



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Emilis Vasiliauskas

SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS SU
VĒLAVIM AIS ANALIZINIS TYRIMAS

Magistro darbas

Vadovas
prof. dr. J. Rimas

KAUNAS, 2012



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
doc. dr. N. Listopadskis
2012 06 02

SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS SU
VĖLAVIMAIMS ANALIZINIS TYRIMAS

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Recenzentas
doc. dr. G.Činčikas
2010 06 01

Vadovas
prof. dr. J. Rimas
2012 06 01

Atliko
FMMM-0 gr. stud.
E. Vasiliauskas
2012 05 30

KAUNAS, 2012

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Rimantas Rudzkis, profesorius (VU MII)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Jonas Valantinas, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., vice-prezidentas projektams (UAB „Baltic Amadeus“)

Vasiliauskas E. Analytical investigation of the synchronization system with overdue arguments: Master's work in applied mathematics / supervisor prof. dr. J. Rimas; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2012. – 84 p.

SUMMARY

The mathematical model of the synchronization system composed of five joined into a chain oscillators is investigated. The mathematical model of the synchronization system is the system of matrix differential equation with delayed arguments.

The solution of the matrix differential equation is obtained applying the Laplace transform and the “steps“ method. The analytical expressions of the system's step response functions, the matrix B^k and the phase differences of the oscillators are obtained. Steady values of the step response functions and steady values of the phase differences are obtained applying the limiting value theorem. The transition processes of the system with equal and different delays are investigated.

TURINYS

Paveikslų sąrašas	9
Įvadas	12
1. Teorinė dalis	13
1.1. Ryšio tinklo sinchronizacija. Sinchronizacijos būdai	13
1.2. Apibendrintos funkcijos	14
1.2.1. Apibendrintos funkcijos sąvoka	14
1.2.2. Veiksmai su apibendrintomis funkcijomis	16
1.2.3. Vienetinė Hevisaido ir Dirako delta funkcijos	17
1.3. Laplaso transformacija	19
1.3.1. Pirmavaizdžio sąvoka	19
1.3.2. Vaizdo ir Laplaso transformacijos sąvokos	20
1.3.3. Laplaso transformacijos savybės	21
1.4. Programinė įranga	23
2. Tiriamoji dalis ir rezultatai	24
2.1. Tarpusavio sinchronizacijos sistemos matematinio modelio sudarymas	24
2.2. Matricinės diferencialinės lygties, aprašančios tarpusavio sinchronizacijos sistemą, sprendimas	27
2.2.1. Matricinės diferencialinės lygties sprendimas, kai vėlavimai vienodi	27
2.2.2. Matricinės diferencialinės lygties sprendimas, kai vėlavimai skirtingi	31
2.3. Matricos B , aprašančios tarpusavio sinchronizacijos sistemos vidinių ryšių struktūrą, kėlimas k -tuoju laipsniu	39
2.3.1. Matricos B tikrinės reikšmės ir Žordano forma	39
2.3.2. Matricos B tikrinių vektorių matrica T ir jos atvirkštinė matrica	41
2.3.3. Matricos B k – tojo laipsnio elementai	41
2.4. Tarpusavio sinchronizacijos sistemos pereinamųjų procesų tyrimas	43
2.4.1. Diferencialinių lygčių sistemos, aprašančios sinchronizacijos sistemą, sprendimas ..	44
2.4.2. Pereinamosios funkcijos, kai vėlavimai vienodi	48
2.4.2.1. Pereinamųjų funkcijų ribinės reikšmės	49
2.4.2.2. Pereinamųjų procesų tyrimas, kai vėlavimai vienodi	50
2.4.3. Pereinamosios funkcijos, kai vėlavimai skirtingi	51
2.4.3.1. Pereinamųjų procesų tyrimas, kai vėlavimai skirtingi	52
2.4.4. Tarpusavio sinchronizacijos sistemos pereinamųjų procesų priklausomybė	

nuo pradinių sąlygų	53
2.4.4.1. Generatorių virpesių fazių skirtumų analizinės išraiškos	54
2.4.4.2. Generatorių virpesių fazių skirtumų ribinės reikšmės	58
2.4.3.3. Generatorių virpesių fazių skirtumų pereinamųjų procesų tyrimas.....	60
Išvados	63
Literatūra	64
1. Priedas. Laplaso transformacijos formulės	65
2. Priedas. Ribos $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_i(p))_p}{p_p}$ radimas	66
3. Priedas. Pereinamųjų funkcijų skaičiavimo algoritmo pavyzdys, kai vėlavimai vienodi	67
4. Priedas. Pereinamųjų funkcijų grafikai, kai vėlavimai vienodi.....	69
5. Priedas. Pereinamųjų funkcijų skaičiavimo algoritmo pavyzdys, kai vėlavimai skirtingi.....	74
6. Priedas. Pereinamųjų funkcijų grafikai, kai vėlavimai skirtingi	76
7. Priedas. Generatrių virpesių fazių skirtumų skaičiavimo algoritmo pavyzdys	78
8. Priedas. Generatrių virpesių fazių skirtumų grafikai.....	80

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1.1 pav. Pleziochroninė sinchronizacija	13
1.2 pav. Priverstinė sinchronizacija	14
1.3 pav. Tarpusavio sinchronizacija	14
1.4 pav. Hevisaido vienetinė funkcija	17
1.5 pav. Funkcijos $\delta_h(t)$ grafikas	18
1.6 pav. Vėluojanti vienetinė funkcija	20
1.7 pav. Vėluojanti funkcija	20
1.8 pav. Funkcijos $F(p)$ analiziškumo sritis	21
2.1 pav. Tarpusavio sinchronizacijos sistemos schema	24
2.2 pav. Tarpusavio sinchronizacijos sistemos struktūrinė schema	24
2.3 pav. Tarpusavio sinchronizacijos sistemos schema	33
2.4 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i1}(t)$ grafikai, kai vėlavimai vienodi	51
2.5 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i2}(t)$ grafikai, kai vėlavimai skirtingi	53
2.6 pav. Fazių skirtumo $x_1(t) - x_2(t)$, grafikai, kai vėlavimai $\kappa\tau = 1$, $\kappa\tau = 2$	61
2.7 pav. Fazių skirtumo $x_3(t) - x_4(t)$, grafikai, kai vėlavimai $\kappa\tau = 0.75$, $\kappa\tau = 1.5$	61
P.1 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i1}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.1$	69
P.2 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i2}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.1$	69
P.3 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i2}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.3$	70
P.4 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i2}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.8$	70
P.5 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i2}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 2.5$	71
P.6 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i3}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.1$	71
P.7 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i3}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.3$	72
P.8 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i3}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.8$	72
P.9 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i3}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1.5$	73
P.10 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i3}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 2.5$	73
P.11 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i1}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau_1 = 0.3$, $\kappa\tau_2 = 0.5$	76
P.12 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i1}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau_1 = 1.5$, $\kappa\tau_2 = 3$	76
P.13 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i1}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau_1 = 2$, $\kappa\tau_2 = 3$	77

- P.14 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i1}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau_1 = 2.5$, $\kappa\tau_2 = 3$ 77
- P.15 pav. Fazių skirtumų $x_4(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.2$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2003$,
 $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2002$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{05}}{\kappa} = 2001$, $\varphi_{01} = 0.3$, $\varphi_{02} = 0.4$, $\varphi_{03} = 0.5$, $\varphi_{04} = 0.9$, $\varphi_{01} = 0.2$ 80
- P.16 pav. Fazių skirtumų $x_4(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2003$,
 $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2002$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{05}}{\kappa} = 2001$, $\varphi_{01} = 0.3$, $\varphi_{02} = 0.4$, $\varphi_{03} = 0.5$, $\varphi_{04} = 0.9$, $\varphi_{01} = 0.2$ 80
- P.17 pav. Fazių skirtumų $x_4(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2003$,
 $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2002$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{05}}{\kappa} = 2001$, $\varphi_{01} = 0.3$, $\varphi_{02} = 0.4$, $\varphi_{03} = 0.5$, $\varphi_{04} = 0.9$, $\varphi_{01} = 0.2$ 81
- P.18 pav. Fazių skirtumų $x_4(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2003$,
 $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2002$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{05}}{\kappa} = 2001$, $\varphi_{01} = 0.3$, $\varphi_{02} = 0.4$, $\varphi_{03} = 0.5$, $\varphi_{04} = 0.9$, $\varphi_{01} = 0.2$ 81
- P.19 pav. Fazių skirtumų $x_4(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 2$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2003$,
 $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2002$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{05}}{\kappa} = 2001$, $\varphi_{01} = 0.3$, $\varphi_{02} = 0.4$, $\varphi_{03} = 0.5$, $\varphi_{04} = 0.9$, $\varphi_{01} = 0.2$ 82
- P.20 pav. Fazių skirtumų $x_4(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 2.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2003$,
 $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2002$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{05}}{\kappa} = 2001$, $\varphi_{01} = 0.3$, $\varphi_{02} = 0.4$, $\varphi_{03} = 0.5$, $\varphi_{04} = 0.9$, $\varphi_{01} = 0.2$ 82
- P.21 pav. Fazių skirtumų $x_3(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2001$,
 $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2004$, $\frac{f_{05}}{\kappa} = 1998$, $\varphi_{01} = 0.5$, $\varphi_{02} = 0.4$, $\varphi_{03} = 0.2$, $\varphi_{04} = 0.7$, $\varphi_{01} = 0.5$ 83
- P.22 pav. Fazių skirtumų $x_3(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2001$,
 $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2004$, $\frac{f_{05}}{\kappa} = 1998$, $\varphi_{01} = 0.2$, $\varphi_{02} = 0.6$, $\varphi_{03} = 0.1$, $\varphi_{04} = 0.4$, $\varphi_{01} = 0.3$ 83

P.23 pav. Fazių skirtumų $x_3(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 2003$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 1997$,

$$\frac{f_{03}}{\kappa} = 2001, \frac{f_{04}}{\kappa} = 1999, \frac{f_{05}}{\kappa} = 2000, \varphi_{01} = 0.5, \varphi_{02} = 0.4, \varphi_{03} = 0.2, \varphi_{04} = 0.7, \varphi_{05} = 0.5 \dots\dots 84$$

P.24 pav. Fazių skirtumų $x_3(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 2003$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 1997$,

$$\frac{f_{03}}{\kappa} = 2001, \frac{f_{04}}{\kappa} = 1999, \frac{f_{05}}{\kappa} = 2000, \varphi_{01} = 0.2, \varphi_{02} = 0.6, \varphi_{03} = 0.1, \varphi_{04} = 0.4, \varphi_{05} = 0.3 \dots\dots 84$$

IVADAS

Darbe nagrinėjama ryšio tinklo tarpusavio sinchronizacijos sistema, sudaryta iš penkių į grandinę sujungtų generatorių.

Darbo tikslas – sudaryti sinchronizacijos sistemos matematinį modelį, rasti sistemos pereinamųjų funkcijų ir generatorių virpesių fazių skirtumų tikslias analizes išraiškas, ištirti sistemos pereinamuosius procesus ir jos darbą nusistovėjusiame režime.

Nagrinėjamos tarpusavio sinchronizacijos sistemos matematinis modelis – matricinė diferencialinė lygtis su vėluojančiu argumentu. Šią lygtį sprendžiame taikant Laplaso transformaciją ir „žingsnių“ metodą. Remdamiesi surastu sprendiniu, randame sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų, vidinių ryšių struktūrą nusakančios matricos B^k ir generatorių virpesių fazių skirtumų tikslias analizes išraiškas. Remiantis sinchronizacijos sistemos pereinamosiomis funkcijomis, tiriami sistemos pereinamieji procesai, atsirandantys įjungus sistemos generatorių valdymą.

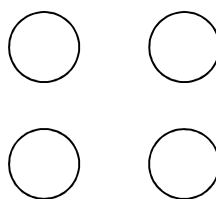
1. TEORINĖ DALIS

1.1. RYŠIO TINKLO SINCHRONIZACIJA. SINCHRONIZACIJOS BŪDAI

Sinchronizacija – tai kelių procesų suderinimas taip, kad jie vyktų vienu metu arba su vienuodu fazių skirtumu.

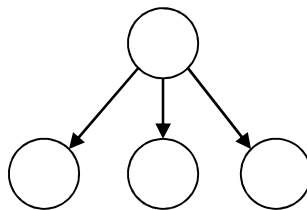
Skaitmeninių ryšio tinklų perdavimo stotys yra sujungtos ryšio linijomis. Kiekvienos stoties perduodamos informacijos greitis priklauso nuo tos stoties taktinio generatoriaus dažnio. Kai dviejų sujungtų stočių taktinių generatorių dažniai skiriasi, prarandama arba dubliuojama perduodama informacija. Tokiems nuostoliams išvengti, ryšio tinklo taktiniai generatoriai sinchronizuojami. Ryšio tinklo komutacijos centrų taktiniams generatoriams sinchronizuoti naudojami įvairūs metodai. Plačiausiai naudojami šie:

- Pleziosinchronizacija. Tai pats paprasčiausias metodas, kai naudojami stabilūs vienas su kitu nesusiję taktiniai generatoriai. Kadangi ateinančių į komutacijos mazgą signalų taktiniai dažniai skiriasi nuo komutacijos mazge esančio taktinio generatoriaus dažnio, kiekvienas ateinantis signalas užrašomas į buferinę atmintį, iš kurios nuskaitomas vietinio taktinio generatoriaus dažniu. Dėl esančių dažnių skirtumų ryšio tinkle galimi perduodamos informacijos nuostoliai (jie bus tuo retesni, kuo bus stabilesni taktiniai generatoriai). Pleziochroninės sinchronizacijos schema pateikta 1.1 pav.



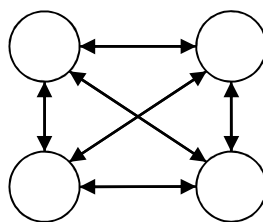
1.1 pav. Pleziochroninė sinchronizacija

- Priverstinė sinchronizacija. Šis metodas remiasi vieno pagrindinio generatoriaus panaudojimu. Esant nusistovėjusiam režimui, visi ryšio tinklo taktiniai generatoriai veikia pagrindinio generatoriaus dažniu. Metodo trūkumas – žemas sistemos gyvybingumas. Priverstinės sinchronizacijos schema pateikta 1.2 pav.



1.2 pav. Priverstinė sinchronizacija

- Tarpusavio sinchronizacija. Tai dvipusė tarpusavyje sujungtų taktinių generatorių sinchronizacija. Kiekvienas iš sujungtų generatorių turi įtakos kitų generatorių dažniams. Nusistovėjusiame režime, visų generatorių dažniai bus vienodi ir lygūs tam tikram vidutiniam dažniui, priklausančiam nuo visų generatorių, sujungtų į tinklą, dažnių ir atstumų tarp atskirų generatorių. Metodo trūkumas – palyginti sudėtingas tokios sistemos valdymas. Tarpusavio sinchronizacijos sistemos schema pateikta 1.3 pav.



1.3 pav. Tarpusavio sinchronizacija

1.2. APIBENDRINTOS FUNKCIJOS

1.2.1. APIBENDRINTOS FUNKCIJOS SĄVOKA

Tegu Ω yra sritis erdvėje R^n . Pagrindinių funkcijų erdvei $D(\Omega)$ priskirsime be galo diferencijuojamas ir finičias srityje Ω funkcijas, t.y. $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$. Pagrindinių funkcijų savybės:

1. Diferencijavimo operatorius $D^\alpha : D(\Omega) \rightarrow D(\Omega)$ yra tolydus, t.y. jeigu $\varphi_k \rightarrow \varphi$ erdvėje $D(\Omega)$, kai $k \rightarrow \infty$, tai $D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi$ erdvėje $D(\Omega)$, kai $k \rightarrow \infty$.

2. Tegu $\varphi \in D(\Omega)$ ir $\alpha \in C^\infty(\Omega)$. Tada $\alpha\varphi \in D(\Omega)$ ir dauginimo iš α operacija yra tolydus operatorius erdvėje $D(\Omega)$.
3. Tegu α yra fiksuotas vektorius erdvėje R^n . Kiekvienai funkcijai $\varphi \in D(R^n)$ priskirkime funkciją $\varphi_a \in D(R^n)$ pagal formulę $\varphi_a(x) = \varphi(x+a)$. Taip apibrėžtas poslinkio operatorius yra tolydus erdvėje $D(R^n)$.

Bet kurį tiesinį tolydų funkcionalą, apibrėžtą pagrindinių funkcijų erdvėje $D(\Omega)$, vadiname apibendrintąja funkcija. Apibendrintųjų funkcijų erdvę žymėsime $D^*(\Omega)$, arba trumpiau - D^* . Simboliu $\langle f, \varphi \rangle$ žymėsime funkcionalo $f \in D^*(\Omega)$ reikšmę taške $\varphi \in D(\Omega)$.

Paaiškinsime apibendrintosios funkcijos apibrėžimą.

1. Apibendrintoji funkcija f yra funkcionalas erdvėje $D(\Omega)$, t.y. kiekvienai funkcijai $\varphi \in D(\Omega)$ priskiria skaičių $\langle f, \varphi \rangle$ (bendru atveju kompleksinį).
2. Apibendrintoji funkcija f yra tiesinis funkcionalas erdvėje $D(\Omega)$, t.y. jeigu $\varphi, \psi \in D(\Omega)$, $\lambda, \mu \in C$, tai $\langle f, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda\langle f, \varphi \rangle + \mu\langle f, \psi \rangle$.
3. Apibendrintoji funkcija f yra tolydus funkcionalas erdvėje $D(\Omega)$, t.y. jeigu $\varphi_k \rightarrow \varphi$, kai $k \rightarrow \infty$, tai $\langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$, kai $k \rightarrow \infty$. Kadangi funkcionalas f yra tiesinis, tai šią savybę pakanka patikrinti, kai $\varphi = 0$.

Išskirsime dvi plačias apibendrintų funkcijų klases.

1. Reguliariosios apibendrintosios funkcijos. Tegu f yra lokaliai integruojama srityje Ω funkcija, t.y. $f \in L_{loc}(\Omega)$. Integralas

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in D(\Omega) \quad (1.1)$$

apibrėžia apibendrintą funkciją $f \in D^*(\Omega)$. Taip apibrėžta apibendrinta funkcija yra vadinama reguliariąja apibendrintąja funkcija ir žymima raide f .

2. Singuliariosios apibendrintosios funkcijos. Apibendrintąsias funkcijas $f \in D^*$, kurių negalima išreikšti (1.1) formule, vadinsime singuliariosiomis apibendrintosiomis funkcijomis.

Nėra prasmės kalbėti apie apibendrintąsias funkcijos lygybę nuliui konkrečiame srities Ω taške, tačiau galima apibrėžti apibendrintos funkcijos lygybę nuliui kokioje nors srityje Ω .

Tegu $f \in D^*(\Omega)$ ir sritis $\Omega' \subset \Omega$. Sakysime, apibendrintoji funkcija f lygi nuliui srityje Ω' , ir rašysime $f = 0$ srityje Ω' , arba $f(x) = 0$, kai $x \in \Omega'$, jeigu

$$\langle f, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Apibendrintosios funkcijos f atrama vadinamas visų atvirųjų aibių, kuriose funkcija f lygi nuliui, sąjungos papildinys. Apibendrintosios funkcijos f atramą žymėsime simboliu $\text{supp } f$.

Iš šio apibrėžimo išplaukia tokios išvados:

- 1 išvada. Bet kurioje srityje, kuri nesikerta su atrama $\text{supp } f$, apibendrintoji funkcija f lygi nuliui, t.y.

$$\langle f, \varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in D(\Omega), \quad \text{supp } f \cap \text{supp } \varphi = \emptyset.$$

- 2 išvada. Apibendrintosios funkcijos atrama yra aibė tų ir tik tų taškų, kurių jokiaje aplinkoje apibendrintoji funkcija f nėra lygi nuliui.

1.2.2. VEIKSMAI SU APIBENDRINTOMIS FUNKCIJOMIS

1. Dvi apibendrintosios funkcijos f_1 ir f_2 vadinamos lygiomis, jei jų funkcionalai sutampa su kiekviena pagrindinės funkcijos reikšme, t.y.

$$(f_1 = f_2) \Leftrightarrow (f_1, \varphi) = (f_2, \varphi), \quad \forall \varphi \in D$$

2. $(\alpha(x)f, \varphi) = (f, \alpha(x)\varphi)$, $\forall \varphi \in D$; jei $\alpha(x) = \alpha = \text{const}$, tai $(\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi)$ $\forall \varphi \in D$.
3. Apibrėšime apibendrintosios funkcijos išvestinę. Tegu f diferencijuojama funkcija.

Tada $\forall \varphi \in D$ galioja:

$$(f'(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

Kadangi pirmasis narys, esantis dešinėje lygybės pusėje, visoms finičiosioms funkcijoms $\varphi \in D$ lygus nuliui, tai

$$(f'(x), \varphi(x)) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f(x), \varphi'(x)).$$

Pažymėkime:

$$(f', \varphi) = (f'(x), \varphi(x)),$$

$$-(f, \varphi') = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx$$

Tada apibendrintosios funkcijos išvestinė užrašoma taip:

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \forall \varphi \in D.$$

Analogiškai gauname k – tosios eilės apibendrintosios funkcijos išvestinę:

$$(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)}), \quad \forall \varphi \in D, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Apibendrintąją išvestinę žymėsime simboliu D , kad atskirtume nuo klasikinės išvestinės.

k – tosios eilės apibendrintosios funkcijos išvestinę užrašysime taip:

$$(D^k f, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)}), \quad \forall \varphi \in D, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

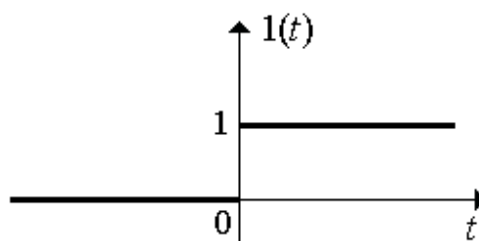
Iš pastarosios lygybės mes matome, kad apibendrintoji funkcija turi bet kurios eilės apibendrintąją išvestinę.

1.2.3. VIENETINĖ HEVISAIDO IR DIRAKO DELTA FUNKCIJOS

Funkciją

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

vadiname Hevisaido vienetine funkcija (1.4 pav.).



1.4 pav. Hevisaido vienetinė funkcija

Funkcijos $f(t)$ ir Hevisaido vienetinės funkcijos $1(t)$ sandaugą galima parašyti taip:

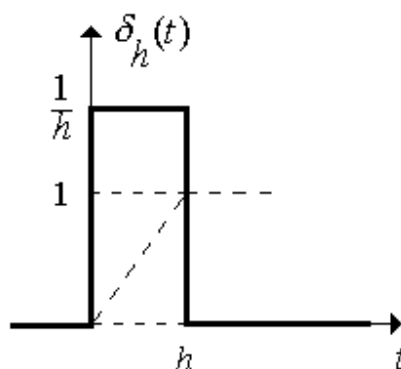
$$f(t)1(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Dirako delta funkcijos taikomos uždaviniuose, kuriuose susiduriame su dydžiais, apibūdinančiais momentinius postūmius.

Panagrinėkime funkciją $\delta_h(t)$:

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, t > h, \\ \frac{1}{h}, & 0 < t < h, \end{cases}$$

kurios grafikas pavaizduotas 1.5 pav.



1.5 pav. Funkcijos $\delta_h(t)$ grafikas

Ši funkcija atkarpoje $(0, h)$ turi pastovią reikšmę $\frac{1}{h}$, o impulso plotas yra lygus vienetui,

$$\text{t.y. } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, h) dt = \int_0^h \frac{dt}{h} = 1$$

Tarkim, kad $h \rightarrow 0$. Akivaizdu, kad funkcijų $\delta_h(t)$ šeima diverguoja. Įveskime funkciją $\delta(t)$, kuri yra funkcijų $\delta_h(t)$ šeimos riba:

Šią funkciją vadinsime nulinės eilės impulsine funkcija. $\delta(t)$ lygi nuliui visuose taškuose, išskyrus tašką $t = 0$, kuriame $\delta(t) = \infty$. Be to

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Delta funkcijos $\delta(t)$ atrama yra taškas 0.

Tegu Θ yra Hevisaido funkcija, tuomet apibendrintosios Hevisaido funkcijos

$$\langle \Theta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

atrama yra intervalas $[0, \infty)$, todėl apibendrintoji Hevisaido funkcija nėra finiti.

Fizikine prasme delta funkcija gali būti suprantama kaip vienetinio krūvio, esančio koordinatų pradžioje, tankis. Jei krūvio dydis m , tai jo tankis $\rho(x) = m\delta(x)$.

1.3. LAPLASO TRANSFORMACIJA

1.3.1. PIRMAVAIZDŽIO SĄVOKA

Realaus kintamojo t kompleksinę funkciją $f(t)$ vadiname pirmavaizdžiu, kai

1. funkcija $f(t)$ intervale $0 \leq t < \infty$ yra tolydi arba turi tikrai pirmojo tipo trūkio taškus, kurių skaičius bet kuriame baigtiniame intervale yra baigtinis;
2. $f(t) = 0$, kai $t < 0$;
3. didėjant t , funkcijos $f(t)$ modulis didėja ne greičiau, kaip eksponentinė funkcija, t.y., egzistuoja tokie skaičiai $M > 0$ ir $\sigma > 0$, su kuriais $|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$, (1.2)

kai $t > 0$.

Tikslus apatinis visų skaičių σ , kuriems teisinga (1.2) nelygybė, rėžis σ_0 vadinamas funkcijos $f(t)$ didėjimo rodikliu.

Pirmąją ir trečiąją pirmavaizdį apibrėžiančias sąlygas tenkina dauguma praktikoje pasitaikančių funkcijų. Antroji sąlyga taip pat nėra varžanti. Sprendžiant fizikinius uždavinius, paprastai domimės funkcijos reikšmėmis, įgyjamomis tikrai nuo pradinio laiko momento, kurį nepažeisdami bendrumo, galime laikyti lygiu nuliui.

Hevisaido vienetinė funkcija tenkina visas pirmavaizdį apibrėžiančias sąlygas, be to, turi didėjimo rodiklį $\sigma_0 = 0$.

Pirmavaizdžio $f(t)$ ribą $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(+0)$ vadinsime pradine pirmavaizdžio reikšme ir žymėsime $f(0)$.

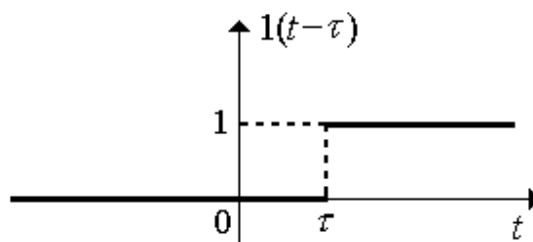
Trūkio taške t_k pirmavaizdį $f(t)$ laikysime tolydžia iš dešinės funkcija:

$$f(t_k) = f(t_k + 0) = \lim_{t \rightarrow t_k + 0} f(t).$$

Funkciją

$$1(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau \end{cases} \quad (1.3)$$

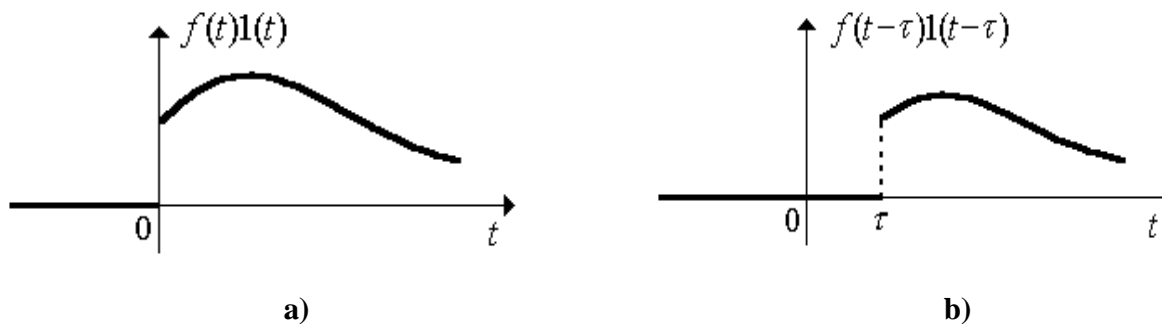
vadiname vėluojančiąja vienetine funkcija (1.6 pav.).



1.6 pav. Vėluojanti vienetinė funkcija

Funkciją $f(t-\tau)1(t-\tau)$ vadiname vėluojančiąja funkcija (vėluojančiu pirmavaizdžiu).

Vėluojančiosios funkcijos grafikas gaunamas iš funkcijos $f(t)1(t)$ grafiko, pastūmus jį į dešinę atstumu τ (1.7 pav.).



1.7 pav. Vėluojanti funkcija

1.3.2. VAIZDO IR LAPLASO TRANSFORMACIJOS SĄVOKOS

Pirmavaizdžio $f(t)$ vaizdu vadiname kompleksinio kintamojo $\rho = \sigma + i\omega$ funkciją $F(\rho)$, apibrėžiamą netiesioginiu integralu

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (1.4)$$

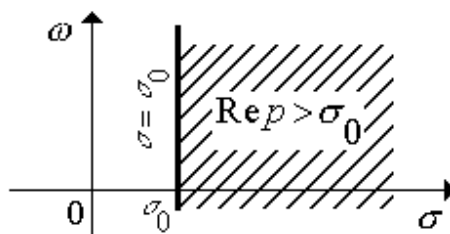
(1.4) integralas vadinamas funkcijos $f(t)$ Laplaso transformacija (kartais Laplaso integralu). Veiksmas, kuriuo randamas pirmavaizdžio $f(t)$ vaizdas $F(p)$, taip pat vadinamas Laplaso transformacija.

Vaizdo $F(p)$ ir pirmavaizdžio $f(t)$ atitikį žymėsime vienu šių simbolių:

$$F(p) = L\{f(t)\}, \quad F(p) \div f(t), \quad f(t) \div F(p), \quad f(t) = L^{-1}\{F(p)\}.$$

Pirmavaizdžio $f(t)$ vaizdas $F(p)$ yra apibrėžtas ne visoje kompleksinėje plokštumoje p .

Vaizdo egzistavimo teorema. Kiekvienas pirmavaizdis $f(t)$ turi vaizdą $F(p)$, apibrėžtą pusplokštumėje $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, čia σ_0 - funkcijos $f(t)$ didėjimo rodiklis (1.8 pav.)



1.8 pav. Funkcijos $F(p)$ analiziškumo sritis

1.3.3. LAPLASO TRANSFORMACIJOS SAVYBĖS

Pateiksime svarbiausias Laplaso transformacijos savybes.

1. Tiesiškumo savybė. Jeigu pirmavaizdžių $f_1(t)$ ir $f_2(t)$ vaizdai yra atitinkamai $F_1(p)$ ir $F_2(p)$, t.y. $f_1(p) \div F_1(p)$, $f_2(p) \div F_2(p)$ ir C_1, C_2 – kompleksiniai skaičiai, tai

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p) \quad (1.5)$$

(tiesinį pirmavaizdžių darinį atitinka jų vaizdų toks pat tiesinis darinys).

Laplaso transformacijos tiesiškumo savybė gali būti apibendrinta, imant bet kurį baigtinį dėmenų skaičių: jeigu $f_k(t) \div F_k(p)$, $k = \overline{1, n}$ ir $C_k \in C$, tai

$$\sum_{k=1}^n C_k f_k(t) \div \sum_{k=1}^n C_k F_k(t). \quad (1.6)$$

2. Panašumo teorema. Jeigu $f(t) \div F(p)$ ir $\lambda > 0$, tai

$$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (1.7)$$

3. Postūmio teorema. Jeigu α yra bet koks kompleksinis skaičius ir $F(p) \div f(t)$, tai

$$F(p - \alpha) \div e^{\alpha t} f(t). \quad (1.8)$$

4. Vėlavimo teorema. Jeigu $\tau > 0$ ir $f(t) \div F(p)$, tai

$$f(t - \tau) \div e^{-p\tau} F(p). \quad (1.9)$$

Pirmavaizdžio vėlavimas laiku τ atitinka vaizdo dauginimą iš $e^{-p\tau}$.

5. Pirmavaizdžio diferencijavimo teorema. Jeigu $f(t)$ yra tolydi, dalimis diferencijuojama funkcija, kai $t > 0$, be to, $f(t)$ ir $f'(t)$ yra pirmavaizdžiai ir $f(t) \div F(p)$, tai:

$$f'(t) \div pF(p) - f(0); \quad (1.10)$$

čia $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ - pradinė pirmavaizdžio reikšmė.

6. Vaizdo diferencijavimo teorema. Jeigu $F(p) \div f(t)$, tai

$$F'(p) \div -tf(t). \quad (1.11)$$

Vaizdo diferencijavimas atitinka pirmavaizdžio dauginimą iš $(-t)$.

7. Pradinės reikšmės teorema. Jeigu $f(t)$ ir $f'(t)$ yra pirmavaizdžiai ir $f(t) \div F(p)$, tai

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(0). \quad (1.12)$$

8. Ribinės reikšmės teorema. Jeigu $f(t) \div F(p)$ ir $f'(t)$ yra pirmavaizdis ir egzistuoja riba $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, tai:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (1.13)$$

Funkciją

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (1.14)$$

vadiname dviejų funkcijų $f_1(\tau)$ ir $f_2(\tau)$ sąsūka ir žymime $f_1(\tau) * f_2(\tau)$.

Sąsūkos operacija yra komutatyvi.

9. Vaizdų sandaugos teorema. Jeigu $F_1(p) \div f_1(t)$ ir $F_2(p) \div f_2(t)$, tai

$$F_1(p)F_2(p) \div \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (1.15)$$

Delta funkcijos $\delta(t)$ vaizdas gali būti gaunamas iš funkcijos

$\delta_h(t) = \frac{1}{h} [1(t) - 1(t - h)]$ vaizdo. Pritaikius vėlavimo teoremą turime:

$$\delta_h(t) \div \frac{1 - e^{-ph}}{ph}.$$

Perėję prie ribos, kai $h \rightarrow 0$, gauname

$$\delta(t) \div \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph} = 1.$$

$\delta(t)$ funkcijai galioja pagrindinės Laplaso transformacijos savybės. Pavyzdžiui, vėlavimo teorema:

$$\delta(t - \tau) \div e^{-p\tau},$$

vaizdų sandaugos teorema:

$$F(p) \cdot 1 \div \int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t).$$

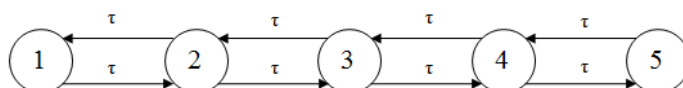
1.4. PROGRAMINĖ ĮRANGA

Skaičiavimai atlikti naudojantis MathCAD 15 programa. MathCAD – MathSoft programa, skirta matematiniams skaičiavimams atlikti. Ši programa panaši į skaičiuoklę, turi intuityvią vartotojui draugišką sąsają. Jos galimybės apima įvairias matematikos šakas: kombinatoriką, tikimybių teoriją, algebrą, geometriją ir t. t.

2. TIRIAMOJI DALIS IR REZULTATAI

Ryšio tinklo komutacijos centruose esantys taktiniai generatoriai gali būti sinchronizuojami, panaudojant tarpusavio sinchronizaciją. Tokioje sistemoje visų generatorių nusistovėję dažniai bus lygūs. Nusistovėjęs generatorių dažnis priklauso nuo visų generatorių dažnių ir atstumų tarp generatorių. Tokioje sistemoje generatorių dažnių valdymo signalai proporcingi generatorių virpesių fazių skirtumams.

Nagrinėsime tarpusavio sinchronizacijos sistemą, sudarytą iš penkių į grandinę sujungtų generatorių, su vienodais vėlavimais τ . 2.1 pav. pateikta šios sistemos schema, vaizduojanti taktinius generatorius (skrituliukai) ir ryšio linijas, kuriomis perduodami sinchronizacijos signalai (orientuotos tiesės atkarpos).

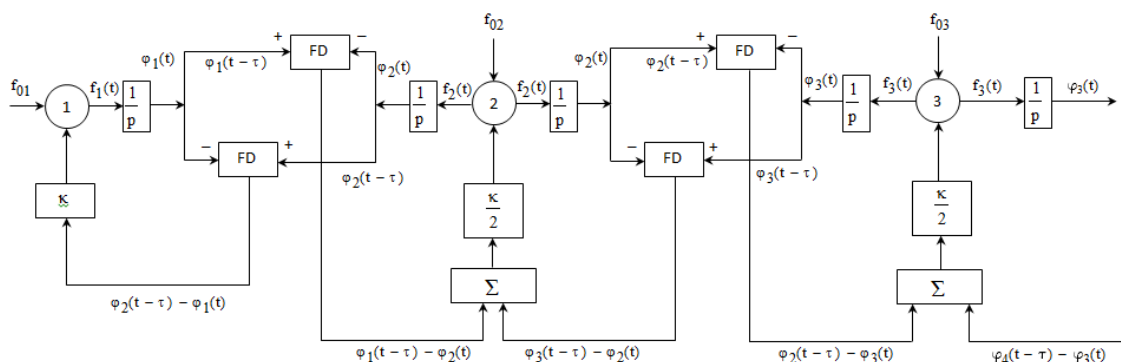


2.1 pav. Tarpusavio sinchronizacijos sistemos schema

Sudarysime tarpusavio sinchronizacijos sistemos matematinį modelį t.y. diferencialinių lygčių su vėluojančiu argumentu sistemą, kuri aprašo jos darbą pereinamojo proceso metu. Remdamiesi surastu sprendiniu gausime tarpusavio sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų tikslias analizes išraiškas bei ištersime sistemos pereinamuosius procesus.

2.1. TARPUSAVIO SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS MATEMATINIO MODELIO SUDARYMAS

2.2 pav. pateikta sinchronizacijos sistemos struktūrinė schema:



2.2 pav. Tarpusavio sinchronizacijos sistemos struktūrinė schema

Remdamiesi šia struktūrine sistemos schema, užrašome i – tojo generatoriaus ($i = \overline{1,5}$) valdymo lygtį $f_i(t) = f_{0i} + \Delta f_i(t)$, $i = \overline{1,5}$. Įvertinę valdymo signalų $\Delta f_i(t)$ ($i = \overline{1,5}$) išraiškas, rašome:

$$\begin{cases} f_1(t) = f_{01} + \Delta f_1(t) = f_{01} + \kappa[\varphi_2(t-\tau) - \varphi_1(t)], \\ f_2(t) = f_{02} + \Delta f_2(t) = f_{02} + \frac{\kappa}{2}[\varphi_1(t-\tau) - \varphi_2(t)] + \frac{\kappa}{2}[\varphi_3(t-\tau) - \varphi_2(t)] \\ f_3(t) = f_{03} + \Delta f_3(t) = f_{03} + \frac{\kappa}{2}[\varphi_2(t-\tau) - \varphi_3(t)] + \frac{\kappa}{2}[\varphi_4(t-\tau) - \varphi_3(t)], \\ f_4(t) = f_{04} + \Delta f_4(t) = f_{04} + \frac{\kappa}{2}[\varphi_3(t-\tau) - \varphi_4(t)] + \frac{\kappa}{2}[\varphi_5(t-\tau) - \varphi_4(t)], \\ f_5(t) = f_{05} + \Delta f_{05}(t) = f_5 + \kappa[\varphi_4(t-\tau) - \varphi_5(t)]. \end{cases} \quad (2.1)$$

Pagal gautąsias valdymo lygtis (žr. (2.1)), įvertinę ryšį tarp i – tojo generatoriaus virpesio fazės $\varphi_i(t)$ ir jo dažnio $f_i(t)$ ($\varphi'_i(t) = f_i(t)$), gauname tokią diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \varphi'_1(t) = f_{01} + \kappa[\varphi_2(t-\tau) - \varphi_1(t)], \\ \varphi'_2(t) = f_{02} + \frac{\kappa}{2}[\varphi_1(t-\tau) - \varphi_2(t)] + \frac{\kappa}{2}[\varphi_3(t-\tau) - \varphi_2(t)], \\ \varphi'_3(t) = f_{03} + \frac{\kappa}{2}[\varphi_2(t-\tau) - \varphi_3(t)] + \frac{\kappa}{2}[\varphi_4(t-\tau) - \varphi_3(t)], \\ \varphi'_4(t) = f_{04} + \frac{\kappa}{2}[\varphi_3(t-\tau) - \varphi_4(t)] + \frac{\kappa}{2}[\varphi_5(t-\tau) - \varphi_4(t)], \\ \varphi'_5(t) = f_{05} + \Delta f_{05}(t) = f_5 + \kappa[\varphi_4(t-\tau) - \varphi_5(t)]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Pažymėkime $x_i(t) = \varphi_i(t)1(t)$, $i = \overline{1,5}$ (čia $1(t)$ – Hevisaido vienetinė funkcija, $x_i(t)$ – apibendrintoji funkcija, D – apibendrinto diferencijavimo operatorius) ir raskime šios funkcijos apibendrintą išvestinę $Dx_i(t)$:

$$Dx_i(t) = D[\varphi_i(t)1(t)] = \varphi'_i(t)1(t) + \varphi_i(t)D1(t) = \varphi'_i(t)1(t) + \varphi_i(t)\delta(t) = \varphi'_i(t)1(t) + \varphi_i(0)\delta(t);$$

čia $\varphi_i(0) = \varphi_{0i}$ – i – tojo generatoriaus virpesio pradinė fazė, $\delta(t)$ – delta funkcija. Gauname:

$$Dx_i(t) - \varphi_i(0)\delta(t) = \varphi'_i(t)1(t). \quad (2.3)$$

Matematinio modelio pradines sąlygas užrašysime taip:

$$\varphi_i(t) = \int_0^t f_i(\tau)d\tau + \varphi_i(0) \Rightarrow \int_0^t f_{0i}d\tau + \varphi_i(0) = f_{0i}t + \varphi_{0i}, \quad t \leq 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

Pradinių sąlygų fizikinė prasmė: laiko momentu $t = 0$ visiems taktiniams generatoriams įjungiamas valdymas; kai $t \leq 0$, generatorių dažniai $f_i(t) = f_{0i}$, o fazės – $\varphi_i(t) = f_{0i}t + \varphi_{0i}$.

(2.2) lygčių sistemą perrašysime, įvesdami apibendrintas funkcijas $x_i(t)$, $i = \overline{1,5}$ ir apibendrinto diferencijavimo operatorių D .

Padauginę (2.2) lygybės abi puses iš vienetinės Hevisaido funkcijos ir panaudoję (2.3), turime:

$$Dx_i(t) - \varphi_i(0)\delta(t) = f_{0i}(t)1(t) + \Delta f_i(t)1(t), i = \overline{1,5}.$$

Atlikę pertvarkymus, gauname diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} Dx_1(t) = \kappa[\varphi_2(t - \tau) - \varphi_1(t)] + z_1(t), \\ Dx_2(t) = \frac{\kappa}{2}[\varphi_1(t - \tau) - \varphi_2(t)] + \frac{\kappa}{2}[\varphi_3(t - \tau) - \varphi_2(t)] + z_2(t), \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{2}[\varphi_2(t - \tau) - \varphi_3(t)] + \frac{\kappa}{2}[\varphi_4(t - \tau) - \varphi_3(t)] + z_3(t), \\ Dx_4(t) = \frac{\kappa}{2}[\varphi_3(t - \tau) - \varphi_4(t)] + \frac{\kappa}{2}[\varphi_5(t - \tau) - \varphi_4(t)] + z_4(t), \\ Dx_5(t) = \kappa[\varphi_4(t - \tau) - \varphi_5(t)] + z_5(t); \end{cases} \quad (2.4)$$

čia

$$z_1(t) = f_{01}1(t) + \varphi_{01}\delta(t) + \kappa[f_{02}t1(t) - f_{02}\tau1(t) + \varphi_{02}1(t) - f_{02}(t - \tau)1(t - \tau) - \varphi_{02}1(t - \tau)],$$

$$\begin{aligned} z_2(t) &= f_{02}1(t) + \varphi_{02}\delta(t) + \frac{\kappa}{2}[f_{01}t1(t) - f_{01}\tau1(t) + \varphi_{01}1(t) - f_{01}(t - \tau)1(t - \tau) - \varphi_{01}1(t - \tau)] + \\ &+ \frac{\kappa}{2}[f_{03}t1(t) - f_{03}\tau1(t) + \varphi_{03}1(t) - f_{03}(t - \tau)1(t - \tau) - \varphi_{03}1(t - \tau)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3(t) &= f_{03}1(t) + \varphi_{03}\delta(t) + \frac{\kappa}{2}[f_{02}t1(t) - f_{02}\tau1(t) + \varphi_{02}1(t) - f_{02}(t - \tau)1(t - \tau) - \varphi_{02}1(t - \tau)] + \\ &+ \frac{\kappa}{2}[f_{04}t1(t) - f_{04}\tau1(t) + \varphi_{04}1(t) - f_{04}(t - \tau)1(t - \tau) - \varphi_{04}1(t - \tau)], \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} z_4(t) &= f_{04}1(t) + \varphi_{04}\delta(t) + \frac{\kappa}{2}[f_{03}t1(t) - f_{03}\tau1(t) + \varphi_{03}1(t) - f_{03}(t - \tau)1(t - \tau) - \varphi_{03}1(t - \tau)] + \\ &+ \frac{\kappa}{2}[f_{05}t1(t) - f_{05}\tau1(t) + \varphi_{05}1(t) - f_{05}(t - \tau)1(t - \tau) - \varphi_{05}1(t - \tau)], \end{aligned}$$

$$z_5(t) = f_{05}1(t) + \varphi_{05}\delta(t) + \kappa[f_{04}t1(t) - f_{04}\tau1(t) + \varphi_{04}1(t) - f_{04}(t - \tau)1(t - \tau) - \varphi_{04}1(t - \tau)].$$

(2.4) diferencialinių lygčių su vėluojančiu argumentu sistema yra tiriamos tarpusavio sinchronizacijos sistemos matematinis modelis.

2.2. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES, APRAŠANČIOS TARPUSAVIO SINCHRONIZACIJOS SISTEMĄ, SPRENDIMAS

Perrašome (2.4) diferencialinių lygčių sistemą matriciniu pavidalu:

$$Dx(t) = B_1x(t) + B_2x(t - \tau) + z(t); \quad (2.6)$$

čia

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{pmatrix}, \quad x(t - \tau) = \begin{pmatrix} x_1(t - \tau) \\ x_2(t - \tau) \\ x_3(t - \tau) \\ x_4(t - \tau) \\ x_5(t - \tau) \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \\ z_5(t) \end{pmatrix}.$$

Koeficientų matricos B_1 ir B_2 turi šiuos pavidalus:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa \end{pmatrix} = -\kappa E, \text{ čia } E - \text{vienetinė penktos eilės matrica,}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{2} & 0 & \frac{\kappa}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa}{2} & 0 & \frac{\kappa}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa}{2} & 0 & \frac{\kappa}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{2} B, \text{ čia } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Matrica B aprašo nagrinėjamos tarpusavio sinchronizacijos sistemos vidinių ryšių struktūrą.

2.2.1. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDIMAS, KAI VĖLAVIMAI VIENODI

Nagrinėsime (2.6) matricinę diferencialinę lygtį su vienu vėlavimu. Šią matricinę diferencialinę lygtį sprendžiame „žingsnių“ metodu [7]. Remiantis šiuo metodu intervalą $0 \leq t < +\infty$ dalijame į vienodo ilgio τ dalis. Kiekviename intervale $k\tau \leq t < (k+1)\tau$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) (2.6) matricinę diferencialinę lygtį sprendžiame atskirai, kaip paprastą

diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento. k – tajame intervale gautas sprendinys yra pradinė sąlyga sprendžiant lygtį $(k+1)$ – jame intervale. Ieškodami sprendinio kiekviename intervale, naudosisime Laplaso transformaciją.

(2.6) diferencialinės lygties sprendinį $x(t)$ k – tajame daliniame intervale pažymime $x_k(t)$:

$$x(t) = x_k(t), \quad k\tau \leq t < (k+1)\tau, \quad k = -1, 0, 1, 2, \dots; \quad (2.8)$$

čia $x_{-1}(t) = 0, \quad t \in R$.

Pradžioje sprendžiame (2.6) matricinę diferencialinę lygtį intervale $[0, \tau)$. Šiame intervale sprendinį $x(t)$ pažymime $x_0(t)$, o intervale $[-\tau, 0)$ sprendinį $x(t)$ pažymime $x_{-1}(t)$.

(2.6) matricinę diferencialinę lygtį perrašome taip:

$$Dx_0(t) = B_1 x_0(t) + B_2 x_{-1}(t - \tau) + z(t). \quad (2.9)$$

Kadangi $x_{-1}(t) = 0$, kai $-\tau \leq t < 0$ ir $x_{-1}(t - \tau) = 0$, kai $0 \leq t < \tau$ ($-\tau \leq t - \tau < 0$), gauname:

$$Dx_0(t) = B_1 x_0(t) + z(t). \quad (2.10)$$

Šią lygtį be vėluojančio argumento sprendžiame operaciniu metodu (naudojame Laplaso transformaciją):

$$pX_0(p) = B_1 X_0(p) + Z(p),$$

$$pX_0(p) - B_1 X_0(p) = Z(p),$$

$$(pE - B_1)X_0(p) = Z(p);$$

čia $X_0(p) \div x_0(t)$, $Z(p) \div z(t)$, \div operatorinė lygybė (simbolis, siejantis pirmavaizdį ir jį atitinkantį vaizdą).

Užrašome operatorinį sprendinį:

$$X_0(p) = (pE - B_1)^{-1} Z(p).$$

Pažymime:

$$A = A(p) = pE - B_1, \quad C_1 = C_1(p) = (pE - B_1)^{-1} = A^{-1}, \quad (2.11)$$

$$A(p) \div a(t), \quad C_1(p) \div c_1(t).$$

Remiantis vaizdų sandaugos teorema, rašome:

$$X_0(p) = C_1(p)Z(p) = L\{c_1(t)\}L\{z(t)\} \div \left[\int_0^t c_1(\tau)z(t-\tau)d\tau \right] 1(t) = x_0(t). \quad (2.12)$$

čia L – Laplaso transformacijos simbolis (operatorius).

Gautasis sprendinys $x_0(t)$ atitinka šias sąlygas:

$$x_0(t) = x(t), \quad 0 \leq t < \tau,$$

$$x_0(t) = x_{-1}(t), \quad -\tau \leq t < 0.$$

Ieškome (2.6) matricinės diferencialinės lygties sprendinio intervale $[\tau, 2\tau)$. Sprendinį $x(t)$ šiame daliniame intervale pažymime $x_1(t)$, o intervale $[0, \tau)$ – $x_0(t)$ (žr. 2.8). Įvertinę tai, (2.6) matricinę diferencialinę lygtį parašome taip:

$$Dx_1(t) = B_1x_1(t) + B_2x_0(t - \tau) + z(t). \quad (2.13)$$

Kadangi $x_0(t)$ ($t < \tau$) yra žinoma funkcija (žr. 2.12), tai (2.13) lygtis yra matricinė diferencialinė lygtis be vėluojančio argumento. Šiai lygčiai parašome ją atitinkančią operatorinę lygtį ir operatorinį sprendinį:

$$pX_1(p) = B_1X_1(p) + B_2X_0(p)e^{-p\tau} + Z(p),$$

$$X_1(p) = (pE - B_1)^{-1}B_2X_0(p)e^{-p\tau} + (pE - B_1)^{-1}Z(p),$$

$$X_1(p) = A^{-1}B_2X_0(p)e^{-p\tau} + A^{-1}Z(p). \quad (2.14)$$

$$\text{Pažymime } C_2 = C_2(p) = A^{-1}B_2.$$

Panaudoję Laplaso transformacijos simbolį L bei vaizdų sandaugos teoremą, ir įvertinę (2.12), gauname:

$$\begin{aligned} X_1(p) &= C_2(p)X_0(p)e^{-p\tau} + X_0(p) = L\{c_2(t)\}L\{x_0(t)\}e^{-p\tau} + X_0(p) \div \\ &\div \left[\int_0^{t-\tau} c_2(\Theta) \cdot x_0(t - \tau - \Theta) d\Theta \right] 1(t - \tau) + x_0(t) = x_1(t). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Gautas sprendinys atitinka sąlygas:

$$x_1(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \leq \tau, \\ \neq x_0(t), & t > \tau, \end{cases}$$

ir

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), & t \leq 2\tau, \\ \neq x(t), & t > 2\tau. \end{cases}$$

Tęsdami (2.6) matricinės diferencialinės lygties sprendimą tuo pačiu būdu, randame:

$$x_k(t) = \begin{cases} x_{k-1}(t), & t \leq k\tau, \\ \neq x_{k-1}(t), & t > k\tau, \end{cases}$$

$$x_k(t) = \begin{cases} x(t), & t \leq (k+1)\tau, \\ \neq x(t), & t > (k+1)\tau, k = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

Rasime sprendinio $x(t)$ analizinę išraišką. Pažymime:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t) &= x_0(t) - x_{-1}(t) = x_0(t), \\ \varepsilon_1(t) &= x_1(t) - x_0(t), \\ \varepsilon_2(t) &= x_2(t) - x_1(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon_k(t) &= x_k(t) - x_{k-1}(t), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{2.16}$$

ir

$$\Theta_L(t) = \sum_{k=0}^L \varepsilon_k(t) = \varepsilon_0(t) + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) + \dots + \varepsilon_L(t); \quad 0 \leq t < (L+1)\tau, \quad L = 0,1,2,\dots \tag{2.17}$$

Ivertinę (2.16) ir (2.17) išraiškas, randame:

$$\Theta_L(t) = x_0(t) + [x_1(t) - x_0(t)] + [x_2(t) - x_1(t)] + \dots + [x_L(t) - x_{L-1}(t)] = x_L(t), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau.$$

Vektorius $x_L(t)$ atitinka sąlygas:

$$x_L(t) = \begin{cases} x(t), & t \leq (L+1)\tau, \\ \neq x(t), & t > (L+1)\tau. \end{cases}$$

Taigi:

$$\Theta_L(t) = \begin{cases} x(t), & t < (L+1)\tau, \\ \neq x(t), & t \geq (L+1)\tau. \end{cases}$$

Remdamiesi (2.16) ir (2.17) pažymėjimais, sprendinį užrašome taip:

$$x(t) = \Theta_L(t) = \sum_{k=0}^L \varepsilon_k(t), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau.$$

Šios lygbės dešiniajai pusei pritaikome Laplaso transformaciją:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \int_0^{\infty} \varepsilon_k(x) e^{-px} dx, \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \tag{2.18}$$

Randame funkcijos $\varepsilon_k(t)$ Laplaso transformaciją:

$$L\{\varepsilon_k(t)\} = \int_0^{\infty} \varepsilon_k(x) e^{-px} dx. \quad (2.19)$$

Sudarome diferencialinę lygtį vektoriaus $\varepsilon_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) atžvilgiu. Kadangi

$$\varepsilon_k(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t)$$

ir

$$Dx_k(t) = B_1 x_k(t) + B_2 x_{k-1}(t - \tau) + z(t),$$

$$Dx_{k-1}(t) = B_1 x_{k-1}(t) + B_2 x_{k-2}(t - \tau) + z(t),$$

atėmę paskutiniąją lygtį iš prieš paskutinės, gauname:

$$D\varepsilon_k(t) = B_1 \varepsilon_k(t) + B_2 \varepsilon_{k-1}(t - \tau). \quad (2.20)$$

Ieškome operatorinės lygties, atitinkančios (2.20) diferencialinę lygtį, taikydami abiem (2.20) lygties pusėms Laplaso transformaciją:

$$\int_0^{\infty} [D\varepsilon_k(t) - B_1 \varepsilon_k(t)] e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} B_2 \varepsilon_{k-1}(t - \tau) e^{-pt} dt.$$

Tvarkydami toliau, gauname:

$$pL\{\varepsilon_k(t)\} - B_1 \{\varepsilon_k(t)\} = B_2 \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t - \tau) e^{-pt} dt. \quad (2.21)$$

Pertvarkome dešinėsios pusės integralą:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t - \tau) e^{-pt} dt &= \left\{ \begin{array}{ll} t - \tau = 0 & dt = d\Theta \\ t = 0 & \Theta = -\tau \\ t = \infty & \Theta = \infty \end{array} \right\} = \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\Theta) e^{-p(t+\Theta)} dt = \\ &= e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\Theta) e^{-p\Theta} d\Theta = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pasinaudodami (2.19) ir (2.22) išraiškėmis, (2.21) perrašome taip:

$$(pE - B_1) \cdot \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = B_2 e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt.$$

Kadangi $A = pE - B_1$, tai

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = A^{-1} \cdot B_2 \cdot e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt.$$

Įvertinę funkcijos $\varepsilon_k(t)$ savybes ($\varepsilon_k(t) = 0, t < k\tau$ ir $\varepsilon_{k-1}(t) = 0, t < (k-1)\tau$), išplaukiančias iš (2.16), galime rašyti:

$$\varepsilon_{k-1}(t) = 0, t < 0, k = 1, 2, 3, \dots$$

ir

$$\int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt.$$

Pažymime:

$$M = A^{-1} B_2 e^{-p\tau},$$

gauname rekurentinę formulę:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = M \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt, k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.23)$$

Žinome, kad $\varepsilon_0(t) = x_0(t)$ (žr. 2.16). Šiai lygybei pritaikome Laplaso transformaciją:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_0(t) e^{-pt} dt = X_0(p).$$

Skirtingiems $k = 1, 2, 3, \dots$ iš (2.23) gauname:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varepsilon_1(t) e^{-pt} dt &= M \int_0^{\infty} \varepsilon_0(t) e^{-pt} dt = M X_0(p), \\ \int_0^{\infty} \varepsilon_2(t) e^{-pt} dt &= M \int_0^{\infty} \varepsilon_1(t) e^{-pt} dt = M^2 X_0(p), \\ &\dots\dots\dots \\ \int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt &= M^k X_0(p); k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

Iš (2.18), įvertinę (2.24), randame:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L M^k X_0(p), 0 \leq t < (L+1)\tau$$

arba, panaudoję pažymėjimą $M = A^{-1} B_2 e^{-p\tau}$, turime:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L (A^{-1} B_2 e^{-p\tau})^k X_0(p), 0 \leq t < (L+1)\tau.$$

Kadangi $X_0(p) = A^{-1} Z(p)$, tai (2.6) matricinės diferencialinės lygties sprendinys yra toks:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L (A^{-1} B_2 e^{-p\tau})^k A^{-1} Z(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau; \quad (2.25)$$

čia matrica A apibrėžta (2.11) išraiška, $L = 0, 1, 2, 3, \dots$

Matricos $A = A(p)$ ir $Z(p)$ priklauso nuo kompleksinio kintamojo p , todėl (2.25) išraiškos atvirkštinė laplaso transformacija priklauso nuo konkrečių šių matricų išraiškų. Nagrinėjame atvejį kai, $B_1 = -\kappa E$, $A = pE - B_1 = (p + \kappa)E$, $A^{-1} = \frac{1}{p + \kappa} E$, B_2 – skaitinė matrica, $\kappa \in R$.

Įvertinę šiuos pažymėjimus, (2.25) užrašome taip:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \frac{e^{-pk\tau}}{(p + \kappa)^{k+1}} B_2^k Z(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau$$

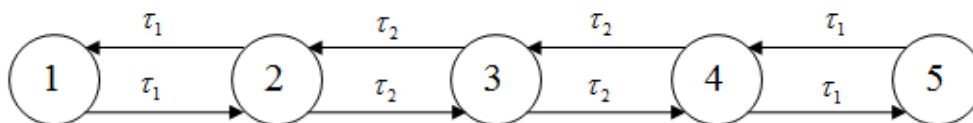
arba, pagal (2.7):

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \cdot \frac{e^{-pk\tau}}{(p + \kappa)^{k+1}} B^k Z(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.26)$$

Gautą (2.26) sprendinį panaudosime pereinamosioms funkcijoms $h_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, 5}$ rasti.

2.2.2. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDIMAS, KAI VĖLAVIMAI SKIRTINGI

Tarkime, kad nagrinėjamoje sistemoje yra ne vienas, o du skirtingi vėlavimai τ_1 ir τ_2 , $\tau_1 < \tau_2$. 2.3 pav. pateikta šios tarpusavio sinchronizacijos sistemos schema:



2.3 pav. Tarpusavio sinchronizacijos sistemos schema

Analogiškai kaip 2.1. skyrelyje, sudarome tarpusavio sinchronizacijos sistemos matematinį modelį, esant dviem skirtingiems vėlavimams. Pagal (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) sudarome sinchronizacijos sistemos matematinį modelį:

$$\begin{cases} Dx_1(t) = \kappa[\varphi_2(t - \tau_1) - \varphi_1(t)] + z_1(t), \\ Dx_2(t) = \frac{\kappa}{2}[\varphi_1(t - \tau_1) - \varphi_2(t)] + \frac{\kappa}{2}[\varphi_3(t - \tau_2) - \varphi_2(t)] + z_2(t), \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{2}[\varphi_2(t - \tau_2) - \varphi_3(t)] + \frac{\kappa}{2}[\varphi_4(t - \tau_2) - \varphi_3(t)] + z_3(t), \\ Dx_4(t) = \frac{\kappa}{2}[\varphi_3(t - \tau_2) - \varphi_4(t)] + \frac{\kappa}{2}[\varphi_5(t - \tau_1) - \varphi_4(t)] + z_4(t), \\ Dx_5(t) = \kappa[\varphi_4(t - \tau_1) - \varphi_5(t)] + z_5(t). \end{cases} \quad (2.27)$$

Perrašome (2.27) diferencialinių lygčių sistemą matriciniu pavidalu:

$$Dx(t) = B_1x(t) + B_2x(t - \tau_1) + B_3x(t - \tau_2) + z(t), \quad (2.28)$$

$$\text{čia } B_2 = \frac{\kappa}{2}B, \quad B_3 = \frac{\kappa}{2}C,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kiti pažymėjimai tokie pat, kaip 2.2. skyrelyje.

(2.28) matricinę diferencialinę lygtį sprendžiame žingsnių metodu [7]. Kadangi $\tau_1 < \tau_2$, intervalą $0 \leq t < +\infty$ dalijame į vienodo ilgio τ_1 dalis. Kiekviename intervale $k\tau_1 \leq t < (k+1)\tau_1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) (2.28) matricinę diferencialinę lygtį sprendžiame atskirai, kaip paprastą diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento. k – tajame intervale gautas sprendinys yra pradinė sąlyga sprendžiant lygtį $(k+1)$ – jame intervale. Ieškodami sprendinio kiekviename intervale naudosisime Laplaso transformaciją.

(2.28) diferencialinės lygties sprendinį $x(t)$ k – tajame daliniame intervale pažymime $x_k(t)$:

$$x(t) = x_k(t), \quad k\tau_1 \leq t < (k+1)\tau_1, \quad k = -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Pradžioje sprendžiame (2.28) matricinę diferencialinę lygtį intervale $[0, \tau_1)$.

Panaudojame (2.29) ir lygybę:

$$x_{-1}(t) = x_{-2}(t), \quad t < -\tau_1.$$

(2.28) matricinę diferencialinę lygtį perrašome taip:

$$Dx_0(t) = B_1x_0(t) + B_2x_{-1}(t - \tau_1) + B_3x_{-1}(t - \tau_2) + z(t). \quad (2.30)$$

Kadangi $x_{-1}(t) = 0$, kai $t < 0$, tai $x_{-1}(t - \tau_1) = 0$ ir $x_{-1}(t - \tau_2) = 0$, kai $0 \leq t < \tau_1$.

Įvertinę tai, (2.30) lygtį užrašome taip:

$$Dx_0(t) = B_1 x_0(t) + z(t). \quad (2.31)$$

Šią lygtį be vėluojančio argumento sprendžiame operaciniu metodu (naudojame Laplaso transformaciją). Pažymime $\bar{X}_0(p) \doteq x_0(t)$ ir $\bar{Z}(p) \doteq z(t)$, užrašome operatorinę lygtį

$$p\bar{X}_0(p) = B_1 \bar{X}_0(p) + \bar{Z}(p)$$

ir operatorinį sprendinį

$$\bar{X}_0(p) = (pE - B_1)^{-1} \bar{Z}(p) = \frac{\bar{Z}(p)}{p + \kappa}. \quad (2.32)$$

Randame šį vaizdą atitinkantį pirmavaizdį:

$$\bar{X}_0(p) = \frac{\bar{Z}(p)}{p + \kappa} = L\{Z(t)\}L\{e^{-\kappa t}\} \doteq \left[\int_0^t Z(\tau) e^{-\kappa(t-\tau)} d\tau \right] 1(t) = x_0(t).$$

Gautasis sprendinys $x_0(t)$ atitinka šias sąlygas:

$$x_0(t) = x(t), \quad 0 \leq t < \tau_1,$$

$$x_0(t) = x_{-1}(t), \quad t < \tau_1.$$

Ieškome (2.6) matricinės diferencialinės lygties sprendinio intervale $[\tau_1, 2\tau_1)$. Sprendinį $x(t)$ šiame daliniame intervale pažymime $x_1(t)$. Pagal (2.29) ir

$$x_0(t) = x_{-1}(t), \quad t < \tau_1,$$

(2.29) matricinę diferencialinę lygtį parašome taip:

$$Dx_1(t) = B_1 x_1(t) + B_2 x_0(t - \tau_1) + B_3 x_0(t - \tau_2) + z(t). \quad (2.33)$$

Kadangi $x_0(t)$ ($t < \tau_1$) yra žinoma funkcija (surasta pirmajame žingsnyje), tai (2.33) lygtis yra matricinė diferencialinė lygtis be vėluojančio argumento. Šiai lygčiai parašome ją atitinkančią operatorinę lygtį ir operatorinį sprendinį:

$$\begin{aligned} p\bar{X}_1(p) &= B_1 \bar{X}_1(p) + B_2 \bar{X}_0(p) e^{-p\tau_1} + B_3 \bar{X}_0(p) e^{-p\tau_2} + Z(p), \\ \bar{X}_1(p) &= (pE - B_1)^{-1} (B_2 \bar{X}_0(p) e^{-p\tau_1} + B_3 \bar{X}_0(p) e^{-p\tau_2} + Z(p)) = \\ &= B_2 \frac{\bar{X}_0(p)}{p + \kappa} e^{-p\tau_1} + B_3 \frac{\bar{X}_0(p)}{p + \kappa} e^{-p\tau_2} + \frac{\bar{Z}(p)}{p + \kappa}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Remdamiesi (2.32), užrašome:

$$\bar{X}_1(p) = B_2 L\{x_0(t)\} \cdot L\{e^{-pt}\} e^{-p\tau_1} + B_3 L\{x_0(t)\} \cdot L\{e^{-pt}\} e^{-p\tau_2} + \bar{X}_0(p).$$

Panaudoję vaizdų sandaugos teoremą, ir įvertinę (2.12), gauname:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1(p) &= B_2 L\left\{\int_0^t x_0(\Theta) e^{-\kappa(t-\Theta)} d\Theta\right\} e^{-p\tau_1} + B_3 L\left\{\int_0^t x_0(\Theta) e^{-\kappa(t-\Theta)} d\Theta\right\} e^{-p\tau_2} + \bar{X}_0(p) \div \\ &\div B_2 \left[\int_0^{t-\tau_1} x_0(\Theta) e^{-\kappa(t-\tau_1-\Theta)} d\Theta\right] \cdot 1(t-\tau_1) + B_3 \left[\int_0^{t-\tau_2} x_0(\Theta) e^{-\kappa(t-\tau_2-\Theta)} d\Theta\right] \cdot 1(t-\tau_2) + x_0(t) = x_1(t). \end{aligned}$$

Gautas sprendinys atitinka sąlygas:

$$x_1(t) = x_0(t), \quad t \leq \tau_1$$

ir

$$x_1(t) = x(t), \quad t < 2\tau_1.$$

Tęsdami (2.28) matricinės diferencialinės lygties sprendimą tuo pačiu būdu, randame:

$$x_k(t) = x_{k-1}(t), \quad t < k\tau_1, \quad (2.35)$$

$$x_k(t) = x(t), \quad t < (k+1)\tau_1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

Rasime sprendinio $x(t)$ analizinę išraišką. Remdamiesi (2.16) – (2.18) išraiškomis, užrašome:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \int_0^{\infty} \varepsilon_k(x) e^{-px} dx, \quad 0 \leq t < (L+1)\tau_1, \quad (2.37)$$

čia $\varepsilon_k(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t)$.

Rasime funkcijos $\varepsilon_k(t)$ Laplaso integralą $\int_0^{\infty} \varepsilon_k(x) e^{-px} dx$. Sudarome funkcijos $\varepsilon_k(t)$

($k = 0, 1, 2, \dots$) atžvilgiu diferencialinę lygtį.

Kadangi

$$Dx_s(t) = B_1 x_s(t) + B_2 x_{s-1}(t - \tau_1) + B_3 x_{s-1}(t - \tau_2) + z(t), \quad s = k, k-1,$$

tai

$$D\varepsilon_k(t) = B_1 \varepsilon_k(t) + B_2 \varepsilon_{k-1}(t - \tau_1) + B_3 \varepsilon_{k-1}(t - \tau_2).$$

Šią diferencialinę lygtį atitinka operatorinė lygtis

$$\int_0^{\infty} [D\varepsilon_k(t) - B_1 \varepsilon_k(t)] p^{-pt} dt = \int_0^{\infty} B_2 \varepsilon_{k-1}(t - \tau_1) e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} B_3 \varepsilon_{k-1}(t - \tau_2) e^{-pt} dt,$$

kurią parašome taip:

$$L\{\varepsilon_k(t)\} = (pE - B_1)^{-1} \left(B_2 \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t - \tau_1) e^{-pt} dt + B_3 \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t - \tau_2) e^{-pt} dt \right).$$

Pažymėję $A = pE - B_1$ ir pakeitę integravimo kintamąjį ($t - \tau_1 = \Theta, t - \tau_2 = \Theta, dt = d\Theta$), gauname:

$$L\{\varepsilon_k(t)\} = A^{-1} B_2 e^{-p\tau_1} \int_{-\tau_1}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\Theta) e^{-p\Theta} d\Theta + A^{-1} B_3 e^{-p\tau_2} \int_{-\tau_2}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\Theta) e^{-p\Theta} d\Theta.$$

Įvertinę funkcijos $\varepsilon_k(t)$ savybę

$$\varepsilon_{k-1}(t) = 0, \quad t < 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

išplaukiančią iš jos apibrėžimo (žr. (2.16), (2.17)), turime:

$$\int_{-\tau_1}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\Theta) e^{-p\Theta} d\Theta = \int_{-\tau_2}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\Theta) e^{-p\Theta} d\Theta = \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\Theta) e^{-p\Theta} d\Theta, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Pažymime:

$$M_1 = A^{-1} B_2 e^{-p\tau_1} \quad \text{ir} \quad M_2 = A^{-1} B_3 e^{-p\tau_2}, \quad \text{užrašome}$$

$$\begin{aligned} L\{\varepsilon_k(t)\} &= \int_0^{\infty} \varepsilon_k(\Theta) e^{-p\Theta} d\Theta = M_1 \int_{-\tau_1}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\Theta) e^{-p\Theta} d\Theta + M_2 \int_{-\tau_2}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\Theta) e^{-p\Theta} d\Theta = \\ &= (M_1 + M_2) \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\Theta) e^{-p\Theta} d\Theta. \end{aligned}$$

Gauname rekurentinę formulę:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(\Theta) e^{-p\Theta} d\Theta = (M_1 + M_2) \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\Theta) e^{-p\Theta} d\Theta. \quad (2.38)$$

Žinome, kad $\int_0^{\infty} \varepsilon_0(t) e^{-pt} dt = \overline{X}_0(p)$ (žr. 2.16). Skirtingiems $k = 1, 2, 3, \dots$ iš (2.38)

gauname:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_1(t) e^{-pt} dt = (M_1 + M_2) \int_0^{\infty} \varepsilon_0(t) e^{-p\tau} dt = (M_1 + M_2) \overline{X}_0(p),$$

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_2(t) e^{-pt} dt = (M_1 + M_2) \int_0^{\infty} \varepsilon_1(t) e^{-p\tau} dt = (M_1 + M_2)^2 \overline{X}_0(p),$$

(2.39)

.....

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = (M_1 + M_2)^k \overline{X}_0(p); k = 0, 1, 2, \dots$$

Iš (2.37), įvertinę (2.39), randame:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L (M_1 + M_2)^k \overline{X}_0(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau_1$$

arba

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L (A^{-1} B_2 e^{-p\tau_1} + A^{-1} B_3 e^{-p\tau_2})^k \overline{X}_0(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau.$$

Kadangi $\overline{X}_0(p) = A^{-1} \overline{Z}(p)$ (žr. 2.32), tai (2.28) matricinės diferencialinės lygties sprendinys yra toks:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L (A^{-1} B_2 e^{-p\tau_1} + A^{-1} B_3 e^{-p\tau_2})^k A^{-1} \overline{Z}(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau_1; \quad (2.40)$$

$$\text{Kadangi } A^{-1} = \frac{1}{p + \kappa} E, \quad B_2 = \frac{\kappa}{2} B, \quad B_3 = \frac{\kappa}{2} C, \text{ tai įvertinę šiuos pažymėjimus, (2.40)}$$

užrašome taip:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2} \right)^k \cdot \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} (B e^{-pk\tau_1} + C e^{-pk\tau_2})^k Z(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau_1. \quad (2.41)$$

Matricos B ir C yra nekomutuojančios matricos. Jų sumos k – tajam laipsniui rasti naudosime algoritmą [7]:

$$(B e^{-pk\tau_1} + C e^{-pk\tau_2})^k = \sum_{k_2=0}^k \eta(k_1, k_2) e^{-p\tau_s};$$

$$\text{čia } k_2 = 0, 1, \dots, k_1 = k, \quad \tau_s = k_1 \tau_1 - k_2 (\tau_2 - \tau_1),$$

$$\eta(k_1, k_2) = B \eta(k_1 - 1, k_2) + C \eta(k_1 - 1, k_2 - 1),$$

$$\eta(0, 0) = E, \quad \eta(1, 0) = B, \quad \eta(1, 1) = C,$$

$$\eta(k_1, k_2) = 0, \text{ jei:}$$

1) $k_1 < 0$ arba $k_2 < 0$;

2) $k_2 > k_1$.

Panaudoję šį algoritmą, (2.41) sprendinį užrašome taip:

$$x(t) = \sum_{k=0}^L \sum_{k_2=0}^k \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \eta(k_1, k_2) \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} e^{-p\tau_s} Z(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau_1. \quad (2.42)$$

Gautą (2.42) sprendinį panaudosime pereinamosioms funkcijoms $h_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1,5}$ rasti.

2.3. MATRICOS B , APRAŠANČIOS TARPUSAVIO SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS VIDINIŲ RYŠIŲ STRUKTŪRĄ, KĖLIMAS k – TUOJU LAIPSNIU

Matricinės diferencialinės lygties sprendinio (žr. 2.27) išraiškos pusėje yra penktos eilės matrica B , kuri pakelta k -tuoju laipsniu. Matricą B^k rasime pasinaudodami formule []:

$$B^k = T J^k T^{-1}, \quad (2.43)$$

čia J – matricos B Žordano forma, T – matricos B tikrinių vektorių matrica.

2.3.1. MATRICOS B TIKRINĖS REIKŠMĖS IR ŽORDANO FORMA

Rasime anksčiau aprašytos koeficientų matricos B (2.7) tikrines reikšmes. Pažymime $x = -\lambda$, tada $|G| = |B - \lambda E| = 0$, tokiu būdu gauname:

$$G = \begin{pmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & x \end{pmatrix}.$$

Skaičiuojame matricos G determinantą. Šį determinantą išreiškiame determinantais $\Delta_n(x)$:

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Atlikę skaičiavimus gauname, kad $|G| = x^2\Delta_3 - 4x\Delta_2 + 4x$. Sprendžiame lygtį:

$$x^2\Delta_3 - 4x\Delta_2 + 4x = 0.$$

Pasinaudojame sąryšiais $\Delta_n = x\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ ir $\Delta_n(x) = U_n\left(\frac{x}{2}\right)$ [6], čia

$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos(x)}{\sin\arccos(x)}$, $-1 \leq x \leq 1$ – Čebyšovo daugianaris [8]. Atlikę elementarius

pertvarkymus, gauname:

$$(\lambda^2 - 4)U_n\left(\frac{-\lambda}{2}\right) = 0.$$

Lygties sprendiniai:

$$(\lambda^2 - 4) = 0 \text{ arba } U_n\left(\frac{-\lambda}{2}\right) = 0.$$

Iš lygties $(\lambda^2 - 4) = 0$ išplaukia sprendiniai $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, Lygties $U_n\left(\frac{-\lambda}{2}\right) = 0$ sprendinį

randame pagal formulę $\lambda_k = -2\cos\left(\frac{k\pi}{n-1}\right)$, $k = \overline{1, n}$. Tokiu būdu gauname matricos B tikrines

reikšmes:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (-2, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2). \quad (2.44)$$

Užrašome matricos B Žordano formą:

$$J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Pasinaudoję gautomis matricos B tikrinėmis reikšmėmis rasime matricos B tikrinius vektorius.

2.3.2. MATRICOS B TIKRINIŲ VEKTORIŲ MATRICA T IR JOS ATVIRKŠTINĖ MATRICA

Matricos B tikrinius vektorius rasime rasime pagal formulę [5]:

$(B - \lambda_k E)X_k = 0$. Kiekvienai skirtingai λ_k , $k = \overline{1,5}$ reikšmei sudarome lygčių sistemą ir ją išsprendę gauname tikrinius vektorius T_k , $k = \overline{1,5}$:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_1, T_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ \frac{2}{1} \end{pmatrix} \alpha_2, T_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_3, T_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ \frac{2}{1} \end{pmatrix} \alpha_4, T_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_5, \alpha_i \in R \setminus \{0\}, i = \overline{1,5}.$$

Sudarome tikrinių vektorių matricą T :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ -1 & \frac{2}{2} & 0 & -\frac{2}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Atvirkštinę matricą T^{-1} apskaičiuosime tokiu būdu [3]:

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} & A_{51} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} & A_{52} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} & A_{53} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{54} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} \end{pmatrix}, \text{ čia } A_{ij} - \text{matricos } T \text{ elemento } \{T\}_{ij}, i, j = \overline{1,5}$$

adjunktas.

Pažymime: $a = \sqrt{2}$. Atlikę skaičiavimus, gauname:

$$T^{-1} = \frac{1}{16a} \begin{pmatrix} 2a & -4a & 4a & -4a & 2a \\ -4a & 8 & 0 & -8 & 4a \\ 4a & 0 & -8a & 0 & 4a \\ -4a & -8 & 0 & 8 & 4a \\ 2a & 4a & 4a & 4a & 2a \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & \frac{a}{4} & 0 & -\frac{a}{4} & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ -2 & -\frac{a}{4} & 0 & \frac{a}{4} & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Pagal šias išraiškas, rasime matricos B k – tojo laipsnio elementus.

2.3.3. MATRICOS B k – TOJO LAIPSNIO ELEMENTAI

Pasinaudodami (2.45), (2.46) ir (2.47) išraiškėmis, ir jas įstatę į (2.43), gauname:

$$B^k = T J^k T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5^k \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{a}{2} & 0 & -\frac{a}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{a}{2} & 0 & \frac{a}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-a)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & \frac{a}{4} & 0 & -\frac{a}{4} & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ -2 & -\frac{a}{4} & 0 & \frac{a}{4} & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sudauginę matricas, randame matricos B , pakeltos k – tuoju laipsniu, elementų $\{B^k\}_{ij}$, $i, j = \overline{1,5}$ išraiškas:

$$B^k_{11} = \frac{1}{8} \left((-2)^k + 2(-a)^k + 2a^k + 2^k \right),$$

$$B^k_{21} = \frac{1}{8} \left(-(-2)^k + (-a)^{k+1} + a^{k+1} + 2^k \right),$$

$$B^k_{31} = \frac{1}{8} \left((-2)^k + 2^k \right),$$

$$B^k_{41} = \frac{1}{8} \left(-(-2)^k + a(-a)^k + (-a)a^k + 2^k \right),$$

$$B^k_{51} = \frac{1}{8} \left((-2)^k - 2(-a)^k - 2a^k + 2^k \right),$$

$$B^k_{12} = \frac{1}{8} \left((-2)^{k+1} - \frac{4}{a}(-a)^k + \frac{4}{a}a^k + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{22} = \frac{1}{8} \left(-(-2)^{k+1} + 2(-a)^k + 2a^k + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{32} = \frac{1}{8} \left((-2)^{k+1} + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{42} = \frac{1}{8} \left(2(-2)^k - 2(-a)^k - 2a^k + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{52} = \frac{1}{8} \left((-2)^{k+1} + \frac{4}{a}(-a)^k - \frac{4}{a}a^k + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{13} = \frac{1}{8} \left(2(-2)^k + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{23} = \frac{1}{8} \left((-2)^{k+1} + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{33} = \frac{1}{8} \left(2(-2)^k + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{43} = \frac{1}{8} \left((-2)^{k+1} + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{53} = \frac{1}{8} \left(2(-2)^k + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{14} = \frac{1}{8} \left((-2)^{k+1} + \frac{4}{a}(-a)^k - \frac{4}{a}a^k + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{24} = \frac{1}{8} \left(-(-2)^{k+1} - 2(-a)^k - 2a^k + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{34} = \frac{1}{8} \left((-2)^{k+1} + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{44} = \frac{1}{8} \left(2(-2)^k + 2(-a)^k + 2a^k + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{54} = \frac{1}{8} \left((-2)^{k+1} - \frac{4}{a}(-a)^k + \frac{4}{a}a^k + 2^{k+1} \right),$$

$$B^k_{15} = \frac{1}{8} \left((-2)^k - 2(-a)^k - 2a^k + 2^k \right),$$

$$B^k_{25} = \frac{1}{8} \left(-(-2)^k + a(-a)^k - a^{k+1} + 2^k \right),$$

$$B^k_{35} = \frac{1}{8} \left((-2)^k + 2^k \right),$$

$$B^k_{45} = \frac{1}{8} \left(-(-2)^k - a(-a)^k + a^{k+1} + 2^k \right),$$

$$B^k_{55} = \frac{1}{8} \left((-2)^k + 2(-a)^k + 2a^k + 2^k \right).$$

Gautas matricos B^k elementų analizes išraiškas panaudosime nagrinėjant pereinamąsias funkcijas $h_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1,5}$.

2.4. TARPUSAVIO SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS PEREINAMŲJŲ PROCESŲ TYRIMAS

Sinchronizacijos sistemoje vykstantys pereinamieji procesai turi didelę įtaką tarpusavio sinchronizacijos sistemos darbui. Ištirsime sistemos pereinamuosius procesus, viekiant vienetinio šuolio formos trikdžiams. Taip pat ištirsime pereinamuosius procesus, atsirandančius sistemos įjungimo metu, išnagrinėsime jų priklausomybę nuo pradinių sąlygų.

Sistemos pereinamuosius procesus sistemoje tirsime remdamiesi jos reakcija į vienetinį fazės šuolį. Sinchronizacijos sistemos i – tojo generatoriaus virpesio fazės reakciją į j – tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį vadiname sistemos pereinamąja funkcija ir žymime $h_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1,5}$.

Pereinamųjų funkcijų visuma sudaro sistemos pereinamųjų funkcijų matricą, kurią pažymime:

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & h_{13}(t) & h_{14}(t) & h_{15}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & h_{23}(t) & h_{24}(t) & h_{25}(t) \\ h_{31}(t) & h_{32}(t) & h_{33}(t) & h_{34}(t) & h_{35}(t) \\ h_{41}(t) & h_{42}(t) & h_{43}(t) & h_{44}(t) & h_{45}(t) \\ h_{51}(t) & h_{52}(t) & h_{53}(t) & h_{54}(t) & h_{55}(t) \end{pmatrix}.$$

Rasime šios matricos elementų išraiškas, kai vėlavimai vienodi ir skirtingi.

2.4.1. DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS, APRAŠANČIOS SINCHRONIZACIJOS SISTEMĄ, SPRENDIMAS

Pritaikę Laplaso transformaciją (2.27) diferencialinių lygčių sistemai, gauname tokią operatorinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} pX_1(p) = \kappa[X_2(p)e^{-p\tau} - X_1(p)] + Z_1(p), \\ pX_2(p) = \frac{\kappa}{2}[X_1(p)e^{-p\tau} - X_2(p)] + \frac{\kappa}{2}[X_3(p)e^{-p\tau} - X_2(p)] + Z_2(p), \\ pX_3(p) = \frac{\kappa}{2}[X_2(p)e^{-p\tau} - X_3(p)] + \frac{\kappa}{2}[X_4(p)e^{-p\tau} - X_3(p)] + Z_3(p), \\ pX_4(p) = \frac{\kappa}{2}[X_3(p)e^{-p\tau} - X_4(p)] + \frac{\kappa}{2}[X_5(p)e^{-p\tau} - X_4(p)] + Z_4(p), \\ pX_5(p) = \kappa[X_4(p)e^{-p\tau} - X_5(p)] + Z_5(p). \end{cases} \quad (2.48)$$

Atlikę (2.48) sistemos pertvarkymus, randame:

$$\begin{cases} (p + \kappa)X_1(p) - \kappa e^{-p\tau} X_2(p) = Z_1(p), \\ -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} X_1(p) + (p + \kappa)X_2(p) - \frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} X_3(p) = Z_2(p), \\ -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} X_2(p) + (p + \kappa)X_3(p) - \frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} X_4(p) = Z_3(p), \\ -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} X_3(p) + (p + \kappa)X_4(p) - \frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} X_5(p) = Z_4(p), \\ -\kappa e^{-p\tau} X_4(p) + (p + \kappa)X_5(p) = Z_5(p). \end{cases} \quad (2.49)$$

(2.49) sistemą parašome matriciniu pavidalu:

$$\begin{pmatrix} (p + \kappa) & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p + \kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p + \kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p + \kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & (p + \kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ X_3(p) \\ X_4(p) \\ X_5(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1(p) \\ Z_2(p) \\ Z_3(p) \\ Z_4(p) \\ Z_5(p) \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

čia $AX(p) = Z(p)$;

$$A = \begin{pmatrix} (p+\kappa) & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) \end{pmatrix}, \quad X(p) = \begin{pmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ X_3(p) \\ X_4(p) \\ X_5(p) \end{pmatrix},$$

$$Z(p) = \begin{pmatrix} Z_1(p) \\ Z_2(p) \\ Z_3(p) \\ Z_4(p) \\ Z_5(p) \end{pmatrix}.$$

(2.50) algebrinių lygčių sistemą sprendžiame Kramerio metodu: $X_i(p) = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, ($i = \overline{1,5}$);

čia $\Delta = |A|$, Δ_i , ($i = \overline{1,5}$) – pagalbinais determinantai.

$$\Delta = \begin{vmatrix} (p+\kappa) & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) \end{vmatrix} =$$

$$= (p+\kappa)^5 + \frac{1}{2}(p+\kappa)\kappa^4 e^{-4p\tau} - \frac{3}{2}(p+\kappa)^3 \kappa^2 e^{-2p\tau},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} Z_1(p) & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & 0 & 0 & 0 \\ Z_2(p) & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & 0 & 0 \\ Z_3(p) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & 0 \\ Z_4(p) & 0 & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} \\ Z_5(p) & 0 & 0 & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta_{11}Z_1(p) + \Delta_{21}Z_2(p) + \Delta_{31}Z_3(p) + \Delta_{41}Z_4(p) + \Delta_{51}Z_5(p),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (p+\kappa) & Z_1(p) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & Z_2(p) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & 0 & 0 \\ 0 & Z_3(p) & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & 0 \\ 0 & Z_4(p) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} \\ 0 & Z_5(p) & 0 & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta_{12}Z_1(p) + \Delta_{22}Z_2(p) + \Delta_{32}Z_3(p) + \Delta_{42}Z_4(p) + \Delta_{52}Z_5(p),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (p+\kappa) & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & Z_1(p) & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & Z_2(p) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & Z_3(p) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & 0 \\ 0 & 0 & Z_4(p) & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} \\ 0 & 0 & Z_5(p) & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta_{13}Z_1(p) + \Delta_{23}Z_2(p) + \Delta_{33}Z_3(p) + \Delta_{43}Z_4(p) + \Delta_{53}Z_5(p),$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} (p+\kappa) & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & 0 & Z_1(p) & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & Z_2(p) & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & Z_3(p) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & Z_4(p) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} \\ 0 & 0 & 0 & Z_5(p) & (p+\kappa) \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta_{14}Z_1(p) + \Delta_{24}Z_2(p) + \Delta_{34}Z_3(p) + \Delta_{44}Z_4(p) + \Delta_{54}Z_5(p),$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} (p+\kappa) & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & 0 & 0 & Z_1(p) \\ -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & 0 & Z_2(p) \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & Z_3(p) \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2} \cdot e^{-p\tau} & (p+\kappa) & Z_4(p) \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa \cdot e^{-p\tau} & Z_5(p) \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta_{15}Z_1(p) + \Delta_{25}Z_2(p) + \Delta_{35}Z_3(p) + \Delta_{45}Z_4(p) + \Delta_{55}Z_5(p).$$

(2.49) algebrainės sistemos sprendinio komponentės yra šios funkcijos:

$$\begin{aligned}
 X_1(p) &= \frac{1}{\Delta} [\Delta_{11}Z_1(p) + \Delta_{21}Z_2(p) + \Delta_{31}Z_3(p) + \Delta_{41}Z_4(p) + \Delta_{51}Z_5(p)], \\
 X_2(p) &= \frac{1}{\Delta} [\Delta_{12}Z_1(p) + \Delta_{22}Z_2(p) + \Delta_{32}Z_3(p) + \Delta_{42}Z_4(p) + \Delta_{52}Z_5(p)], \\
 X_3(p) &= \frac{1}{\Delta} [\Delta_{13}Z_1(p) + \Delta_{23}Z_2(p) + \Delta_{33}Z_3(p) + \Delta_{43}Z_4(p) + \Delta_{53}Z_5(p)], \\
 X_4(p) &= \frac{1}{\Delta} [\Delta_{14}Z_1(p) + \Delta_{24}Z_2(p) + \Delta_{34}Z_3(p) + \Delta_{44}Z_4(p) + \Delta_{54}Z_5(p)], \\
 X_5(p) &= \frac{1}{\Delta} [\Delta_{15}Z_1(p) + \Delta_{25}Z_2(p) + \Delta_{35}Z_3(p) + \Delta_{45}Z_4(p) + \Delta_{55}Z_5(p)].
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Rasime adjunktus $A_{ij} = \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, $i, j = \overline{1,5}$ (čia M_{ij} yra matricos A elemento a_{ij} minoras):

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11} = \Delta_{55} &= (p + \kappa)^4 - (p + \kappa)^2 \kappa^2 e^{-2p\tau} + \frac{1}{8} \kappa^4 e^{-4p\tau}, \\
 \Delta_{12} = \Delta_{54} &= \frac{1}{2} (p + \kappa)^3 \kappa e^{-p\tau} - \frac{3}{8} (p + \kappa) \kappa^3 e^{-3p\tau}, \\
 \Delta_{13} = \Delta_{53} &= \frac{1}{4} (p + \kappa)^2 \kappa^2 e^{-2p\tau} - \frac{1}{8} \kappa^4 e^{-4p\tau}, \\
 \Delta_{14} = \Delta_{52} &= \frac{1}{8} (p + \kappa) \kappa^3 e^{-3p\tau}, \\
 \Delta_{15} = \Delta_{51} &= \frac{1}{8} \kappa^4 e^{-4p\tau}, \\
 \Delta_{21} = \Delta_{45} &= (p + \kappa)^3 \kappa e^{-p\tau} - \frac{3}{4} (p + \kappa) \kappa^3 e^{-3p\tau}, \\
 \Delta_{22} = \Delta_{44} &= (p + \kappa)^4 - \frac{3}{4} (p + \kappa)^2 \kappa^2 e^{-2p\tau}, \\
 \Delta_{23} = \Delta_{32} = \Delta_{34} = \Delta_{43} &= \frac{1}{2} (p + \kappa)^3 \kappa e^{-p\tau} - \frac{1}{4} (p + \kappa) \kappa^3 e^{-3p\tau}, \\
 \Delta_{24} = \Delta_{42} &= \frac{1}{4} (p + \kappa)^2 \kappa^2 e^{-2p\tau}, \\
 \Delta_{25} = \Delta_{41} &= \frac{1}{4} (p + \kappa) \kappa^3 e^{-3p\tau},
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\Delta_{31} = \Delta_{35} = \frac{1}{2}(p + \kappa)^2 \kappa^2 e^{-2p\tau} - \frac{1}{4} \kappa^4 e^{-4p\tau},$$

$$\Delta_{33} = (p + \kappa)^4 + \frac{1}{4} \kappa^4 e^{-4p\tau}.$$

Pritaikome Laplaso transformaciją laisviesiems nariams $z_i(t)$, $i = \overline{1,5}$ (žr. (2.5)):

$$\begin{aligned} Z_1(p) &= f_{01} \frac{1}{p} + \varphi_{01} + \kappa \left[f_{02} \frac{1}{p^2} - f_{02} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{02} \frac{1}{p} - f_{02} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \varphi_{02} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right], \\ Z_2(p) &= f_{02} \frac{1}{p} + \varphi_{02} + \frac{\kappa}{2} \left[f_{01} \frac{1}{p^2} - f_{01} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{01} \frac{1}{p} - f_{01} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \varphi_{01} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right] + \\ &+ \frac{\kappa}{2} \left[f_{03} \frac{1}{p^2} - f_{03} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{03} \frac{1}{p} - f_{03} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \varphi_{03} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right], \\ Z_3(p) &= f_{03} \frac{1}{p} + \varphi_{03} + \frac{\kappa}{2} \left[f_{02} \frac{1}{p^2} - f_{02} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{02} \frac{1}{p} - f_{02} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \varphi_{02} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right] + \\ &+ \frac{\kappa}{2} \left[f_{04} \frac{1}{p^2} - f_{04} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{04} \frac{1}{p} - f_{04} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \varphi_{04} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right], \\ Z_4(p) &= f_{04} \frac{1}{p} + \varphi_{04} + \frac{\kappa}{2} \left[f_{03} \frac{1}{p^2} - f_{03} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{03} \frac{1}{p} - f_{03} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \varphi_{03} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right] + \\ &+ \frac{\kappa}{2} \left[f_{05} \frac{1}{p^2} - f_{05} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{05} \frac{1}{p} - f_{05} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \varphi_{05} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right], \\ Z_5(p) &= f_{05} \frac{1}{p} + \varphi_{05} + \kappa \left[f_{04} \frac{1}{p^2} - f_{04} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{04} \frac{1}{p} - f_{04} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \varphi_{04} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right]. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Išraiškas (2.51), (2.52), (2.53) panaudosime skaičiuojant pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1,5}$ ir fazių skirtumų $x_i(t) - x_j(t)$, $i, j = \overline{1,5}$ ribines reikšmes.

2.4.2. PEREINAMOSIOS FUNKCIJOS, KAI VĒLAVIMAI VIENODI

j – tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį galima pakeisti delta funkcija, veikiančia to generatoriaus dažnį. Kai vienetinis fazės šuolis veikia j – tojo generatoriaus virpesio fazę, (2.6) matricinės diferencialinės lygties laisvasis narys įgauna pokyti:

$$\Delta z(t) = \delta(t) I^{(j)}; \tag{2.54}$$

čia $I^{(j)}$ – matrica–stulpelis, kurio j – tasis elementas lygus 1, o likusieji elementai lygūs nuliui, $\delta(t)$ – delta funkcija.

Pažymime:

$$H_j(t) = (h_{ij}(t)), \quad j = \overline{1,5};$$

pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$ ($j = \text{const}, i = \overline{1,4}$) matrica–stulpelį. Šio matricos–stulpelio elementai yra sinchronizacijos sistemos generatorių virpesių fazių reakcijos į j – tojo generatoriaus fazės vienetinį šuolį.

Remdamiesi (2.6) ir (2.54), perrašome matricinę diferencialinę lygtį vektoriaus $H_j(t)$ atžvilgiu:

$$DH_j(t) = B_1 H_j(t) + B_2 H_j(t - \tau) + \delta(t) I^{(j)}, \quad j = \overline{1,5}.$$

Šios matricinės diferencialinės lygties sprendinį užrašome remdamiesi (2.6) lygties sprendiniu (2.26) ir pasinaudodami operatorine lygybe $\delta(t) \div 1$:

$$H_j(t) = (h_{ij}(t)) \div \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2} \right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p + \kappa)^{k+1}} B^k I^{(j)}, \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.55)$$

Iš (2.55) išplaukia:

$$H(t) = (h_{ij}(t)) \div \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2} \right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p + \kappa)^{k+1}} B^k, \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.56)$$

Dešiniajai (2.56) lygybės pusei pritakę atvirkštinę Laplaso transformaciją, gauname:

$$H(t) = (h_{ij}(t)) = \sum_{k=0}^L \frac{(\kappa - k\kappa\tau)^k}{k! 2^k} e^{-(\kappa - k\kappa\tau)t} (\kappa - k\kappa\tau) B^k, \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.57)$$

Gautą (2.57) pereinamųjų funkcijų matricos analizinę išraišką panaudosime tirdami sinchronizacijos sistemos pereinamuosius procesus.

2.4.2.1. PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ RIBINĖS REIKŠMĖS

Rasime pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$, ($i, j = \overline{1,5}$) ribines reikšmes. Pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$, ($i, j = \overline{1,5}$) ribines reikšmes, kai $t \rightarrow +\infty$, ieškosime remdamiesi ribinės reikšmės teorema (žr. (1.13)):

$$h_{ij}(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} h_{ij}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pH_{ij}(p);$$

čia $H_{ij}(p)$ - pereinamosios funkcijos $h_{ij}(t)$ vaizdas (Laplaso transformacija). Kadangi skaičiuojant ribas gauname neapibrėžtumą $\left(\frac{0}{0}\right)$, taikome Lopitalio taisyklę [4]. Remiantis (2.52), randame:

$$\begin{aligned}
 h_{11}(+\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} p[H_{11}(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{(p + \kappa)^4 - (p + \kappa)^2 \kappa^2 e^{-2p\tau} + \frac{1}{8} \kappa^4 e^{-4p\tau}}{(p + \kappa)^5 + \frac{1}{2} (p + \kappa) \kappa^4 e^{-4p\tau} - \frac{3}{2} (p + \kappa)^3 \kappa^2 e^{-2p\tau}} = \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\left(p \left((p + \kappa)^4 - (p + \kappa)^2 \kappa^2 e^{-2p\tau} + \frac{1}{8} \kappa^4 e^{-4p\tau} \right) \right)'}{\left((p + \kappa)^5 + \frac{1}{2} (p + \kappa) \kappa^4 e^{-4p\tau} - \frac{3}{2} (p + \kappa)^3 \kappa^2 e^{-2p\tau} \right)'} = \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p + \kappa)^4 - (p + \kappa)^2 \kappa^2 e^{-2p\tau} + \frac{1}{8} \kappa^4 e^{-4p\tau}}{5(p + \kappa)^4 + \frac{1}{2} \kappa^4 e^{-4p\tau} - 2(p + \kappa) \kappa^4 e^{-4p\tau} - \frac{9}{2} (p + \kappa)^2 \kappa^2 e^{-2p\tau} + 3(p + \kappa)^3 \kappa^2 e^{-2p\tau}} = \\
 &= \frac{\frac{1}{8} \kappa^4}{5\kappa^4 + \frac{1}{2} \kappa^4 - 2\kappa^5 \tau - \frac{9}{2} \kappa^4 + 3\kappa^5 \tau} = \frac{\frac{1}{8}}{\kappa\tau + 1} = \frac{1}{8(\kappa\tau + 1)}.
 \end{aligned}$$

Analogiškai randamos ir kitų pereinamųjų funkcijų ribinės reikšmės. Pateikiame jų galutines išraiškas:

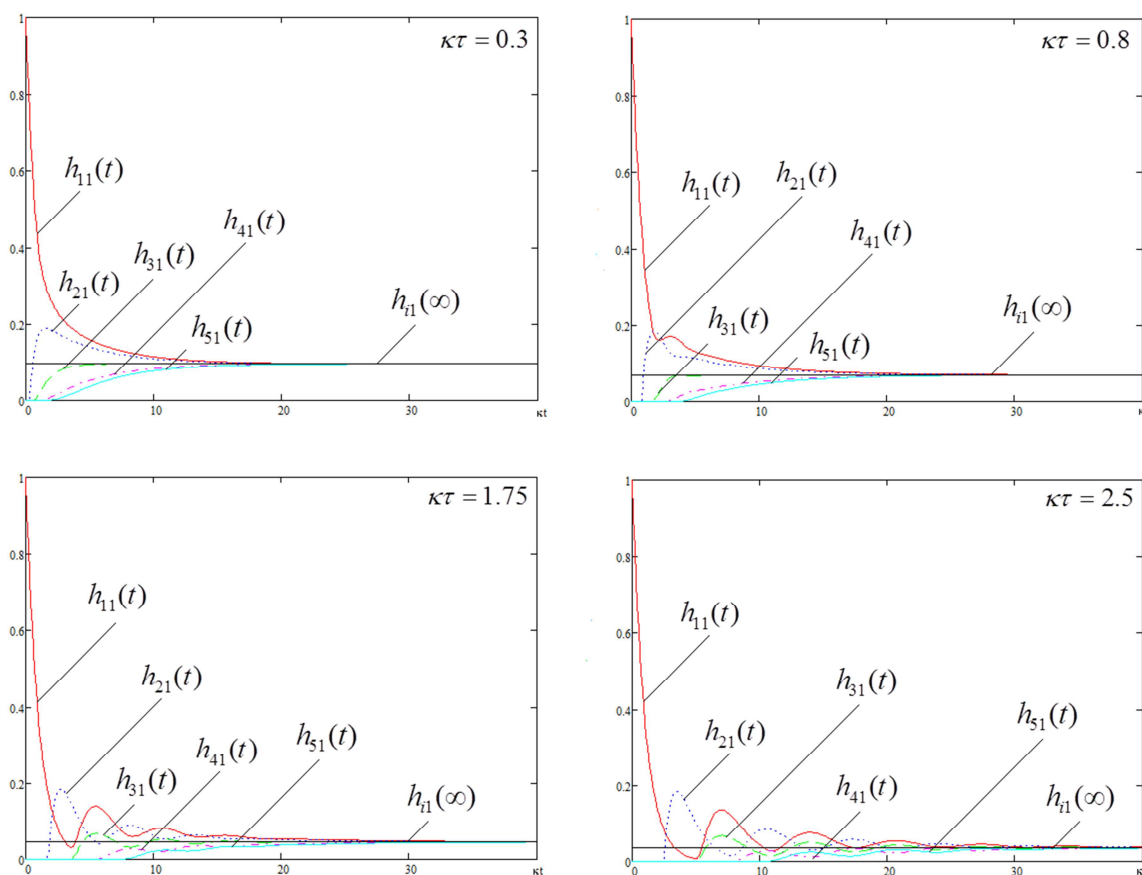
$$\begin{aligned}
 h_{11}(+\infty) &= h_{21}(+\infty) = h_{31}(+\infty) = h_{41}(+\infty) = h_{51}(+\infty) = h_{15}(+\infty) = h_{25}(+\infty) = h_{35}(+\infty) = \\
 &= h_{45}(+\infty) = h_{55}(+\infty) = \frac{1}{8(\kappa\tau + 1)}. \tag{2.58}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{12}(+\infty) &= h_{22}(+\infty) = h_{32}(+\infty) = h_{42}(+\infty) = h_{52}(+\infty) = h_{13}(+\infty) = h_{23}(+\infty) = h_{33}(+\infty) = \\
 h_{43}(+\infty) &= h_{53}(+\infty) = h_{14}(+\infty) = h_{24}(+\infty) = h_{34}(+\infty) = h_{44}(+\infty) = h_{45}(+\infty) = \frac{1}{4(\kappa\tau + 1)}.
 \end{aligned}$$

Radome pereinamųjų funkcijų ribinių reikšmių analizes išraiškas.

2.4.2.2. PEREINAMŪJŲ PROCESŲ TYRIMAS, KAI VĖLAVIMAI VIENODI

Remdamiesi sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų išraiškomis (žr. 2.57) ir jų ribinėmis reikšmėmis (žr. 2.58), išstirsime sistemos pereinamuosius procesus.



2.4 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i1}(t)$ grafikai, kai vėlavimai vienodi

2.4 paveiksle pateikti pereinamųjų funkcijų $h_{i1}(t)$ grafikai, esant skirtingoms vėlavimo τ ir stiprinimo koeficiento κ sandaugos $\kappa\tau$ reikšmėms (čia $h_{i1}(\infty)$ – pereinamųjų funkcijų ribinė eikšmė, prie kurios nusistovi pereinamieji procesai). Pastebime, kad kuo didesnė sandaugos $\kappa\tau$ reikšmė, tuo pereinamieji procesai trunka ilgiau. Kai $\kappa\tau$ viršija 0.75, pereinamasis procesas sistemoje įgauna virpamojo proceso požymių.

Kiti pereinamųjų funkcijų, kai vėlavimai vienodi, tyrimų rezultatai pateikti 4 priede.

2.4.3. PEREINAMOSIOS FUNKCIJOS, KAI VĖLAVIMAI SKITINGI

Rasime pereinamųjų funkcijų matricos $H_j(t) = (h_{ij}(t))$, $j = \overline{1,5}$, elementus, kai vėlavimai skirtingi, τ_1 ir τ_2 , $\tau_1 < \tau_2$ (žr. 2.3 pav.).

Remdamiesi (2.28) ir (2.54), perrašome matricinę diferencialinę lygtį vektoriaus $H_j(t)$ atžvilgiu:

$$DH_j(t) = B_1 H_j(t) + B_2 H_j(t - \tau_1) + B_3 H_j(t - \tau_2) + \delta(t) I^{(j)}, \quad j = \overline{1,5}.$$

Šios matricinės diferencialinės lygties sprendinį užrašome remdamiesi (2.28) lygties sprendiniu (2.42) ir pasinaudodami operatorine lygybe $\delta(t) \div 1$:

$$H_j(t) = (h_{ij}(t)) \div x(t) = \sum_{k=0}^L \sum_{k_2=0}^k \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \eta(k_1, k_2) \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} e^{-p\tau_s} I^{(j)}, \quad 0 \leq t < (L+1)\tau_1, \quad (2.59)$$

čia $\tau_s = k_1\tau_1 - k_2(\tau_2 - \tau_1)$.

Iš (2.59) išplaukia:

$$H(t) = (h_{ij}(t)) \div \sum_{k=0}^L \sum_{k_2=0}^k \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \eta(k_1, k_2) \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} e^{-p\tau_s}, \quad 0 \leq t < (L+1)\tau_1. \quad (2.60)$$

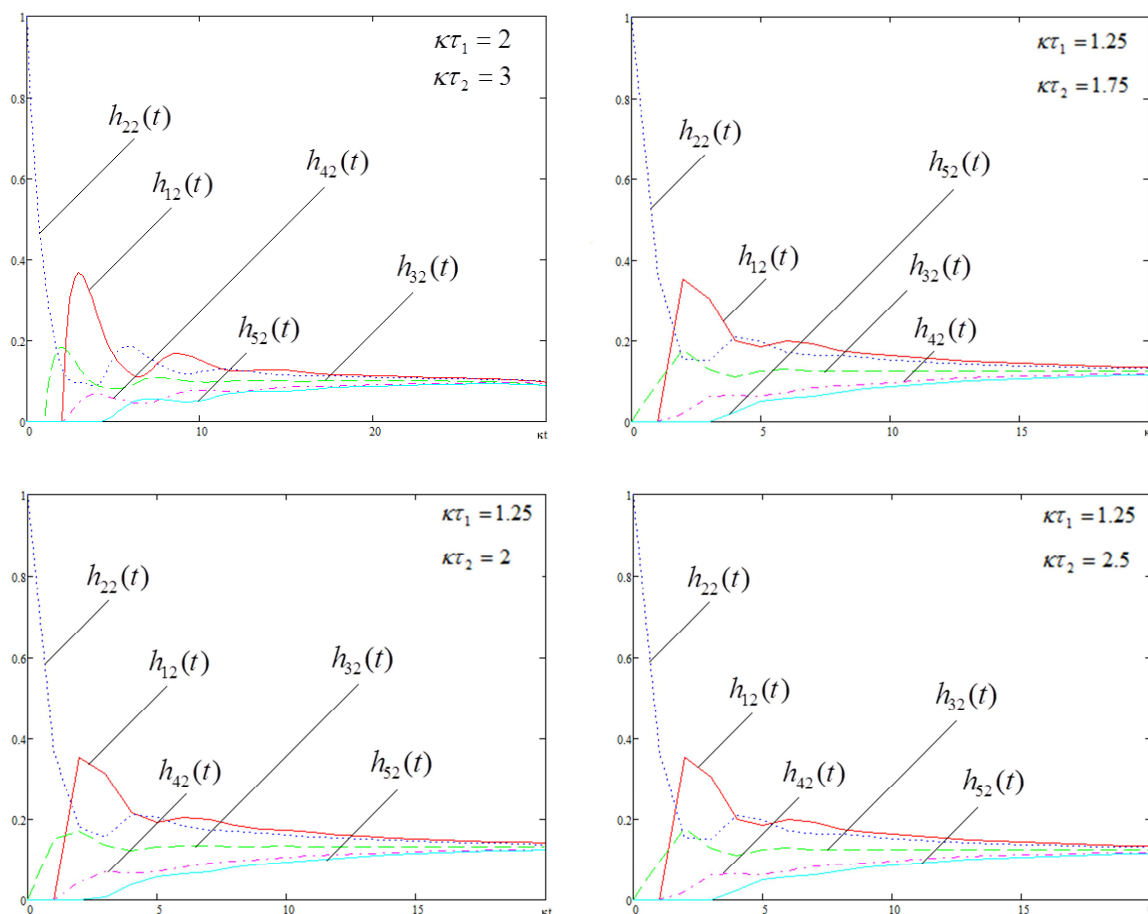
Dešiniajai (2.60) lygybės pusei pritaikę atvirkštinę Laplaso transformaciją, gauname:

$$H(t) = (h_{ij}(t)) = \sum_{k=0}^L \sum_{k_2=0}^k \eta(k_1, k_2) \frac{(\kappa - k\kappa\tau_s)^k}{k! 2^k} e^{-(\kappa - k\kappa\tau_s)t} 1(\kappa - k\kappa\tau_s), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau_1. \quad (2.61)$$

Gautą (2.61) pereinamųjų funkcijų matricos analizinę išraišką panaudosime tirdami synchronizacijos sistemos pereinamuosius procesus.

2.4.3.1. PEREINAMŪJŲ PROCESŲ TYRIMAS, KAI VĒLAVIMAI SKIRTINGI

Remdamiesi synchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų išraiškomis (žr. 2.57), ištirsime sistemos pereinamuosius procesus.



2.5 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i2}(t)$ grafikai, kai vėlavimai skirtingi

2.5 paveiksle pateikti pereinamųjų funkcijų $h_{i2}(t)$ grafikai, esant skirtingoms sandaugų $\kappa\tau_1$ ir $\kappa\tau_2$ reikšmėms. Pastebime, kad pereinamieji procesai greičiau nusistovi, esant mažesnei sandaugos $\kappa\tau_1$ reikšmei. Sandaugos $\kappa\tau_2$ reikšmė nusistovėjimo trukmei turi mažą įtaką.

Kiti pereinamųjų funkcijų, kai vėlavimai skirtingi, tyrimų rezultatai pateikti 6 priede.

2.4.4. TARPUSAVIO SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS PEREINAMŪJŲ PROCESŲ PRIKLAUSOMYBĖ NUO PRADINIŲ SĄLYGŲ

Ištirsime sinchronizacijos sistemos pereinamuosius procesus, atsirandančius įjungus sistemos generatorių valdymą. Sistemos pradines sąlygas apibrėžėme 2.1. skyrelyje.

Surasime sinchronizacijos sistemos generatorių virpesių fazių skirtumų analizes išraiškas bei apskaičiuosime fazių skirtumų ribines reikšmes.

2.4.4.1. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ ANALIZINĖS IŠRAIŠKOS

Nagrinėsime fazių skirtumus $x_i(t) - x_j(t)$, $i, j = \overline{1,5}$, $i \neq j$. Generatorių virpesių fazių skirtumų analizes išraiškas išvesime pasinaudodami (2.6) matricinės diferencialinės lygties (2.26) sprendiniu:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} B^k Z(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau.$$

Pažymėkime:

$$G(k) = B^k Z(p) = \begin{pmatrix} g_1(k) \\ g_2(k) \\ g_3(k) \\ g_4(k) \\ g_5(k) \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Įstatę (2.62) į (2.26), gauname:

$$x_i(t) \div \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} \{G(k)\}_i = \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} g_i(k), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.63)$$

Tada, pagal (2.63), fazių skirtumas $x_i(t) - x_j(t)$, $i, j = \overline{1,5}$, $i \neq j$ lygus:

$$\begin{aligned} x_i(t) - x_j(t) &= \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} g_i(k) - \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} g_j(k) = \\ &= \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} (g_i(k) - g_j(k)), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Matricos B^k (žr. 2.7) elementus pažymime:

$$B^k = (b_{ij}(k)) = \begin{pmatrix} b_{11}(k) & b_{12}(k) & b_{13}(k) & b_{14}(k) & b_{15}(k) \\ b_{21}(k) & b_{22}(k) & b_{23}(k) & b_{24}(k) & b_{25}(k) \\ b_{31}(k) & b_{32}(k) & b_{33}(k) & b_{34}(k) & b_{35}(k) \\ b_{41}(k) & b_{42}(k) & b_{43}(k) & b_{44}(k) & b_{45}(k) \\ b_{51}(k) & b_{52}(k) & b_{53}(k) & b_{54}(k) & b_{55}(k) \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Iš (2.53) parašome:

$$\begin{aligned}
Z_1(p) &= f_{01} \frac{1}{p} + \varphi_{01} + \kappa \left[f_{02} \frac{1}{p^2} - f_{02} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{02} \frac{1}{p} - f_{02} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \varphi_{02} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right], \\
Z_2(p) &= f_{02} \frac{1}{p} + \varphi_{02} + \frac{\kappa}{2} \left[f_{13} \frac{1}{p^2} - f_{13} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{13} \frac{1}{p} - f_{13} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \varphi_{13} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right], \\
Z_3(p) &= f_{03} \frac{1}{p} + \varphi_{03} + \frac{\kappa}{2} \left[f_{24} \frac{1}{p^2} - f_{24} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{24} \frac{1}{p} - f_{24} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \varphi_{24} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right], \\
Z_4(p) &= f_{04} \frac{1}{p} + \varphi_{04} + \frac{\kappa}{2} \left[f_{35} \frac{1}{p^2} - f_{35} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{35} \frac{1}{p} - f_{35} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \varphi_{35} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right], \\
Z_5(p) &= f_{05} \frac{1}{p} + \varphi_{05} + \kappa \left[f_{04} \frac{1}{p^2} - f_{04} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{04} \frac{1}{p} - f_{04} \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \varphi_{04} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right],
\end{aligned} \tag{2.66}$$

čia:

$$\begin{aligned}
\varphi_{0i} + \varphi_{0j} &= \varphi_{ij}, \\
f_{0i} + f_{0j} &= f_{ij},
\end{aligned} \quad i, j = \overline{1,5}, \quad i \neq j.$$

Pagal (2.65) ir (2.66) skirtumas $(g_i(k) - g_j(k))$ (2.64) formulėje lygus:

$$\begin{aligned}
(g_i(k) - g_j(k)) &= (b_{i1}(k)Z_1(p) + b_{i2}(k)Z_2(p) + b_{i3}(k)Z_3(p) + b_{i4}(k)Z_4(p) + b_{i5}(k)Z_5(p)) - \\
&\quad - (b_{j1}(k)Z_1(p) + b_{j2}(k)Z_2(p) + b_{j3}(k)Z_3(p) + b_{j4}(k)Z_4(p) + b_{j5}(k)Z_5(p)) = \\
&= (b_{i1}(k) - b_{j1}(k))Z_1(p) + (b_{i2}(k) - b_{j2}(k))Z_2(p) + (b_{i3}(k) - b_{j3}(k))Z_3(p) + \\
&\quad + (b_{i4}(k) - b_{j4}(k))Z_4(p) + (b_{i5}(k) - b_{j5}(k))Z_5(p),
\end{aligned} \tag{2.67}$$

$$i, j = \overline{1,5}, \quad i \neq j.$$

Pažymėkime:

$$\begin{aligned}
B_{ij1}(k) &= (b_{i1}(k) - b_{j1}(k)), \\
B_{ij2}(k) &= (b_{i2}(k) - b_{j2}(k)), \\
B_{ij3}(k) &= (b_{i3}(k) - b_{j3}(k)), \\
B_{ij4}(k) &= (b_{i4}(k) - b_{j4}(k)), \\
B_{ij5}(k) &= (b_{i5}(k) - b_{j5}(k)), \quad i, j = \overline{1,5}, \quad i \neq j.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Tada, pagal (2.66), (2.67) ir (2.68), skirtumas $(g_i(k) - g_j(k))$ (2.64) formulėje lygus:

$$\begin{aligned}
& (g_i(k) - g_j(k)) = \\
& = (\varphi_{01} B_{ij1}(k) + \varphi_{02} B_{ij2}(k) + \varphi_{03} B_{ij3}(k) + \varphi_{04} B_{ij4}(k) + \varphi_{05} B_{ij5}(k)) + \\
& + \frac{1}{p} (f_{01} B_{ij1}(k) + f_{02} B_{ij2}(k) + f_{03} B_{ij3}(k) + f_{04} B_{ij4}(k) + f_{05} B_{ij5}(k)) + \\
& + \frac{\kappa}{p} \left(\varphi_{02} B_{ij1}(k) + \frac{\varphi_{13}}{2} B_{ij2}(k) + \frac{\varphi_{24}}{2} B_{ij3}(k) + \frac{\varphi_{35}}{2} B_{ij4}(k) + \varphi_{04} B_{ij5}(k) \right) - \\
& - \frac{\kappa}{p} \left(\varphi_{02} B_{ij1}(k) + \frac{\varphi_{13}}{2} B_{ij2}(k) + \frac{\varphi_{24}}{2} B_{ij3}(k) + \frac{\varphi_{35}}{2} B_{ij4}(k) + \varphi_{04} B_{ij5}(k) \right) e^{-p\tau} + \tag{2.69} \\
& + \frac{\kappa}{p^2} \left(f_{02} B_{ij1}(k) + \frac{f_{13}}{2} B_{ij2}(k) + \frac{f_{24}}{2} B_{ij3}(k) + \frac{f_{35}}{2} B_{ij4}(k) + f_{04} B_{ij5}(k) \right) - \\
& - \frac{\kappa}{p^2} \left(f_{02} B_{ij1}(k) + \frac{f_{13}}{2} B_{ij2}(k) + \frac{f_{24}}{2} B_{ij3}(k) + \frac{f_{35}}{2} B_{ij4}(k) + f_{04} B_{ij5}(k) \right) e^{-p\tau} - \\
& - \frac{\kappa}{p} \left(f_{02} \tau B_{ij1}(k) + \frac{f_{13} \tau}{2} B_{ij2}(k) + \frac{f_{24} \tau}{2} B_{ij3}(k) + \frac{f_{35} \tau}{2} B_{ij4}(k) + f_{04} \tau B_{ij5}(k) \right).
\end{aligned}$$

Pažymėkime:

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij1}(k) &= \varphi_{01} B_{ij1}(k) + \varphi_{02} B_{ij2}(k) + \varphi_{03} B_{ij3}(k) + \varphi_{04} B_{ij4}(k) + \varphi_{05} B_{ij5}(k), \\
\alpha_{ij2}(k) &= f_{01} B_{ij1}(k) + f_{02} B_{ij2}(k) + f_{03} B_{ij3}(k) + f_{04} B_{ij4}(k) + f_{05} B_{ij5}(k), \\
\alpha_{ij3}(k) &= \varphi_{02} B_{ij1}(k) + \frac{\varphi_{13}}{2} B_{ij2}(k) + \frac{\varphi_{24}}{2} B_{ij3}(k) + \frac{\varphi_{35}}{2} B_{ij4}(k) + \varphi_{04} B_{ij5}(k), \tag{2.70} \\
\alpha_{ij4}(k) &= f_{02} B_{ij1}(k) + \frac{f_{13}}{2} B_{ij2}(k) + \frac{f_{24}}{2} B_{ij3}(k) + \frac{f_{35}}{2} B_{ij4}(k) + f_{04} B_{ij5}(k).
\end{aligned}$$

(2.70) pažymėjimus įstatę į (2.69), gauname:

$$\begin{aligned}
& (g_i(k) - g_j(k)) = \\
& = \alpha_{ij1}(k) + \frac{\alpha_{ij2}(k) + \kappa \alpha_{ij3}(k) - \kappa \tau \alpha_{ij4}(k)}{p} + \frac{\kappa \alpha_{ij4}(k)}{p^2} - \frac{\kappa \alpha_{ij3}(k)}{p} e^{-p\tau} - \frac{\kappa \alpha_{ij4}(k)}{p^2} e^{-p\tau} = \tag{2.71} \\
& = \alpha_{ij1}(k) + \frac{\alpha_{ij22}(k)}{p} + \frac{\kappa \alpha_{ij4}(k)}{p^2} - \frac{\kappa \alpha_{ij3}(k)}{p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa \alpha_{ij4}(k)}{p^2} e^{-p\tau},
\end{aligned}$$

čia:

$$\alpha_{ij22}(k) = \alpha_{ij2}(k) + \kappa \alpha_{ij3}(k) - \kappa \tau \alpha_{ij4}(k).$$

Įstatę (2.71) į pradinę išraišką (2.64), gauname:

$$\begin{aligned}
& x_i(t) - x_j(t) \div \\
& \div \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \alpha_{ij1}(k) \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} + \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \alpha_{ij22}(k) \frac{e^{-pk\tau}}{p(p+\kappa)^{k+1}} + \\
& + \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \kappa \alpha_{ij4}(k) \frac{e^{-pk\tau}}{p^2(p+\kappa)^{k+1}} - \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \kappa \alpha_{ij3}(k) \frac{e^{-pk\tau}}{p(p+\kappa)^{k+1}} e^{-p\tau} - \\
& - \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \kappa \alpha_{ij4}(k) \frac{e^{-pk\tau}}{p^2(p+\kappa)^{k+1}} e^{-p\tau}.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Pažymėkime:

$$\begin{aligned}
S_1(p) &= \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \alpha_{ij1}(k) \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}}, \\
S_2(p) &= \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \alpha_{ij22}(k) \frac{e^{-pk\tau}}{p(p+\kappa)^{k+1}}, \\
S_3(p) &= \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \kappa \alpha_{ij3}(k) \frac{e^{-pk\tau}}{p(p+\kappa)^{k+1}}, \\
S_4(p) &= \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \kappa \alpha_{ij4}(k) \frac{e^{-pk\tau}}{p^2(p+\kappa)^{k+1}}.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

(2.73) išraiškoms pritaikome atvirkštinę Laplaso transformaciją:

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= \sum_{k=0}^L \left(\frac{1}{2}\right)^k \alpha_{ij1}(k) \frac{(\kappa t - \kappa \tau)^k}{k!} e^{-(\kappa t - k\kappa \tau)} \mathbb{1}(\kappa t - k\kappa \tau), \\
s_2(t) &= \sum_{k=0}^L \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\alpha_{ij22}(k)}{\kappa} \left(1 - \sum_{l=0}^k \frac{(\kappa t - \kappa \tau)^l}{l!} e^{-(\kappa t - k\kappa \tau)}\right) \mathbb{1}(\kappa t - k\kappa \tau), \\
s_3(t) &= \sum_{k=0}^L \left(\frac{1}{2}\right)^k \alpha_{ij3}(k) \left(1 - \sum_{l=0}^k \frac{(\kappa t - \kappa \tau)^l}{l!} e^{-(\kappa t - k\kappa \tau)}\right) \mathbb{1}(\kappa t - k\kappa \tau), \\
s_4(t) &= \sum_{k=0}^L \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\alpha_{ij4}(k)}{\kappa} \left((\kappa t - \kappa \tau) - (k+1) - \sum_{l=0}^k \sum_{s=0}^l \frac{(\kappa t - \kappa \tau)^s}{s!} e^{-(\kappa t - k\kappa \tau)}\right) \mathbb{1}(\kappa t - k\kappa \tau).
\end{aligned} \tag{2.74}$$

(2.74) pažymėjimus įstatę į (2.72) išraišką, gauname

$$x_i(t) - x_j(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) - s_3(t - \tau) - s_4(t - \tau). \tag{2.75}$$

(2.75) naudosime skaičiuojant fazių skirtumus.

2.4.4.2. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ RIBINĖS REIKŠMĖS

Sinchronizacijos sistemos generatorių virpesių fazių skirtumų ribinės reikšmės yra svarbi sistemos darbo charakteristika. Nuo ribinių reikšmių priklauso atminčių, skirtų ateinančios į komutacijos centrą informacijos užrašymui, dydžiai.

Rasime generatorių virpesių fazių skirtumų

$$x_1(t) - x_2(t), \quad x_1(t) - x_3(t), \quad x_1(t) - x_4(t), \quad x_1(t) - x_5(t), \quad x_2(t) - x_3(t), \quad x_2(t) - x_4(t), \\ x_2(t) - x_5(t), \quad x_3(t) - x_4(t), \quad x_3(t) - x_5(t), \quad x_4(t) - x_5(t)$$

ribines reikšmes.

Remiantis ribinės reikšmės teorema rašome (žr. (1.13)):

$$x_i(t) - x_j(t) = \lim_{p \rightarrow 0} (x_i(t) - x_j(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p(X_i(p) - X_j(p)), \quad i, j = \overline{1,5}.$$

Detaliau parodysime skirtumo $x_1(t) - x_2(t)$ ribinės reikšmės $x_1(+\infty) - x_2(+\infty)$ skaičiavimą (žr. (2.52)):

$$x_2(+\infty) - x_1(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} [p(X_2(p) - X_1(p))] = \\ = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_1(p)}{p} \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{11} - \Delta_{12}}{\Delta} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_2(p)}{p} \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{21} - \Delta_{22}}{\Delta} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_3(p)}{p} \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{31} - \Delta_{32}}{\Delta} + \\ + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_4(p)}{p} \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{41} - \Delta_{42}}{\Delta} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_5(p)}{p} \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{51} - \Delta_{52}}{\Delta}. \quad (2.76)$$

Skaičiuojant ribas gauname neapibrėžtumą $\left(\frac{0}{0}\right)$, tad taikome Lopitalio taisyklę.

$$\text{Randame } \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_1(p))'_p}{p'_p} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(\Delta_{11} - \Delta_{12})'_p}{\Delta'_p} \quad (\text{ribos } \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_i(p))'_p}{p'_p}, \quad i, j = \overline{1,5} \text{ skaičiavimas}$$

pateiktas 2 priede).

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_1(p))'_p}{p'_p} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(\Delta_{11} - \Delta_{12})'_p}{\Delta'_p} =$$

$$\begin{aligned}
&= f_{01} \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\left((p + \kappa)^4 - (p + \kappa)^2 \kappa^2 e^{-2p\tau} + \frac{1}{8} \kappa^4 e^{-4p\tau} - \frac{1}{2} (p + \kappa)^3 \kappa e^{-p\tau} + \frac{3}{8} (p + \kappa) \kappa^3 e^{-3p\tau} \right)'_p}{\left((p + \kappa)^5 + \frac{1}{2} (p + \kappa) \kappa^4 e^{-4p\tau} - \frac{3}{2} (p + \kappa)^3 \kappa^2 e^{-2p\tau} \right)'_p} = \quad (2.77) \\
&= f_{01} \cdot \frac{4\kappa^3 - 2\kappa^3 + 2\kappa^4 \tau - \frac{1}{2} \kappa^4 \tau - \frac{3}{2} \kappa^3 + \frac{1}{2} \kappa^4 \tau + \frac{3}{8} \kappa^3 - \frac{9}{8} \kappa^4 \tau}{5\kappa^4 + \frac{1}{2} \kappa^4 - 2\kappa^5 \tau - \frac{9}{2} \kappa^4 + 3\kappa^5 \tau} = f_{01} \cdot \frac{\frac{7}{8} \kappa^3 (1 + \kappa\tau)}{\kappa^4 (1 + \kappa\tau)} = \frac{7}{8} \frac{f_{01}}{\kappa}.
\end{aligned}$$

Analogišškai randame:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_2(p))'_p}{p'_p} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(\Delta_{21} - \Delta_{22})'_p}{\Delta'_p} = -\frac{1}{4} \frac{f_{02}}{\kappa}, \quad (2.78)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_3(p))'_p}{p'_p} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(\Delta_{31} - \Delta_{32})'_p}{\Delta'_p} = -\frac{1}{4} \frac{f_{03}}{\kappa}, \quad (2.79)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_4(p))'_p}{p'_p} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(\Delta_{41} - \Delta_{42})'_p}{\Delta'_p} = -\frac{1}{4} \frac{f_{04}}{\kappa}, \quad (2.80)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_5(p))'_p}{p'_p} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(\Delta_{51} - \Delta_{52})'_p}{\Delta'_p} = -\frac{1}{8} \frac{f_{05}}{\kappa}. \quad (2.81)$$

Išstatę (2.77), (2.78), (2.79), (2.80), (2.81) išraiškas į (2.76) gauname fazių skirtumo $x_1(+\infty) - x_2(+\infty)$ ribinę reikšmę:

$$x_1(+\infty) - x_2(+\infty) = \frac{7}{8} \frac{f_{01}}{\kappa} - \frac{1}{4} \frac{f_{02}}{\kappa} - \frac{1}{4} \frac{f_{03}}{\kappa} - \frac{1}{4} \frac{f_{04}}{\kappa} - \frac{1}{8} \frac{f_{05}}{\kappa}.$$

Analogišškai randame kitų fazių skirtumų ribines reikšmes:

$$x_1(+\infty) - x_3(+\infty) = \frac{3}{2} \frac{f_{01}}{\kappa} + \frac{f_{02}}{\kappa} - \frac{f_{03}}{\kappa} - \frac{f_{04}}{\kappa} - \frac{1}{2} \frac{f_{05}}{\kappa},$$

$$x_1(+\infty) - x_4(+\infty) = \frac{15}{8} \frac{f_{01}}{\kappa} + \frac{7}{4} \frac{f_{02}}{\kappa} - \frac{1}{4} \frac{f_{03}}{\kappa} - \frac{9}{4} \frac{f_{04}}{\kappa} - \frac{9}{8} \frac{f_{05}}{\kappa},$$

$$x_1(+\infty) - x_5(+\infty) = 2 \frac{f_{01}}{\kappa} + 2 \frac{f_{02}}{\kappa} - 2 \frac{f_{04}}{\kappa} - 2 \frac{f_{05}}{\kappa},$$

$$x_2(+\infty) - x_3(+\infty) = \frac{5}{8} \frac{f_{01}}{\kappa} + \frac{5}{4} \frac{f_{02}}{\kappa} - \frac{3}{4} \frac{f_{03}}{\kappa} - \frac{3}{4} \frac{f_{04}}{\kappa} - \frac{3}{8} \frac{f_{05}}{\kappa},$$

$$x_2(+\infty) - x_4(+\infty) = \frac{f_{01}}{\kappa} + 2 \frac{f_{02}}{\kappa} - 2 \frac{f_{04}}{\kappa} - \frac{f_{05}}{\kappa},$$

$$x_2(+\infty) - x_5(+\infty) = \frac{9 f_{01}}{8 \kappa} + \frac{9 f_{02}}{4 \kappa} + \frac{1 f_{03}}{4 \kappa} - \frac{7 f_{04}}{4 \kappa} - \frac{15 f_{05}}{8 \kappa},$$

$$x_3(+\infty) - x_4(+\infty) = \frac{3 f_{01}}{8 \kappa} + \frac{3 f_{02}}{4 \kappa} + \frac{3 f_{03}}{4 \kappa} - \frac{5 f_{04}}{4 \kappa} - \frac{5 f_{05}}{8 \kappa},$$

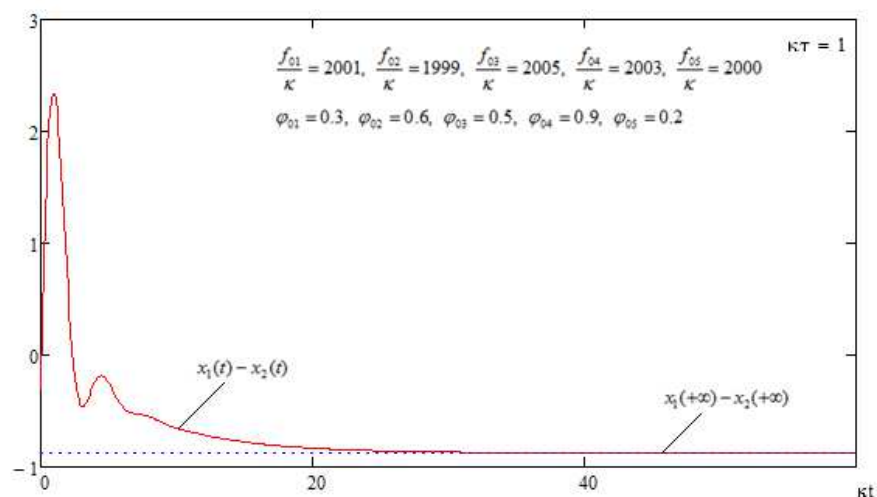
$$x_3(+\infty) - x_5(+\infty) = \frac{1 f_{01}}{2 \kappa} + \frac{f_{02}}{\kappa} + \frac{f_{03}}{\kappa} - \frac{f_{04}}{\kappa} - \frac{3 f_{05}}{2 \kappa},$$

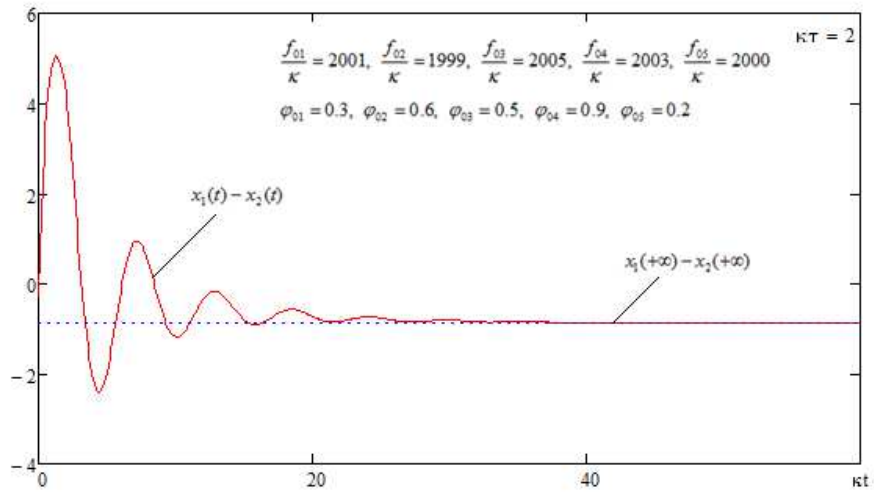
$$x_4(+\infty) - x_5(+\infty) = \frac{1 f_{01}}{8 \kappa} + \frac{1 f_{02}}{4 \kappa} + \frac{1 f_{03}}{4 \kappa} + \frac{1 f_{04}}{4 \kappa} - \frac{7 f_{05}}{8 \kappa}.$$

Šias ribines reikšmes palyginsime grafiniu būdu su gautomis generatorių virpesių fazių skirtumų ribinėmis reikšmėmis.

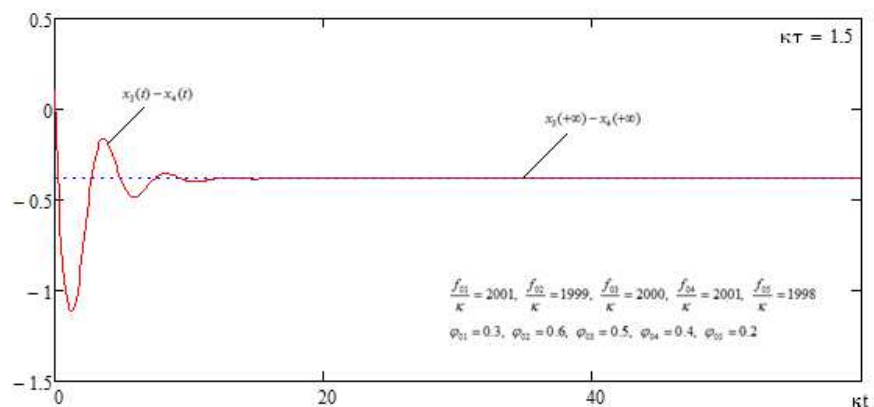
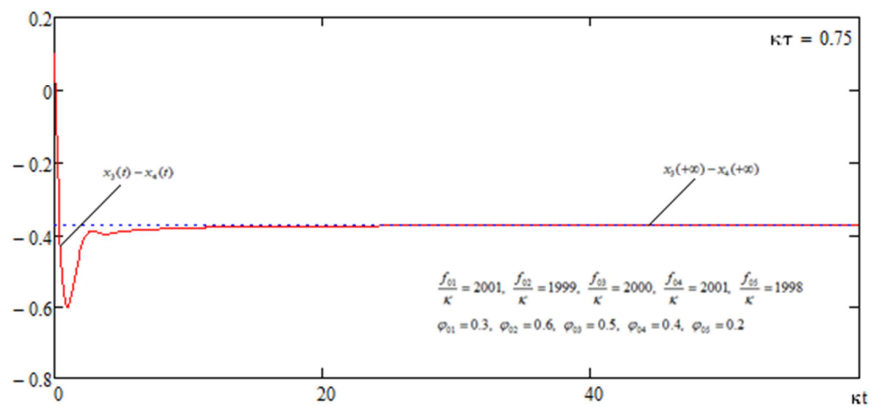
2.4.3.3. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ PEREINAMŲJŲ PROCESŲ TYRIMAS

Remdamiesi generatorių virpesių fazių skirtumų $x_i(t) - x_j(t)$, $i, j = \overline{1,5}$, $i \neq j$ išraiškėmis (žr. (2.74), (2.75)), išnagrinėsime generatorių virpesių fazių skirtumus (jų kitimą laiko bėgyje). Šiuos skirtumus pavaizduosime grafiškai, esant skirtingoms vėlavimo τ ir stiprinimo koeficiento κ sandaugos $\kappa\tau$ reikšmėms, ir palyginsime su gautomis ribinėmis reikšmėmis.





2.6 pav. Fazių skirtumo $x_1(t) - x_2(t)$, grafikai, kai vėlavimai $\kappa\tau = 1, \kappa\tau = 2$.



2.7 pav. Fazių skirtumo $x_3(t) - x_4(t)$, grafikai, kai vėlavimai $\kappa\tau = 0.75, \kappa\tau = 1.5$.

2.6 pav. ir 2.7 pav. pateikti fazių skirtumų grafikai. Iš grafikų matome, kuo didesnė sandaugos $\kappa\tau$ reikšmė, tuo didesnė fazių skirtumų svyravimo amplitudė. Prie didesnės amplitudės reikalingas didesnis atminties kiekis, kuris skiriamas ateinančios į komutacijos centrą informacijos užrašymui. Fazių skirtumai nusistovi prie ribinių reikšmių, apskaičiuotų taikant ribinės reikšmės teoremą. Kiti generatorių virpesių fazių skirtumai pateikti 8 priede.

IŠVADOS

- Rastos 5 – tos eilės matricos B , pakeltos k – tuoju laipsniu ($k \in N$), elementų analizinės išraiškos. Jos panaudotos skaičiuojant sinchronizacijos sistemos pereinamąsias funkcijas bei jų generatorių virpesių fazių skirtumus.
- Pereinamųjų procesų trukmė sinchronizacijos sistemoje priklauso nuo parametrų κ ir τ sandaugos. Didėjant $\kappa\tau$ pereinamojo proceso trukmė turi tendenciją didėti. Kai $\kappa\tau$ viršija 0.75, pereinamasis procesas sistemoje įgauna virpamojo proceso požymių.
- Kai vėlavimo τ ir koeficiento κ sandaugos reikšmė daug mažesnė už vienetą ($\kappa\tau < 0.01$), pereinamosios funkcijos praktiškai nepriklauso nuo vėlavimo dydžio. Tuo atveju galima nagrinėti supaprastintą sistemos matematinį modelį – matricinę diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento.
- Kai vėlavimai skirtingi ir $\tau_1 < \tau_2$, pereinamųjų procesų trukmė sinchronizacijos sistemoje priklauso nuo mažesniosios sandaugos $\kappa\tau_1$ reikšmės. Jai didėjant, pereinamųjų procesų trukmė turi tendenciją didėti.
- Gautos tarpusavio sinchronizacijos sistemos generatorių virpesių fazių skirtumų ribinės reikšmės tiesiog proporcingos generatorių savųjų dažnių skirtumams ir atvirkščiai proporcingos stiprinimo koeficientui κ . Jos nepriklauso nuo generatorių virpesių fazių pradiniu laiko momentu bei nuo vėlavimo τ .
- Kuo didesnė sandaugos $\kappa\tau$ reikšmė, tuo didesnė fazių skirtumų svyravimo amplitudė. Prie didesnės amplitudės reikalingas didesnis atminties kiekis, kuris skiriamas ateinančios į komutacijos centrą informacijos užrašymui. Rekomenduojama dirbti prie mažesnių $\kappa\tau$ reikšmių – taip sutaupomas reikalingos atminties informacijos užrašymui.
- Skaičiuojant pereinamąsias funkcijas bei generatorių virpesių fazių skirtumus MathCAD programa, skaičiavimo laikas atvirkščiai proporcingas $\kappa\tau$ (pavyzdžiui, kai $\kappa\tau = 0.1$, pereinamųjų funkcijų skaičiavimas trunka ~3 min., $\kappa\tau = 1 - 1$ s.).

LITERATŪRA

1. Rimas J. Operacinis skaičiavimas: mokomji knyga. Technologija – Kaunas, 2006 – 63 p.
2. Nagelė A., Paprečkienė L. Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija: mokomji knyga. Žara – Vilnius, 1996 – 430 p.
3. Pekarskas V, Pekarskienė A. Tiesinės algebros ir analizinės geometrijos elementai: mokomoji knyga; Technologija – Kaunas, 2004 – 385 p.
4. Pekarskas V. Diferencialinis ir integralinis skaičiavimas 1 d: mokomji knyga. Technologija – Kaunas. 2000 – 385 p.
5. Dosinas G, Navickas Z. Matricų analizė: paskaitų konspektas; Technologija – Kaunas. 2010 – 111 p.
6. Kvedaras B. Matricų teorija: mokomoji knyga; Technologija – Kaunas, 1999 – 390 p.
7. Kalmanovskii V., Myshkis A. Applied theory of functional differential equations: mokomoji knyga; Kluwer academic publishers – Dordrecht / Boston / London. 1992 – 234 p.
8. Mason J. C., Handscomb D. C. Chebyshev polynomials; Chapman & Hall / CRC – London, 2002 – 341 p.

1. PRIEDAS

LAPLASO TRASFORMACIJOS FORMULĖS

$$1(t) \div \frac{1}{p},$$

$$1(t - \tau) \div \frac{1}{p} e^{-p\tau},$$

$$e^{-at} \div \frac{1}{p+a},$$

$$e^{-a(t-\tau)} 1(t - \tau) \div \frac{1}{p+a} e^{-p\tau},$$

$$\frac{t^n}{n!} 1(t) \div \frac{1}{p^{n+1}}, \text{ kai } n \in N,$$

$$\frac{t^n}{n!} e^{-at} 1(t) \div \frac{1}{(p+a)^{n+1}}, \text{ kai } n \in N,$$

$$\frac{(t - \tau)^n}{n!} e^{-a(t-\tau)} 1(t - \tau) \div \frac{1}{(p+a)^{n+1}} e^{-p\tau},$$

$$\frac{1}{a^{n+1}} \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(at)^k}{k!} e^{-at} \right) \div \frac{1}{p(p+a)^{n+1}},$$

$$\frac{1}{a^{n+2}} \left(at - (n+1) + \sum_{k=0}^n \sum_{S=0}^k \frac{(at)^S}{S!} e^{-at} \right) \div \frac{1}{p^2 (p+a)^{n+1}}.$$

2. PRIEDAS

$$\mathbf{RIBOS} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_i(p))'_p}{(p)'_p} \mathbf{RADIMAS}$$

Skaičiuojame ribą $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_1(p))'_p}{(p)'_p}$ ($Z_1(p)$ išraišką žr. (2.53)):

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_1(p))'_p}{(p)'_p} &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\left(p^2 \left(f_{01} \frac{1}{p} + \varphi_{01} + \kappa \left[f_{02} \frac{1}{p^2} - f_{02} \tau \frac{1}{p} + \varphi_{02} \frac{1}{p} - f_{02} \frac{1}{p} e^{-p\tau} - \varphi_{02} \frac{1}{p} e^{-p\tau} \right] \right) \right)'_p}{(p)'_p} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(f_{01} p + \varphi_{01} p^2 + \kappa [f_{02} - f_{02} \tau \cdot p + \varphi_{02} p - f_{02} p e^{-p\tau} - \varphi_{02} p e^{-p\tau}])'_p}{(p)'_p} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{f_{01} + 2p\varphi_{01} - f_{02} \tau \kappa + \kappa \varphi_{02} - [\kappa \varphi_{02} e^{-p\tau} - \kappa \varphi_{02} p \tau e^{-p\tau} + f_{02} \kappa \tau e^{-p\tau}]}{1} = \\ &= f_{01} - f_{02} \kappa \tau + \varphi_{02} \kappa + f_{02} \kappa \tau - \varphi_{02} \kappa = f_{01}. \end{aligned}$$

Analogiškai gauname:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_2(p))'_p}{(p)'_p} = f_{02}, \quad \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_3(p))'_p}{(p)'_p} = f_{03}, \quad \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_4(p))'_p}{(p)'_p} = f_{04}, \quad \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_5(p))'_p}{(p)'_p} = f_{05}.$$

Taigi:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_i(p))'_p}{(p)'_p} = f_{0i}, \quad i = \overline{1,5}.$$

3. PRIEDAS

PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ SKAIČIAVIMO ALGORITMO PAVYZDYS, KAI VĖLAVIMAI VIENODI

Pateikiame pereinamųjų funkcijų $h_{i1}(t)$, $i = \overline{1,5}$ skaičiavimo pavyzdį:

$$\text{ORIGIN} = 0 \quad \text{ORIGIN} := 1 \quad a := \sqrt{2}$$

$$N := 40 \quad \kappa\tau := 2.5$$

$$d := \frac{N}{\kappa\tau} - 1 \quad \kappa\tau := 0, 0.1..(d + 1) \cdot \kappa\tau$$

$$L := \text{floor}(d)$$

$$H(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$S(\kappa\tau, \kappa\tau, k) := \begin{cases} s \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 1..k \\ \quad s \leftarrow s \cdot \frac{\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau}{i} \\ s \end{cases}$$

$$b_{11}(k) := \frac{1}{8} \cdot [(-2)^k + 2 \cdot (-a)^k + 2 \cdot a^k + 2^k]$$

$$b_{12}(k) := \frac{1}{8} \cdot [(-2)^{k+1} + 4 \cdot (-a)^{k-1} + 4 \cdot a^{k-1} + 2^{k+1}]$$

$$b_{13}(k) := \frac{1}{8} \cdot [2 \cdot (-2)^k + 2^{k+1}]$$

$$b_{14}(k) := \frac{1}{8} \cdot [(-2)^{k+1} + \frac{4}{a} \cdot (-a)^k - \frac{4}{a} \cdot a^k + 2^{k+1}]$$

$$b_{15}(k) := \frac{1}{8} \cdot [(-2)^k - 2 \cdot (-a)^k - 2 \cdot a^k + 2^k]$$

$$h_{11}(\kappa t) := e^{-\kappa t} \cdot H(\kappa t) + \sum_{k=1}^L \left[\frac{1}{2^k} \cdot S(\kappa t, \kappa \tau, k) \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot H(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \cdot b_{11}(k) \right]$$

$$h_{21}(\kappa t) := \sum_{k=1}^L \left[\frac{1}{2^k} \cdot S(\kappa t, \kappa \tau, k) \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot H(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \cdot b_{21}(k) \right]$$

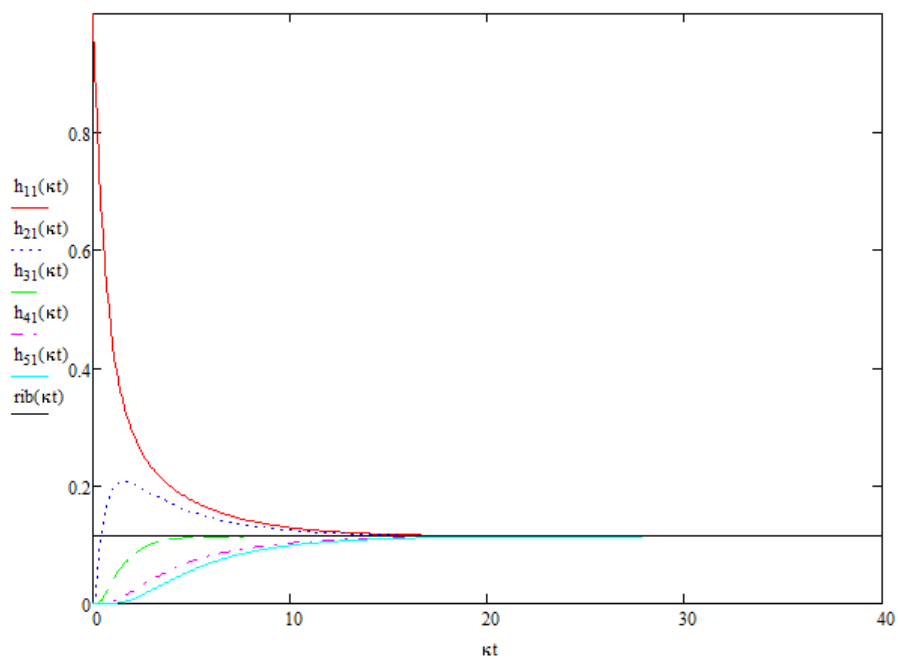
$$h_{31}(\kappa t) := \sum_{k=1}^L \left[\frac{1}{2^k} \cdot S(\kappa t, \kappa \tau, k) \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot H(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \cdot b_{31}(k) \right]$$

$$h_{41}(\kappa t) := \sum_{k=1}^L \left[\frac{1}{2^k} \cdot S(\kappa t, \kappa \tau, k) \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot H(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \cdot b_{41}(k) \right]$$

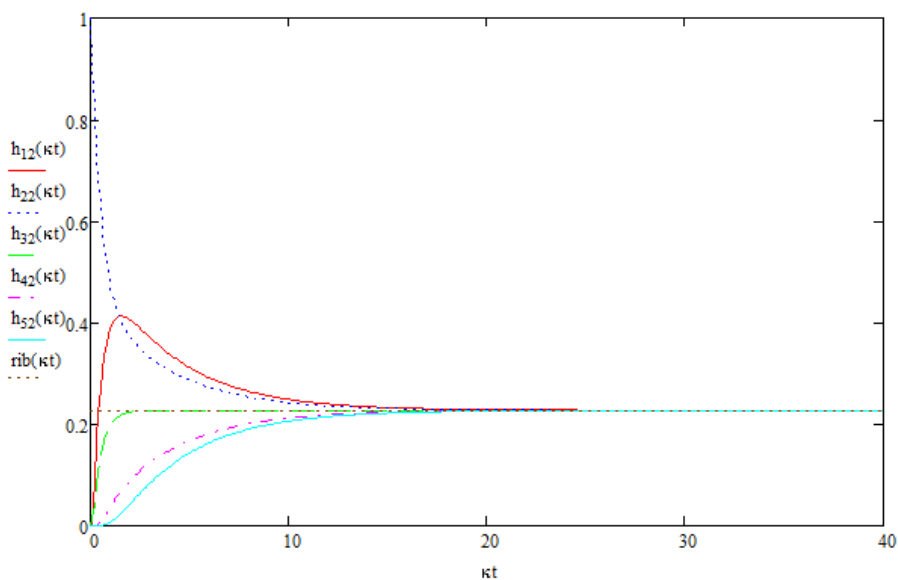
$$h_{51}(\kappa t) := \sum_{k=1}^L \left[\frac{1}{2^k} \cdot S(\kappa t, \kappa \tau, k) \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot H(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \cdot b_{51}(k) \right]$$

4. PRIEDAS

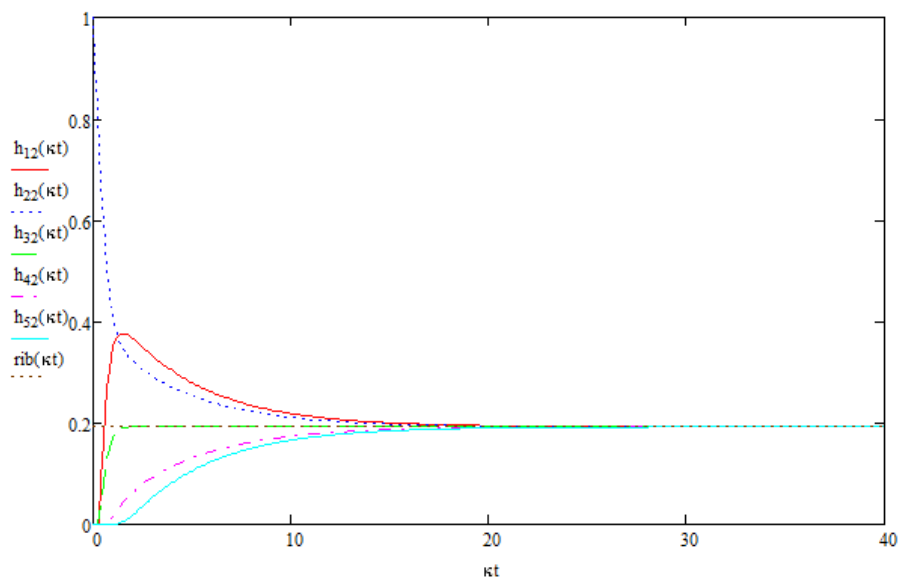
PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ GRAFIKAI, KAI VĒLAVIMAI VIENODI



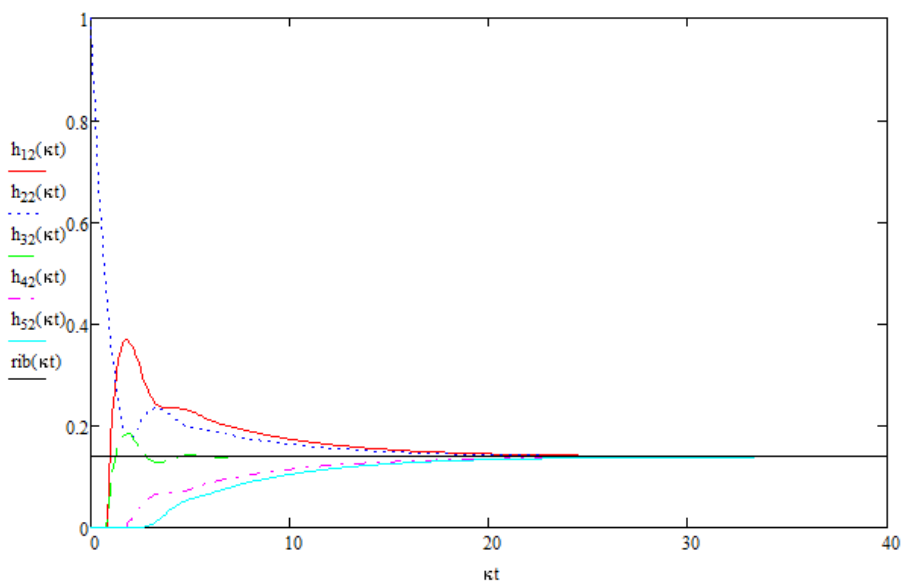
P.1 pav. Pereinamujų funkcijų $h_{11}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.1$



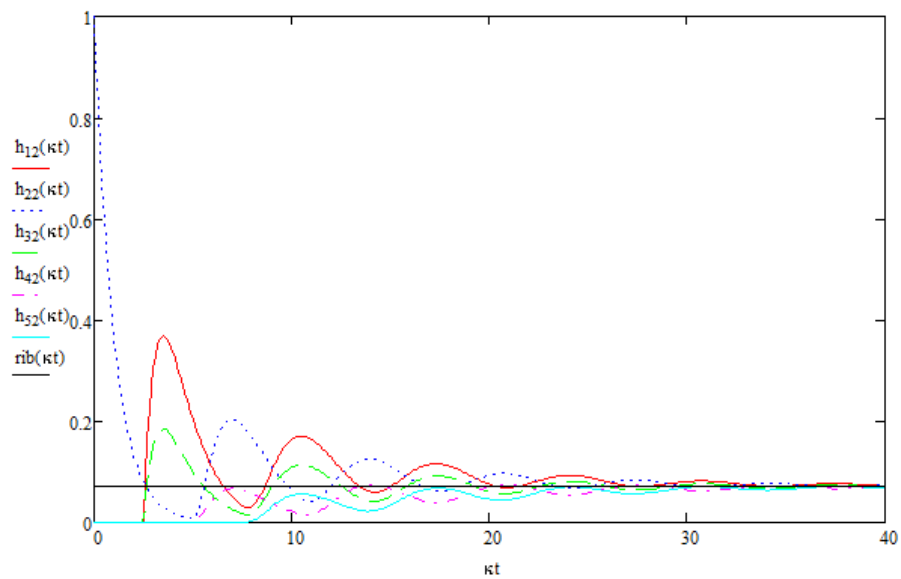
P.2 pav. Pereinamujų funkcijų $h_{12}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.1$



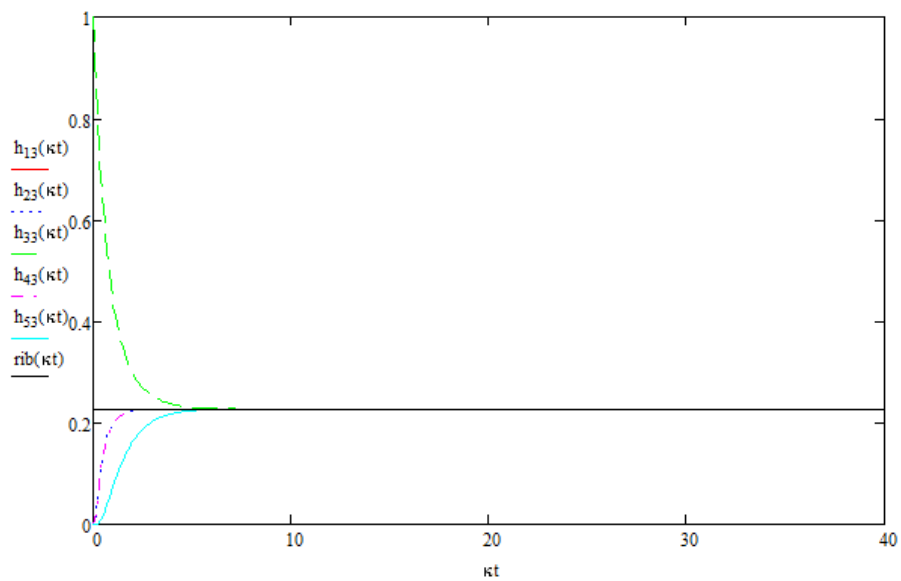
P.3 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i2}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.3$



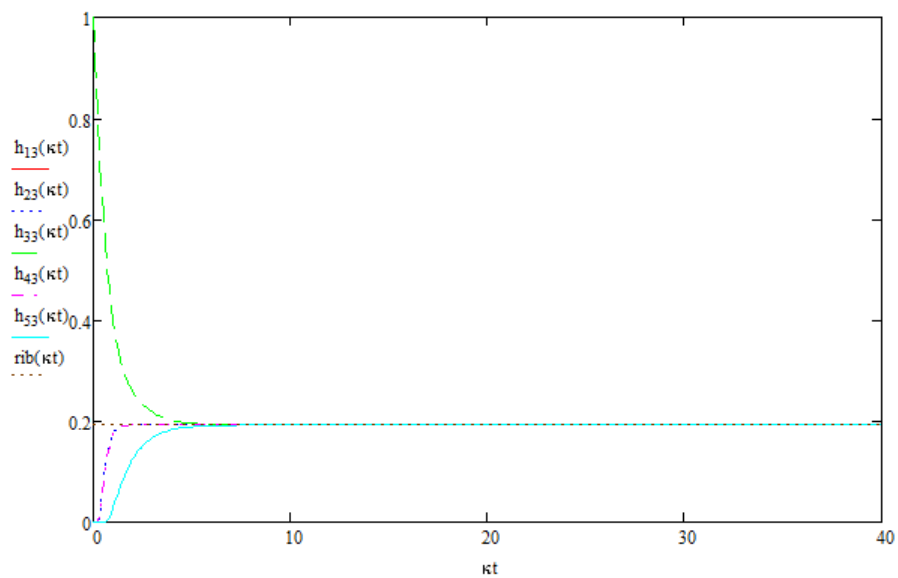
P.4 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i2}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.8$



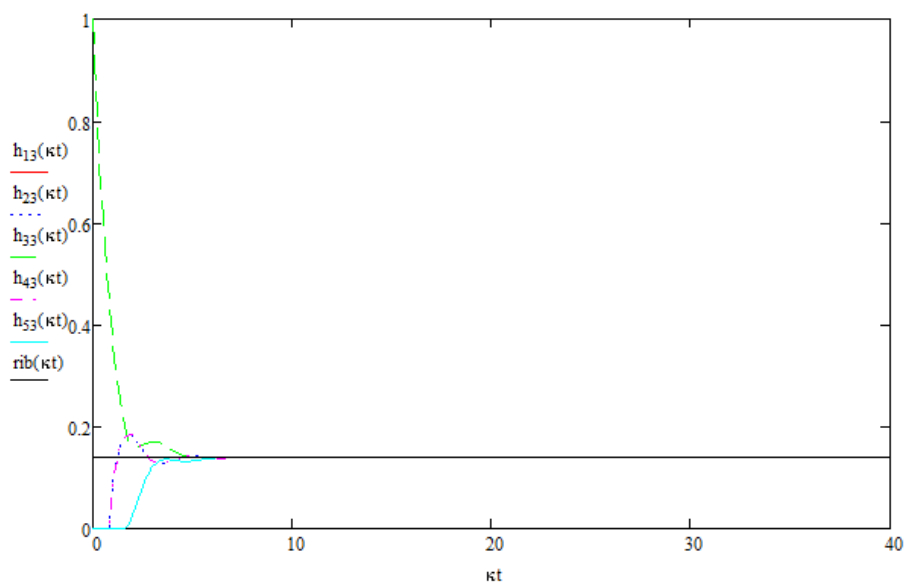
P.5 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i2}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 2.5$



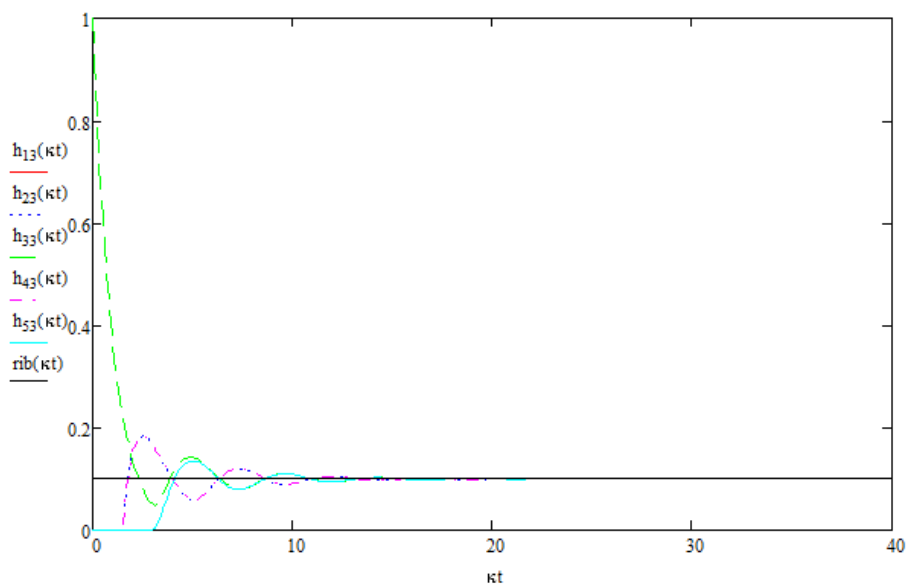
P.6 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i3}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.1$



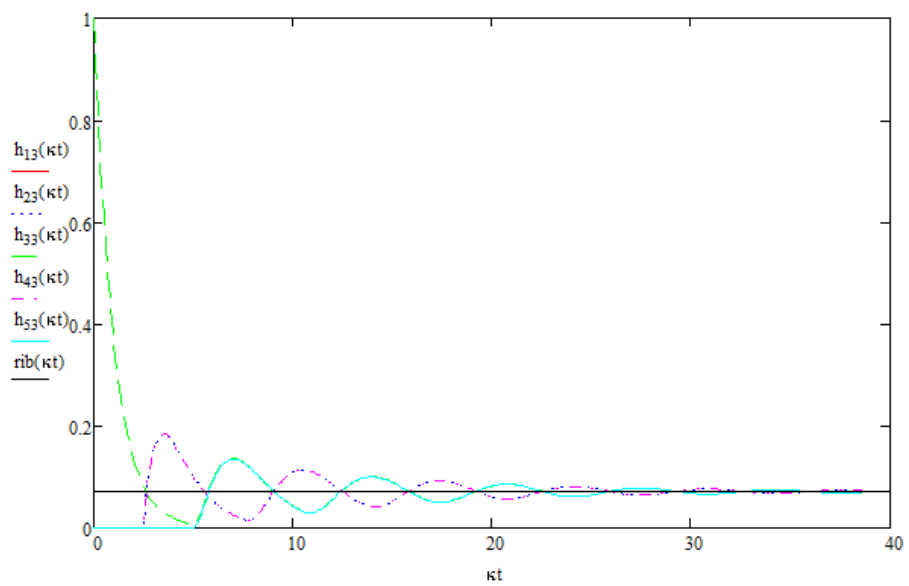
P.7 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i3}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.3$



P.8 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i3}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.8$



P.9 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i3}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1.5$



P.10 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{i3}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 2.5$

5. PRIEDAS

PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ SKAIČIAVIMO ALGORITMO PAVYZDYS, KAI VĖLAVIMAI SKIRTINGI

Pateikiame pereinamųjų funkcijų $h_{i_2}(t)$, $i = \overline{1,5}$ skaičiavimo pavyzdį:

$$\text{ORIGIN} = 0 \quad \underline{\text{ORIGIN}} := 1$$

$$\underline{N} := 20 \quad \kappa\tau_1 := 2.5 \quad \kappa\tau_2 := 3$$

$$d := \frac{N}{\kappa\tau_1} - 1 \quad \kappa t := 0, 0.1..(d + 1) \cdot \kappa\tau_1$$

$$\underline{L} := \text{floor}(d)$$

$$\underline{H}(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{C} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad O := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

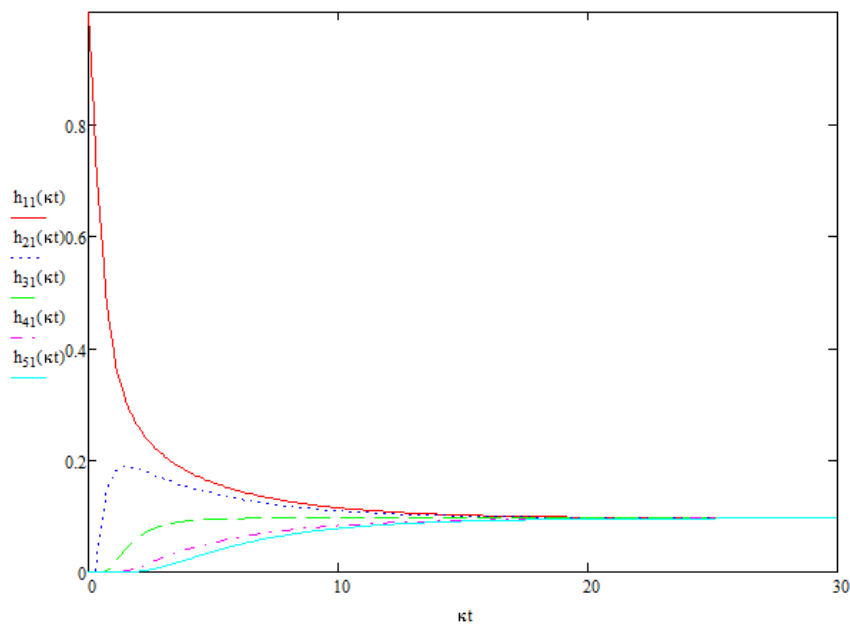
$$\eta(k, k_2) := \begin{cases} E & \text{if } (k = 0) \wedge (k_2 = 0) \\ \text{otherwise} \\ \quad B & \text{if } (k = 1) \wedge (k_2 = 0) \\ \quad \text{otherwise} \\ \quad \quad C & \text{if } (k = 1) \wedge (k_2 = 1) \\ \quad \quad \text{otherwise} \\ \quad \quad \quad O & \text{if } [(k < 0) \vee (k_2 < 0)] \vee (k_2 > k) \\ \quad \quad \quad B \cdot \eta(k - 1, k_2) + C \cdot \eta(k - 1, k_2 - 1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$j := 2$$

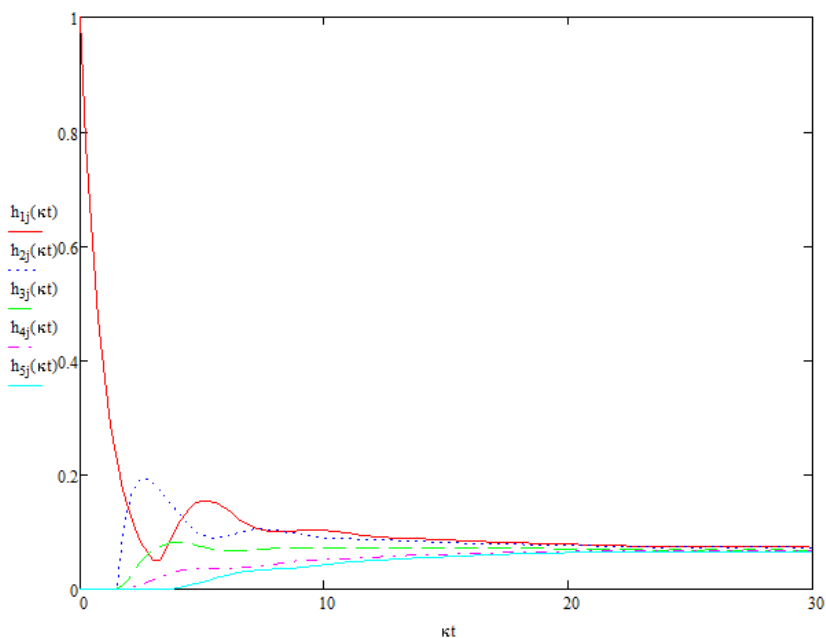
$$\begin{aligned}
h_{1j}(\kappa t) &= \sum_{k=0}^L \sum_{k_2=0}^k \left[\frac{1}{2^k} \cdot \eta(k, k_2)_{1,j} \cdot \frac{[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]]^k}{k!} \cdot e^{-[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]]} \cdot H[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]] \right] \\
h_{2j}(\kappa t) &= \sum_{k=0}^L \sum_{k_2=0}^k \left[\frac{1}{2^k} \cdot \eta(k, k_2)_{2,j} \cdot \frac{[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]]^k}{k!} \cdot e^{-[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]]} \cdot H[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]] \right] \\
h_{3j}(\kappa t) &= \sum_{k=0}^L \sum_{k_2=0}^k \left[\frac{1}{2^k} \cdot \eta(k, k_2)_{3,j} \cdot \frac{[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]]^k}{k!} \cdot e^{-[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]]} \cdot H[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]] \right] \\
h_{4j}(\kappa t) &= \sum_{k=0}^L \sum_{k_2=0}^k \left[\frac{1}{2^k} \cdot \eta(k, k_2)_{4,j} \cdot \frac{[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]]^k}{k!} \cdot e^{-[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]]} \cdot H[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]] \right] \\
h_{5j}(\kappa t) &= \sum_{k=0}^L \sum_{k_2=0}^k \left[\frac{1}{2^k} \cdot \eta(k, k_2)_{5,j} \cdot \frac{[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]]^k}{k!} \cdot e^{-[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]]} \cdot H[\kappa t - [k \cdot \kappa \tau_1 - k_2 \cdot (\kappa \tau_2 - \kappa \tau_1)]] \right]
\end{aligned}$$

6. PRIEDAS

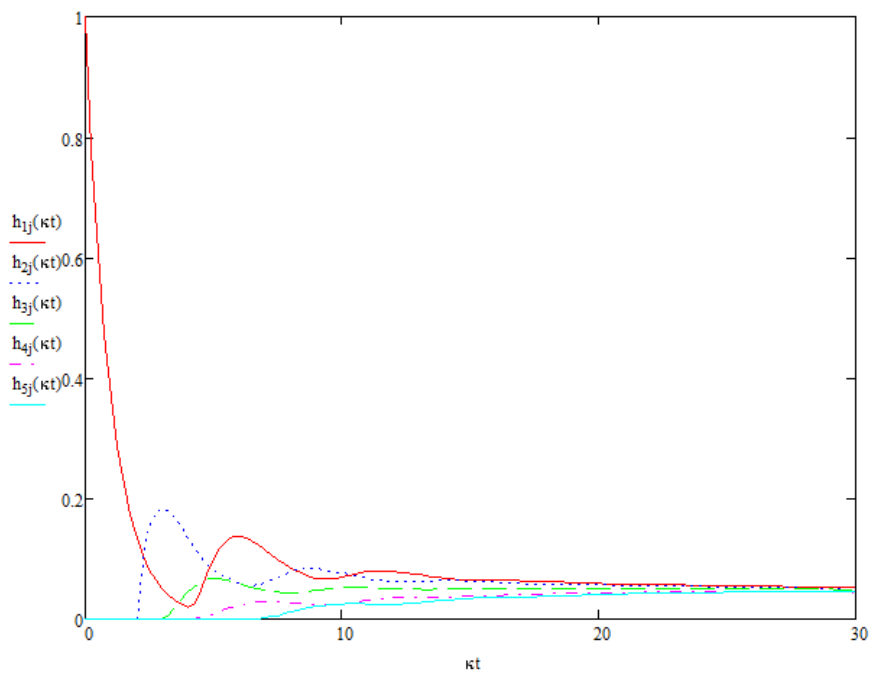
PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ GRAFIKAI, KAI VĒLAVIMAI SKIRTINGI



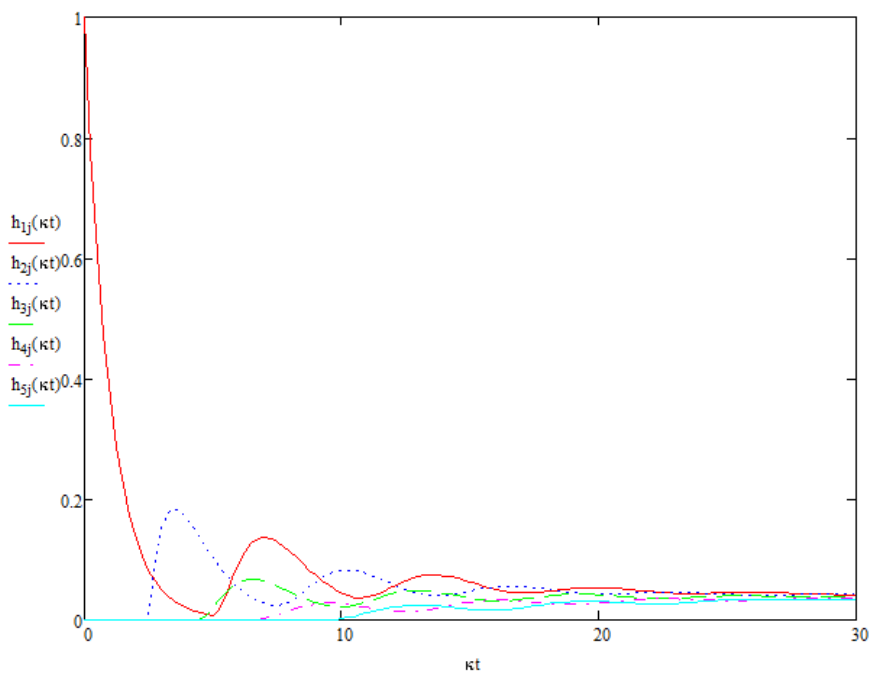
P.11 pav. Pereinamųjų funkciju $h_{i1}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau_1 = 0.3$, $\kappa\tau_2 = 0.5$



P.12 pav. Pereinamųjų funkciju $h_{i1}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau_1 = 1.5$, $\kappa\tau_2 = 3$



P.13 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau_1 = 2$, $\kappa\tau_2 = 3$



P.14 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau_1 = 2.5$, $\kappa\tau_2 = 3$

7. PRIEDAS

GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ SKAIČIAVIMO ALGORITMO PAVYZDYS

Pateikiame fazių skirtumo $x_1(t) - x_2(t)$ skaičiavimo pavyzdį:

$$\begin{aligned} \text{ORIGIN} &:= 1 & a &:= \sqrt{2} \\ \\ f_{01} &:= \begin{bmatrix} f_{01} \\ \kappa \end{bmatrix} \\ \kappa T &:= 1 & N &:= 60 \\ L &:= \left(\frac{N}{\kappa T} \right) - 1 \\ \kappa t &:= 0, 0.1 \dots (L + 1) \cdot \kappa T & H(t) &:= \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ d &:= \text{floor}(L) \\ \\ f_{01} &:= 2001 & f_{02} &:= 1999 & f_{03} &:= 2005 & f_{04} &:= 2003 & f_{05} &:= 2000 \\ \varphi_{01} &:= 0.3 & \varphi_{02} &:= 0.6 & \varphi_{03} &:= 0.5 & \varphi_{04} &:= 0.9 & \varphi_{05} &:= 0.2 \\ \\ \varphi_{13} &:= \varphi_{01} + \varphi_{03} & \varphi_{24} &:= \varphi_{02} + \varphi_{04} & \varphi_{35} &:= \varphi_{03} + \varphi_{05} \\ f_{13} &:= f_{01} + f_{03} & f_{24} &:= f_{02} + f_{04} & f_{35} &:= f_{03} + f_{05} \\ \\ bb_{11} &:= 1 & bb_{12} &:= 0 & bb_{13} &:= 0 & bb_{14} &:= 0 & bb_{15} &:= 0 \\ bb_{21} &:= 0 & bb_{22} &:= 1 & bb_{23} &:= 0 & bb_{24} &:= 0 & bb_{25} &:= 0 \\ \\ b_{11}(k) &:= \frac{1}{8} \cdot [(-2)^k + 2 \cdot (-a)^k + 2 \cdot a^k + 2^k] \\ b_{12}(k) &:= \frac{1}{8} \cdot [(-2)^{k+1} + 4 \cdot (-a)^{k-1} + 4 \cdot a^{k-1} + 2^{k+1}] \\ b_{13}(k) &:= \frac{1}{8} \cdot [2 \cdot (-2)^k + 2^{k+1}] \\ b_{14}(k) &:= \frac{1}{8} \cdot [(-2)^{k+1} + \frac{4}{a} \cdot (-a)^k - \frac{4}{a} \cdot a^k + 2^{k+1}] \\ b_{15}(k) &:= \frac{1}{8} \cdot [(-2)^k - 2 \cdot (-a)^k - 2 \cdot a^k + 2^k] \\ b_{21}(k) &:= \frac{1}{8} \cdot [(-2)^k \cdot (-1) + (-a)^{k+1} + a^{k+1} + 2^k] \\ b_{22}(k) &:= \frac{1}{8} \cdot [(-2)^{k+1} \cdot (-1) + 2 \cdot (-a)^k + 2 \cdot a^k + 2^{k+1}] \\ b_{23}(k) &:= \frac{1}{8} \cdot [(-2)^{k+1} + 2^{k+1}] \\ b_{24}(k) &:= \frac{1}{8} \cdot [(-2)^{k+1} \cdot (-1) - 2 \cdot (-a)^k - 2 \cdot a^k + 2^{k+1}] \\ b_{25}(k) &:= \frac{1}{8} \cdot [(-2)^k \cdot (-1) + a \cdot (-a)^k - a^{k+1} + 2^k] \\ \\ \alpha\alpha_{121} &:= \varphi_{01} \cdot (bb_{11} - bb_{21}) + \varphi_{02} \cdot (bb_{12} - bb_{22}) + \varphi_{03} \cdot (bb_{13} - bb_{23}) + \varphi_{04} \cdot (bb_{14} - bb_{24}) + \varphi_{05} \cdot (bb_{15} - bb_{25}) \\ \alpha\alpha_{122} &:= f_{01} \cdot (bb_{11} - bb_{21}) + f_{02} \cdot (bb_{12} - bb_{22}) + f_{03} \cdot (bb_{13} - bb_{23}) + f_{04} \cdot (bb_{14} - bb_{24}) + f_{05} \cdot (bb_{15} - bb_{25}) \\ \alpha\alpha_{123} &:= \varphi_{02} \cdot (bb_{11} - bb_{21}) + \frac{\varphi_{13}}{2} \cdot (bb_{12} - bb_{22}) + \frac{\varphi_{24}}{2} \cdot (bb_{13} - bb_{23}) + \frac{\varphi_{35}}{2} \cdot (bb_{14} - bb_{24}) + \varphi_{04} \cdot (bb_{15} - bb_{25}) \\ \alpha\alpha_{124} &:= f_{02} \cdot (bb_{11} - bb_{21}) + \frac{f_{13}}{2} \cdot (bb_{12} - bb_{22}) + \frac{f_{24}}{2} \cdot (bb_{13} - bb_{23}) + \frac{f_{35}}{2} \cdot (bb_{14} - bb_{24}) + f_{04} \cdot (bb_{15} - bb_{25}) \\ \alpha\alpha_{1222} &:= \alpha\alpha_{122} + \alpha\alpha_{123} - \kappa T \cdot \alpha\alpha_{124} \end{aligned}$$

$$\alpha_{121}(k) := \varphi_{01} \cdot (b_{11}(k) - b_{21}(k)) + \varphi_{02} \cdot (b_{12}(k) - b_{22}(k)) + \varphi_{03} \cdot (b_{13}(k) - b_{23}(k)) + \varphi_{04} \cdot (b_{14}(k) - b_{24}(k)) + \varphi_{05} \cdot (b_{15}(k) - b_{25}(k))$$

$$\alpha_{122}(k) := f_{01} \cdot (b_{11}(k) - b_{21}(k)) + f_{02} \cdot (b_{12}(k) - b_{22}(k)) + f_{03} \cdot (b_{13}(k) - b_{23}(k)) + f_{04} \cdot (b_{14}(k) - b_{24}(k)) + f_{05} \cdot (b_{15}(k) - b_{25}(k))$$

$$\alpha_{123}(k) := \varphi_{02} \cdot (b_{11}(k) - b_{21}(k)) + \frac{\varphi_{13}}{2} \cdot (b_{12}(k) - b_{22}(k)) + \frac{\varphi_{24}}{2} \cdot (b_{13}(k) - b_{23}(k)) + \frac{\varphi_{35}}{2} \cdot (b_{14}(k) - b_{24}(k)) + \varphi_{04} \cdot (b_{15}(k) - b_{25}(k))$$

$$\alpha_{124}(k) := f_{02} \cdot (b_{11}(k) - b_{21}(k)) + \frac{f_{13}}{2} \cdot (b_{12}(k) - b_{22}(k)) + \frac{f_{24}}{2} \cdot (b_{13}(k) - b_{23}(k)) + \frac{f_{35}}{2} \cdot (b_{14}(k) - b_{24}(k)) + f_{04} \cdot (b_{15}(k) - b_{25}(k))$$

$$\alpha_{1222}(k) := \alpha_{122}(k) + \alpha_{123}(k) - \kappa\tau \cdot \alpha_{124}(k)$$

$$ss_1(\kappa\tau) := \alpha\alpha_{121} \cdot e^{-\kappa\tau} \cdot H(\kappa\tau)$$

$$ss_2(\kappa\tau) := \alpha\alpha_{1222} \cdot (1 - e^{-\kappa\tau}) \cdot H(\kappa\tau)$$

$$ss_3(\kappa\tau) := \alpha\alpha_{124} \cdot (\kappa\tau - 1 + e^{-\kappa\tau}) \cdot H(\kappa\tau)$$

$$ss_4(\kappa\tau) := \alpha\alpha_{123} \cdot (1 - e^{-\kappa\tau}) \cdot H(\kappa\tau)$$

$$s_1(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\binom{1}{2^k} \cdot \alpha_{121}(k) \cdot \frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^k}{k!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \cdot H(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$s_2(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\binom{1}{2^k} \cdot \alpha_{1222}(k) \cdot \left[1 - \sum_{r=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot H(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

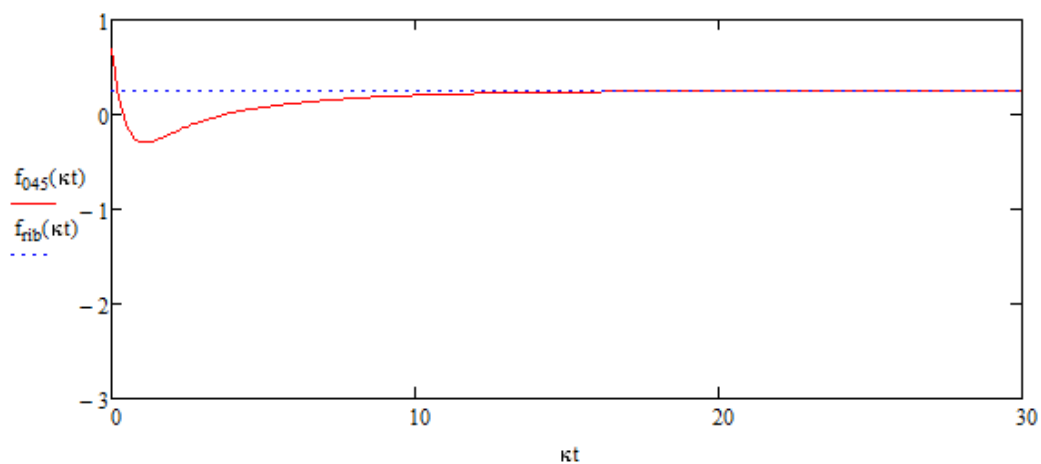
$$s_3(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\binom{1}{2^k} \cdot \alpha_{124}(k) \cdot \left[(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) - (k+1) + \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^r \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^s}{s!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot H(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$s_4(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\binom{1}{2^k} \cdot \alpha_{123}(k) \cdot \left[1 - \sum_{r=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot H(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

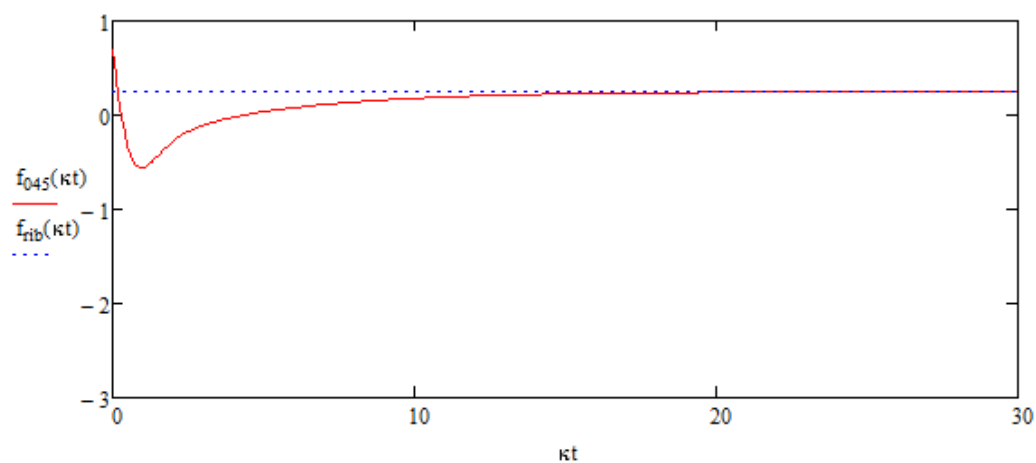
$$f_{012}(\kappa\tau) := ss_1(\kappa\tau) + ss_2(\kappa\tau) + ss_3(\kappa\tau) - ss_3(\kappa\tau - \kappa\tau) - ss_4(\kappa\tau - \kappa\tau) + s_1(\kappa\tau) + s_2(\kappa\tau) + s_3(\kappa\tau) - s_3(\kappa\tau - \kappa\tau) - s_4(\kappa\tau - \kappa\tau)$$

8. PRIEDAS

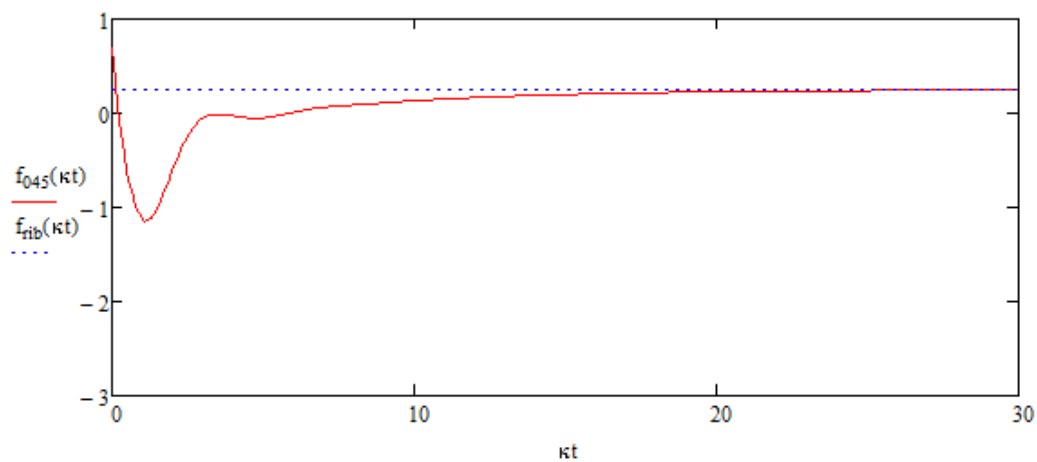
GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ GRAFIKAI



**P.15 pav. Fazių skirtumų $x_4(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.2$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2003$,
 $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2002$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{05}}{\kappa} = 2001$, $\varphi_{01} = 0.3$, $\varphi_{02} = 0.4$, $\varphi_{03} = 0.5$, $\varphi_{04} = 0.9$, $\varphi_{05} = 0.2$**

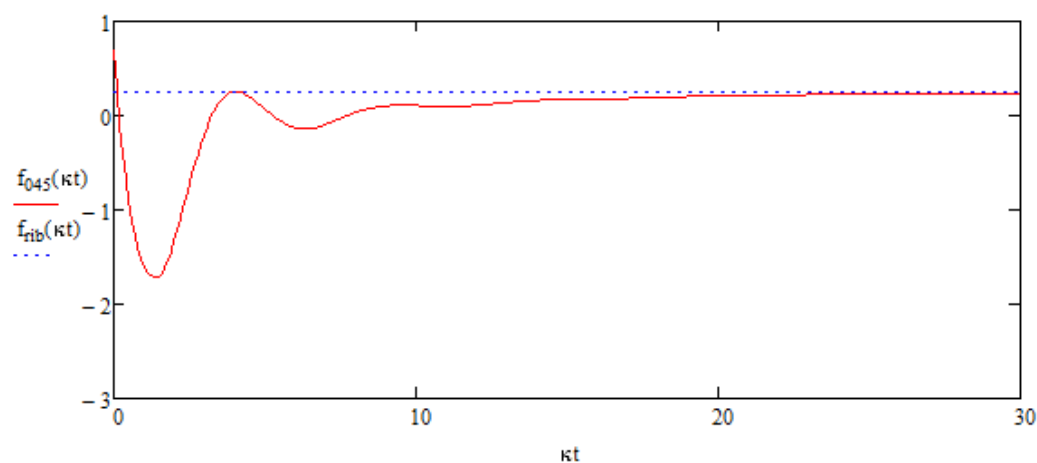


**P.16 pav. Fazių skirtumų $x_4(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2003$,
 $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2002$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{05}}{\kappa} = 2001$, $\varphi_{01} = 0.3$, $\varphi_{02} = 0.4$, $\varphi_{03} = 0.5$, $\varphi_{04} = 0.9$, $\varphi_{05} = 0.2$**



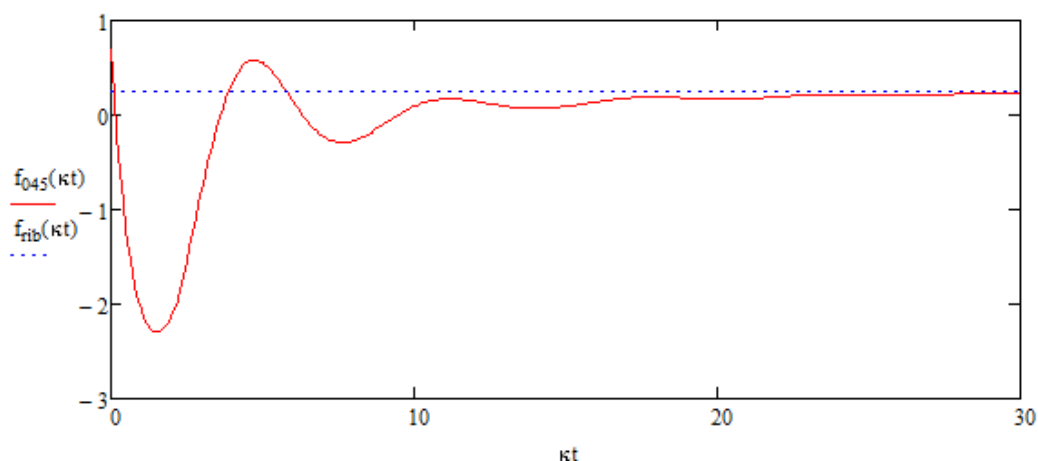
P.17 pav. Fazių skirtumų $x_4(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2003$,

$$\frac{f_{03}}{\kappa} = 2002, \frac{f_{04}}{\kappa} = 2000, \frac{f_{05}}{\kappa} = 2001, \varphi_{01} = 0.3, \varphi_{02} = 0.4, \varphi_{03} = 0.5, \varphi_{04} = 0.9, \varphi_{05} = 0.2$$



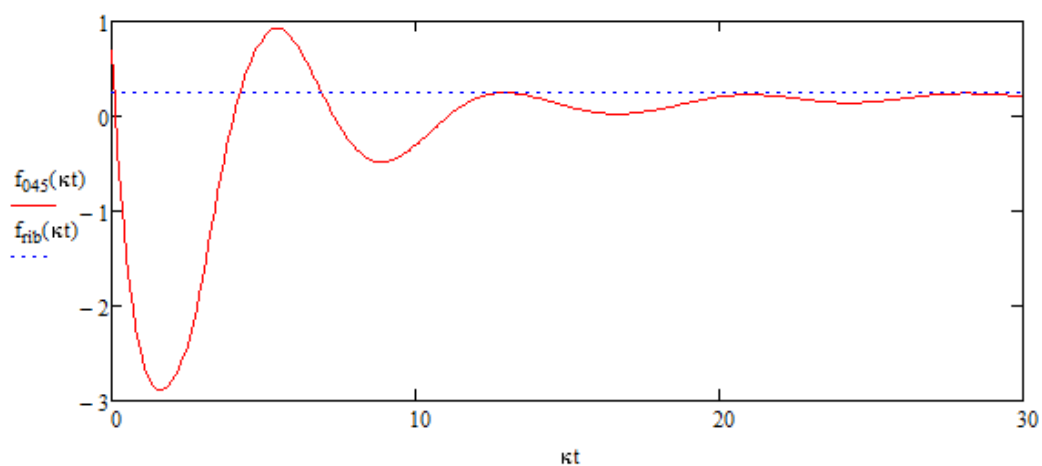
P.18 pav. Fazių skirtumų $x_4(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2003$,

$$\frac{f_{03}}{\kappa} = 2002, \frac{f_{04}}{\kappa} = 2000, \frac{f_{05}}{\kappa} = 2001, \varphi_{01} = 0.3, \varphi_{02} = 0.4, \varphi_{03} = 0.5, \varphi_{04} = 0.9, \varphi_{05} = 0.2$$



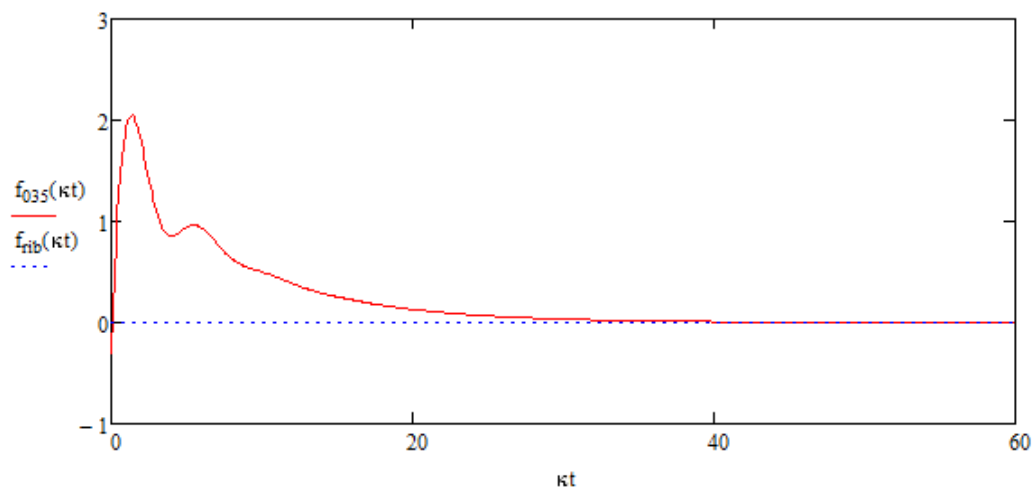
P.19 pav. Fazių skirtumų $x_4(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 2$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2003$,

$$\frac{f_{03}}{\kappa} = 2002, \frac{f_{04}}{\kappa} = 2000, \frac{f_{05}}{\kappa} = 2001, \varphi_{01} = 0.3, \varphi_{02} = 0.4, \varphi_{03} = 0.5, \varphi_{04} = 0.9, \varphi_{05} = 0.2$$



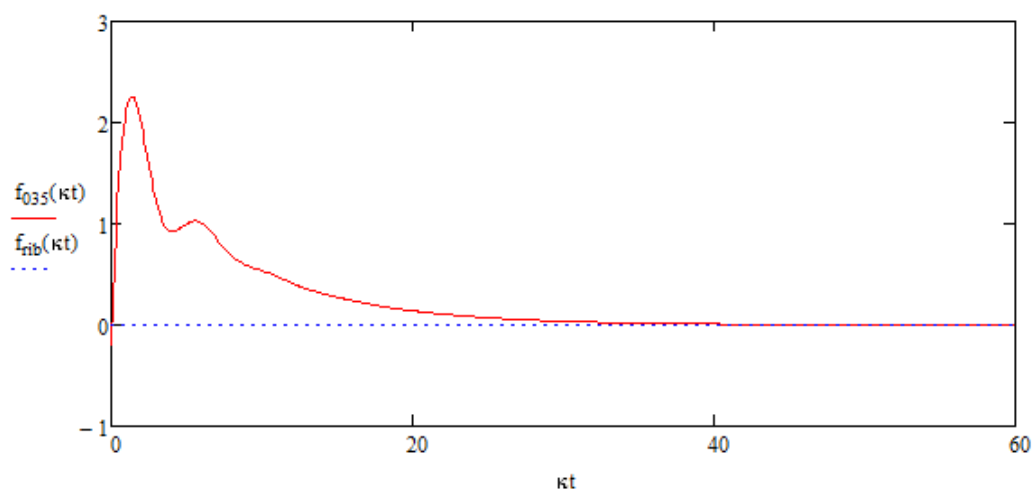
P.20 pav. Fazių skirtumų $x_4(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 2.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2003$,

$$\frac{f_{03}}{\kappa} = 2002, \frac{f_{04}}{\kappa} = 2000, \frac{f_{05}}{\kappa} = 2001, \varphi_{01} = 0.3, \varphi_{02} = 0.4, \varphi_{03} = 0.5, \varphi_{04} = 0.9, \varphi_{05} = 0.2$$



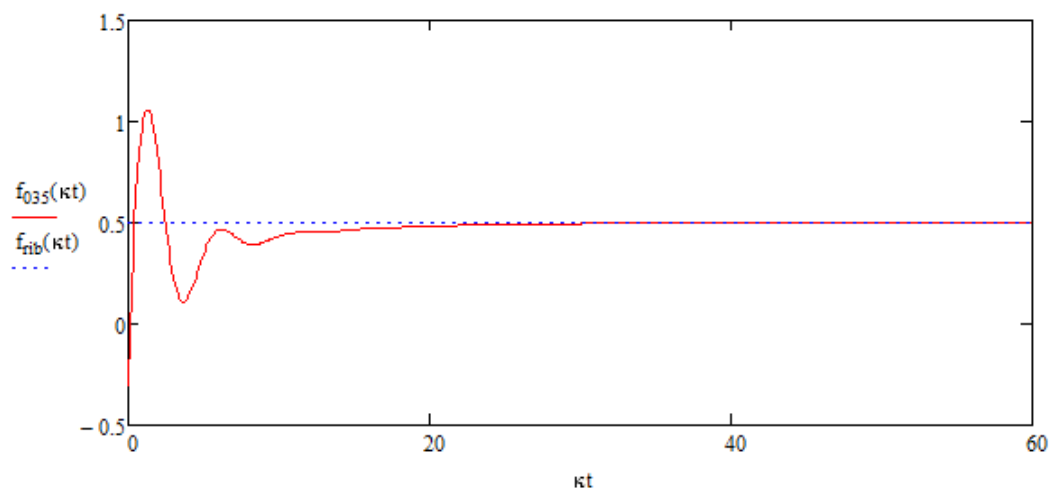
P.21 pav. Fazių skirtumų $x_3(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2001$,

$$\frac{f_{03}}{\kappa} = 2000, \frac{f_{04}}{\kappa} = 2004, \frac{f_{05}}{\kappa} = 1998, \varphi_{01} = 0.5, \varphi_{02} = 0.4, \varphi_{03} = 0.2, \varphi_{04} = 0.7, \varphi_{05} = 0.5$$

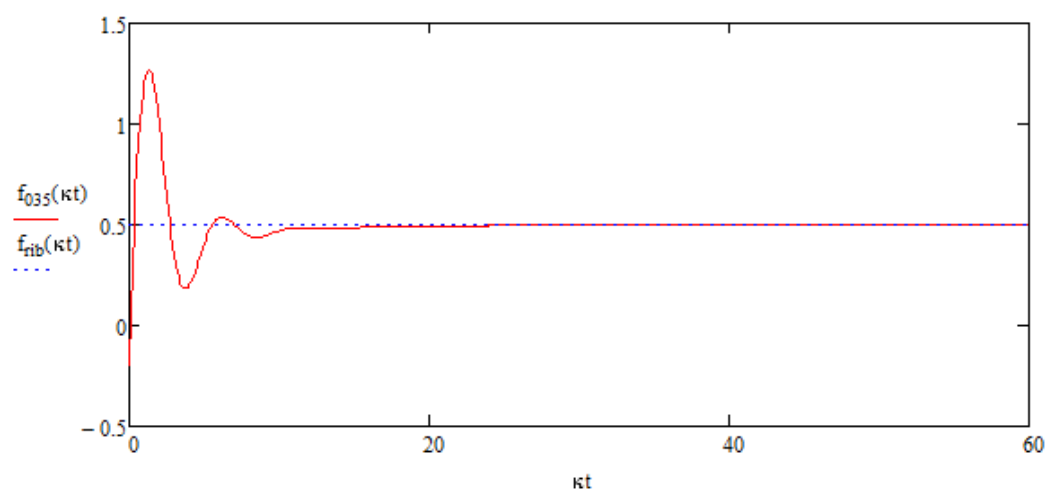


P.22 pav. Fazių skirtumų $x_3(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2001$,

$$\frac{f_{03}}{\kappa} = 2000, \frac{f_{04}}{\kappa} = 2004, \frac{f_{05}}{\kappa} = 1998, \varphi_{01} = 0.2, \varphi_{02} = 0.6, \varphi_{03} = 0.1, \varphi_{04} = 0.4, \varphi_{05} = 0.3$$



**P.23 pav. Fazių skirtumų $x_3(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 2003$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 1997$,
 $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2001$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{05}}{\kappa} = 2000$, $\varphi_{01} = 0.5$, $\varphi_{02} = 0.4$, $\varphi_{03} = 0.2$, $\varphi_{04} = 0.7$, $\varphi_{05} = 0.5$**



**P.24 pav. Fazių skirtumų $x_3(t) - x_5(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 1.5$, $\frac{f_{01}}{\kappa} = 2003$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 1997$,
 $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2001$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{05}}{\kappa} = 2000$, $\varphi_{01} = 0.2$, $\varphi_{02} = 0.6$, $\varphi_{03} = 0.1$, $\varphi_{04} = 0.4$, $\varphi_{05} = 0.3$**