



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**Dalia Čalnerytė**

**HETEROGENINĖS STRUKTŪROS**  
**MEDŽIAGŲ DAUGIAPAKOPIŲ SKAITINIŲ**  
**METODŲ SUKŪRIMAS**

Magistro darbas

**Vadovas**  
**prof. habil. dr. R. Barauskas**

**KAUNAS, 2012**



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**TVIRTINU**  
**Katedros vedėjas**  
**doc. dr. N. Listopadskis**  
**2012 06 02**

**HETEROGENINĖS STRUKTŪROS**  
**MEDŽIAGŲ DAUGIAPAKOPIŲ SKAITINIŲ**  
**METODŲ SUKŪRIMAS**

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

**Vadovas**  
**prof. habil. dr. R. Barauskas**  
**2012 06 01**

**Recenzentas**  
**prof. habil. dr. M. Ragulskis**  
**2012 06 01**

**Atliko**  
**FMMM-0 gr. stud.**  
**D. Čalnerytė**  
**2012 05 30**

**KAUNAS, 2012**

## KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

**Pirmininkas:** Rimantas Rudzkis, profesorius (VU MII)

**Sekretorius:** Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

**Nariai:** Jonas Valantinas, profesorius (KTU)  
Vytautas Janilionis, docentas (KTU)  
Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)  
Zenonas Navickas, profesorius (KTU)  
Arūnas Barauskas, dr., vice-prezidentas projektams (UAB „Baltic Amadeus“)

**Čalnerytė D. Heterogeninės struktūros medžiagų daugiapakopių modelių sukūrimas: Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas / vadovas habil. dr. prof. R.Barauskas; Taikomosios matematikos katedra, Fundamentalųjų mokslų fakultetas, Kauno technologijos universitetas. – Kaunas, 2012. – 55 p.**

## SANTRAUKA

Darbe nagrinėjamas heterogeninės periodinės struktūros medžiagų elastingumo parametrų įvertinimas skaitiniais metodais. Naudojamas daugiapakopis modeliavimas – modelis nagrinėjamas keliose pakopose su skirtingomis prielaidomis – sukuriama heterogeninės struktūros trimatis medžiagos modelis žemiausioje pakopoje ir homogeninės struktūros dvimatis medžiagos modelis aukštesnėje pakopoje. Žemiausioje pakopoje įvertinami medžiagos elastingumo parametrai, kurie turėtų būti taikomi modeliavimui aukštesnėje pakopoje su prielaida, kad medžiaga homogeninė. Elastingumo parametrų įvertinimui naudojama asimptotinė homogenizacija, grynujų įtempimų modeliavimas, mechaninis požiūris. Asimptotinės homogenizacijos ir grynujų įtempimų modeliavimo atveju naudojamas baigtinių elementų metodas – skaitinis metodas, kai nagrinėjama struktūra aproksimuojama nesudėtingos formos erdviniais elementais, tam tikruose jų taškuose įvertinami rodikliai. Su gautais parametrais sukurtam dvimačiam modeliui aukštesnėje pakopoje suteikiamos atitinkamos deformacijos, lyginami nagrinėjant trimatį ir dvimatį modelius gauti įtempimai. Kai taikoma prielaida, kad medžiaga homogeninė ir nagrinėjamas dvimatis modelis, atliekama žymiai mažiau skaičiavimų nei heterogeninės struktūros medžiagos trimačio modelio atveju, todėl rezultatai gaunami greičiau, naudojama mažiau atminties.

Darbe pateikiamas analitinis asimptotinės homogenizacijos modelis tiesiniam elastingumo dėsniumi, baigtinių elementų metodo, daugiapakopio modeliavimo aprašymai. Taip pat pateikiamas perėjimas nuo trimačio modelio prie dvimačio, elastingumo koeficientų įvertinimas asimptotinės homogenizacijos metodą taikant baigtinių elementų modeliui, modeliuojant grynuosius įtempimus, mechaniniu požiūriu. Analizuojami skaičiavimų pavyzdžiai vieno sluoksnio lygiagrečiai išdėstytų gijų elastingoje medžiagoje modeliui, atliekama tiesinė statinė analizė. Su asimptotinės homogenizacijos metodu ir modeliuojant grynuosius įtempimus įvertintais elastingumo koeficientais apskaičiuoti dvimačio modelio įtempimai nuo trimačio modelio įtempimų skyrėsi mažiau nei 10%, kai gijų dalis modelyje neviršijo 0,5. Tokį rezultatą lemia didelis skirtumas tarp heterogeninės struktūros medžiaga sudarančiųjų medžiagų elastingumo parametrų.

Skaičiavimai atliekami universaliu matematiniu ir programavimo paketu MATLAB ir baigtinių elementų skaičiuojamąja terpe LS-DYNA.

**Čalnerytė D. Development of multiscale numerical methods for heterogeneous structure material: Master's work in applied mathematics / supervisor habil. dr. prof. R.Barauskas; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2012. – 55 p.**

## SUMMARY

Evaluation of homogeneous elasticity parameters for heterogeneous material with periodic microstructure was discussed in this paper. The multiscale modeling was used – model was analyzed in two scales with different assumptions. A heterogeneous three-dimensional body was modeled in microscale and an equivalent homogenous two-dimensional body was modeled in macroscale. Elasticity parameters of heterogeneous body that should be used in modeling a two dimensional homogeneous body were evaluated in three ways – asymptotic homogenization, by modeling pure loads in LS-DYNA, mechanical approach. In case of asymptotic homogenization and modeling pure loads numerical finite element method was used. Analyzed structure was divided to finite number of simple shape elements. Stresses and strains were evaluated in the nodes of each element. The two-dimensional model with evaluated parameters was developed. Stresses of two-dimensional and three-dimensional models were compared. With the assumption that material is homogeneous and the two-dimensional body is analyzed, the amount of calculation is significantly reduced in comparison with three-dimensional model.

The mathematical formulation of the asymptotic homogenization for linear elasticity problems, description of finite element method and multiscale modeling was presented in this paper. The reduction of three-dimensional stress-strain equations to two-dimensional stress-strain equations and evaluation of elasticity parameters in three ways was also introduced in this paper. Two numerical examples were analyzed for the model of a unidirectional fiber layer, linear static analysis was performed. Stresses of two dimensional models with elasticity parameters obtained from asymptotic homogenization method and modeling pure loads differed less than 10% compared with stresses of three-dimensional model if fiber volume fraction is less than 0.5. That is a result of the fact that the elasticity constants of composing materials differ widely.

Universal mathematical and programming language MATLAB and finite element modeling software LS-DYNA was applied to deal with the calculations.

## TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS.....	7
PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS.....	8
ĮVADAS.....	9
1. TEORINĖ DALIS .....	11
1.1 LITERATŪROS APŽVALGA.....	11
1.2 BAIGTINIŲ ELEMENTŲ METODAS.....	12
1.3 DAUGIAPAKOPIS MODELIAVIMAS.....	13
1.4 ASIMPTOTINĖ HOMOGENIZACIJA .....	16
1.5 FIZIKINĖS MODELIO MEDŽIAGŲ SAVYBĖS .....	21
2. TYRIMO MODELIS .....	23
2.1 ELEMENTO DALIES MODELyje APSKAIČIAVIMAS NAUDOJANT FORMOS FUNKCIJAS.....	26
2.2 ASIMPTOTINĖS HOMOGENIZACIJOS TAIKYMAS BAIGTINIŲ ELEMENTŲ MODELIUI.....	28
2.3 ELASTINGUMO KOEFICIENTŲ VERTINIMAS LS-DYNA.....	32
2.4 ELASTINGUMO KOEFICIENTŲ VERTINIMAS MECHANINIŲ POŽIŪRIU .....	34
3. TIRIAMOJI DALIS .....	35
3.1 PAVYZDYS. METALO GIJŲ DERVOJE MODELIO TYRIMAS.....	35
3.2 PAVYZDYS. STIKLO PLUOŠTO GIJŲ DERVOJE MODELIO TYRIMAS.....	40
4. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI .....	46
DISKUSIJA.....	50
IŠVADOS.....	51
REKOMENDACIJOS.....	52
ŠALTINIAI IR LITERATŪRA .....	53
PRIEDAS 1 .....	54

## LENTELIŲ SĄRAŠAS

3.1 lentelė. Trimačio modelio medžiagų elastingumo parametrai. ....	35
3.2 lentelė. Elastingumo koeficientai, įvertinti asimptotinė homogenizacija su skirtingais skaidymais. ....	35
3.3 lentelė. Elastingumo koeficientai, įvertinti modeliuojant grynuosius įtempimus su skirtingais skaidymais. ....	36
3.4 lentelė. Elastingumo koeficientų įvertinimai su įvairiomis gijų tūrio dalimis. ....	37
3.5 lentelė. Modelių mažiausios tikrinės reikšmės su įvairiomis gijų tūrio dalimis. ....	38
3.6 lentelė. Vidutiniai modelių įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal x ašį. ....	39
3.7 lentelė. Trimačio modelio medžiagų elastingumo parametrai. ....	40
3.8 lentelė. Elastingumo koeficientai, įvertinti asimptotinė homogenizacija su skirtingais skaidymais. ....	41
3.9 lentelė. Elastingumo koeficientai, įvertinti modeliuojant grynuosius įtempimus su skirtingais skaidymais. ....	41
3.10 lentelė. Elastingumo koeficientų įvertinimai su įvairiomis gijų tūrio dalimis. ....	42
3.11 lentelė. Modelių mažiausios tikrinės reikšmės su įvairiomis gijų tūrio dalimis. ....	43
3.12 lentelė. Vidutiniai modelių įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal x ašį. ....	44
A lentelė. Vidutiniai modelių įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal y ašį. ....	54
B lentelė. Vidutiniai modelių įtempimai, kai modelis deformuojamas xy. ....	54
C lentelė. Vidutiniai modelių įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal y ašį. ....	55
D lentelė. Vidutiniai modelių įtempimai, kai modelis deformuojamas xy. ....	55

## PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1 pav. Įtempimų priklausomybė nuo deformacijų .....	9
1.1 pav. Srities $\Omega$ skaidymas elementais $\Omega^{(e)}$ .....	13
1.2 pav. Asimptotinės analizės schema .....	16
2.1 pav. Daugiapakopio modeliavimo schema.....	23
2.2 pav. Periodinis elementas su skirtingomis tūrio dalimis modelyje.....	26
2.3 pav. Elemento forma koordinačių sistemose $(x; y; z)$ ir $(\xi; \eta; \zeta)$ .....	27
2.4 pav. Konstrukcijos standumo matricos surinkimo schema.....	29
2.5 pav. Konstrukcijos apkrovų matricos surinkimo schema.....	29
2.6 pav. Elemento kraštinių taškų periodiniai ryšiai.....	30
2.7 pav. Charakteringieji periodinio elemento poslinkiai .....	31
2.8 pav. Modelio deformacijos schemas.....	32
2.9 pav. Teorinis periodinio elemento modelis.....	34
3.1 pav. Periodinio elemento skaidymo tipai .....	35
3.2 pav. Modelio skaidymo tipai.....	36
3.3 pav. Elastingumo koeficientų priklausomybė nuo gijų tūrio dalies modelyje.....	37
3.4 pav. Vidutiniai įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal x ašį.....	39
3.5 pav. Vidutiniai įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal y ašį.....	39
3.6 pav. Vidutiniai įtempimai, kai modelis deformuojamas xy.....	40
3.7 pav. Elastingumo koeficientų priklausomybė nuo gijų tūrio dalies modelyje.....	43
3.8 pav. Vidutiniai įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal x ašį.....	44
3.10 pav. Vidutiniai įtempimai, kai modelis deformuojamas xy.....	45
4.1 pav. Vartotojo sąsajos langas.....	46
4.2 pav. Rezultatų failo išvedimo langas.....	47
4.3 pav. Charakteringųjų poslinkių vaizdavimo langas.....	48
4.4 pav. Elastingumo parametrų grafikų išvedimo langas.....	48
4.5 pav. Vidutinių įtempimų grafikų langas.....	49



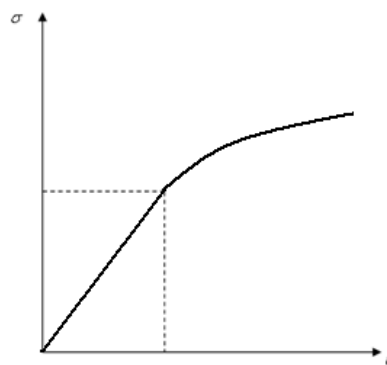
## ĮVADAS

Heterogeninės struktūros medžiagos sudarytos iš kelių medžiagų, kurių savybės žymiai skiriasi. Tokių medžiagų pasitaiko gamtoje (smiltainis, medis, kaulai ir t.t.). Jau senovėje pastebėta, kad norimas savybes galima gauti komponuojant medžiagas. Vienas seniausių pavyzdžių – iš molio ir šiaudų pagamintos plytos. Konstruojant lėktuvus siekiama sumažinti lėktuvo masę nemažinant dalių standumo ir atsparumo. Heterogeninės struktūros medžiagos naudojamos aviacijoje (lėktuvų dalys), elektronikoje, statyboje, bioinžinerijoje (galūnių protezai, dirbtiniai širdies vožtuvai), laivyboje, sporto ir laisvalaikio industrijoje (teniso raketės, meškerės, dviračiai, kanojos ir t.t.).

Homogeninės medžiagos atsparumas praktikoje žymiai mažesnis nei teorinis, nes medžiaga atominiame lygyje gali būti netolygi. Plieno plokštelės atsparumas gali būti net 6 kartus mažesnis nei iš tokios pat medžiagos pagaminta viela (Kaw, 2006). Heterogeninės medžiagos kuriamos siekiant padidinti medžiagos atsparumą. Kuo mažesni medžiagos parametrai, tuo mažiau netolygumų joje, todėl dažniausiai heterogeninė medžiaga sudaroma iš derivoje ar kitoje medžiagoje įterptų mažo skersmens stiklo, aliuminio, silicio karbido, boro, anglies ar kitos medžiagos gijų.

Skaitinis heterogeninės struktūros medžiagų modeliavimas įvertinant nevientisumą naudoja daug kompiuterio atminties ir laiko, todėl siekiama gauti tokius pat rezultatus atliekant modeliavimą su prielaida, kad naudojama homogeninė medžiaga. Tyrime nagrinėjama tiesinė įtempimų priklausomybės nuo deformacijų dalis, kai modeliuojamos mažos deformacijos (1 pav). Ši dalis aprašoma Huko dėsnio, kūno įtempimus ir deformacijas siejančiu elastingumo matrica  $D$  :

$$\sigma = D\varepsilon \quad (1)$$



**1 pav. Įtempimų priklausomybė nuo deformacijų.**

Modelio nagrinėjimas keliose pakopose – darant skirtingas prielaidas apie modelio savybes kiekvienoje pakopoje – vadinamas daugiapakopiu modeliavimu. Daugiapakopio modeliavimo klasifikacija aptariama Ingram, Cameron, Hangos (2004) pagal sistemos modeliavimo tvarką ir sąsajas tarp modelių skirtingose skalėse. Allen, Kim, Souza (2008) ir Milton (2004) pateikia reikalavimus skirtingoms skalėms ir pagrindinius daugiapakopio modeliavimo bruožus. Darbe naudojamos Barbero (2008) ir Kaw (2006) aprašytos metodikos perėjimui nuo trimačio modelio prie dvimačio.

Skaičiavimai atliekami baigtinių elementų metodu – skaitiniu metodu kontinualiosioms struktūroms analizuoti, matematinės fizikos uždaviniams spręsti. Nagrinėjama struktūra aproksimuojama elementais, kurių srityje diferencialinės lygtys apytiksliai pakeičiamos algebrinėmis, sprendžiama algebrinių lygčių sistema visai nagrinėjamai struktūrai. Šis metodas naudojamas automobilių, lėktuvų avarijų simuliacijai, medžiagų atsparumui vertinti, ciklonų judėjimui nustatyti.

Žemiausioje skalėje taikomas vidutinių reikšmių skaičiavimas, homogenizacija ir asimptotinė analizė. Pavliotis, Stuart (2008) pateikia vidurkinimo ir homogenizacijos metodus naudojant tiesinius operatorius. Asimptotinė homogenizacija tiesiniam elastingumo uždaviniui aprašoma Peng, Cao (2002) ir Pinho-da-Cruz, Oliveira, Teixeira-Dias (2009). Šiuose straipsniuose pateikiamas analitinis asimptotinės homogenizacijos metodo modelis ir taikymas įvairaus pasiskirstymo struktūroms.

Darbo tikslas – sukurti skaitinius metodus heterogeninės struktūros medžiagos elastingumo parametrų nustatymui ir palyginti skirtingais metodais gautus koeficientus bei įtempimus, apskaičiuotus modeliuojant trimatį heterogeninės medžiagos ir dvimačius homogeninės medžiagos su skirtingais metodais įvertintais elastingumo koeficientais modelius.

Darbe naudojant MATLAB programinę įrangą ir baigtinių elementų skaičiuojamąją terpę LS-DYNA sukuriama skaitiniai ekvivalenčių heterogeninės medžiagos, sudarytos iš medžiagoje įterptų gijų, koeficientų vertinimo metodai. Ekvivalentūs koeficientai vertinami mechaniniu požiūriu, naudojant grynujų įtempimų būvį ir neišreikštinę analizę, atliekant asimptotinę homogenizaciją. Lyginami šiais metodais gauti ekvivalenčios dvimatės medžiagos parametrai, tikrinės reikšmės ir su skirtingais parametrais apskaičiuoti vidutiniai įtempimai.

## 1. TEORINĖ DALIS

### 1.1 LITERATŪROS APŽVALGA

Heterogeninės struktūros medžiagų plačios paskirties naudojimas lemia medžiagų struktūros tobulinimą ir naujų metodų, skirtų tokių medžiagų modeliavimui, kūrimą. Medžiagos homogenizavimas mechaniniu požiūriu priklauso nuo prielaidų, heterogeninę struktūrą aprašančio modelio dydžio, kraštinių sąlygų. Naudojant asimptotinę teoriją šie veiksniai įtakos neturi, nes nagrinėjamas vienas periodinis elementas. Todėl asimptotinė homogenizacija naudojama nagrinėjant sudėtingų tipų heterogeninės struktūros medžiagas (baigtiniais elementais diskretizuotam periodiniam elementui).

Georgiades, Kalamkarov, Challagulla (2006) aprašomas ypatingos heterogeninės struktūros medžiagų modeliavimas asimptotinės homogenizacijos metodu. Medžiagos struktūra – tamprioje aplinkoje įterptas standžios medžiagos banguotas tinklas. Nagrinėjami plokštelės modeliai, suskaidyti iš trikampio, stačiakampio ir rombų sudarytais tinkleliais, aprašomi metodai elastingumo, pjezoelektrinių ir šilumos koeficientų įvertinimui. Straipsnyje įrodyta, kad keičiant tinklo stambumą, tipą ar kryptį galima gauti norimas medžiagos savybes.

Pinho-da-Cruz, Oliveira, Teixeira-Dias (2009) straipsnyje pateikta boro gijų aliuminio lydinyje modelio analizė asimptotinės homogenizacijos metodu. Nagrinėjami modeliai, skaidyti įvairaus dydžio trikampėmis ir keturkampėmis prizmėmis bei elastingumo matricos reikšmių priklausomybė nuo skaitinio integravimo metodo ir nagrinėto tinklelio laisvės laipsnių skaičiaus. Straipsnyje pateikta periodiškai pasiskirsčiusių gijų modelio analizė, homogeninės elastingumo matricos reikšmės naudojant periodinius elementus su įvairaus tankumo sferiniais boro elementais. Asimptotinės homogenizacijos metodu apskaičiuotos elastingumo konstantų reikšmės lyginamos su eksperimentinėmis. Įrodytas medžiagos koeficientų, gautų naudojant skirtingus baigtinių elementų tipus, konvergavimas periodinei struktūrai. Neperiodinei struktūrai asimptotinės homogenizacijos metodu įvertinti koeficientai eksperimentinius aproksimavo geriau nei apskaičiuoti mechaniniu požiūriu. Darbe aprašytas su ekvivalenčiais koeficientais sukurtas trimatis modelis aukštesnėje pakopoje ir jo elgsena, kai modelį gijų kryptimi veikia nustatyto dydžio jėga.

Farage, Beaucour, da Silva Barra, Ke, dos Santos Sanabio, Ferreira (2009) straipsnyje nagrinėjamas asimptotinės homogenizacijos taikymas įvairaus užpildymo betono mechaninių savybių įvertinimui. Atliekama analizė trijų tipų periodiniams elementams. Apskaičiuotas Jungo modulis nuo eksperimentinių rezultatų skyrėsi nežymiai.

Peng, Cao (2002) aprašo daugiapakopį modeliavimą, kurio žemiausioje pakopoje asimptotinės homogenizacijos metodu įvertinami modelio, sudaryto iš lygiagrečiai išsidėsčiusių stiklo pluošto gijų derivoje, elastingumo parametrai. Gauti įverčiai lyginami su įverčiais, apskaičiuotais mechaniniu

požiūriu ir eksperimentiniais rezultatais, kai gijos į nagrinėjamą modelį įeina įvairiomis dalimis. Šiame straipsnyje parodoma, kad Jungo modulio įverčiai gijų kryptimi, gauti mechaniniu požiūriu ir atlikus asimptotinę homogenizaciją, nuo eksperimentinių rezultatų skiriasi nežymiai. Jungo modulio skersai gijų kryptiai ir šlyties modulio įvertinimai, gauti naudojant asimptotinę homogenizaciją, nedaug skyrėsi nuo eksperimentinių rezultatų, o mechaniniai įvertinimai buvo žymiai mažesni. Todėl laikoma, kad mechaninis skersinio Jungo modulio įvertinimas yra Jungo modulio šia ašimi apatinė riba. Asimptotinės homogenizacijos metodu gautas Puasono koeficiento įvertis nežymiai mažesnis už įvertinimą mechaniniu požiūriu, eksperimentinių rezultatų palyginimui nėra. Straipsnyje aprašytas iš kevalinių elementų su ekvivalenčiais koeficientais supintos struktūros modelis ir jo tyrimas aukštesnėje pakopoje.

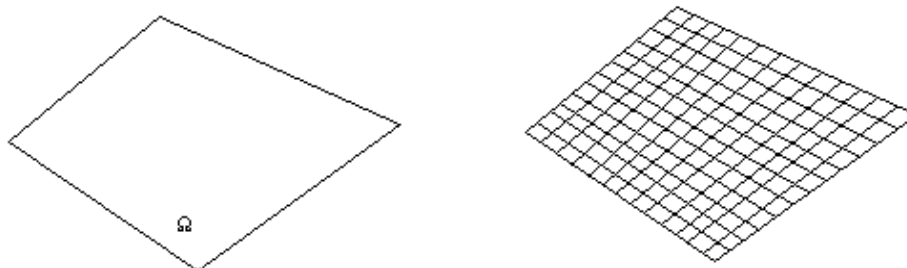
Nagrinėtuose straipsniuose pateiktas elastingumo koeficientų vertinimo asimptotinės homogenizacijos metodu analitinis modelis ir pagrindimas su įvairiais baigtinių elementų tipais. Išvadose pastebima, kad asimptotinės homogenizacijos įverčiai geriau atitinka eksperimentinius rezultatus nei įvertinimai mechaniniu požiūriu. Asimptotinė homogenizacija gali būti atliekama tik periodinės struktūros heterogeninėms medžiagoms. Jei medžiaga neperiodinė, elastingumo parametru viršutinės ir apatinės ribos įvertinimui naudojamos pataisytos asimptotinės homogenizacijos metodikos (Pinho-da-Cruz, Oliveira, Teixeira-Dias, 2009).

## 1.2 BAIGTINIŲ ELEMENTŲ METODAS

Kontinualiaja struktūra vadinama vientisa terpė, sudaryta iš be galo daug materialijų taškų. Modeliuojant kontinualioji struktūra diskretizuojama – skaidoma diskrečiais elementais, kuriuos aprašo baigtinis skaičius kintamųjų ir rodiklių. Struktūros diskretizavimui gali būti naudojami baigtinių elementų (FEM), kraštinių elementų (BEM), baigtinių skirtumų (FDM), baigtinių tūrių (FVM) ar spektrinis metodas. Tiesiniams kontinuumo mechanikos uždaviniams spręsti dažniausiai naudojami baigtinių elementų ir kraštinių elementų metodai, netiesiniams – baigtinių elementų metodas (Felippa, 2001).

Baigtinių elementų metodas yra skaitinis kontinualiųjų struktūrų analizės metodas, skirtas matematinės fizikos uždaviniams spręsti. Kontinualioji struktūra skaidoma į baigtinį skaičių nesudėtingos formos elementų (dvimačiu atveju – trikampiai, keturkampiai, trimačiu – trikampaiais ar keturkampiais ribojamos prizmės). Paprasčiausiu atveju daroma prielaida, kad modelio nagrinėjimo metu elemento kraštinės išlieka tiesios. Sudėtingesniais atvejais elemento kraštinės būseną gali aprašyti daugiau taškų. Baigtinis elementas nusakomas elemento forma, fizinėmis savybėmis, rodikliais, rodiklius siejančiomis priklausomybėmis ir jų nustatymo metodais. Elemente pažymimi tam tikri nagrinėjami taškai, vadinami mazgais, kuriuose apibrėžiami būvio kintamieji, nustatomi rodikliai. Gretimi elementai jungiasi išoriniuose mazguose (Barauskas, Belevičius, Kačianauskas, 2004). Matematinio požiūriu, baigtinių elementų metodas nusako būdą, kaip gauti srities  $\Omega$  kraštinio

uždavinio sprendinio skaitinės aproksimacijos. Sritis  $\Omega$  aproksimuojama nesusikertančių mažesnių sričių sąjunga  $\cup\Omega^{(e)}$  (Felippa, 2001) (1.1 pav.).



**1.1 pav. Srities  $\Omega$  skaidymas elementais  $\Omega^{(e)}$ .**

Išskiriami du konstrukcijos nagrinėjimo baigtinių elementų metodu tipai – matematinis ir fizikinis. Taikant matematinį baigtinių elementų metodą, pirmiausia nagrinėjamas sistemos matematinis modelis. Dažniausiai tai būna paprastoji diferencialinė ar diferencialinė dalinėmis išvestinėmis pagal laiką ar koordinatų sistemą lygtis. Sudaromas diskretusis struktūros modelis – matematinio modelio lygtys pakeičiamos algebrinių lygčių sistema. Skaitiniais metodais randamas algebrinės sistemos sprendinys, nagrinėjamos algebrinių lygčių sprendinio ir struktūros diskretizavimo paklaidos. Taikant fizikinį baigtinių elementų metodo tipą, pirmiausia nagrinėjama fizikinė sistema. Ji idealizuojama matematinio modeliu ir diskretizuojama. Diskretusis modelis gali būti atnaujinamas ir pataisomas, kai žinomi papildomi eksperimentiniai duomenys. Praktikoje fizikinis ir matematinis baigtinių elementų metodo tipai naudojami kartu (Felippa, 2001).

Baigtinių elementų metodas taikomas mechaninių, šiluminių, elektromagnetinių ir kitokių fizinių sistemų uždaviniams spręsti ir dinaminiams procesams modeliuoti. Šiuo metodu kuriami modeliai įvairiose srityse – plastinėje chirurgijoje, aviacijoje, automobilių konstravime ir t.t.

### **1.3 DAUGIAPAKOPIS MODELIAVIMAS**

Sudėtingų sistemų tiesioginis skaidymas baigtiniais elementais imlus skaičiavimo laikui ir kompiuterio atminčiai, todėl taikoma strategija, pagreitinanti ir supaprastinanti skaičiavimus, – daugiapakopis modeliavimas, kurio metu svarbiausios sritys modeliuojamos atskirai. Toks modeliavimas naudojamas fizikinių, cheminių, biologinių sistemų modeliavimui. Daugiapakopį modeliavimą klasifikuoja pakopų skaičius, sistemos modeliavimo tvarka, skirtingų pakopų submodelių dengiamas sritis siejantys ryšiai.

Bet koks daugiapakopis modeliavimas susideda iš trijų žingsnių:

- Parenkamos skalės, kuriose nagrinėjamas modelis, ir jų skaičius.
- Remiantis žinomais ir ieškoma dydžiais kiekvienoje skalėje sukuriama parinktų sričių submodeliai.
- Submodeliai susiejami į vieną modelį.

Naudojamų pakopų skaičius priklauso nuo nagrinėjamos sistemos sudėtingumo. Allen, Kim, Souza (2008) pakopas siūlo parinkti taip, kad žemesnę pakopą atspindinčio modelio skalės eilė būtų žymiai mažesnė už aukštesnę pakopą atspindinčios skalės ir bangos, sklindančios šioje pakopoje, eilės. Gamtoje pasitaikančiose sistemose vyrauja skalės, kurių eilė svyruoja  $10^{-10} m < l < 10^3 m$ , todėl fizinėje aplinkoje įmanomas 5-6 skalių derinys. Jei sistemos sprendiniai randami skaitiniais metodais, įvertinus kompiuterių darbo sąnaudas praktiška skaičiuoti ne daugiau nei tris pakopas. Pakopas nusakančių skalių ilgiai turi tenkinti savybę  $l_1 \ll l_2 \ll l_3$ , kur  $l_1$  - žemiausios pakopos skalės eilė,  $l_2$  - vidutinės pakopos skalės eilė,  $l_3$  - aukščiausios (globalios) pakopos skalės eilė (Milton, 2004). Žemiausios pakopos skalės eilė  $l_1$  parenkama didesnė nei maksimalus nehomogeniškumo ilgis submodelyje. Šioje pakopoje kiekvienos kompozitinę medžiagą sudarančios medžiagos savybės nagrinėjamos atskirai ir taikant homogenizacijos teoriją gaunamos ekvivalenčios medžiagos savybės. Vidutinėje pakopoje kompozitinė medžiaga laikoma homogenine ortotropine. Aukščiausioje pakopoje struktūra laikoma homogeniniu kontinuumu, jos skalės eilė mažesnė nei nagrinėjamo kūno dimensijos ir struktūros svyravimai.

Sistemos modeliavimo tvarka priklauso nuo žinių apie sistemos elgseną ir parametrus kiekvienoje pakopoje. Ingram, Cameron, Hangos (2004) daugiapakopį modeliavimą pagal sistemos modeliavimo tvarką skirsto į keturias grupes:

- Iš apačios į viršų (Upscale) – sukuriamas submodelis žemiausioje pakopoje, remiantis gautais sprendiniais paeiliui kuriami didesnes sritis nagrinėjantys submodeliai aukštesnėse pakopose. Tokia modeliavimo tvarka netinkama inžineriniams procesams, nes trūksta žinių apie modelio elgseną žemiausioje pakopoje ir metodų modelių konstravimui.
- Iš viršaus į apačią (Downscale) – aukščiausioje pakopoje sukurtas modelis tobulinamas tikslinant sprendinius nagrinėjamuose vis žemesnių pakopų submodeliuose.
- Lygiagretus (Concurrent) – vykstant procesui visose pakopose submodeliai nagrinėjami lygiagrečiai.
- Iš vidurio (Middle-out) – sukuriamas modelis pakopoje, kurioje yra daugiausiai informacijos apie nagrinėjamą objektą. Gautas modelis tobulinamas nagrinėjant modelius aukštesnėse ir žemesnėse pakopose tolstant nuo pradinio modelio. Tokia modeliavimo tvarka siūloma biologinių sistemų modeliavimui.

Kitas daugiapakopio modeliavimo klasifikavimo būdas, pateikiamas Ingram, Cameron, Hangos (2004), remiasi gretimų pakopų submodelių padengiamomis modelio sritimis. Visa sritis, kurią padengia gretimose pakopose nagrinėjamas modelis, žymima  $S$ , žemesnės pakopos submodelio padengiama sritis žymima  $S_\mu$ , aukštesnės pakopos –  $S_m$ . Išskiriami penki tipai:

- Daugiasričio (Multidomain) tipo modelis sudarytas iš gretimose pakopose nagrinėjamų nepersidengiančių sričių, susijungiančių kraštuose. Toks modeliavimo tipas naudojamas, kai tam tikra sritis nagrinėjamoje aplinkoje negali būti tinkamai aprašoma modeliu aukštesnėje pakopoje. Simboliškai submodelių dengiamų sričių sąryšis užrašomas lygybėmis:  $S_\mu \cup S_M = S$ ,  $S_\mu \cap S_M = \emptyset$ . Jei modelyje yra nedidelė sritis  $|S_I| \ll |S_\mu|$ , nagrinėjama abiejose pakopose, lygybės perrašomos:  $S_\mu \cup S_I \cup S_M = S$ ,  $S_\mu \cap S_M = S_I$ .
- Nagrinėjant įterptos srities tipo modelį, aukštesnės pakopos submodelis padengia visą nagrinėjamo modelio sritį, o žemesnės pakopos – tik dalį srities. Submodelių dengiamų sričių sąryšis užrašomas lygybėmis:  $S_M = S$ ,  $S_\mu \subset S_M$ .
- Lygiagreto (Simultaneous) tipo modelio atveju žemesniojoje pakopoje sukuriama visa sistema, neįvertinant jos savybių aukštesnėje pakopoje. Tada dauginant, skaičiuojant nagrinėjamų dydžių vidurkius ar atliekant statistinę analizę žemesnėje pakopoje gauti rezultatai pritaikomi aukštesnės pakopos sistemoms. Simboliškai toks tipas aprašomas lygybėmis:  $S_M = \emptyset$ ,  $S_\mu = S$ .
- Paralelinio tipo modelio atveju skirtingose pakopose sukuriami submodeliai, padengiantys visą sritį. Šiuo atveju pakopos žymimos numeriais, nes submodeliai papildo vienas kitą ir gali turėti tiek žemesnės, tiek aukštesnės pakopos savybių. Abu submodeliai padengia visą modelio sritį:  $S_1 = S_2 = S$ .
- Dalinės srities tipo modelis skirstomas į tris atvejus – supaprastinimą (žemesnės pakopos submodelio skalės eilė sumažinama, kai submodelis naudojamas aukštesnėje pakopoje), transformaciją (žemesnės pakopos submodelis transformuojamas į aukštesnės pakopos submodelį), vienpusį ryšį (žemesnės pakopos submodeliui apskaičiuoti parametrai naudojami aukštesnės pakopos submodelyje). Visiems atvejams submodelių padengiamų sričių ryšiai užrašomi lygybėmis:  $S_M = S$ ,  $S_\mu = \emptyset$ .

Jei sistema nagrinėjama daugiau nei dviejose pakopose, gretimų pakopų submodelių padengiamų sričių ryšiai gali skirtis. Tarkime, trijų pakopų sistemoje (I-os pakopos skalės eilė « II-os pakopos skalės eilė « III-os pakopos skalės eilė) I ir II pakopų submodeliai nagrinėjami naudojant įterptos srities tipo modelį, II ir III pakopose – lygiagreto tipo.

Sprendžiant elastingumo uždavinį heterogeninės struktūros medžiagoms žemiausioje pakopoje sukuriamas modelis, kuriame įvertinami ekvivalenčios homogeninės medžiagos elastingumo koeficientai. Aukštesnėse pakopose modeliavimas atliekamas su prielaida, kad naudojama homogeninė medžiaga.

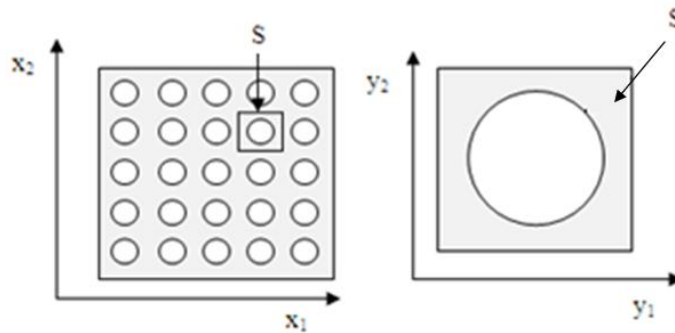
## 1.4 ASIMPTOTINĖ HOMOGENIZACIJA

Naudojant asimptotinę homogenizaciją galima įvertinti sudėtingą periodinę struktūrą turinčios medžiagos elastingumo parametrus. Šie parametrai naudojami aukštesnės pakopos modeliuose su prielaida, kad medžiaga homogeninė. Heterogeninės struktūros medžiagos tiesioginis diskretizavimas naudojant baigtinių elementų metodus gali pareikalauti daug skaičiavimo sąnaudų.

Asimptotinė analizė dažniausiai naudojama kelių pakopų, kurių skalės susietos pakankamai mažu dydžiu  $\alpha$  ( $\alpha \ll 1$ ):  $y = \frac{1}{\alpha} x$ , apibendrinimui ar ekvivalenčios medžiagos parametru radimui, kai žemiausioje pakopoje nagrinėjama periodinė struktūra. Nagrinėjamos periodinės struktūros modelis  $\Omega$  aprašomas globalių koordinatų  $x$  sistemoje. Periodiškai pasikartojantis elementas  $Y$  aprašomas lokaliųjų koordinatų  $y$  sistemoje. Periodiškumas nagrinėjamam kūnui  $\Omega$  su periodine struktūra  $Y$  ir bendromis mechaninėmis ar geometrinėmis savybėmis  $f$  aprašomas sąlyga ( $Y$  – struktūros periodas,  $f$  – periodinė funkcija su periodu  $Y$  pozicijų vektoriams  $x$ ) (Zienkiewicz, Taylor, 2006):

$$\text{jei } x \in \Omega \text{ ir } x+Y \in \Omega \rightarrow f(x+Y) = f(x) \quad (1.1)$$

Jei lokaliųjų koordinatų skalė yra labai maža lyginant su globaliųjų koordinatų skale ( $\alpha \rightarrow 0$ ), tai žemiausioje pakopoje ieškomi dydžiai (poslinkiai, įtempimai ir t.t.) artėja į aukščiausioje pakopoje gautą sprendinį nagrinėjant homogeninę struktūrą su ekvivalenčiais medžiagos parametrais.



1.2 pav. Asimptotinės analizės schema.

$$L^\alpha = \frac{1}{\alpha^2} L_0 + \frac{1}{\alpha} L_1 + L_2 \quad (1.2)$$

$$u_i = u_i^\alpha(x) = u_i^{(0)}(x, y) + \alpha u_i^{(1)}(x, y) + \alpha^2 u_i^{(2)}(x, y) + O(\alpha^3) \quad (1.3)$$

Atliekant asimptotinę analizę tiesinių lygčių, užrašomų forma  $L^\alpha u_i^\alpha = f$ , sprendimui naudojama homogenizacija (antros eilės perturbacija) (Pavliotis, Stuart, 2008). Homogenizacijos atveju operatorius  $L^\alpha$  užrašomas forma 1.2 formule, ieškomas 1.3 formos sprendinys. Operatoriaus  $L_0$  vaizdų aibė nėra triviali,  $L_i \in R^{d \times d}$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Tada tiesinę lygtį galima perrašyti:

$$\frac{1}{\alpha^2} L_0 u_i^{(0)} + \frac{1}{\alpha} (L_0 u_i^{(1)} + L_1 u_i^{(0)}) + (L_0 u_i^{(2)} + L_1 u_i^{(1)} + L_2 u_i^{(0)} - f) + O(\alpha) = 0 \quad (1.4)$$



Surenkami koeficientai prie atitinkamų  $\varepsilon$  laipsnių:

$$\begin{aligned} O(\alpha^{-2}) : L_0 u_i^{(0)} &= 0 \\ O(\alpha^{-1}) : L_0 u_i^{(1)} &= -L_1 u_i^{(0)} \\ O(\alpha^0) : L_0 u_i^{(2)} + L_1 u_i^{(1)} + L_2 u_i^{(0)} - f &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Įvertinus kraštines sąlygas randamas vienintelis sprendinys  $u^\alpha(x)$ .

Darbe nagrinėjamas tiesinio elastingumo uždavinys iš periodinių elementų  $Y$  sudarytam kūnui  $\Omega$  taikant asimptotinę homogenizaciją. Tiesinis elastingumo uždavinys nagrinėjamam kūnui  $\Omega$  užrašomas pusiausvyros lygtimis (1.6), tiesiniu deformacijų – poslinkių sąryšiu (1.7) ir Huko dėsnium (1.8) ( $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – Koši formos įtempimų ir deformacijų tenzoriai,  $f_i$  ir  $u_i$  – vektoriai, sudaryti iš žinomų apkrovų ir poslinkių) (Pinho-da-Cruz, Oliveira, Teixeira-Dias, 2009).

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^\alpha}{\partial x_j^\alpha} + f_i = 0 \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_j^\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^\alpha}{\partial x_j^\alpha} + \frac{\partial u_j^\alpha}{\partial x_i^\alpha} \right) \quad (1.7)$$

$$\sigma_{ij}^\alpha = D_{ijkl}^\alpha \varepsilon_{kl}^\alpha, \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3\} \quad (1.8)$$

Kūno  $\Omega$  kraštas  $\Gamma$  sudarytas iš paviršių  $\Gamma_1$  ir  $\Gamma_2$ , kuriuose nurodomos kraštinės sąlygos 1.9 ir 1.10 ( $\bar{u}_i$  ir  $\bar{t}_i$  – žinomi poslinkiai ir apkrovos,  $n_j$  – išorėn nukreiptas paviršiaus  $\Gamma_2$  normalės vektorius).

$$u_{ij}^\alpha = \bar{u}_i \text{ paviršiuje } \Gamma_1 \quad (1.9)$$

$$\sigma_{ij}^\alpha n_j = \bar{t}_i \text{ paviršiuje } \Gamma_2 \quad (1.10)$$

Paviršiai  $\Gamma_1$  ir  $\Gamma_2$  nesikerta ir padengia visą nagrinėjamos srities kraštą:

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \quad (1.11)$$

Elastingumo koeficientai  $D_{ijkl}^\alpha$  globalioje koordinačių sistemoje  $x$  yra periodinės funkcijos, tiesiogiai priklausančios nuo  $\alpha$  ir netiesiogiai priklausančios nuo  $x$ :

$$D_{ijkl}^\alpha = D_{ijkl}(x/\alpha) = D_{ijkl}(y) \quad (1.12)$$

Viršutinis indeksas  $\alpha$  nurodo koeficiento  $D_{ijkl}^\alpha$  pasikartojimą periodu  $Y$ .

Atliekant homogenizaciją daroma prielaida, kad medžiagos charakteristikų periodiškumas sukelia analogiškus periodinius sutrikdymus kūno mechaniniame elgesyje, todėl poslinkius galima užrašyti asimptotiniu skleidiniu (1.3) (Zienkiewicz, Taylor, 2006).

Paprastosios funkcijos  $\varphi$  išvestinė kūną  $\Omega$  aprašančioje srityje užrašoma 1.13 formule (Peng, Cao, 2002).

$$\frac{\partial \varphi^\alpha(x, y)}{\partial x_i^\alpha} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_i} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_i} \quad (1.13)$$

Naudojant išvestinės formulę ir deformacijų – poslinkių sąryšį deformacijos  $\varepsilon_{ij}^\alpha$  užrašomos 1.14 – 1.16 formulėmis (Pinho-da-Cruz, Oliveira, Teixeira-Dias, 2009).

$$\varepsilon_{ij}^\alpha = \frac{1}{\alpha} \varepsilon_{ij}^{(0)} + \alpha^0 \varepsilon_{ij}^{(1)} + \alpha^1 \varepsilon_{ij}^{(2)} + O(\alpha^2) \quad (1.14)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial y_i} \right) \quad (1.15)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(r)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(r-1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(r-1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^{(r)}}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^{(r)}}{\partial y_i} \right), \quad r \in \mathcal{N} \quad (1.16)$$

Remiantis gautomis išraiškomis 1.8 dėsnis užrašomas 1.17 – 1.19 formulėmis.

$$\sigma_{ij}^\alpha = \frac{1}{\alpha} \sigma_{ij}^{(0)} + \alpha^0 \sigma_{ij}^{(1)} + \alpha^1 \sigma_{ij}^{(2)} + O(\alpha^2) \quad (1.17)$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} D_{ijkl}(y) \left( \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial y_l} + \frac{\partial u_l^{(0)}}{\partial y_k} \right) \quad (1.18)$$

$$\sigma_{ij}^{(r)} = \frac{1}{2} D_{ijkl}(y) \left( \frac{\partial u_k^{(r-1)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(r-1)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^{(r)}}{\partial y_l} + \frac{\partial u_l^{(r)}}{\partial y_k} \right), \quad r \in \mathcal{N} \quad (1.19)$$

$\sigma_{ij}^\alpha$  skleidinys įrašomas į pusiausvyros lygtį 1.6, grupuojami koeficientai prie vienodų  $\alpha$  laipsnių:

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial y_j} + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial y_j} \right) + \alpha^0 \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial y_j} + f_i \right) + \dots = 0 \quad (1.20)$$

Kadangi  $\alpha \rightarrow 0$  ( $\alpha \neq 0$ ), tai tam, kad 1.20 lygybė būtų tenkinama, koeficientai prie visų  $\alpha$  laipsnių turi būti lygūs nuliui (1.21 – 1.24 lygybės).

$$\frac{1}{\alpha^2} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial y_j} = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{1}{\alpha} \rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial y_j} = 0 \quad (1.22)$$

$$\alpha^0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial y_j} + f_i = 0 \quad (1.23)$$

$$\alpha^r \rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}^{(r+1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(r)}}{\partial y_j} = 0, \quad r \in \mathcal{N} \quad (1.24)$$

Kraštinės sąlygos 1.9 ir 1.10 perrašomos 1.25 ir 1.26 išraiškomis.

$$\alpha^0 u_i^{(0)}(x, y) + \alpha^1 u_i^{(1)}(x, y) + \alpha^2 u_i^{(2)}(x, y) + \dots = \bar{u}_i \text{ paviršiuje } \Gamma_1 \quad (1.25)$$

$$\left( \frac{1}{\alpha} \sigma_{ij}^{(0)} + \alpha^0 \sigma_{ij}^{(1)} + \alpha^1 \sigma_{ij}^{(2)} + \dots \right) n_j = \bar{t}_i \text{ paviršiuje } \Gamma_2 \quad (1.26)$$

Sulyginami dydžiai prie vienodų  $\alpha$  laipsnių:

$$\alpha^0 \rightarrow u_i^{(0)} = \bar{u}_i \quad (1.27)$$

$$\alpha^r \rightarrow u_i^{(r)} = 0, \quad r \in \mathcal{N} \text{ paviršiuje } \Gamma_1 \quad (1.28)$$

$$\frac{1}{\alpha} \rightarrow \sigma_{ij}^{(0)} n_j = 0 \quad (1.29)$$

$$\alpha^0 \rightarrow \sigma_{ij}^{(1)} n_j = \bar{t}_i \quad (1.30)$$

$$\alpha^r \rightarrow \sigma_{ij}^{(r+1)} n_j = 0, \quad r \in \mathcal{N} \text{ paviršiuje } \Gamma_2 \quad (1.31)$$

Iš 1.21 lygybės gaunama, kad  $\sigma_{ij}^{(0)} = \sigma_{ij}^{(0)}(x)$ . Be to, remiantis elastingumo tenzoriaus simetriškumu  $\sigma_{ij}^{(0)}$  galima perrašyti  $\sigma_{ij}^{(0)} = D_{ijkl}(y) \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial y_l}$ . Poslinkiai  $u_i^{(0)}$  atspindi globaliuosius homogeninės medžiagos poslinkius ir nepriklauso nuo lokaliųjų koordinatinių sistemos  $y$ , todėl tenkinamos 1.32 ir 1.33 sąlygos.

$$\sigma_{ij}^{(0)} = 0 \quad (1.32)$$

$$u_i^{(0)} = u_i^{(0)}(x) \quad (1.33)$$

Remiantis 1.32 ir 1.33 lygybė 1.22 įgyja išraišką 1.34.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial y_j} = 0 \quad (1.34)$$

Dėl elastingumo tenzoriaus simetriškumo  $\sigma_{ij}^{(1)}$  išreiškiamas 1.35 formule.

$$\sigma_{ij}^{(1)} = D_{ijkl}(y) \left( \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_l} \right) \quad (1.35)$$

Įstačius 1.35 formulę į 1.34 gaunama 1.36 išraiška.

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[ D_{ijkl}(y) \left( \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_l} \right) \right] = 0 \quad (1.36)$$

Dydis  $\frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l}$  yra konstanta operatoriaus  $\frac{\partial}{\partial y_j}$  atžvilgiu, todėl taikant superpozicijos principą gaunamas 1.37 formos sprendinys  $(\bar{u}_i^{(1)}(x))$  – integravimo konstantos  $y$  koordinatinių sistemoje,  $\chi_i^{kl}$  – charakteringųjų poslinkių tenzorius su periodu  $Y$ ).

$$u_k^{(1)}(x, y) = -\chi_i^{kl}(y) \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l} + \bar{u}_i^{(1)}(x) \quad (1.37)$$

Į 1.35 įstačius 1.37 įtempimai  $\sigma_{ij}^{(1)}$  išreiškiami 1.38 formule naudojant 1.39 – 1.41 formules.

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \hat{\sigma}_{ij}^{mn} \frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_n} \quad (1.38)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^{mn} = \left( D_{ijmn}(y) - D_{ijkl}(y) \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l} \right) = D_{ijkl}(y) \left( I_{kl}^{mn} - \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l} \right) \quad (1.39)$$

$$I_{kl}^{mn} = \delta_{k,m} \delta_{l,n}, \delta_{k,m} - \text{Kronekerio } \delta \text{ funkcija.} \quad (1.40)$$

$$\delta_{k,m} = \begin{cases} 1, & \text{jei } k = m \\ 0, & \text{jei } k \neq m \end{cases} \quad (1.41)$$

1.34 lygybė perrašoma 1.42 forma.

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^{mn}}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_n} = 0 \quad (1.42)$$

Žinoma, kad antrasis daugiklis nelygus nuliui, tai pirmasis prilyginamas nuliui.

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^{mn}}{\partial y_j} = 0 \quad (1.43)$$

1.39 įstatoma į 1.43 lygybę ir gaunama 1.44 išraiška.

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[ D_{ijkl}(y) \left( I_{kl}^{mn} - \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l} \right) \right] = 0 \quad (1.44)$$

Charakteringųjų poslinkių tenzorius komponentės  $\chi_k^{mn} \in \tilde{V}_y$  yra variacinio uždavinio 1.45 sprendinys ( $\tilde{V}_y$  – periodinių, tolydžių, be galo daug kartų nulio aplinkoje diferencijuojamų funkcijų, kurių vidurkis  $Y$  elemente lygus nuliui, aibė) (Pinho-da-Cruz, Oliveira, Teixeira-Dias, 2009).

$$\int_Y D_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY = \int_Y D_{ijmn} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY, \forall v_i \in \tilde{V}_y \quad (1.45)$$

Funkcijos  $\varphi(x,y)$  su periodu  $Y$  vidutinė vertė elemente  $Y$  apskaičiuojama 1.46 formule.

$$\langle \varphi \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y \varphi(x,y) dY \quad (1.46)$$

Homogenizuotas elastingumo tenzorius  $D^h$  randamas iš lokaliųjų koordinatų  $y$  sistemoje aprašyto periodinio elemento pusiausvyros lygties (1.44):

$$D_{ijmn}^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl}(y) \left[ I_{kl}^{mn} - \frac{\partial \chi_k^{mn}}{\partial y_l} \right] dY \quad (1.47)$$

Integruojant išraišką 1.38 periodiniame elemente  $Y$  gaunamas įtempimų – deformacijų ryšys iš homogeninės elastingos medžiagos sudarytam kūnui (1.48) (Peng, Cao, 2002).

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_{ij}^{(1)}(x,y) dY = D_{ijmn}^h \frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_n} \quad (1.48)$$

Atlikus homogenizaciją vietoj (1.6 – 1.8) lygtimis aprašomo elastingumo uždavinio su aukšto dažnio periodiniais erdviniais virpesiais sprendžiamas homogeninis elastingumo uždavinys su pastoviais koeficientais (1.49) ir kraštinėmis sąlygomis (1.50 – 1.51).

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (1.49)$$

$$u_i^{(0)} = \bar{u}_i \text{ paviršiuje } \Gamma_1 \quad (1.50)$$

$$\Sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \text{ paviršiuje } \Gamma_2 \quad (1.51)$$

Jei modelio įtempimų apskaičiavimams naudojami skaitiniai metodai, homogenizuojant žymiai sumažinamas modelio laisvės laipsnių skaičius. Naudojant homogenizaciją žemesnės pakopos submodelio savybėms apskaičiuoti pakanka vieno periodinio elemento. Aukštesnėje pakopoje kuriamas homogeninės medžiagos modelis.

Nors asimptotinė analizė paprastai taikoma tiesinių lygčių nagrinėjimui dviejose pakopose, tačiau praplėtus galima taikyti ir netiesiniams ryšiams tarp pakopų daugiau nei dviejose skalėse.

## 1.5 FIZIKINĖS MODELIO MEDŽIAGŲ SAVYBĖS

Heterogeninės struktūros medžiaga yra dviejų ar daugiau skirtingas savybes turinčių medžiagų mišinys. Vienas iš heterogeninės medžiagos tipų – gijos, lygiagrečiai patalpintos iš kitos medžiagos sudarytoje aplinkoje. Kitais atvejais aplinką sudarančios medžiagos ertmės gali užpildyti dalelės ar skysčiai. Į sudėtinę medžiagą ją sudarantys elementai įeina reikšmingomis dalimis. Tokios medžiagos savybės pastebimai skiriasi nuo ją sudarančių medžiagų savybių. Dirbtinės heterogeninės medžiagos kuriamos siekiant tam tikrų fizikinių ar cheminių savybių – yra galimybė suteikti medžiagoms norimas šilumos, konduktyvumo, kietumo ir t.t. savybes, neįprastas fizikines charakteristikas (Milton, 2004).

Tiesinį medžiagos elastingumą apibūdina fizikinės charakteristikos – Jungo modulis, Puasono koeficientas, šlyties modulis. Jungo modulių nusakomas medžiagos atsparumas gniuždymui ar tempimui. Puasono koeficientu išreiškiamas santykinis elemento suplonėjimas viena ašimi, kai kitos ašies kryptimi atliekama deformacija. Šlyties modulių įvertinamas medžiagos atsparumas šlyties deformacijai. Riba, kai nustoja galioti tiesinis Huko dėsnis, vadinama takumo riba.

Dauguma grynųjų medžiagų yra izotropinės. Žemesnės pakopos submodeliuose įvertinant heterogeniškumą nagrinėjami iš izotropinių medžiagų sudaryti elementai. Izotropinės medžiagos turi begalinį skaičių simetrijos ašių, jų savybės nepriklauso nuo krypties. Tokių medžiagų elastingumo savybėms nusakyti reikia tik dviejų konstantų – Jungo modulio  $E$  ir Puasono koeficiento  $\nu$ . Šlyties modulis izotropinėms medžiagoms apskaičiuojamas iš kitų dviejų koeficientų pagal formulę:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.52)$$

Trimačiu atveju izotropinei medžiagai elastingumo matricos  $D$  atvirkštinė apskaičiuojama pagal 1.53 formulę.

$$D^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Žemesnės pakopos modeliui suteikus plokščiųjų įtempimų būvį ir apskaičiavus ekvivalenčius dvimačio modelio koeficientus gaunamas ortotropinės medžiagos modelis. Ortotropinė medžiaga dvimačiu atveju turi dvi statmenas simetrijos ašis, jos elastingumą apibūdina keturios konstantos (Jungo moduliai  $E_x$  ir  $E_y$ , Puasono koeficientas  $\nu_{xy}$ , šlyties modulis  $G_{xy}$ ). Dvimačiu atveju ortotropinei medžiagai elastingumo matricos  $D$  atvirkštinė apskaičiuojama pagal 1.54 formulę.

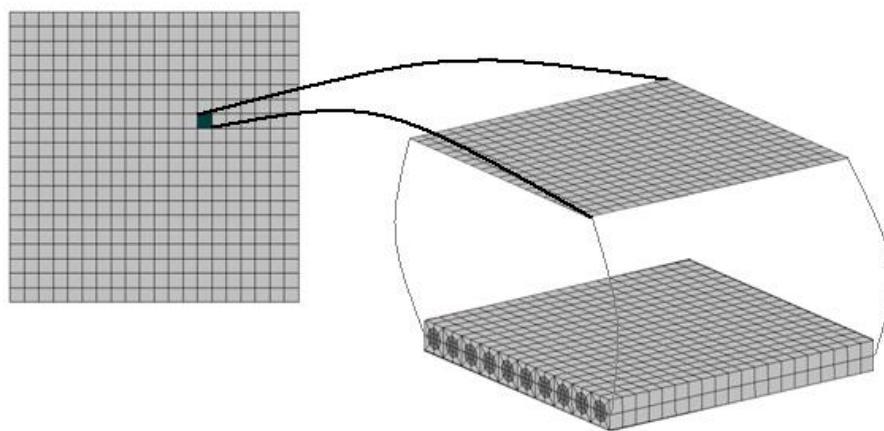
$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}, \text{ su sąlyga } \frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x} \quad (1.54)$$

Fizikinės elastingumo konstantos teigiamos. Elastingumo ir jai atvirkštinės matricių pagrindinės įstrižainės reikšmės turi būti teigiamos, tai tenkinama nelygybė:  $1 - \nu_{xy}\nu_{yx} > 0$ . Remiantis šiomis sąlygomis ir elastingumo matricos simetriškumo savybe, elastingumo koeficientai turi tenkinti 1.55 sąlygas (Barbero, 2008).

$$E_x > 0, E_y > 0, G_{xy} > 0, 0 < \nu_{xy} < \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \quad (1.55)$$

## 2. TYRIMO MODELIS

Atliekant tyrimą daugiapakopis modeliavimas taikomas nuo žemiausios pakopos iki aukščiausios. Sukuriamas sluoksnio modelis žemiausioje pakopoje įvertinant medžiagos heterogeniškumą, apskaičiuojami medžiagos elastingumo koeficientai. Dvimatis modelis vidurinėje pakopoje sukuriama remiantis prielaida, kad modelio medžiaga homogeninė su ekvivalenčiais elastingumo koeficientais. Šioms pakopoms jungti naudojamas dalinės srities vienpusio ryšio tipo modelis – žemiausioje pakopoje apskaičiuoti fizikiniai parametrai taikomi vidurinėje pakopoje. Patikrinama žemiausios ir vidurinės pakopos modelių elgsena vienodomis sąlygomis. Jei modelių rezultatai skiriasi nežymiai, galima kurti konstrukcijas, sudarytas iš heterogeninės medžiagos, modelį naudojant ekvivalenčius homogeninės medžiagos parametrus.



**2.1 pav. Daugiapakopio modeliavimo schema.**

Darbe taikoma E.J.Barbero (2008) aprašyta metodika trimačio modelio įtempimų lygčių perėjimui prie dvimačio modelio lygčių.

Vienkryptė heterogeninė medžiaga gali būti laikoma homogenine ortotropine (simetrijos plokštumų susikirtime gaunamos trys ašys – gijų kryptimi ( $x$ ), storio kryptimi ( $z$ ) ir joms statmena ( $y$ )). Ortotropinei medžiagai trimačiu atveju atvirkštinis Huko dėsnis užrašomas 2.1 formule.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = S \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, \text{ kur } S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}, \frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x}, \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x}, \frac{\nu_{zy}}{E_z} = \frac{\nu_{yz}}{E_y} \quad (2.1)$$

Ortotropinę medžiagą trimačiu atveju visiškai apibūdina 9 koeficientai:  $E_x, E_y, E_z, \nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{zx}, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}$ , dvimačiu pakanka keturių –  $E_x, E_y, \nu_{xy}, G_{xy}$ .

Kai erdvinio modelio matmenys vienos iš ašių kryptimi yra nedideli lyginant su kitomis ašimis, naudojamas plokščiųjų įtempimų būvis. Laikoma, kad  $\sigma_z = 0, \sigma_{yz} = 0, \sigma_{zx} = 0$ , tai trečioji, ketvirtoji ir penktoji matricos S eilutės bei trečiasis, ketvirtasis ir penktasis stulpeliai nenaudojami. Tuomet pirmosios dvi ir paskutinioji lygtys gali būti perrašytos atskirai, gaunama 3x3 redukuota elastingumo matrica S. Naudojantis savybe  $\gamma = 2\varepsilon_{xy}$  atvirkštinį Huko dėsnį plokštumos įtempimams galima užrašyti 2.3 formule.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Žinant deformacijas dvimačio modelio įtempimus galima apskaičiuoti naudojantis atvirkštine forma 2.4, kur matrica  $D = S_{3 \times 3}^{-1}$  vadinama redukuota elastingumo matrica plokštumos įtempimams.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Dvimačiu atveju elastingumo uždavinį aprašančios pusiausvyros lygtys perrašomos 2.5 išraiška.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + f_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Elemento deformacijos  $\varepsilon$  ir įtempimai  $\sigma$  apskaičiuojami naudojant elastingumo matricą D ir interpoliacinių funkcijų dalinių išvestinių matricą B, kai žinomi elemento mazgų poslinkiai u, pagal 2.6 ir 2.7 formules (Pinho-da-Cruz, Oliveira, Teixeira-Dias, 2009).

$$\varepsilon = Bu \quad (2.6)$$

$$\sigma = DBu \quad (2.7)$$

Trimačio modelio atveju naudojama žemiausios pakopos elemento elastingumo matrica D izotropinei medžiagai. Interpoliacinių funkcijų  $\varphi_i(x, y, z)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , išvestinių matrica B trimačiu atveju išreiškiama 2.8 formule.



$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(x, y, z) & 0 & 0 & \dots & \varphi_8(x, y, z) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(x, y, z) & 0 & \dots & 0 & \varphi_8(x, y, z) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(x, y, z) & \dots & 0 & 0 & \varphi_8(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Elemento formos funkcijų dalinės išvestinės randamos iš sąryšio 2.9.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_i(x, y, z)}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 8, \quad J - \text{Jakobio matrica.} \quad (2.9)$$

Su gautais ekvivalenčiais elastingumo koeficientais sukuriamas dvimatis modelis. Trimačio ir dvimačio modelių kraštinėms suteikiami vienodi poslinkiai. Naudojama su ekvivalenčiais koeficientais apskaičiuota elastingumo matrica D ortotropinei homogeninei medžiagai (1.54). Interpoliacinių funkcijų  $\varphi_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , išvestinių matrica B dvimačiu atveju išreiškiama 2.10 formule.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(x, y) & 0 & \dots & \varphi_4(x, y) & 0 \\ 0 & \varphi_1(x, y) & \dots & 0 & \varphi_4(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Elemento formos funkcijų dalinės išvestinės randamos iš 2.11 sąryšio:

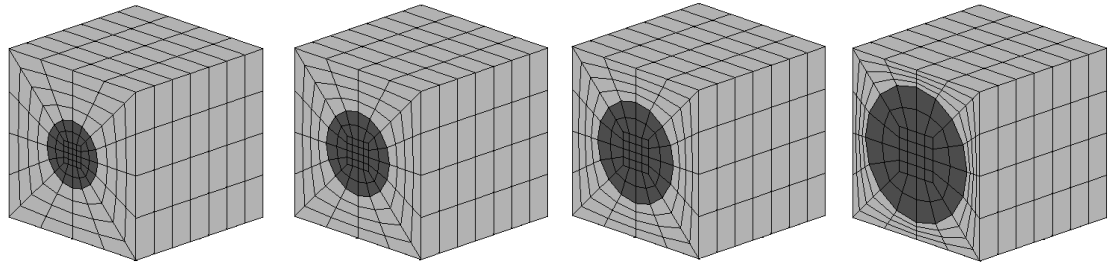
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad J - \text{Jakobio matrica.} \quad (2.11)$$

Lyginami trimačio ir dvimačio modelių vidutiniai įtempimai, apskaičiuoti baigtinių elementų skaičiuojamojoje terpeje LS-DYNA. Įtempimų skirtumas įvertinamas 2.12 formule ( $\sigma_{3D}$  – vidutiniai trimačio modelio įtempimai,  $\sigma_{2D}$  – vidutiniai dvimačio modelio įtempimai).

$$\Delta = \frac{|\sigma_{3D} - \sigma_{2D}|}{\sigma_{3D}} \cdot 100\% \quad (2.12)$$

Dvimačių modelių su homogeninės medžiagos koeficientais galima taikyti heterogeninės medžiagos modeliavimui, jei  $\Delta$  neviršija 10%, kai modeliai deformuojami pagal x, y ir xy.

Homogeninės medžiagos elastingumo koeficientai vertinami trimis metodais (asimptotinė homogenizacija, naudojant grynąjį įtempimų būvį (LS-DYNA), mechaniniu požiūriu) keičiant gijų tūrio dalį medžiagoje – didinant gijų skersmenį.



**2.2 pav. Periodinis elementas su skirtingomis tūrio dalimis modelyje.**

Laikoma, kad periodinio elemento skaidymo pakanka, jei su smulkesniu tinkleliu gauti rezultatai skiriasi ne daugiau nei 10%.

Modelio dinaminės savybės aprašomos konstrukcijos virpesių tikriniais dažniais (tikrinėmis reikšmėmis) ir tikrinėmis formomis (tikrinės reikšmės atitinkančiais tikriniais vektoriais). Tikriniais virpesiais vadinami konstrukcijos virpesiai, kurie gali vykti neveikiant išorinėms jėgoms. Darbe pateiktos trimačio ir dvimačio modelių tikrinės reikšmės  $\lambda$  aplinkoje LS-DYNA apskaičiuojamos iš 2.13 lygties ( $K$  – konstrukcijos standumo matrica,  $M$  – masių matrica).

$$\det(K - \lambda^2 M) = 0 \quad (2.13)$$

Konstrukcijos standumo ir masių matricos visada simetrinės ir teigiamai apibrėžtos, tai jų tikrinės reikšmės visada realios ir teigiamos. (Barauskas R., Belevičius R., Kačianauskas R., 2004) Lyginamos trimačio ir dvimačio su ekvivalenčiais koeficientais modelių mažiausios tikrinės reikšmės. Masių matricai sudaryti dvimačiu atveju naudojamas tankio  $\rho$  įvertis apskaičiuojamas pagal 2.14 formulę ( $\rho_g$  – gijų medžiagos tankis,  $\beta_g$  – gijų tūrio dalis medžiagoje,  $\rho_u$  – rišančios medžiagos tankis,  $\beta_u$  – rišančios medžiagos tūrio dalis).

$$\rho = \rho_g \cdot \beta_g + \rho_u \cdot \beta_u \quad (2.14)$$

## 2.1 ELEMENTO DALIES MODELyje APSKAIČIAVIMAS NAUDOJANT FORMOS FUNKCIJAS

Vidutiniai įtempimai ir deformacijos vertinami naudojant elemento dalį modelyje  $\mu_i$ .

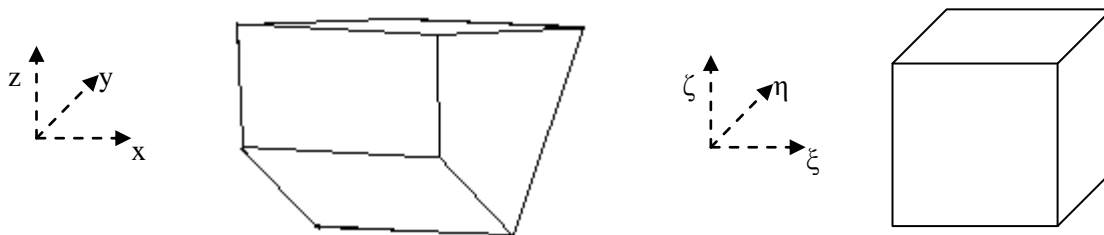
$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot \mu_i, \quad \varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot \mu_i \quad (2.15)$$

Kai nagrinėjamas trimatis atvejis, naudojama elemento tūrio dalis modelyje. Elemento tūrio skaičiavimui naudojama 2.16 formulė.

$$V_i = 8 |J(0,0,0)| \quad (2.16)$$

$$\varphi_j = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_j)(1 + \eta \eta_j)(1 + \zeta \zeta_j), \quad j = \overline{1,8} \quad (2.17)$$

$|J(0,0,0)|$  – Jakobio matricos determinantas elemento centre. Jakobiano apskaičiavimui naudojamos formos funkcijos, kurių bendroji išraiška aprašoma 2.16 formule. Funkcija  $\varphi_j = 1$ , kai  $(\xi_j; \eta_j; \zeta_j)$  lygus vienam iš rinkinių:  $(-1; -1; -1)$ ,  $(-1; -1; 1)$ ,  $(-1; 1; -1)$ ,  $(-1; 1; 1)$ ,  $(1; -1; -1)$ ,  $(1; -1; 1)$ ,  $(1; 1; -1)$ ,  $(1; 1; 1)$ . Su šiomis funkcijomis bet kokios formos aštuonių viršūnių erdvinis elementas koordinačių sistemoje  $(x; y; z)$  aprašomas kubiniu elementu koordinačių sistemoje  $(\xi; \eta; \zeta)$ . Elemento kraštinės išlieka tiesios.



**2.3 pav. Elemento forma koordinačių sistemose  $(x; y; z)$  ir  $(\xi; \eta; \zeta)$ .**

Jakobio matrica apskaičiuojama pagal 2.18 formulę.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \varphi_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \varphi_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial \varphi_8}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Modelio tūris apskaičiuojamas pagal 2.19 formulę ( $n$  – elementų skaičius modelyje).

$$V = \sum_{i=1}^n V_i \quad (2.19)$$

Elemento dalis erdviame modelyje randama pagal 2.20 formulę.

$$\mu_j = \frac{V_j}{V}, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.20)$$

Dvimačio modelio atveju vidutiniai įtempimai ir deformacijos skaičiuojami naudojant elemento ploto dalį modelyje.

Elemento ploto skaičiavimui naudojama 2.21 formulė.

$$S_j = 4 |J(0,0)| \quad (2.21)$$

$$\varphi_j = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_j)(1 + \eta \eta_j), \quad j = \overline{1, 4} \quad (2.22)$$

$|J(0,0)|$  – Jakobio matricos determinantas elemento centre. Jakobiano apskaičiavimui naudojamos formos funkcijos 2.22. Funkcija  $\varphi_j = 1$ , kai  $(\xi_j; \eta_j)$  lygus vienam iš rinkinių:  $(-1; -1)$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(1; -1)$ ,  $(1; 1)$ . Su šiomis funkcijomis bet kokios formos keturkampis elementas koordinačių

sistemoje  $(x; y)$  pervedamas į kvadratinį elementą koordinačių sistemoje  $(\xi; \eta)$ . Elemento kraštinės išlieka tiesios.

Jakobio matrica dvimačiu atveju apskaičiuojama pagal 2.23 formulę:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Modelio plotas  $S$  ir  $i$ -tojo elemento dalis modelyje  $\mu_i$  apskaičiuojami pagal 2.24 ir 2.25 formules:

$$S = \sum_{i=1}^n S_i \quad (2.24)$$

$$\mu_i = \frac{S_i}{S}, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.25)$$

## 2.2 ASIMPTOTINĖS HOMOGENIZACIJOS TAIKYMAS BAIGTINIŲ ELEMENTŲ MODELIOUI

Atliekant periodinio elemento  $Y$  analizę baigtinių elementų metodu 1.45 lygtis užrašoma naudojant matricas  $D$  ir  $B$  (Pinho-da-Cruz, Oliveira, Teixeira-Dias, 2009):

$$\left( \int_Y B^T D B dY \right) \chi = \int_Y B^T D dY = F \quad (2.26)$$

Lygtis 2.26 atitinka bendrąją konstrukcijos pusiausvyros lygčių sistemos pavidalą ( $K$  – konstrukcijos standumo matrica,  $F$  – apkrovų matrica,  $U$  – poslinkių matrica atitinkamoms apkrovoms):

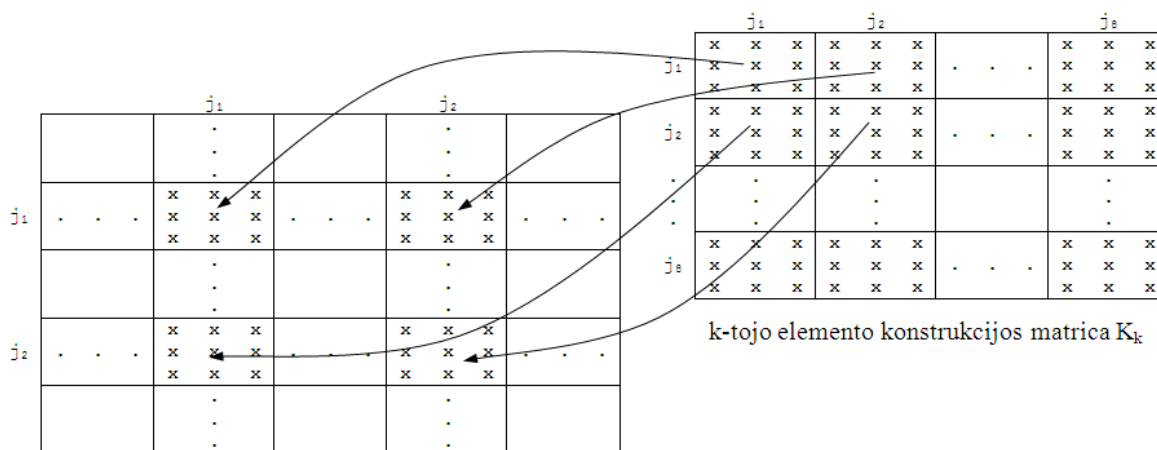
$$KU = F \quad (2.27)$$

Konstrukcijos  $B^T D B$  ir apkrovų  $B^T D$  matricos apskaičiuojamos 8 erdvinio elemento taškuose, kuriuose  $(\xi_j; \eta_j; \zeta_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 8$ , įgyja reikšmes  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .  $k$ -tojo elemento konstrukcijos matrica  $K_k$  ir taškų apkrovų matrica  $F_k$  apskaičiuojamos pagal 2.28 formules ( $V_k$  – elemento tūris,  $B_j$  –  $j$ -tajame taške apskaičiuota interpoliacinių funkcijų matrica).

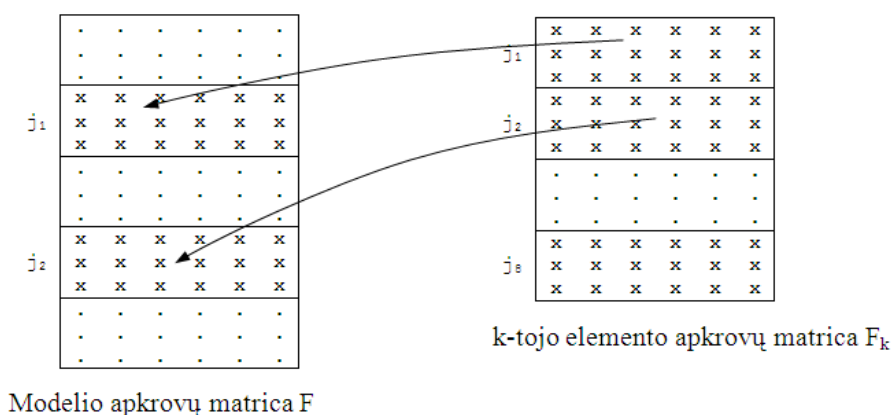
$$K_k = V_k \cdot \frac{1}{8} \cdot \sum_{j=1}^8 B_j^T D B_j, \quad F_k = V_k \cdot \frac{1}{8} \cdot \sum_{j=1}^8 B_j^T D \quad (2.28)$$

Kiekvienas elemento mazgas gali įgyti poslinkius  $x$ ,  $y$ ,  $z$  kryptimis.  $k$ -tojo elemento konstrukcijos standumo matricoje  $K_k$  ryšys tarp mazgų aprašomas  $3 \times 3$  matricų blokais. Jei visi

konstrukcijos poslinkiai, išskyrus  $j$ -tojo mazgo poslinkį ( $j'$ ) pagal vieną iš ašių, nejudamai suvaržyti, o nesuvaržytam poslinkiui suteikiama vienetinė reikšmė, tai konstrukcijos standumo matricos elementas  $k_{j'j'}$ , atitinkantis nesuvaržytą poslinkį, skaitine reikšme lygus jėgai, kuria reiktų paveikti mazgą, kad įvyktų šis poslinkis. Standumo matricos narys  $k_{i'j'}$ , siejantis  $i'$ -tajį ir  $j'$ -tajį poslinkius skaitine reikšme lygus reakcijos jėgai, suvaržančiai  $i'$ -tajį poslinkį. Standumo matrica visada simetrinė (Barauskas R., Belevičius R., Kačianauskas R., 2004). Modelio konstrukcijos matrica  $K$  formuojama sumuojant globaliuosius modelio mazgus atitinkančius blokus pagal standartinę baigtinių elementų metodo standumo matricos surinkimo schemą (2.4 pav.).  $k$ -tojo elemento apkrovų matricioje  $F_k$  mazgo apkrovos aprašomos  $3 \times 6$  matricių blokais (nagrinėjami šeši apkrovų tipai). Viso modelio apkrovų matrica  $F$  formuojama sumuojant globaliuosius mazgus atitinkančius blokus pagal standartinę baigtinių elementų metodo vektoriaus surinkimo schemą (2.5 pav.). Apkrovų matrica  $F^D$  – gradiento tarp skirtingų medžiagų elastingumo savybių integralas.



**2.4 pav. Konstrukcijos standumo matricos surinkimo schema.**

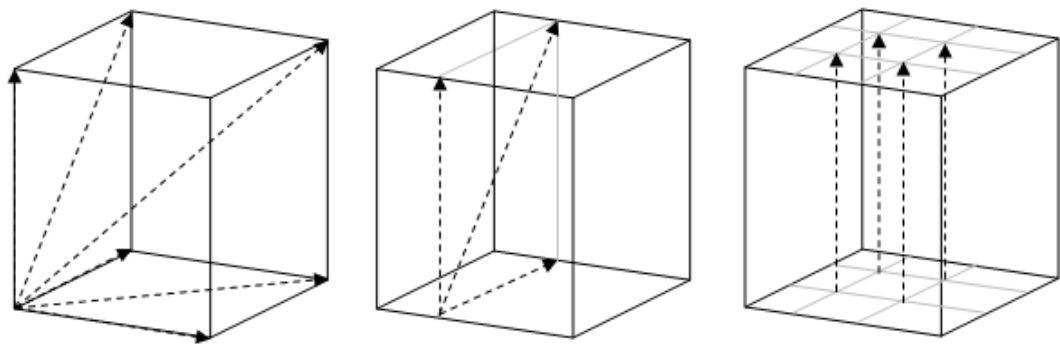


**2.5 pav. Konstrukcijos apkrovų matricos surinkimo schema.**

Išsprendus 2.26 lygtį trimačiu atveju gaunama  $n \times 6$  matavimų matrica  $\chi$  ( $n$  – elemento mazgų skaičius), kurios stulpeliai atspindi charakteringuosius poslinkius, gaunamus sistemai suteikus  $F^D$  aprašytas apkrovas.

Kad gaunamas sprendinys būtų vienintelis, periodinio elemento išoriniams paviršiams įvertinamos periodiškumo sąlygos. Erdviniam elementui  $y_1 \in [0, y_1^0]$ ,  $y_2 \in [0, y_2^0]$ ,  $y_3 \in [0, y_3^0]$  periodinės sąlygos aprašomos 2.29 ryšiais (2.6 pav.) (Pinho-da-Cruz, Oliveira, Teixeira-Dias, 2009).

$$\begin{aligned}\chi_i^{jk}(0, y_2, y_3) &= \chi_i^{jk}(y_1^0, y_2, y_3) \\ \chi_i^{jk}(y_1, 0, y_3) &= \chi_i^{jk}(y_1, y_2^0, y_3) \\ \chi_i^{jk}(y_1, y_2, 0) &= \chi_i^{jk}(y_1, y_2, y_3^0)\end{aligned}\tag{2.29}$$



**2.6 pav. Elemento kraštinių taškų periodiniai ryšiai.**

Periodinėms kraštinėms sąlygoms aprašyti gali būti naudojami 3 metodai (Felippa, 2001):

- Pagrindinių – šalutinių mazgų įvertinimas. Laisvės laipsniai, kuriems naudojamos periodinės kraštinės sąlygos suskirstomi į šalutinius ir pagrindinius, šalutiniai mazgai pašalinami. Modifikuotos lygtys neaprašo šalutinių mazgų laisvės laipsnių.
- Baudos funkcijos metodas. Kiekvieną periodinę kraštinę sąlygą aprašo fiktyvus elastingis elementas, vadinamas baudos elementu. Kiekvienam elementui suteikiamas skaitinis svoris. Jei svoris artėja į begalybę, atkuriamą tiksli kraštinė sąlyga. Periodinės sąlygos aprašomos papildant baigtinių elementų modelį baudos elementais.
- Papildymas Lagranžo daugikliu. Kiekvienai periodinei sąlygai pagrindinėse standumo lygtyse pridedamas papildomas nežinomasis. Fizikine prasme šie nežinomieji atspindi suvaržymo jėgas, kurios veiktų periodines nesuvaržytos sistemos periodinius taškus.

Darbe kraštinėms sąlygoms aprašyti naudojamas mazgų skirstymas į pagrindinius ir šalutinius. Visi modelio mazgai skirstomi į pagrindinius, šalutinius ir vidinius. Kiekvienam šalutiniam mazgui pagal 2.7 paveiksle pavaizduotą schemą parenkamas atitinkamas pagrindinis mazgas. Sudaroma  $m \times p$  matavimų transformacijos matrica  $T$ ,  $m$  – visų modelio laisvės laipsnių skaičius,  $p$  – modelio pagrindinių mazgų laisvės laipsnių skaičius. Kiekviename stulpelyje „1“ įrašomas tose eilutėse, kurios

atitinka pagrindinio mazgo laisvės laipsnius ir su šiuo mazgu susietų šalutinių mazgų laisvės laipsnius. Kitos pozicijos užpildomos „0“.

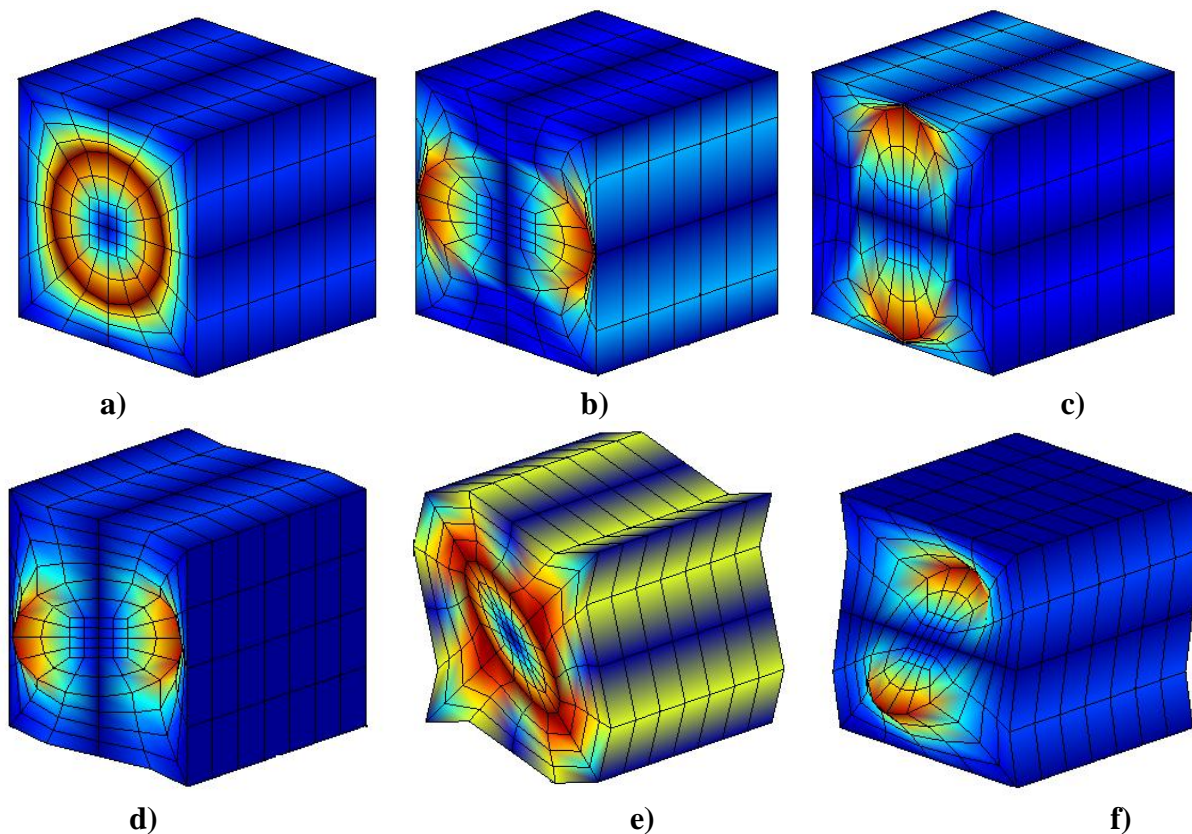
Pagal 2.30 ir 2.31 formules transformuojamos konstrukcijos standumo ir apkrovų matricos.

$$\tilde{K} = T^T K T, \quad K = \int_Y B^T D B dY \quad (2.30)$$

$$\tilde{F} = T^T F, \quad F = \int_Y B^T D dY \quad (2.31)$$

Kad sistema turėtų vienintelį sprendinį, bent vienas sistemos taškas turi būti įtvirtintas ( $\hat{\chi}_i = 0$ ) (Pinho-da-Cruz, Oliveira, Teixeira-Dias, 2009). Įtvirtinto mazgo laisvės laipsnius atitinkantys stulpeliai ir eilutės išbraukiami transformuotoje konstrukcijos standumo matricoje  $\tilde{K}$ , eilutės – transformuotoje apkrovų matricoje  $\tilde{F}$ . Transformuotos matricos įvertinus taško įtvirtinimus atitinkamai žymimos  $\hat{K}$  ir  $\hat{F}$ . Charakteringųjų poslinkių matricoje  $\hat{\chi}$  įtvirtinto mazgo laisvės laipsnius atitinkančiose pozicijose įrašomos žinomos reikšmės. Kitose pozicijose įrašomas lygties  $\hat{K}\hat{\chi}^* = \hat{F}$  sprendinys  $\hat{\chi}^*$ . Gauta p x r matavimų charakteringųjų poslinkių matrica  $\hat{\chi}$ , p – pagrindinių mazgų laisvės laipsnių skaičius, r – modų skaičius (vienmačiu atveju  $r = 1$ , dvimačiu atveju  $r = 3$ , trimačiu atveju  $r = 6$ ). Visos sistemos charakteringieji poslinkiai apskaičiuojami pagal 2.32 formulę naudojant transformacijos matricą T.

$$\chi = T^T \hat{\chi} \quad (2.32)$$



2.7 pav. Charakteringieji periodinio elemento poslinkiai, kai apkrovos x ašimi (a), y ašimi (b), z ašimi (c), šlyties xy (d), šlyties yz (e), šlyties zx (f).

Homogenizuota elastingumo matrica  $D^h$  gaunama 1.47 lygtį pritaikius baigtinių elementų metodams, kur  $V$  – viso nagrinėjamo fragmento tūris (dvimačiu atveju – plotas),  $V_k$  –  $k$ -tojo elemento tūris,  $I$  – vienetinė matrica,  $n$  – periodinį elementą sudarančių baigtinių elementų skaičius,  $\chi_k$  –  $k$ -tojo elemento mazgų charakteringieji poslinkiai,  $D_k$  –  $k$ -tojo elemento elastingumo tenzorius,  $B_k$  –  $k$ -tojo elemento interpoliacinių funkcijų dalinių išvestinių matrica (Pinho-da-Cruz, Oliveira, Teixeira-Dias, 2009):

$$D^h = \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{V} D_k (I - B_k \chi_k) \quad (2.33)$$

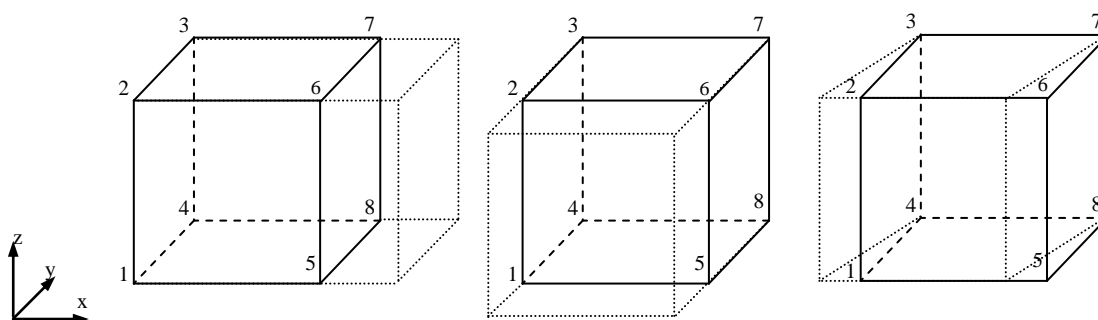
Jei  $\chi_k = 0$ ,  $\forall k$ , matrica  $D^h$  skaičiuojama kaip elastingumo savybių svertinis vidurkis, kurio koeficientai –  $k$ -tojo elemento tūrio dalis periodinio elemento tūryje.

### 2.3 ELASTINGUMO KOEFICIENTŲ VERTINIMAS LS-DYNA

Elastingumo koeficientų vertinimui baigtinių elementų skaičiuojamojoje terpėje LS-DYNA naudojama Kaw (2006) aprašytas grynujų įtempimų modelis. Trimatis sluoksnio modelis deformuojamas  $x$ ,  $y$  ir  $xy$  kryptimis (2.9 pav.) (gijos išsidėstę išilgai  $x$  ašies). Programinėje LS-DYNA aplinkoje atliekama neišreikštinė analizė. Sprendžiama pusiausvyros lygčių sistema  $Ku = F$ . Suformuotos konstrukcijos standumo matricos atvirkštinė dauginama iš pusiausvyrą trikdančių jėgų vektorius. Šios sandaugos rezultatas – konstrukcijos poslinkių pokytis. Atliekant neišreikštinę analizę gali pritrūkti kompiuterio atminties standumo matricos formavimui ir saugojimui.

Vidutiniai įtempimai ir deformacijos apskaičiuojami pagal 2.34 formules ( $\sigma_i$  –  $i$ -tojo elemento įtempimų vektorius,  $\varepsilon_i$  –  $i$ -tojo elemento deformacijų vektorius,  $V_i$  –  $i$ -tojo elemento tūris,  $V$  – viso fragmento tūris,  $n$  – elementų skaičius).

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot \frac{V_i}{V}, \quad \varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot \frac{V_i}{V} \quad (2.34)$$



2.8 pav. Modelio deformacijos schemas.

Pirmuoju atveju plokštumos 5678 mazgams suteikiamas poslinkis  $x$  ašies kryptimi, plokštumos 1234 mazgai šia kryptimi įtvirtinami. Kitomis kryptimis modelio mazgai gali judėti laisvai. Daroma prielaida, kad įtempimai tenkina 2.35 sąlygas.



$$\sigma_x \neq 0, \sigma_y = 0, \sigma_{xy} = 0 \quad (2.35)$$

Iš atvirkštinio Huko dėsnio plokštumos įtempimams (2.3) gaunami 2.36 ryšiai.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x}, \varepsilon_y = -\frac{\sigma_x \cdot \nu_{xy}}{E_x}, \gamma_{xy} = 0 \quad (2.36)$$

Iš 2.35 išreiškiamas Jungo modulis gijų kryptimi  $E_x$  ir Puasono koeficientas  $\nu_{xy}$  (2.37).

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}, \nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad (2.37)$$

Antruoju atveju plokštumos 1265 mazgams suteikiamas poslinkis y ašies kryptimi, plokštumos 4378 mazgai šia kryptimi įtvirtinami. Kitomis kryptimis modelio mazgai gali judėti laisvai. Daroma prielaida, kad įtempimai tenkina 2.38 sąlygas.

$$\sigma_x = 0, \sigma_y \neq 0, \sigma_{xy} = 0 \quad (2.38)$$

Iš atvirkštinio Huko dėsnio plokštumos įtempimams (2.3) randami 2.39 ryšiai.

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu_{yx} \cdot \sigma_y}{E_y}, \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y}, \gamma_{xy} = 0 \quad (2.39)$$

Išreiškiamas Jungo modulis gijoms statmena kryptimi  $E_y$  ir Puasono koeficientas  $\nu_{yx}$  (2.40).

$$E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y}, \nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \quad (2.40)$$

Dėl elastingumo tenzoriaus simetriškumo turi būti tenkinama lygybė  $\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y}$ , todėl Puasono koeficientas  $\nu_{yx}$  yra perteklinis.

Trečiuoju atveju plokštumos 1265 taškams suteikiamas poslinkis pagal x ašį, plokštumos 4378 mazgai šia kryptimi įtvirtinami. Kitomis kryptimis modelio mazgai gali judėti laisvai. Daroma prielaida, kad įtempimai tenkina 2.41 sąlygas.

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \sigma_{xy} \neq 0 \quad (2.41)$$

Iš atvirkštinio Huko dėsnio plokštumos įtempimams (2.3) randami 2.42 ryšiai ir išreiškiamas šlyties modulis  $G_{xy}$  (2.43).

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\gamma_{xy}} \quad (2.42)$$

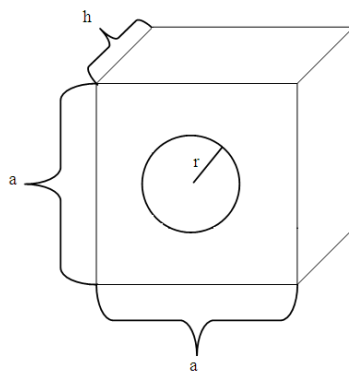
$$G_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\gamma_{xy}} \quad (2.43)$$

## 2.4 ELASTINGUMO KOEFICIENTŲ VERTINIMAS MECHANINIŲ POŽIŪRIU

Koeficientų vertinimas mechaniniu požiūriu gali būti atliekamas remiantis gijų ir rišančios medžiagos tūrio, masės ar tankio dalimis medžiagoje. Darbe naudojamas Peng, Cao (2002) aprašomas mechaninis elastingumo koeficientų įvertinimas remiantis gijų tūrio dalimi medžiagoje. Makromodelio tūris žymimas  $V$ , gijų tūris modelyje –  $V_g$ , rišančios medžiagos tūris –  $V_u$ . Gijų ( $\beta_g$ ) ir rišančios medžiagos ( $\beta_u$ ) tūrio dalys apskaičiuojamos pagal 2.44 formules.

$$\beta_g = \frac{V_g}{V}, \beta_u = \frac{V_u}{V} \quad (2.44)$$

Koeficientai  $\beta_g$  ir  $\beta_u$  tenkina sąlygą  $\beta_g + \beta_u = 1$ , nes  $V_g + V_u = V$ . Gijos tūrio skaičiavimui naudojama cilindro tūrio formulė, globaliomis koordinatėmis aprašomas stačiakampis gretasienis.



2.9 pav. Teorinis periodinio elemento modelis.

$$V_g = \pi \cdot r^2 \cdot h, V = a^2 \cdot h, V_u = V - V_g \quad (2.45)$$

Jei nagrinėjama iš izotropinių medžiagų sudaryta heterogeninė medžiaga, vertinami keturi elastingumo koeficientai: Jungo moduliai gijų ( $E_x$ ) ir joms statmena ( $E_y$ ) kryptimis, Puasono koeficientas ( $\nu_{xy}$ ), šlyties modulis ( $G_{xy}$ ). Modelyje laikoma, kad gijos išsidėstę pagal x ašį. Indeksais „g“ ir „u“ žymimi atitinkamai gijų ir rišančios medžiagos elastingumo koeficientai. Gaunami homogeninės medžiagos koeficientų įverčiai:

$$E_x = E_g \cdot \beta_g + E_u \cdot \beta_u \quad (2.46)$$

$$\frac{1}{E_y} = \frac{\beta_g}{E_g} + \frac{\beta_u}{E_u} \quad (2.47)$$

$$\nu_{xy} = \nu_g \cdot \beta_g + \nu_u \cdot \beta_u \quad (2.48)$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = \frac{\beta_g}{G_g} + \frac{\beta_u}{G_u} \quad (2.49)$$

### 3. TIRIAMOJI DALIS

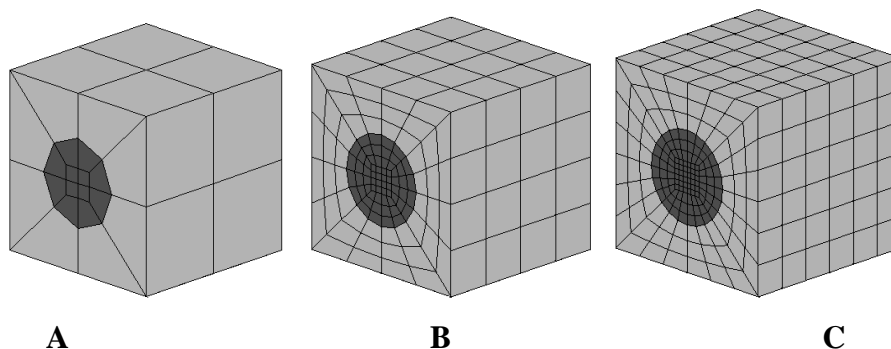
#### 3.1 PAVYZDYS. METALO GIJŲ DERVOJE MODELIO TYRIMAS.

3.1 lentelė.

Trimačio modelio medžiagų elastingumo parametrai.

	Gijų medžiagos elastingumo parametrai	Rišamosios medžiagos elastingumo parametrai
Jungo modulis, $E, N/m^2$	$45 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^9$
Puasono koeficientas, $\nu$	0,29	0,4
Šlyties modulis, $G, N/m^2$	$17,44 \cdot 10^9$	$3,57 \cdot 10^8$
Tankis, $\rho, kg/m^3$	1830	900

Koeficientų įvertinimui asimptotinės homogenizacijos metodu nagrinėjami trys periodinio elemento skaidymo tipai (3.1 pav.). 3.2 lentelėje pateikiami asimptotinės homogenizacijos metodu įvertinti elastingumo parametrai medžiagai, sudarytai iš 3.1 lentelėje aprašytų medžiagų, naudojant 3.1 paveiksle pavaizduotus periodinio elemento skaidymo tipus.



3.1 pav. Periodinio elemento skaidymo tipai: A (75 mazgai; 40 elementų), B (605 mazgai; 448 elementai), C (1351 mazgas; 1080 elementų).

3.2 lentelė.

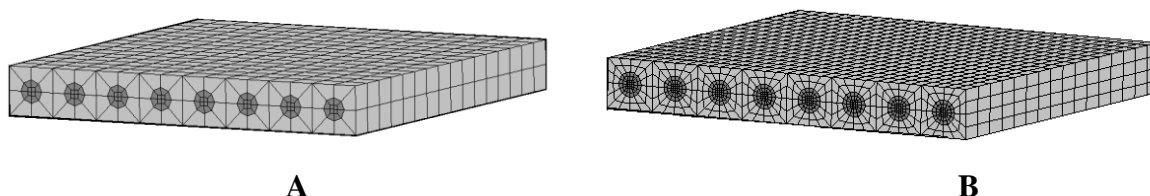
Elastingumo koeficientai, įvertinti asimptotinė homogenizacija su skirtingais skaidymais.

	Skaidymo tipas	Gijų tūrio dalis modelyje				
		0,0314	0,1257	0,2827	0,5027	0,7088
Jungo modulis, $E_x, N/m^2$	A	2,2461E+09	5,9815E+09	1,2206E+10	2,0918E+10	2,9087E+10
	B	2,3479E+09	6,3903E+09	1,3127E+10	2,2557E+10	3,1340E+10
	C	2,3674E+09	6,4684E+09	1,3303E+10	2,2870E+10	3,1840E+10
Jungo modulis $E_y, N/m^2$	A	1,1743E+09	1,6704E+09	2,6106E+09	4,7935E+09	10,2017E+09
	B	1,1677E+09	1,4915E+09	2,1957E+09	4,1813E+09	9,8959E+09
	C	1,1665E+09	1,4834E+09	2,1782E+09	4,1759E+09	9,9592E+09
Puasono koeficientas	A	0,3985	0,3859	0,3665	0,3409	0,3162
	B	0,3962	0,3842	0,3653	0,3340	0,3145
	C	0,3961	0,3841	0,3650	0,3397	0,3140
Šlyties modulis $G_{xy}, N/m^2$	A	3,6576E+08	4,5100E+08	6,3059E+08	1,0791E+09	2,4082E+09
	B	3,7827E+08	4,5476E+08	6,2299E+08	1,0436E+09	2,3842E+09
	C	3,7832E+08	4,5506E+08	6,2382E+08	1,0462E+09	2,3823E+09

Jungo modulis gijoms statmena kryptimi  $E_y$ , gautas naudojant periodinio elemento skaidymo tipą A, skyrėsi daugiau nei 10% nuo apskaičiuotų naudojant skaidymo tipą B. Skaidymo tipais B ir C

gauti rezultatai skyrėsi mažiau nei 10%, todėl tolimesniuose skaičiavimuose naudojamas skaidymo tipas B.

Koeficientų įvertinimui baigtinių elementų skaičiuojamojoje terpėje LS-DYNA modeliuojant grynuosius įtempimus naudojami du skirtingi modelio skaidymo tipai (3.2 pav. A, B). 3.3 lentelėje pateikiami baigtinių elementų skaičiuojamojoje terpėje LS-DYNA modeliuojant grynuosius įtempimus įvertinti elastingumo parametrai medžiagai, sudarytai iš 3.1 lentelėje aprašytų medžiagų, naudojant 3.2 paveiksle pavaizduotus modelius.



**3.2 pav. Modelio skaidymo tipai: A (3043 mazgai, 2560 elementų), B (11590 mazgai, 10240 elementų).**

**3.3 lentelė.**

**Elastingumo koeficientai, įvertinti modeliuojant grynuosius įtempimus su skirtingais skaidymais.**

	Skaidymo tipas	Gijų tūrio dalis modelyje				
		0,0314	0,1257	0,2827	0,5027	0,7088
Jungo modulis, $E_x$ ,	A	2,2488E+09	5,9891E+09	1,2209E+10	2,0896E+10	2,9000E+10
	B	2,3489E+09	6,3928E+09	1,3128E+10	2,2553E+10	3,1389E+10
Jungo modulis $E_y$ ,	A	1,1668E+09	1,4554E+09	1,9997E+09	3,2872E+09	5,7437E+09
	B	1,1535E+09	1,4128E+09	1,9347E+09	3,4693E+09	7,9689E+09
Puasono koeficientas	A	0,3956	0,3839	0,3660	0,3431	0,3233
	B	0,3957	0,3836	0,3638	0,3374	0,3135
Šlyties modulis $G_{xy}$ ,	A	3,8450E+08	4,6561E+08	6,2921E+08	9,8162E+08	1,6211E+09
	B	3,8180E+08	4,5822E+08	6,2333E+08	1,0205E+09	2,0857E+09

Su skirtingais skaidymo tipais modeliuojant grynuosius įtempimus apskaičiuoti ekvivalenčios medžiagos Jungo modulis gijoms statmena kryptimi  $E_y$  ir šlyties modulis  $G_{xy}$  viršijo 10%, kai gijų tūrio dalis modelyje buvo 0,7088. 3.2 paveikslo B atveju pavaizduoto modelio skaičiavimui konstrukcijos standumo matrica programoje LS-DYNA suskaidoma, todėl rezultatai gali būti netikslūs (iš 9 gijų sudarytam elementui, skaidytam B tipu, apskaičiuoti vidutiniai įtempimai ir deformacijos artimos nuliui, išreikšti koeficientai netenkina sąlygų – gauti neigiami Jungo ir šlyties moduliai, Puasono koeficientas). Skaičiavimuose pateikiami rezultatai A skaidymo tipo modeliui.

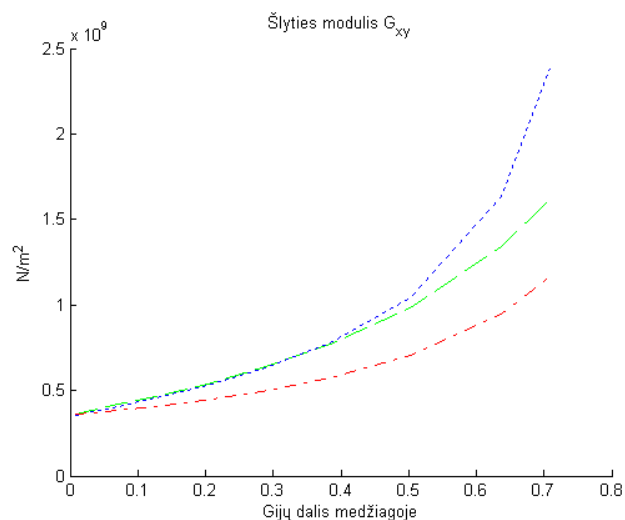
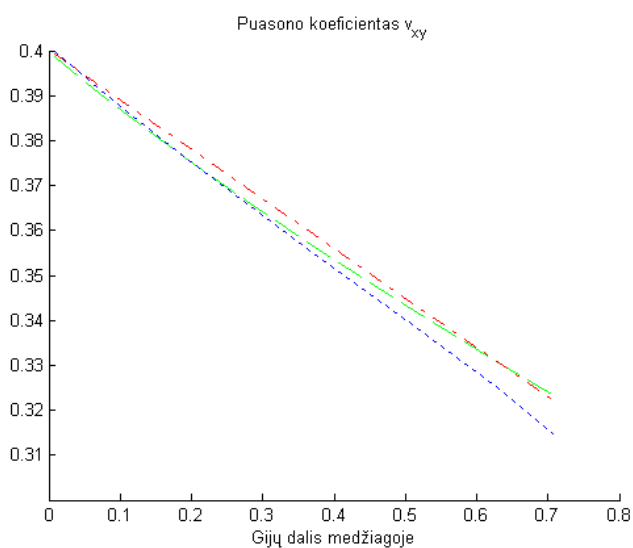
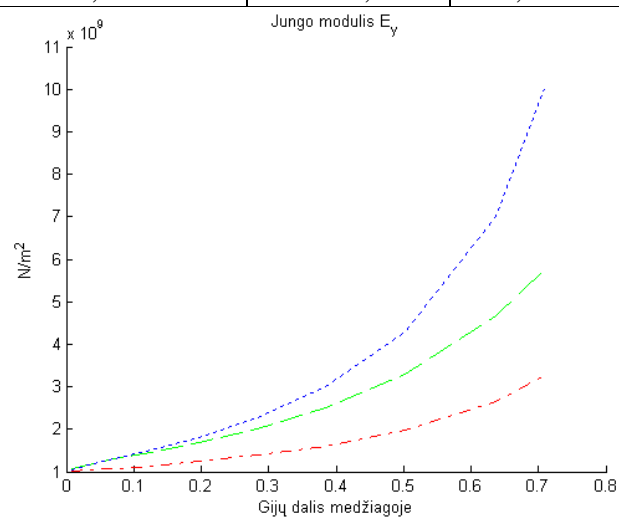
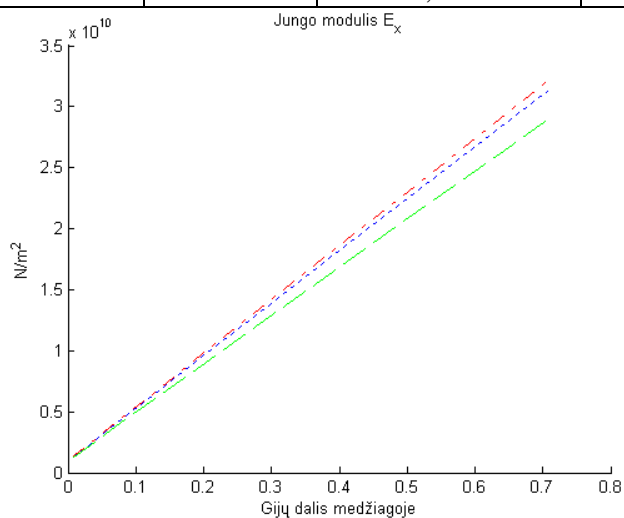
3.4 lentelėje pateikiami elastingumo parametų įvertinimai baigtinių elementų skaičiuojamojoje terpėje LS-DYNA modeliuojant grynuosius įtempimus (I), asimptotinės homogenizacijos metodu (II) ir mechaniniu požiūriu (III) modeliams su skirtingomis gijų tūrio dalimis.

3.3 paveiksluose vaizduojami koeficientų priklausomybės nuo gijų tūrio dalies modelyje grafikai. Žalia spalva braižomi koeficientų, įvertintų baigtinių elementų skaičiuojamąja terpe modeliuojant grynuosius įtempimus, mėlyna – asimptotinės homogenizacijos metodu, raudona – mechaniniu požiūriu, grafikai.

## 3.4 lentelė.

## Elastingumo koeficientų įvertinimai su įvairiomis gijų tūrio dalimis.

Gijų tūrio dalis modelyje	Įvertinimo metodas	Jungo modulis gijų kryptimi, $E_x$ , $N/m^2$	Jungo modulis gijoms statmena kryptimi, $E_y$ , $N/m^2$	Puasono koeficientas	Šlyties modulis, $G_{xy}$ , $N/m^2$
0,0314	I	2,2488E+09	1,1686E+09	0,3956	3,8452E+08
	II	2,3479E+09	1,1677E+09	0,3962	3,7827E+08
	III	2,3823E+09	1,0317E+09	0,3965	3,6848E+08
0,1257	I	5,9890E+09	1,4589E+09	0,3839	4,6568E+08
	II	6,3903E+09	1,4915E+09	0,3842	4,5476E+08
	III	6,5292E+09	1,1401E+09	0,3862	4,0727E+08
0,2827	I	1,2209E+10	2,0041E+09	0,3653	6,2299E+08
	II	1,3127E+10	2,1957E+09	0,3652	6,2382E+08
	III	1,3441E+10	1,3821E+09	0,3689	4,9394E+08
0,5027	I	2,0896E+10	3,2929E+09	0,3430	9,8201E+08
	II	2,2557E+10	4,1813E+09	0,3340	1,0436E+09
	III	2,3117E+10	1,9665E+09	0,3447	7,0354E+08
0,7088	I	2,9000E+10	5,7495E+09	0,3233	1,6218E+09
	II	3,1340E+10	9,8959E+09	0,3145	2,3842E+09
	III	3,2188E+10	3,2581E+09	0,3220	1,1683E+09



3.3 pav. Elastingumo koeficientų priklausomybė nuo gijų tūrio dalies modelyje.

Jungo modulio gijų kryptimi  $E_x$  įvertis modeliuojant grynuosius įtempimus mažiausias, įvertis mechaniniu požiūriu - didžiausias. Didžiausias Jungo modulio gijoms statmena kryptimi  $E_y$  įvertis gautas asimptotinės homogenizacijos metodu, mažiausias – mechaniniu požiūriu. Puasono koeficiento įvertinimas asimptotinės homogenizacijos metodu mažesnis už įvertinimą teoriniu požiūriu, tačiau įverčių visais metodais skirtumas neviršijo 10%. Šlyties modulio įvertinimai modeliuojant grynuosius įtempimus ir asimptotinės homogenizacijos metodu skiriasi mažiau nei 10%, kol gijų tūrio dalis neviršija 0,5. Mažiausias šlyties modulio įvertinimas gaunamas mechaniniu požiūriu.

Modelio dinamines savybes apibūdina jo tikrinės reikšmės. 3.5 lentelėje pateikiamos trimačio modelio su 3.1 lentelėje pateiktais koeficientais ir dvimačių modelių su koeficientais, įvertintais modeliuojant grynuosius įtempimus (I), asimptotinės analizės metodu (II), mechaniniu požiūriu (III), mažiausios tikrinės reikšmės skirtingo gijų skersmens modeliams.

### 3.5 lentelė.

#### Modelių mažiausios tikrinės reikšmės su įvairiomis gijų tūrio dalimis.

Gijų tūrio dalis	Modelio mažiausia tikrinė reikšmė			
	Trimačio modelio	Dvimačio (I) modelio	Dvimačio (II) modelio	Dvimačio (III) modelio
0,0314	1,2378E+11	1,2462E+11	1,2650E+11	1,1721E+11
0,1257	1,4691E+11	1,4623E+11	1,5213E+11	1,1302E+11
0,2827	1,7642E+11	1,7364E+11	1,9726E+11	1,1883E+11
0,5027	2,5091E+11	2,4101E+11	3,1535E+11	1,4307E+11
0,7238	4,2676E+11	3,8450E+11	7,1386E+11	2,1687E+11

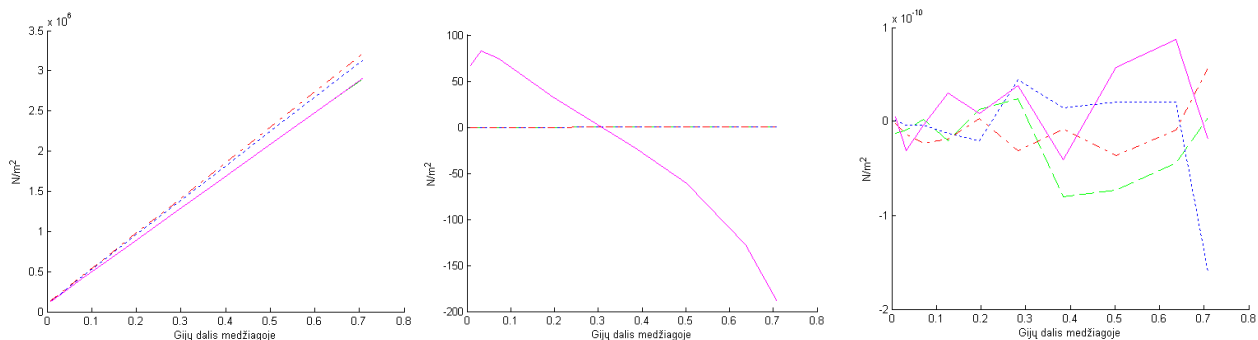
Trimačio modelio ir dvimačio modelio su modeliuojant grynuosius įtempimus įvertintais elastingumo parametrais, tikrinės reikšmės skyrėsi ne daugiau nei 10%. Dvimačio modelio su asimptotinės homogenizacijos metodu įvertintais koeficientais tikrinės reikšmės buvo didesnės, skirtumas tarp tikrinių reikšmių didėja didėjant gijų tūrio daliai modelyje. Su mechaniniu požiūriu įvertintais koeficientais dvimačio modelio tikrinės reikšmės buvo mažesnės, skirtumas tarp tikrinių reikšmių didėja didėjant gijų tūrio daliai modelyje.

Modeliuojami trimačio ir dvimačio su koeficientais, įvertintais modeliuojant grynuosius įtempimus (I), asimptotinės analizės metodu (II), mechaniniu požiūriu (III), įtempimai suteikiant atitinkamoms kraštinėms poslinkius  $x$ ,  $y$ ,  $xy$  ašimis. Vidutiniai įtempimai modelį deformavus  $x$  ašimi pateikiami 3.6 lentelėje, kai modelis deformuojamas  $y$  ir  $xy$  – A ir B lentelėse (Priedas 1). Nagrinėjant parinktas deformacijas vidutiniai įtempimai, atitinkantys deformaciją, dėl įtvirtinimų absoliutine reikšme žymiai didesni nei kitomis ašimis. Laikoma, kad įtempimai kitomis ašimis nei atliekama deformacija skiriasi nežymiai.

**Vidutiniai modelių įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal x ašį.**

Gijų tūrio dalis	Įtempimai	Trimačio modelio	Koeficientų įvertinimo metodas					
			I	$\Delta, \%$	II	$\Delta, \%$	III	$\Delta, \%$
0,0314	$\sigma_x, N/m^2$	2,24E+05	2,25E+05	0,45	2,35E+05	4,91	2,38E+05	6,25
	$\sigma_y, N/m^2$	8,28E+01	-6,20E-10	-	-5,93E-10	-	-5,63E-10	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-3,14E-11	-9,43E-12	-	-4,27E-12	-	-1,34E-11	-
0,1257	$\sigma_x, N/m^2$	5,98E+05	5,99E+05	0,17	6,39E+05	6,86	6,53E+05	9,20
	$\sigma_y, N/m^2$	5,67E+01	-3,74E-10	-	-4,43E-10	-	-3,53E-10	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	3,01E-11	-2,06E-11	-	-1,24E-11	-	-1,92E-11	-
0,2827	$\sigma_x, N/m^2$	1,22E+06	1,22E+06	0,00	1,31E+06	7,38	1,34E+06	9,84
	$\sigma_y, N/m^2$	7,31E+00	4,48E-11	-	1,68E-10	-	5,11E-12	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	3,78E-11	2,39E-11	-	4,39E-11	-	-3,12E-11	-
0,5027	$\sigma_x, N/m^2$	2,09E+06	2,09E+06	0,00	2,25E+06	8,13	2,31E+06	10,53
	$\sigma_y, N/m^2$	-6,11E+01	1,19E-09	-	1,71E-09	-	6,77E-10	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	5,71E-11	-7,33E-11	-	2,02E-11	-	-3,68E-11	-
0,7088	$\sigma_x, N/m^2$	2,91E+06	2,90E+06	0,34	3,14E+06	7,90	3,22E+06	10,65
	$\sigma_y, N/m^2$	-1,89E+02	3,42E-09	-	6,84E-09	-	1,95E-09	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-1,85E-11	3,79E-12	-	-1,60E-10	-	5,62E-11	-

3.4, 3.5, 3.6 paveiksluose pateikiami įtempimai, kai modelis deformuojamas skirtingomis ašimis. Violetine linija vaizduojami trimačio modelio įtempimai, žalia, mėlyna ir raudona – dvimačių modelių atitinkamai su modeliuojant grynuosius įtempimus, asimptotinės homogenizacijos metodu, mechaniniu požiūriu įvertintais koeficientais.

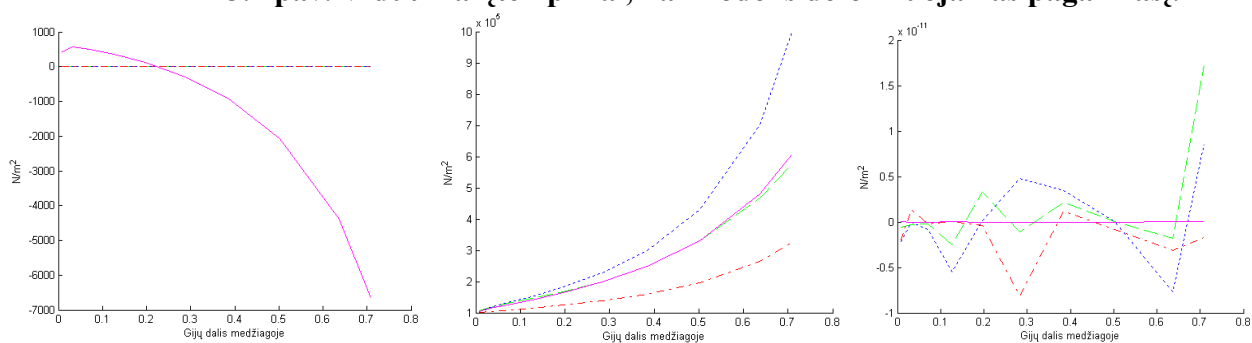


a) Įtempimai x ašimi

b) Įtempimai y ašimi

c) Šlyties xy įtempimai

3.4 pav. Vidutiniai įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal x ašį.

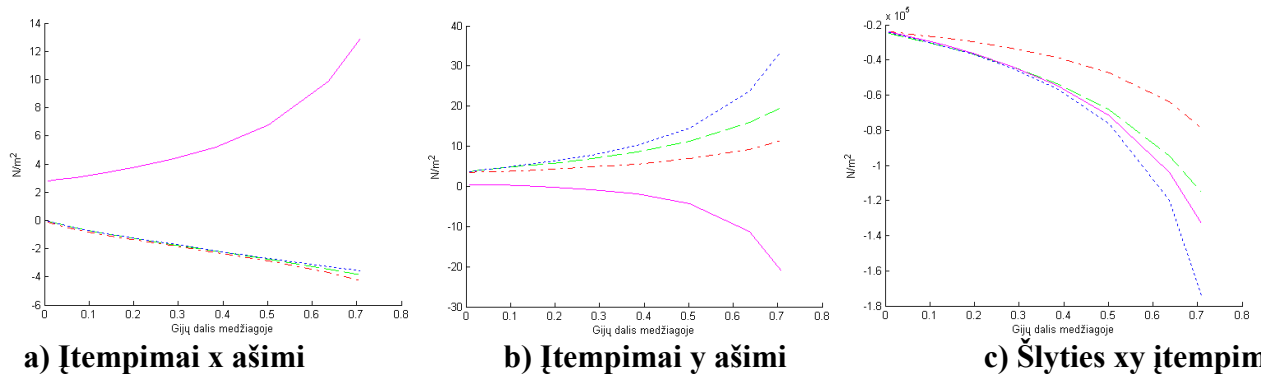


a) Įtempimai x ašimi

b) Įtempimai y ašimi

c) Šlyties xy įtempimai

3.5 pav. Vidutiniai įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal y ašį.



**3.6 pav. Vidutiniai įtempimai, kai modelis deformuojamas xy.**

Trimačio modelio ir dvimačio modelio su LS-DYNA įvertintais koeficientais vidutiniai įtempimai skyrėsi mažiau nei 10%, kai modelis deformuojamas pagal x ir y ašis. Kai modelis deformuojamas xy ir gijų skersmuo artimas periodinio elemento kraštinei, vidutiniai įtempimai skiriasi daugiau nei 10%. Dvimačio modelio su asimptotinės homogenizacijos metodu įvertintais koeficientais įtempimai x ašies kryptimi (kai modelis deformuojamas pagal x) didesni mažiau nei 10% už vidutinius trimačio modelio įtempimus. Vidutiniai įtempimai y ašimi, kai modelis deformuojamas y ašimi, daugiau nei 10% didesni, kai gijos skersmuo viršija pusę periodinio elemento kraštinės. Šlyties deformacijos atveju šlyties įtempimai neviršijo 10%, kai gijos skersmuo mažesnis nei 0,8 periodinio elemento kraštinės. Labiausiai nuo trimačio modelio įtempimų skiriasi dvimačio modelio įtempimai, apskaičiuoti su mechaniniu požiūriu įvertintais elastingumo parametrais. Deformuojant modelį x ašimi, dvimačio modelio įtempimai x ašies kryptimi skiriasi daugiau nei 10%, kai gijos skersmuo didesnis nei 0,7 periodinio elemento kraštinės. Deformacijos y ašies atveju, vidutiniai įtempimai y ašies kryptimi daugiau nei 10% mažesni už trimačio modelio įtempimus tokiais pačiomis sąlygomis. Šlyties deformacijos atveju, santykinis skirtumas tarp modelių šlyties įtempimų didėja didėjant gijų skersmeniui. Dvimačio modelio su mechaniniu požiūriu įvertintais koeficientais šlyties įtempimai buvo daugiau nei 10% mažesni absoliutine verte, kai gijos skersmuo viršijo 0,3 periodinio elemento skersmens.

### 3. 2 PAVYZDYS. STIKLO PLUŠTO GIJŲ DERVOJE MODELIO TYRIMAS.

**3.7 lentelė.**

**Trimačio modelio medžiagų elastingumo parametrai.**

	Gijų medžiagos elastingumo parametrai	Rišamosios medžiagos elastingumo parametrai
Jungo modulis, $E$ , $N/m^2$	$73,1 \cdot 10^9$	$3,45 \cdot 10^9$
Puasono koeficientas, $\nu$	0,22	0,35
Šlyties modulis, $G$ , $N/m^2$	$29,96 \cdot 10^9$	$1,28 \cdot 10^9$
Tankis, $\rho$ , $kg/m^3$	2540	900

3.8 lentelėje pateikiami asimptotinės homogenizacijos metodu įvertinti elastingumo parametrai medžiagai, sudarytai iš 3.7 lentelėje aprašytų medžiagų, naudojant 3.1 paveiksle pavaizduotus



periodinio elemento skaidymo tipus, kai modelyje gijos užima skirtingą tūrio dalį. Šiuo atveju visais skaidymo būdais gauti koeficientai skyrėsi mažiau nei 10%.

3.8 lentelė.

**Elastingumo koeficientai, įvertinti asimptotinė homogenizacija su skirtingais skaidymais.**

	Skaidymo tipas	Gijų tūrio dalis modelyje				
		0,0314	0,1257	0,2827	0,5027	0,7088
Jungo modulis, $E_x$ , $N/m^2$	A	5,4264E+09	1,1345E+10	2,1202E+10	3,4997E+10	4,7927E+10
	B	5,5860E+09	1,1989E+10	2,2658E+10	3,7588E+10	5,1587E+10
	C	5,6169E+09	1,2113E+10	2,2936E+10	3,8082E+10	5,2284E+10
Jungo modulis $E_y$ , $N/m^2$	A	3,7251E+09	4,8927E+09	7,1228E+09	1,2087E+10	2,2788E+10
	B	3,7960E+09	4,6825E+09	6,5424E+09	1,1313E+10	2,2761E+10
	C	3,7950E+09	4,6740E+09	6,5314E+09	1,1350E+10	2,2944E+10
Puasono koeficientas	A	0,3477	0,3319	0,3084	0,2782	0,2502
	B	0,3452	0,3302	0,3071	0,2770	0,2481
	C	0,3451	0,3301	0,3068	0,2766	0,2475
Šlyties modulis $G_{xy}$ , $N/m^2$	A	1,3053E+09	1,5926E+09	2,1899E+09	3,6162E+09	7,2875E+09
	B	1,3495E+09	1,6092E+09	2,1718E+09	3,5234E+09	7,2594E+09
	C	1,3497E+09	1,6103E+09	2,1750E+09	3,5330E+09	7,2734E+09

3.9 lentelėje pateikiami baigtinių elementų skaičiuojamojoje terpėje LS-DYNA modeliuojant grynuosius įtempimus įvertinti elastingumo parametrai medžiagai, sudarytai iš 3.7 lentelėje aprašytų medžiagų, naudojant 3.2 paveiksle pavaizduotus modelius.

3.9 lentelė.

**Elastingumo koeficientai, įvertinti modeliuojant grynuosius įtempimus su skirtingais skaidymais.**

	Skaidymo tipas	Gijų tūrio dalis modelyje				
		0,0314	0,1257	0,2827	0,5027	0,7088
Jungo modulis, $E_x$ , $N/m^2$	A	5,4310E+09	1,1357E+10	2,1207E+10	3,4954E+10	4,7774E+10
	B	5,5880E+09	1,1994E+10	2,2659E+10	3,7579E+10	5,1564E+10
Jungo modulis $E_y$ , $N/m^2$	A	3,8277E+09	4,6520E+09	6,1775E+09	9,5175E+09	1,5305E+10
	B	3,7870E+09	4,5403E+09	6,0622E+09	1,0091E+10	1,9925E+10
Puasono koeficientas	A	0,3443	0,3299	0,3081	0,2807	0,2577
	B	0,3446	0,3296	0,3058	0,2751	0,2483
Šlyties modulis $G_{xy}$ , $N/m^2$	A	1,3698E+09	1,6424E+09	2,1864E+09	3,3254E+09	5,2795E+09
	B	1,3612E+09	1,6195E+09	2,1702E+09	3,4497E+09	6,6316E+09

Iš 3.9 lentelės, Jungo modulis gijoms statmena kryptimi  $E_y$  ir šlyties modulis  $G_{xy}$  viršijo 10%, kai gijų tūrio dalis modelyje buvo 0,7088. Kiti koeficientai skyrėsi mažiau nei 10%. Dėl elementų kiekio naudojant skaidymo tipą B, konstrukcijos matrica baigtinių elementų skaičiuojamojoje terpėje suskaidoma, todėl rezultatai nepatikimi. Tolesniuose skaičiavimuose naudojamas skaidymo tipas A.

3.10 lentelėje pateikiami elastingumo parametrų įvertinimai baigtinių elementų skaičiuojamojoje terpėje LS-DYNA modeliuojant grynuosius įtempimus (I), asimptotinės homogenizacijos metodu (II) ir mechaniniu požiūriu (III) modeliams su skirtingomis gijų tūrio dalimis.

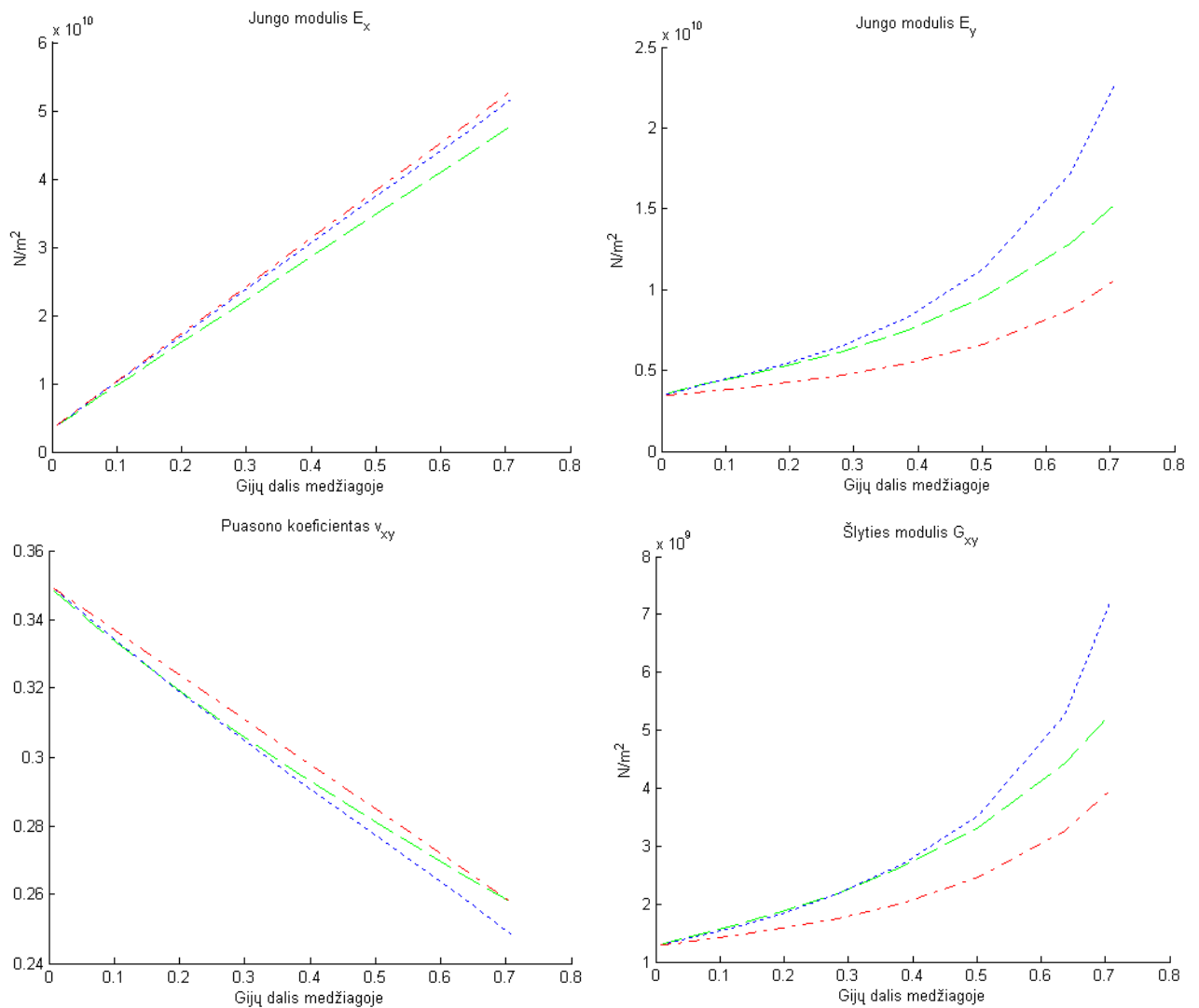
3.10 lentelė.

**Elastingumo koeficientų įvertinimai su įvairiomis gijų tūrio dalimis.**

Gijų tūrio dalis modelyje	Įvertinimo metodas	Jungo modulis gijų kryptimi, $E_x$ , $N/m^2$	Jungo modulis gijoms statmena kryptimi, $E_y$ , $N/m^2$	Puasono koeficientas	Šlyties modulis, $G_{xy}$ , $N/m^2$
0,0314	I	5,4310E+09	3,8277E+09	0,3443	1,3698E+09
	II	5,5860E+09	3,7960E+09	0,3452	1,3495E+09
	III	5,6381E+09	3,5565E+09	0,3459	1,3174E+09
0,1257	I	1,1357E+10	4,6520E+09	0,3299	1,6425E+09
	II	1,1989E+10	4,6825E+09	0,3302	1,6092E+09
	III	1,2202E+10	3,9193E+09	0,3337	1,4525E+09
0,2827	I	2,1207E+10	6,1775E+09	0,3081	2,1864E+09
	II	2,2658E+10	6,5424E+09	0,3071	2,1718E+09
	III	2,3143E+10	4,7221E+09	0,3132	1,7520E+09
0,5027	I	3,4954E+10	9,5175E+09	0,2807	3,3254E+09
	II	3,7588E+10	1,1313E+10	0,2770	3,5234E+09
	III	3,8460E+10	6,6210E+09	0,2847	2,4630E+09
0,7088	I	4,7774E+10	1,5305E+10	0,2577	5,2795E+09
	II	5,1587E+10	2,2761E+10	0,2481	7,2594E+09
	III	5,2819E+10	1,0627E+10	0,2579	3,9755E+09

3.7 paveiksluose pateikiami koeficientų priklausomybės nuo gijų tūrio dalies modelyje grafikai. Žalia spalva vaizduojami koeficientai, įvertinti baigtinių elementų skaičiuojamąja terpe modeliuojant grynuosius įtempimus, mėlyna – asimptotinės homogenizacijos metodu, raudona – mechaniniu požiūriu.

Didžiausias Jungo modulis gijų kryptimi  $E_x$  gaunamas vertinant mechaniniu požiūriu, mažiausias – modeliuojant grynuosius įtempimus baigtinių elementų skaičiuojamojoje terpėje LS-DYNA. Didžiausias Jungo modulio gijoms statmena kryptimi  $E_y$  įvertis gautas asimptotinės homogenizacijos metodu, mažiausias – mechaniniu požiūriu. Puasono koeficientas, įvertintas asimptotinės homogenizacijos metodu buvo mažesnis už įvertintą mechaniniu požiūriu, tačiau skirtumas tarp įvertinimų trimis metodais nagrinėjant skirtingo skersmens gijų modelius neviršijo 10%. Šlyties modulio įvertinimai modeliuojant grynuosius įtempimus ir asimptotinės homogenizacijos metodu skyrėsi mažiau nei 10%, kol gijų tūrio dalis neviršija 0,5. Mažiausias šlyties modulio įvertinimas gaunamas mechaniniu požiūriu. Kai gijų tūrio dalis lygi 0,5027, šlyties modulio įvertinimas mechaniniu požiūriu 30% mažesnis už įvertinimą asimptotinės homogenizacijos metodu ir 26% mažesnis už įvertinimą modeliuojant grynuosius įtempimus.



**3.7 pav. Elastingumo koeficientų priklausomybė nuo gijų tūrio dalies modelyje.**

3.11 lentelėje pateikiamos trimačio modelio su 3.7 lentelėje pateiktais koeficientais ir dvimačių modelių su koeficientais, įvertintais modeliuojant grynuosius įtempimus (I), asimptotinės analizės metodu (II), mechaniniu požiūriu (III), mažiausios tikrinės reikšmės skirtingo gijų skersmens modeliams.

**3.11 lentelė.**

**Modelių mažiausios tikrinės reikšmės su įvairiomis gijų tūrio dalimis.**

Gijų tūrio dalis	Modelio mažiausia tikrinė reikšmė			
	Trimačio modelio	Dvimačio (I) modelio	Dvimačio (II) modelio	Dvimačio (III) modelio
0,0314	3,0226E+11	3,0253E+11	3,0233E+11	3,0175E+11
0,1257	4,3764E+11	4,3190E+11	4,3378E+11	3,6068E+11
0,2827	4,7220E+11	4,6027E+11	4,8693E+11	3,4880E+11
0,5027	5,8636E+11	5,5710E+11	6,6241E+11	3,8445E+11
0,7238	8,6259E+11	7,6565E+11	1,1830E+12	5,3028E+11

Trimačio modelio tikrinėms reikšmėms artimiausios buvo dvimačio modelio su koeficientais, įvertintais modeliuojant grynuosius įtempimus, labiausiai skyrėsi dvimačio modelio su mechaniniu

požiūriu įvertintais koeficientais tikrinės reikšmės. Kai gijų tūrio dalis buvo lygi 0,7238, visų dvimačių modelių tikrinių reikšmių skirtumas nuo trimačio modelio viršijo 10%.

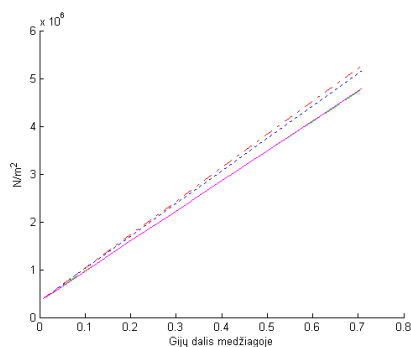
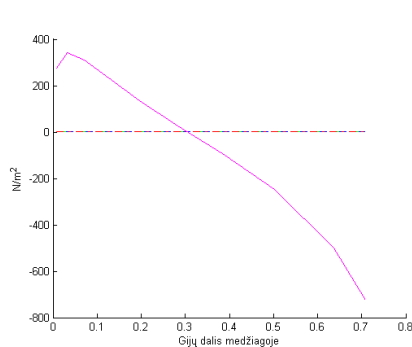
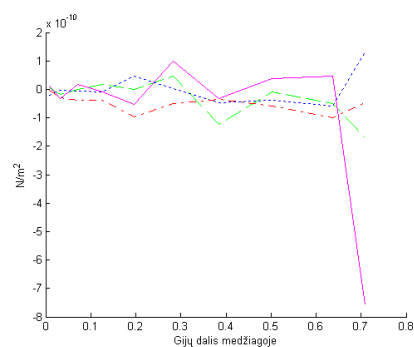
Modeliuojami trimačio ir dvimačio su koeficientais, įvertintais modeliuojant grynuosius įtempimus (I), asimptotinės analizės metodu (II), mechaniniu požiūriu (III), modelių įtempimai suteikiant atitinkamoms kraštinėms poslinkius  $x$ ,  $y$ ,  $xy$  ašimis. Vidutiniai įtempimai modelį deformuojant  $x$  ašimi pateikiami 3.12 lentelėje, kai modelis deformuojamas  $y$  ir  $xy$  – C ir D lentelėse (Priedas 1).

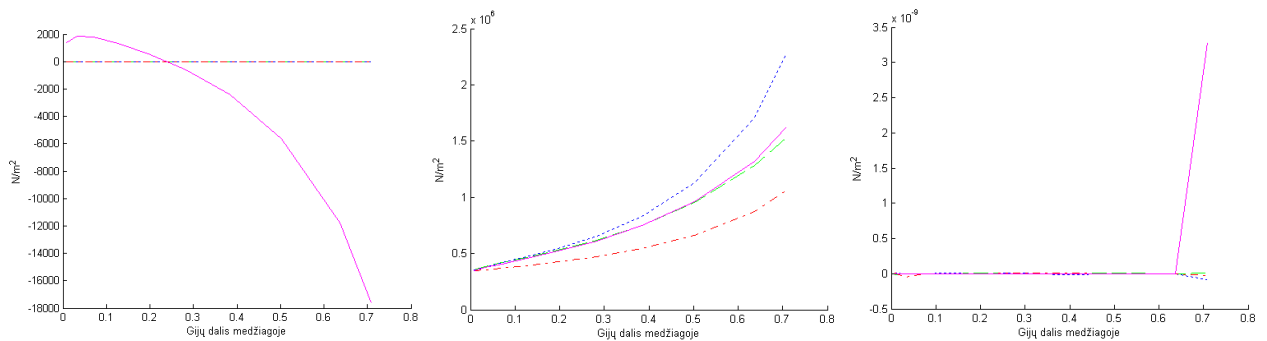
3.12 lentelė.

### Vidutiniai modelių įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal $x$ ašį.

Gijų tūrio dalis	Įtempimai	Trimačio modelio	Koeficientų įvertinimo metodas					
			I	$\Delta$ , %	II	$\Delta$ , %	III	$\Delta$ , %
0,0314	$\sigma_x, N/m^2$	5,42E+05	5,43E+05	0,18	5,59E+05	3,14	5,64E+05	6,25
	$\sigma_y, N/m^2$	3,41E+02	1,41E-09	-	1,32E-09	-	1,24E-09	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-3,38E-11	-1,8E-11	-	-3,68E-12	-	-2,88E-11	-
0,1257	$\sigma_x, N/m^2$	1,13E+06	1,14E+06	0,88	1,20E+06	6,19	1,22E+06	7,96
	$\sigma_y, N/m^2$	2,32E+02	2,10E-09	-	2,44E-09	-	1,92E-09	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-1,04E-11	1,87E-11	-	-7,98E-12	-	-3,76E-11	-
0,2827	$\sigma_x, N/m^2$	2,12E+06	2,12E+06	0,00	2,27E+06	7,08	2,31E+06	8,96
	$\sigma_y, N/m^2$	2,75E+01	4,58E-09	-	4,81E-09	-	3,25E-09	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	9,95E-11	4,72E-11	-	2,33E-12	-	-4,93E-11	-
0,5027	$\sigma_x, N/m^2$	3,50E+06	3,50E+06	0,00	3,76E+06	7,43	3,85E+06	10,00
	$\sigma_y, N/m^2$	-2,46E+02	8,82E-09	-	1,06E-08	-	5,91E-09	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	3,70E-11	-1,04E-11	-	-3,89E-11	-	-5,83E-11	-
0,7088	$\sigma_x, N/m^2$	4,79E+06	4,78E+06	0,21	5,16E+06	7,72	5,28E+06	10,23
	$\sigma_y, N/m^2$	-7,26E+02	1,58E-08	-	2,46E-08	-	1,08E-08	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-7,57E-10	-1,71E-10	-	1,32E-10	-	-4,73E-11	-

3.8, 3.9, 3.10 paveiksluose pateikiami įtempimai, kai modelis deformuojamas skirtingomis ašimis. Violetine linija vaizduojami trimačio modelio įtempimai, žalia, mėlyna ir raudona – dvimačių modelių atitinkamai su modeliuojant grynuosius įtempimus, asimptotinės homogenizacijos metodu, mechaniniu požiūriu įvertintais koeficientais.

a) Įtempimai  $x$  ašimib) Įtempimai  $y$  ašimic) Šlyties  $xy$  įtempimai3.8 pav. Vidutiniai įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal  $x$  ašį.

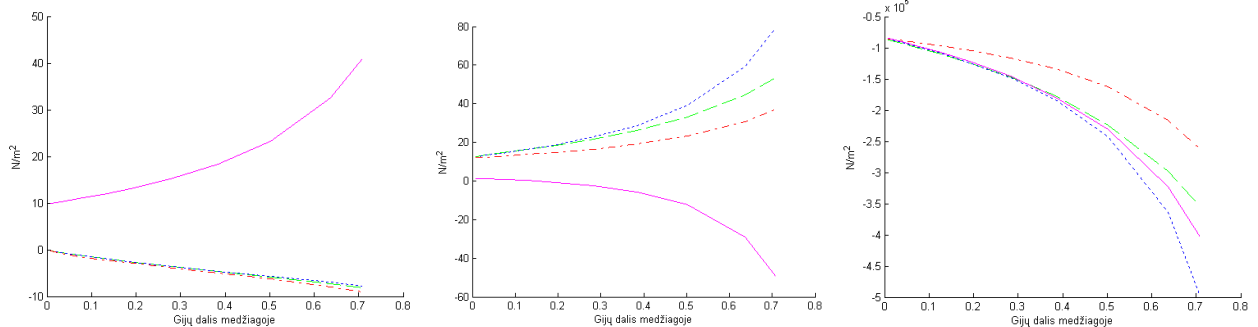


a) Įtempimai x ašimi

b) Įtempimai y ašimi

c) Šlyties xy įtempimai

3.9 pav. Vidutiniai įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal y ašį.



a) Įtempimai x ašimi

b) Įtempimai y ašimi

c) Šlyties xy įtempimai

3.10 pav. Vidutiniai įtempimai, kai modelis deformuojamas xy.

Baigtinių elementų skaičiuojamojoje terpėje LS-DYNA modeliuojami grynieji įtempimai, todėl laikoma, kad įtempimai kitomis ašimis nei nagrinėjama deformacija (keliomis eilėmis mažesni nei įtempimai deformacijos ašimis) skiriasi nežymiai. Kai modelis deformuojamas x ašimi, dvimačių modelių su asimptotinės homogenizacijos metodu ir modeliuojant grynuosius įtempimus įvertintais koeficientais vidutiniai x įtempimai skyrėsi mažiau nei 10% visiems nagrinėtiems atvejams, su mechaniniu požiūriu įvertintais koeficientais – kai gijų tūrio dalis buvo mažesnė už 0,5. Kai modeliai deformuojami y ir xy ašimis, didžiausi vidutiniai įtempimai absoliutine verte gaunami dvimačio modelio su asimptotinės homogenizacijos metodu įvertintais parametrais, mažiausi – su mechaniniu požiūriu įvertintais koeficientais. Mažiausi skirtumai tarp trimačio ir dvimačio modelių vidutinių įtempimų visoms deformacijoms gauti su modeliuojant grynuosius įtempimus įvertintais koeficientais, didžiausi – su mechaniniu požiūriu įvertintais koeficientais.

## 4. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Darbe naudojama universalus matematinis modeliavimo ir programavimo paketas duomenų analizei, vizualizacijai, skaitiniam ir simboliniam skaičiavimui MATLAB ir baigtinių elementų skaičiuojamoji terpė LS-DYNA.

LS-DYNA skirta realaus pasaulio sudėtingų uždavinių modeliavimui (Hallquist, 1998). Skaičiuojamoji terpė naudojama automobilių, lėktuvų konstravime, karinėje pramonėje, bioinžinerijoje. Konstrukcijos, sudarytos iš trimačių arba dvimačių elementų, atsakas į nurodytus poveikius gali būti apskaičiuojamas išreikštiniu (remiasi centrinių skirtumų metodu) arba neišreikštiniu metodu. Darbe naudojamas neišreikštinis metodas.

The screenshot shows a software interface for evaluating material elasticity parameters. The window title is "Medžiagos elastingumo parametru vertinimas". The interface is divided into several sections:

- Material Parameters:**
  - Gijų medžiagos parametrai:** Jungo modulis E: 45e9, Puasono koeficientas  $\nu$ : 0.29, Šlyties modulis G: (empty), Tankis: 1830, Takumo riba: 300e6.
  - Užpildo medžiagos parametrai:** Jungo modulis E: 1e9, Puasono koeficientas  $\nu$ : 0.4, Šlyties modulis G: (empty), Tankis: 900, Takumo riba: 2.5e6.
  - Gijos skersmuo:** 5e-4.
  - Elementų skaičius:** x ašies kryptimi: 10, y ašies kryptimi: 10, z ašies kryptimi: 1.
  - Modelio kraštinių taškų koordinatės:** x: 0, y: 0, z: 0.
- LS-DYNA vertinime naudojamas skaidymo tipas:** Radio buttons for A (selected) and B.
- Asimptotinei homogenizacijai naudojamas skaidymo tipas:** Radio buttons for A, B (selected), and C.
- Ekvivalenčių koeficientų įvertinimo metodai:**
  - naudojant LS-DYNA
  - atliekant asimptotinę homogenizaciją
  - mechaninis požiūris
- Skaičiuoti tikrines reikšmes
- Buttons:** Skaičiuoti, Lyginti parametrus su įvairiais gijų skersmenimis, Lyginti vidutinius įtempimus, Uždaryti.
- Variantų skaičius:** 5

4.1 pav. Vartotojo sąsajos langas.

Programiniu paketu MATLAB sukuriama vartotojo sąsaja (4.1 pav.), realizuojami homogeninės medžiagos parametru įvertinimai asimptotinės homogenizacijos metodu ir mechaniniu požiūriu, sudaromi LS-DYNA įvesties failai, organizuojamas kreipimasis į baigtinių elementų skaičiuojamąją terpę ir apskaičiuotų rezultatų apibendrinimas. LS-DYNA aplinkoje neišreikštiniu metodu apskaičiuojami aukštesnės ir žemesnės klasės modelių, suskaidytų baigtiniais elementais, įtempimai. Kiekvieno kreipimosi metu programos LS-DYNA sukurti modelio failai saugomi katalogo „LS-DYNA“ kataloguose „results\_NR“. Ekvivalenčios homogeninės medžiagos elastingumo koeficientų įverčiai naudojant skirtingas sudedamųjų medžiagų proporcijas, vidutiniai įtempimai vaizduojami grafikais, suformuotos rezultatų failai išvedami atskirame lange (4.2 pav.).

	LS-DYNA įvertinimas	Asimptotinė homogenizacija	Mechaninis požiūris
dalis	0.0079	0.0079	0.0079
Ex	1.3125E+009	1.3371E+009	1.3456E+009
Ey	1.0603E+009	1.0530E+009	1.0077E+009
vxy	0.3987	0.3993	0.3991
Gxy	3.6437E+008	3.6064E+008	3.5991E+008

	LS-DYNA įvertinimas	Asimptotinė homogenizacija	Mechaninis požiūris
dalis	0.0314	0.0314	0.0314
Ex	2.2488E+009	2.3479E+009	2.3823E+009
Ez	1.1686E+009	1.1677E+009	1.0317E+009

Uždaryti

**4.2 pav. Rezultatų failo išvedimo langas.**

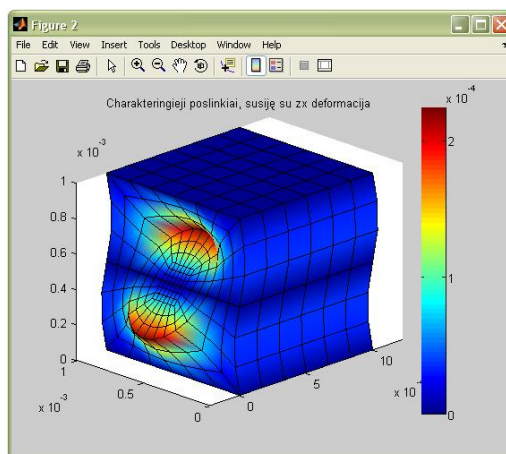
Kreipimasis į baigtinių elementų skaičiuojamąją terpę LS-DYNA organizuojamas, jei kompiuteryje egzistuoja katalogas „c:\lsdyna\program“. Jei tokio katalogo nėra, išvedamas pranešimas, kad programos LS-DYNA pasiekti nepavyko. Tokiu atveju koeficientai LS-DYNA modeliuojant grynuosius įtempimus nevertinami, negalima atlikti vidutinių įtempimų palyginimo, apskaičiuoti modelių tikrinių reikšmių.

Įvedami medžiagos parametrai turi tenkinti 1.55 sąlygas. Šlyties koeficientas apskaičiuojamas naudojant izotropinės medžiagos šlyties modulio įvertinimą (1.52). Įvedami teigiami elementų skaičiai LS-DYNA modeliui x, y, z ašių kryptimis. Skaičiuojamai plokštei pakanka vieno elemento z ašies kryptimi. Modelio kraštiniai taškai parenkami taip, kad vienas taškas būtų koordinatų pradžioje, labiausiai nuo jo nutolęs – vartotojo įvestame taške. Labiausiai nuo koordinatų pradžios nutolusio taško z koordinatė apskaičiuojama taip, kad elemento kraštinės pagal y ir z ašis būtų lygios. Įvedamas gijos skersmuo turi būti ne didesnis nei periodinio elemento kraštinės y ir z ašimis.

Programoje galima parinkti LS-DYNA modelio ir elemento, naudojamo asimptotinei homogenizacijai, skaidymo tipus (3.2 pav. A, B ir 3.1 pav. A, B, C). Medžiagos su parinktais parametrais koeficientų įvertinimui naudojami pažymėti metodai. Jei nei vienas metodas nepažymėtas, išvedamas pranešimas.

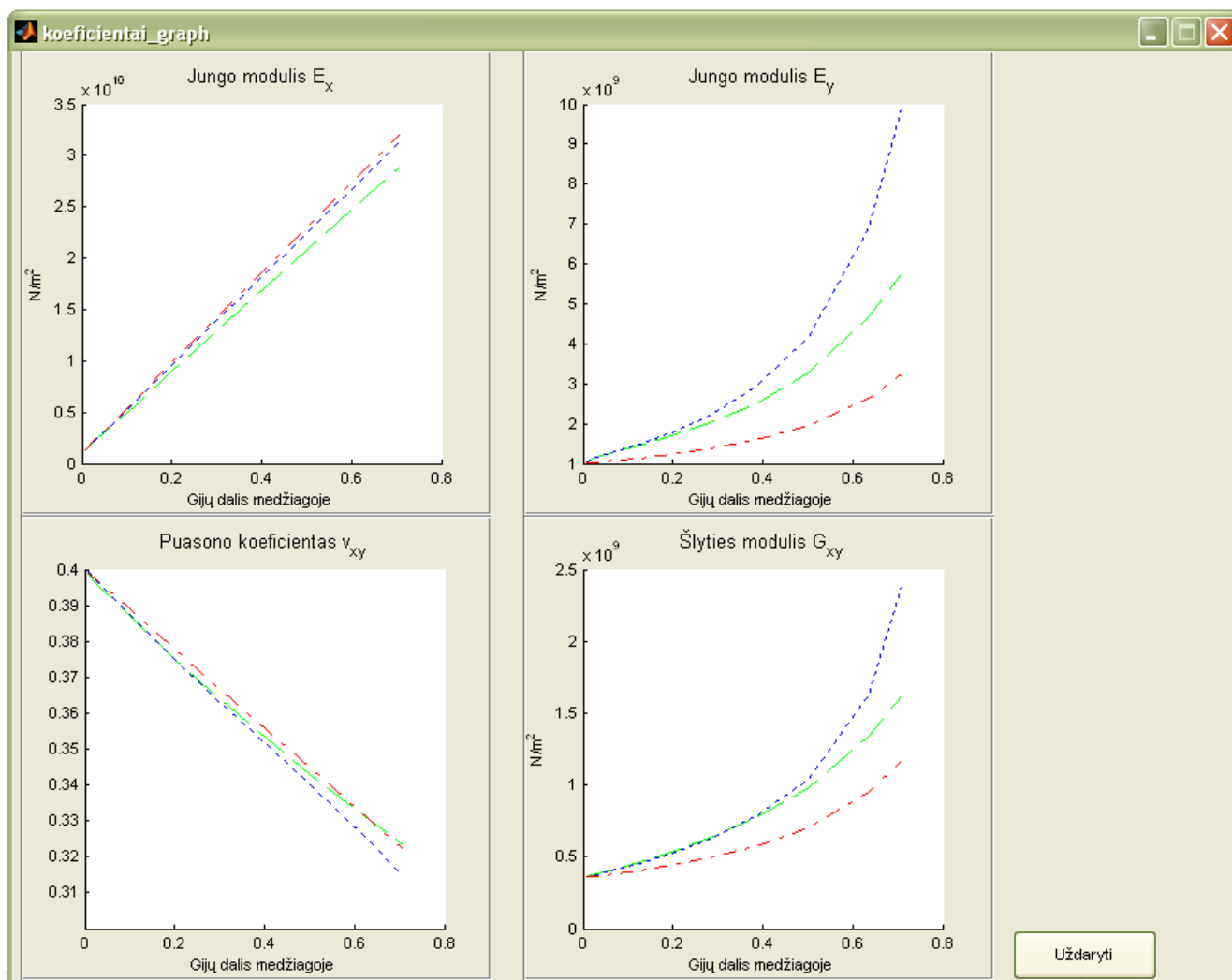
Mygtuku „Skaičiuoti“ arba to paties pavadinimo meniu funkcija įvertinami medžiagos koeficientai su įvestais elastingumo ir modelio geometriniais parametrais, jei pažymėta – LS-DYNA skaičiuojamos trimačio ir dvimačių su pažymėtais metodais įvertintais koeficientais modelių tikrinės reikšmės. Tikrinės reikšmės ir apskaičiuoti koeficientai išvedami atskiruose languose. Jei bent vienas iš parametru netenkina 1.55 sąlygų, rezultatų faile reikšmės pažymimos simboliu „\*“.

Pagrindinio vartotojo sąsajos lango meniu juostoje galima pasirinkti pažymėtu skaidymo tipu apskaičiuotą asimptotinės homogenizacijos charakteringųjų poslinkių, susijusių su tam tikra deformacija, vaizdavimą (4.3 pav.).



4.3 pav. Charakteringųjų poslinkių vaizdavimo langas.

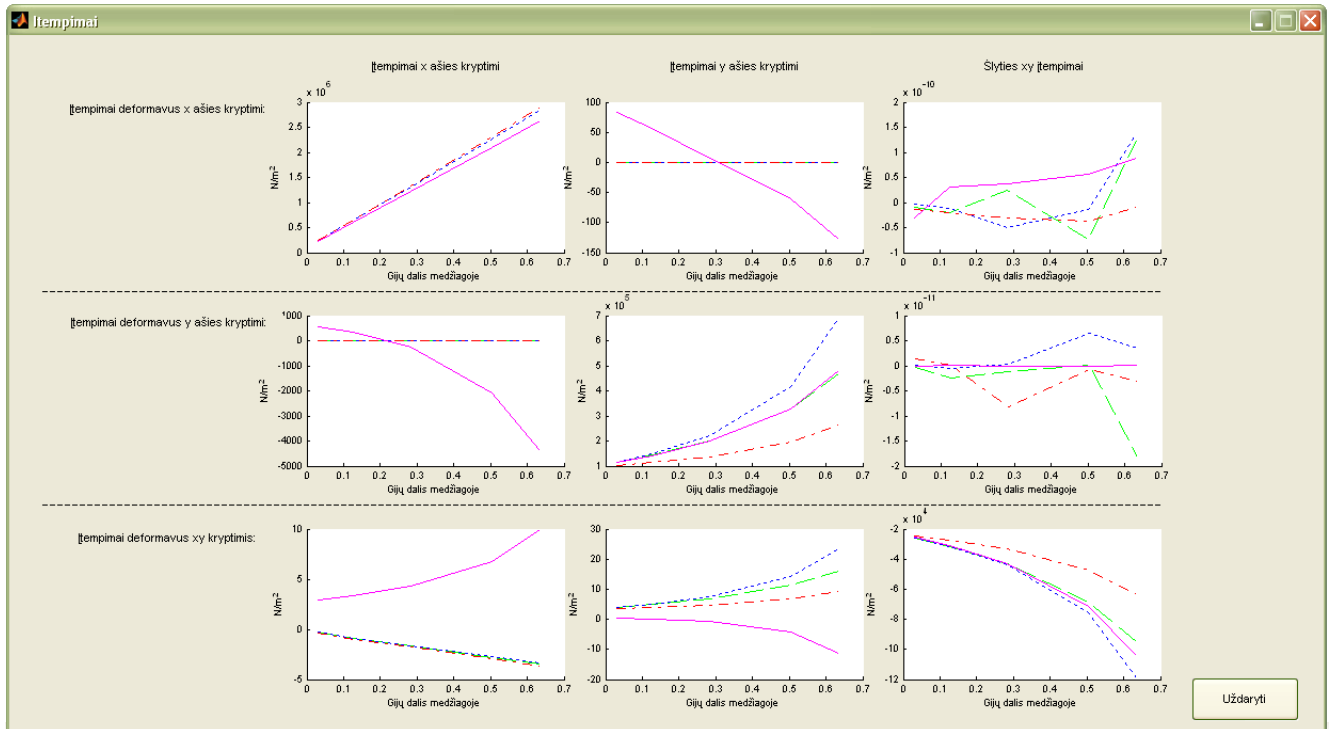
Mygtuku „Lyginti parametrus su įvairiais gijų skersmenimis“ pažymėtiems metodams koeficientai vertinami keičiant gijų skersmenį, nagrinėjamas įvestas teigiamas variantų skaičius. Gijų skersmuo keičiamas pridėdant vienodą dydį. Jei gijos skersmuo lygus elemento kraštinei  $y$  ašies kryptimi, pridėdama pusė pastovaus dydžio. Atskiruose languose išvedami apskaičiuoti koeficientai, elastingumo koeficientų priklausomybės nuo gijų tūrio dalies elemente grafikai (4.4 pav.).



4.4 pav. Elastingumo parametrų grafikų išvedimo langas.



Mygtuku „Lyginti vidutinius įtempimus“ organizuojamas kreipimasis į baigtinių elementų skaičiuojamąją terpę ir apskaičiuojami vidutiniai trimačio modelio ir dvimačių modelių su faile „Iverciai\_2.txt“ išvestais koeficientais vidutiniai įtempimai. Suformuotas rezultatų failas ir vidutinių įtempimų priklausomybės nuo gijų tūrio dalies medžiagoje grafikai išvedami atskiruose languose (4.5 pav.).



4.5 pav. Vidutinių įtempimų grafikų langas.

Mygtuku „Uždaryti“ arba menu funkcija uždaromi visi programos langai ir baigiamas programos darbas.

## DISKUSIJA

Nagrinėtuose pavyzdžiuose gauta, kad Jungo modulio gijų kryptimi ir Puasono koeficiento įvertinimai naudotais metodais skiriasi nežymiai, o Jungo modulio gijoms statmena kryptimi ir šlyties koeficientų įvertinimai mechaniniu požiūriu buvo mažesni nei asimptotinės homogenizacijos metodu ir modeliuojant grynuosius įtempimus. Kuo didesnę tūrio dalį užima gijos, tuo labiau skiriasi skirtingais metodais įvertinti Jungo moduliai ir šlyties koeficientai. Ši tendencija lemia tai, kad didėjant gijų tūrio daliai modelyje taip pat didėja ir skirtumas tarp modeliams su skirtingais metodais įvertintais elastingumo parametrais apskaičiuotų vidutinių įtempimų.

Jungo modulis gijų kryptimi, įvertintas modeliuojant grynuosius įtempimus baigtinių elementų skaičiuojamojoje terpėje LS-DYNA mažesnis dėl stambaus elemento skaidymo (3.2 pav. A). Kuo gijos skersmuo didesnis, tuo daugiau gijos tūrio atmetama aproksimuojant apskritimą. Su stambiu (3.1 pav. A tipo) skaidymu gauti asimptotinės homogenizacijos Jungo modulio gijų kryptimi įverčiai nedaug skyrėsi nuo gautų modeliuojant grynuosius įtempimus. Gijos sudarytos iš medžiagos, kurios elastingumo parametrų vertės žymiai didesnės nei rišančios medžiagos, todėl ir nedidelės gijų srities pakeitimas rišančia medžiaga turi didelę įtaką modelių įverčiams.

Peng, Cao (2002) straipsnyje lyginami mechaniniu požiūriu ir asimptotinės homogenizacijos metodu gauti įvertinimai. Pateiktos išvados sutampa su gautomis šiame darbe – Jungo modulis gijų kryptimi skiriasi nežymiai; Puasono koeficiento įvertis asimptotinės homogenizacijos metodu šiek tiek mažesnis nei mechaniniu požiūriu; Jungo modulio gijoms statmena kryptimi ir šlyties modulio įverčiai asimptotinės homogenizacijos metodu žymiai didesni nei gauti mechaniniu požiūriu; skirtumas tarp įverčių didėja didėjant gijų tūrio daliai modelyje. Pinho-da-Cruz, Oliveira, Teixeira-Dias (2009) aprašomas ir patvirtinamas modelis, kai gijų tūrio dalis 0,35. Naudojant tokią tūrio dalį atitinkančio storio gijas dvimačių modelių su asimptotinės homogenizacijos metodu ir modeliuojant grynuosius įtempimus vidutiniai įtempimai nežymiai skyrėsi nuo trimačio modelio įtempimų, dvimačio modelio su mechaniniu požiūriu įvertintais koeficientais vidutinių įtempimų skirtumas buvo žymiai didesnis.

Modeliuojant sudėtingas sistemas medžiagų heterogeniškumo įvertinimas užima daug kompiuterio atminties ir laiko, todėl reikia kuo mažesnėmis sąnaudomis gauti kuo patikimesnį rezultatą. Kai gijų tūrio dalis neviršija 0,5, gaunami panašūs vidutiniai įtempimai asimptotinės homogenizacijos metodu ir modeliuojant grynuosius įtempimus. Įvertinimas mechaniniu požiūriu netikslus, nes vertinama tik sudarančių medžiagų dalis – nevertinama medžiagos forma modelyje. Be to, trimatis modelis kaip ir koeficientų vertinimo atveju skaidomas stambiais (3.2 pav. A tipo) elementais, didėjant gijų skersmeniui vis didesnėje gijos srityje naudojami rišančios medžiagos elastingumo parametrai, todėl modeliuojami rezultatai gali skirtis nuo eksperimentinių.

## IŠVADOS

- Darbe sukurti heterogeninės struktūros medžiagos elastingumo koeficientų vertinimo skaitiniai metodai baigtinių elementų skaičiuojamojoje terpėje modeliuojant grynuosius įtempimus, asimptotinę analizę pritaikant baigtinių elementų modeliui, mechaniniu požiūriu.
- Asimptotinės homogenizacijos metodu vertinant heterogeninės struktūros medžiagos parametrus neturi įtakos nagrinėjamą modelį sudarančių gijų skaičius ir jo kraštinės sąlygos, nes nagrinėjamas vienas periodinis elementas.
- Mechaniniu požiūriu įvertinti koeficientai tinka, kai modelis deformuojamas gijų kryptimi. Kai modelis deformuojamas gijoms statmena kryptimi arba šlyties deformacija, dvimačio modelio su mechaniniu požiūriu įvertintais koeficientais įtempimų reikšmės mažesnės nei trimačio modelio, kuris įvertina medžiagos heterogeniškumą.
- Su heterogeninės medžiagos elastingumo įverčiais modeliuojant dvimatį modelį panašūs įtempimai gaunami greičiau – nagrinėjamas mažesnis mazgų ir elementų skaičius.
- Darbe nagrinėtais atvejais kūną, sudarytą iš heterogeninės struktūros medžiagos, kurio parametrai viena ašimi žymiai mažesni nei kitomis, galima keisti homogeninės medžiagos dvimačiu modeliu su koeficientais, įvertintais modeliuojant grynuosius įtempimus ir asimptotinės analizės metodu, kai gijų tūrio dalis neviršija 0,5.

## REKOMENDACIJOS

Pateiktuose pavyzdžiuose dvimačio modelio elastingumo parametrai, įvertinti skirtingais metodais, labiausiai skyrėsi tais atvejais, kai gijos skersmuo artimas periodinio elemento kraštinės ilgiui. Kuris metodas medžiagos elgseną apibūdina geriausiai, galima patikrinti tik turint eksperimentinius rezultatus.

Šiame darbe nagrinėjama tik tiesinė elastingumo dalis, aprašoma Huko dėsnio, taikomu mažoms deformacijoms. Kai įtempimai viršija takumo ribą, Huko dėsnio taikyti nebegalima, nagrinėjama netiesinė priklausomybė. Šiuo atveju laikoma, kad medžiagos elastingumas dalimis tiesinis, apkrovos monotoniškai didėja. Netiesinio elastingumo atveju periodinei struktūrai gali būti taikoma asimptotinė homogenizacija atliekant keletą iteracijų, kurių metu įvertinamas sudedamųjų medžiagų parametru pasikeitimas (Zienkiewicz, Taylor, 2006).

Praktikoje naudojamos įvairių tipų heterogeninės struktūros medžiagos – gijos gali būti išdėstytos lygiagrečiai, statmenai, įstrižai. Be to, gijos gali būti išlenktos. Darbe nagrinėtas sluoksnio atvejis, kai tiesios gijos išdėstytos viena kryptimi. Tolesniuose tyrimuose galima būtų įvertinti, kaip medžiagos elastingumo parametrai priklauso nuo gijų formos ir išdėstymo.

## ŠALTINIAI IR LITERATŪRA

- Allen D.H., Kim Y.R., Souza F.V.** Multiscale model for predicting damage evolution in composites due to impact loading. *Composites Science and Technology* 68. Elsevier Ltd. 2008.
- Barauskas R., Belevičius R., Kačianauskas R.** Baigtinių elementų metodo pagrindai. Technika. 2004.
- Barbero E.J.** Finite element analysis of composite materials. CRC Press. 2008.
- Fang Z., Sun W., Tzeng J. T.** Asymptotic homogenization and Numerical Implementation to Predict the Effective Mechanical Properties for Electromagnetic Composite Conductor, *Journal of Composite Materials* 2004
- Farage M.C.R., Beaucour A.L., da Silva Barra L.P., Ke Y., dos Santos Sanabio D.F., Guida Ferrera A.P.** Multiscale modeling of the elastic moduli of lightweight aggregate concretes: numerical estimation and experimental validation. *Revista Escola de Minas*, vol. 62, num. 4, 2009.
- Felippa C.A.** Introduction to Finite Element Methods. University of Colorado Boulder. 2001.
- Georgiades A.V., Kalamkarov A.L., Challagulla K.S.** Asymptotic homogenization model for generally orthotropic reinforcing networks in smart composite plates. *Smart Materials and Structures* 15. 2006..
- Hallquist J.O.** LS-DYNA Theoretical manual. Livermore Software Technology Corporation. 1998.
- Ingram G.D., Cameron I.T., Hangos K.M.** Classification and analysis of integrating frameworks in multiscale modelling. *Chemical Engineering Science*. Elsevier Ltd. 2004.
- Kaw K.A.** Mechanics of Composite Material. CRC Press. 2006.
- Milton G.W.** The Theory of Composites. Cambridge University Press. 2004.
- Pavliotis G.A., Stuart A.M.** Multiscale Methods: Averaging and Homogenization. Springer Science + Business Media. 2008.
- Peng X., Cao J.** A dual homogenization and finite element approach for material characterization of textile composites. *Composites: Part B* 33. Elsevier Ltd. 2002.
- Pinho-da-Cruz J., Oliveira J.A., Teixeira-Dias F.** Asymptotic homogenisation in linear elasticity. Part I: Mathematical formulation and finite element modelling. *Computational Materials Science* 45. Elsevier Ltd. 2009.
- Pinho-da-Cruz J., Oliveira J.A., Teixeira-Dias F.** Asymptotic homogenisation in linear elasticity. Part II: Finite element procedures and multiscale applications. *Computational Materials Science* 45. Elsevier Ltd. 2009.
- Zienkiewicz O.Z., Taylor R.L.** The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Elsevier Ltd. 2006.

## PRIEDAS 1

A lentelė.

Vidutiniai modelių įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal y ašį.

Gijų tūrio dalis	Įtempimai	Trimačio modelio	Koeficientų įvertinimo metodas					
			I	$\Delta, \%$	II	$\Delta, \%$	III	$\Delta, \%$
0,0314	$\sigma_x, N/m^2$	5,56E+02	2,65E-09	-	2,74E-09	-	2,62E-09	-
	$\sigma_y, N/m^2$	1,14E+05	1,17E+05	2,63	1,17E+05	2,63	1,03E+05	9,65
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	0,00E+00	-2,92E-13	-	1,28E-14	-	1,35E-12	-
0,1257	$\sigma_x, N/m^2$	3,61E+02	4,17E-09	-	4,31E-09	-	3,40E-09	-
	$\sigma_y, N/m^2$	1,42E+05	1,46E+05	2,82	1,49E+05	4,93	1,14E+05	19,72
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	8,88E-16	-2,46E-12	-	-4,49E-13	-	7,52E-14	-
0,2827	$\sigma_x, N/m^2$	-2,66E+02	5,70E-09	-	6,21E-09	-	4,00E-09	-
	$\sigma_y, N/m^2$	1,98E+05	2,00E+05	1,01	2,20E+05	11,11	1,38E+05	30,30
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-2,66E-15	-1,09E-12	-	2,48E-13	-	-8,12E-12	-
0,5027	$\sigma_x, N/m^2$	-2,07E+03	8,79E-09	-	1,10E-08	-	5,35E-09	-
	$\sigma_y, N/m^2$	3,29E+05	3,29E+05	0,00	4,18E+05	27,05	1,97E+05	40,12
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-8,88E-16	3,44E-15	-	6,57E-12	-	-8,30E-13	-
0,7088	$\sigma_x, N/m^2$	-6,65E+03	1,43E-08	-	2,30E-08	-	8,25E-09	-
	$\sigma_y, N/m^2$	6,07E+05	5,75E+05	5,27	9,90E+05	63,10	3,26E+05	46,29
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	1,11E-14	1,72E-11	-	6,87E-12	-	-1,75E-12	-

B lentelė.

Vidutiniai modelių įtempimai, kai modelis deformuojamas xy.

Gijų tūrio dalis	Įtempimai	Trimačio modelio	Koeficientų įvertinimo metodas					
			I	$\Delta, \%$	II	$\Delta, \%$	III	$\Delta, \%$
0,0314	$\sigma_x, N/m^2$	2,89E+00	-2,51E-01	-	-2,64E-01	-	-3,55E-01	-
	$\sigma_y, N/m^2$	4,03E-01	4,04E+00	-	4,05E+00	-	3,58E+00	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-2,54E+04	-2,63E+04	3,54	-2,59E+04	1,97	-2,46E+04	3,15
0,1257	$\sigma_x, N/m^2$	3,32E+00	-8,68E-01	-	-8,83E-01	-	-1,00E+00	-
	$\sigma_y, N/m^2$	1,20E-01	5,07E+00	-	5,14E+00	-	3,97E+00	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-3,12E+04	-3,20E+04	2,56	-3,16E+04	1,28	-2,73E+04	12,50
0,2827	$\sigma_x, N/m^2$	4,30E+00	-1,68E+00	-	-1,69E+00	-	-1,77E+00	-
	$\sigma_y, N/m^2$	-7,68E-01	6,90E+00	-	7,55E+00	-	4,80E+00	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-4,34E+04	-4,34E+04	0,00	-4,40E+04	1,38	-3,32E+04	23,50
0,5027	$\sigma_x, N/m^2$	6,80E+00	-2,78E+00	-	-2,73E+00	-	-2,88E+00	-
	$\sigma_y, N/m^2$	-4,29E+00	1,13E+01	-	1,42E+01	-	6,86E+00	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-7,16E+04	-6,76E+04	4,19	-7,55E+04	5,45	-4,74E+04	33,80
0,7088	$\sigma_x, N/m^2$	1,29E+01	-3,85E+00	-	-3,62E+00	-	-4,27E+00	-
	$\sigma_y, N/m^2$	-2,10E+01	1,97E+01	-	3,34E+01	-	1,14E+01	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-1,33E+05	-1,15E+05	13,53	-1,74E+05	30,83	-7,85E+04	40,98

C lentelė.

## Vidutiniai modelių įtempimai, kai modelis deformuojamas pagal y ašį.

Gijų tūrio dalis	Įtempimai	Trimačio modelio	Koeficientų įvertinimo metodas					
			I	$\Delta, \%$	II	$\Delta, \%$	III	$\Delta, \%$
0,0314	$\sigma_x, N/m^2$	1,87E+03	6,24E-09	-	6,50E-09	-	6,61E-09	-
	$\sigma_y, N/m^2$	3,73E+05	3,83E+05	2,68	3,80E+05	1,88	3,56E+05	4,56
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	4,44E-05	-6,44E-12	-	4,62E-13	-	-4,58E-11	-
0,1257	$\sigma_x, N/m^2$	1,33E+03	1,07E-08	-	1,09E-08	-	9,54E-09	-
	$\sigma_y, N/m^2$	4,55E+05	4,65E+05	2,20	4,68E+05	2,86	3,92E+05	13,85
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-1,78E-15	1,06E-12	-	4,41E-12	-	2,06E-12	-
0,2827	$\sigma_x, N/m^2$	-5,80E+02	1,43E-08	-	1,51E-08	-	1,13E-08	-
	$\sigma_y, N/m^2$	6,11E+05	6,18E+05	1,15	6,54E+05	7,04	4,72E+05	22,75
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	3,55E-15	1,60E-12	-	7,54E-12	-	3,83E-12	-
0,5027	$\sigma_x, N/m^2$	-5,61E+03	2,03E-08	-	2,36E-08	-	1,47E-08	-
	$\sigma_y, N/m^2$	9,58E+05	9,52E+05	0,63	1,13E+06	17,95	6,62E+05	30,90
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-3,01E-14	4,60E-12	-	-3,56E-12	-	-7,18E-12	-
0,7088	$\sigma_x, N/m^2$	-1,76E+04	2,98E-08	-	4,07E-08	-	2,12E-08	-
	$\sigma_y, N/m^2$	1,63E+06	1,53E+06	6,14	2,28E+06	39,88	1,06E+06	34,97
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	3,28E-09	4,21E-12	-	-8,49E-11	-	-2,09E-11	-

D lentelė.

## Vidutiniai modelių įtempimai, kai modelis deformuojamas xy.

Gijų tūrio dalis	Įtempimai	Trimačio modelio	Koeficientų įvertinimo metodas					
			I	$\Delta, \%$	II	$\Delta, \%$	III	$\Delta, \%$
0,0314	$\sigma_x, N/m^2$	1,03E+01	-5,86E-01	-	-6,28E-01	-	-7,82E-01	-
	$\sigma_y, N/m^2$	1,22E+00	1,34E+01	-	1,33E+00	-	1,24E+01	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-8,90E+04	-9,18E+04	3,15	-9,06E+04	1,80	-8,76E+04	1,57
0,1257	$\sigma_x, N/m^2$	1,19E+01	-1,84E+00	-	-1,89E+00	-	-2,15E+00	-
	$\sigma_y, N/m^2$	1,92E-01	1,63E+01	-	1,62E+01	-	1,38E+01	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-1,07E+05	-1,10E+05	2,80	-1,09E+05	1,87	-9,61E+04	10,19
0,2827	$\sigma_x, N/m^2$	1,53E+01	-3,60E+00	-	-3,59E+00	-	-3,88E+00	-
	$\sigma_y, N/m^2$	-2,54E+00	2,15E+01	-	2,27E+01	-	1,65E+01	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-1,46E+05	-1,47E+05	0,69	-1,48E+05	1,37	-1,16E+05	20,55
0,5027	$\sigma_x, N/m^2$	2,33E+01	-5,93E+00	-	-5,70E+00	-	-6,24E+00	-
	$\sigma_y, N/m^2$	-1,23E+01	3,32E+01	-	3,19E+01	-	2,32E+01	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-2,31E+05	-2,24E+05	3,03	-2,43E+05	5,19	-1,63E+05	29,43
0,7088	$\sigma_x, N/m^2$	4,10E+01	-8,20E+00	-	-7,82E+00	-	-9,09E+00	-
	$\sigma_y, N/m^2$	-4,94E+01	5,36E+01	-	7,93E+01	-	3,71E+01	-
	$\sigma_{xy}, N/m^2$	-4,03E+05	-3,55E+05	11,91	-4,98E+05	23,57	-2,63E+05	34,74