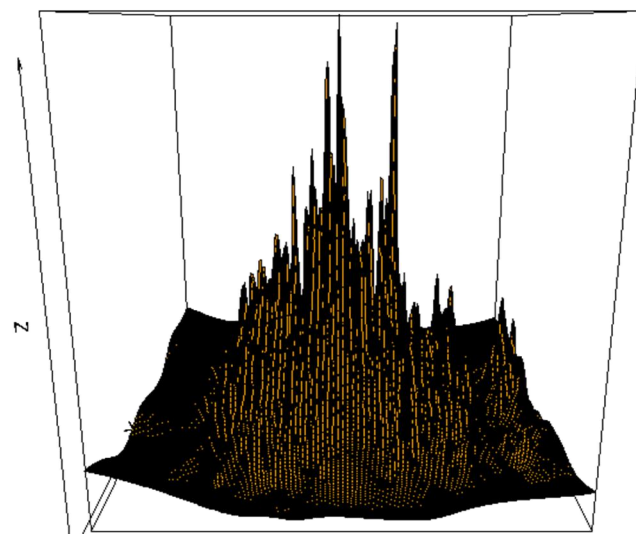
296 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ ,  $knn$



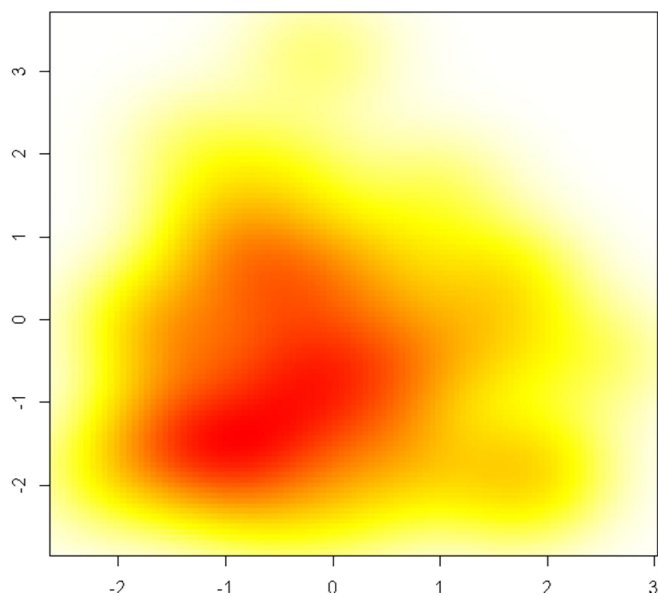
297 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ ,  $knn$



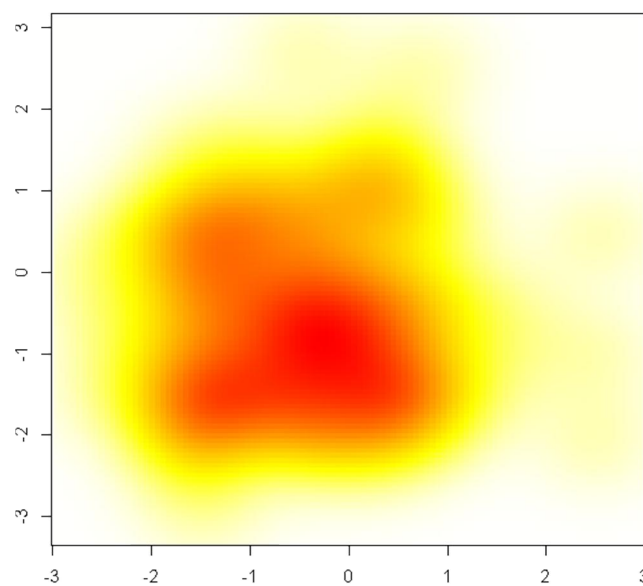
298 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ ,  $knn$



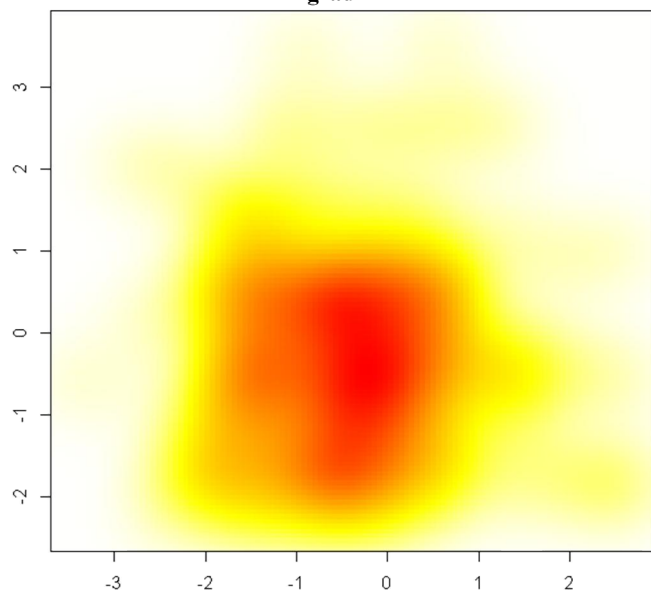
299 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ ,  $knn$



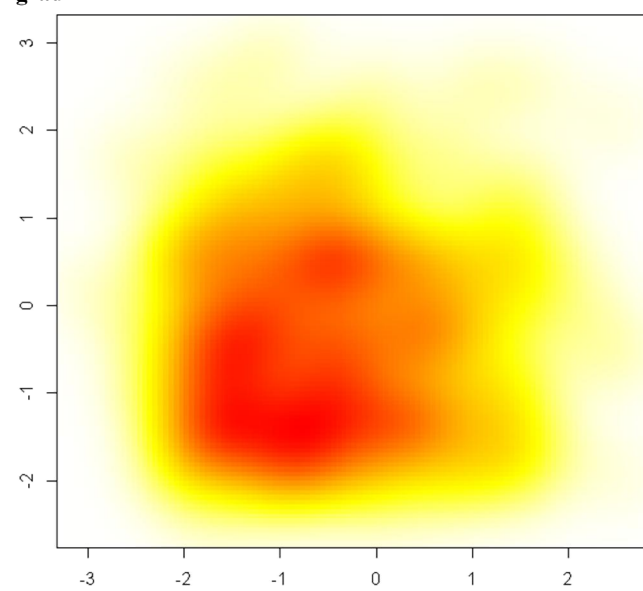
300 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , grad



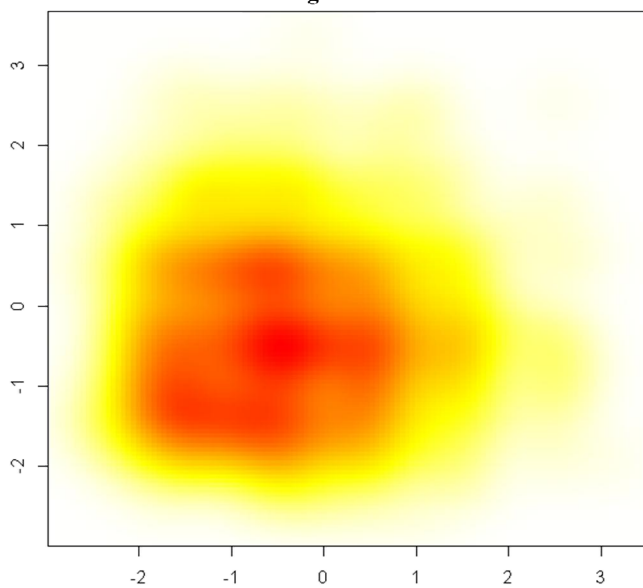
301 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , grad



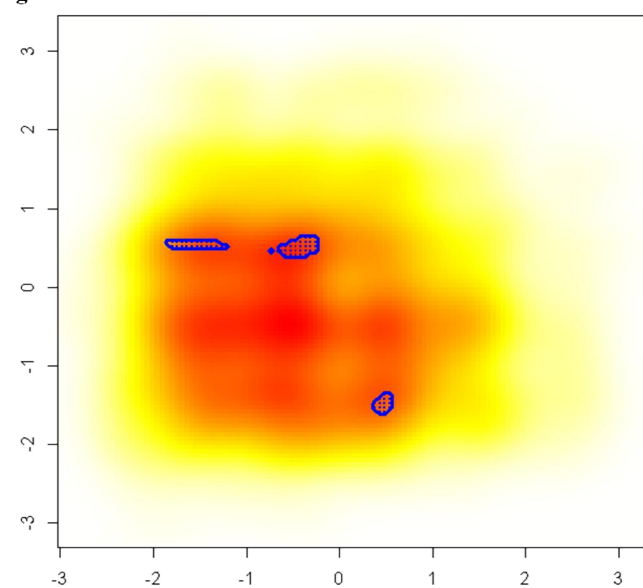
302 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , grad



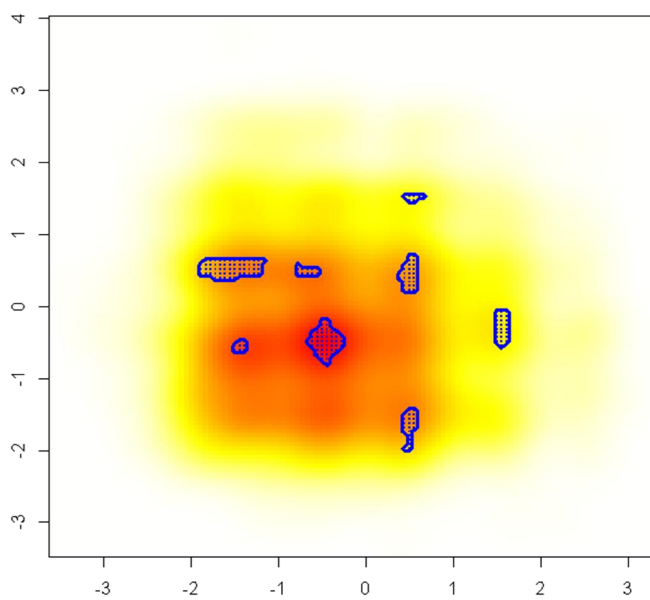
303 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , grad



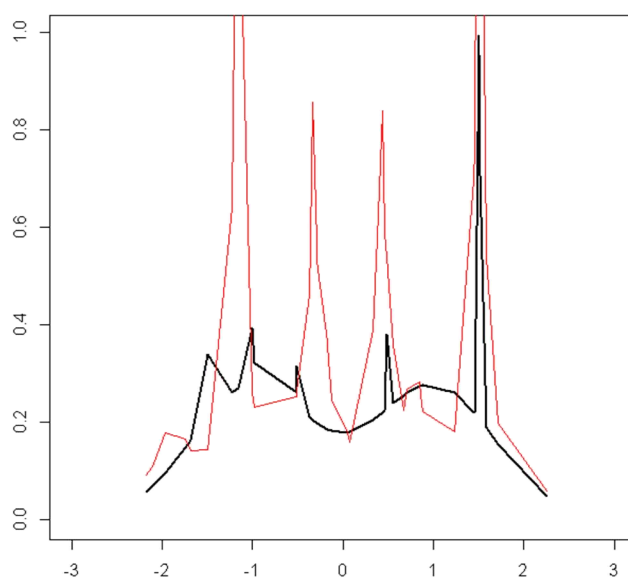
304 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , grad



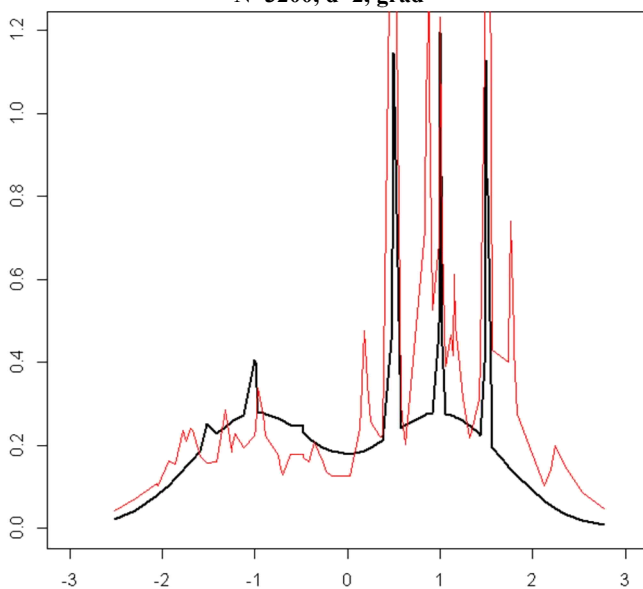
305 pav. Asimetrinių „žnyplių“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , grad



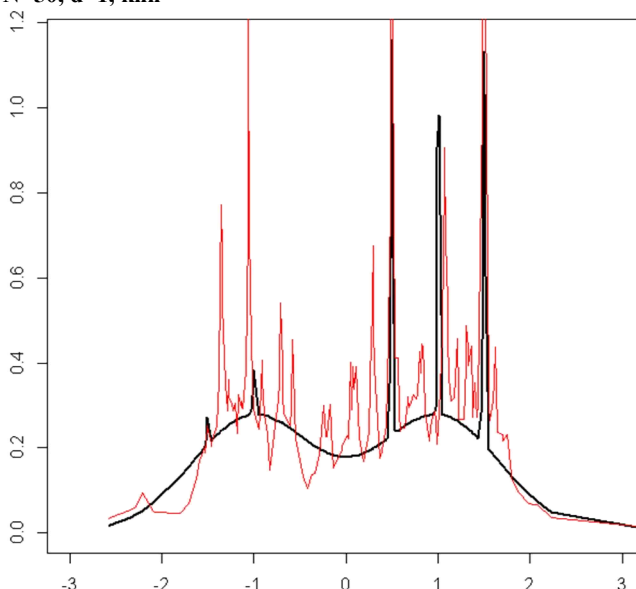
306 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=3200, d=2, grad



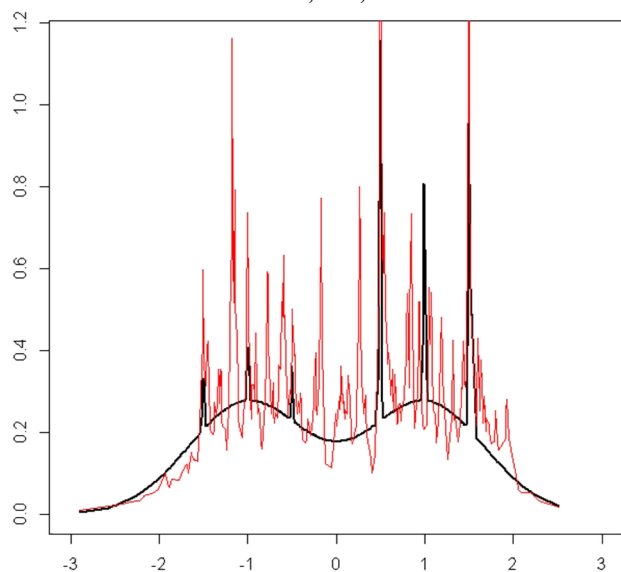
307 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=50, d=1, knn



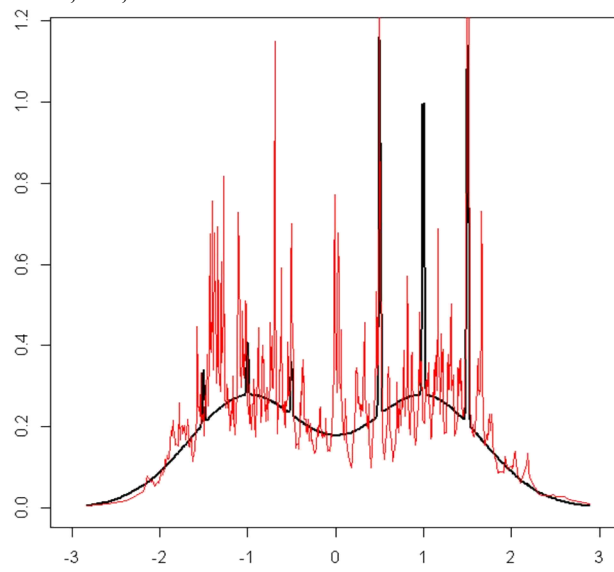
308 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=100, d=1, knn



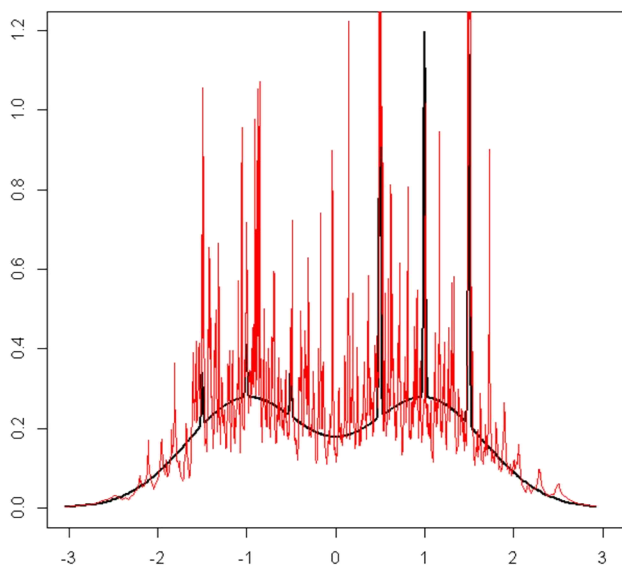
309 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=200, d=1, knn



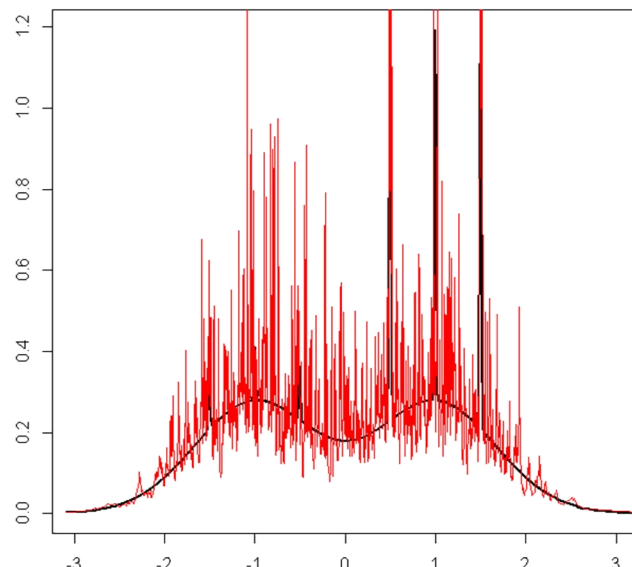
310 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=400, d=1, knn



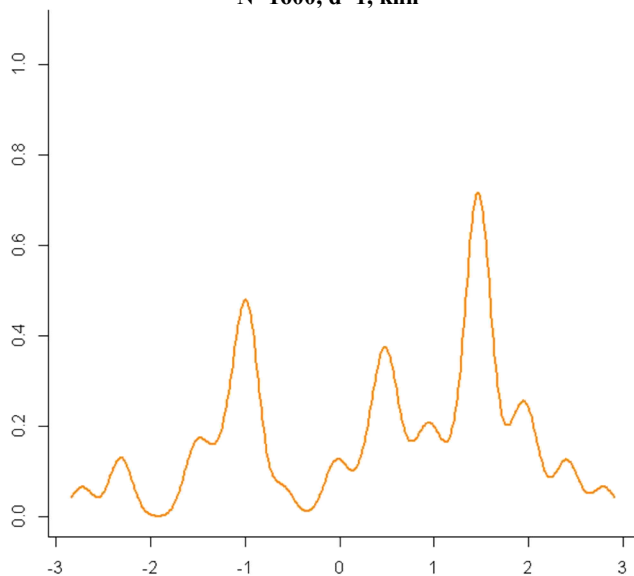
311 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=800, d=1, knn



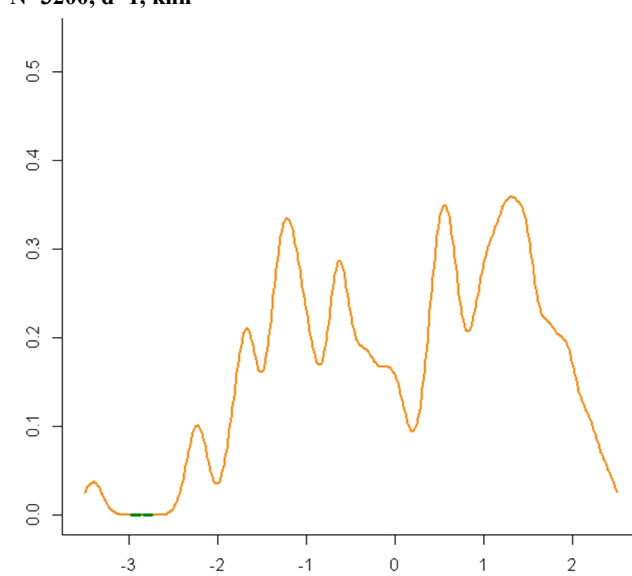
312 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=1600, d=1, knn



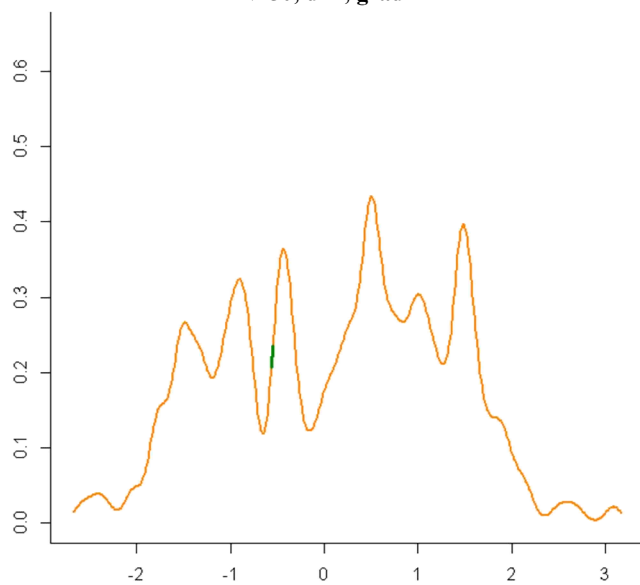
313 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=3200, d=1, knn



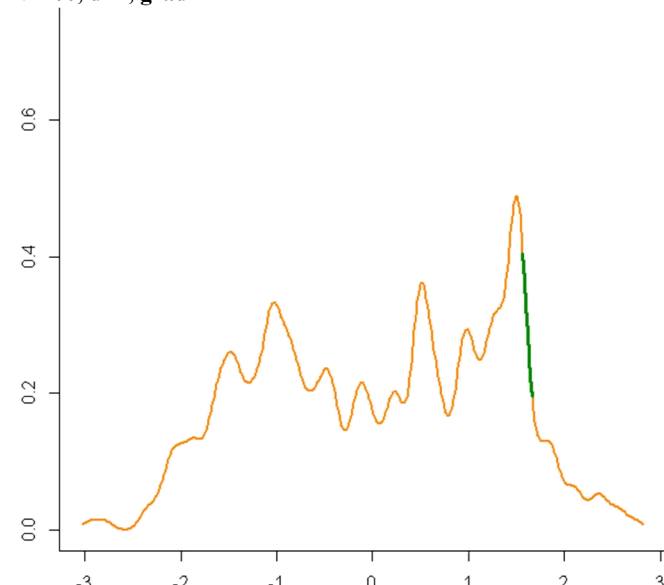
314 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=50, d=1, grad



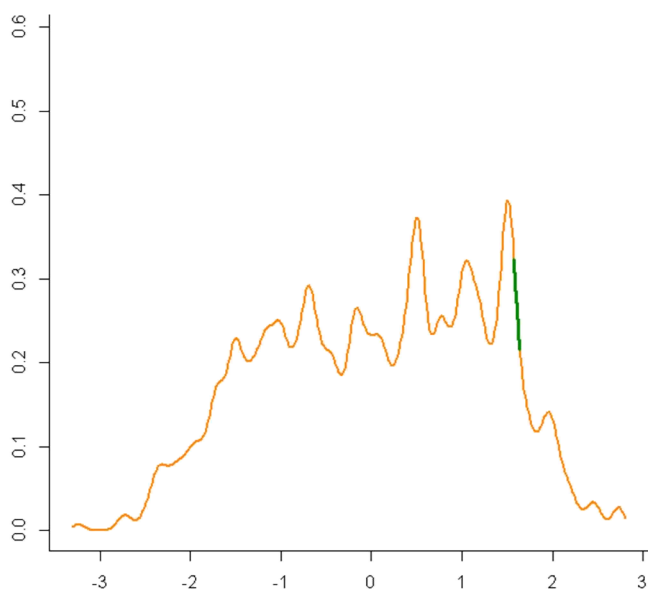
315 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=100, d=1, grad



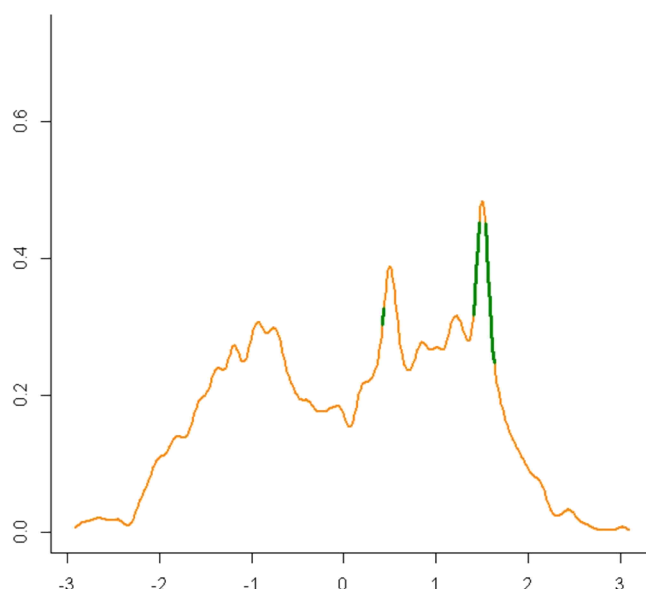
316 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=200, d=1, grad



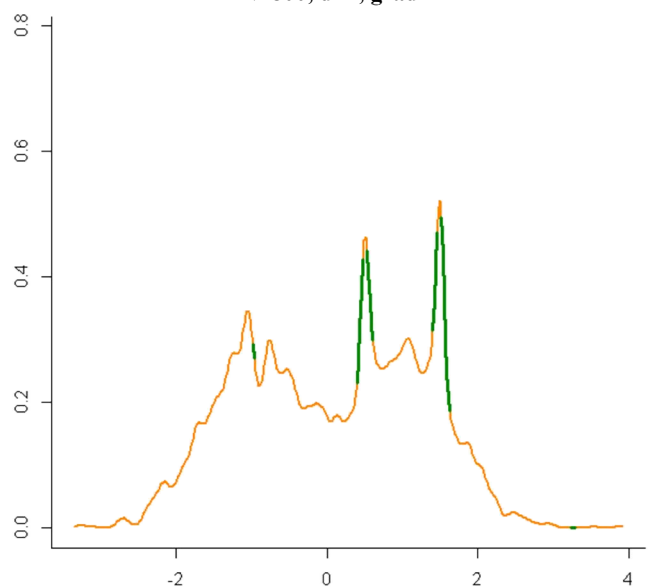
317 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=400, d=1, grad



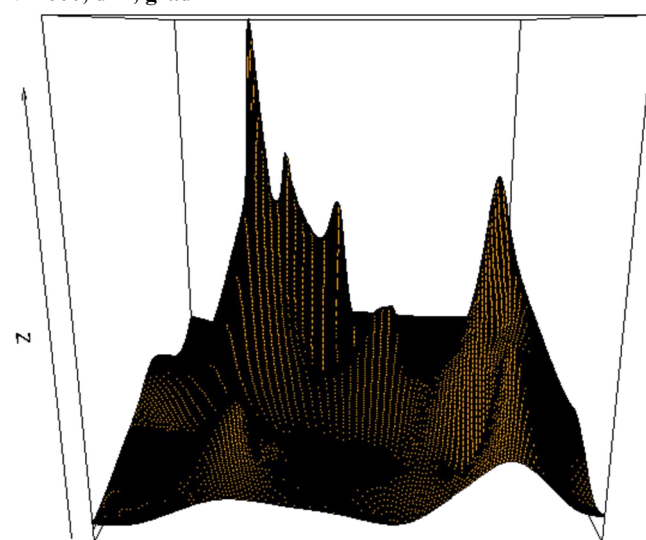
318 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=800, d=1, grad



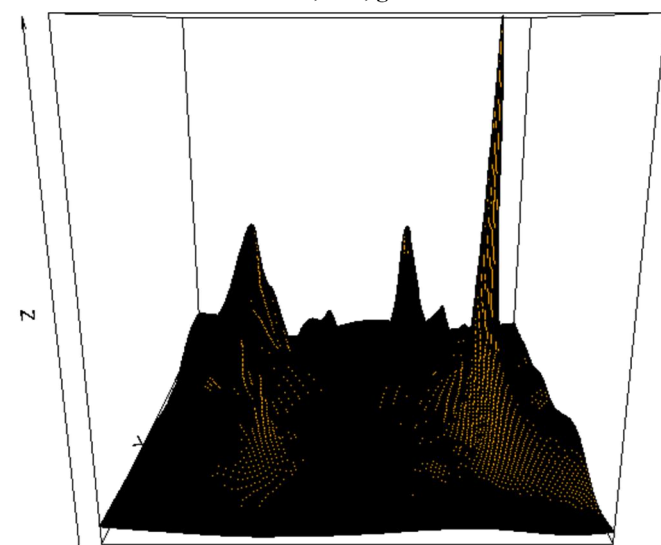
319 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=1600, d=1, grad



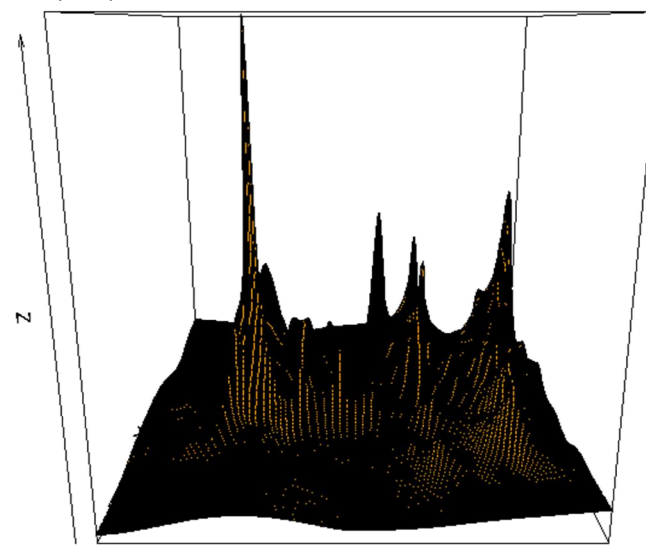
320 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=3200, d=1, grad



321 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=50, d=2, knn

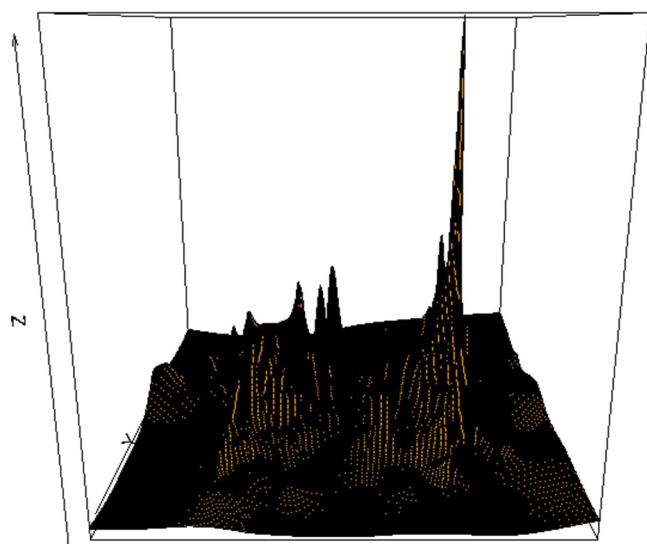


322 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=100, d=2, knn

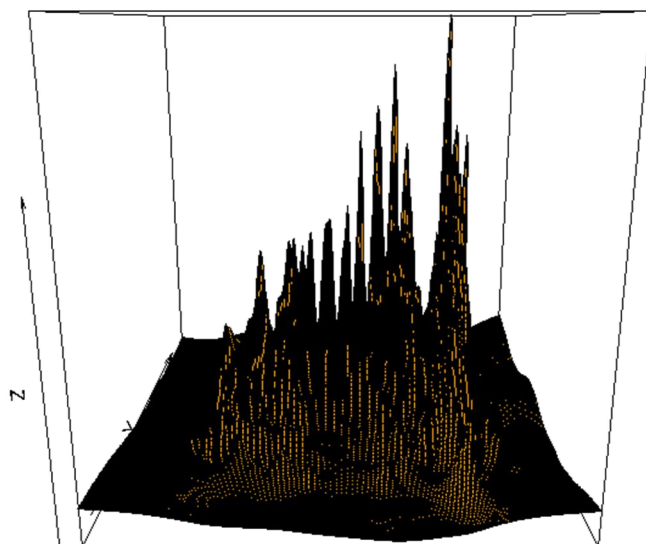


323 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=200, d=2, knn

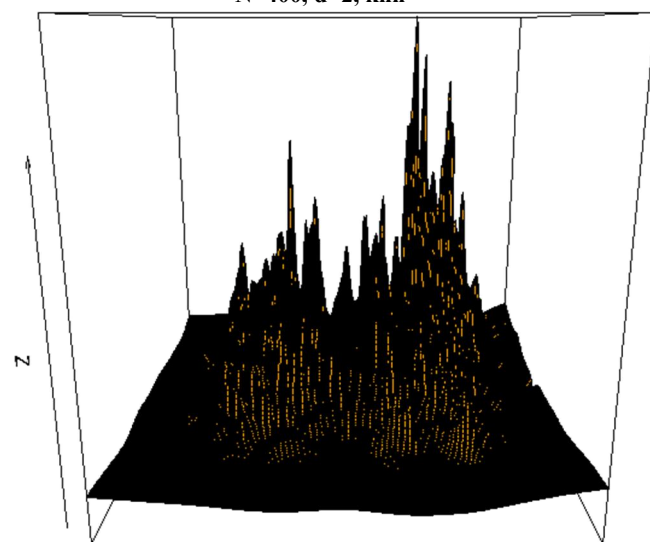




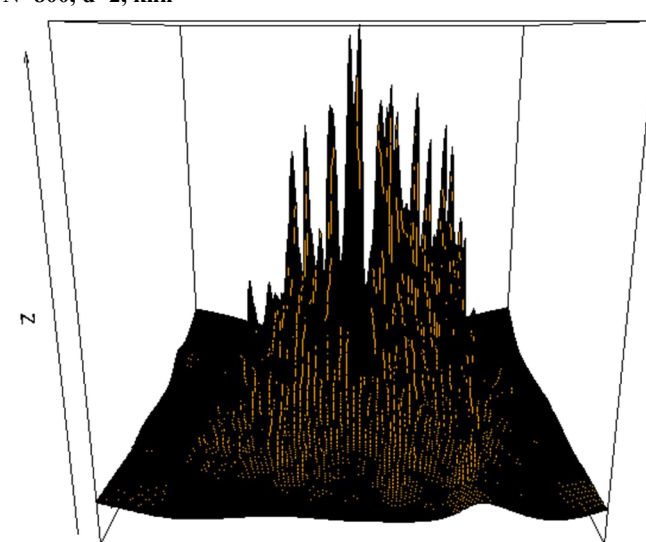
324 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=400, d=2, knn



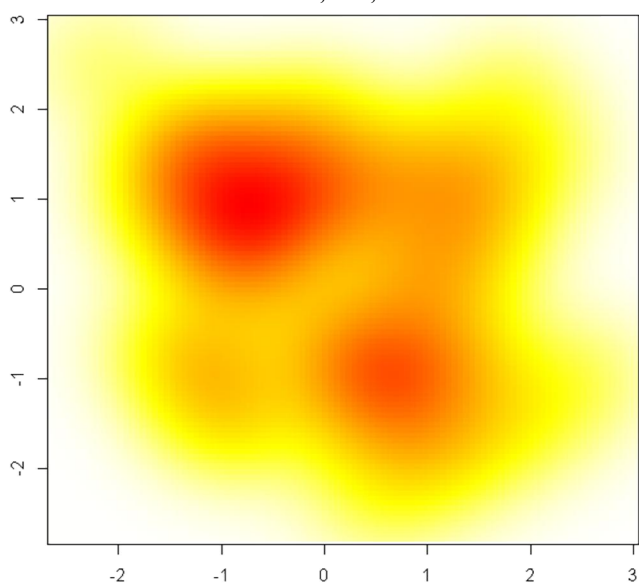
325 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=800, d=2, knn



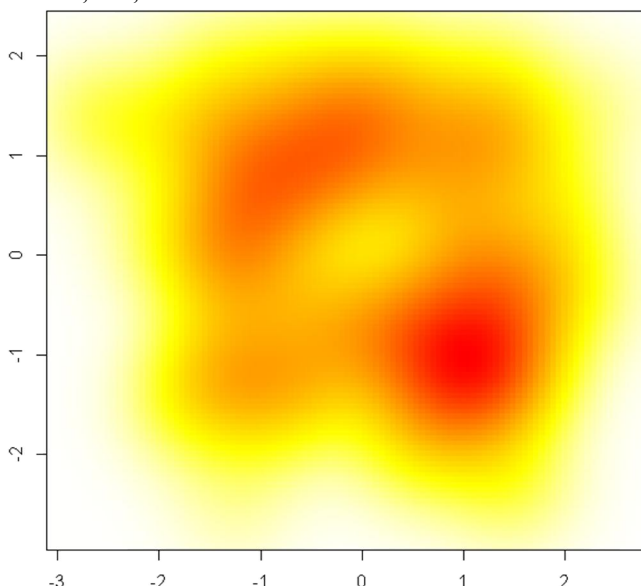
326 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=1600, d=2, knn



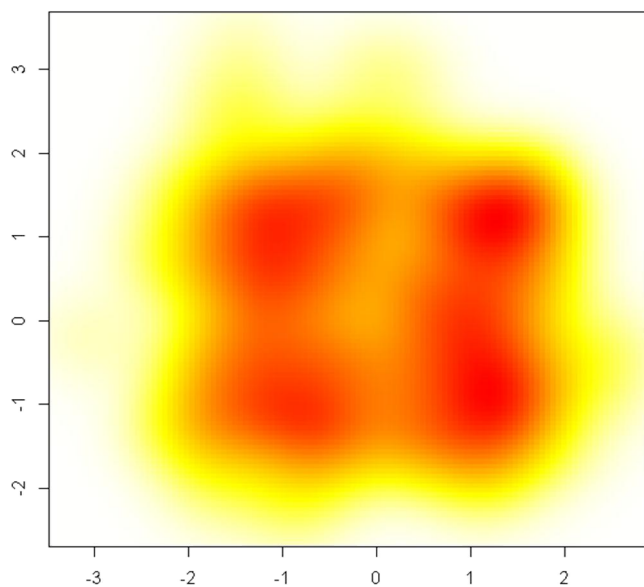
327 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=3200, d=2, knn



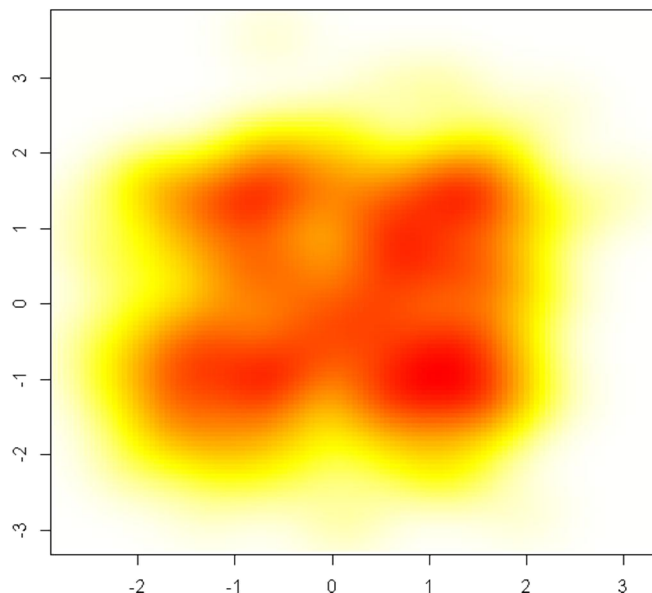
328 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=50, d=2, grad



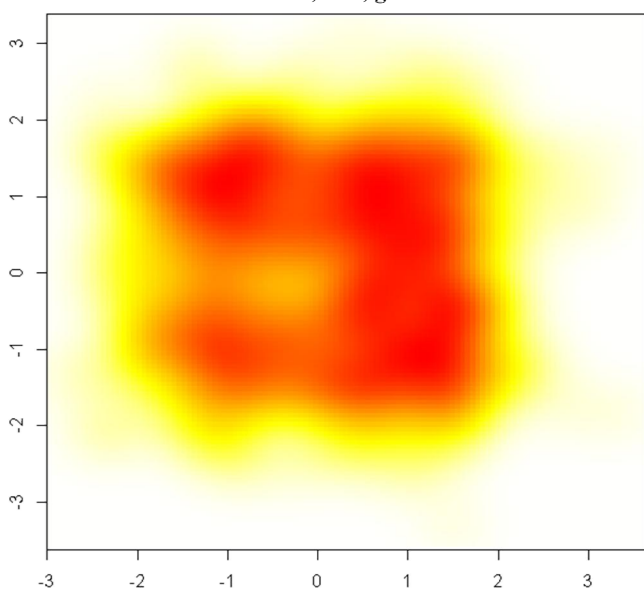
329 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=100, d=2, grad



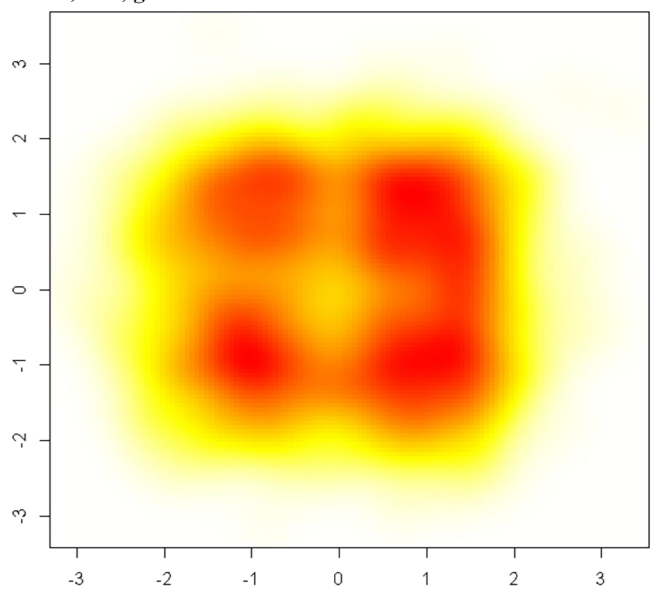
330 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=200, d=2, grad



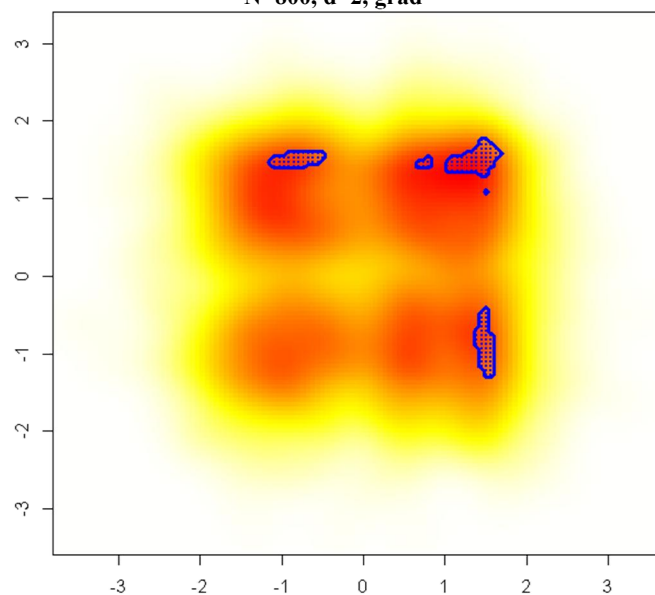
331 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=400, d=2, grad



332 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=800, d=2, grad

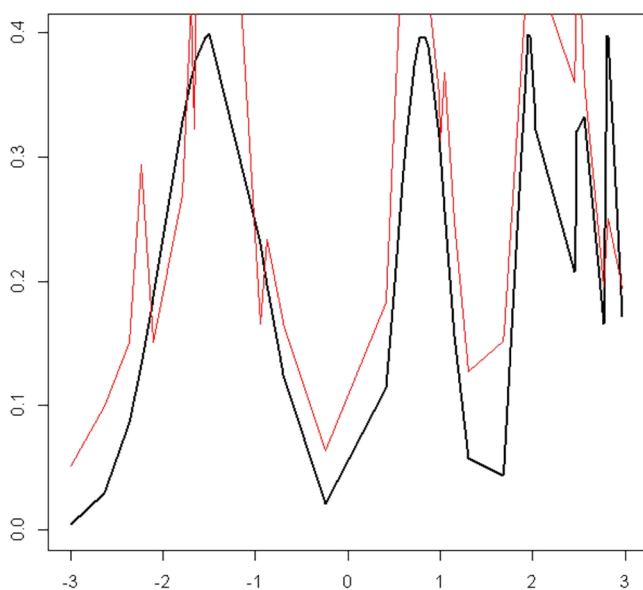


333 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=1600, d=2, grad

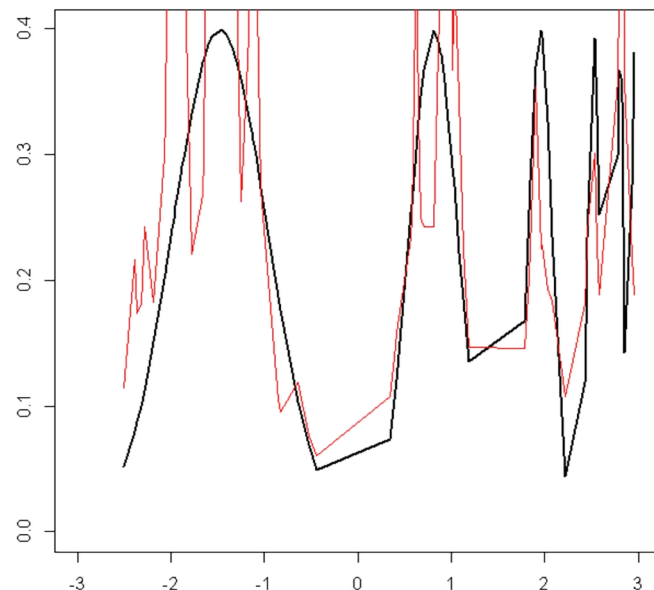


334 pav. Asimetrinių dvigubų „žnyplių“ mišinio grafikas,  
N=3200, d=2, grad

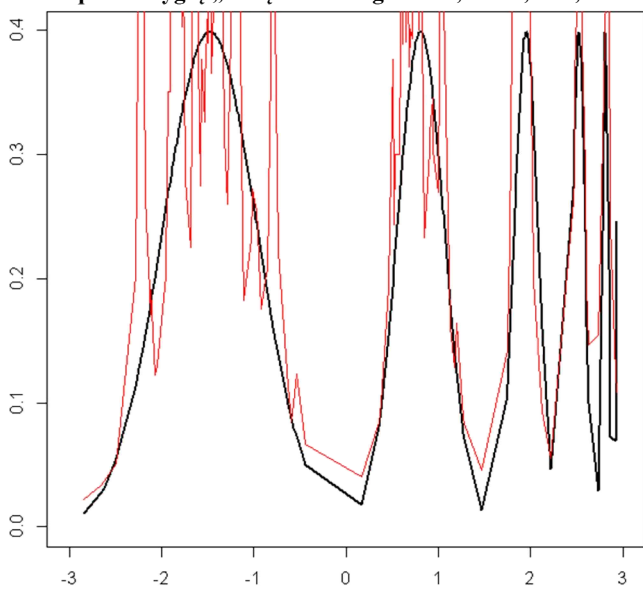
## 2 PRIEDAS. KONKRETAUS MIŠINIO TYRIMO REZULTATAI KINTANT IMTIES TŪRIUI IR DIMENSIJAI



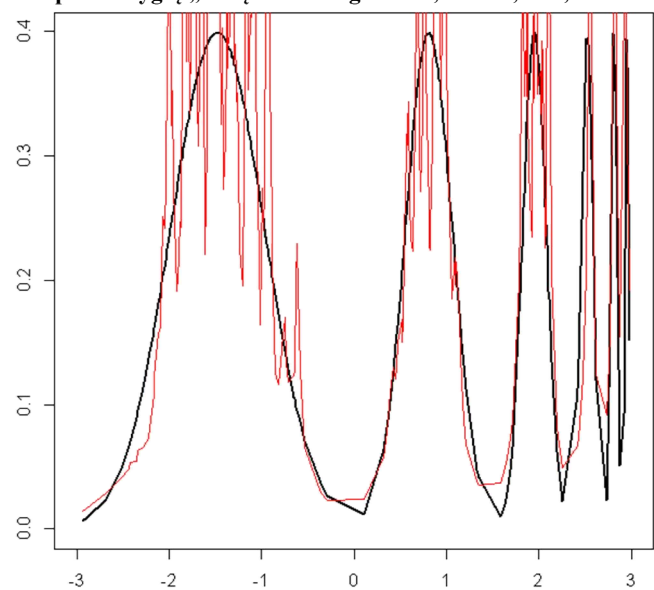
335 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , knn



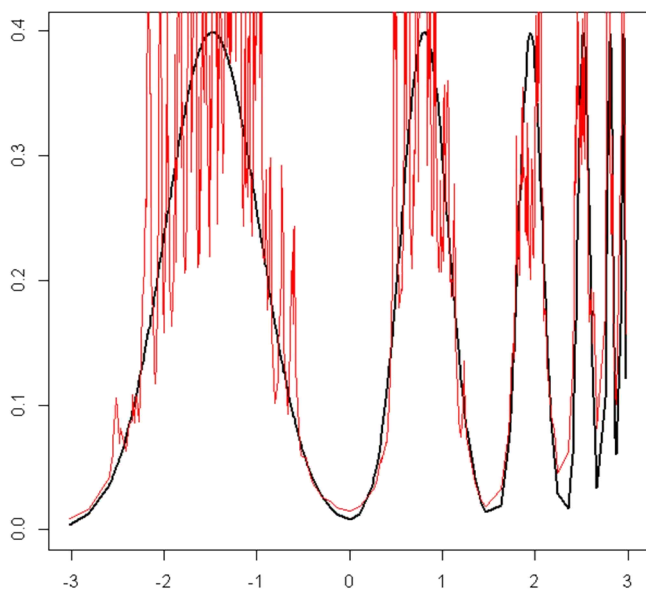
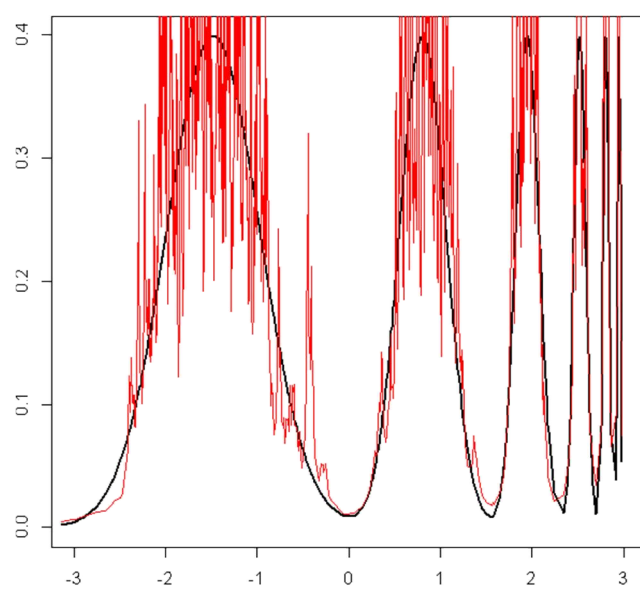
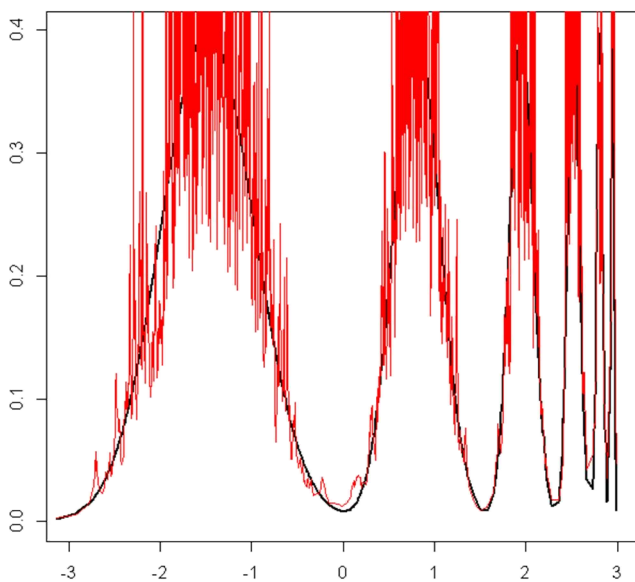
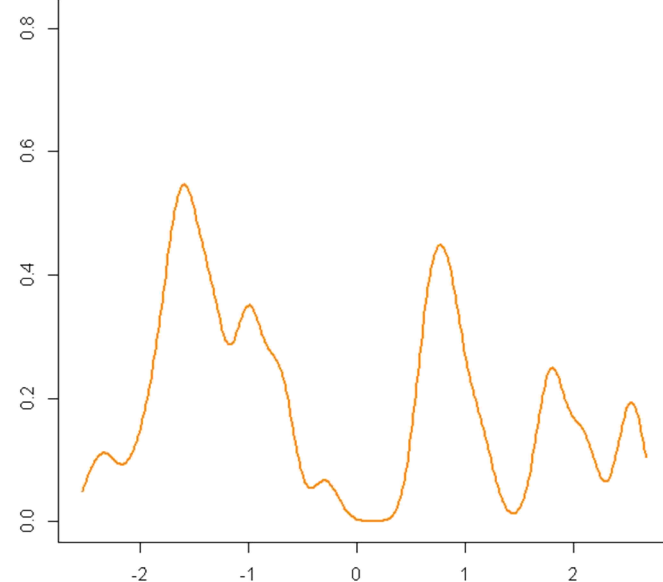
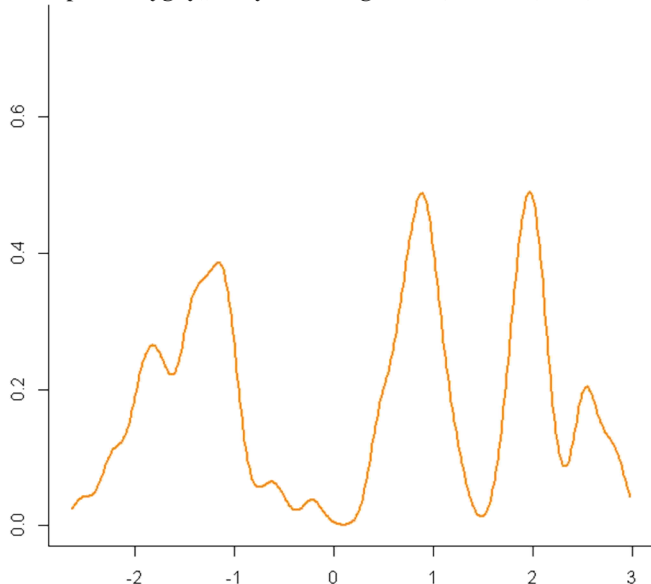
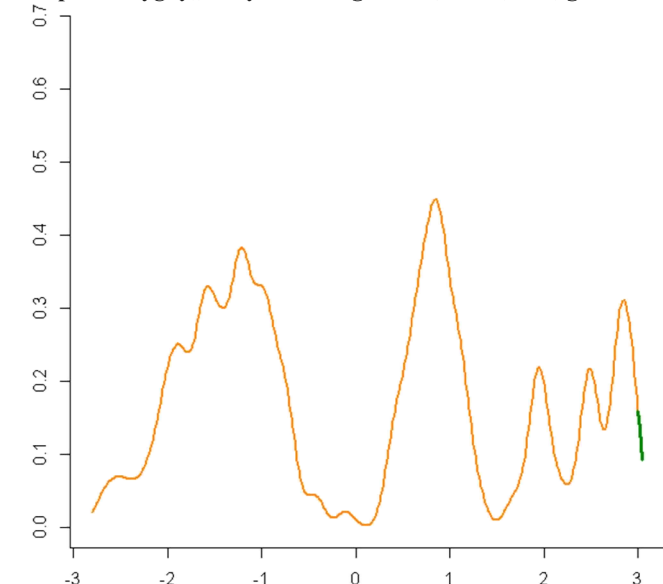
336 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , knn

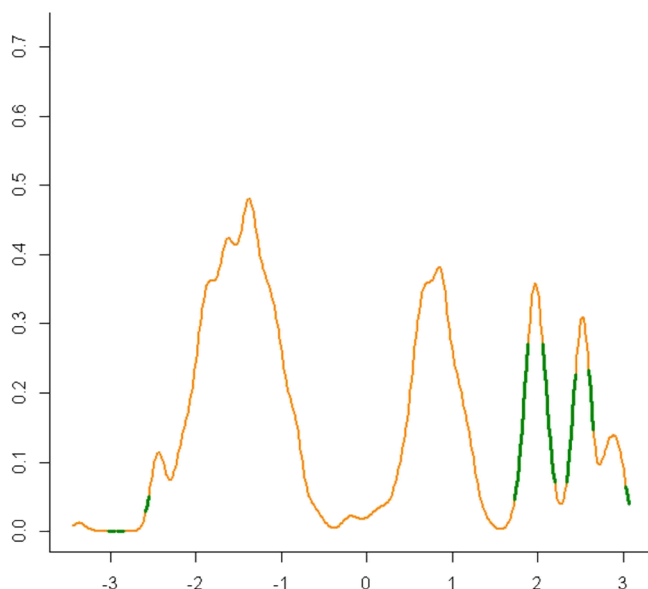
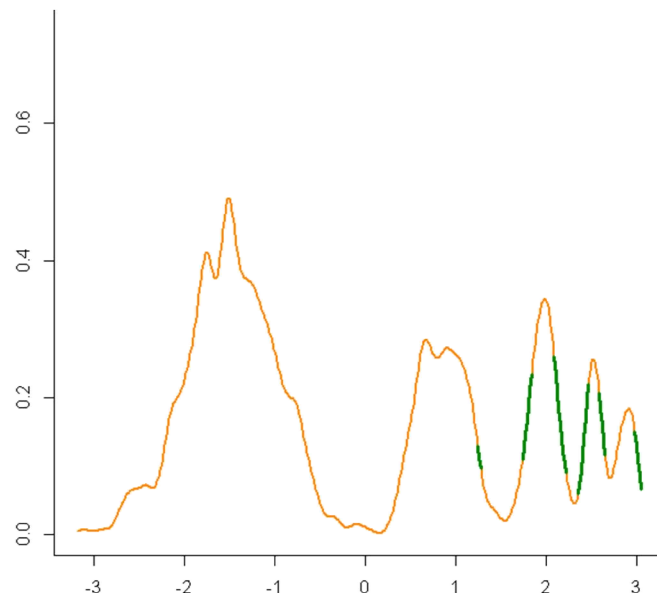
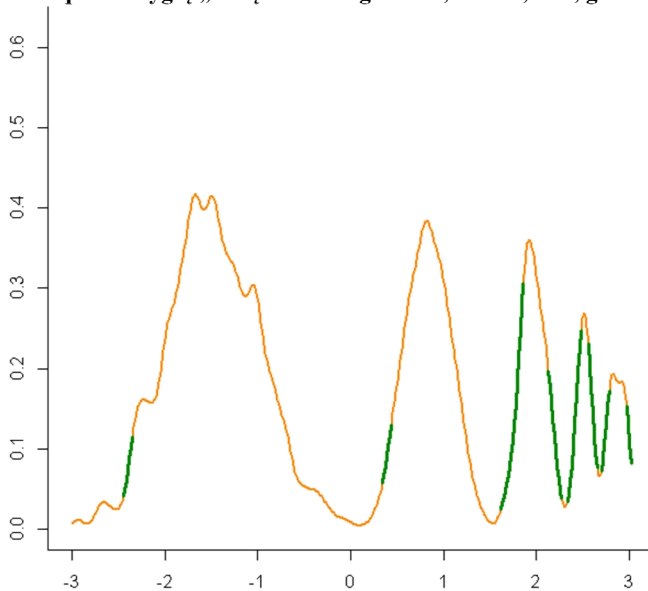
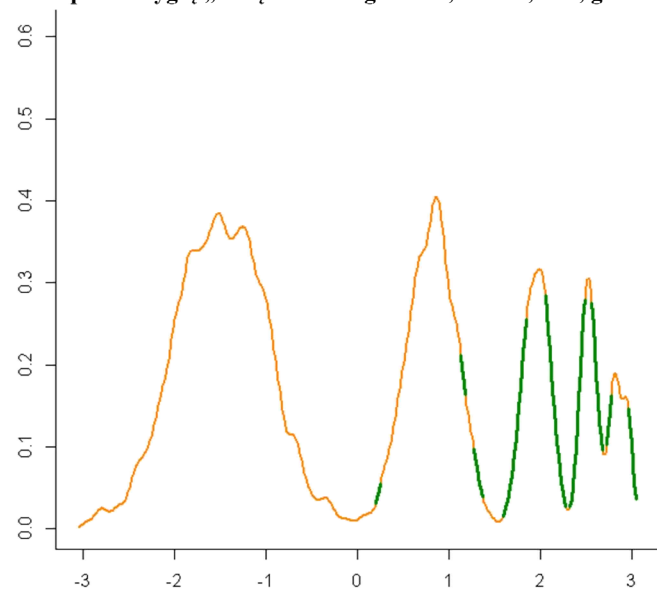
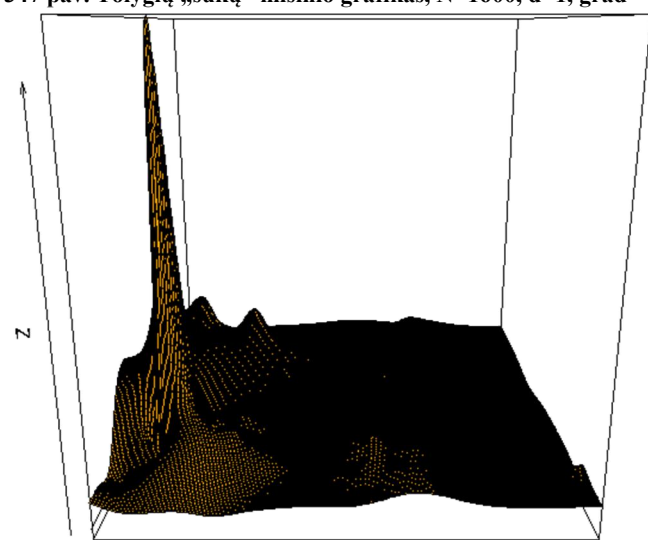
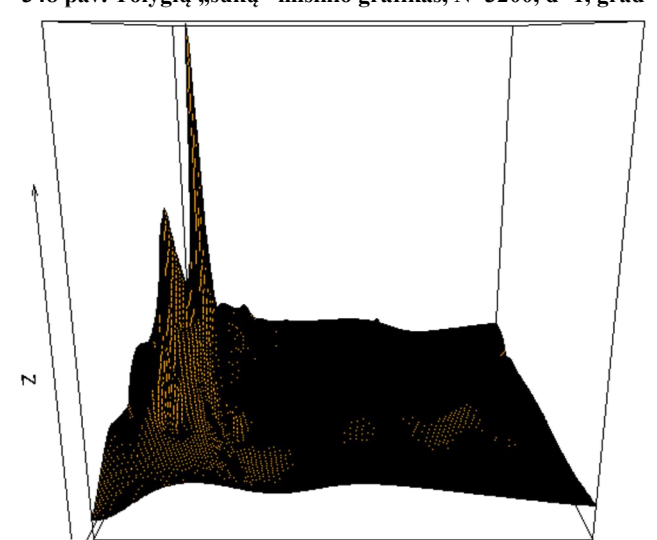


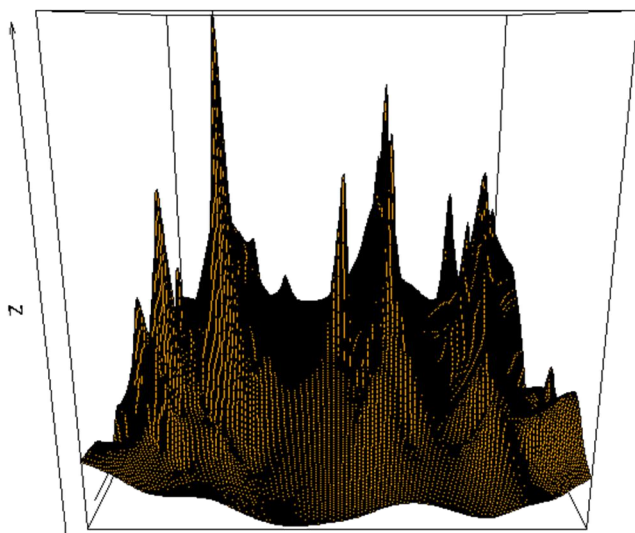
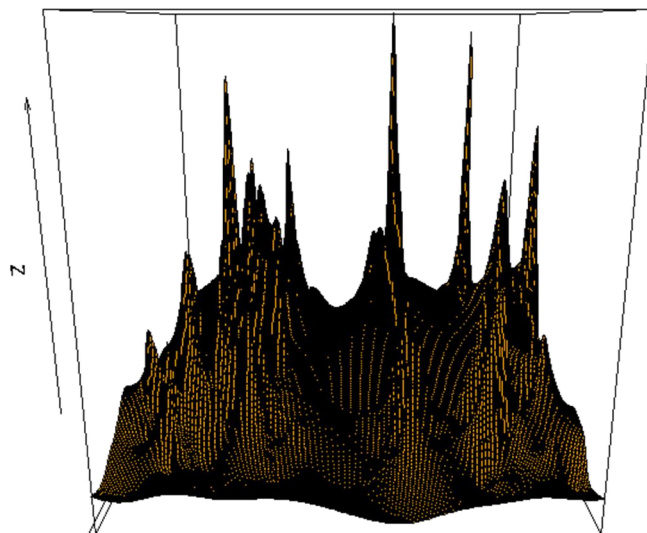
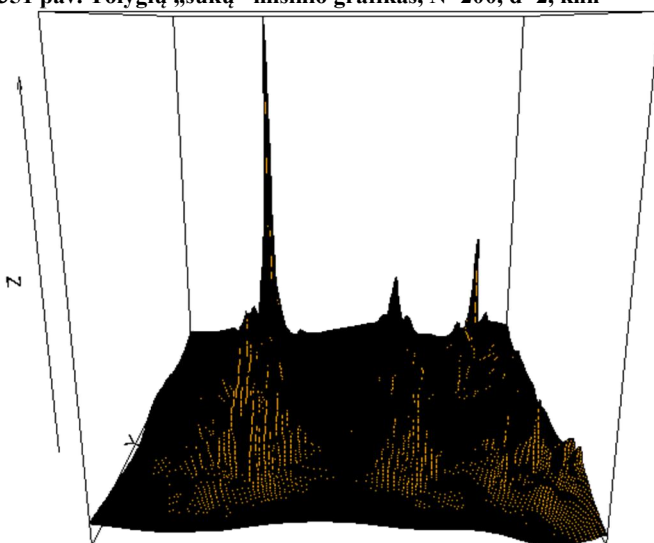
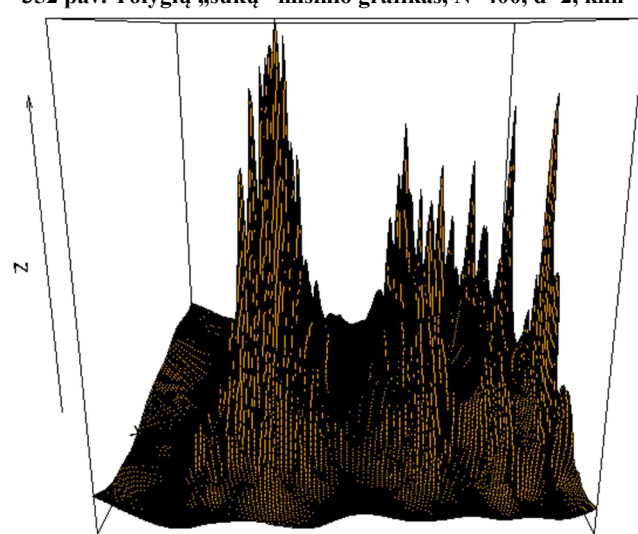
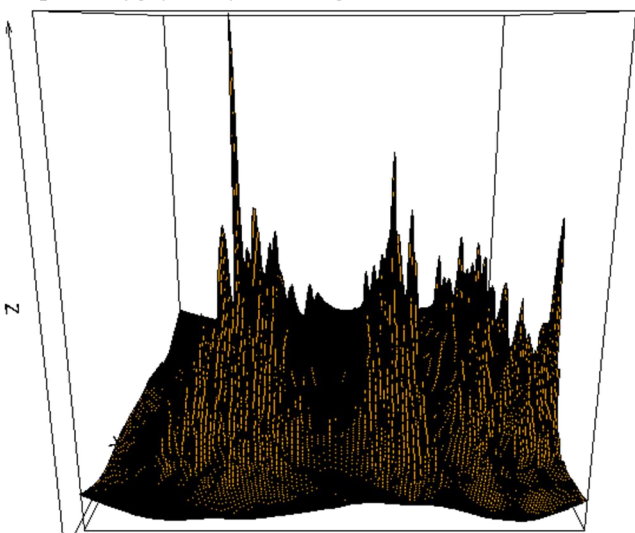
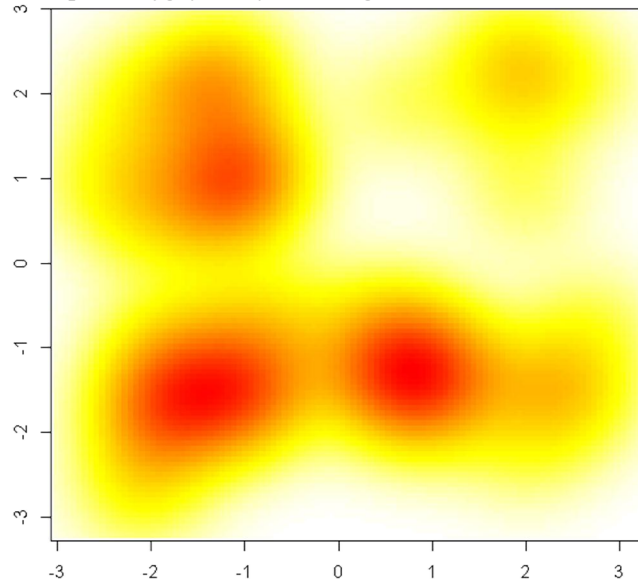
337 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , knn

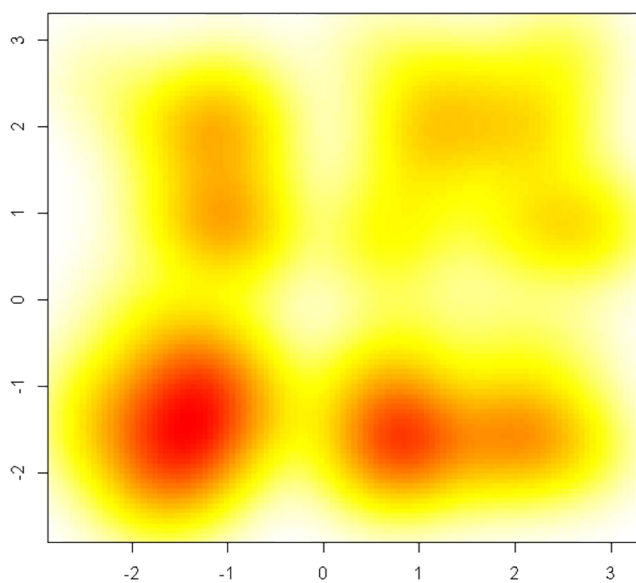
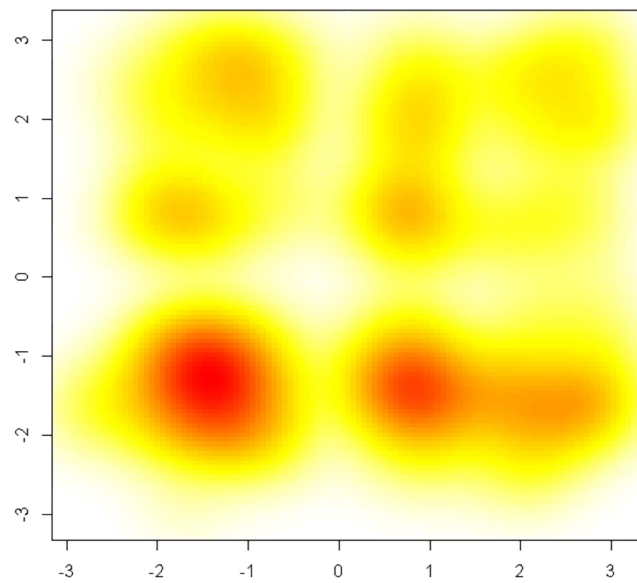
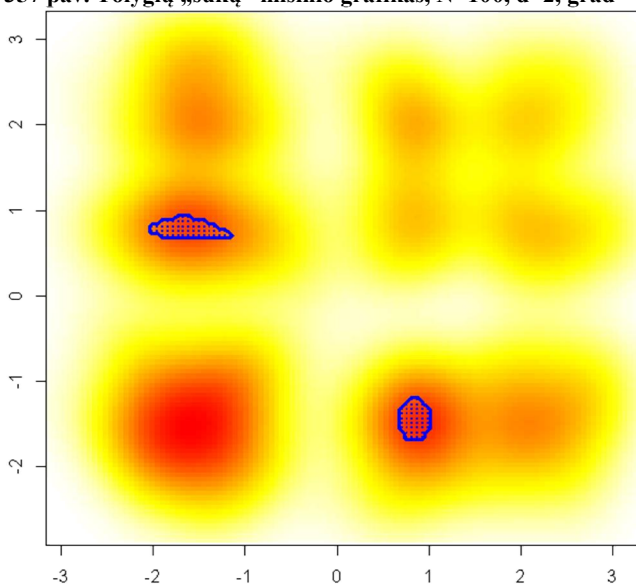
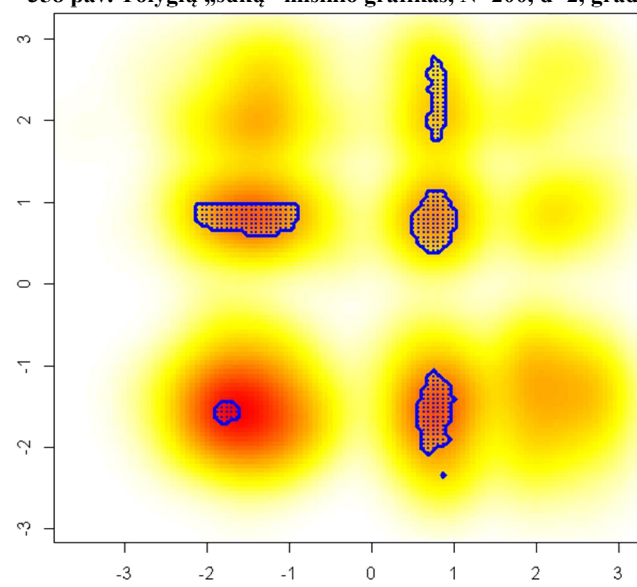
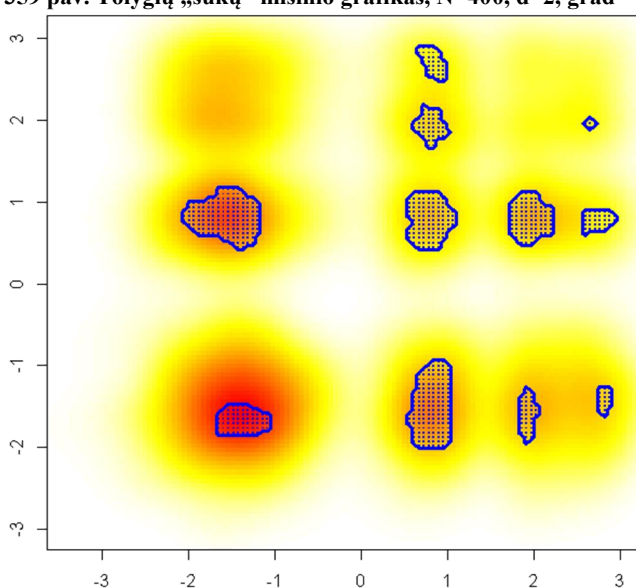
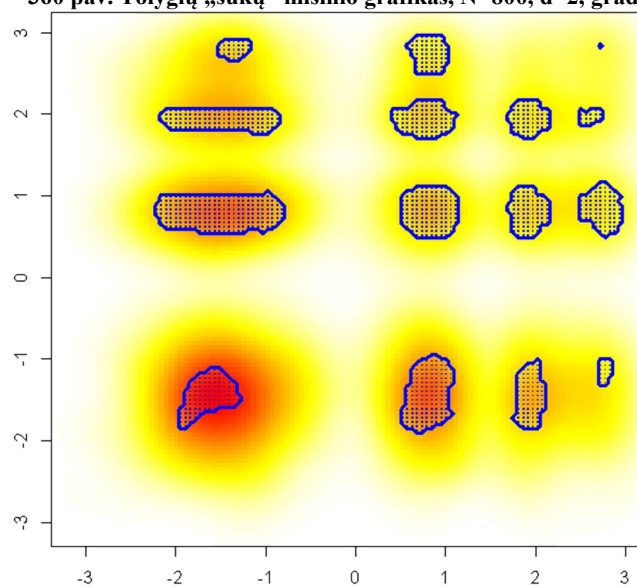


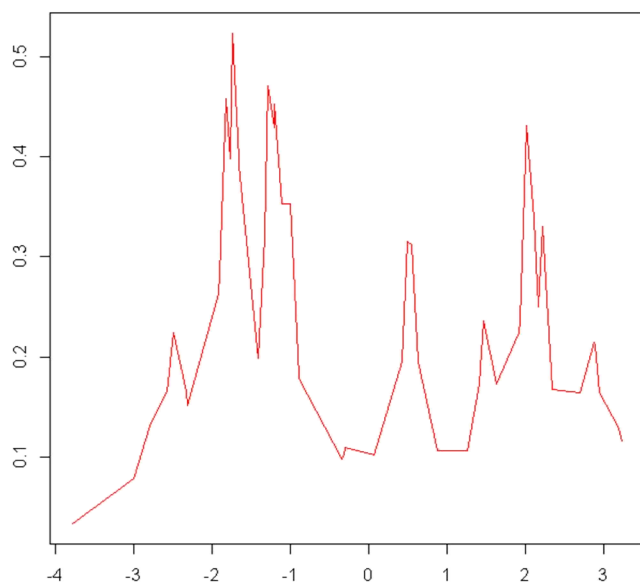
338 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , knn

339 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , knn340 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , knn341 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , knn342 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=1$ , grad343 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=1$ , grad344 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=1$ , grad

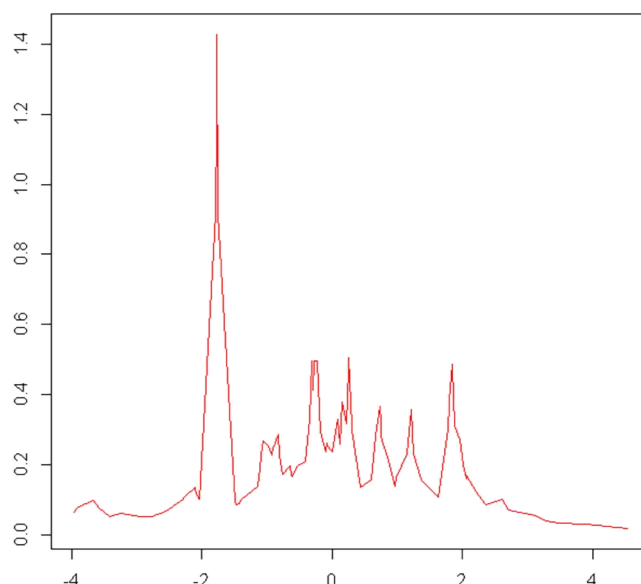
345 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=1$ , grad346 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=1$ , grad347 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=1$ , grad348 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=1$ , grad349 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , knn350 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , knn

351 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , knn352 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , knn353 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , knn354 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , knn355 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , knn356 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=2$ , grad

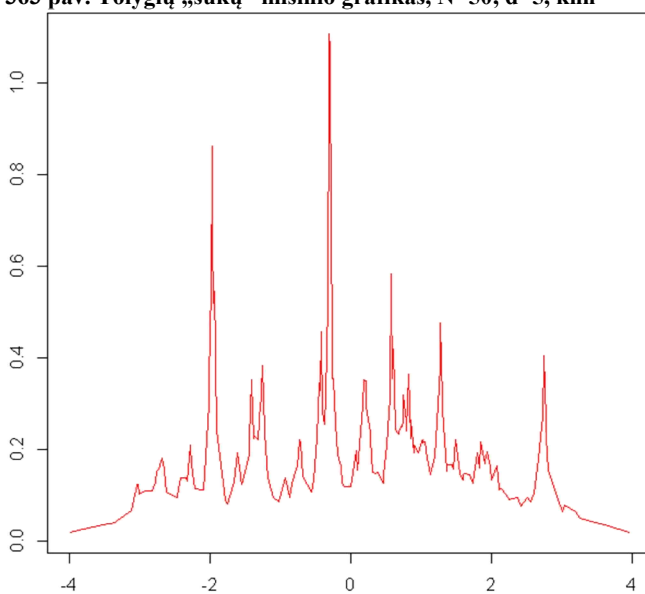
357 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=2$ , grad358 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=2$ , grad359 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=2$ , grad360 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=2$ , grad361 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=2$ , grad362 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=2$ , grad



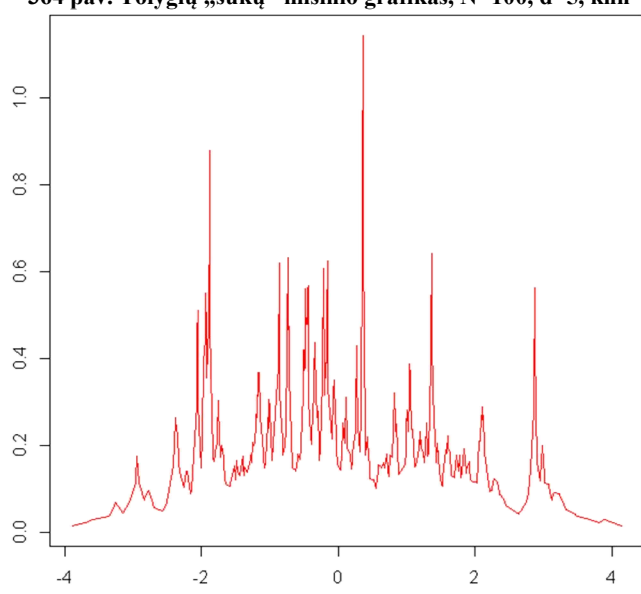
363 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=5$ , knn



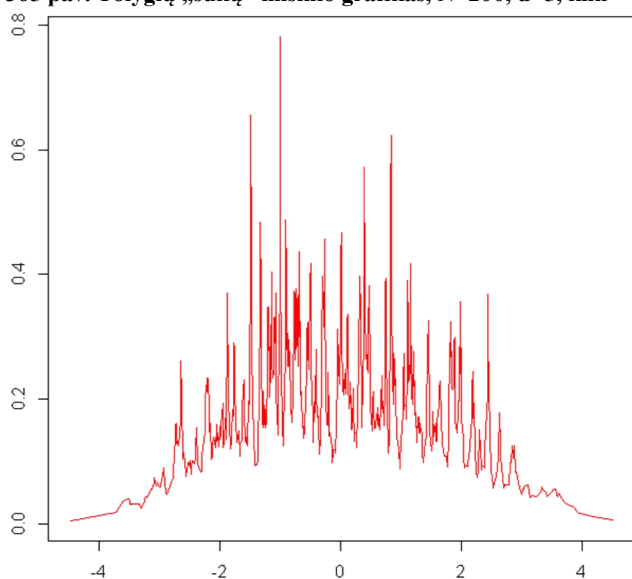
364 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=5$ , knn



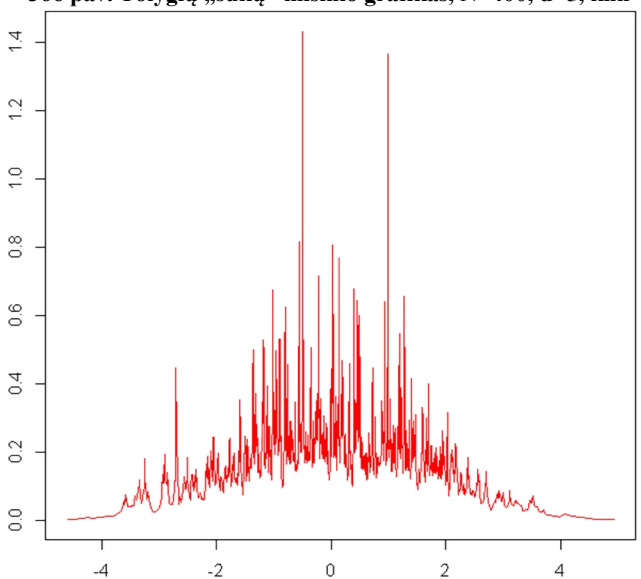
365 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=5$ , knn



366 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=5$ , knn

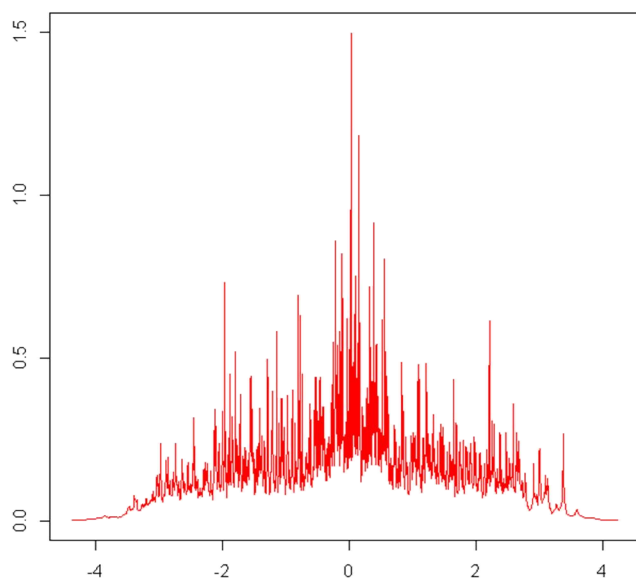


367 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=5$ , knn

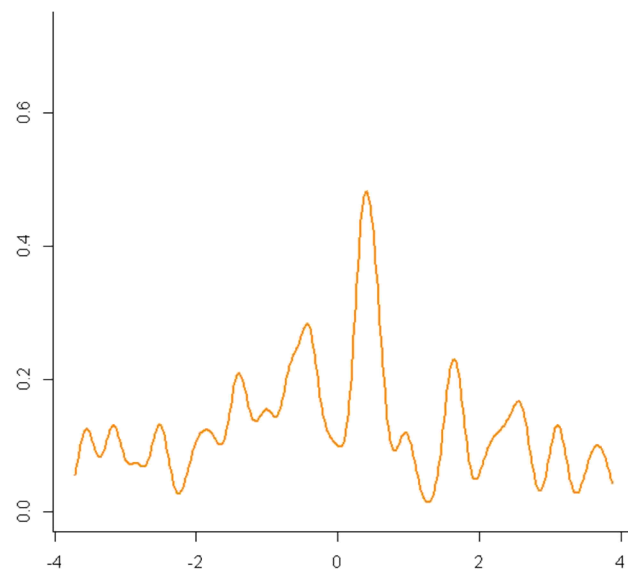


368 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=5$ , knn

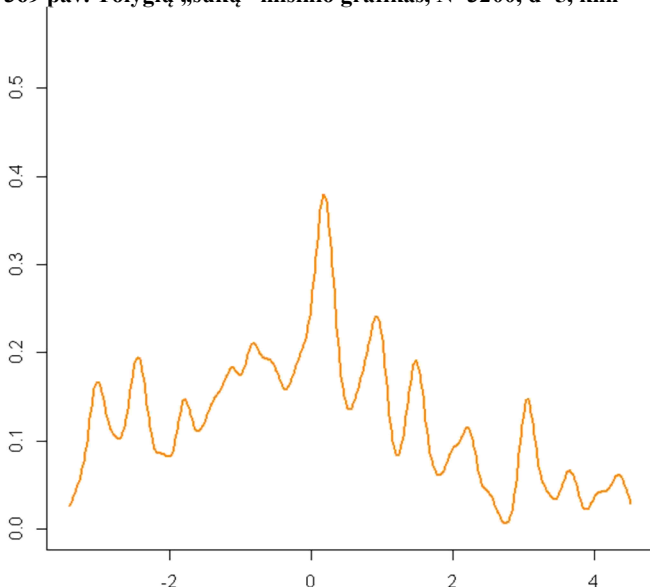




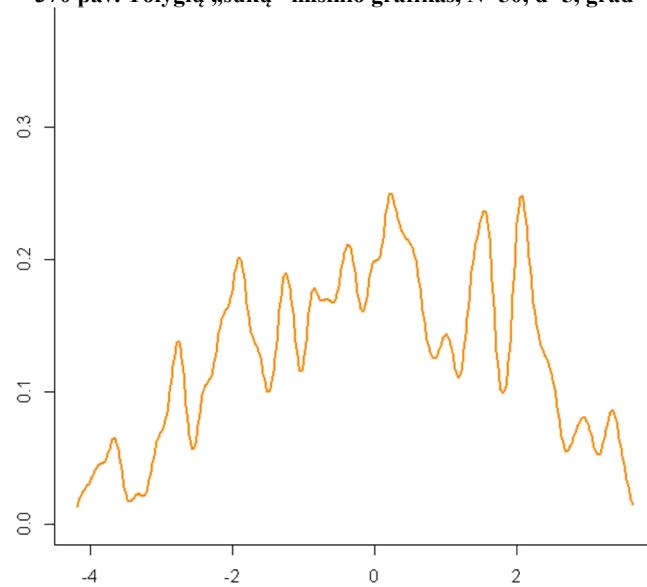
369 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=5$ , knn



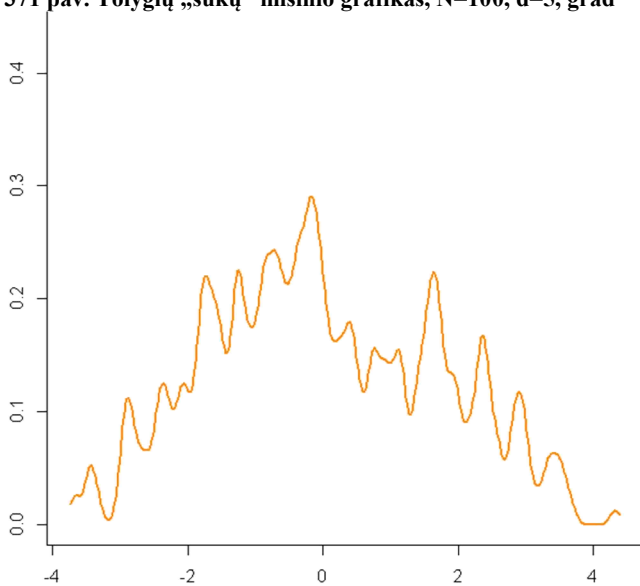
370 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=5$ , grad



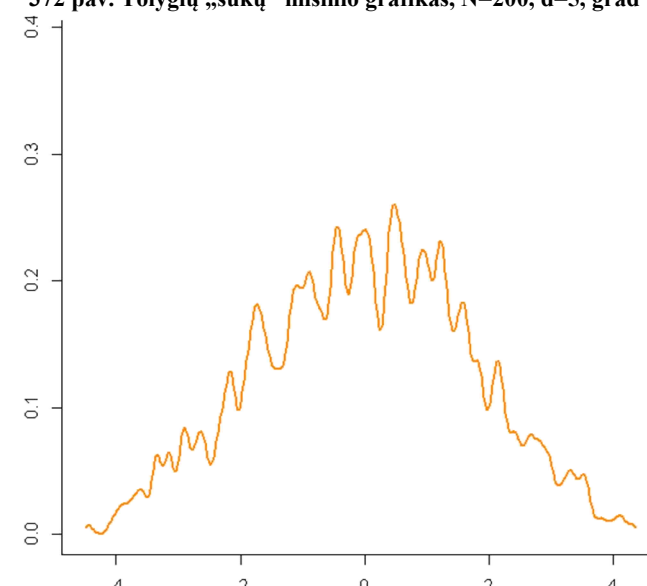
371 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=5$ , grad



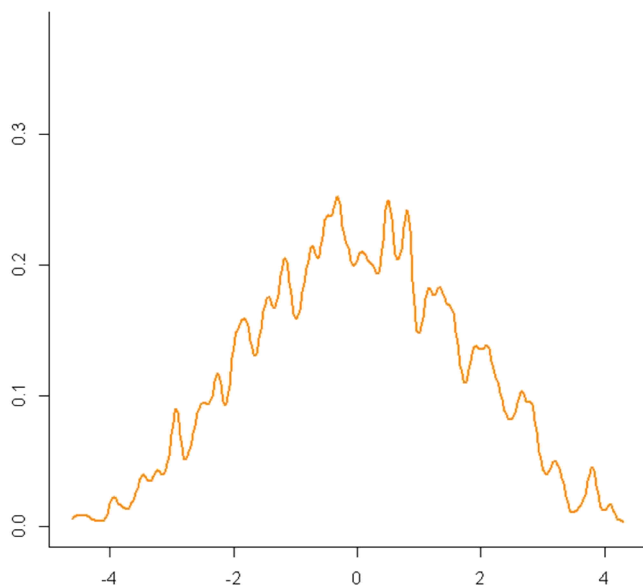
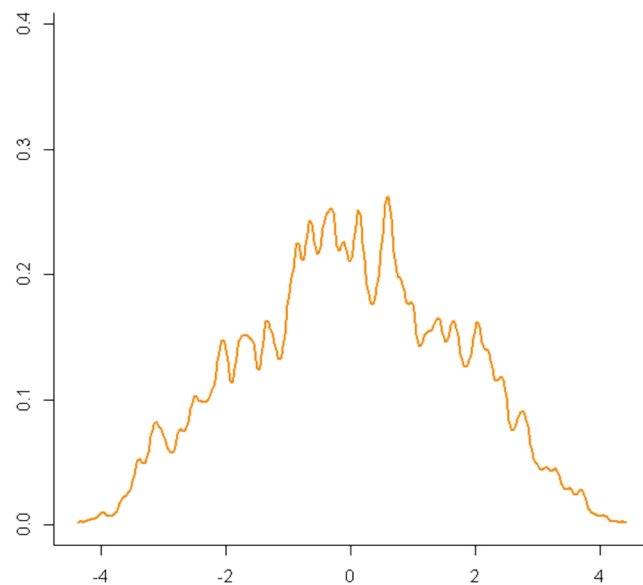
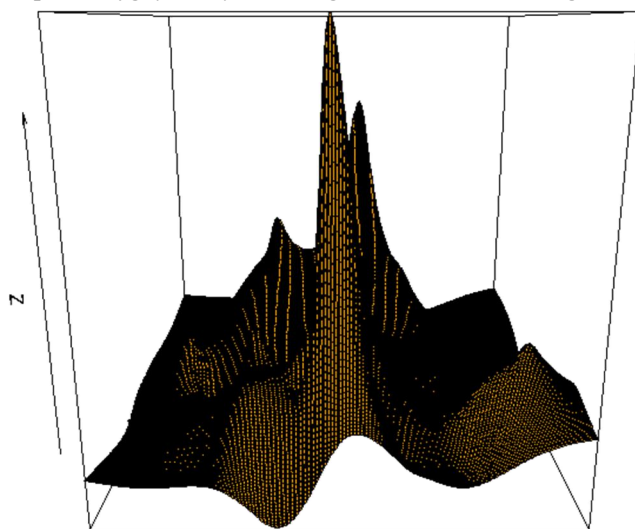
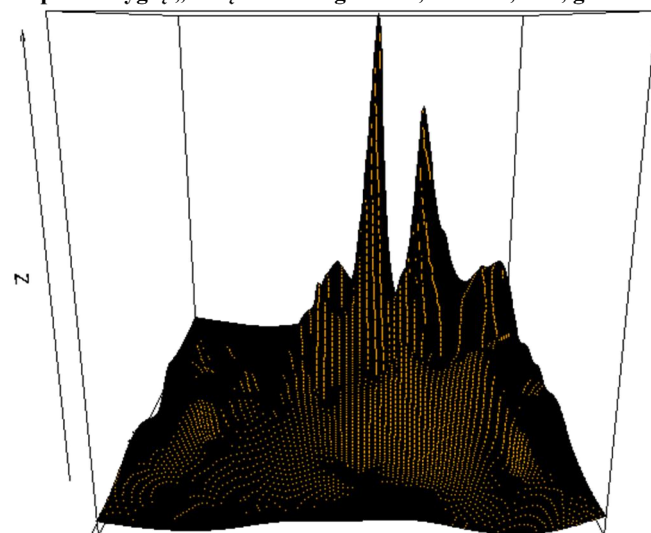
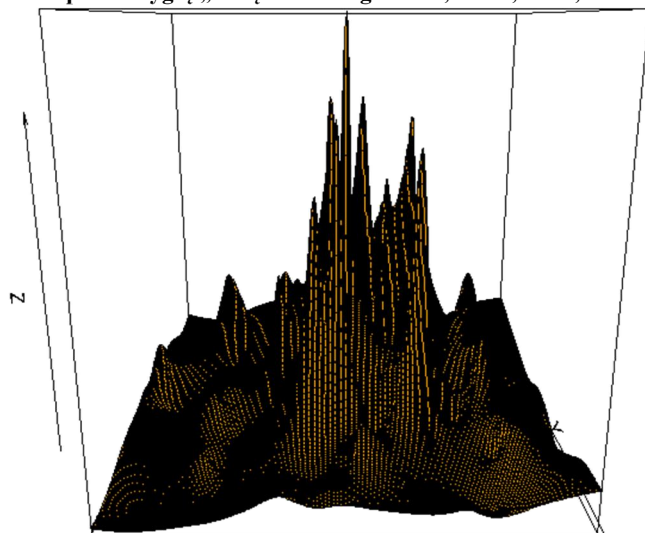
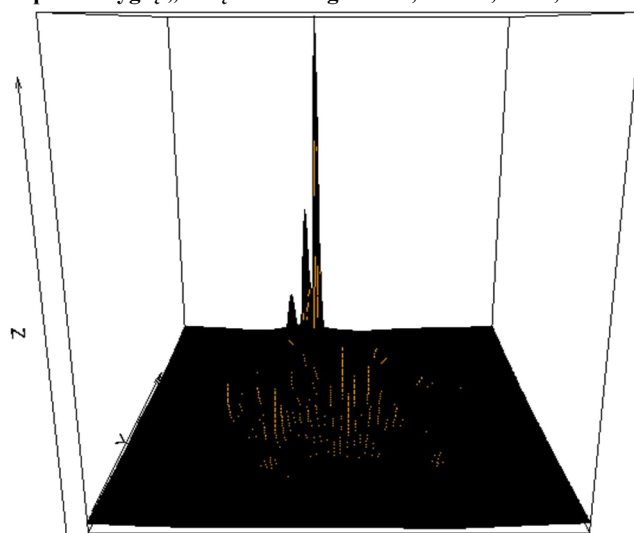
372 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=5$ , grad

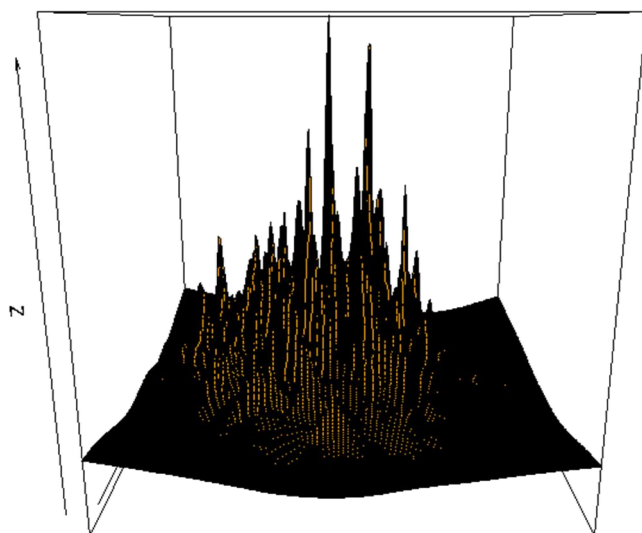
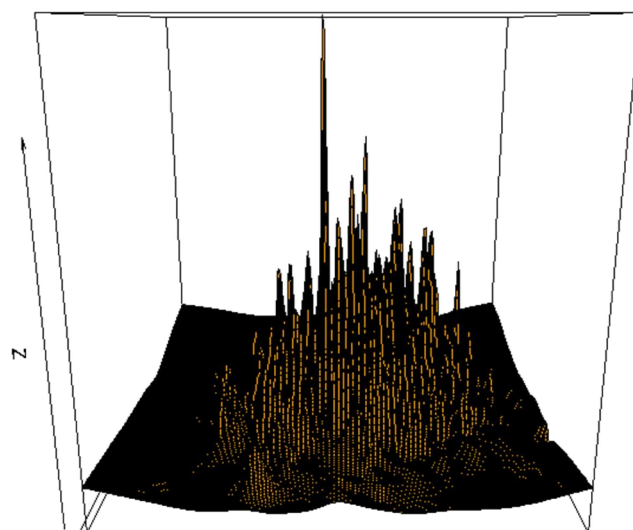
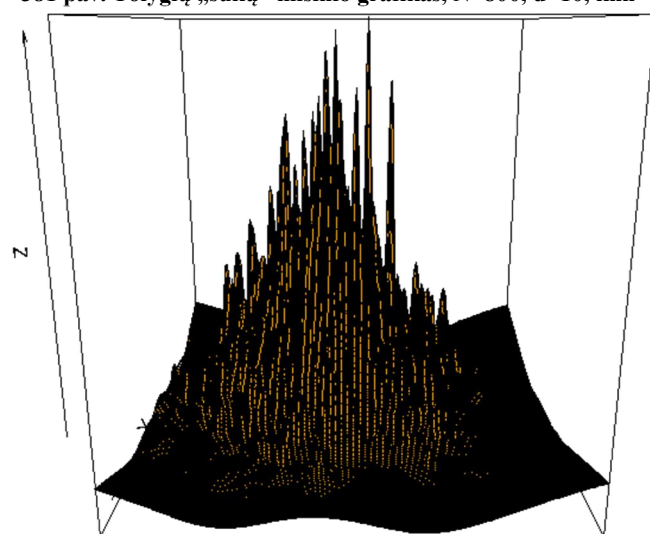
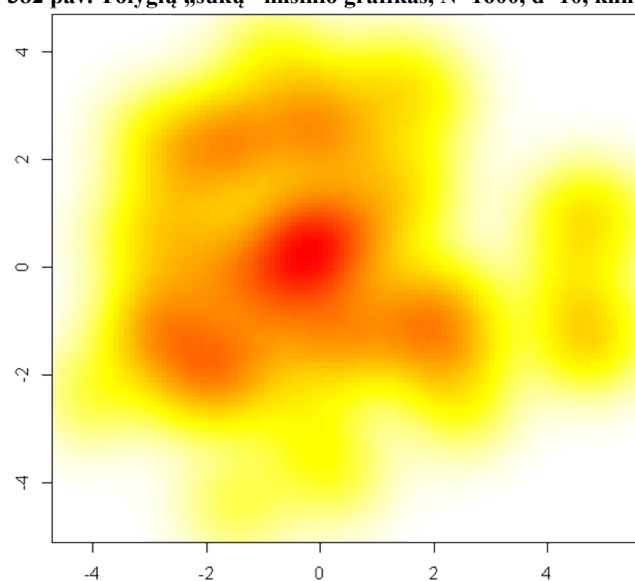
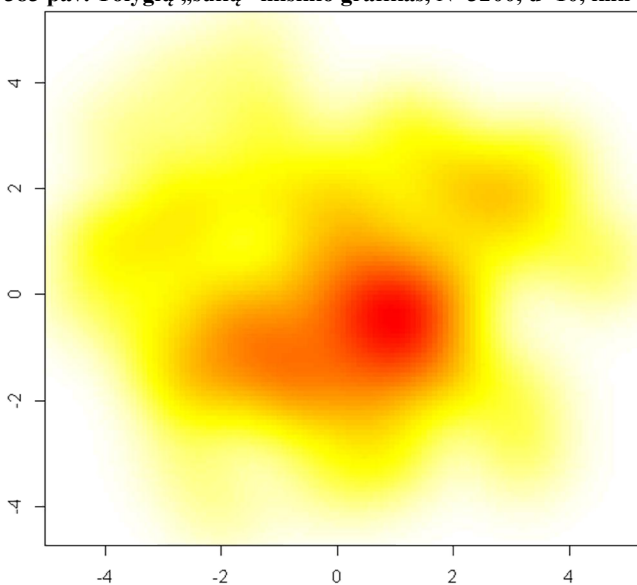
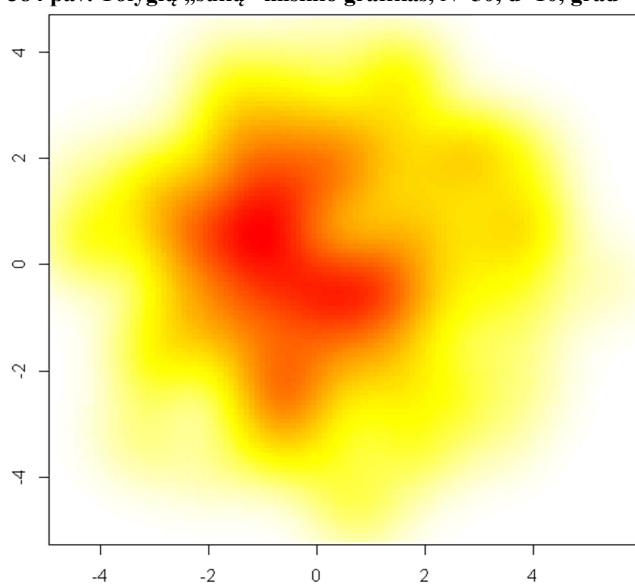


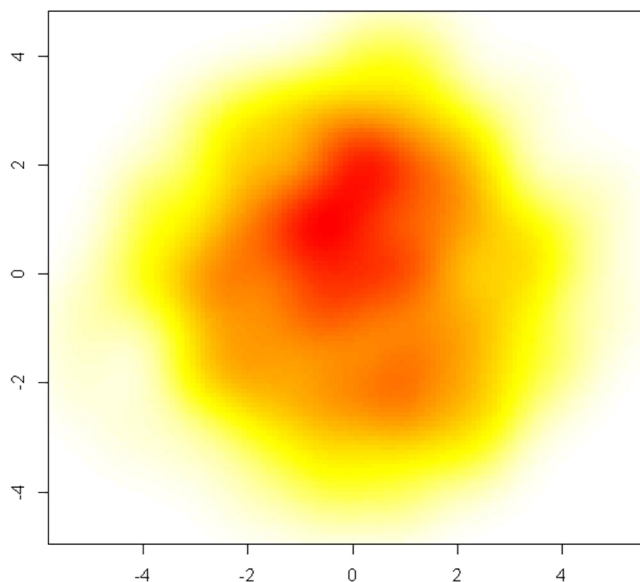
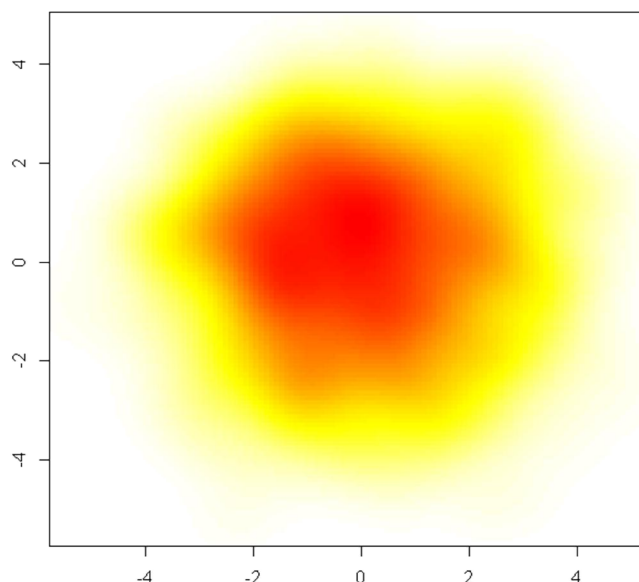
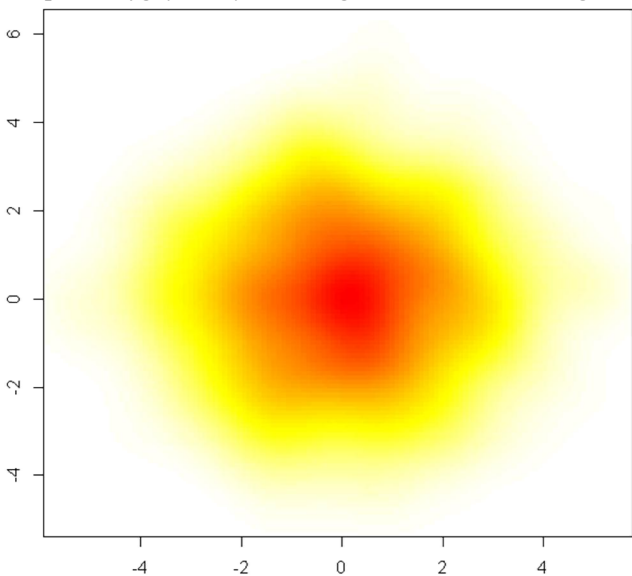
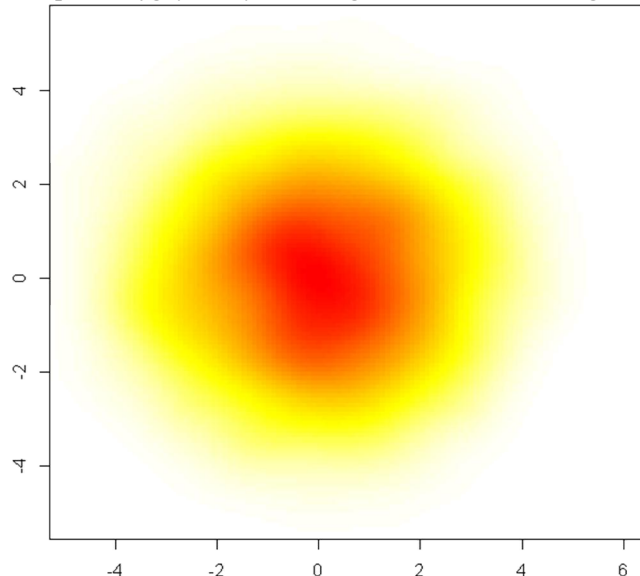
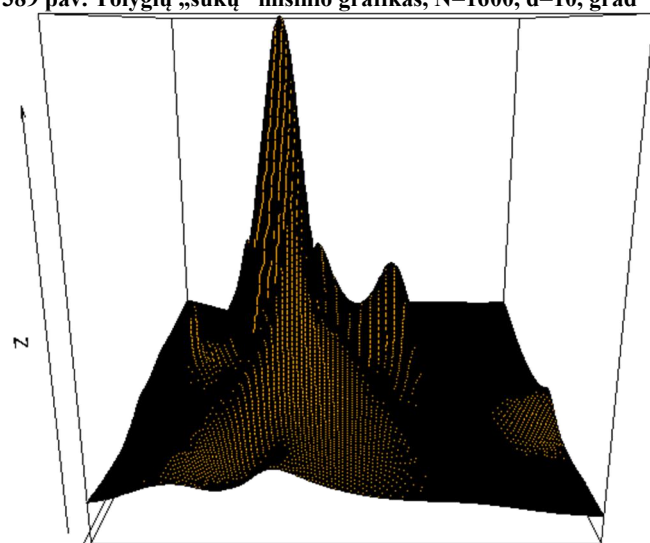
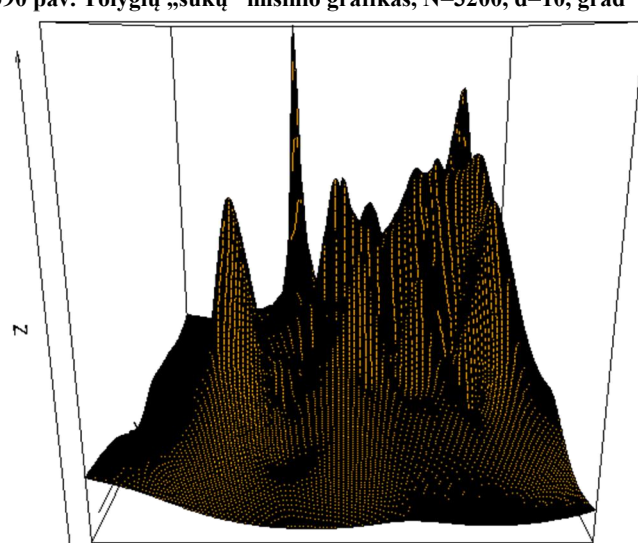
373 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=5$ , grad

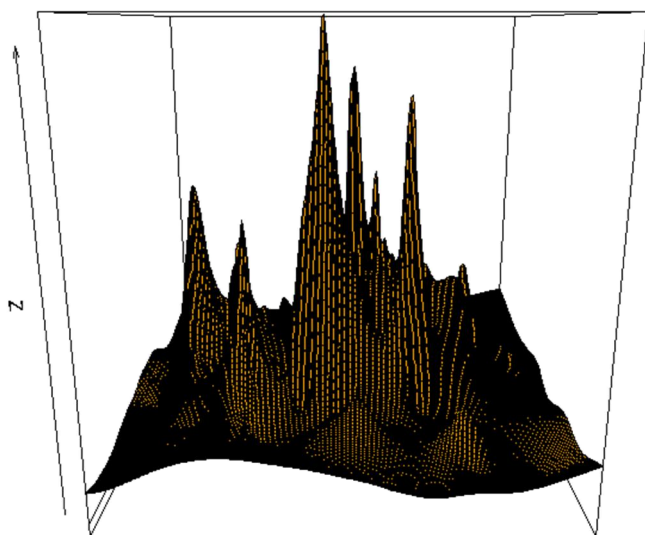
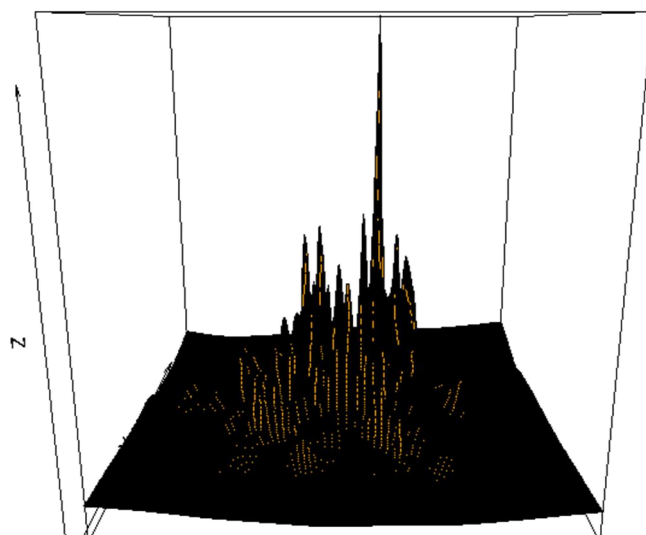
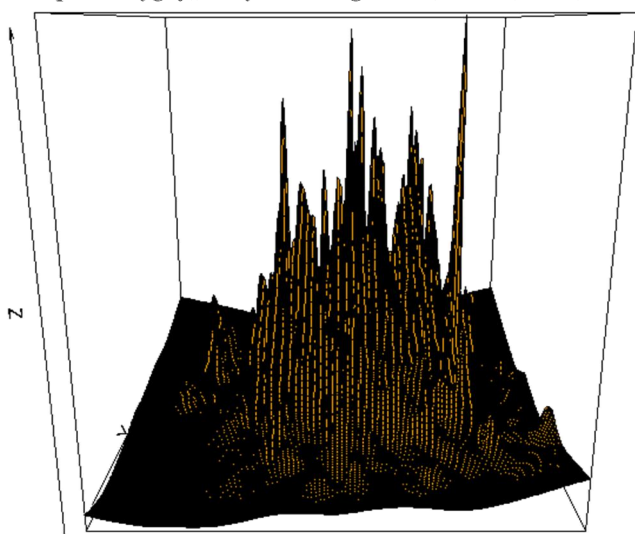
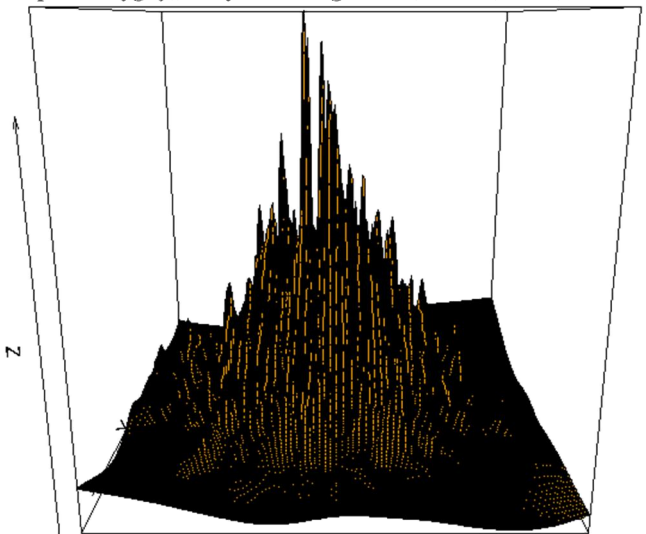
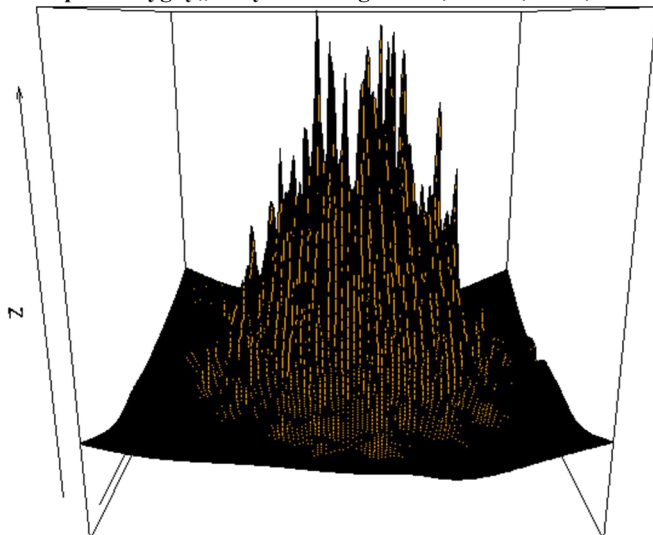
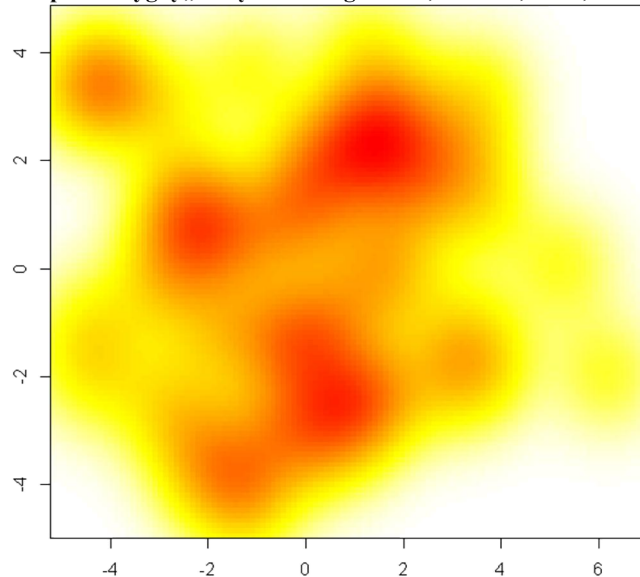


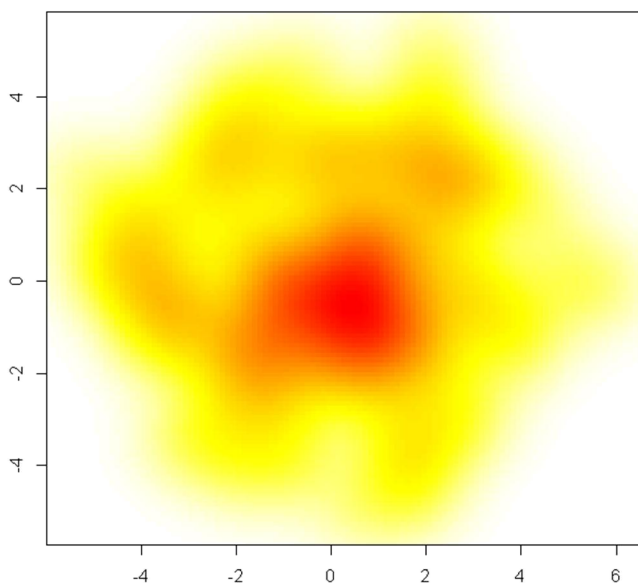
374 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=5$ , grad

375 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=5$ , grad376 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=5$ , grad377 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=10$ , knn378 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=10$ , knn379 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=10$ , knn380 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=10$ , knn

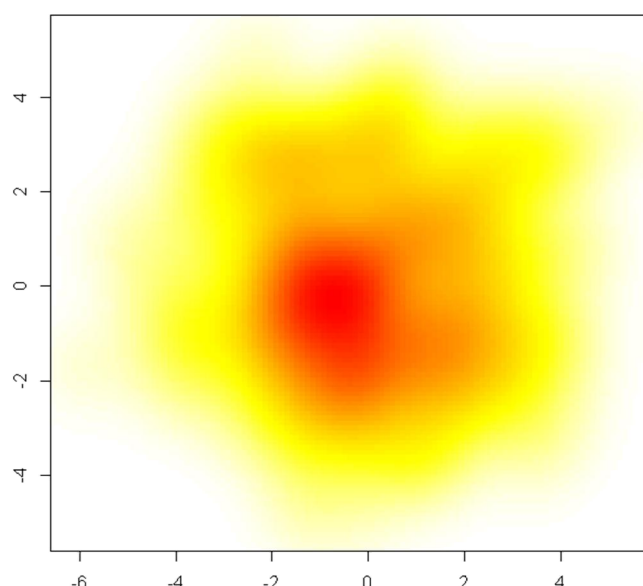
381 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=10$ , knn382 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=10$ , knn383 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=10$ , knn384 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=10$ , grad385 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=10$ , grad386 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=10$ , grad

387 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=10$ , grad388 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=10$ , grad389 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=10$ , grad390 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=10$ , grad391 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=20$ , knn392 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=20$ , knn

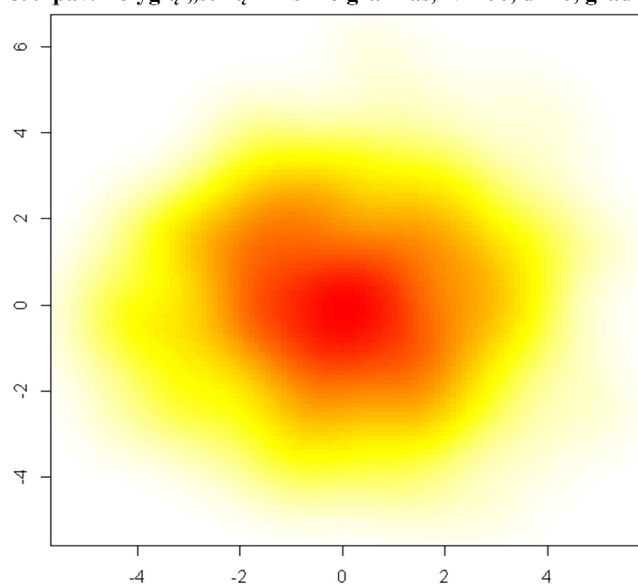
393 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=20$ , knn394 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=20$ , knn395 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=20$ , knn396 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=20$ , knn397 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=20$ , knn398 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=20$ , grad



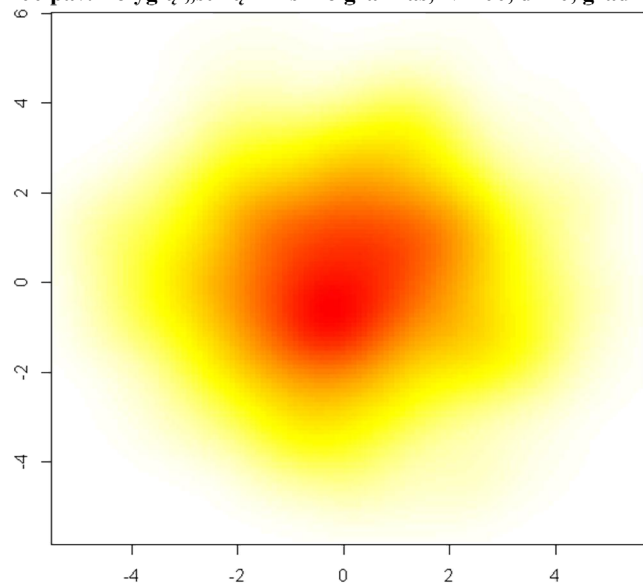
399 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=20$ , grad



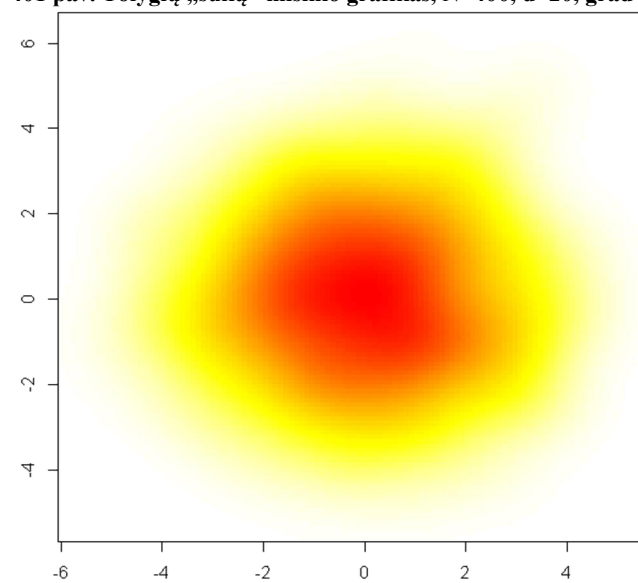
400 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=20$ , grad



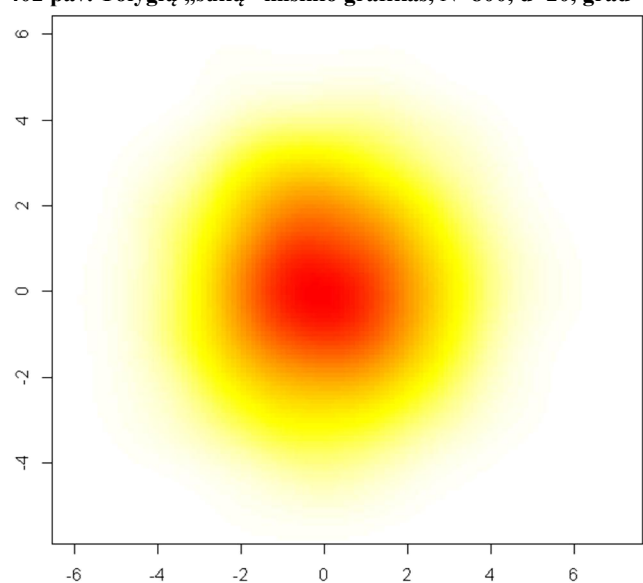
401 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=20$ , grad



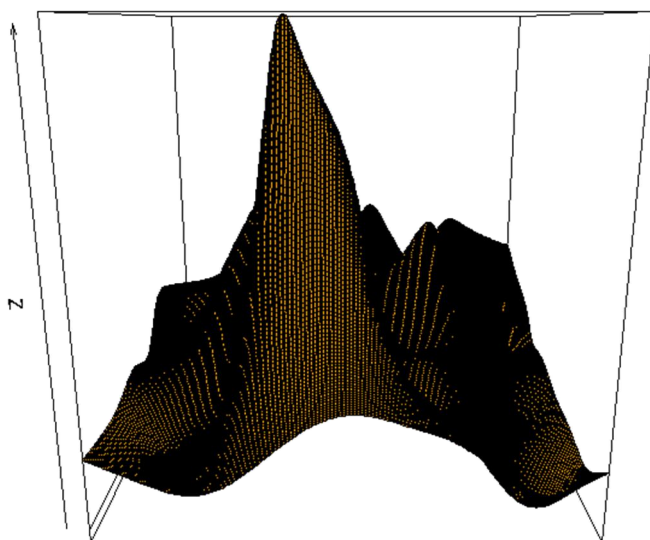
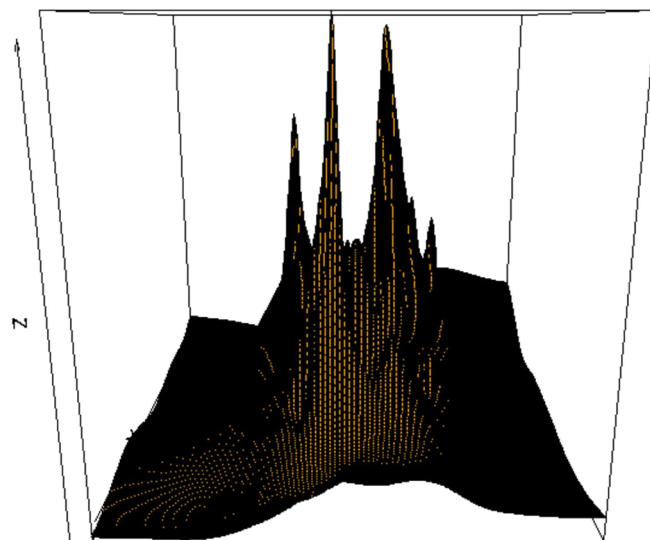
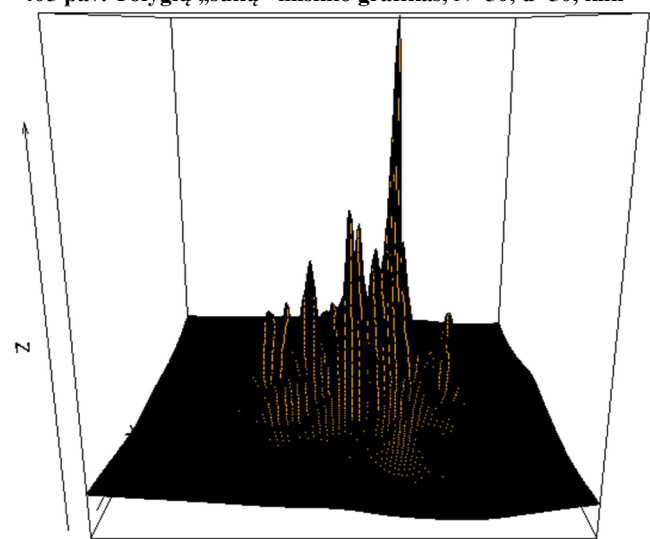
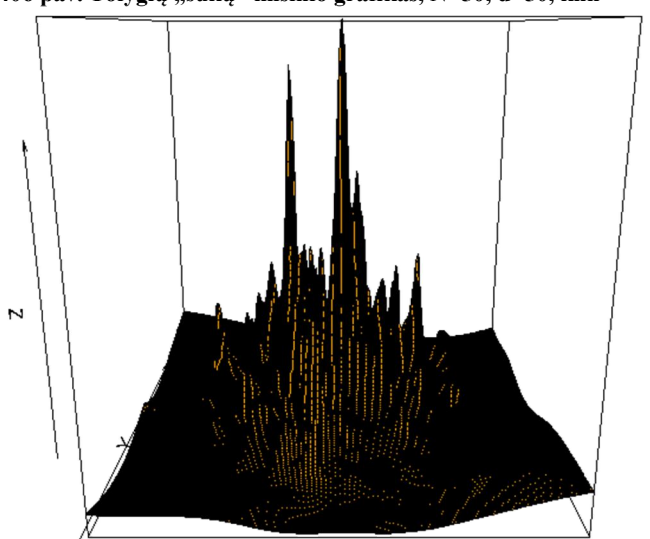
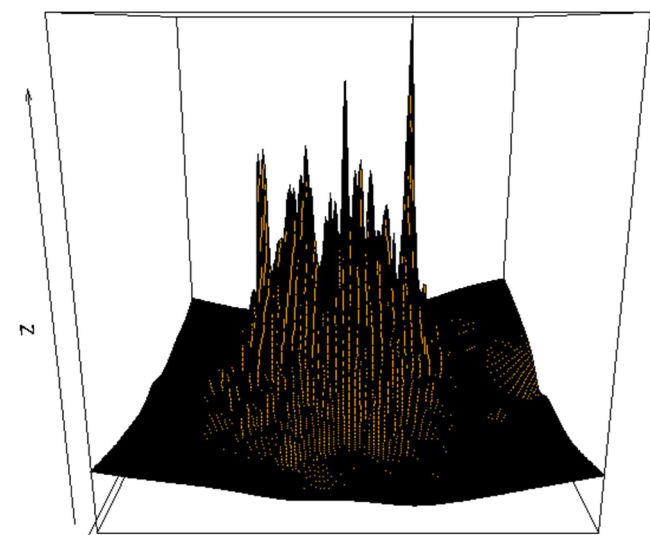
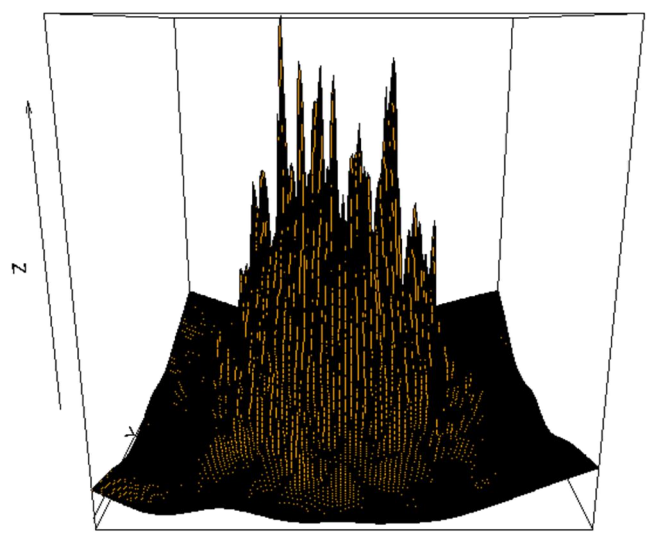
402 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=20$ , grad

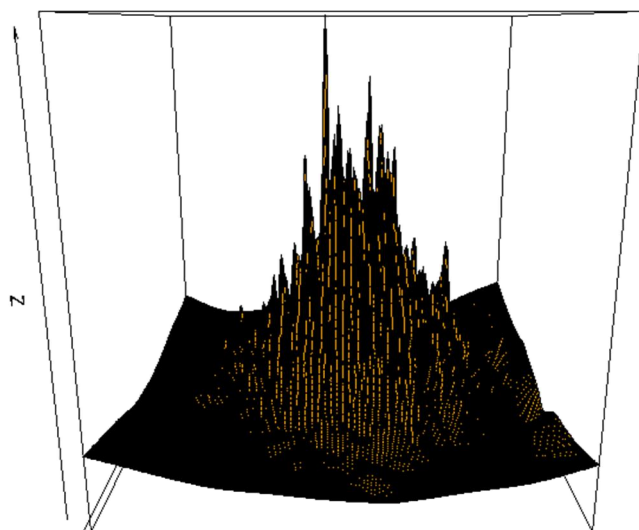
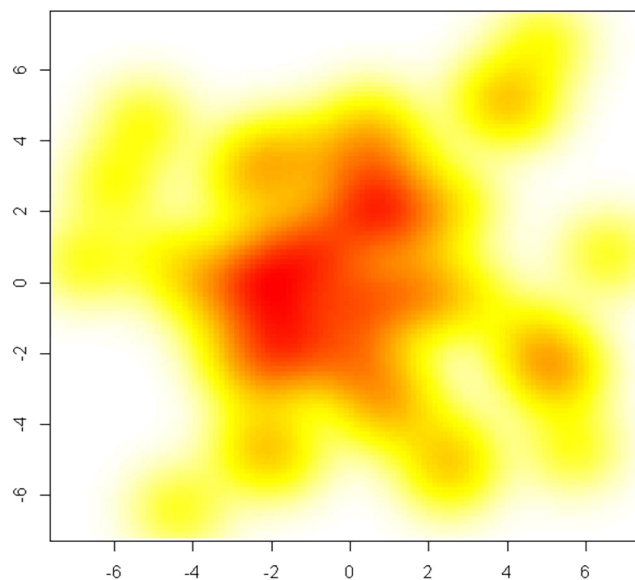
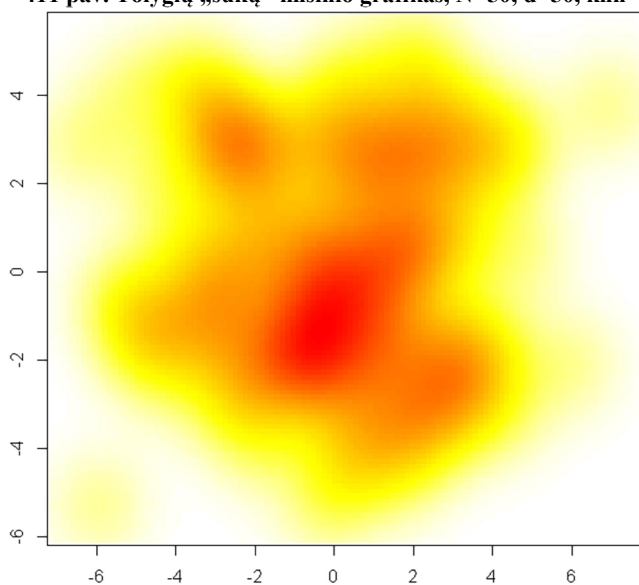
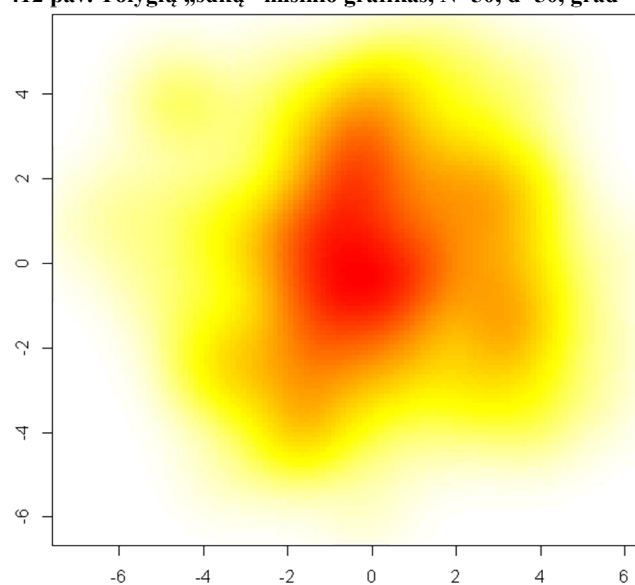
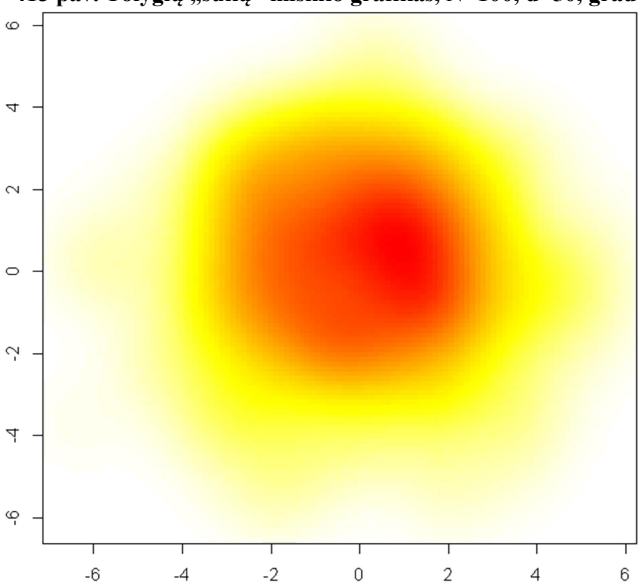
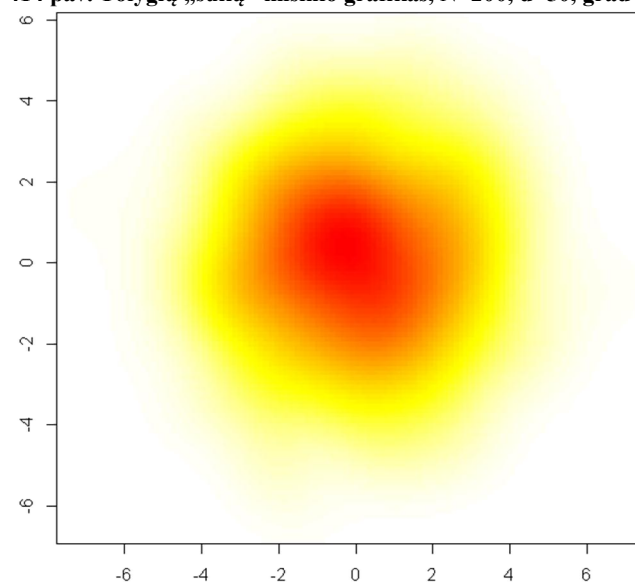


403 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=20$ , grad

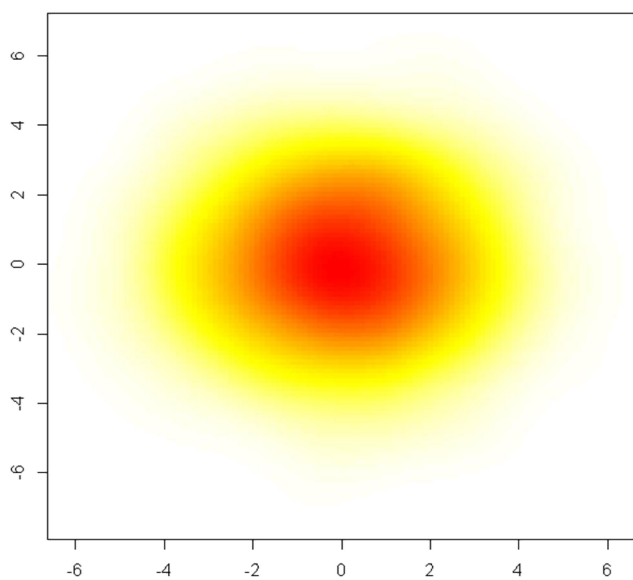
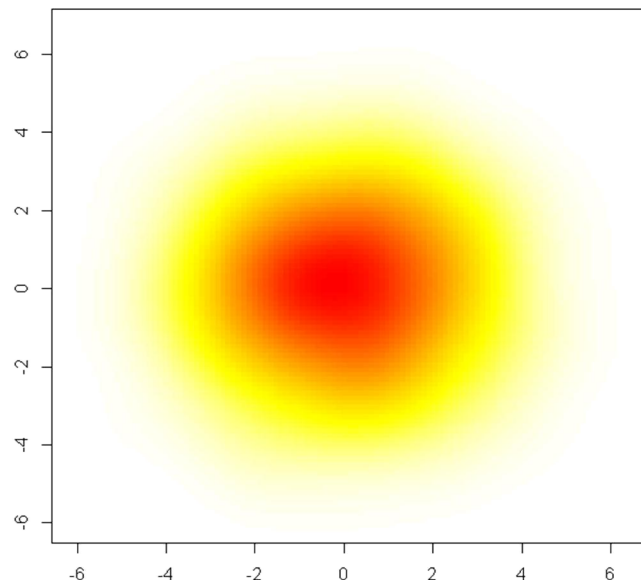
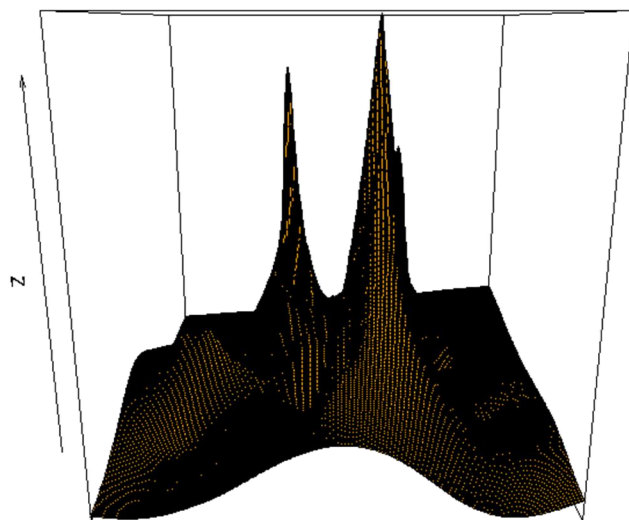
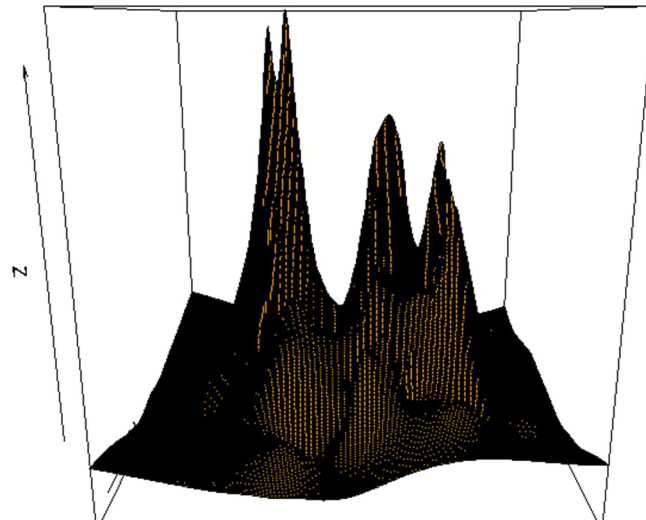
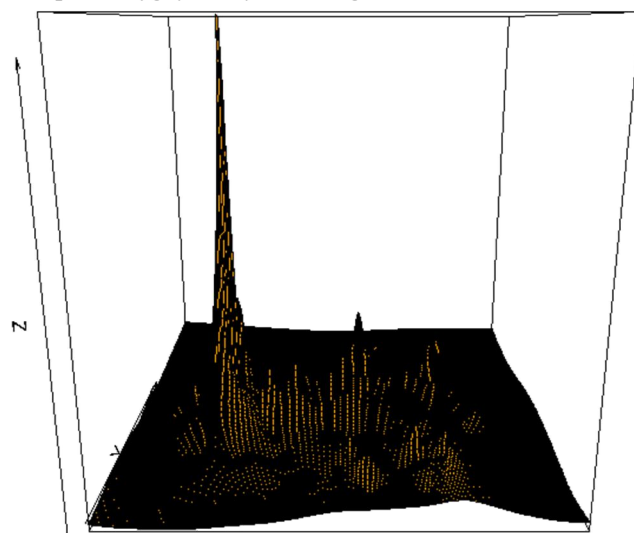
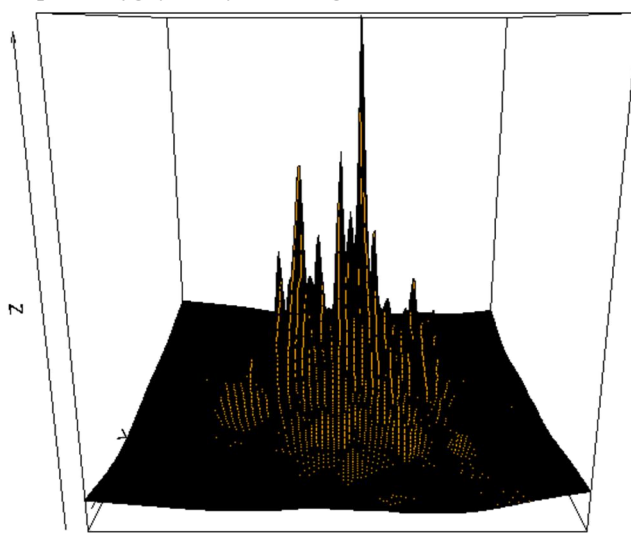


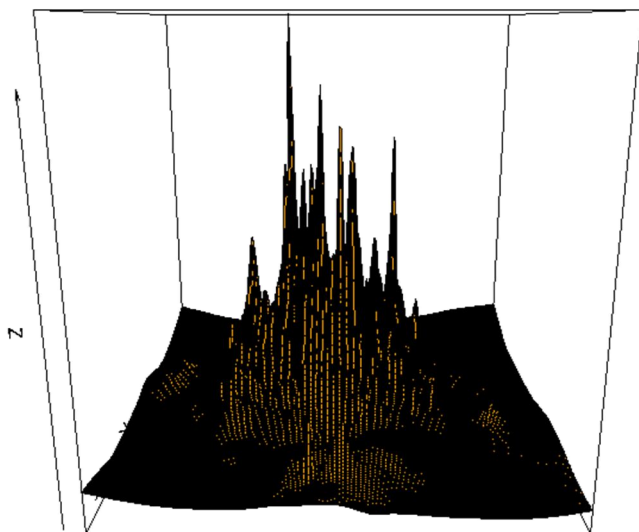
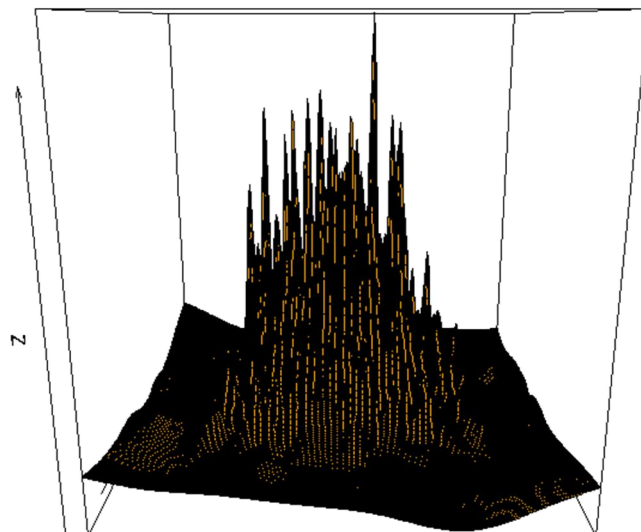
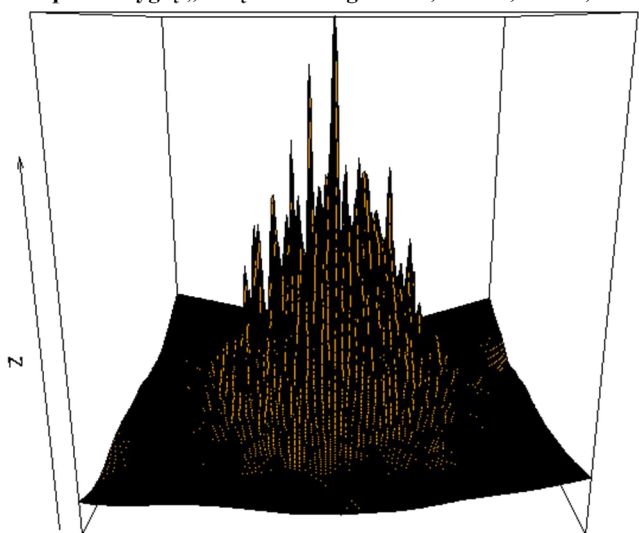
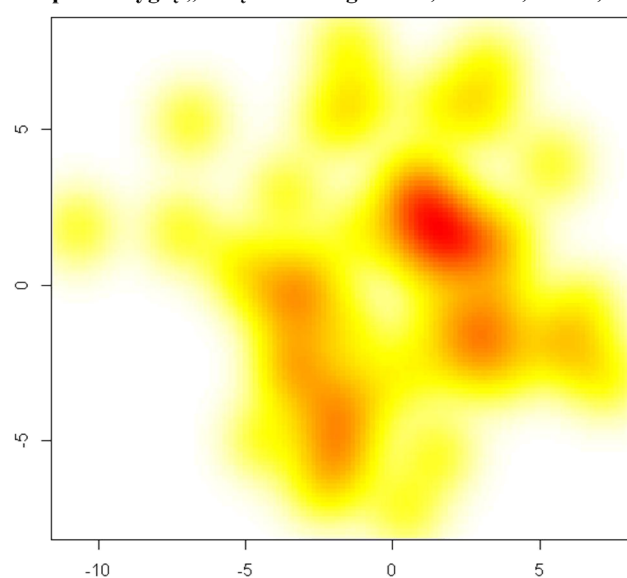
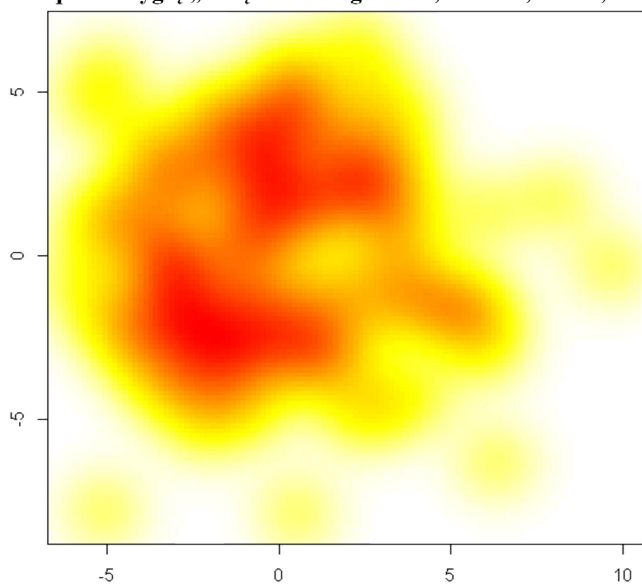
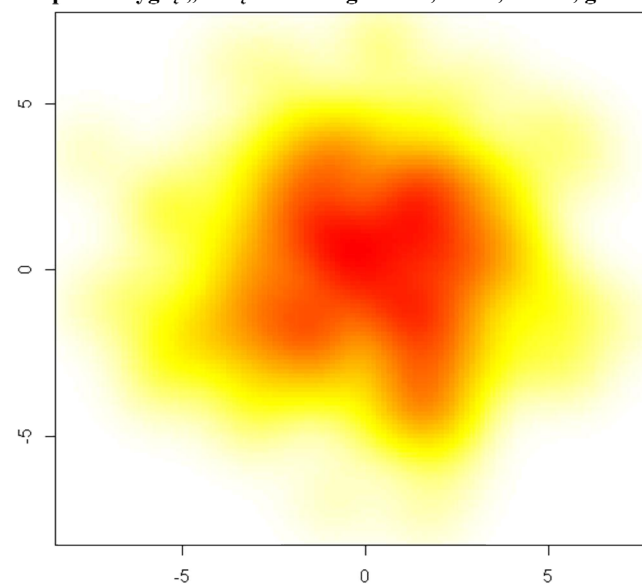
404 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=20$ , grad

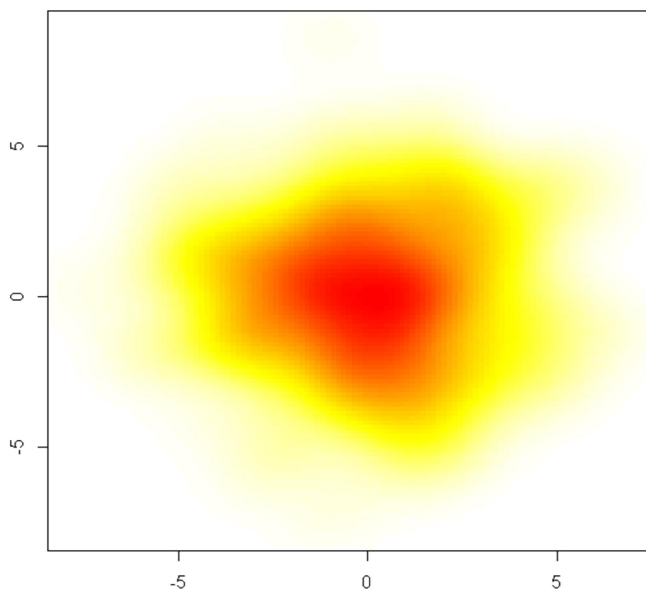
405 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=50$ , knn406 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=50$ , knn407 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=50$ , knn408 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=50$ , knn409 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=50$ , knn410 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=50$ , knn

411 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=50$ , knn412 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=50$ , grad413 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=50$ , grad414 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=50$ , grad415 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=50$ , grad416 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=50$ , grad

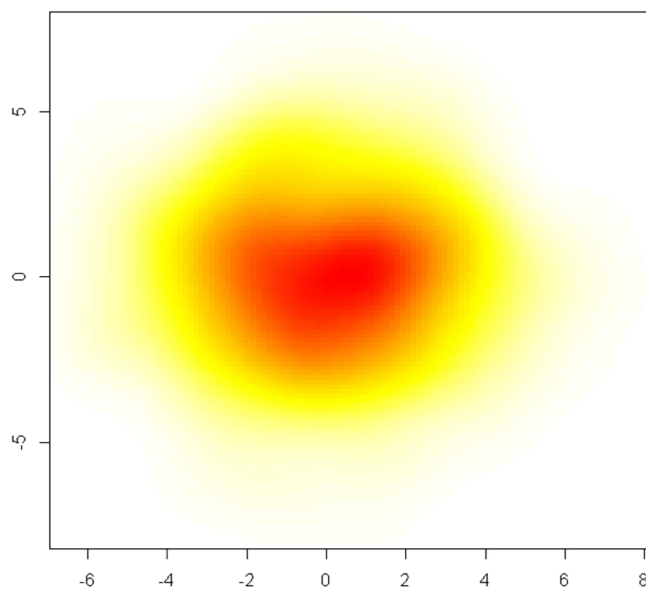


417 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=50$ , grad418 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=50$ , grad419 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=100$ , knn420 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=100$ , knn421 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=100$ , knn422 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=400$ ,  $d=100$ , knn

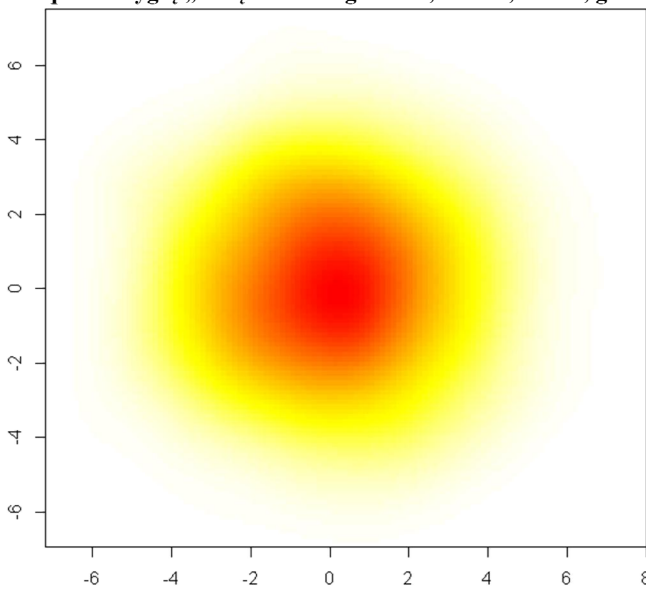
423 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=800$ ,  $d=100$ , knn424 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=1600$ ,  $d=100$ , knn425 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=3200$ ,  $d=100$ , knn426 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=50$ ,  $d=100$ , grad427 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=100$ ,  $d=100$ , grad428 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas,  $N=200$ ,  $d=100$ , grad



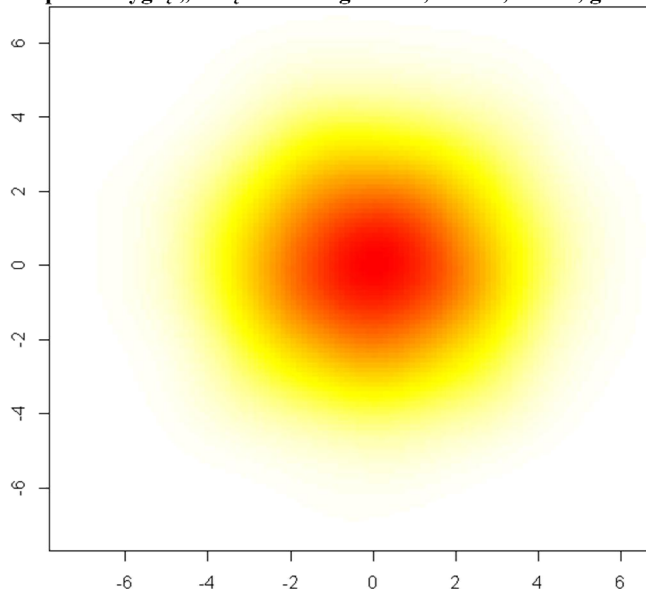
429 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas, N=400, d=100, grad



430 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas, N=800, d=100, grad



431 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas, N=1600, d=100, grad



432 pav. Tolygių „šukų“ mišinio grafikas, N=3200, d=100, grad

### 3 PRIEDAS. PROGRAMOS TEKSTAS

```
source("Misinys.R")
library(mixtools)
library(ks)

## Misinio parametrai #####
tipas = 15
d = 1
N = 3200
## Misinio generavimas #####
misinys = Misinys(tipas,d,N)
#####
## Misinio atvaizdavimas 1-matis#####
P = Tankis(tipas,misinys)
Grafikui=cbind(misinys,P)
plot(c(-3,3),c(0,max(P)),type = "n")
lines(Grafikui[order(Grafikui[,1]),], lwd=2)
#####
```

```

Knn_ivertis = Knn(misinys)
Iverciai=cbind(misinys,Knn_ivertis)
Iverciai_Rikiuoti=Iverciai[order(Iverciai[,1]),]
lines(Iverciai[order(Iverciai[,1]),], col='red')

Misinys = function(tipas, d, N){
  Imtis = NULL
  for (k in 1:d){
    if (tipas==1){
      X = NULL
      for (i in 1:N){
        x = rnorm(1)
        X =c (X,x)
      }
    }
    if (tipas==2){
      X = NULL
      for (i in 1:N){
        r = runif(1)
        if (r < 1/5){
          x = rnorm(1)
        }
        else if (r < 2/5 ){
          x = rnorm(1)*2/3+1/2
        }
        else x = rnorm(1)* 5/9 + 13/12
        X=c(X,x)
      }
    }
    if (tipas==3){
      X = NULL
      for (i in 1:N){
        r = runif(1)
        if (r < 1/8) {
          x = rnorm(1)
        }else if (r < 2/8 ) {
          x = rnorm(1)*(2/3)^1+ 3 * ((2/3)^1 - 1)
        }else if (r < 3/8 ) {
          x = rnorm(1)*(2/3)^2 + 3 * ((2/3)^2 - 1)
        }else if (r < 4/8 ) {
          x = rnorm(1)*(2/3)^3 + 3 * ((2/3)^3 - 1)
        }else if (r < 5/8 ) {
          x = rnorm(1)*(2/3)^4 + 3 * ((2/3)^4 - 1)
        }else if (r < 6/8 ) {
          x = rnorm(1)*(2/3)^5 + 3 * ((2/3)^5 - 1)
        }else if (r < 7/8 ) {
          x = rnorm(1)*(2/3)^6 + 3 * ((2/3)^6 - 1)
        }else
          x = rnorm(1)*(2/3)^7 + 3 * ((2/3)^7 - 1)
        X=c(X,x)
      }
    }
    if (tipas==4){
      X = NULL
      for (i in 1:N){
        r = runif(1)
        if (r < 2/3) {
          x = rnorm(1)
        }
      }
    }
  }
}

```

```

        }else
          x = rnorm(1)* 1/10
        X=c(X, x)
      }
    }
  if (tipas==5){
    X = NULL
    for (i in 1:N){
      r = runif(1)
      if (r < 1/10) {
        x = rnorm(1)
      }else
        x = rnorm(1)* 1/10
      X=c(X,x)
    }
  }
  if (tipas==6){
    X = NULL
    for (i in 1:N){
      r = runif(1)
      if (r < 1/2) {
        x = rnorm(1)*2/3 - 1
      }else
        x = rnorm(1)* 2/3 + 1
      X=c(X,x)
    }
  }
  if (tipas==7){
    X = NULL
    for (i in 1:N){
      r = runif(1)
      if (r < 1/2) {
        x = rnorm(1)*1/2 - 3/2
      }else
        x = rnorm(1)* 1/2 + 3/2
      X=c(X,x)
    }
  }
  if (tipas==8){
    X = NULL
    for (i in 1:N){
      r = runif(1)
      if (r < 3/4) {
        x = rnorm(1)
      }else
        x = rnorm(1)* 1/3 + 3/2
      X=c(X,x)
    }
  }
  if (tipas==9){
    X = NULL
    for (i in 1:N){
      r = runif(1)
      if (r < 9/20) {
        x = rnorm(1)*3/5 - 6/5
      }else if (r < 18/20 ) {
        x = rnorm(1)*3/5 + 6/5
      }else
    }
  }

```

```

        x = rnorm(1)* 1/4
        X=c(X,x)
    }
}
if (tipas==10){
  X = NULL
  for (i in 1:N){
    r = runif(1)
    if (r < 1/2) {
      x = rnorm(1)
    }else if (r < 6/10 ) {
      x = rnorm(1)*1/10 + 0/2 - 1
    }else if (r < 7/10 ) {
      x = rnorm(1)*1/10 + 1/2 - 1
    }else if (r < 8/10 ) {
      x = rnorm(1)*1/10 + 2/2 - 1
    }else if (r < 9/10 ) {
      x = rnorm(1)*1/10 + 3/2 - 1
    }else
      x = rnorm(1)*1/10 + 4/2 - 1
    X=c(X,x)
  }
}
if (tipas==11){
  X = NULL
  for (i in 1:N){
    r = runif(1)
    if (r < 49/100) {
      x = rnorm(1)* 2/3 - 1
    }else if (r < 98/100 ) {
      x = rnorm(1)*2/3 + 1
    }else if (r < 344/350) {
      x = rnorm(1)*1/100 + (0-3)/2
    }else if (r < 345/350 ) {
      x = rnorm(1)*1/100 + (1-3)/2
    }else if (r < 346/350 ) {
      x = rnorm(1)*1/100 + (2-3)/2
    }else if (r < 347/350 ) {
      x = rnorm(1)*1/100 + (3-3)/2
    }else if (r < 348/350 ) {
      x = rnorm(1)*1/100 + (4-3)/2
    }else if (r < 349/350 ) {
      x = rnorm(1)*1/100 + (5-3)/2
    }else
      x = rnorm(1)*1/100 + (6-3)/2
    X=c(X,x)
  }
}
if (tipas==12){
  X = NULL
  for (i in 1:N){
    r = runif(1)
    if (r < 1/2) {
      x = rnorm(1)
    }else if (r < 1/2+ 2^(1-(-2)) /31 ) {
      x = rnorm(1)*2 ^(-(-2))/10 + (-2)+1/2
    }else if (r < 1/2+ 2^(1-(-2)) /31 +2^(1-(-1))/31 ) {
      x = rnorm(1)*2 ^(-(-1))/10 + (-1)+1/2
    }
  }
}

```

```

    }else if (r < 1/2+ 2^(1-(-2)) /31 +2^(1-(-1))/31 + 2^(1-0)/31 ) {
      x = rnorm(1)*2 ^(-0)/10 + 0+1/2
    }else if (r < 1/2+ 2^(1-(-2)) /31 +2^(1-(-1))/31 + 2^(1-0)/31+2^(1-
1)/31 ) {
      x = rnorm(1)*2 ^(-1)/10 + 1+1/2
    }else
      x = rnorm(1)*2 ^(-2)/10 + 2+1/2
    X=c(X,x)
  }
}
if (tipas==13){
  X = NULL
  for (i in 1:N){
    r = runif(1)
    if (r < 46/100) {
      x = rnorm(1)*2/3 -1
    }else if (r < 92/100 ) {
      x = rnorm(1)*2/3 +1
    }else if (r < 277/300 ) {
      x = rnorm(1)*1/100 +(-1/2)
    }else if (r < 278/300 ) {
      x = rnorm(1)*1/100 +(-2/2)
    }else if (r < 279/300 ) {
      x = rnorm(1)*1/100 +(-3/2)
    }else if (r < 286/300 ) {
      x = rnorm(1)*1/100 + 1/2
    }else if (r < 293/350 ) {
      x = rnorm(1)*1/100 +(2/2)
    }else
      x = rnorm(1)*1/100 + 3/2
    X=c(X,x)
  }
}
if (tipas==14){
  X = NULL
  for (i in 1:N){
    r = runif(1)
    if (r < 2^(5-0)/63) {
      x = rnorm(1)*32/63/2^0 + (65-96/2^0)/21
    }else if (r < 2^(5-0)/63+2^(5-1)/63) {
      x = rnorm(1)*32/63/2^1 + (65-96/2^1)/21
    }else if (r < 2^(5-0)/63+2^(5-1)/63+2^(5-2)/63) {
      x = rnorm(1)*32/63/2^2 + (65-96/2^2)/21
    }else if (r < 2^(5-0)/63+2^(5-1)/63+2^(5-2)/63+2^(5-3)/63) {
      x = rnorm(1)*32/63/2^3 + (65-96/2^3)/21
    }else if (r < 2^(5-0)/63+2^(5-1)/63+2^(5-2)/63+2^(5-3)/63+2^(5-
4)/63) {
      x = rnorm(1)*32/63/2^4 + (65-96/2^4)/21
    }else
      x = rnorm(1)*32/63/2^5 + (65-96/2^5)/21
    X=c(X,x)
  }
}
if (tipas==15){
  X = NULL
  for (i in 1:N){
    r = runif(1)
    if (r < 2/7) {

```

```

        x = rnorm(1)*2/7+(12*0-15)/7
    }else if (r < 4/7) {
        x = rnorm(1)*2/7+(12*1-15)/7
    }else if (r < 6/7) {
        x = rnorm(1)*2/7+(12*2-15)/7
    }else if (r < 19/21) {
        x = rnorm(1)*1/21+2*8/7
    }else if (r < 20/21) {
        x = rnorm(1)*1/21+2*9/7
    }else
        x = rnorm(1)*1/21+2*10/7
    X=c(X,x)
}
}
Imtis = cbind(Imtis,X)
}
return (Imtis)
}
Tankis = function(tipas, X){
P = NULL
if (tipas==1){
P = dnorm(X, mean=0, sd=1)
}
if (tipas==2){
mus = c(0, 1/2, 13/12)
sigmas = c(1, 2/3, 5/9)
props = c(1/5, 1/5, 3/5)
P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
if (tipas==3){
mus = c(0, 3 * ((2/3)^1 - 1), 3 * ((2/3)^2 - 1), 3 * ((2/3)^3 - 1), 3 *
((2/3)^4 - 1), 3 * ((2/3)^5 - 1), 3 * ((2/3)^6 - 1), 3 * ((2/3)^7 - 1))
sigmas = c(1, (2/3)^1, (2/3)^2, (2/3)^3, (2/3)^4, (2/3)^5, (2/3)^6, (2/3)^7)
props = c(1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8)
P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
if (tipas==4){
mus = c(0, 0)
sigmas = c(1,1/10)
props = c(2/3, 1/3)
P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
if (tipas==5){
mus = c(0, 0)
sigmas = c(1,1/10)
props = c(1/10, 9/10)
P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
if (tipas==6){
mus = c(-1, 1)
sigmas = c(2/3,2/3)
props = c(1/2, 1/2)
P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
if (tipas==7){
mus = c(-3/2, 3/2)
sigmas = c(1/2,1/2)
props = c(1/2, 1/2)
}
}
}

```



```

    P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
if (tipas==8){
  mus = c(0, 3/2)
  sigmas = c(1, 1/3)
  props = c(3/4, 1/4)
  P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
if (tipas==9){
  mus = c(-6/5, 6/5, 0)
  sigmas = c(3/5, 3/5, 1/4)
  props = c(9/20, 9/20, 1/10)
  P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
if (tipas==10){
  mus = c(0, 0/2 -1, 1/2 -1, 2/2-1, 3/2-1, 4/2-1)
  sigmas = c(1, 1/10, 1/10, 1/10, 1/10, 1/10)
  props = c(1/2, 1/10, 1/10, 1/10, 1/10, 1/10)
  P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
if (tipas==11){
  mus = c(-1, 1, (0-3)/2, (1-3)/2, (2-3)/2, (3-3)/2, (4-3)/2, (5-3)/2,
(6-3)/2)
  sigmas = c(2/3, 2/3, 1/100, 1/100, 1/100, 1/100, 1/100, 1/100, 1/100)
  props = c(49/100, 49/100, 1/350, 1/350, 1/350, 1/350, 1/350, 1/350,
1/350)
  P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
if (tipas==12){
  mus = c(0, -2+1/2, -1+1/2, 0+1/2, 1+1/2, 2+1/2)
  sigmas = c(1, 2 ^(-(-2))/10, 2 ^(-(-1))/10, 2 ^(-0)/10, 2 ^(-1)/10, 2 ^(-
2)/10)
  props = c(1/2, 2^(1-(-2)) /31, 2^(1-(-1))/31, 2^(1-0)/31, 2^(1-1) /31,
2^(1-2) /31)
  P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
if (tipas==13){
  mus = c(-1, 1, -1/2, -2/2, -3/2, 1/2, 2/2, 3/2)
  sigmas = c(2/3, 2/3, 1/100, 1/100, 1/100, 1/100, 1/100, 1/100)
  props = c(46/100, 46/100, 1/300, 1/300, 1/300, 7/300, 7/300, 7/300)
  P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
if (tipas==14){
  mus = c((65-96/2^0)/21, (65-96/2^1)/21 , (65-96/2^2)/21 , (65-96/2^3)/21
, (65-96/2^4)/21 , (65-96/2^5)/21)
  sigmas = c(32/63/2^0, 32/63/2^1, 32/63/2^2,
32/63/2^3, 32/63/2^4, 32/63/2^5)
  props = c(2^(5-0)/63, 2^(5-1)/63, 2^(5-2)/63, 2^(5-3)/63, 2^(5-
4)/63, 2^(5-5)/63)
  P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
if (tipas==15){
  mus = c((12*0-15)/7, (12*1-15)/7, (12*2-15)/7, 2*8/7, 2*9/7, 2*10/7)
  sigmas = c(2/7, 2/7, 2/7, 1/21, 1/21, 1/21)
  props = c(2/7, 2/7, 2/7, 1/21, 1/21, 1/21)
  P = dnorm.mixt(X, mus=mus, sigmas=sigmas, props=props)
}
return (P)

```

```

}
Knn = function(X) {
  #X = matrix(misinys)
  XC = X
  n = length(X)
  k = round(log(n))
  knn=NULL
  for(i2 in 1:n){
    skirt = rep(X[i2],n) - XC
    sand = abs(skirt)
    sand = sort(sand)
    if (sand[k]==0)
      knn = rbind(knn,sand[k+1])
    else knn = rbind(knn,sand[k])
  }
  KNN = rep(k*factorial(0),n) / (rep(2*n,n) * knn)
  return (KNN)
}
#####
knn - vienmatis

X = matrix(x)

XC = X
n = nrow(XC)
k = round(log(n))
knn=NULL
for(i2 in 1:nrow(X)){
  skirt = rep(X[i2,],nrow(XC)) - XC
  sand = abs(skirt[,1])
  sand = sort(sand)
  if (sand[k]==0)
    knn = rbind(knn,sand[k+1])
  else knn = rbind(knn,sand[k])
}
KNN = rep(k*factorial(0),nrow(X)) /
      (rep(2*n,nrow(X))*knn)

Iverciai=cbind(x,KNN)
Iverciai_Rikiuoti=Iverciai[order(Iverciai[,1]),]
plot(c(min(x),max(x)),c(min(KNN),max(KNN)),type = "n")
lines(Iverciai_Rikiuoti, col='red')

#####
X = duom
XC = X
n = nrow(XC)
k = round(log(n))
knn=NULL
for(i2 in 1:nrow(X)){
  skirt = matrix(X[i2,],n,ncol=d, byrow = TRUE) - XC
  sand = (abs(skirt[,1]))

  for(i3 in 2:d){
    sand = sand * (abs(skirt[,i3]))
  }
}

```

```

sand = sort(sand)
if (sand[k]==0)
knn = rbind(knn,sand[k+1])
else knn = rbind(knn,sand[k])
}

log1 = (log(n/(k*factorial(d-1))))^(d-1)

KNN = rep(k*factorial(d-1),nrow(X)) /
      (rep(2^d*n*log1,nrow(X))*knn)

Iverciai=cbind(x,KNN)
Iverciai_Rikiuoti=Iverciai[order(Iverciai[,1]),]
plot(c(-3,3),c(min(KNN),max(KNN)),type = "n")
lines(Iverciai_Rikiuoti, col='red')

#####
Gradientinis - vienmatis
library(feature)
data = misinys
bw = ((4/3)^1/5)*N^(-1/5)
data.fs <- featureSignif(data, bw)
plot(data.fs, addSignifGradRegion = TRUE)
plot(data.fs, addSignifGradRegion = TRUE, ylim = c(0,max(P)))

Gradientinis - dvimatis

library(MASS)
data = misinys
library(phangorn)
skait = pi^(d/2) * 2^(d+2-1) * factorial(2)^2 * (1/(2*sqrt(pi)))^d
vard = 2 * (dfactorial(3)+(d-1)*(dfactorial(1))^2)
bw1 = (skait / vard)^(1 / (4+d))
bw2 = bw1 * N ^ ((-1)/(4+d))
bw = rep(bw2, d)
fs <- featureSignif(data, bw)
plot(fs, addSignifCurvRegion=TRUE)

Daugiamačių skalių metodas

d <- dist(Iverciai) # euclidean distances between the rows
fit <- cmdscale(d,eig=TRUE, k=2) # k is the number of dim
# plot solution
x <- fit$points[,1]
y <- fit$points[,2]
plot(x, y, xlab="Coordinate 1", ylab="Coordinate 2",
      main="Metric MDS", type="n")
points(x, y,cex = .5,col = "dark red")

```