



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

MATEMATINIO MODELIAVIMO KATEDRA

Kęstutis Jaudzemas

**NASDAQ INDEKSO KINTAMUMO PROGNOZAVIMAS GARCH
MODELIAIS**

Magistro darbas

Vadovas
prof. dr. E.Valakevičius

KAUNAS, 2014

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

MATEMATINIO MODELIAVIMO KATEDRA

TVIRTINU

Katedros vedėjas

prof.dr. E. Valakevičius

2014 06 02

**NASDAQ INDEKSO KINTAMUMO PROGNOZAVIMAS GARCH
MODELIAIS**

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas

prof. dr. E.Valakevičius

2014 06 01

Recenzentas

doc.dr. R.Misevičienė

2014 06 01

Atliko

FMMM 7 gr. stud.

K.Jaudzemas

2014 05 30

KAUNAS, 2014

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas:

Juozas Augutis, profesorius (VDU)

Sekretorius:

Eimutis Valakevičius, profesorius (KTU)

Nariai:

Jonas Valantinas, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Pekarskas, profesorius (KTU)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., direktoriaus pavaduotojas (UAB „Danet Baltic“)

Jaudzemas K. Forecasting volatility of NASDAQ index with GARCH models: Master's work in applied mathematics / supervisor dr. assoc. prof. E. Valakevičius; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2014. – 55 p.

SUMMARY

The main problem is the unstable nature of observed time series and its heteroscedasticity, making it impossible to apply certain time series models. Time series models namely, the generalized autoregressive conditional heteroscedastic (GARCH) models with different lags and distributions were fitted to the data. The stages in the model building namely, identification, estimation and checking has been explored and applied to the data. A best fitting model was selected based on how well the model captures the stochastic variation in the data (goodness of fit). The goodness of fit is assessed through the Akaike information criteria (AIC), the Bayesian information criteria (BIC), the mean absolute error (MAE) and mean square error (MSE). Based on minimum AIC, BIC, MAE and MSE values, the best fit GARCH model tend to be GARCH(1,1). Having satisfied with all the model assumptions, GARCH(1,1) was judged to be the best model for forecasting. Based on the selected model, we forecasted ten (10) days of the conditional volatility out – of – sample period (that is from 02 January 2014 to 15 December2014). From the results, it has been observed that the forecasted series are close to the actual series.

Jaudzemas K. NASDAQ indekso kintamumo prognozavimas GARCH modeliais: Taikomosios matematikos magistro darbas / vadovas prof. dr. E. Valakevičius; Matematinės sistemos tyros katedra, Fundamentaliųjų mokslų fakultetas, Kauno Technologijos Universitetas. – Kaunas, 2014. – 55 p.

SANTRAUKA

Pagrindinė problema yra stebimos laiko eilutės nestabilus pobūdis ir jos heteroskedastiškumas. Dėl šios priežasties, kai kurių laiko eilučių modelių taikymas tampa neįmanomu dalyku. Laiko eilučių modeliai, tokie kaip apibendrinti autoregresiniai sąlyginio heteroskedastiškumo (GARCH) modeliai, su skirtingais vėlavimais ir pasiskirstymo funkcijomis, buvo pritaikyti nagrinėjamiems duomenims. Modelio sudarymo etapai susideda iš identifikavimo, įvertinimo ir modelio adekvatumo tikrinimo. Geriausiai tinkamas modelis buvo parenkamas remiantis kaip gerai pasirinktas modelis atkartoja stochastinį kintamumą, esantį duomenyse. Modelis parenkamas pasinaudojant Akaike (AIC), Bajeso (BIC) informaciniais kriterijais, vidutine absoliutine ir vidutine kvadratine paklaida. Remiantis mažiausiomis AIC, BIC, MAE ir MSE reikšmėmis, geriausiai tinkantis kintamumo modelis gaunamas GARCH(1,1). Tenkinant visoms modelio prielaidoms GARCH(1,1) buvo parenkamas kaip geriausiai prognozavimui tinkantis modelis. Pasirinktu modeliu, atlikome dešimties dienų sąlyginio kintamumo prognozę (prognozuojamas periodas yra nuo 2014 sausio 02 iki 2014 gruodžio 15 dienos). Gauname, kad prognozuojama eilutė mažai skiriasi nuo tikrosios laiko eilutės.

TURINYS

IVADAS	9
1. TEORINĖ DALIS.....	11
1.1. Akcijų kainų indeksas	11
1.2. Finansinės gražos	11
1.2.1. Finansinių gražų empirinės savybės	12
1.2.2. Finansinių gražų stacionarumas.....	13
1.2.2.1. Grafinė analizė.....	13
1.2.2.2. ADF testas	15
1.2.3. Jarque – Bera kriterijus	15
1.2.4. Autokoreliacija ir dalinė autokoreliacija.....	16
1.2.5. Ljung – Box kriterijus.....	16
1.2.6. Baltasis triukšmas	17
1.3. Sąlyginis heteroskedastiškumas.....	17
1.3.1. Engle ARCH kriterijus.....	18
1.3.2. ARCH modelis.....	18
1.3.3. GARCH modelis.....	19
1.3.4. ARCH ir GARCH parametrų vertinimas.....	20
1.3.4.1. ARCH(1) modelio parametrų vertinimas	20
1.3.4.2. GARCH(1,1) modelio parametrų vertinimas	21
1.3.5. Prognozavimas ARCH modeliu.....	22
1.3.6. Prognozavimas GARCH modeliu.....	23
1.4. Modelio parinkimo kriterijai.....	23
1.4.1. AIC kriterijus	23
1.4.2. BIC kriterijus	24
1.4.3. MSE ir MAE kriterijai	24
2. TIRIAMOJI DALIS.....	25
2.1. Analizės objektas	25
2.2. Duomenų stacionarumas.....	25
2.3. Finansinės eilutės pagrindinės statistikos	26
2.4. Laiko eilutės autokoreliacija.....	27
2.5. Ljung – Box kriterijaus rezultatai	29
2.6. Engle ARCH kriterijaus rezultatai.....	29
2.7. ARCH modelio sudarymas	30

2.7.1.	ARCH modelio eilės parinkimas	30
2.7.2.	ARCH modelio sudarymas (Gauso)	31
2.7.3.	ARCH(11) adekvatumo tikrinimas (Gauso)	32
2.7.4.	ARCH modelio sudarymas (Studento)	34
2.7.5.	ARCH(11) adekvatumo tikrinimas (Studento)	35
2.8.	GARCH modelio sudarymas	36
2.8.1.	GARCH modelio sudarymas (Gauso)	36
2.8.2.	GARCH(1,1) adekvatumo tikrinimas (Gauso)	37
2.8.3.	GARCH modelio sudarymas (Studento)	39
2.8.4.	GARCH(1,1) adekvatumo tikrinimas (Studento)	40
2.9.	Prognozavimas Gauso ARCH(11) modeliu.....	41
2.10.	Prognozavimas Gauso GARCH(1,1) modeliu.....	43
3.	PROGRAMINĖ REALIZACIJA	45
	IŠVADOS	46
	LITERATŪRA	47
	PRIEDAS. PROGRAMOS TEKSTAS	48

LENTELIŲ SĄRAŠAS

2.1. lentelė. Laiko eilutės aprašomoji statistika	27
2.2. lentelė. Ljung-Box testo rezultatai (kvadratinės gražos rodiklis)	29
2.3. lentelė. Engle ARCH testo rezultatai	29
2.4. lentelė. ARCH(11) parametrų reikšmės (Gauso)	31
2.5. lentelė. Standartizuotos simetrinio ARCH(11) paklaidos (Ljung – Box kriterijus)	33
2.6. lentelė. Standartizuotos simetrinio ARCH(11) paklaidos (Engle ARCH kriterijus)	33
2.7. lentelė. ARCH(11) parametrų reikšmės (Studento)	34
2.8. lentelė. Standartizuotos Studento ARCH(11) paklaidos (Ljung – Box kriterijus)	35
2.9. lentelė. Standartizuotos Studento ARCH(11) paklaidos (Engle ARCH kriterijus)	36
2.10. lentelė. Simetrinių GARCH modelių parinkimo kriterijai	37
2.11. lentelė. Simetrinių GARCH modelių parametrų reikšmės	37
2.12. lentelė. Standartizuotos simetrinio GARCH(1,1) paklaidos (Ljung – Box kriterijus)	39
2.13. lentelė. Standartizuotos simetrinio GARCH(1,1) paklaidos (Engle ARCH kriterijus)	39
2.14. lentelė. Studento GARCH modelių parinkimo kriterijai	40
2.15. lentelė. Studento GARCH modelių parametrų reikšmės	40
2.16. lentelė. Standartizuotos simetrinio GARCH(1,1) paklaidos (Ljung – Box kriterijus)	41
2.17. lentelė. Standartizuotos Studento GARCH(1,1) paklaidos (Engle ARCH kriterijus)	41
2.18. lentelė. Simetrinio ARCH(11) dešimties dienų prognozės	42
2.19. lentelė. Simetrinio GARCH(1,1) dešimties dienų prognozės	44

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1.1. pav. Nestacionari laiko eilutė	14
1.2. pav. Stacionari laiko eilutė	14
2.1. pav. NASDAQ indekso laiko eilutės kitimas tiriamuoju laikotarpiu	25
2.2. pav. NASDAQ indekso logaritminės gražos	26
2.3. pav. Laiko eilutės autokoreliacijos funkcija (gražos rodiklis)	28
2.4. pav. Laiko eilutės autokoreliacijos funkcija (kvadratinės gražos rodiklis)	28
2.5. pav. Dalinės autokoreliacijos funkcija (kvadratinės gražos rodiklis)	30
2.6. pav. Standartizuotų paklaidų ACF (kvadratinės gražos rodiklis)	32
2.7. pav. Standartizuotų GARCH(1,1) paklaidų ACF (kvadratinės gražos rodiklis)	38
2.8. pav. ARCH(11) dešimties dienų prognozė	43
2.9. pav. GARCH(1,1) dešimties dienų prognozė	44

IVADAS

Paskutiniais dešimtmečiais vis daugiau dėmesio skiriama finansų rinkų nepastovumui (kintamumui) tirti. Kintamumo tyrimai padėjo geriau suprasti tokias finansų ekonomikos kryptis kaip portfelio parinkimas, pasirinkimo sandorių vertinimas bei rizikos valdymas.

Analizuoti ir aprašinėti atsitiktinius bei kintančius laiko atžvilgiu svyravimus, kurie būdingi finansų rinkoms, ypač svarbu, kadangi akcijų, pasirinkimo sandorių ir kitų išvestinių finansinių priemonių vertė priklauso nuo rizikos. Rizika kiekybiškai nusakoma kintamumu. Svyravimų kaita, laiko atžvilgiu, gali būti labai ryški: didelius svyravimus keičia mažų svyravimų laikotarpiai ir atvirkščiai. Vis dėlto, anksčiau tyrinėtojai iš anksto darydavo prielaidą apie pastovų kintamumą ir nuo laiko priklausančio kintamumo nepaisydavo. 2003 m. Nobelio premijos laureatas Robert F. Engle sukūrė autoregresinio sąlyginio heteroskedastiškumo modelį (angl. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity – ARCH), kuris aprašė ekonominių laiko eilučių ir metodų, kurie buvo sukurti priklausančiam nuo laiko kintamumui vertinti, savybes. Šiuo metu ARCH modelis yra tapęs nepakeičiama priemone finansų rinkų analitikams, kurie jį taiko vertindami portfelio riziką ar nustatydami turto kainą. Bollerslev (1986) išplėtojo Engle pradėtą techniką, sukurdamas apibendrintą autoregresinio sąlyginio heteroskedastiškumo modelį GARCH, kuris atsižvelgia į autoregresinį ir slenkančio vidurkio komponentus heteroskedastiniame variantiškume.

Visos šalies rinkos padėties negali atspindėti vienos bendrovės akcijos, todėl yra sudarinėjami indeksai, kurie padeda stebėti visos šalies (regiono) akcijų kitimo tendencijas, t.y. indeksas padeda nustatyti tam tikro regiono akcijų rinkos padėtį, valstybės ir netgi pasaulio mastu. Indeksas parodo akcijų rinkos pakilimus ir nuosmukius, todėl remiantis matematiniais prognozavimo metodais galima nuspėti būsimus akcijų rinkos pokyčius. Prognozavimas tampa kasdienybės dalimi, kadangi šių dienų aktualijos, kurios susijusios su visą pasaulį palietusią finansų krize, daugelį skatina planuoti savo veiksmus. Vis dėlto, ne viskas taip paprasta: prognozavimas dinamiškoje aplinkoje sukelia daug sunkumų.

Šio darbo tikslas empiriškai išnagrinėti NASDAQ akcijų kainų indekso prognozės atlikimą ARCH ir GARCH modeliais. Nagrinėjamos yra kainų indekso dieninės logaritminės grąžos nuo 1987 m. 01 mėn. 02 d. iki 2013 m. 12 mėn. 31 d. Tyrimo eiga susideda iš kelių dalių. Pirmojoje dalyje patikrinama ar pasirinkta finansinė laiko eilutė pasižymi išskirtinėmis empirinėmis duomenų savybėmis. Pavyzdžiui, kintamumo klasterizacija, heteroskedastiškumas, ilgalaikės atminties buvimas tarp antros eilės momentų. Antrojoje dalyje, pasinaudojant informaciniais kriterijais, parenkamas modelis ir vėlavimų skaičius, kuris nurodo kiek toli žvelgsime į praeitį. Toliau, sekančiose dalyse, po modelio

identifikavimo yra labai svarbus etapas, tai modelio diagnostikos tyrimas. Šio tyrimo pagalba, galime tiek empiriniu, tiek grafiniu būdu įvertinti modelio tinkamumą nagrinėjamiems duomenims. Galutinis žingsnis yra prognozės įgyvendinimas.

Visi tyrimai buvo atliekami su MATLAB ir EXCEL programomis. Atitinkami programiniai kodai, skirti atlikti tyrimą, yra pateikti priede.

1. TEORINĖ DALIS

1.1. Akcijų kainų indeksas

Kiekviena birža ar agentūra, užsiimanti investavimu, skaičiuoja savus indeksus, kad galėtų aiškiai parodyti regiono ar pramonės akcijų rinkos būklę. NASDAQ indeksas yra vertybinių popierių indeksas, kurio svarbią dalį sudaro aukštųjų technologijų bendrovės ir kurių akcijomis prekiaujama NASDAQ vertybinių popierių biržoje.

Akcijų indeksas apibūdina bendras tam tikros akcijų rinkos ar biržos tendencijas. Skaičiuojant akcijų indeksus yra įvertinamos didžiausių toje biržoje prekiaujamų įmonių akcijų kainos. Jei indekso vertė kilo, tai reiškia, kad didžiausių biržos įmonių akcijos brango. Akcijų indeksai neturi matavimo vienetų, kadangi jie yra apskaičiuojami kaip pinigų verčių santykis, remiantis tam tikra formule. Kaip jau yra žinoma, indeksai kinta laike, todėl yra lengva pamatyti tam tikras tendencijas. Be to, ši priemonė leidžia investuotojams įvertinti vertybinių popierių rinkos būklę.

NASDAQ yra JAV birža, įsteigta 1971 m. Niujorke. Birža skirta greitai besivystančių ir augančių smulkių, bei vidutinių mokslo ir technikos naujovėms imlių įmonių kapitalų kaupimui. Dabartyje ši birža yra populiariausia aukštų ir naujų technologijų kompanijų akcijų rinkoje, kurioje kotiravosi daugiau nei 3000 kompanijų akcijos. Šioje biržoje vyksta intensyviausios apimties prekyba vertybiniais popieriais. Grupė žinoma NASDAQ OMX vardu, kontroliuoja ir operuoja NASDAQ akcijų mainus Niujorke. Ji taip pat operuoja aštuoniais akcijų prekybos punktais Europoje ir valdo trečdalį Dubajaus akcijų biržos. Šis akcijų indeksas yra vienas pagrindinių akcijų rinkos būseną atspindinčių indeksų pasaulyje.

1.2. Finansinės grąžos

Paprastai finansų matematikoje analizuojama ne kainos, o jų grąžos. Tarp priešasčių, lemiančių tokį analizės objekto pasirinkimą, yra, kad vidutiniam investuotojui grąža yra pilna, nepriklausanti nuo matavimo vienetų informacija apie investavimo galimybes. Dažnai grąžos turi „gražesnes“ nei kainos statistines savybes, todėl su jomis lengviau „dirbti“. Kainos skirtingais laiko momentais yra stipriau koreliuotos nei (santykiniai) pokyčiai.

Finansinio aktyvo paprastoji grąža laiko momentu t yra

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (1.2.1)$$

ir logaritminė grąža

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right), \quad (1.2.2)$$

kur P_t yra finansinio aktyvo kaina momentu t .

Toliau darbe bus nagrinėjamos (1.2.2) matematine išraiška gaunamos pasirinkto finansinio aktyvo grąžos.

1.2.1. Finansinių grąžų empirinės savybės

Paprastai finansinių laiko eilučių analizės objektu yra finansiniai duomenys, pavyzdžiui, akcijų ar obligacijų kainos, indeksų reikšmės, valiutų keitimo kursai ir pan.

Viena iš svarbiausių finansinių duomenų empirinės analizės sąlygų yra statistinių savybių invariantiškumas laiko atžvilgiu. Jei praeities duomenų savybės neturi nieko bendro su dabarties ir ateities kainų kitimu, tai tokių duomenų tyrimas būtų beprasmiškas. Todėl svarbi statistinės analizės prielaida yra funkcijos $r(t)$ stacionarumo hipotezė: bet kuriems t_1, \dots, t_k ir s , vektorių $\{r(t_1), \dots, r(t_k)\}$ ir $\{r(t_1 + s), \dots, r(t_k + s)\}$ tikimybiniai skirstiniai yra lygūs. Taip pat dideli kainų pokyčiai pasirodo žymiai dažniau nei tuo atveju, kai skirstinys normalusis. Toks efektas galėtų būti paaiškinamas, tuo, kad logaritminės grąžos skirstinys turi sunkią uodegą.

To paties absoliutinio dydžio grąžas lydi nevienodo dydžio kintamumo reikšmės – kintamumas yra didesnis po neigiamos grąžos (t.y. po kainos kritimo). Tai paprastai aiškina tuo, kad investuotojai „jautriau“ reaguoja į neigiamą informaciją, nei į teigiamą informaciją. Dėl šios asimetrijos kovariacija tarp grąžos ir būsimų kintamumo reikšmių yra neigiama. Šis efektas dar vadinamas sverto efektu.

Daugelis finansinių laiko eilučių pasižymi kintamumo klasterizacija. Tikėtina, kad finansiniuose duomenyse didelio kintamumo periodai ir mažo kintamumo periodai seka vienas paskui kitą, t.y. stebima kintamumo klasterizacija.

Pačios grąžos r_t tarpusavyje yra beveik nekoreliuotos, o jų absoliutinių dydžių laipsniai $|r_t|^\delta$ ($\delta > 0$) turi nenulinę koreliaciją. Ši savybė pirmą kartą buvo paminėta Taylor'o (1986) ir dėlto kartais vadinama Taylor'o efektu.

Koreliacijos tarp $|r_t|^\delta$ ir $|r_s|^\delta$ įvertis, didėjant $|t - s|$, gęsta lėtai (panašiai kaip laipsninė funkcija). Tas pats teisinga ir koreliacijai tarp kintamumo įverčių. Dar sakoma, kad šie dydžiai pasižymi stipriu nuolatinimu.

Vienas pagrindinių finansinių laiko eilučių analizės uždavinių yra paieška tokių modelių, kurie kaip galima adekvačiau pasižymėtų savybėmis panašiomis į aptinkamus, aukščiau išvardytus, faktus.

1.2.2. Finansinių gražų stacionarumas

Analizėje tikrinamos laiko eilutės, kurios yra stacionarios plačiąja prasme. Procesas Y_t yra stacionarus plačiąja prasme, jei :

- $EY_t^2 < \infty$, bet kokiam $t \in T$; (1.2.2.1)

- $EY_t^2 = EY_0^2$, bet kokiam $t \in T$; (1.2.2.2)

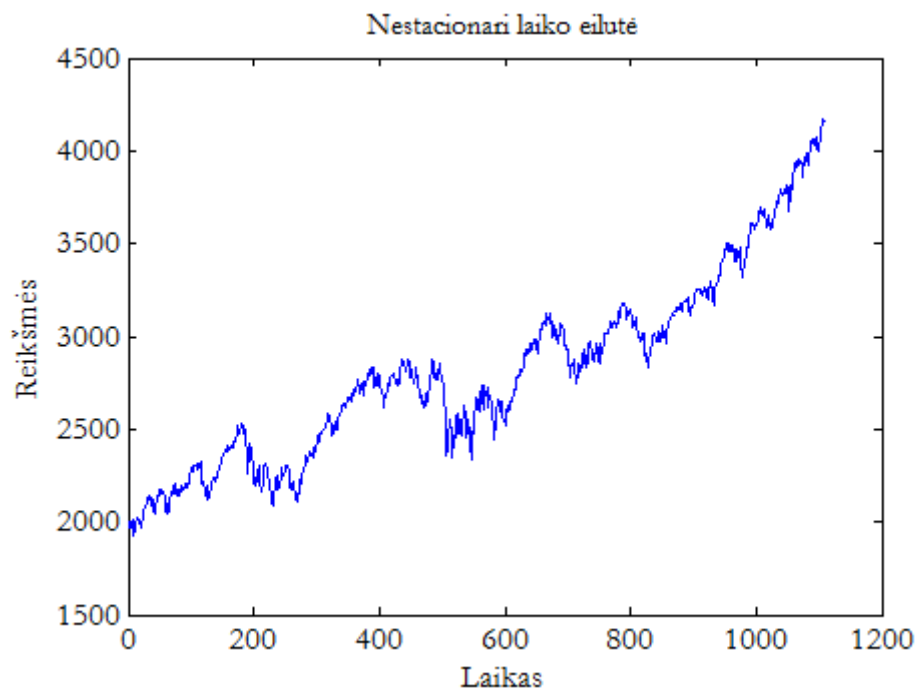
- $cov(t, s) = cov(t + h, s + h)$ bet kokiems $t, s, h \in T$. (1.2.2.3)

ARCH ir GARCH modeliams naudojamos stacionarios laiko eilutės, todėl kintamojo stacionarumo tikrinimui naudojamos šios priemonės:

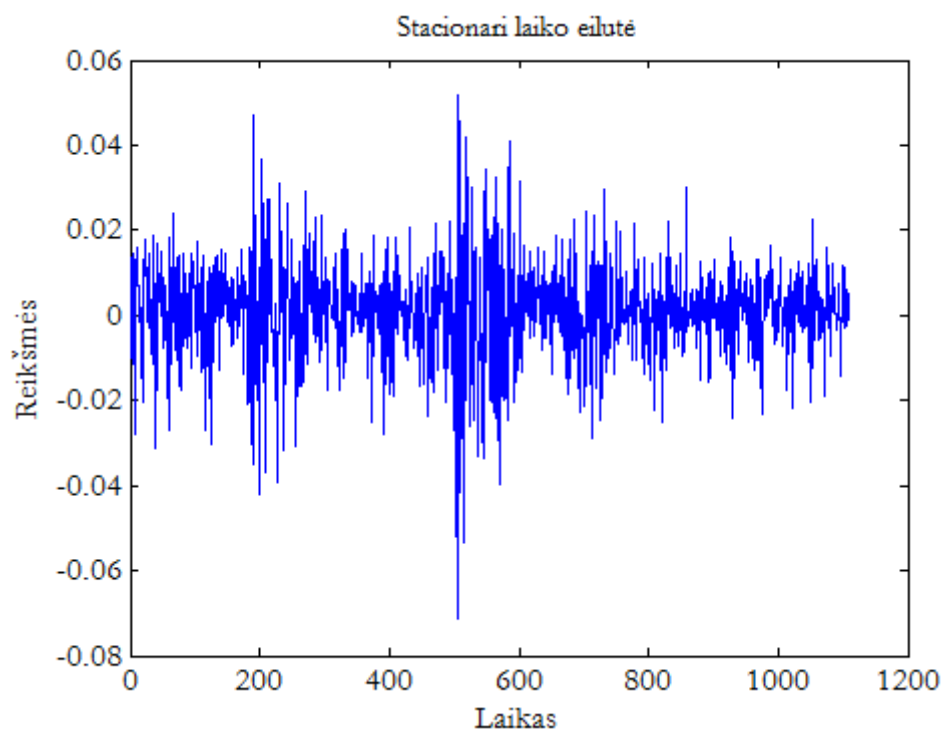
- grafinė analizė;
- vienietinės šaknies testas (Augmented Dickey Fuller (ADF) test).

1.2.2.1. Grafinė analizė

Laiko eilutei nubrėžiami grafikai ir vizualiai įvertinamas jų kitimas laike. Grafinė analizė padeda preliminariai identifikuoti laiko eilutės tendą ir stebėjimų išskirtis.



1.1 pav. Nestacionari laiko eilutė



1.2 pav. Stacionari laiko eilutė

1.2.2.2. ADF testas

Stacionarumo nustatymui neužtenka vien grafinės analizės. Dėl to buvo sukonstruoti įvairūs testai hipotezei apie duomenų stacionarumą tikrinti.

Vienas populiariausių stacionarumo hipotezės tikrinimo testų yra *Augmented Dickey – Fuller*, arba ADF, testas. ADF testas skirtas patikrinti, ar laiko eilutė turi vienetinę šaknį. Vienetinė šaknis yra laiko eilutės autoregresijos parametras, lygus 1. Jei laiko eilutė turi vienetinę šaknį, sakoma, kad ji nėra stacionari.

ADF testavimo procedūra atliekama modeliui

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \gamma Y_{t-1} + \delta_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \delta_p \Delta Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (1.2.2.2.1)$$

kur α ir β yra konstantos, p yra vėlavimų skaičius. Vienetinės šaknies testas vykdomas nulinei hipotezei $\gamma = 0$ su alternatyvia hipoteze $\gamma < 0$. Testo statistika

$$DF_t = \frac{\hat{\gamma}}{SE(\hat{\gamma})} \quad (1.2.2.2.2)$$

lyginama su atitinkama Dickey – Fuller testo, taikomo autoregresiniam modeliui, kritine reikšme.

1.2.3. Jarque – Bera kriterijus

Jarque – Bera testas tikrina ar nagrinėjama laiko eilutė yra pasiskirsčiusi pagal normalųjį skirstinį. Šio testo hipotezė:

H_0 : eilutė pasiskirsčiusi pagal normalųjį skirstinį;

H_a : eilutė pasiskirsčiusi ne pagal normalųjį skirstinį.

Testo statistika apskaičiuojama pagal formulę:

$$JB = \frac{N - k}{6} \left(S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right), \quad (1.2.3.1)$$

kur S - asimetrijos koeficientas, K – eksceso koeficientas, k – įvertintų koeficientų skaičius.

Jarque – Bera statistika pasiskirsčiusi pagal χ_2^2 skirstinį. Tuomet jeigu duomenys yra pasiskirstę ne pagal Gauso skirstinį, gausime $JB \geq \chi_2^2$ ir atmetame nulinę hipotezę.

1.2.4. Autokoreliacija ir dalinė autokoreliacija

Remiantis autokoreliacijos (ACF) ir dalinės autokoreliacijos (PACF) grafikais, galima nustatyti, ar procesas stacionarus. Stacionaraus proceso ACF reikšmės artimos nuliui išskyrus ryškiai išsiskiriantį rezultatą taške $t = 0$. Tuo tarpu PACF visi koeficientai yra artimi nuliui (nekerta reikšmingumo lygmens).

Taip pat iš autokoreliacijos finansinių grąžų pirmo ir antro momentų grafiku, galima nustatyti, ar nagrinėjama finansinė laiko eilutė pasižymi duomenų empirinėmis savybėmis. Finansinė eilutė yra beveik nekoreliuota arba nekoreliuota, jeigu finansinių grąžų ACF reikšmės artimos nuliui. Jeigu finansinių kvadratinių grąžų ACF reikšmės yra aukščiau reikšmingumo lygmens, tai tarp grąžų egzistuoja ilgalaikės atminties efektas.

1.2.5. Ljung – Box kriterijus

Modelio adekvatumui ir laiko eilutės autokoreliacijai tikrinti naudojamas Ljung-Box kriterijus. Šis kriterijus naudojamas GARCH modelio paklaidų nepriklausomumui tikrinti. Paklaidų analizė leidžia įvertinti modelio adekvatumą, nes viena iš prielaidų – modelio paklaidos turi tenkinti baltojo triukšmo apibrėžimą.

Kriterijus paremtas šių hipotezių tikrinimu:

$$H_0: \hat{\rho} = 0 ; \tag{1.2.5.1}$$

$$H_a: \hat{\rho} \neq 0 ;$$

$\hat{\rho}$ – autokoreliacijos koeficiento įvertis.

Kitaip tariant, H_0 hipotezė teigia, kad modelio paklaidos yra nepriklausomos.

Apibrėžiama testo statistika:

$$Q = n \cdot (n + 2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n - k}, \tag{1.2.5.2}$$

kur n – imties dydis, $\hat{\rho}_k^2$ – imties autokoreliacijos koeficientas esant k – ajam vėlavimui, h – teste naudotų vėlavimų skaičius.

Empirinė statistikos reikšmė lyginama su teorine Chi-kvadrato statistikos reikšme ($\chi_{1-\alpha, h}^2$) su h laisvės laipsniais.

1.2.6. Baltasis triukšmas

Galima teigti, kad modelis yra geras, jei jo liekanos sudaro baltąjį triukšmą. Procesas W_t vadinamas baltuoju triukšmu, jei jis yra stacionarus, vidurkis $EW_t = 0, \forall t$, ir kovariacija $cov(W_t, W_s) = 0, t \neq s$.

1.3. Sąlyginis heteroskedastiškumas

Kaip ir regresinėje analizėje, kur svarbią klasę sudaro heteroskedastinių paklaidų (t.y. su nepastovia dispersija) regresijos modeliai, aprašant finansinius duomenis, svarbiausią vietą užima vadinamieji sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai, naudojami kintamumui modeliuoti.

Indekso ar vertybinio popieriaus kintamumas gali būti traktuojamas kaip gražų standartinis nuokrypis arba dispersija. Laiko eilučių modeliavimas su laike kintančia dispersija visada buvo sunkiai sprendžiama problema. Autoregresiniai sąlyginiai heteroskedastiškumo (ARCH) modeliai buvo pirmieji, kurie susidorojo su šiais sunkumais. Vienas populiariausių įrankių, skirtų modeliuoti ir prognozuoti, tapo apibendrintas autoregresinis sąlyginio heteroskedastiškumo (GARCH) modelis. Vis dėlto, nepaisant jo sėkmės, GARCH modelis buvo kritikuojamas dėl nesugebėjimo užfiksuoti asimetriško kintamumo.

1.3.2. Engle ARCH kriterijus

Engle ARCH kriterijus parodo ar nagrinėjama finansinė eilutė yra heteroskedastiška.

Turint laiko eilutę, $Y_t = \mu_t + \varepsilon_t$, kur μ_t – salyginis vidurkis, o ε_t – nuokrypio paklaida su vidurkiu lygiu 0. Tuomet kriterijus paremtas šių hipotezių tikrinimu:

$$H_0: \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0;$$

(1.3.1.1)

$$H_a: e^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot e^2_{t-1} + \dots + \alpha_m \cdot e^2_{t-m} + \mu_t.$$

Engle ARCH testas yra standartinis F - kriterijus, regresijos lygčiai, naudojant kvadratinę paklaidą. Nulinė hipotezė yra paremta Chi - kvadrato statistika su m - laisvės laipsnių skaičiumi.

1.3.3. ARCH modelis

Tegu $\{r_t\}$ finansinio aktyvo grąžų laiko eilutė. Engle pasiūlytame modelyje grąžos r_t turi pavidalą

$$r_t = \mu_t + a_t, \quad (1.3.2.1)$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t \in Z, \quad (1.3.2.2)$$

kur dažniausiai laikoma, kad ε_t yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę pagal $N(0,1)$ skirstinį arba pagal Studento skirstinį atsitiktiniai dydžiai. $\sigma_t > 0$ nusakoma lygybe

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2, \quad (1.3.2.3)$$

kur svoriai $\alpha_0 > 0, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, p$. Toliau laikysime, kad ε_t yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su parametrais: 0 ir 1.

Jeigu

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1, \quad (1.3.2.4)$$

tai ARCH procesas yra plačiąją prasme stacionarus su besąlygine dispersija

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i}. \quad (1.3.2.5)$$

Lygtys (1.3.2.1) – (1.3.2.3) ir nusako vadinamąjį p – os eilės autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo arba, trumpiau, ARCH(p) modelį.

1.3.4. GARCH modelis

Apibendrintas autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo (GARCH) modelis, kurį, kaip ARCH modelio apibendrinimą, sukūrė Bollerslev(1986), yra populiariausias ir dažniausiai naudojamas modeliuojant ir prognozuojant kintamumą. Pagal jį gražos turi (1.3.2.1) pavidalą, o kintamumas aprašomas lygtimi

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (1.3.3.1)$$

kur svoriai $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ su $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$.

Apibendrintas autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo procesas turi stacionarų sprendinį $\{a_t\}$, tenkinantį $E a_t^2 < \infty$, jei modelio parametrai tenkiną nelygybę

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1. \quad (1.3.3.2)$$

Taigi, jei (1.3.3.2), tai GARCH(p,q) lygtys turi besąlyginę dispersiją, lygią

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j} < \infty. \quad (1.3.3.3)$$

Praktiniai skaičiavimai rodo, kad mažos eilės modeliai pakankamai tiksliai atspindi duomenis, todėl dažnai GARCH(1,1) modelis yra pakankamas nagrinėjamiems duomenims.

Apibendrinti autoregresiniai sąlyginio heteroskedastiškumo modeliai dar yra skirstomi į:

- netiesinius (NGARCH);
- eksponentinius (EGARCH);
- kvadratinius (QGARCH);
- Glosten – Jagannathan – Runkle (GJR – GARCH) ir t.t.

1.3.5. ARCH ir GARCH parametrų vertinimas

1.3.5.2. ARCH(1) modelio parametrų vertinimas

Vienas iš didžiausių ARCH modelių pranašumu yra lengvai užrašomas daugiamatis gražų tankis, todėl, norint vertinti parametrus, nesunku taikyti didžiausio tikėtimumo metodą. Bet kokiam atsitiktinių dydžių vektoriui (X_1, \dots, X_n) jo tankis (jei jis egzistuoja ir yra teigiamas) gali būti užrašytas tokia sąlyginių tankių sandauga:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \prod_{i=2}^n f_{X_i|X_{i-1}, \dots, X_1}(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1). \quad (1.3.4.1.1)$$

ARCH(1) modelio $(X_t = a_t)$ su $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ atveju turime

$$\begin{aligned} f_{X_1|X_{i-1}, \dots, X_1}(x_i|x_{i-1}, \dots, x_1) &= f_{X_1|X_{i-1}}(x_i|x_{i-1}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha_0 + \alpha_1 x_{i-1}^2)}} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2(\alpha_0 + \alpha_1 x_{i-1}^2)}\right\}. \end{aligned} \quad (1.3.4.1.2)$$

Taigi, duotam a_1 sąlyginė tikėtimumo funkcija yra

$$L \equiv L(a_2, \dots, a_n; \alpha_0, \alpha_1) = \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left\{-\frac{a_i^2}{2\sigma_i^2}\right\} = \quad (1.3.4.1.3)$$

$$= \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(\alpha_0 + \alpha_1 a_{i-1}^2)}} \exp\left\{-\frac{a_i^2}{2(\alpha_0 + \alpha_1 a_{i-1}^2)}\right\},$$

gauname, kad

$$\ln(L) = -\frac{n-1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \frac{a_i^2}{\alpha_0 + \alpha_1 a_{i-1}^2}. \quad (1.3.4.1.4)$$

Pastaroji išraiška gali būti maksimizuojama naudojant skaitinius netiesinio optimizavimo metodus.

1.3.5.3. GARCH(1,1) modelio parametrų vertinimas

Visų pirma pastebėsime, kad panašiai, kaip ARMA modelio atveju, galima gauti tokį σ_t^2 skleidinį begaline eilute:

$$\sigma_t^2 = (1 - \beta_1 B)^{-1}(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \beta_1} + \alpha_1 \sum_{j=1}^{\infty} \beta_1^{j-1} a_{t-j}^2. \quad (1.3.4.2.1)$$

Kadangi teoriškai kintamumas σ_t^2 priklauso nuo be galo daug praėjusių reikšmių $a_{t-1}^2, a_{t-2}^2, \dots$, tai praktikoje vietoj a_t^2 įvedami „nupjauti“ dydžiai $\tilde{a}_t^2 = 0$ su $t \leq 0$, $\tilde{a}_t^2 = a_t^2$ su $t > 0$, o vietoj σ_t^2 - rekurentiškai skaičiuojami dydžiai $\hat{\sigma}_t^2$, $t = 1, 2, \dots$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \tilde{a}_{t-1}^2 + \beta_1 \hat{\sigma}_{t-1}^2, \quad \hat{\sigma}_t^2 = 0, \quad t \leq 0. \quad (1.3.4.2.1)$$

Gauname tokią rekurentinę procedūrą:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \alpha_0,$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{a}_1^2 + \beta_1 \hat{\sigma}_1^2 = \alpha_0 + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 a_1^2, \quad (1.3.4.2.3)$$

$$\hat{\sigma}_3^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{a}_2^2 + \beta_1 \hat{\sigma}_2^2 = \alpha_0 + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_0 \beta_1^2 a_2^2 + \alpha_1 \beta_1 a_1^2.$$

⋮

Įsistatę šias išraiškas į tikėtinumo funkciją

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_i^2}} \exp\left\{-\frac{a_i^2}{2\hat{\sigma}_i^2}\right\} \quad (1.3.4.2.4)$$

ir maksimizuodami ją skaitiniais metodais, randame didžiausio tikėtinumo įverčius $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$. Panašiai parametrai vertinami ir GARCH(p,q) modelyje.

1.3.6. Prognozavimas ARCH modeliu

ARCH modelio prognozės gaunamos rekursiniu būdu. Nagrinėkime ARCH(m) modelį. Vieno žingsnio prognozė σ_{h+1}^2 , kai prognozės pradžia žymima indeksu h , yra apskaičiuojama pagal formulę

$$\sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \dots + \alpha_m a_{h+1-m}^2. \quad (1.3.5.1)$$

Dviejų žingsnių prognozė

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_h^2(1) + \alpha_2 a_h^2 + \dots + \alpha_m a_{h+2-m}^2 \quad (1.3.5.2)$$

ir l žingsnių prognozė σ_{h+l}^2

$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \sigma_h^2(l-i), \quad (1.3.5.3)$$

kur

$$\sigma_h^2(l-i) = a_{h+l-i}^2, \quad l-i \leq 0. \quad (1.3.5.4)$$

1.3.7. Prognozavimas GARCH modeliu

Prognozės, GARCH modeliu, gali būti gaunamos pasinaudojant metodais, kurie yra taikomi ARMA modeliui. Nagrinėkime GARCH(1,1) modelį. Vieno žingsnio prognozė σ_{h+1}^2 apskaičiuojama tokiu būdu

$$\sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2. \quad (1.3.6.1)$$

Dviejų žingsnių prognozė

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_h^2(1) \quad (1.3.6.2)$$

ir l -ojo žingsnio prognozė apskaičiuojama

$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_h^2(l-1), \quad l > 1. \quad (1.3.6.3)$$

1.4. Modelio parinkimo kriterijai

Pasirenkant vieną ar kitą modelį, svarbu įvertinti jo tinkamumą ir pakankamumą nagrinėjamiems duomenims. Tiesiniam ir netiesiniam GARCH modeliavimui vertinti dažniausiai taikomi Akaike informacinis (AIC), Schwarz's Bajeso informacinis (BIC), vidutinės standartinės paklaidos (MSE) ir vidutinės absoliutinės paklaidos (MAE) kriterijai.

1.4.2. AIC kriterijus

AIC – Akaike informacinis kriterijus paprastai apibrėžiamas taip:

$$AIC = 2k - 2\ln(L), \quad (1.4.1.1)$$

kur k yra modelio parametrų skaičius, o L yra maksimizuota modelio tikėtinumo funkcijos reikšmė. Šis kriterijus įvertina informacijos praradimą taikant modelį realiems duomenims ir gali būti apibūdintas kaip aprašantis kompromisą tarp modelio tikslo ir sudėtingumo.

1.4.3. BIC kriterijus

Bajeso informacinis kriterijus, arba Schwarz' s kriterijus – gali būti užrašytas taip:

$$BIC = k \ln(n) - 2 \ln(L), \quad (1.4.2.1)$$

kur k yra modelio parametrų skaičius, n yra laiko eilutės duomenų skaičius, o L yra maksimizuota modelio tikėtinumo funkcijos reikšmė. Vertinant modelio parametrus didžiausio tikėtinumo funkcijos pagalba, tikėtinumą galima padidinti įtraukiant papildomų parametrų, bet gali pakenkti modelio tinkamumui. BIC išsprendžia šią problemą įtraukdamas modelio parametrų apribojimus.

1.4.4. MSE ir MAE kriterijai

Vidutinė kvadratinė paklaida MSE parodo, kiek vidutiniškai modelio įverčiai skiriasi nuo tikrųjų reikšmių:

$$MSE = E((Y - \hat{Y})^2). \quad (1.4.3.1)$$

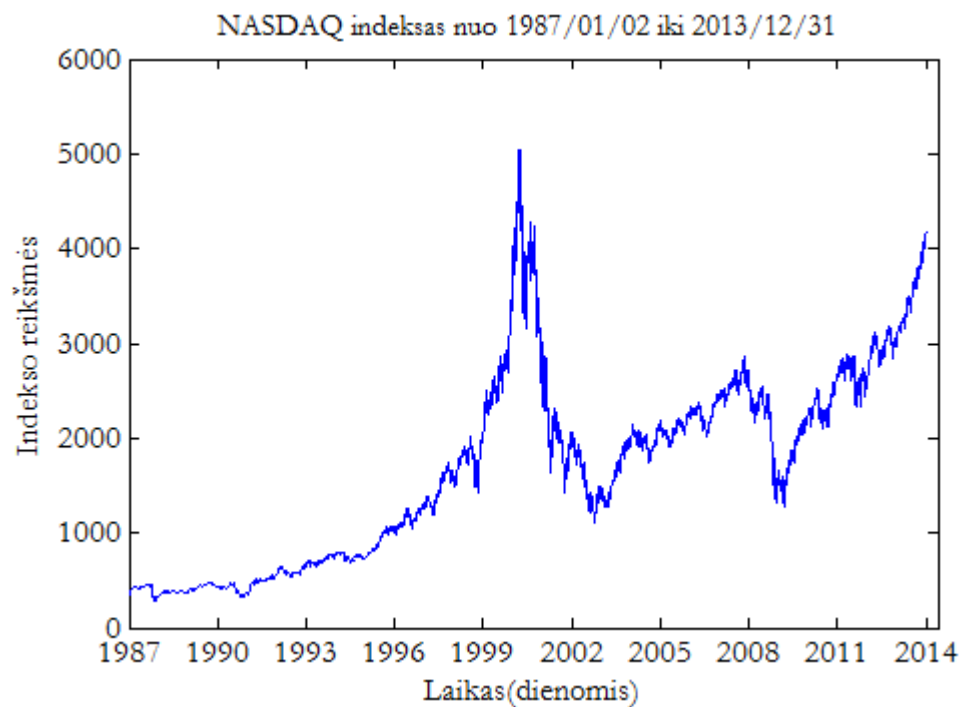
Tuo tarpu, alternatyvus metodas, skirtas vertinti modelio paklaidą yra vidutinė absoliutinė paklaida (MAE):

$$MAE = E(|Y - \hat{Y}|). \quad (1.4.3.2)$$

2. TRIAMOJI DALIS

2.1. Analizės objektas

Kainų kintamumo galimybės geriausiai atsiskleidžia nagrinėjant konkrečius pavyzdžius. Šiame darbe nagrinėjamos NASDAQ akcijų kainų indekso dienosinės reikšmės. Nuo 1987 m. 01 mėn. 02 d. iki 2013 m. 12 mėn. 31 d., fiksuota 6807 akcijų kainų indekso stebėjimų.

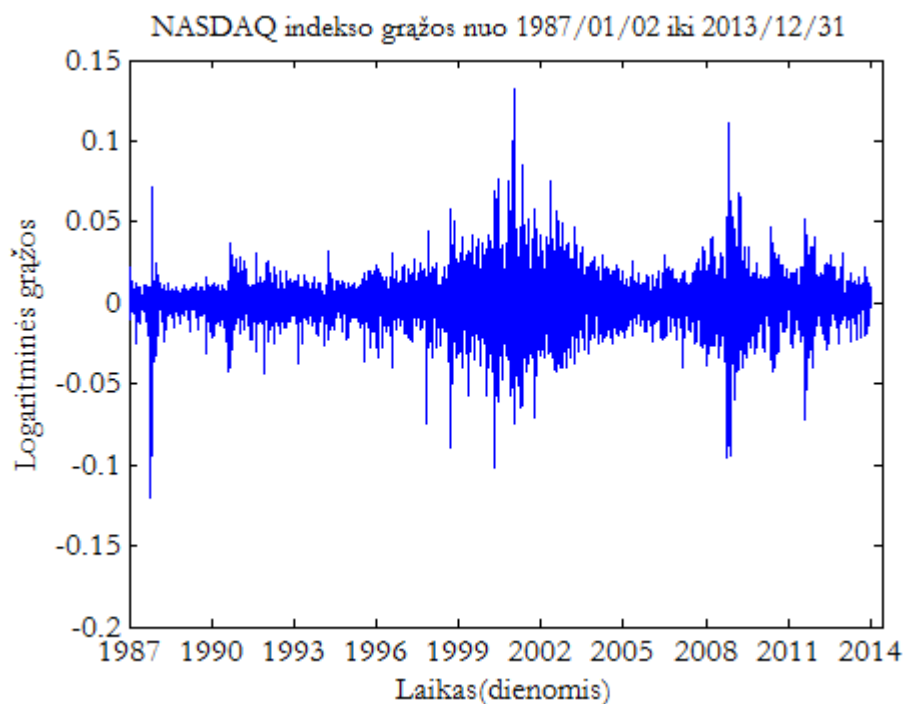


2.1 pav. NASDAQ indekso laiko eilutės kitimas tiriamuoju laikotarpiu

2.2. Duomenų stacionarumas

Iš pirmo žvilgsnio aišku, kad turima eilutė nėra stacionari, todėl akcijų indekso kainas išreikšime logaritminėmis gražomis pagal (1.2.2) formulę.

Iš transformuotos eilutės grafinės analizės rezultatų nėra aišku, ar ši eilutė stacionari (2.2. pav). Eilutės ADF testo p – reikšmė = 0.001 < 0.05, todėl hipotezė apie vienetinės šaknies egzistavimą atmetama, t.y. eilutė stacionari.



2.2 pav. NASDAQ indeksu logaritminės gražos

2.3. Finansinės eilutės pagrindinės statistikos

Nagrinėjant kokios nors laiko eilutės stebėjimus dažniausiai yra daroma prielaida, kad ji yra pasiskirsčiusi pagal normalųjį dėsnį. Tačiau išnagrinėjus ją empiriniu būdu pasirodo, kad tai ne visada teisinga prielaida. Vienas iš būdų nagrinėti eksceso koeficientą, kurio empirinė įvetinimo formulė

$$E_k = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^4}{(N - 1)\sigma^4}, \quad (2.3.1)$$

čia X_1, X_2, \dots, X_N nagrinėjama eilutė, N – stebėjimų skaičius, \bar{X} – stebėjimų vidurkis ir σ – standartinis nuokrypis. Empirinis eksceso koeficientas apibūdina empirinio skirstinio tankio (histogramos) smailumą ($E_k > 3$) arba lėkštumą ($E_k < 3$) lyginant su normaliuoju skirstiniu. Normaliojo skirstinio atveju $E_k = 3$. Jeigu empirinio skirstinio tankio funkcijos maksimumas yra aukščiau (žemiau) nei normaliojo dėsnio, tai sakoma, kad empirinis skirstinys turi teigiamą (neigiamą) ekscesą.

Nagrinėjamu atveju $E_k = 10.430262$. Todėl nagrinėjamos finansinės eilutės empirinio tankio viršūnė yra smailesnė šalia vidurkio reikšmės ir žemėjimo greitis yra didesnis negu normaliojo skirstinio.

Kitas įdomus faktorius, kuris apibūdina skirstinio asimetriškumą - asimetrijos koeficientas. Jo empirinė skaičiavimo išraiška

$$A_s = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^3}{(N-1)\sigma^3}. \quad (2.3.2)$$

Inties asimetrijos koeficientas A_s apibūdina empirinio skirstinio asimetriškumą. Jeigu skirstinys simetriškas vidurkio atžvilgiu, tai $A_s = 0$. Jeigu $A_s > 0$, tai kreivė labiau pasislinkusi į dešinę ir turi ilgesnią uodegą, priešingu atveju į kairę. Nagrinėjamu atveju $A_s = -0.227380$, vadinasi turi ilgesnią uodegą kairėje.

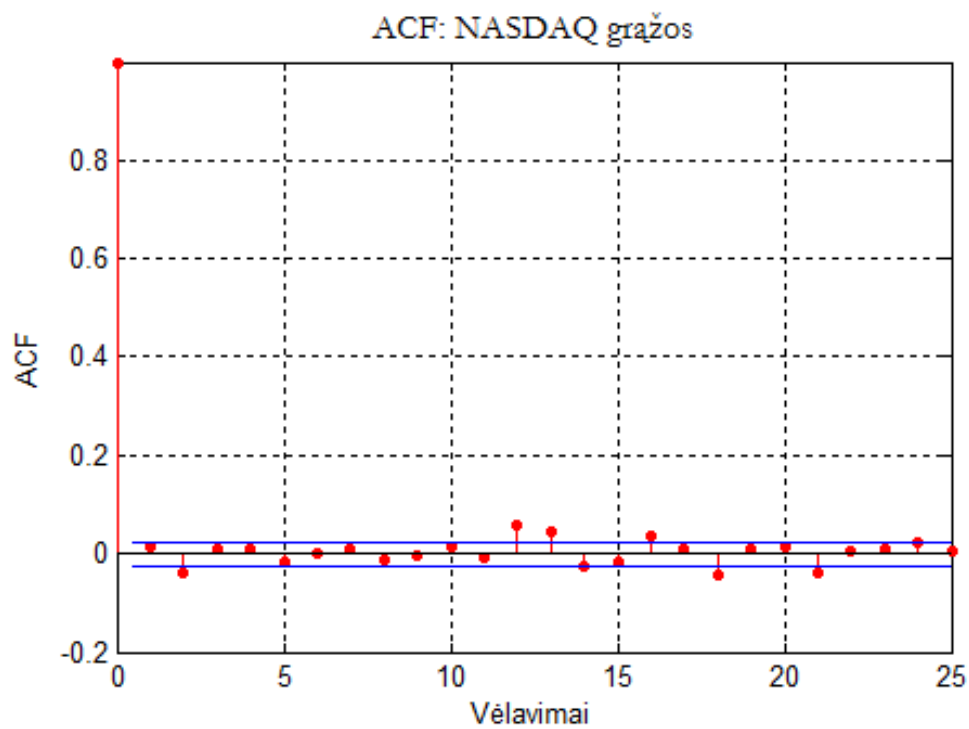
Jarque – Bera testo p – reikšmė $= 0.001 < 0.05$, todėl hipotezė, kad eilutė yra pasiskirsčiusi pagal normalųjį dėsnį yra atmetama.

2.1. lentelė. Laiko eilutės aprašomoji statistika

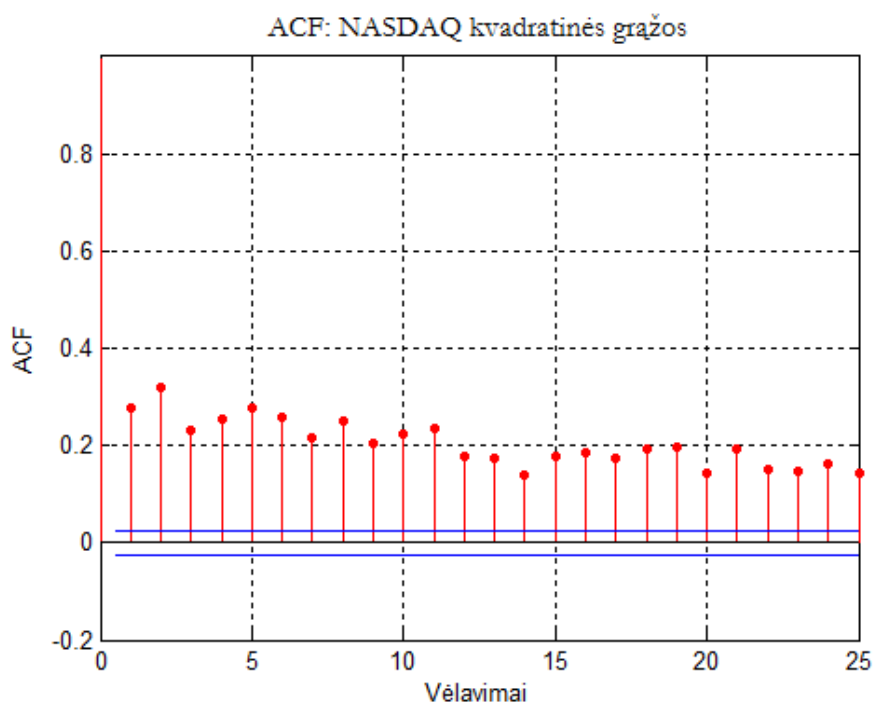
Pagrindinės statistikos	Reikšmės
Vidurkis	0.000363
Mediana	0.001118
Standartinis Nuokrypis	0.014702
Dispersija	0.000216
Eksceso koeficientas	10.430262
Asimetrijos koeficientas	-0.22738
Didžiausia reikšmė	0.132546
Mažiausia reikšmė	-0.120432

2.4. Laiko eilutės autokoreliacija

Finansinės laiko eilutės grąžų ir kvadratinių grąžų autokoreliacinės funkcijos iki 25 vėlavimų grafinis vaizdavimas pateikiamas, atitinkamai **2.3 pav.** ir **2.4 pav.** Grafike aiškiai matosi, kad kvadratinės grąžos atveju (**2.4 pav.**), stebimas ilgalaikės atminties efektas, t.y. antros eilės momentas pasižymi stipriu nuolatinumu (angl. persistency). Taip pat, pačios grąžos r_t tarpusavyje yra beveik nekoreliuotos, o jų absoliutinių dydžių laipsniai $|r_t|^\delta$ ($\delta > 0$) turi nenulinę koreliaciją.



2.3 pav. Laiko eilutės autokoreliacijos funkcija (grąžos rodiklis)



2.4 pav. Laiko eilutės autokoreliacijos funkcija (kvadratinės gražos rodiklis)

2.5. Ljung – Box kriterijaus rezultatai

Skirtingiems vėlavimams (iki 25 periodų) apskaičiuotos Ljung - Box statistikos reikšmės. Indekso kvadratinės gražos rodikliui yra pateiktos **2.2 lentelėje** kartu su atitinkamomis p reikšmėmis. Nulinė hipotezė teigia, kad serijinė koreliacija neegzistuoja ir ši hipotezė yra priimama, kai p reikšmė yra nemažesnė už 0.05. Galima teigti, kad kvadratinės gražos laiko eilutei ($p < 0.05$), nulinė hipotezė yra atmetama.

2.2.5 lentelė Ljung-Box testo rezultatai (kvadratinės gražos rodiklis)

Vėlavimai	p - reikšmė	Statistika	Kritinė reikšmė
10	0	4429.68076	18.30704
15	0	5579.24628	24.99579
20	0	6687.08808	31.41043
25	0	7570.66541	37.65248

2.6. Engle ARCH kriterijaus rezultatai

Sekančiame tyrimo etape įvertinamas dispersijos pokytis laike, naudojant nuo 1 iki 25 periodų vėlavimus. Engle ARCH kriterijaus testo statistika rodo stiprų statistinį reikšmingumą (**2.3 lentelė**), o tai leidžia teigti, jog stebimas heteroskedastišumas. Šis kriterijus padeda nustatyti, ARCH modelio eilę ir sudaryti ARCH modelį, kuris leistų įvertinti duomenų heteroskedastišumą.

2.3. lentelė. Engle ARCH testo rezultatai

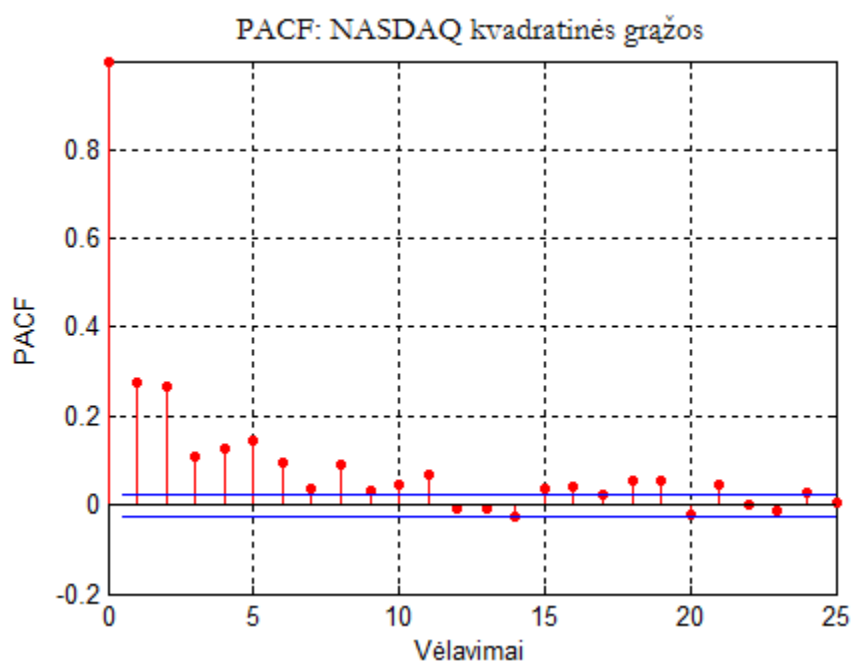
Vėlavimai	p - reikšmė	Statistika	Kritinė reikšmė
10	0	1378.5814	18.30704
15	0	1415.42051	24.99579
20	0	1460.52845	31.41043
25	0	1476.60555	37.65248

2.7. ARCH modelio sudarymas

Šio tyrimo dalyje sudarysime du ARCH modelius, kurių paklaidos atitinkamai pasiskirsčiusios pagal Gauso ir Studento pasiskirstymo funkcijas. Pasinaudodami dalinės autokoreliacijos funkcijos grafiku nustatysime ARCH modelio eilę. Maksimalaus tikėtimumo metodu įvertinsime nežinomų parametru reikšmes. Patikrinsime sudarytų modelių adekvatumą ir parinksime tinkamiausią modelį.

2.7.1. ARCH modelio eilės parinkimas

Finansinės laiko eilutės kvadratinių gražų dalinės autokoreliacijos grafikas, pateiktas 2.5 pav., nurodo, kad pradinis nagrinėjamas modelis turėtų būti ARCH(11). Modelio eilė parinkta atsižvelgiant į tai, kad pirmieji PACF vėlavimai yra stipriai aukščiau reikšmingumo lygmens.



2.5 pav. Dalinės autokoreliacijos funkcija (kvadratinės gražos rodiklis)

2.7.2. ARCH modelio sudarymas (Gauso)

Sudarytam ARCH(11) modeliui su standartinio Gauso skirstinio paklaidomis apskaičiuoti parametru įverčiai (2.4 lentelė). Gauti rezultatai rodo, kad visi modelio parametru įverčiai yra statistiškai reikšmingi, nes standartinio Gauso kriterijaus klaidos tikimybės, prie visų modelio parametru įverčių yra mažesnės už 0.05. SE žymi ARCH(11) modelio gautų parametru reikšmių standartines paklaidas.

2.4. lentelė. ARCH(11) parametru reikšmės (Gauso)

Parametrai	Parametru reikšmės	SE	T – statistika	p – reikšmė
μ	0.00077887	0.00011366	6.8526	0
α_0	0.000021827	0.0000012316	17.7226	0
α_1	0.091258	0.0063928	14.2751	0.0007
α_2	0.14571	0.013126	11.101	0
α_3	0.099452	0.012751	7.7997	0
α_4	0.099329	0.013889	7.1518	0
α_5	0.094034	0.014689	6.4017	0
α_6	0.091301	0.0126	7.246	0
α_7	0.047761	0.011535	4.1406	0.0001
α_8	0.072781	0.012293	5.9207	0
α_9	0.052655	0.0095796	5.4966	0
α_{10}	0.06746	0.012269	5.4983	0
α_{11}	0.059069	0.011358	5.2007	0

ARCH (11) modelio su standartinio Gauso skirstinio paklaidomis analizinė išraiška:

$$r_t = 0.00077887 + a_t, \quad (2.7.2.1)$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t \in Z, \quad (2.7.2.2)$$

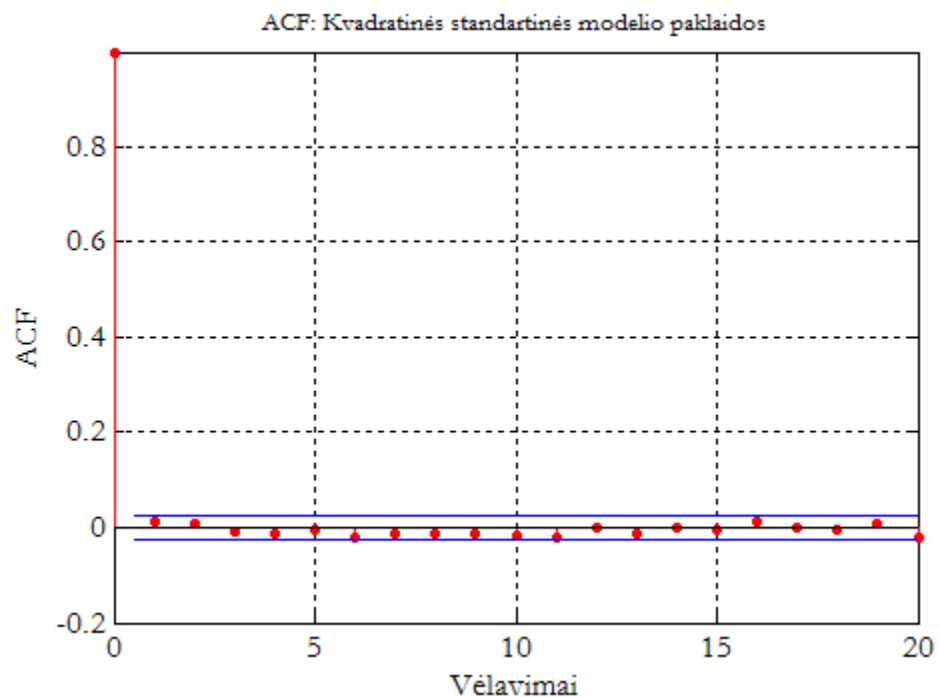
$$\sigma_t^2 = 0.000021827 + 0.091258a_{t-1}^2 + 0.14571a_{t-2}^2 + 0.099452a_{t-3}^2 +$$

$$\begin{aligned}
&+0.099329a_{t-4}^2 + 0.094034a_{t-5}^2 + 0.091301a_{t-6}^2 + 0.047761a_{t-7}^2 + \quad (2.7.2.3) \\
&+0.072781a_{t-8}^2 + 0.052655a_{t-9}^2 + 0.06746a_{t-10}^2 + 0.059069a_{t-11}^2.
\end{aligned}$$

2.7.3. ARCH(11) adekvatumo tikrinimas (Gauso)

Sekančiame tyrimo etape atlikta ARCH(11) modelio, su standartinio normaliojo skirstinio paklaidomis, standartizuotų liekanų analizė. Sudaryto modelio paklaidų autokoreliacija turi būti lygi 0, todėl sudaroma autokoreliacijos funkcija, kuri parodo, ar modelio paklaidos susijusios esant skirtingiems vėlavimams.

Gauti rezultatai rodo, kad modelio paklaidos nėra susijusios, esant skirtingiems vėlavimams, nes autokoreliacijos koeficientai yra artimi 0 (**2.6 pav.**). Tai leidžia teigti, kad modelio paklaidos tenkina paklaidų autokoreliacijos prielaidą (autokoreliacija lygi 0).



2.6 pav. Standartizuotų paklaidų ACF (kvadratinės gražos rodiklis)

Skirtingiems vėlavimams (iki 20 periodų) apskaičiuotos Ljung - Box statistikos reikšmės yra pateiktos **2.5 lentelėje** kartu su atitinkamomis p reikšmėmis. Nulinė hipotezė teigia, kad serijinė koreliacija neegzistuoja ir ši hipotezė yra priimama, kai p reikšmė yra didesnė už 0.05. Gauti rezultatai rodo, kad modelio kvadratinės standartizuotos paklaidos

tenkina baltojo triukšmo apibrėžimą, nes visiems vėlavimams (iki 20 periodų), kriterijaus klaidos tikimybė, $p > 0.05$ (**2.5. lentelė**).

2.5 lentelė. Standartizuotos simetrinio ARCH(11) paklaidos (Ljung – Box kriterijus)

Vėlavimai	p - reikšmė	Statistika	Kritinė reikšmė
10	0.3887	10.6101	18.307
15	0.4008	15.7216	24.9958
20	0.4641	19.9009	31.4104

Įvertinamas ARCH(11) modelio su standartinio normaliojo skirstinio paklaidomis dispersijos pokytis laike, naudojant nuo 1 iki 20 periodų vėlavimus (**2.6 lentelė**). Engle ARCH kriterijaus testo statistika Q rodo, kad modelio paklaidos yra homoskedastiškos ir paklaidų dispersija nedidėja, o yra pastovi, nes Q statistikos reikšmės, beveik visiems vėlavimams, patenka į hipotezės, apie paklaidų heteroskedastiškumo atmetimo sritį ($p > 0.05$).

Gauname, kad modelis yra adekvatus ir yra tinkamas NASDAQ indekso kintamumo prognozei.

2.6. lentelė. Standartizuotos simetrinio ARCH(11) paklaidos (Engle ARCH kriterijus)

Vėlavimai	p - reikšmė	Statistika	Kritinė reikšmė
10	0.3887	10.6101	18.307
15	0.4008	15.7216	24.9958
20	0.4641	19.9009	31.4104

2.7.4. ARCH modelio sudarymas (Studento)

Sudarytam ARCH(11) modeliui su Studento skirstinio paklaidomis, kai laisvės laipsnių skaičius lygus 7.0383, apskaičiuoti parametru įverčiai (2.7 lentelė). Gauti rezultatai rodo, kad visi modelio parametru įverčiai yra statistiškai reikšmingi, nes standartinio Studento kriterijaus klaidos tikimybės, prie visų modelio parametru įverčių yra mažesnės už 0.05.

2.7. lentelė. ARCH(11) parametru reikšmės (Studento)

Parametrai	Parametru reikšmės	SE	T – statistika	p – reikšmė
μ	0.001005	0.00010609	9.4729	0
α_0	0.000018316	0.0000018407	9.9505	0
α_1	0.059481	0.014466	4.1118	0
α_2	0.15138	0.019853	7.6251	0
α_3	0.10156	0.018839	5.3911	0
α_4	0.11178	0.019472	5.7407	0
α_5	0.12323	0.02105	5.8541	0
α_6	0.096788	0.019023	5.0879	0
α_7	0.059506	0.016473	3.6123	0
α_8	0.074847	0.017428	4.2948	0
α_9	0.051009	0.015683	3.2526	0
α_{10}	0.08021	0.017753	4.5181	0
α_{11}	0.063881	0.016314	3.9157	0

ARCH (11) modelio su Studento skirstinio paklaidomis analizinė išraiška:

$$r_t = 0.001005 + a_t, \quad (2.7.4.1)$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t \in Z, \quad (2.7.4.2)$$

$$\sigma_t^2 = 0.000018316 + 0.059481a_{t-1}^2 + 0.15138a_{t-2}^2 + 0.10156a_{t-3}^2 +$$

$$+0.11178a_{t-4}^2 + 0.12323a_{t-5}^2 + 0.096788a_{t-6}^2 + 0.059506a_{t-7}^2 + \quad (2.7.4.3)$$

$$+0.074847a_{t-8}^2 + 0.051009a_{t-9}^2 + 0.08021a_{t-10}^2 + 0.063881a_{t-11}^2,$$

kur laisvės laipsnių skaičius lygus 7.0383.

2.7.5. ARCH(11) adekvatumo tikrinimas (Studento)

Skirtingiems vėlavimams (iki 20 periodų) apskaičiuotos Ljung - Box statistikos reikšmės ir yra pateiktos **2.8 lentelėje** kartu su atitinkamomis p reikšmėmis. Nulinė hipotezė teigia, kad serijinė koreliacija neegzistuoja ir ši hipotezė yra priimama, kai p reikšmė yra didesnė už 0.05. Gauti rezultatai rodo, kad modelio kvadratinės standartizuotos paklaidos netenkina baltojo triukšmo apibrėžimo, nes visiems vėlavimams (iki 20 periodų), kriterijaus klaidos tikimybė, $p < 0.05$ (**2.8 lentelė**).

2.8. lentelė. Standartizuotos Studento ARCH(11) paklaidos (Ljung – Box kriterijus)

Vėlavimai	p - reikšmė	Statistika	Kritinė reikšmė
10	0.0052	25.0787	18.307
15	0.0076	31.4579	24.9958
20	0.0172	35.5936	31.4104

Įvertinamas ARCH(11) modelio su Studento skirstinio paklaidomis dispersijos pokytis laike, naudojant nuo 1 iki 20 periodų vėlavimus. Engle ARCH kriterijaus testo statistika Q rodo, kad modelio paklaidos nėra pastovios, nes visiems vėlavimams (iki 20 periodų), kriterijaus klaidos tikimybė, $p < 0.05$ (**2.9 lentelė**).

Gauname, kad modelis nėra adekvatus ir NASDAQ indekso kintamumo prognozei nėra naudojamas.

2.9. lentelė. Standartizuotos Studento ARCH(11) paklaidos (Engle ARCH kriterijus)

Vėlavimai	p - reikšmė	Statistika	Kritinė reikšmė
10	0.0052	25.0787	18.307
15	0.0076	31.4579	24.9958
20	0.0172	35.5936	31.4104

2.8. GARCH modelio sudarymas

Šioje tyrimo dalyje yra ieškomi GARCH(p,q) modeliai, kurių paklaidos pasiskirsčiusios pagal standartinę Gauso ir Studento pasiskirstymo funkcijas, ir geriausiai atitinkantys analizuojamus duomenis. Didesnis negu 2 parametru GARCH modelis praktikoje naudojamas retai, todėl modelis buvo renkamas tiesiog parenkant visas galimas p ir q reikšmes, t.y. kai $p = 1, 2$ ir $q = 1, 2$. Įvertintinami AIC ir BIC informaciniai parinkimo kriterijai, bei kiekvieno modelio parametru p – reikšmės.

2.8.1. GARCH modelio sudarymas (Gauso)

Šiame tyrimo etape apskaičiuojami simetrinių GARCH modelių parametru p – reikšmės, esant 0.05 reikšmingumo lygmeniui. Jeigu parametro p – reikšmė mažesnė negu 0.05, tai parametras yra statistiškai reikšmingas.

Gauti rezultatai rodo, kad mažiausia Akaikes kriterijaus reikšmė yra GARCH(2,2) modelyje, nes AIC = -6.143563, o mažiausia Bajeso kriterijaus reikšmė -6.139159 yra GARCH(1,1) modelyje (**2.10 lentelė**). Pasirenkame GARCH(1,1) modelį, nes jo visi įvertinti parametrai yra statistiškai reikšmingi, visos p – reikšmės < 0.05 . Taip pat GARCH(1,1) modelis turi stacionarų sprendinį, kadangi parametru reikšmės, esančios **2.11 lentelėje**, tenkina (**1.3.3.2**) sąlygą

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0.992785 < 1. \quad (2.8.1.1)$$

2.10. lentelė. Simetrinių GARCH modelių parinkimo kriterijai

Modelis	AIC	BIC
GARCH(1,1)	-6.143171	-6.139159
GARCH(1,2)	-6.142936	-6.137921
GARCH(2,1)	-6.14300	-6.137985
GARCH(2,2)	-6.143563	-6.137546

2.11. lentelė. Simetrinių GARCH modelių parametru reikšmės

Modelis	μ	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2
GARCH(1,1)	0.000772	0.00000181	0.107955		0.88483	
p - reikšmė	0.0000	0.0003	0.0000		0.0000	
GARCH(1,2)	0.000775	0.00000174	0.102772		0.953579	-0.063315
p - reikšmė	0.0000	0.0002	0.0000		0.0000	0.4011
GARCH(2,1)	0.000769	0.00000195	0.097194	0.016152	0.878833	
p - reikšmė	0.0000	0.0000	0.0000	0.0828	0.0000	
GARCH(2,2)	0.000772	0.00000347	0.09051	0.109319	0.091821	0.69396
p - reikšmė	0.0000	0.0002	0.0005	0.0000	0.4282	0.0000

GARCH (1,1) modelio su standartinio Gauso skirstinio paklaidomis analizinė išraiška:

$$r_t = 0.000772 + a_t, \quad (2.8.1.2)$$

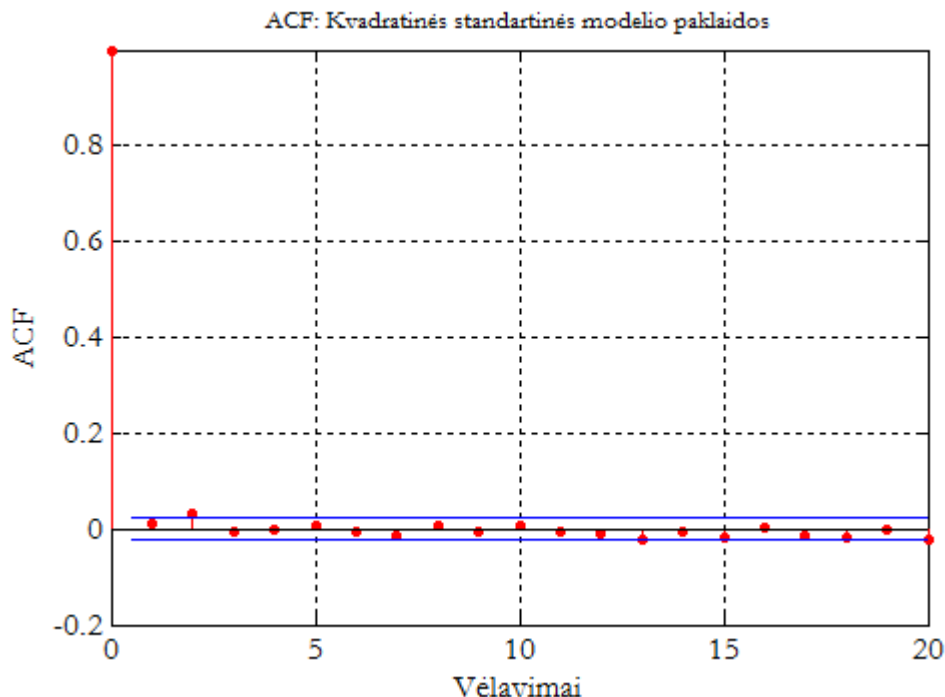
$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t \in Z, \quad (2.8.1.3)$$

$$\sigma_t^2 = 0.00000181 + 0.107955a_{t-1}^2 + 0.88483\sigma_{t-1}^2. \quad (2.8.1.4)$$

2.8.2. GARCH(1,1) adekvatumo tikrinimas (Gauso)

Sekančiame tyrimo etape atlikta GARCH(1,1) modelio, su standartinio normaliojo skirstinio paklaidomis, standartizuotų liekanų analizė. Sudaryto modelio paklaidų autokoreliacija turi būti lygi 0, todėl sudaroma autokoreliacijos funkcija, kuri parodo, ar modelio paklaidos susijusios esant skirtingiems vėlavimams.

Gauti rezultatai rodo, kad modelio paklaidos nėra susijusios, esant skirtingiems vėlavimams, nes autokoreliacijos koeficientai yra artimi 0 (**2.7 pav.**). Tai leidžia teigti, kad modelio paklaidos tenkina paklaidų autokoreliacijos prielaidą (autokoreliacija lygi 0).



2.7 pav. Standartizuotų GARCH(1,1) paklaidų ACF (kvadratinės gražos rodiklis)

Skirtingiems vėlavimams (iki 20 periodų) apskaičiuotos Ljung - Box statistikos reikšmės ir yra pateiktos **2.12 lentelėje** kartu su atitinkamomis p reikšmėmis. Nulinė hipotezė teigia, kad serijinė koreliacija neegzistuoja ir ši hipotezė yra priimama, kai p reikšmė yra didesnė už 0.05. Gauti rezultatai rodo, kad modelio kvadratinės standartizuotos paklaidos tenkina baltojo triukšmo apibrėžimą, nes visiems vėlavimams (iki 20 periodų), kriterijaus klaidos tikimybė, $p > 0.05$ (**2.12 lentelė**).

2.12 lentelė. Standartizuotos simetrinio GARCH(1,1) paklaidos (Ljung – Box kriterijus)

Vėlavimai	p - reikšmė	Statistika	Kritinė reikšmė
10	0.4282	10.1415	18.307
15	0.3818	16.0037	24.9958
20	0.3246	22.2969	31.4104

Įvertinamas GARCH(1,1) modelio su standartinio normaliojo skirstinio paklaidomis dispersijos pokytis laike, naudojant nuo 1 iki 20 periodų vėlavimus (**2.13 lentelė**). Engle ARCH kriterijaus testo statistika Q rodo, kad modelio paklaidos yra homoskedastiškos ir paklaidų dispersija nedidėja, o yra pastovi, nes Q statistikos reikšmės, visiems vėlavimams, patenka į hipotezės, apie paklaidų heteroskedastiškumo atmetimo sritį ($p > 0.05$).

Gauname, kad modelis yra adekvatus ir yra tinkamas NASDAQ indekso kintamumo prognozei.

2.13 lentelė. Standartizuotos simetrinio GARCH(1,1) paklaidos (Engle ARCH kriterijus)

Vėlavimai	p - reikšmė	Statistika	Kritinė reikšmė
10	0.4282	10.1415	18.307
15	0.3818	16.0037	24.9958
20	0.3246	22.2969	31.4104

2.8.3. GARCH modelio sudarymas (Studento)

Apskaičiuojami Studento GARCH modelių parametrų p – reikšmės, esant 0.05 reikšmingumo lygmeniui. Parenkmas geriausiai tinkamas GARCH modelis.

Gauti rezultatai rodo, kad mažiausia Akaikes kriterijaus reikšmė yra GARCH(2,2) modelyje, nes $AIC = -6.181831$, o mažiausia Bajeso kriterijaus reikšmė -6.176039 yra GARCH(1,1) modelyje (**2.14 lentelė**). Pasirenkame GARCH(1,1) modelį, nes jo visi įvertinti parametrai yra statistiškai reikšmingi, visos p – reikšmės $< 0,05$. Taip pat, GARCH(1,1) modelis turi stacionarų sprendinį, kadangi parametrų reikšmės, esančios **2.15 lentelėje**, tenkina (**1.3.3.2**) sąlygą

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0.999456 < 1. \quad (2.8.3.1)$$

2.14. lentelė. Studento GARCH modelių parinkimo kriterijai

Modelis	AIC	BIC
GARCH(1,1)	-6.181053	-6.176039
GARCH(1,2)	-6.181066	-6.175048
GARCH(2,1)	-6.181476	-6.175458
GARCH(2,2)	-6.181831	-6.174811

2.15. lentelė. Studento GARCH modelių parametrų reikšmės

Modelis	μ	α_0	α_1	α_2	β_1	β_2
GARCH(1,1)	0.000996	0.000000875	0.090541		0.908915	
p - reikšmė	0.0000	0.0000	0.0000		0.0000	
GARCH(1,2)	0.00099	0.000000782	0.07737		1.108317	-0.186219
p - reikšmė	0.0000	0.0003	0.0000		0.0000	0.2410
GARCH(2,1)	0.000985	0.0000011	0.060397	0.042883	0.895823	
p - reikšmė	0.0000	0.0000	0.0000	0.0093	0.0000	
GARCH(2,2)	0.000989	0.00000166	0.058093	0.098208	0.316966	0.525016
p - reikšmė	0.0000	0.0001	0.0014	0.0000	0.1459	0.0084

GARCH (1,1) modelio su Studento skirstinio paklaidomis analizinė išraiška:

$$r_t = 0.000996 + a_t, \quad (2.8.3.2)$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t \in Z, \quad (2.8.3.3)$$

$$\sigma_t^2 = 0.000000875 + 0.090541 a_{t-1}^2 + 0.908915 \sigma_{t-1}^2, \quad (2.8.3.4)$$

kur laisvės laipsnių skaičius lygus 7,4078.

2.8.4. GARCH(1,1) adekvatumo tikrinimas (Studento)

Gauti rezultatai rodo, kad modelio kvadratinės standartizuotos paklaidos netenkina baltojo triukšmo apibrėžimo, nes **2.16 lentelės** paskutinėje eilutėje kriterijaus klaidos tikimybė yra lygi 0.0365, mažesnė už 0.05.

2.16. lentelė. Standartizuotos Studento GARCH(1,1) paklaidos (Ljung – Box kriterijus)

Vėlavimai	p - reikšmė	Statistika	Kritinė reikšmė
10	0.0538	18.0685	18.307
15	0.053	24.7817	24.9958
20	0.0365	32.6887	31.4104

Įvertinamas GARCH(1,1) modelio su Studento skirstinio paklaidomis dispersijos pokytis laike, naudojant nuo 1 iki 20 periodų vėlavimus. Engle ARCH kriterijaus testo statistika Q paskutinėje **2.17 lentelės** eilutėje rodo, kad modelio paklaidos nėra pastovios, nes kriterijaus klaidos tikimybė, $0.0365 < 0.05$.

Gauname, kad modelis nėra adekvatus ir NASDAQ indekso kintamumo prognozei nėra naudojamas.

2.17. lentelė. Standartizuotos Studento GARCH(1,1) paklaidos (Engle ARCH kriterijus)

Vėlavimai	p - reikšmė	Statistika	Kritinė reikšmė
10	0.0538	18.0685	18.307
15	0.053	24.7817	24.9958
20	0.0365	32.6887	31.4104

2.9. Prognozavimas Gauso ARCH(11) modeliu

Šioje dalyje atliksime 10 dienų NASDAQ indekso kintamumo prognozę su simetriniu ARCH(11) modeliu (**2.18 lentelė**). Prognozės periodas yra nuo 2014 m. 01 mėn. 02 d. iki 2014 m. 01 mėn. 15 d.

Kaip ir reikėjo tikėtis, tikėtinos grąžos vidurkio prognozė tapatingai lygi proceso vidurkiui $\mu = 0.00077887$. Vidutinė standartinė (MSE) ir vidutinė absoliutinė (MAE) paklaidos yra labai mažos, vadinasi simetrinis ARCH(11) modelis pakankamai tikslus. Sprendžiant iš grafinės analizės (**2.8 pav.**), tiksliausia yra vienos dienos prognozė.

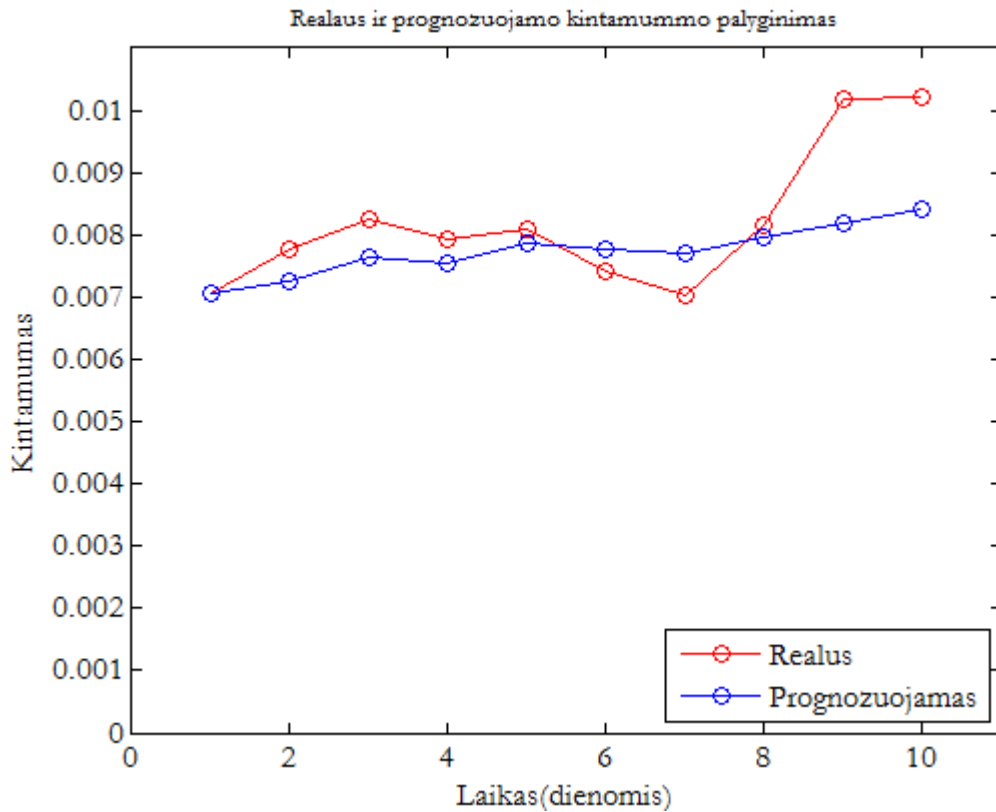
Šio modelio trūkumas, kad yra gana sudėtingas, susidedantis iš 12 parametų.

$$MSE = 0.000000851249226$$

$$MAE = 0.000672087790050$$

2.18. lentelė. Simetrinio ARCH(11) dešimties dienų prognozės

Laiko indeksas	Kintamumo prognozė	Grąžos vidurkio prognozė
1	0.007049936004871	0.000778869639315
2	0.007268228196269	0.000778869639315
3	0.007643152117463	0.000778869639315
4	0.007546899812570	0.000778869639315
5	0.007878638191937	0.000778869639315
6	0.007772965926507	0.000778869639315
7	0.007707185895117	0.000778869639315
8	0.007949743027742	0.000778869639315
9	0.008194003330534	0.000778869639315
10	0.008419830898253	0.000778869639315



2.8 pav. ARCH(11) dešimties dienų prognozė

2.10. Prognozavimas Gauso GARCH(1,1) modeliu

Šioje dalyje atliksime 10 dienų NASDAQ indekso kintamumo prognozę su simetriniu GARCH(1,1) modeliu (2.19 lentelė). Prognozės periodas yra nuo 2014 m. 01 mėn. 02 d. iki 2014 m. 01 mėn. 15 d.

Kaip ir reikėjo tikėtis, tikėtinos gražos vidurkio prognozė tapatingai lygi proceso vidurkiui $\mu = 0.000772$. Vidutinė standartinė (MSE) ir vidutinė absoliutinė (MAE) paklaidos yra labai mažos, vadinasi simetrinis GARCH(1,1) modelis pakankamai tikslus. Sprendžiant iš grafinės analizės (2.9 pav.), tiksliausia yra šeštos dienos prognozė ir vienos dienos.

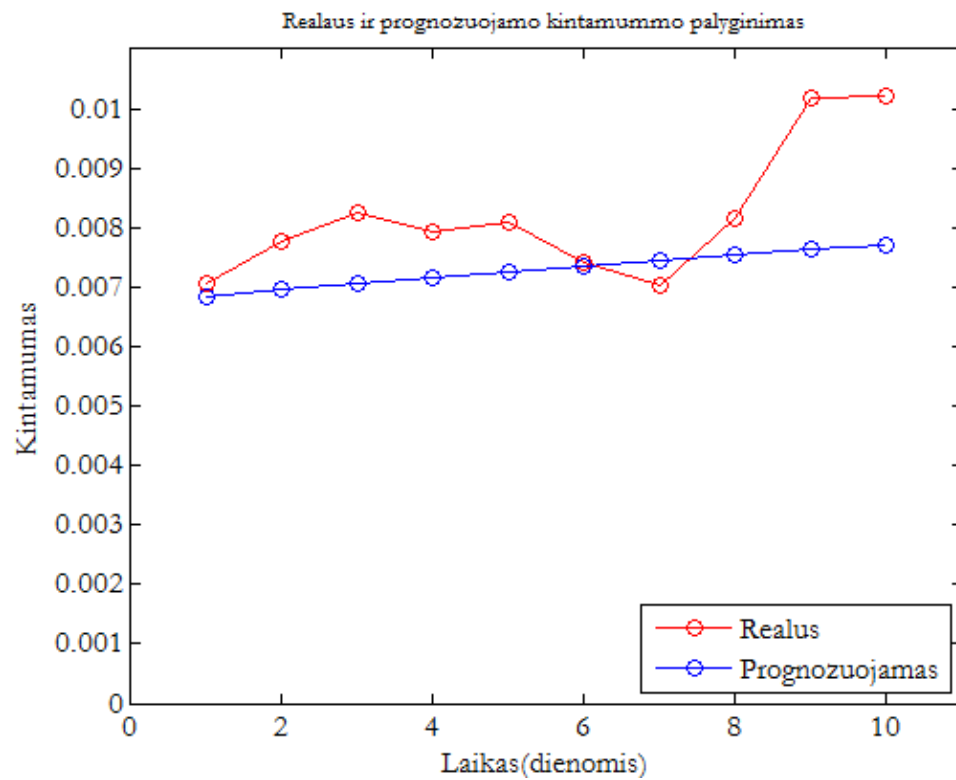
Simetrinis GARCH(1,1) modelis yra rekomenduojamas, tolesniems tyrimams, nors vidutinė standartinė ir vidutinė absoliutinė paklaidos yra didesnės už ARCH(11) modelį. Rekomenduojamas dėl to, kad yra daug kartų paprastesnis, negu ARCH(11) modelis. Susideda tik iš 3 parametru.

$$MSE = 0.000001669348601$$

$$MAE = 0.000999947109262$$

2.19. lentelė. Simetrinio GARCH(1,1) dešimties dienų prognozės

Laiko indeksas	Kintamumo prognozė	Grąžos vidurkio prognozė
1	0.006848585051492	0.000772480979721
2	0.006953016312462	0.000772480979721
3	0.007055185814713	0.000772480979721
4	0.007155195399552	0.000772480979721
5	0.007253139265392	0.000772480979721
6	0.007349104759330	0.000772480979721
7	0.007443173065852	0.000772480979721
8	0.007535419808578	0.000772480979721
9	0.007625915578122	0.000772480979721
10	0.007714726396891	0.000772480979721



2.9 pav. GARCH(1,1) dešimties dienų prognozė

3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA

Darbe NASDAQ akcijų kainų indekso eilutės modeliavimui naudojamas MATLAB R2013a matematinis paketas. MATLAB yra sparčiai vystomas tarptautinis projektas, leidžiantis spręsti praktiškai visus statistikos ir kitų sričių uždavinius.

MATLAB yra programinės įrangos rinkinys, skirtas duomenų valdymui, skaičiavimui ir grafiniam vaizdavimui. Šiame pakete yra:

- efektyvios duomenų apdorojimo ir saugojimo galimybės;
- operatoriai, dirbantys su vektoriais, matricomis;
- tarpiniai duomenų analizės įrankiai;
- duomenų grafinės analizės galimybės;
- išvystyta, paprasta ir efektyvi programavimo kalba.

Skaičiavimams naudotos standartinės paketo funkcijos, iškilusiems šio darbo uždaviniams spręsti sudarytos naujos funkcijos, grafiinei realizacijai reikalingos užklausos.

IŠVADOS

- Nagrinėjamos finansinės laiko eilutės grąžos yra beveik nekoreliuotos, heteroskedastiškos, pasižymi kintamumo klasterizacija, antros eilės momentas pasižymi stipriu nuolatinumu.
- Sudaryti 2 autoregresiniai sąlyginio heteroskedastiškumo (simetrinis ARCH(11) ir Studento ARCH(11)) ir 8 apibendrinti autoregresiniai sąlyginio heteroskedastiškumo (simetrinis GARCH(1,1), simetrinis GARCH(1,2), simetrinis GARCH(2,1), simetrinis GARCH(2,2), Studento GARCH(1,1), Studento GARCH(1,2), Studento GARCH(2,1) ir Studento GARCH(2,2)) modeliai.
- Iš ARCH nagrinėjamų modelių parenkamas Gauso ARCH(11) modelis. Studento ARCH(11) modelis yra neadekvatus nagrinėjami finansiniai laiko eilutei.
- Iš GARCH nagrinėjamų modelių parenkamas Gauso GARCH(1,1) modelis. Parinktas modelis tenka visus reikalavimus, keliamus GARCH modelių klasei.
- Su pasirinktais modeliais atliktos NASDAQ akcijų kainų indekso 10 dienų kintamumo ir vidutinės grąžos prognozės. Apskaičiuoti kiekvieno modelio vidutinės standartinės (MSE) ir vidutinės absoliutinės (MAE) paklaidos. Simetrinio ARCH(11) modelio MSE ir MAE yra mažesnės už simetrinio GARCH(1,1) modelio vidutines paklaidas.
- Grafiškai palyginus gautas kintamumo prognozes su realiu kintamumu, gavome, kad abiejų modelių tiksliausios prognozės yra, kai prognozuojama viena diena į ateitį.
- Tolesniems tyrimams, susijusiems su NASDAQ indeksu, yra rekomenduojamas simetrinis GARCH(1,1) modelis. Nors ARCH(11) modeliu gautos prognozės yra tikslesnės, bet GARCH(1,1) modelis yra žymiai paprastesnis. GARCH(1,1) modelis yra sudarytas iš 3 įvertinamų parametru, o ARCH(11) iš 12 parametru. Beto abiejų modelių MSE ir MAE paklaidos skiriasi nežymiai.

LITERATŪRA

1. Tsay, R. S. (2002). Analysis of Financial Time Series, New York: John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 0-471-41544-8.
2. Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. Journal of Econometrics, 31, 307 – 327.
3. Engle, R. F. (2004), “Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice,” American Economic Review, Vol. 94, p. 405 – 420.
4. V.Kvedaras. Ekonometrijos įvadas, Vilnius, 2005, 3-48 p.
5. Liu, H. C., & Hung, J. C. (2010). Forecasting S&P 100 stock index volatility: The role of volatility asymmetry and distributional assumption in GARCH models.
6. Nelson, D. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. Econometria, 59, 347 – 370.
7. Andersen, T. G., T. Bollerslev, P. Christoffersen and F. X. Diebold (2013). Volatility and Correlation: Practical Methods for Financial Applications.
8. Bollerslev, T., Chou, R. Y., and Kroner, K. F. (1992). ARCH modeling in finance. Journal of Econometrics 52: 5 – 59.
9. <http://finance.yahoo.com/>
10. http://en.wikipedia.org/wiki/Autoregressive_conditional_heteroskedasticity
11. http://en.wikipedia.org/wiki/Nasdaq_Composite
12. <http://www.mathworks.se/discovery/garch-models.html>

PRIEDAS. PROGRAMOS TEKSTAS

```
clc
clear all
filename = 'data_nasdaq.xlsx';
columnC = xlsread(filename, 'C3:C6808');
columnC1 = xlsread(filename, 'C3:C6818');
columnA = xlsread(filename, 'A3:A6808');
%% NASDAQ indekso dieninių reikšmių grafikas

T = length(columnA);
figure(1);
plot([1:T], columnA);
title('NASDAQ indeksas nuo 1987/01/02 iki 2013/12/31',
      'fontname', 'Garamond', 'fontsize', 11);
set(gca, 'fontname', 'garamond', 'fontsize', 12);
xlim([0 T+100]);
set(gca, 'XTick', 0:756:T+100);
set(gca, 'xticklabel', {'1987'; '1990'; '1993'; '1996'; '1999'; '2002'; '2005'; '2008'; '2011'; '2014'});
set(gcf, 'color', 'w');
xlabel('Laikas (dienomis)');
ylabel('Indekso reikšmės');

%% NASDAQ dieninių kainų logaritminės gražos

T = length(columnC);
figure(2);
plot([1:T], columnC);
title('NASDAQ indekso gražos nuo 1987/01/02 iki 2013/12/31',
      'fontname', 'Garamond', 'fontsize', 11);
xlim([0 T+100]);
set(gca, 'XTick', 0:756:T+100);
set(gca, 'xticklabel', {'1987'; '1990'; '1993'; '1996'; '1999'; '2002'; '2005'; '2008'; '2011'; '2014'});
set(gca, 'fontname', 'garamond', 'fontsize', 12);
set(gcf, 'color', 'w');
xlabel('Laikas (dienomis)');
ylabel('Logaritminės gražos');

%% Stacionarumo tikrinimas su Augmented Dickey - Fuller testu

[h,p,Qstat,crit] = adftest(columnC);
[h p Qstat crit]

%% Autokoreliacija

sq_columnC=columnC.^2;
figure(3);
autocorr(columnC-mean(columnC), 25, [], 2);
title('ACF: NASDAQ gražos', 'fontname', 'garamond', 'fontsize', 16);
set(gcf, 'color', 'w');
xlabel('Vėlavimai');
ylabel('ACF');
figure(4);
autocorr(sq_columnC, 25, [], 2);
title('ACF: NASDAQ kvadratinės gražos', 'fontname', 'garamond', 'fontsize', 16);
set(gcf, 'color', 'w');
xlabel('Vėlavimai');
ylabel('ACF');
```



```

%% Autokoreliacijos kiekybinis vertinimas

format long
[H, pValue, Stat, CriticalValue] = lbqctest((columnC-mean(columnC)).^2, [10
15 20 25]', 0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]

%% heteroskedastiskumo Engle kriterijus

[H, pValue, Stat, CriticalValue] = archtest(columnC-mean(columnC), [10 15
20 25]', 0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]

%% ARCH eilės nustatymas

figure(5);
parcorr(sq_columnC,25,[],2);
title('PACF: NASDAQ kvadratinės
gražos','fontname','garamond','fontsize',16);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Vėlavimai');
ylabel('PACF');

%% ARCH(11) Gauso

spec=garchset('VarianceModel','GARCH','Distribution','Gaussian','P',0,'Q',1
1);
[coeff, errors,llf,innovation,sigma,summary]=...
    garchfit(spec,columnC);
garchdisp(coeff,errors);
T = length(columnC);
figure(6);
plot([1:T],innovation./sigma)
xlim([0 T+100]);
set(gca,'XTick',0:756:T+100);
set(gca,'xticklabel',{'1987';'1990';'1993';'1996';'1999';'2002';'2005';'200
8';'2011';'2014'});
ylabel('Paklaidos')
title('Standartizuotos paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',11)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Laikas(dienomis)');
figure(7)
autocorr((innovation./sigma).^2)
title('ACF: Kvadratinės standartinės modelio
paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',10)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Vėlavimai');
ylabel('ACF');
[H, pValue,Stat,CriticalValue] = ...
    lbqctest((innovation./sigma).^2,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]
archtest(innovation./sigma,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]
[sigmaForecast,meanForecast] = garchpred(coeff,columnC,10);
format long
[sigmaForecast,meanForecast]
s0 = sqrt(coeff.K/(1 - sum(coeff.ARCH(:))));
Aspec=garchset('VarianceModel','GARCH','Distribution','Gaussian','P',0,'Q',
11);

```

```

[Acoeff, Aerrors,Allf,Ainnovation,Asigma,Asummary]=...
    garchfit(Aspec,columnC1);
pk = [0.007049936004871;
0.007268228196269;0.007643152117463;0.007546899812570;0.007878638191937;
0.007772965926507;0.007707185895117;0.007949743027742;0.008194003330534;0.0
08419830898253 ];
tk =
[0.007069944;0.007779322;0.008248504;0.007941644;0.008101248;0.007427714;0.
007042265;0.008148839;0.010166584;0.010205052];
l = [1:10];
figure(8)
plot(l,tk,'r-o',l,pk,'b-o')
hleg1 = legend('Realus','Prognozuojamas');
set(hleg1,'Location','SouthEast');
xlim([0 11]);
ylim([0 0.011]);
title('Realus ir prognozuojamo kintamummo
palyginimas','fontname','Garamond','fontsize',10)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Laikas(dienomis)');
ylabel('Kintamumas');

%% ARCH(11) Studento

Sspec=garchset('VarianceModel','GARCH','Distribution','T','P',0,'Q',11);
[Scoeff, Serrors,Sllf,Sinnovation,Ssigma,Ssummary]=...
    garchfit(Sspec,columnC);
garchdisp(Scoeff,Serrors);
T = length(columnC);
figure(9);
plot([1:T],Sinnovation./Ssigma)
xlim([0 T+100]);
set(gca,'XTick',0:756:T+100);
set(gca,'xticklabel',{'1987';'1990';'1993';'1996';'1999';'2002';'2005';'200
8';'2011';'2014'});
ylabel('Paklaidos')
title('Standartizuotos paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',11)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Laikas(dienomis)');
figure(10)
autocorr((Sinnovation./Ssigma).^2)
title('ACF: Kvadratinės standartinės modelio
paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',10)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Vėlavimai');
ylabel('ACF');
[H, pValue,Stat,CriticalValue] = ...
    lbqtest((Sinnovation./Ssigma).^2,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]
archtest(Sinnovation./Ssigma,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]

%% Gauso GARCH(1,1)

GG11spec=garchset('VarianceModel','GARCH','Distribution','Gaussian','P',1,'
Q',1);
[GG11coeff, GG11errors,GG11llf,GG11innovation,GG11sigma,GG11summary]=...
    garchfit(GG11spec,columnC);
garchdisp(GG11coeff,GG11errors);
T = length(columnC);

```

```

figure(11);
plot([1:T],GG11innovation./GG11sigma)
xlim([0 T+100]);
set(gca, 'XTick', 0:756:T+100);
set(gca, 'xticklabel', {'1987';'1990';'1993';'1996';'1999';'2002';'2005';'2008';'2011';'2014'});
ylabel('Paklaidos')
title('Standartizuotos paklaidos', 'fontname', 'Garamond', 'fontsize', 11)
set(gca, 'fontname', 'garamond', 'fontsize', 12);
set(gcf, 'color', 'w');
xlabel('Laikas (dienomis)');
figure(12)
autocorr((GG11innovation./GG11sigma).^2)
title('ACF: Kvadratinės standartinės modelio paklaidos', 'fontname', 'Garamond', 'fontsize', 10)
set(gca, 'fontname', 'garamond', 'fontsize', 12);
set(gcf, 'color', 'w');
xlabel('Vėlavimai');
ylabel('ACF');
[H, pValue, Stat, CriticalValue] = ...
    lbqtest((GG11innovation./GG11sigma).^2, [10 15 20]', 0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]
archtest(GG11innovation./GG11sigma, [10 15 20]', 0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]
pk = [0.006848585; 0.006953016; 0.007055186; 0.007155195;
0.007253139; 0.007349105; 0.007443173; 0.00753542; 0.007625916; 0.007714726 ];
tk =
[0.007069944; 0.007779322; 0.008248504; 0.007941644; 0.008101248; 0.007427714; 0.007042265; 0.008148839; 0.010166584; 0.010205052];
l = [1:10];
figure(13)
plot(l, tk, 'r-o', l, pk, 'b-o')
hleg1 = legend('Realus', 'Prognozuojamas');
set(hleg1, 'Location', 'SouthEast');
xlim([0 11]);
ylim([0 0.011]);
title('Realus ir prognozuojamo kintamumo palyginimas', 'fontname', 'Garamond', 'fontsize', 10)
set(gca, 'fontname', 'garamond', 'fontsize', 12);
set(gcf, 'color', 'w');
xlabel('Laikas (dienomis)');
ylabel('Kintamumas');

%% Gauso Garch(1,2)

GG12spec=garchset('VarianceModel', 'GARCH', 'Distribution', 'Gaussian', 'P', 1, 'Q', 2);
[GG12coeff, GG12errors, GG12llf, GG12innovation, GG12sigma, GG12summary]=...
    garchfit(GG12spec, columnC);
garchdisp(GG12coeff, GG12errors);
T = length(columnC);
figure(14);
plot([1:T],GG12innovation./GG12sigma)
xlim([0 T+100]);
set(gca, 'XTick', 0:756:T+100);
set(gca, 'xticklabel', {'1987';'1990';'1993';'1996';'1999';'2002';'2005';'2008';'2011';'2014'});
ylabel('Paklaidos')
title('Standartizuotos paklaidos', 'fontname', 'Garamond', 'fontsize', 11)
set(gca, 'fontname', 'garamond', 'fontsize', 12);
set(gcf, 'color', 'w');
xlabel('Laikas (dienomis)');
figure(15)

```

```

autocorr((GG12innovation./GG12sigma).^2)
title('ACF: Kvadratinės standartinės modelio
paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',10)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Vėlavimai');
ylabel('ACF');
[H, pValue,Stat,CriticalValue] = ...
    lbqtest((GG12innovation./GG12sigma).^2,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]
archtest(GG12innovation./GG12sigma,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]

%% Gauso GARCH(2,1)

GG21spec=garchset('VarianceModel','GARCH','Distribution','Gaussian','P',2,'
Q',1);
[GG21coeff, GG21errors,GG21llf,GG21innovation,GG21sigma,GG21summary]=...
    garchfit(GG21spec,columnC);
garchdisp(GG21coeff,GG21errors);
T = length(columnC);
figure(16);
plot([1:T],GG21innovation./GG21sigma)
xlim([0 T+100]);
set(gca, 'XTick', 0:756:T+100);
set(gca,'xticklabel',{ '1987';'1990';'1993';'1996';'1999';'2002';'2005';'200
8';'2011';'2014'});
ylabel('Paklaidos')
title('Standartizuotos paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',11)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Laikas(dienomis)');
figure(17)
autocorr((GG21innovation./GG21sigma).^2)
title('ACF: Kvadratinės standartinės modelio
paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',10)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Vėlavimai');
ylabel('ACF');
[H, pValue,Stat,CriticalValue] = ...
    lbqtest((GG21innovation./GG21sigma).^2,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]
archtest(GG21innovation./GG21sigma,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]

%% Gauso GARCH(2,2)

GG22spec=garchset('VarianceModel','GARCH','Distribution','Gaussian','P',2,'
Q',2);
[GG22coeff, GG22errors,GG22llf,GG22innovation,GG22sigma,GG22summary]=...
    garchfit(GG22spec,columnC);
garchdisp(GG22coeff,GG22errors);
T = length(columnC);
figure(18);
plot([1:T],GG22innovation./GG22sigma)
xlim([0 T+100]);
set(gca, 'XTick', 0:756:T+100);
set(gca,'xticklabel',{ '1987';'1990';'1993';'1996';'1999';'2002';'2005';'200
8';'2011';'2014'});
ylabel('Paklaidos')
title('Standartizuotos paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',11)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);

```

```

set(gcf,'color','w');
xlabel('Laikas(dienomis)');
figure(19)
autocorr((GG22innovation./GG22sigma).^2)
title('ACF: Kvadratinės standartinės modelio
paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',10)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Vėlavimai');
ylabel('ACF');
[H, pValue,Stat,CriticalValue] = ...
  lbqtest((GG22innovation./GG22sigma).^2,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]
archtest(GG22innovation./GG22sigma,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]

%% Studento GARCH(1,1)

GS11spec=garchset('VarianceModel','GARCH','Distribution','T','P',1,'Q',1);
[GS11coeff, GS11errors,GS11llf,GS11innovation,GS11sigma,GS11summary]=...
  garchfit(GS11spec,columnC);
garchdisp(GS11coeff,GS11errors);
T = length(columnC);
figure(20);
plot([1:T],GS11innovation./GS11sigma)
xlim([0 T+100]);
set(gca, 'XTick' ,0:756:T+100);
set(gca,'xticklabel',{ '1987';'1990';'1993';'1996';'1999';'2002';'2005';'200
8';'2011';'2014'});
ylabel('Paklaidos')
title('Standartizuotos paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',11)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Laikas(dienomis)');
figure(21)
autocorr((GS11innovation./GS11sigma).^2)
title('ACF: Kvadratinės standartinės modelio
paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',10)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Vėlavimai');
ylabel('ACF');
[H, pValue,Stat,CriticalValue] = ...
  lbqtest((GS11innovation./GS11sigma).^2,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]
archtest(GS11innovation./GS11sigma,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]

%% Studento GARCH(1,2)

GS12spec=garchset('VarianceModel','GARCH','Distribution','T','P',1,'Q',2);
[GS12coeff, GS12errors,GS12llf,GS12innovation,GS12sigma,GS12summary]=...
  garchfit(GS12spec,columnC);
garchdisp(GS12coeff,GS12errors);
T = length(columnC);
figure(22);
plot([1:T],GS12innovation./GS12sigma)
xlim([0 T+100]);
set(gca, 'XTick' ,0:756:T+100);
set(gca,'xticklabel',{ '1987';'1990';'1993';'1996';'1999';'2002';'2005';'200
8';'2011';'2014'});
ylabel('Paklaidos')
title('Standartizuotos paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',11)

```

```

set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Laikas(dienomis)');
figure(23)
autocorr((GS12innovation./GS12sigma).^2)
title('ACF: Kvadratinės standartinės modelio
paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',10)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Vėlavimai');
ylabel('ACF');
[H, pValue,Stat,CriticalValue] = ...
    lbqtest((GS12innovation./GS12sigma).^2,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]
archtest(GS12innovation./GS12sigma,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]

%% Studento GARCH(2,1)

GS21spec=garchset('VarianceModel','GARCH','Distribution','T','P',2,'Q',1);
[GS21coeff, GS21errors,GS21llf,GS21innovation,GS21sigma,GS21summary]=...
    garchfit(GS21spec,columnC);
garchdisp(GS21coeff,GS21errors);
T = length(columnC);
figure(24);
plot([1:T],GS21innovation./GS21sigma)
xlim([0 T+100]);
set(gca, 'XTick' ,0:756:T+100);
set(gca,'xticklabel',{ '1987';'1990';'1993';'1996';'1999';'2002';'2005';'200
8';'2011';'2014'});
ylabel('Paklaidos')
title('Standartizuotos paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',11)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Laikas(dienomis)');
figure(25)
autocorr((GS21innovation./GS21sigma).^2)
title('ACF: Kvadratinės standartinės modelio
paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',10)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Vėlavimai');
ylabel('ACF');
[H, pValue,Stat,CriticalValue] = ...
    lbqtest((GS21innovation./GS21sigma).^2,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]
archtest(GS21innovation./GS21sigma,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]

%% Studento GARCH(2,2)

GS22spec=garchset('VarianceModel','GARCH','Distribution','T','P',2,'Q',2);
[GS22coeff, GS22errors,GS22llf,GS22innovation,GS22sigma,GS22summary]=...
    garchfit(GS22spec,columnC);
garchdisp(GS22coeff,GS22errors);
T = length(columnC);
figure(26);
plot([1:T],GS22innovation./GS22sigma)
xlim([0 T+100]);
set(gca, 'XTick' ,0:756:T+100);
set(gca,'xticklabel',{ '1987';'1990';'1993';'1996';'1999';'2002';'2005';'200
8';'2011';'2014'});
ylabel('Paklaidos')

```

```

title('Standartizuotos paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',11)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Laikas(dienomis)');
figure(27)
autocorr((GS22innovation./GS22sigma).^2)
title('ACF: Kvadratinės standartinės modelio
paklaidos','fontname','Garamond','fontsize',10)
set(gca,'fontname','garamond','fontsize',12);
set(gcf,'color','w');
xlabel('Vėlavimai');
ylabel('ACF');
[H, pValue,Stat,CriticalValue] = ...
  lbqtest((GS22innovation./GS22sigma).^2,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]
archtest(GS22innovation./GS22sigma,[10 15 20]',0.05);
[H pValue Stat CriticalValue]

```