**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**

**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**

**MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA**

**Laura Legenzovaitė**

# BARJERO SANDORIŲ ĮKAINOJIMAS MARKOVO GRANDINĖMIS

Magistro darbas

**Vadovas**
**doc. dr. E. Valakevičius**

**KAUNAS, 2012**

**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**

**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**

**MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA**

**TVIRTINU**
**Katedros vedėjas**
**prof. habil. dr. V. Pekarskas**
**2012 06 05**

# BARJERO SANDORIŲ ĮKAINOJIMAS MARKOVO GRANDINĖMIS

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

**Vadovas**
**doc. dr. E. Valakevičius**
**2012 06 04**

**Recenzentas**
**doc. dr. V. Pilkauskas**
**2012 06 04**

**Atliko**
**FMMM-0 gr. stud.**
**L. Legenzovaitė**
**2012 06 04**

**KAUNAS, 2012**

# KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

**Pirmininkas:** Rimantas Rudzkis, profesorius (VU MII)

**Sekretorius:** Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

**Nariai**: Jonas Valantinas, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., vice-prezidentas projektams (UAB „BalticAmadeus“)

**Legenzovaitė L. Pricing barrier options by a Markov chain: Master‘s work in applied mathematics / supervisor dr. assoc. prof. E. Valakevičius; Department of Mathematical Research in Systems, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2012. – 44 p.**

## SUMMARY


In finance, a barrier option is an exotic derivative whose payoff depends on whether or not the underlying asset has breached the pre-set barrier level either springing the option into existence or extinguishing an already existing option.

Barrier options were created to provide the insurance value of an option without charging as much premium. On the other hand, this means higher risk of loss due to barrier features either.

A Markov chain is a discrete-time stochastic process – a sequence of random variables – with the Markov property, namely that, given the present, the future is conditionally independent of the past.

In this paper we propose a Markov chain method for pricing discretely monitored barrier options in the Black-Scholes framework having a constant volatility. This method uses a time homogenous Markov chain to approximate the underlying asset price process over the maturity of the option. We study both knock-in and knock-out barrier options and also analyze different types of barrier such as single or double barriers.

The final section submits the results of pricing discretely monitored barrier options by a Markov chain comparing to analytical prices of the Black-Scholes model as benchmarks and also crude Monte Carlo simulation. Thus, a Markov chain method can easily handle various cases even if the barrier is close to the initial asset price or early exercise is permitted (American barrier options). Furthermore, it is possible to adjust the time step of the Markov chain to exactly fit the barrier monitoring frequency and for the barrier to be placed suitably in relation to the discretized asset prices. The main advantage of this method is fast convergence to fairly exact value of the option. Even more, in most cases the results are better than using regular Monte Carlo simulation method which is the most common one in pricing various options.

In summary, a Markov chain approach provides a natural framework for pricing barrier options and is easy to implement.

**Legenzovaitė L. Barjero sandorių įkainojimas Markovo grandinėmis: Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas / vadovas doc. dr. E. Valakevičius; Matematinės sistemotyros katedra, Fundamentaliųjų mokslų fakultetas, Kauno technologijos universitetas. – Kaunas, 2012. – 44 p.**

## SANTRAUKA


Egzotinis barjero sandoris yra finansinė išvestinė priemonė, kurios išmokėjimas priklauso nuo to, ar pirminio aktyvo kaina kirto iš anksto nustatytą barjero lygį ar ne, tokiu būdu sandoriui tampant veiksmingu (galiojančiu) arba neveiksmingu.

Barjero sandoriai buvo sukurti sumažinti apsidraudimo sąnaudas neapmokestinant tokia didele premija kaip įprastinio sandorio, kadangi dalies apmokėjimo atsisakoma kliudžius barjerą. Kita vertus, dėl minėtos barjero sandorio specifikos nuostolių rizika išlieka taipogi didesnė.

Markovo grandinė yra stochastinis diskretaus laiko procesas – atsitiktinių kintamųjų seka –, kuris remiasi principu, jog praeitis yra nereikšminga numatant ateitį, svarbi tiktai esamojo laiko informacija.

Šiame darbe diskretaus barjero sandorio įkainojimui su laikui bėgant nekintančiu aktyvo kainos nepastovumu siūlomas Markovo grandinių metodas, atitinkantis Bleiko (*angl.* Black) ir Šolso (*angl.* Scholes) opcionų įkainojimo teoriją. Šis metodas naudoja homogeninę Markovo grandinę kaip priminio aktyvo kainos proceso per barjero sandorio galiojimo laikotarpį artinį. Darbe tiriami barjero sandoriai, kuomet barjero kirsti negalima ir kai tai padaryti būtina. Be to, analizuojami įvairūs vieno arba dviejų barjerų opcionų tipai.

Paskutiniame skyriuje pateikti rezultatai įkainojant diskrečius barjero pasirinkimo sandorius Markovo grandinių metodu lyginant su analizinėmis Bleiko ir Šolso modelio kainomis kaip sandorių vertės etalonais ir atitinkamais Monte Karlo (*angl.* Monte Carlo) modeliavimo įverčiais. Iš tiesų, Markovo grandinių metodas yra efektyvus įvairiose situacijose, net jei pirminio aktyvo kaina yra artima barjero reikšmei arba galimas išankstinis opciono vykdymas (Amerikietiškieji barjero pasirinkimo sandoriai). Be to, Markovo grandinių laiko žingsnį galima parinkti identišką barjero stebėsenos dažniui, o pirminio aktyvo kainos būsenų vektorių tinkamai susieti su nustatytu barjero lygmeniu. Pagrindinis metodo privalumas yra greitas konvergavimas į pakankamai tikslų barjero sandorio kainos įvertį. Daugelyje situacijų siūlytu metodu gauti rezultatai yra tikslesni nei atitinkami Monte Karlo metodo, kuris yra vienas populiariausių ir plačiausiai naudojamų būdų įkainojant įvairius opcionus.

Apibendrinant galima teigti, kad Markovo grandinių metodas suteikia galimybę įkainoti realius barjero pasirinkimo sandorius ir yra lengvai įgyvendinamas.

# TURINYS

# LENTELIŲ SĄRAŠAS

# PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

# ĮVADAS

Pasirinkimo sandorio (opciono) sąvoka buvo vartojama dar Antikos laikais, kuomet romėnų, graikų ir finikiečių vietiniai pirkliai sudarydavo į uostus atplaukusių laivų gabenamų krovinių opcionus. Šiuolaikinėje finansų rinkoje opcionas apibrėžiamas kaip sandoris tarp dviejų šalių, kurių viena turi teisę, bet (reikėtų atkreipti dėmesį) ne įsipareigojimą pirkti arba parduoti pagrindinį aktyvą tam tikru laiku už iš anksto nustatytą kainą.

Pagrindinė opcionų problema – kaip teisingai nustatyti sandorio kainą, kuria būtų patenkintos abi sandorio pusės ir tuo pačiu nebūtų pažeista finansų rinkos pusiausvyra. Kitaip tariant, kaip tinkamai prognozuoti pagrindinio aktyvo atsitiktinės kainos dinamiką.

Egzotinis barjero opcionas yra išvestinė finansinė priemonė, kuri arba pradeda galioti pirminio vertybinio popieriaus kainai viršijus tam tikrą slenkstį (barjerą), arba yra anuliuojama kirtus šią ribą. Pastaruoju metu barjero sandoriai tapo tokie pat populiarūs ir plačiai naudojami kaip ir įprastiniai pasirinkimo sandoriai. ([12]). Pagrindinė to priežastis yra apsidraudimo sąnaudų sumažinimas, kurį sąlygoja dalies apmokėjimo atsisakymas kliudžius barjerą.

Įprastinė analizinė Bleiko (*angl.* Black) ir Šolso (*angl.* Scholes) įkainojimo išraiška išvesta taikant prielaidą, kad barjero stebėsena yra tolydinė. Deja, realiame gyvenime opcionai stebimi tam tikrais laiko intervalais, kurių ilgis turi didžiulę įtaką sandorio kainai.

Literatūroje nesunku rasti skaitinių metodų, kaip įkainoti barjero sandorį esant diskretinei stebėsenai. Kiekvienas jų turi savo privalumus ir trūkumus. Tinkliniai metodai (pvz., apribotas trinominis medis, prisitaikančio tinklo modelis) reikalauja daugybės skaičiavimų. Be to, apribotas trinominis medis nėra tinkamas būdas spręsti uždaviniui, jei barjero reikšmė artima pirminio aktyvo kainai. Įvairūs baigtinių skirtumų metodai konverguoja į pakankamai tikslų barjero sandorio kainos įvertinimą, tačiau nėra lengva sudaryti norimo tikslumo laiko ir aktyvo kainos kitimo gardelę. Monte Karlo (*angl.* Monte Carlo) modeliavimo metodas yra lankstus daugybinių faktorių atžvilgiu. Kita vertus, šis metodas taipogi naudoja nemažai skaičiavimų, laiko resursų ir yra sudėtingas procesas, jei norima įkainoti Amerikietiškąjį barjero sandorį (opciono įvykdymas galimas ne tik sandorio gyvavimo termino pabaigoje, bet ir anksčiau) ([16]).

Šio egzotinio sandorio kainos radimas naudojant Markovo grandinių metodą suteikia galimybę įkainoti tiek Europietiškuosius, tiek Amerikietiškuosius barjero opcionus. Priešingai nei kiti tinkliniai metodai, priartėjimas prie barjero opciono kainos Markovo grandinių metodu nereikalauja susieti pirminio aktyvo kainos būsenų skaičių su laiko žingsnių skaičiumi. Ši pasirinkimo laisvė suteikia galimybę laiko intervalą parinkti analogišką barjero stebėsenos dažniui ir mainais nereikalauja paaukoti sandorio kainos įvertinimo tikslumo ([9], [10]). Be abejonės, minėti privalumai skatina susipažinti su metodo koncepcija plačiau.

# 1. TEORINĖ DALIS

Itin paplitusi finansinė išvestinė priemonė yra pasirinkimo sandoris. Pasirinkimo sandoriai gali būti paprastieji arba egzotiniai. Vienas populiariausių egzotinių sandorių yra barjero opcionas. Šio sandorio įvairių tipų įkainojimui išvestos analizinės Bleiko ir Šolso formulės. Teisingai kainai finansų rinkos dalyvių atžvilgiu rasti naudojama ir Monte Karlo simuliacija, tačiau nuolat ieškoma patikimesnių ir greitesnių būdų. Vienas tokių yra Markovo grandinių metodas.

Skyriaus pabaigoje suformuluoti darbe sprendžiami uždaviniai ir aprašyta programinė realizacija, pateiktas jos pasirinkimo pagrįstumas.

## 1.1 PASIRINKIMO SANDORIS

Pasirinkimo sandoris arba opcionas yra teisė, bet ne įsipareigojimas, pirkti (parduoti) aktyvą su tam tikromis sąlygomis – iš anksto nustatyta aktyvo kaina ir apibrėžtu opciono galiojimo periodu ([19]). Turtas, kuriam gali būti sudaromi pasirinkimo sandoriai, vadinamas baziniu arba pirminiu turtu. Tai gali būti žaliavinė prekė, valiuta, akcija ir kitas finansinis turtas ([12]).

Pasirinkimo sandorio idėja gali būti realizuojama įvairiose kasdieninio gyvenimo situacijose. Pavyzdžiui, Jūs radote savo svajonių namą, tačiau artimiausius tris mėnesius neturėsite pinigų jį įpirkti. Taigi, Jūs deratės su savininku ir sudarote sandorį pirkti namą per tris mėnesius už 200,000 Lt. Namo savininkas už šį susitarimą nustato 5,000 Lt kainą. Įsivaizduokite po šio sandorio ateityje galimas kelias situacijas:

a) paaiškėja, kad namas kadaise priklausė įžymybei ir jo kaina rinkoje išauga iki 500,000 Lt. Deja, savininkas jau yra įsipareigojęs parduoti Jums namą už 200,000 Lt. Jūsų uždirbtas pelnas yra 295,000 Lt ($500{,}000\ Lt - 200{,}000\ Lt - 5{,}000\ Lt$).
b) apžiūrint namą Jūs pastebite, kad ne tik sienose pilna asbesto, bet ir rūsyje susuktas žiurkių lizdas, o grindys išgraužtos termitų. Būsimas pirkinys jau nebeatrodo toks patrauklus. Laimei, Jūs neprivalote vykdyti sandorio ir nusprendžiate nepirkti namo. Žinoma, Jūs prarandate 5,000 Lt, tačiau tai tėra menkas nuostolis lyginant su namo trūkumais.

Išanalizavus pavyzdį akivaizdu, kad pasirinkimo sandoris savininkui suteikia teisę, bet ne įsipareigojimą. Nusipirkus opcioną visuomet galima persigalvoti ir neįvykdyti jo iki opciono galiojimo pabaigos, kai sandoris tiesiog tampa bevertis. Be abejo, sumokėta kaina už pasirinkimo sandorį nebegrąžinama ([12]).

### 1.1.1 PAGRINDINĖS PASIRINKIMO SANDORIO SĄVOKOS

Pasirinkimo sandorio sutartis – tai yra dvišalis susitarimas tarp opcioną pasirašančiojo (leidėjo) ir įsigyjančiojo opcioną (pirkėjo). Pasirašantysis opcioną gali patirti labai didelių nuostolių, kadangi jis turi parduoti arba pirkti aktyvą už iš anksto nustatytą kainą. Perkantysis opcioną negali patirti jokių nuostolių, išskyrus sumokėtą opciono mokestį (premiją).

Premija – tai pirkėjo kompensacija sandorio leidėjui, kuri sumokama už galimybę įvykdyti sandorį, jei jis tampa pelningas. Jeigu pasirinkimo sandorio sutartis pasirašoma tarp dviejų individų, tai premijos dydis nustatomas derybų metu ir užfiksuojamas sandoryje. Jei opcionu prekiaujama vertybinių popierių biržoje, tai premijos dydį nustato rinka, ir jis gali kisti, priklausomai nuo prekybos aktyvumo.

Pasirinkimo sandorio sutartyje turi būti nurodyta:

1) kas yra perkama (pirkimo atveju) ar parduodama (pardavimo atveju). Akcijų opcionuose paprastai perkama arba parduodama 100 vienetų tam tikros rūšies akcijų;
2) ceremonijos (įvykdymo) kaina. Tai kaina, už kurią pasirinkimo sandorio įvykdymo metu gali būti nupirktas aktyvas;
3) opciono gyvavimo (galiojimo) terminas, kuris nustatomas opciono pabaigos data. Opcionas gali tęstis dvi dienas, savaitę, keletą mėnesių ir pan.

Pagal išmokėjimo tipą skiriami Europietiškieji ir Amerikietiškieji sandoriai. Europietiškasis opcionas suteikia teisę jo savininkui pirkti arba parduoti sandorio pagrindą sudarantį turtą nustatyta vykdomąja kaina tik sandorio vykdymo dieną. Didžioji dalis Europietiškųjų opcionų yra užbiržinės rinkos opcionai. Amerikietiškojo pasirinkimo sandorio atveju galimas ir išankstinis vykdymas. Dauguma Amerikietiškųjų opcionų yra biržiniai ([18], [19]).

### 1.1.2 KODĖL VERTA SUDARYTI PASIRINKIMO SANDORIUS?

Pasirinkimo sandoriai yra dabartinėmis sąlygomis vieni plačiausiai naudojamų finansinių instrumentų. Pagrindinės dvi priežastys, dėl kurių investuotojas ryžtasi sudaryti pasirinkimo sandorį yra spekuliacija ir apsidraudimas.

Spekuliuojant įmanoma susikrauti milžiniškus turtus, tačiau tuo pat metu galima patirti ir itin didelius nuostolius. Opcionai yra rizikinga investicija. Perkant sandorį investuotojo prognozės apie akcijos kainos kritimą arba kilimą, pokyčio dydį ir laiką, per kurį pageidaujamas pokytis bus pasiektas, privalo būti tikslios. Dėl šių veiksnių šansai praturtėti nėra dideli. Vis dėlto, veikia vadinamasis sverto efektas – premijos dydis yra mažesnis nei tuo metu esanti finansinio turto vertė, todėl galima gauti didesnį pelną (arba patirti didesnį nuostolį) nei investuojant tiesiogiai į pasirinktas finansines priemones.

Kita opcionų funkcija yra apsidraudimas. Galvokite apie tai, kaip apie draudimo polisą – taip kaip apdraudžiate savo namą ar automobilį, pasirinkimo sandoriai gali būti naudojami apsidrausti nuo tam tikro finansinio turto vertės kilimo arba smukimo, nuostolį apribojant sumokėta premija bei pasiliekant galimybę gauti pelną iš turto kainos pasikeitimo (naftos, metalų kainos ir pan.) ([12]).

## 1.2 PAPRASTIEJI PASIRINKIMO SANDORIAI

Paprastieji pasirinkimo sandoriai suteikia nuolatinę apsaugą arba tam tikrą nenutrūkstamą pinigų srautą. Tai paprasti pirkimo ir pardavimo opcionai. Išsamesnę 1.2 poskyryje pateiktą informaciją su pavyzdžiais galima rasti [17], [18], [19].

### 1.2.1 PASIRINKIMO PIRKTI SANDORIS

Pasirinkimo pirkti sandoris jo savininkui suteikia teisę pirkti ateityje aktyvą už iš anksto nustatytą kainą, vadinamąją ceremonijos (įvykdymo) kainą, paskutinę sandorio dieną arba anksčiau.

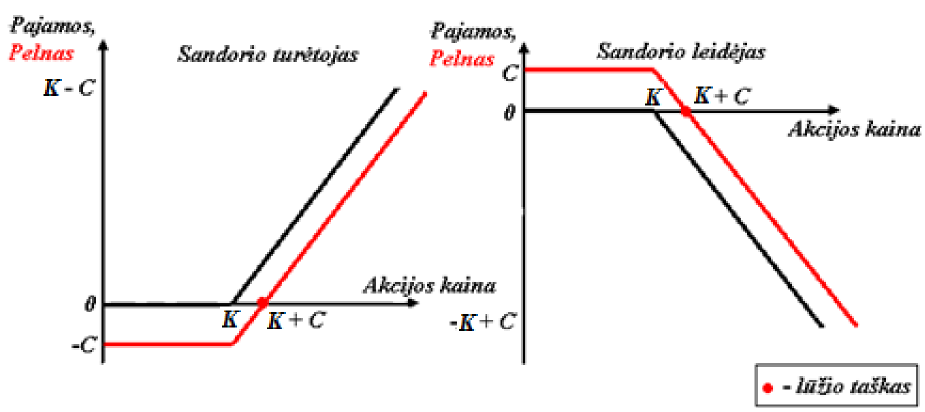
Europietiškojo opciono turėtojas jį realizuos, jei opciono termino pabaigoje $T$ jis turės naudą. Pirkimo opcionas bus realizuotas tik tada, jei akcijos rinkos kaina $S_T$ termino pabaigoje bus didesnė už įvykdymo (ceremonijos) kainą $K$. Tokio pasirinkimo sandorio vertė lygi $S_T - K$. Vadinasi, pasirinkimo pirkti sandorio vertė $C(S_T, K)$ termino pabaigoje yra

$$C(S_T, K) = \begin{cases} S_T - K, \text{ jei } S_T > K; \\ 0, \text{ jei } S_T \leq K; \end{cases} = \max\{0, S_T - K\}. \tag{1.1}$$

Sandorio ceremonijos kaina yra fiksuota. Dėl šios priežasties, atsitiktinis dydis yra tik akcijos kaina termino pabaigoje. Jeigu akcijos kainos tikimybinis pasiskirstymas termino pabaigoje yra žinomas, tai galima apskaičiuoti vidutinę pasirinkimo pirkti sandorio vertę:

$$E(C(S_T, K)) = E[\max\{0, S_T - K\}]. \tag{1.2}$$

1.1 pav. pavaizduotos pajamos ir pelnas, kurį gauna pirkimo opciono turėtojas ir leidėjas opciono termino pabaigoje (čia $C$ – pirkimo opciono premija).




**1.1 pav. Pasirinkimo pirkti sandorio turėtojo ir leidėjo pajamos, pelnas opciono termino pabaigoje**

### 1.2.2 PASIRINKIMO PARDUOTI SANDORIS

Pasirinkimo parduoti sandoris jo savininkui suteikia teisę parduoti aktyvą už iš anksto nustatytą kainą paskutinę sandorio dieną arba anksčiau.

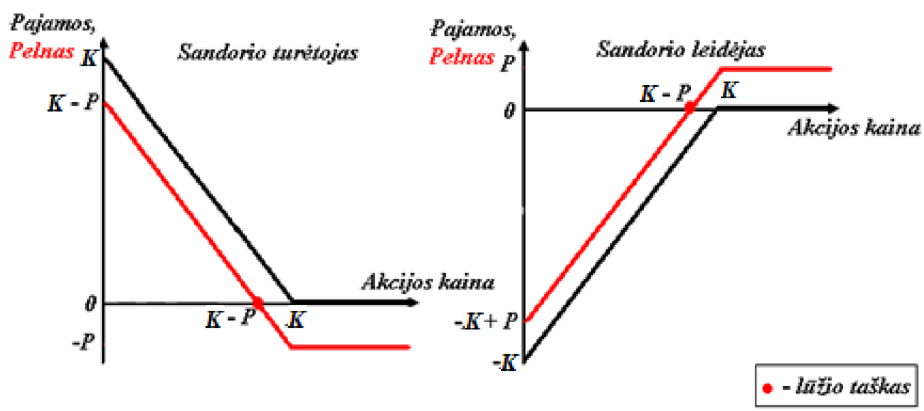
Analogiškai ankstesniame poskyryje apibrėžtai pasirinkimo pirkti sandorio vertei, Europietiškojo pardavimo opciono vertė $P(S_T, K)$ termino pabaigoje yra

$$P(S_T, K) = \begin{cases} K - S_T, \text{ jei } S_T < K; \\ 0, \text{ jei } S_T \geq K; \end{cases} = \max\{0, K - S_T\}. \qquad \textbf{(1.3)}$$

Jeigu akcijos kainos tikimybinis pasiskirstymas termino pabaigoje yra žinomas, tai galima apskaičiuoti vidutinę pasirinkimo parduoti sandorio vertę:

$$E(P(S_T, K)) = E[\max\{0, K - S_T\}]. \qquad \textbf{(1.4)}$$

1.2 pav. pavaizduotos pajamos ir pelnas, kurį gauna pardavimo opciono turėtojas ir leidėjas opciono termino pabaigoje (čia $P$ – pardavimo opciono premija).




**1.2 pav. Pasirinkimo parduoti sandorio turėtojo ir leidėjo pajamos, pelnas opciono termino pabaigoje**

### 1.2.3 RIZIKOS NEUTRALUMAS

Nagrinėkime nerizikingą portfelio apdraudimą – sukonstruokime apdraustą portfelį, susidedantį iš $m$ nupirktų akcijų ir $n$ pasirašytų opcionų ir parinkime tokias $m$ ir $n$ reikšmes, kad bet kuriuo laiko momentu sumažėjusi turimų akcijų vertė būtų kompensuota padidėjusia išleistų opcionų verte. Rizikos vengiantys investuotojai nereikalaus premijos, t.y. didesnės pelno normos, už tokio portfelio turėjimą, kadangi nėra jokios rizikos. Be to, šio portfelio vertė bus ta pati ir rizikai neutraliems (nereikalaujantiems premijos už riziką), ir rizikos vengiantiems investuotojams, tuo pačiu būdama vienoda abiejose rinkose: rizikos vengiančioje ir rizikai neutralioje (hipotetinėje).

Tarkime, kad akcijų kainos yra vienodos abiejose rinkose, todėl ir pirkimo opcionų kainos tose rinkose turi būti vienodos. Portfelio vertę lengviau įvertinti rizikai neutralioje rinkoje, kurioje visi aktyvai duos pelną su nerizikingąja palūkanų norma. Dėl šios priežasties opciono vertė momentu $t$ lygi vidutinei opciono vertei momentu $T$, diskontuotai su nerizikingąja palūkanų norma $r$. Ši palūkanų norma apibrėžiama kaip pelno norma, mokama tolydžiai už vyriausybės obligaciją, tokios pat trukmės kaip ir opciono gyvavimo laikas. Taigi

$$C(S_t, K) = e^{-r(T-t)} E(C(S_t, K)) = e^{-r(T-t)} E[\max\{0, S_T - K\}], \quad \textbf{(1.5)}$$

$$P(S_t, K) = e^{-r(T-t)} E[\max\{0, K - S_T\}]. \quad \textbf{(1.6)}$$

Norint įvertinti $C(S_t, K)$ ir $P(S_t, K)$ reikia tinkamo akcijų kainų kitimo laike modelio.

### 1.2.4 PIRKIMO IR PARDAVIMO PARITETAS

Investuotojas yra trumpojoje pozicijoje, jei pasirinkimo sandorį parduoda (išleidžia), ir yra ilgojoje pozicijoje, jei sandorį nusiperka.

Pirkimo – pardavimo paritetas yra ryšys tarp pirkimo ir pardavimo opcionų kainų tos pačios rūšies akcijų su vienoda įvykdymo kaina ir ta pačia opciono gyvavimo trukme. Jei šis ryšys pažeidžiamas, tai finansų rinkoje atsiranda arbitražo galimybė. Arbitražas yra tokia prekybos vertybiniais popieriais strategija (vienus popierius parduodant, kitus perkant), kai su nuline investicija gaunamas garantuotas pelnas.

Europietiškojo tipo opciono, be mokamų dividendų[1] už akcijas, paritetinis ryšys gaunamas pastebint, kad pirkimo ir pardavimo sandorių bei nerizikingos paskolos kombinacija duoda tą pačią išmoką kaip ir pati akcija.

Kombinacija: reikia nupirkti vieną pirkimo opcioną, parduoti vieną pardavimo opcioną ir paskolinti $e^{-r\cdot(T-t)}K$ dydžio sumą su nerizikinga palūkanų norma $r$ laikotarpiui $T-t$. Paskolinę $e^{-r\cdot(T-t)}K$ sumą, gausime papildomą $K$ dydžio išmoką, todėl

$$C(S_t, K) - P(S_t, K) + e^{-r\cdot(T-t)}K = S_t \quad \textbf{(1.7)}$$

arba

$$C(S_t, K) = P(S_t, K) + S_t - e^{-r\cdot(T-t)}K. \quad \textbf{(1.8)}$$

Gauta formulė rodo, kaip rasti pardavimo opciono kainą, jei yra žinoma pirkimo opciono kaina, ir atvirkščiai. Pirkimo – pardavimo pariteto ryšyje nėra įskaičiuotos sandorio ir kitos išlaidos, taigi jis ne visiškai atitiks pirkimo ir pardavimo opcionų rinkos kainas.

## 1.3 EGZOTINIAI PASIRINKIMO SANDORIAI

Finansų inovacijos – vienas svarbiausių šiuolaikinės tarptautinės pasirinkimo sandorių rinkos ypatumų. Dažniausiai jos reiškiasi esamų įprastinių sandorių charakteristikų keitimu, pritaikant jas

[1] Tai dalis akcinės bendrovės pelno, padalinta akcininkams priklausomai nuo jų turimų akcijų kiekio ir rūšies.

prie rinkos dalyvių poreikių. Finansų inžinerija siūlo specialaus tipo pasirinkimo sandorius, vadinamus egzotiniais.

Egzotinis pasirinkimo sandoris – tai opcionas, kuris skiriasi sandorio pagrindą sudarančio turto arba investuotojo išmokėjimo skaičiavimo būdo ir laiko požiūriu nuo Europietiškojo arba Amerikietiškojo opcionų. Pavyzdžiui, yra žinomas sandorio pasirinkimo opcionas. Ši priemonė leidžia investuotojams sandorio gyvavimo laikotarpyje tam tikru metu pasirinkti, ar sandoris yra pirkimo, ar pardavimo (pasirinkti išmokėjimo tipą). Kadangi šis opcionas gali keistis galiojimo laikotarpyje, tokio sandorio įprastinėje biržoje būti negali, todėl jis klasifikuojamas kaip egzotinis opcionų variantas. Skiriami nuo pirminio aktyvo kainų kitimo pėdsako priklausomi (pvz., barjero, azijietiškojo stiliaus, keleto periodų, reketo, orientuoti į praeitį, kopėčių ir kt.) ir nepriklausomi (pvz., išankstinės pradmės, užrakinamieji, vieno periodo reketo, binariniai, bermudų, kvanto ir kt.) egzotiniai sandoriai.

Egzotiniai pasirinkimo sandoriai plinta gana greitai. To priežastis – egzotinių sandorių lankstumas ir mažesnės išlaidos nei paprastųjų pasirinkimo sandorių. Kita vertus, išskirtinės jų savybės bei sudėtingumas iššaukia ir žymiai didesnę riziką ir reikalauja nemažai specifinių investuotojo žinių. Pagrindinė su šiais pasirinkimo sandoriais susijusi problema yra tinkamo metodo jų kainai nustatyti parinkimas, kadangi dėl šių sandorių specifinių savybių jiems įvertinti ne visada tinka standartiniams pasirinkimo sandoriams taikomi metodai ([12], [13]).

### 1.3.1 EGZOTINIAI BARJERO PASIRINKIMO SANDORIAI

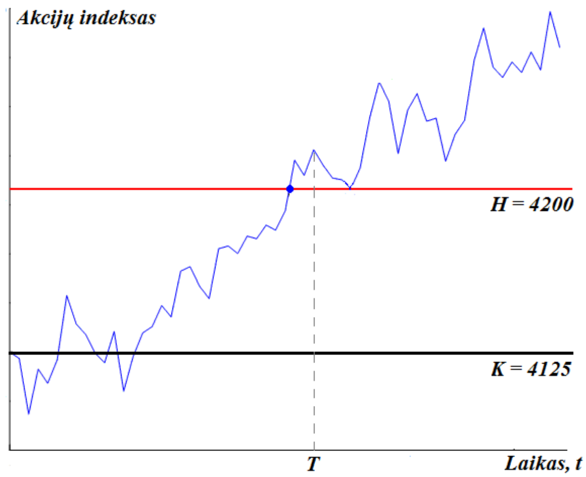
Barjero opcionai (žiūr. [13]) priskiriami prie egzotinių opcionų, kurie yra priklausomi nuo jų pagrindą sudarančio turto kitimo pėdsako per sandorio galiojimo laikotarpį. Barjero (pirkimo ir pardavimo) opcionų specifika ta, kad, jei kintant aktyvui pasiekiamas (kliudomas) nustatytas barjeras, galimas vienas iš tokių atvejų:

- opcionas netenka savo veiksmingumo, t.y. nustoja galioti;
- opcionas tampa veiksmingas, t.y. galiojantis.

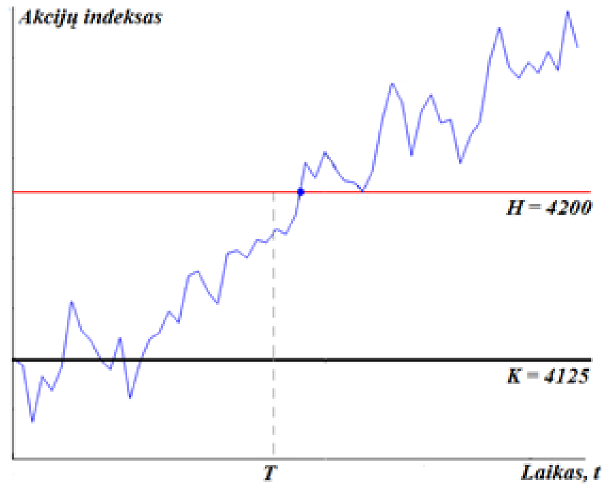
Priklausomai nuo sandorio pagrindą sudarančio turto vertės kitimo rinkoje krypties, skiriami mažėjantis ir didėjantis barjero opcionai.

Pavyzdžiui, laukiama akcijų indekso kilimo. Akcijų indeksas biržos uždarymo metu yra 4125 indekso punktai. Pirkimo opcionas (įprastinis), kurio vykdymo kaina sutampa su einamuoju indeksu, yra parduodamas už 96 indekso punktus, arba už 960 Lt. Naudojant alternatyvią strategiją – barjero pirkimo opcioną, kurio barjeras yra virš vykdomosios kainos ir turi būti pasiektas – kaštai yra mažesni. Opcionas kainuoja 900 Lt už sandorį, nustačius 4200 indekso punktų barjero lygį. Sakykime, opciono vykdymo dieną indekso reikšmė biržos uždarymo metu yra 4230 (žiūr. 1.3 pav. (A) dalį, čia $H$ žymi barjerą). Įprastinio pirkimo opciono išmokėjimas būtų

$(4230-4125)\cdot 10-960=90$ Lt. Analizuojamo barjero pirkimo opciono išmokėjimas būtų $(4230-4125)\cdot 10-900=150$ Lt. Jei akcijų indekso reikšmė biržos uždarymo metu yra 4190 analogiškai gautume įprastinio pirkimo sandorio atveju $(4190-4125)\cdot 10-960=-310$ Lt nuostolį (žiūr. 1.3 pav. (B) dalį, čia *H* žymi barjerą). Pagal barjero pirkimo opcioną, kurio barjeras yra virš vykdomosios kainos ir turi būti pasiektas, išmokėjimo nėra, nes opcionas negalioja nepasiekus barjero. Investuotojas šiuo atveju patirtų 900 Lt premijos nuostolius.




(A)




(B)

**1.3 pav. Europietiškasis pasirinkimo pirkti barjero sandoris, kai barjeras aukščiau vykdomosios kainos; jį pasiekti būtina**

Kuriami ir sudėtingesni barjero opcionai, turintys daugiau nei vieną arba kintantį barjerą.

Europietiškuosius barjero opcionus ir standartinius opcionus sieja toks ryšys:

$$kaina_{\text{kirsti negalima}} + kaina_{\text{kirsti būtina}} = kaina_{\text{įprastinis}}, \qquad (1.9)$$

čia abiejų egzotinių opcionų parametrai (įskaitant barjerą ir išmokėjimo tipą) yra vienodi.

## 1.4 BLEIKO IR ŠOLSO PASIRINKIMO SANDORIŲ ĮKAINOJIMO MODELIS

Pasirinkimo sandoriams įkainoti dažnai naudojamas 1973 m. mokslininkų Fišerio Bleiko (*angl.* Fischer Black) ir Mairono Šolso (*angl.* Myron Scholes) sukurtas vadinamasis Bleiko ir Šolso modelis. Vienas įdomiausių šio modelio aspektų yra įprastinio Europietiškojo opciono analizinės įkainojimo formulės egzistavimas. Derėtų paminėti, kad pastaroji formulė išvesta atsižvelgiant į akcijų ir pasirinkimo sandorių rinkos „idealias sąlygas“ ([1], [18]):

- nerizikingoji palūkanų norma yra pastovi ir žinoma;
- už pagrindinį aktyvą (akciją) per sandorio gyvavimo laikotarpį nemokami dividendai;
- nagrinėjamas Europietiškasis pasirinkimo sandoris;

- pagrindinio aktyvo kaina kinta pagal geometrinį Brauno judesį (žr. 1 priedą);
- prekyba rinkoje vyksta nepertraukiamai (tolydžiai);
- nepadengtasis pardavimas nėra apribotas;
- nėra arbitražo galimybės, t.y. su nuline investicija negalima gauti garantuoto pelno;
- nėra sandorių kaštų, o aktyvai yra neapibrėžtai dalūs.

Pagal Bleiko ir Šolso sandorio įkainojimo teoriją, opciono vertinimas gali būti įgyvendinamas paprasčiausiai kaip diskontuota tikėtina atsitiktinės išmokos, susijusios su išvestiniu sandoriu, vertė, kai aktyvo kainos dinamika yra neutrali rizikai. Tokiu atveju ši rizikai neutrali aktyvo kainos dinamika kinta pagal geometrinį Brauno judesį

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t \,, \tag{1.10}$$

čia $B_t$ – Brauno judesys, $r$ – nerizikingoji palūkanų norma, $\sigma$ – aktyvo kainos nepastovumas, $r, \sigma = const$ ([9], [10], [14]).

Kaip aprašyta [16], opciono gyvavimo laikotarpį padalinus į daugybę mažų intervalų gaunama (1.10) išraiškos apytikslė aproksimacija:

$$S_{t+\Delta t} - S_t = rS_t \Delta t + \sigma S_t \sqrt{\Delta t} Z, \; Z \in N(0,1). \tag{1.11}$$

Praktiškai dažniausiai modeliuojamas $\ln S_t$ kitimas, kadangi tokiu būdu gaunami tikslesni rezultatai. Tuomet pagal Ito (*angl.* Ito) lemą (žr. 2 priedą) (1.10) išraiška užrašoma taip:

$$d \ln S_t = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t. \tag{1.12}$$

Pastarosios lygties aproksimacija yra

$$\ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z, \; Z \in N(0,1), \tag{1.13}$$

kurią perrašius ir gausime aktyvo kainos kitimo išraišką:

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z}. \tag{1.14}$$

Iš jau žinomos išraiškos $C(S_t, K) = e^{-r \cdot \tau} E[\max(0, S_T - K)]$, $\tau = T - t$ (žiūr. [19]), turime, kad

$$C(S_t, K) = e^{-r \cdot \tau} E[S_T \mid S_T > K] P(S_T > K) - K e^{-r \cdot \tau} P(S_T > K). \tag{1.15}$$

Apskaičiuokime sąlyginį vidurkį ir tikimybę (1.15) formulėje.

$$P(S_T > K) = P\left( S_t e^{\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)\tau + \sigma\sqrt{\tau} Z} > K \right) = P\left( Z < \frac{ln(S_t/K) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) = \Phi\left( \frac{ln(S_t/K) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \tag{1.16}$$

$$d_1 = \frac{ln(S_t/K) + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}. \tag{1.17}$$

Pasinaudoję Bejeso (*angl.* Bayes) formule[2], gauname, kad

$$I = E[S_T \mid S_T > K]P(S_T > K) = P(S_T > K)\int_K^{\infty} S_T P(S_T = y \mid S_T > K)dy =$$

$$= P(S_T > K)\int_K^{\infty} S_T \frac{P(S_T = y)}{P(S_T > K)}dy = \int_K^{\infty} S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\sigma\sqrt{\tau}z} P\left(S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\sigma\sqrt{\tau}z} = y\right)dy =$$

$$= \int_{-d_2}^{\infty} S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\sigma\sqrt{\tau}z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = S_t e^{r\tau}\int_{-d_2}^{\infty} e^{\sigma\sqrt{\tau}z-\frac{\sigma^2}{2}\tau} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = S_t e^{r\tau}\int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\sigma\sqrt{\tau}-z)^2}\frac{dz}{\sqrt{2\pi}} =$$

$$= S_t e^{r\tau}\int_{-\infty}^{d_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} d\omega = S_t e^{r\tau}\Phi(d_1).$$

$$I = E[S_T \mid S_T > K]P(S_T > K) = S_t e^{r\tau}\Phi(d_1). \quad \textbf{(1.18)}$$

Įstatę (1.16) ir (1.18) išraiškas į (1.15), gauname pirkimo opciono Bleiko ir Šolso formulę

$$C(S_t, K) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2), \quad \textbf{(1.19)}$$

čia $d_1 = \frac{ln(S_t/K)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega.$

Analogiškai gaunama pardavimo opciono Bleiko ir Šolso formulė

$$P(S_t, K) = Ke^{-r\tau}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1). \quad \textbf{(1.20)}$$

## 1.4.1 ANALIZINĖS BARJERO SANDORIŲ FORMULĖS IR PATAISA DISKREČIAM ATVEJUI

Naudojantis Bleiko ir Šolso modeliu galima įkainoti ir barjero pasirinkimo sandorį. Tam atvejui būtina apibrėžti dar vieną opcioną ([11]):

- Skaitmeninio pasirinkimo pirkti sandorio vertė lygi

$$C_d(S_t, K) = e^{-r\tau}\Phi(d_2). \quad \textbf{(1.21)}$$

1 piniginio vnt. išmokėjimas gaunamas jei $S_T > K$, priešingu atveju, sandorio vertė lygi 0.

- Skaitmeninio pasirinkimo parduoti sandorio vertė lygi

$$P_d(S_t, K) = e^{-r\tau}\Phi(-d_2). \quad \textbf{(1.22)}$$

Atsižvelgiant į tai, kad toliau pateiktų formulių išvedimas reikalauja nemažai specifinių žinių, jų teisingumo įrodymai nebus pateikti, kadangi visa tai plačiau pakomentuota [1], [11], [5], [20].

---

[2] Jei įvykiai $H_1, H_2, \cdots, H_n$ sudaro pilnąją įvykių grupę, tai

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}, P(A) \neq 0.$$

Bejeso formulė taikoma, kai įvykis *A* jau įvyko, o norima apskaičiuoti sąlyginę tikimybę, kad pasitvirtino hipotezė $H_i, i = 1, \cdots, n$ ([2]).

Taipogi, įkainoti tik tie opcionai, kuomet barjero kirsti negalima, nes analogiško sandorio vertę, kai barjerą kirsti būtina, nesudėtinga rasti pasinaudojant (1.9), (1.19) ir (1.20) išraiškomis.

*Pasirinkimo pirkti barjero sandoris, kai barjero kirsti negalima*:

a) mažėjantis:

(i) $L < K$, čia $L$ – apatinis sandorio barjeras,

$$C_{d/o}(S_t, K, L) = C(S_t, K) - \left(\frac{S_t}{L}\right)^{2\alpha} C\left(\frac{L^2}{S_t}, K\right), \tag{1.23}$$

$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - r/(0.5\sigma^2)\right)$.

(ii) $L \geq K$

$$C_{d/o}(S_t, K, L) = C(S_t, L) + (L-K)C_d(S_t, L) - \left(\frac{S_t}{L}\right)^{2\alpha}\left(C\left(\frac{L^2}{S_t}, L\right) + (L-K)C_d\left(\frac{L^2}{S_t}, L\right)\right). \tag{1.24}$$

b) didėjantis:

(i) $H > K$, čia $H$ – viršutinis sandorio barjeras,

$$C_{u/o}(S_t, K, H) = C(S_t, K) - C(S_t, H) - (H-K)C_d(S_t, H) -$$
$$-\left(\frac{S_t}{H}\right)^{2\alpha}\left(C\left(\frac{H^2}{S_t}, K\right) - C\left(\frac{H^2}{S_t}, H\right) - (H-K)C_d\left(\frac{H^2}{S_t}, H\right)\right). \tag{1.25}$$

(ii) $H \leq K$

$$C_{u/o}(S_t, K, H) = 0. \tag{1.26}$$

*Pasirinkimo parduoti barjero sandoris, kai barjero kirsti negalima*:

a) mažėjantis

(i) $L < K$, čia $L$ – apatinis sandorio barjeras,

$$P_{d/o}(S_t, K, L) = P(S_t, K) - P(S_t, L) - (K-L)P_d(S_t, L) -$$
$$-\left(\frac{S_t}{L}\right)^{2\alpha}\left(P\left(\frac{L^2}{S_t}, K\right) - P\left(\frac{L^2}{S_t}, L\right) - (K-L)P_d\left(\frac{L^2}{S_t}, L\right)\right). \tag{1.27}$$

(ii) $L \geq K$

$$P_{d/o}(S_t, K, L) = 0. \tag{1.28}$$

b) didėjantis:

(i) $H > K$, čia $H$ – viršutinis sandorio barjeras,

$$P_{u/o}(S_t, K, H) = P(S_t, K) - \left(\frac{S_t}{H}\right)^{2\alpha} P\left(\frac{H^2}{S_t}, K\right). \tag{1.29}$$

(ii) $H \leq K$

$$P_{u/o}(S_t, K, H) = P(S_t, H) + (K-H)P_d(S_t, H) - \left(\frac{S_t}{H}\right)^{2\alpha}\left(P\left(\frac{H^2}{S_t}, H\right) + (K-H)P_d\left(\frac{H^2}{S_t}, H\right)\right). \tag{1.30}$$

Visos šios analizinės formulės išvestos atsižvelgiant į tolydinę barjero stebėseną. Norint analizinę formulę pritaikyti diskrečiam atvejui būtina įvesti tam tikrus barjero pakeitimus.

Teorema. Tegul $V_n(\cdot)$ žymi diskrečiais laiko momentais stebimą barjero pasirinkimo sandorio kainą, o $V(\cdot)$ – tolydžią barjero stebėseną atitinkančią analogiško opciono (su vienodais parametrais ir vienodo išmokėjimo tipo) kainą. Tuomet

$$V_n(L) = V\left(Le^{-\beta\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \textbf{(1.31)}$$

$$V_n(H) = V\left(He^{\beta\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \textbf{(1.32)}$$

čia $\Delta t = \frac{T}{n}$, $n$ – laiko žingsnių skaičius, $\beta = -\zeta\left(\frac{1}{2}\right)/\sqrt{2\pi} \approx 0.5826$, kur $\zeta$ yra Rymano (*angl.* Riemann) zeta funkcija ([3], [14]).

## 1.5 MARKOVO GRANDINIŲ METODAS

Markovo grandinė (žiūr. [15]) – diskretaus laiko stochastinis procesas $X = \{X_t, t = 0,1,2,\cdots\}$ su reikšmių sritimi $E \subset \{0,1,2,\cdots\}$, kuris remiasi principu, jog praeitis yra nereikšminga numatant ateitį, svarbi tiktai esamojo laiko informacija. Markovo grandinė yra seka $X_0$, $X_1$, $X_2$, … atsitiktinių kintamųjų. Šių kintamųjų įgaunamų reikšmių sritis vadinama būsenų intervalu, $X_t$ reikšmė yra proceso būsena laiko momentu $t$.

$$P(X_{t+1} = j | X_0, X_1, \cdots, X_t) = P(X_{t+1} = j | X_t = i), \quad \textbf{(1.33)}$$

čia $i, j \in E$ yra kažkurios proceso būsenos.

Tikimybė, kad Markovo grandinė iš būsenos $i$ laiko momentu $t$ pereis į būseną $j$ laiko momentu $t + 1$, vadinama perėjimo tikimybe ir žymima

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i) = p^{t,t+1}(i,j). \quad \textbf{(1.34)}$$

Markovo grandinė vadinama homogenine, jei perėjimo tikimybės nepriklauso nuo laiko, t.y.

$$p^{t,t+1}(i,j) = p(i,j) = P(X_{t+1} = j | X_t = i), t = 0,1,\cdots \quad \textbf{(1.35)}$$

Šiuo atveju matrica $p = (p(i,j), i,j \in E)$ vadinama Markovo grandinės $X$ perėjimo matrica ir pasižymi savybėmis:

(i) $p(i,j) \geq 0, \forall i,j \in E$, nes $p(i,j)$ yra tikimybė;

(ii) $\sum_{j\in E} p(i,j) = 1, \forall i \in E$, nes pereiti iš būsenos $i$ galima į kurią nors būseną $j \in E$.

Homogeninės Markovo grandinės perėjimo matrica $p^{(m)}(i,j)$ (po $m$ laiko momentų) yra perėjimo matricos $p(i,j)$ $m$-asis laipsnis.

Beveik visos analizinės formulės išvestos atsižvelgiant į tolydinės barjero stebėsenos prielaidą, tačiau realybėje stebėsena visuomet yra diskreti. Vienas iš būdų įkainoti diskretų barjero opcioną yra naudoti Markovo grandines. Išsamų 1.5.1-1.5.2 poskyriuose pateikto Markovo grandinių metodo, įkainojant barjero sandorius, aprašymą galima rasti [9], [10].

## 1.5.1 MARKOVO GRANDINIŲ METODAS PAPRASTIESIEMS PASIRINKIMO SANDORIAMS ĮKAINOTI

Stochastinio proceso, aprašyto (1.10) formule, įvertinimui galima naudoti Markovo grandines $X = \{X_t, t = 0,1,2,\cdots\}$ su būsenų erdve $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ ir perėjimo tikimybių matrica $Q$ kaip $\{\ln(S_t), t \geq 0\}$ aproksimacija, kur $m$ yra nelyginis pirminio aktyvo kainos būsenų skaičius ir $p_{(m+1)/2} = \ln(S_0)$. Tokiu būdu $m \to \infty$ Markovo grandinių metodu gautas opciono kainos įvertis konverguoja į teorinę reikšmę ([6], [8]).

Konstruojant šią Markovo grandinę reikia pasirinkti diskrečių kainų aibę, t.y. $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ ir laiko intervalo ilgį (žingsnį). Tegul $\vec{p} = [p_1, p_2, \ldots, p_m]'$ ir perėjimo tikimybių matrica

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} & \cdots & q_{mm} \end{bmatrix}.$$

Atitinkamų pirminio aktyvo kainos būsenų logaritmų intervalas – $[ln(S_0) - I_p, ln(S_0) + I_p]$. Dydis $I_p$ apskaičiuojamas atsižvelgiant į sąlyginį aktyvo grąžos per visą sandorio galiojimo laikotarpį standartinį nuokrypį, padaugintą iš mastelio koeficiento:

$$I_p = \delta(m)\sigma\sqrt{T\Delta t}\,, \quad \textbf{(1.36)}$$

čia $\Delta t$ žymi laiko žingsnio ilgį (metinį), $\sigma$ – aktyvo nepastovumo parametras (metinis). Dydis $\sigma\sqrt{T\Delta t}$ yra aktyvo grąžos standartinis nuokrypis laiko momentu $T$. Mastelio koeficientas $\delta(m)$ turi būti didėjanti $m$ funkcija, kuri tenkintų dvi sąlygas: 1) $\delta(m) \to \infty, m \to \infty$; 2) $\frac{\delta(m)}{m} \to 0, m \to \infty$. Atsižvelgiant į rekomendacijas, pateiktas [6], [8], $\delta(m) = 2 + ln(ln(m))$.

Toliau aktyvo kainos būsenų logaritmų intervalas skaidomas į *m-1* segmentą:

$$p_i = ln(S_0) + \frac{2i-m-1}{m-1} I_p, i \in \{1, \cdots, m\}, \quad \textbf{(1.37)}$$

$$C_1 = (c_1, c_2), C_i = [c_i, c_{i+1}),\; i \in \{2, \cdots, m\}, c_1 = -\infty, c_i = \frac{p_i + p_{i-1}}{2}, i \in \{2, \cdots, m\}, c_{m+1} = \infty. \textbf{(1.38)}$$

Galiausiai, perėjimo tikimybės, atsižvelgiant į (1.11) ir (1.13) formules, gali būti apskaičiuojamos ([7]):

$$q_{ij} = P\{c_j \leq p_{t+\Delta t} < c_{j+1} | p_t = p_i\} = P\{c_j \leq p_t + (r - 0.5\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z < c_{j+1} | p_t = p_i\} =$$

$$= P\left\{\frac{c_j - p_i - (r-0.5\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \leq Z < \frac{c_{j+1} - p_i - (r-0.5\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right\} = \Phi\left(\frac{c_{j+1} - p_i - (r-0.5\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) - \Phi\left(\frac{c_j - p_i - (r-0.5\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right).$$

$$q_{ij} = \Phi\left(\frac{c_{j+1} - p_i - (r-0.5\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) - \Phi\left(\frac{c_j - p_i - (r-0.5\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right). \quad \textbf{(1.39)}$$

čia $\Phi(\cdot)$ standartinio normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcija, $r$ – nerizikingoji palūkanų norma (metinė).

Amerikietiškasis pasirinkimo sandoris su gyvavimo trukme $T$ ir įvykdymo (ceremonijos) kaina $K$ gali būti apskaičiuojamas naudojantis rekursine sistema:

$$V(\vec{p},t)=\max\left[g(\vec{p},K),e^{-r\Delta t}QV(\vec{p},t+1)\right],\ t\in\{0,1,\ldots,T-1\}, \tag{1.40}$$
$$V(\vec{p},T)=g(\vec{p},K).$$

Čia $V(\vec{p},t)$ yra opciono kainos vektorius laiko momentu $t$ atsižvelgiant į atitinkamą vektorių $\vec{p}$; $\max[\circ,\circ]$ yra vektorinė funkcija; $g(\vec{p},K)$ yra opciono išmokėjimų funkcija, priklausanti nuo sandorio išmokėjimo. Reikėtų pastebėti, kad $g(\vec{p},K)=\max\left\{\omega\left[\exp(\vec{p})-K\vec{\mathbf{1}}\right],\vec{\mathbf{0}}\right\}$, čia $\vec{\mathbf{0}}$ ir $\vec{1}$ žymi nulinį ir vienetinį vektorius, o $\omega$ yra pasirinkimo sandorio išmokėjimo tipo indikatorius ($(\omega=1)$ pasirinkimo pirkti sandoris, $(\omega=-1)$ pasirinkimo parduoti sandoris). Laiko momentu $t=0$ sandorio kaina yra $\left(\frac{m+1}{2}\right)$-asis vektoriaus $V(\vec{p},0)$ elementas. Europietiškiesiems opcionams, kuomet išankstinis vykdymas negalimas, (1.40) rekursinės sistemos išraiška yra paprastesnė:

$$V(\vec{p},0)=e^{-rT_m}Q^T\max\left[\omega\left[\exp(\vec{p})-K\vec{\mathbf{1}}\right],\vec{\mathbf{0}}\right] \tag{1.41}$$

čia $T_m$ – pasirinkimo sandorio galiojimo terminas (metinis).

## 1.5.2 MARKOVO GRANDINIŲ METODAS BARJERO SANDORIAMS ĮKAINOTI

Įkainojant barjero opcionus patogu sistemą papildyti pagalbiniu kintamuoju $a_t$, kuris įgyja tik dvi reikšmes: $a_t=1$, jei barjeras yra kliudomas prieš arba laiko momentu $t$ ir $a_t=0$ kitu atveju.

Amerikietiškasis barjero opcionas gali būti įkainotas tokiu būdu:

$$v(p_i,t;a_t=0)=\max\begin{bmatrix} g(p_i,K,a_t=0), e^{-r\Delta t}\sum_{j=1}^{m}Q\{X_{t+1}=p_j,a_{t+1}=0\mid X_t=p_i,a_t=0\}v(p_j,t+1;a_{t+1}=0)+ \\ +e^{-r\Delta t}\sum_{j=1}^{m}Q\{X_{t+1}=p_j,a_{t+1}=1\mid X_t=p_i,a_t=0\}v(p_j,t+1;a_{t+1}=1)\end{bmatrix}, \tag{1.42}$$

$$v(p_i,t;a_t=1)=\max\begin{bmatrix} g(p_i,K,a_t=1), e^{-r\Delta t}\sum_{j=1}^{m}Q\{X_{t+1}=p_j,a_{t+1}=0\mid X_t=p_i,a_t=1\}v(p_j,t+1;a_{t+1}=0)+ \\ +e^{-r\Delta t}\sum_{j=1}^{m}Q\{X_{t+1}=p_j,a_{t+1}=1\mid X_t=p_i,a_t=1\}v(p_j,t+1;a_{t+1}=1)\end{bmatrix}. \tag{1.43}$$

Čia $t\in\{0,1,\ldots,T-1\}$; $v(p_i,t;a_t)$ yra atitinkama barjero sandorio kaina laiko momentu $t$, atsižvelgiant į pirminio aktyvo kainą $p_i$ ir pagalbinio kintamojo reikšmę $a_t=1$ arba 0; $g(p_i,K,a_t)$ yra įvykdymo kaina laiko momentu $t$, taipogi atsižvelgiant į pirminio aktyvo kainą $p_i$ ir barjero sąlygą $a_t$. $g(p_i,K,a_t)$ ir galutinės sąlygos $v(p_i,T;a_T=0)$ ir $v(p_i,T;a_T=1)$, be abejo, priklauso nuo barjero sandorio tipo.

Svarbu paminėti, kad tinkama barjero sandorio vertė laiko momentu $t$ turi būti adekvačiai parinkta iš dviejų alternatyvių verčių: $v(p_i,t;a_t=0)$ ir $v(p_i,t;a_t=1)$. Nors ne visuomet (1.42) ir (1.43) formulėse tam tikra $p_i$ reikšmė gali būti suderinta su viena iš $a_t$ reikšmių, tačiau tokia kombinacija generuoja nulinę seką, kurios perėjimo tikimybė taipogi yra nulinė.

Europietiškajam barjero opcionui $g(p_i,K,a_t)=0$, $t<T$. Maksimumo funkcija taip pat gali būti ignoruojama, kadangi diskontuota vieno periodo vidutinė reikšmė visuomet bus neneigiama.

### 1.5.2.1 BARJERO SANDORIŲ ĮKAINOJIMAS, KAI BARJERO KIRSTI NEGALIMA

Šiuo atveju barjero opcionas netenka savo veiksmingumo, t.y. nustoja galioti, jei kintant aktyvui pasiekiamas (kliudomas) nustatytas barjeras. Apatinis barjeras toliau bus žymimas *L*, viršutinis – *H*. $a_t=1$ jei barjeras pasiekiamas anksčiau arba laiko momentu $t$ ir $a_t=0$ kitu atveju.

Akivaizdu, kad šio barjero sandorio vertė laiko momentu $t$ yra lygi 0, jei $a_t=1$. Kitaip tariant, $v(p_i,t;a_t=1)=0$. Tuomet (1.42) ir (1.43) tampa paprastesnės:

$$v(p_i,t;a_t=0)=\max\left[g(p_i,K,a_t=0),e^{-r\Delta t}\sum_{j=1}^{m}Q\{X_{t+1}=p_j,a_{t+1}=0\mid X_t=p_i,a_t=0\}v(p_j,t+1;a_{t+1}=0)\right],\quad \textbf{(1.44)}$$

čia galutinė sąlyga $v(p_i,T;a_T=0)=\max\{\omega[\exp(p_i)-K],0\}$; $g(p_i,K,a_t=0)=\max\{\omega[\exp(p_i)-K],0\}$ – Amerikietiškajam barjero sandoriui (barjero kirsti negalima), $g(p_i,K,a_t=0)=0$ – Europietiškajam barjero sandoriui (barjero kirsti negalima).

Norint apskaičiuoti perėjimo tikimybę, patogu nustatyti būsenų aibę, kuomet sandoris yra negaliojantis – atitinkamai mažėjantis, didėjantis ir dvigubo barjero:

$$S=\begin{cases}\{i\in\{1,\dots,m\}:\exp(p_i)\le L\},\\ \{i\in\{1,\dots,m\}:\exp(p_i)\ge H\},\\ \{i\in\{1,\dots,m\}:\exp(p_i)\le L\cup\exp(p_i)\ge H\}.\end{cases}\qquad \textbf{(1.45)}$$

Tikimybė $\pi_{ij}$ pereiti iš būsenos $p_i$ į būseną $p_j$ nekertant barjero:

$$\pi_{ij}=Q\{X_{t+1}=p_j,a_{t+1}=0\mid X_t=p_i,a_t=0\}=\begin{cases}q_{ij},\ i\notin S,j\notin S,\\ 0,\ \text{kitu atveju}.\end{cases}\qquad \textbf{(1.46)}$$

Akivaizdu, kad sąlyginė tikimybė lygi $q_{ij}$, jeigu nei aktyvo kaina $p_i$, nei kaina $p_j$ nepriklauso zonai, kurioje buvo kirstas barjeras.

Apibrėžkime tris papildomas matricas įvairiems barjero sandorio tipams – atitinkamai mažėjančiam, didėjančiam ir dvigubo barjero.

$$\Pi_{d/o} = \begin{bmatrix} 0_{k-1,k-1} & 0_{k-1,m-k+1} \\ 0_{m-k+1,k-1} & Q(k,m;k,m) \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(1.47)}$$

$$\Pi_{u/o} = \begin{bmatrix} Q(1,l;1,l) & 0_{l,m-l} \\ 0_{m-l,l} & 0_{m-l,m-l} \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(1.48)}$$

$$\Pi_{dbl/o} = \begin{bmatrix} 0_{k-1,k-1} & 0_{k-1,l-k+1} & 0_{k-1,m-l} \\ 0_{l-k+1,k-1} & Q(k,l;k,l) & 0_{l-k+1,m-l} \\ 0_{m-l,k-1} & 0_{m-l,l-k+1} & 0_{m-l,m-l} \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(1.49)}$$

čia $k$ yra kainos, esančios iškart virš apatinio barjero $L$, indekso numeris ir $l$ yra kainos, esančios iškart žemiau viršutinio barjero $H$, indekso numeris, $0_{i,j}$ yra $i \times j$ formato nulinė matrica ir $Q(i,j;k,l)$ yra matricos $Q$ dalis, apimanti eilutes nuo $i$ iki $j$ ir stulpelius nuo $k$ iki $l$ imtinai.

Amerikietiškojo barjero sandorio kaina, kuomet barjero kirsti negalima, su opciono galiojimo terminu $T$ ir įvykdymo kaina $K$ gali būti apskaičiuota naudojantis rekursine sistema:

$$V(\vec{p},t;a_t = 0) = \max\left[g(\vec{p},K,a_t = 0), e^{-r\Delta t}\Pi V(\vec{p},t+1;a_{t+1} = 0)\right],\ t \in \{0,1,\ldots,T-1\}, \qquad \textbf{(1.50)}$$

$$V(\vec{p},t;a_t = 1) = \vec{0},\ t \in \{0,1,\ldots,T\}, \qquad \textbf{(1.51)}$$

$$V(\vec{p},T;a_T = 0) = \max\left\{\omega\left[\exp(\vec{p}) - K\vec{\mathbf{1}}\right], \vec{\mathbf{0}}\right\} \qquad \textbf{(1.52)}$$

$g(\vec{p},K,a_t = 0) = \max\left\{\omega\left[\exp(\vec{p}) - K\vec{\mathbf{1}}\right], \vec{\mathbf{0}}\right\}$ – Amerikietiškajam barjero sandoriui (barjero kirsti negalima), $g(\vec{p},K,a_t = 0) = \vec{\mathbf{0}}$ – Europietiškajam barjero sandoriui (barjero kirsti negalima).

Kintamasis $\omega$ nusako pasirinkimo sandorio išmokėjimo tipą: $\omega = 1$, jei tai pasirinkimo pirkti sandoris, o $\omega = -1$, jei tai pasirinkimo parduoti sandoris. Perėjimo matrica $\Pi$ pasirenkama atitinkamai iš $\Pi_{d/o}, \Pi_{u/o}, \Pi_{dbl/o}$ pagal barjero sandorio tipą, kuomet barjero kirsti negalima. Laiko momentu $t = 0$ barjero pasirinkimo sandorio, kai barjero kirsti negalima, kaina yra $(m+1)/2$-asis vektoriaus $V(\vec{p},0,a_0)$ elementas.

Europietiškajam barjero sandoriui rekursinė sistema įgauna paprastesnį pavidalą:

$$V(\vec{p},0) = \begin{cases} e^{-rT_m}\Pi^T \max\left\{\omega\left[\exp(\vec{p}) - K\vec{\mathbf{1}}\right], \vec{\mathbf{0}}\right\},\ \text{jei } a_0 = 0. \\ \vec{\mathbf{0}},\ \text{jei } a_0 = 1. \end{cases} \qquad \textbf{(1.53)}$$

## 1.5.2.2 BARJERO SANDORIŲ ĮKAINOJIMAS, KAI BARJERĄ KIRSTI BŪTINA

Šiuo atveju barjero opcionas tampa veiksmingu, t.y. galiojančiu, jei kintant aktyvui pasiekiamas (kliudomas) nustatytas barjeras. $a_t = 1$ jei barjeras pasiekiamas anksčiau arba laiko momentu $t$ ir $a_t = 0$ kitu atveju.

Akivaizdu, kad barjero sandoris, kai barjerą kirsti būtina, tampa standartiniu sandoriu, jei nors kartą $a_t = 1$.

Norint apskaičiuoti perėjimo tikimybę, patogu nustatyti būsenų aibę, kuomet sandoris yra galiojantis – atitinkamai mažėjantis, didėjantis ir dvigubo barjero:

$$S = \begin{cases} \{i \in \{1,\ldots,m\} : \exp(p_i) \le L\}, \\ \{i \in \{1,\ldots,m\} : \exp(p_i) \ge H\}, \\ \{i \in \{1,\ldots,m\} : \exp(p_i) \le L \cup \exp(p_i) \ge H\}. \end{cases} \quad \textbf{(1.54)}$$

Perėjimo tikimybės apibrėžiamos:

$$Q\{X_{t+1} = p_j, a_{t+1} = 0 \mid X_t = p_i, a_t = 0\} = \begin{cases} q_{ij}, \ i \notin S, j \notin S, \\ 0, \text{kitu atveju}. \end{cases} \quad \textbf{(1.55)}$$

$$Q\{X_{t+1} = p_j, a_{t+1} = 1 \mid X_t = p_i, a_t = 0\} = \begin{cases} q_{ij}, \ i \notin S, j \in S, \\ 0, \text{kitu atveju}. \end{cases} \quad \textbf{(1.56)}$$

$$Q\{X_{t+1} = p_j, a_{t+1} = 0 \mid X_t = p_i, a_t = 1\} = 0, \quad \textbf{(1.57)}$$

$$Q\{X_{t+1} = p_j, a_{t+1} = 1 \mid X_t = p_i, a_t = 1\} = q_{ij}, \quad \textbf{(1.58)}$$

(1.55) ir (1.56) apibrėžiamos analogiškai (1.46). Jei barjeras nors kartą kertamas, sandoris jau tampa galiojančiu ir negali būti deaktyvuotas (1.57). Perėjimo tikimybė nekinta, kol sandoris yra aktyvus (1.58).

Tuomet

$$\begin{aligned} v(p_i, t; a_t = 0) = e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^{m} Q\{X_{t+1} = p_j, a_{t+1} = 0 \mid X_t = p_i, a_t = 0\} v(p_j, t+1; a_{t+1} = 0) + \\ + e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^{m} Q\{X_{t+1} = p_j, a_{t+1} = 1 \mid X_t = p_i, a_t = 0\} v(p_j, t+1; a_{t+1} = 1) \end{aligned} \quad \textbf{(1.59)}$$

$$v(p_i, t; a_t = 1) = \max\left[ g(p_i, K, a_t = 1), e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^{m} q_{ij} v(p_j, t+1; a_{t+1} = 1) \right], \quad \textbf{(1.60)}$$

kadangi $g(p_i, K, a_t = 0) = 0$ nepaisant to, ar tai Amerikietiškasis, ar Europietiškasis barjero sandoris, kai barjerą kirsti būtina. $g(p_i, K, a_t = 1) = \max\{\omega[\exp(p_i) - K], 0\}$ – Amerikietiškajam barjero sandoriui (barjerą kirsti būtina), $g(p_i, K, a_t = 1) = 0$ – Europietiškajam barjero sandoriui (barjerą kirsti būtina).

Galutinės sąlygos yra

$$v(p_i, T; a_T = 0) = 0, \quad \textbf{(1.61)}$$

$$v(p_i, T; a_T = 1) = \max\{\omega[\exp(p_i) - K], 0\}. \quad \textbf{(1.62)}$$

Analogiškai prieš tai buvusiam poskyriui apibrėžiamos papildomas matricos įvairiems barjero sandorio tipams – atitinkamai mažėjančiam, didėjančiam ir dvigubo barjero.

$$\Pi_{d/o} = \Pi_{d/i} = \begin{bmatrix} 0_{k-1,k-1} & 0_{k-1,m-k+1} \\ 0_{m-k+1,k-1} & Q(k,m;k,m) \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(1.63)}$$

$$\Gamma_{d/i} = \begin{bmatrix} 0_{k-1,k-1} & 0_{k-1,m-k+1} \\ Q(k,m;1,k-1) & 0_{m-k+1,m-k+1} \end{bmatrix},$$

$$\Pi_{u/o} = \Pi_{u/i} = \begin{bmatrix} Q(1,l;1,l) & 0_{l,m-l} \\ 0_{m-l,l} & 0_{m-l,m-l} \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(1.64)}$$

$$\Gamma_{u/i} = \begin{bmatrix} 0_{l,l} & Q(1,l;l+1,m) \\ 0_{m-l,l} & 0_{m-l,m-l} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{dbl/o} = \Pi_{dbl/i} = \begin{bmatrix} 0_{k-1,k-1} & 0_{k-1,l-k+1} & 0_{k-1,m-l} \\ 0_{l-k+1,k-1} & Q(k,l;k,l) & 0_{l-k+1,m-l} \\ 0_{m-l,k-1} & 0_{m-l,l-k+1} & 0_{m-l,m-l} \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(1.65)}$$

$$\Gamma_{dbl/i} = \begin{bmatrix} 0_{k-1,k-1} & 0_{k-1,l-k+1} & 0_{k-1,m-l} \\ Q(k,l;1,k-1) & 0_{l-k+1,l-k+1} & Q(k,l;l+1,m) \\ 0_{m-l,k-1} & 0_{m-l,l-k+1} & 0_{m-l,m-l} \end{bmatrix},$$

Amerikietiškojo barjero sandorio kaina, kuomet barjerą kirsti būtina, su opciono galiojimo terminu $T$ ir įvykdymo kaina $K$ gali būti apskaičiuota naudojantis rekursine sistema:

$$V(\vec{p},t;a_t=0) = e^{-r\Delta t}\Pi V(\vec{p},t+1;a_{t+1}=0) + e^{-r\Delta t}\Gamma V(\vec{p},t+1;a_{t+1}=1), \qquad \textbf{(1.66)}$$

$$V(\vec{p},t;a_t=1) = \max\left[g(\vec{p},K,a_t=1), e^{-r\Delta t}QV(\vec{p},t+1;a_{t+1}=1)\right], \qquad \textbf{(1.67)}$$

$$V(\vec{p},T;a_T=0) = \vec{\mathbf{0}}, \qquad \textbf{(1.68)}$$

$$V(\vec{p},T;a_T=1) = \max\left\{\omega\left[\exp(\vec{p}) - K\vec{\mathbf{1}}\right], \vec{\mathbf{0}}\right\}, \qquad \textbf{(1.69)}$$

$g(\vec{p},K,a_t=1) = \max\left\{\omega\left[\exp(\vec{p}) - K\vec{\mathbf{1}}\right], \vec{\mathbf{0}}\right\}$ – Amerikietiškajam barjero sandoriui (barjerą kirsti būtina), $g(\vec{p},K,a_t=1) = \vec{\mathbf{0}}$ – Europietiškajam barjero sandoriui (barjerą kirsti būtina). Perėjimo matrica $\Pi$ pasirenkama atitinkamai iš $\Pi_{d/i}, \Pi_{u/i}, \Pi_{dbl/i}$ pagal barjero sandorio tipą, kuomet barjerą kirsti būtina (analogiškai ir $\Gamma$ atveju pasirenkama iš $\Gamma_{d/i}, \Gamma_{u/i}, \Gamma_{dbl/i}$). Laiko momentu $t=0$ sandorio kaina yra $(m+1)/2$-asis vektoriaus $V(\vec{p},0,a_0)$ elementas.

Europietiškajam barjero sandoriui, kai barjerą kirsti būtina, paprasčiausiai nustatoma $g(\vec{p},K,a_t=1) = \vec{\mathbf{0}}$, $t<T$ ir rekursinė sistema supaprastinama:

$$V(\vec{p},t;a_t=0) = e^{-r\Delta t}\Pi V(\vec{p},t+1;a_{t+1}=0) + e^{-r\Delta t}\Gamma V(\vec{p},t+1;a_{t+1}=1), \qquad \textbf{(1.70)}$$

$$V(\vec{p},t;a_t=1) = e^{-r\Delta t}QV(\vec{p},t+1;a_{t+1}=1). \qquad \textbf{(1.71)}$$

Europietiškojo tipo barjero opcionams įkainoti galima pasinaudoti ir pariteto sąryšiu (žiūr. (1.9) išraišką). Tuomet Europietiškąjį barjero sandorį, kai barjerą kirsti būtina, atsižvelgiant į (1.41) ir (1.53) formules galima įkainoti:

$$V(\vec{p},0)=\begin{cases} e^{-rT_m}\left(Q^T-\Pi^T\right)\max\left\{\omega\left[\exp(\vec{p})-K\vec{\mathbf{1}}\right],\vec{\mathbf{0}}\right\}, \text{ jei } a_0=0, \\ e^{-rT_m}Q^T\max\left\{\omega\left[\exp(\vec{p})-K\vec{\mathbf{1}}\right],\vec{\mathbf{0}}\right\}, \text{ jei } a_0=1. \end{cases} \quad \textbf{(1.72)}$$

## 1.6 MONTE – KARLO MODELIAVIMAS

Monte Karlo (*angl.* Monte Carlo) modeliavimo esmė – sandorio gyvavimo periode generuoti daugybę aktyvo vertės kitimo realizacijų, apskaičiuoti kiekvienos realizacijos opciono kainą ir galutinius rezultatus vidurkinti. Pagrindinis šio metodo privalumas yra lankstumas. Metodas gali lengvai dirbti esant daugybiniams atsitiktiniams faktoriams, pavyzdžiui, keleto akcijų sandoriams ar atsitiktinei palūkanų normai. Kita vertus, naudojantis šiuo metu sudėtingas ir ilgai užtrunka Amerikietiškųjų pasirinkimo sandorių įkainojimas ([16], [14]).

*Monte Karlo metodo algoritmas Europietiškajam barjero pasirinkimo sandoriui ([16])*.

1. Pagal (1.13) išraišką generuojamas aktyvo kainos kelias iki opciono galiojimo termino pabaigos.
2. Kiekviename laiko žingsnyje tikrinama, ar nebuvo kirstas barjeras.
3. Atsižvelgiant į barjero sandorio specifiką ir generuotą aktyvo kainą opciono galiojimo termino pabaigoje skaičiuojamas išmokėjimas.
4. Gautas išmokėjimas diskontuojamas į pradinį laiko momentą.
5. Kartojami 1 – 4 žingsniai (paprastai 10,000-200,000 kartų).
6. Skaičiuojamas visų barjero sandorio vertės realizacijų, gautų 4 žingsnyje, aritmetinis vidurkis.

## 1.7 DARBE SPRENDŽIAMI UŽDAVINIAI

Darbo uždaviniai:

1. Realizuoti Markovo grandinių algoritmą diskretiems barjero sandoriams įkainoti.
2. Naudojantis Markovo grandinių metodu gautais rezultatais atlikti šio metodo efektyvumo tyrimą, rezultatus lyginant su analizinėmis Bleiko ir Šolso formulėmis apskaičiuotais opcionų kainos įverčiais (taikant pataisą, siejančią tolydžią ir diskrečią opciono vertes).
3. Realizuoti Monte Karlo metodą barjero sandoriams įkainoti ir palyginti gautus abiejų metodų rezultatus.

## 1.8 REIKALAVIMAI KURIAMIEMS MODELIAMS, ALGORITMAMS, PROGRAMINEI ĮRANGAI IR ATLIEKAMIEMS TYRIMAMS

Kuriami algoritmai privalo būti aiškūs ir racionalūs.

Sukurtas barjero sandorių įkainojimo Markovo grandinėmis įrankis turi būti pritaikytas greitam ir efektyviam naudojimui. Programoje privalo būti įgyvendinta galimybė palyginti Markovo grandinių metodo ir Monte Karlo modeliavimo rezultatų tikslumą, kuomet etaloninės reikšmės yra apskaičiuotos naudojantis analizinėmis Bleiko ir Šolso formulėmis, taikant (1.31), (1.32) formulėmis aprašytą pataisą, kadangi Bleiko ir Šolso įkainojimo modelis remiasi tolydinės barjero stebėsenos prielaida, o tiek Markovo grandinių, tiek Monte Karlo metodai įvertina diskretaus barjero sandorio kainą.

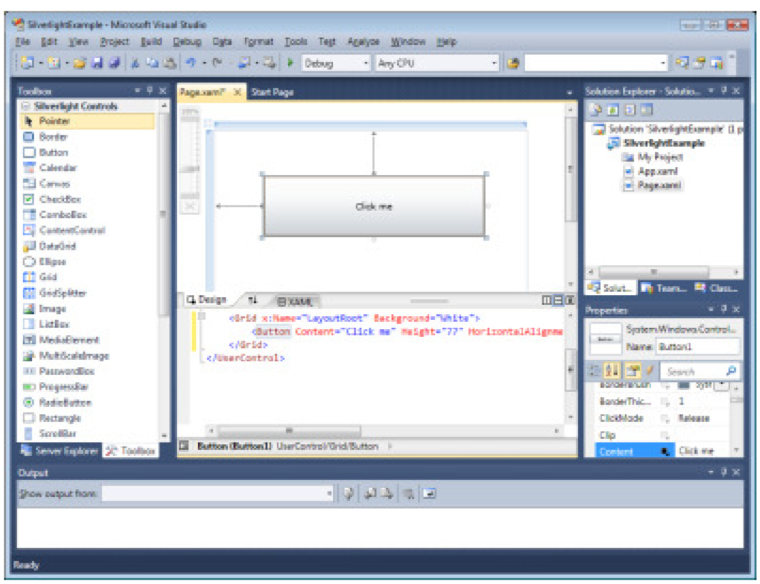
Programinės realizacijos valdymas turi nereikalauti išankstinio vartotojo pasiruošimo. Programoje privalo būti jos aprašymas, instrukcija ir pagalba vartotojui.

Turi būti pasiektas sukurtos darbo metodikos ir jos programinio įgyvendinimo pagrindinis tikslas – suprantami, lengvai interpretuojami, logiški rezultatai.

## 1.9 PROGRAMINĖS PRIEMONĖS PASIRINKIMO PAGRĮSTUMAS

*„Microsoft Visual Studio“* yra kompanijos „Microsoft“ integruota kūrimo aplinka, kuri naudojama kurti konsolinę ir grafinę taikomųjų programų vartotojo sąsajas kartu su interneto svetainėmis, interneto programomis ir kt. Ši aplinka

- ✓ palaiko įvairias programavimo kalbas – C/C++, VB.NET, C#, F# ir kt.;
- ✓ supaprastina kūrimo ciklą pradedant išvaizda ir baigiant diegimu;
- ✓ pasižymi įrankių gausa;
- ✓ greitai projektuojama grafinė vartotojo sąsaja.



**1.4 pav. *„Microsoft Visual Studio 2010“* redaktoriaus langas**

1991 m. „Microsoft “ kompanija sukūrė *Visual Basic* (VB) programavimo kalbą, skirtą dirbti sistemos Windows aplinkoje ir naudoti jos išteklius. VB – tai jau objektinio programavimo kalba.

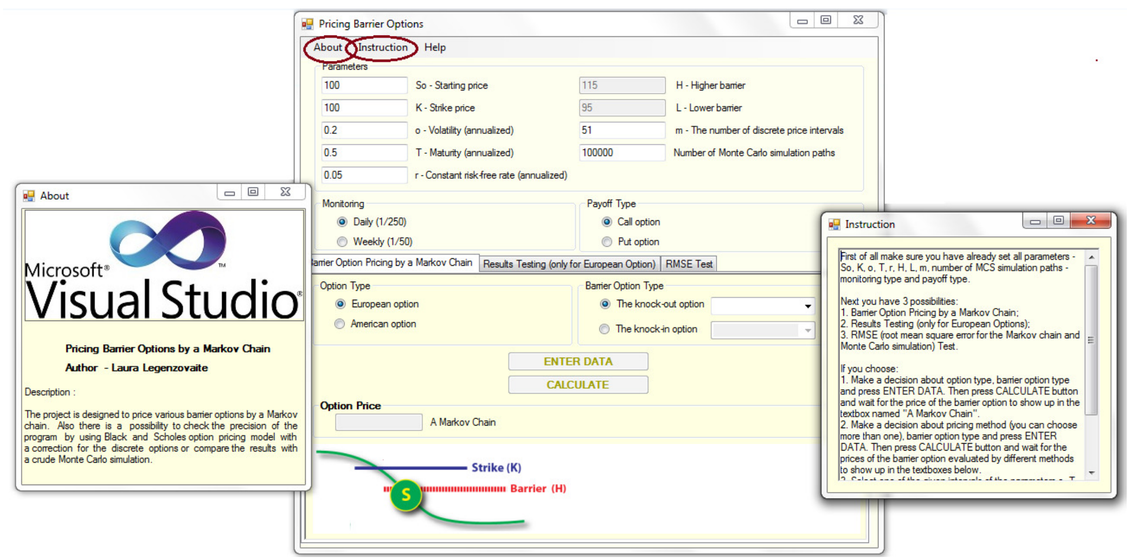
Kalba valdo objektus, kuriems atliekami įvairūs veiksmai. Visas programos kodas paskirstytas į procedūras (paprogrames), kurios redaguojamos ir iškviečiamos atskirai. VB privalumai:

- ✓ lengva programavimo kalba;
- ✓ paprastai organizuojami skaičiavimai su dideliu duomenų rinkiniu;
- ✓ galima naudotis kitų Windows programų funkcijomis, paimti iš jų duomenis ir juos keisti.

## 1.10 PROGRAMINĖS REALIZACIJOS APRAŠYMAS IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Programinė realizacija sukurta naudojantis „*Microsoft Visual Studio 2010*“ ir parašyta *Visual Basic* programavimo kalba.

Programinės realizacijos aprašymas ir instrukcija vartotojui pateikti failo *Pricing Barrier Options.sln* pagrindinio puslapio skiltyse *About* ir *Instruction* (žr. 1.5 pav.).




**1.5 pav. Pagrindinis programinės realizacijos langas ir programos aprašymo langas**

# 2. TIRIAMOJI DALIS

Toliau pateikti darbo rezultatai, gauti piniginiais vienetais įkainojant įvairius barjero pasirinkimo sandorius Markovo grandinių metodu, palygintas Markovo grandinių ir Monte Karlo metodų tikslumas.

## 2.1 PRIELAIDOS

Prekyba akcijomis biržoje vyksta ne visuomet. Birža yra uždaroma savaitgaliais ir švenčių dienomis. Tokiu atveju arba kiekvienos prekybos akcijomis biržoje dienos pabaigoje visa prekyba užšaldoma iki kitos dienos. 2.1 pav. – prekybos akcijomis biržoje kalendorius 2012 m. ([12]).

| Tiesiogiai tarp dviejų šalių | | | Europoje | | | JAV | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sausis | 20 | | Sausis | 20 | | Sausis | 20 | |
| Vasaris | 20 | | Vasaris | 20 | | Vasaris | 20 | |
| Kovas | 22 | 62 | Kovas | 22 | 62 | Kovas | 22 | 62 |
| Balandis | 20 | | Balandis | 20 | | Balandis | 20 | |
| Gegužė | 22 | | Gegužė | 22 | | Gegužė | 22 | |
| Birželis | 21 | 63 | Birželis | 21 | 63 | Birželis | 21 | 63 |
| Liepa | 21 | | Liepa | 21 | | Liepa | 21 | |
| Rugpjūtis | 23 | | Rugpjūtis | 23 | | Rugpjūtis | 23 | |
| Rugsėjis | 19 | 63 | Rugsėjis | 19 | 63 | Rugsėjis | 19 | 63 |
| Spalis | 23 | | Spalis | 23 | | Spalis | 23 | |
| Lapkritis | 21 | | Lapkritis | 21 | | Lapkritis | 21 | |
| Gruodis | 20 | 64 | Gruodis | 20 | 64 | Gruodis | 20 | 64 |
| Iš viso | 252 | | Iš viso | 252 | | Iš viso | 252 | |

**2.1 pav. Prekybos akcijomis biržoje kalendorius 2012 m.**

Paprastumo dėlei šiame darbe daromos prielaidos, kad

1) metuose yra 250 prekybos akcijomis biržoje dienų;
2) metuose yra 50 prekybos akcijomis biržoje savaičių,
3) nemokami dividendai ir nėra kitų išlaidų.

## 2.2 ĮPRASTINIO PASIRINKIMO SANDORIO ĮKAINOJIMAS MARKOVO GRANDINĖMIS

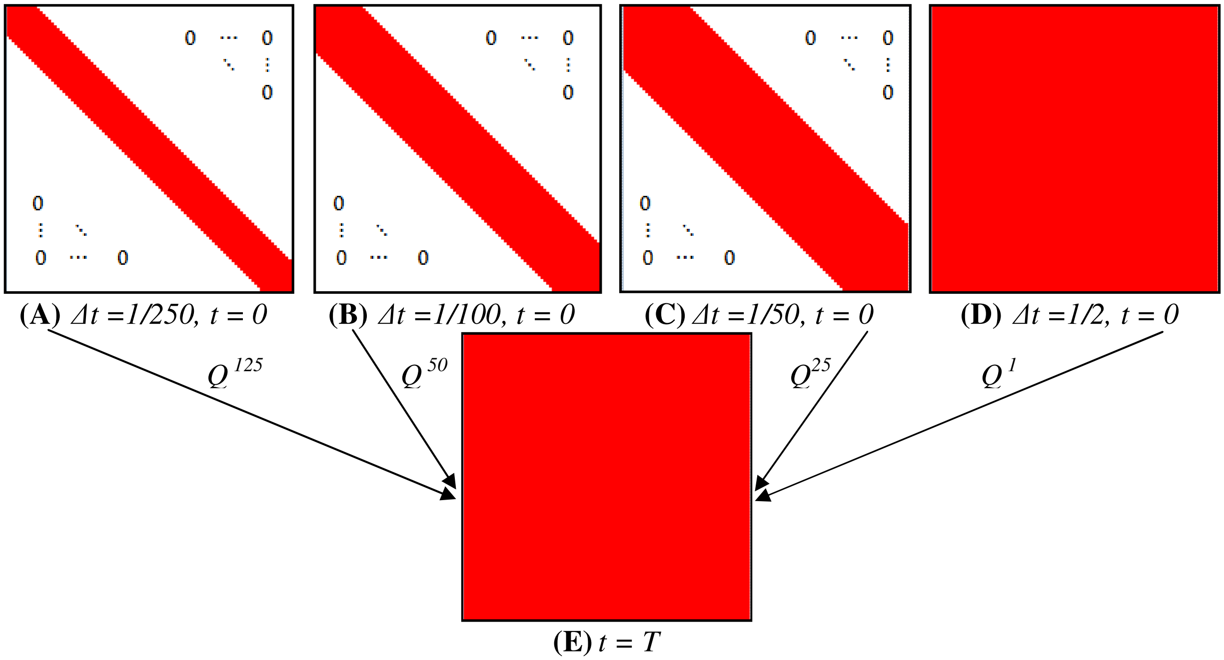
2.1 lentelėje pateikti rezultatai, gauti Markovo grandinių metodu įkainojant Europietiškąjį pasirinkimo pirkti sandorį, esant skirtingam laiko žingsnių skaičiui (žymimam $n$). $m$ žymi pirminio aktyvo kainos būsenų skaičių.

**2.1 lentelė**

**Europietiškojo pasirinkimo pirkti sandorio kaina, esant skirtingam laiko žingsnių skaičiui**

| Laiko žingsnių skaičius ($n$) | 125 | 50 | 25 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| Laiko žingsnis ($\Delta t$) | 1/250 | 1/100 | 1/50 | 1/2 |
| m = 101 | 7.0536 | 6.9523 | 6.9184 | 6.8860 |
| m = 301 | 6.9087 | 6.8959 | 6.8917 | 6.8878 |
| m = 601 | 6.8936 | 6.8902 | 6.8891 | 6.8882 |
| m = 901 | 6.8907 | 6.8892 | 6.8887 | 6.8883 |
| m = 1201 | 6.8897 | 6.8888 | 6.8886 | 6.8884 |
| m = 1401 | 6.8894 | 6.8887 | 6.8885 | 6.8884 |
| m = 1601 | 6.8891 | 6.8887 | 6.8885 | 6.8884 |
| m = 1801 | 6.8890 | 6.8886 | 6.8885 | 6.8885 |
| m = 1901 | 6.8889 | 6.8886 | 6.8885 | 6.8885 |
| m = 2001 | 6.8889 | 6.8886 | 6.8885 | 6.8885 |
| m = 2801 | 6.8887 | 6.8887 | 6.8885 | 6.8885 |
| m = 2901 | 6.8887 | 6.8887 | 6.8885 | 6.8885 |
| m = 3001 | 6.8887 | 6.8887 | 6.8885 | 6.8885 |

Parametrai: $S_0 = 100, K = 100, r = 0.05, T_m = 0.5, \sigma = 0.2.$




**2.2 pav. Perėjimo tikimybių matricos tankumas laiko momentais $t = 0$ ir $t = T$, esant skirtingam laiko žingsniui ($S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0.05$, $T_m = 0.5$, $\sigma = 0.2$, $m = 101$)**

Naudojantis Bleiko ir Šolso sandorių įkainojimo modeliu pagal (1.19) formulę apskaičiuota šio opciono vertė yra 6.8887. Galima teigti, kad metodas konverguoja į tikslų sandorio kainos įvertį net ir tuo atveju, kai laiko žingsnis yra pakankamai didelis. Tai sąlygoja pirminio aktyvo kainos būsenų vektorius $\vec{p}$ ir perėjimo tikimybių matrica $Q$. Vektorius $\vec{p}$ apskaičiuojamas atsižvelgiant tik į aktyvo grąžos standartinį nuokrypį opciono galiojimo termino pabaigoje (žiūr. (1.37)) ir nekinta, esant skirtingiems laiko žingsniams. Perėjimo tikimybių matrica $Q$ yra priklausoma būtent nuo konkretaus laiko žingsnio (žiūr. (1.39)). Kaip matyti 2.2 pav., kai laiko žingsnis mažas, matrica $Q$ yra reta (per trumpą laikotarpį egzistuoja mažiau galimybių pereiti iš vienos būsenos į kitas, žiūr. 2.2 pav. (A) dalį), kai $\Delta t$ yra didelis – tanki (žiūr. 2.2 pav. (D) dalį). Kiekvienu atveju po $n$ žingsnių perėjimo tikimybių matrica galutiniu laiko momentu $Q^T$ visgi yra tanki (žiūr. 2.2 pav (E) dalį). Kitaip tariant, perėjimo tikimybių matrica $Q$ puikiai prisitaiko prie skirtingų laiko žingsnių. Dėl šios priežasties net pakankamai didelis laiko žingsnis neįtakoja prastesnių rezultatų, kadangi įkainojant įprastinį Europietiškąjį pasirinkimo sandorį svarbus yra ne pirminio aktyvo kainos stebėsenos dažnis, o būtent opciono vykdymo momentas. Netgi priešingai, kai $\Delta t = ½$, ženkliai sumažėja atliekamų veiksmų skaičius, paklaidų kaupimasis ir Markovo grandinių metodas konverguoja greičiau, nei kai $\Delta t = 1/250$.

## 2.3 BARJERO SANDORIŲ ĮKAINOJIMO MARKOVO GRANDINĖMIS REZULTATAI

Barjero sandorių įkainojimo Markovo grandinėmis rezultatus pateiksime 3 etapais:

1. įkainojant Europietiškuosius opcionus;
2. įkainojant Amerikietiškuosius opcionus;
3. vertinant metodo tikslumą pagal Bleiko ir Šolso apskaičiuotas analizines barjero sandorių kainas, taikant pataisą, siejančią tolydžią ir diskrečią opciono vertes.

### 2.3.1 EUROPIETIŠKŲJŲ BARJERO SANDORIŲ ĮKAINOJIMAS MARKOVO GRANDINĖMIS

2.2 lentelėje pateikti rezultatai, gauti įkainojant Europietiškuosius pasirinkimo pirkti barjero sandorius, kai barjeras žemiau vykdomosios kainos; barjero kirsti negalima. Norint pademonstruoti Markovo grandinių metodo veikimą įvairiose situacijose parinktos 3 barjero reikšmės ($L = \{85, 95, 99\}$), iš kurių viena ($L = 99$) yra artima pirminio aktyvo kainai. Taipogi, barjero stebėsenos dažnis parinktas fiksuojant pirminio aktyvo kainą kas dieną ($\Delta t = 1/250$) ir kas savaitę ($\Delta t = 1/50$) tam, kad būtų galima išanalizuoti, kokią šiuo atveju įtaką opciono kainai turi laiko žingsnio ilgis (priešingai nei įkainojant įprastinį Europietiškąjį opcioną, žiūr. 2.2 poskyrį).

**2.2 lentelė**

**Europietiškųjų pasirinkimo pirkti barjero sandorių kainos, kai barjeras žemiau vykdomosios kainos; barjero kirsti negalima**

| | Kas dieną | | | Kas savaitę | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Barjeras, ($L$) | 85 | 95 | 99 | 85 | 95 | 99 |
| m = 101 | 7.0090 | 5.2855 | 2.5772 | 6.8924 | 5.5883 | 3.4088 |
| m = 301 | 6.8691 | 5.0295 | 1.9213 | 6.8655 | 5.4211 | 2.9491 |
| m = 601 | 6.8522 | 5.0531 | 2.0263 | 6.8614 | 5.4449 | 3.0307 |
| m = 901 | 6.8503 | 5.0171 | 2.0695 | 6.8615 | 5.4161 | 3.0636 |
| m = 1201 | 6.8488 | 5.0049 | 2.0053 | 6.8610 | 5.4065 | 3.0160 |
| m = 1401 | 6.8485 | 5.0150 | 2.0294 | 6.8610 | 5.4148 | 3.0340 |
| m = 1601 | 6.8472 | 5.0238 | 2.0482 | 6.8602 | 5.4222 | 3.0481 |
| m = 1801 | 6.8474 | 5.0316 | 2.0031 | 6.8605 | 5.4287 | 3.0145 |
| m = 1901 | 6.8476 | 5.0208 | 2.0127 | 6.8606 | 5.4198 | 3.0216 |
| m = 2001 | 6.8477 | 5.0387 | 2.0214 | 6.8607 | 5.4346 | 3.0282 |
| m = 2801 | 6.8475 | 5.0216 | 2.0315 | 6.8608 | 5.4206 | 3.0358 |
| m = 2901 | 6.8471 | 5.0350 | 2.0373 | 6.8605 | 5.4316 | 3.0401 |
| m = 3001 | 6.8473 | 5.0289 | 2.0427 | 6.8606 | 5.4266 | 3.0442 |

Parametrai: $S_0 = 100, K = 100, r = 0.05, T_m = 0.5, \sigma = 0.2.$

2.3 lentelėje įkainoti Europietiškieji pasirinkimo pirkti barjero sandoriai, kai barjeras žemiau vykdomosios kainos; barjerą kirsti būtina. Tiek 2.2 lentelėje, tiek 2.3 lentelėje įkainoti barjero sandoriai skiriasi tik opciono tipu (barjero kirsti negalima ir barjerą kirsti būtina), o parametrai parinkti vienodi, todėl nesunku patikrinti, kad pariteto ryšys (žiūr. (1.9) išraišką ir 2.1 lentelėje 2-ąjį,4-ąjį stulpelius) visais barjero dydžio ir stebėsenos dažnio atvejais tikrai galioja:

$$6.8473 + 0.0414 = 5.0289 + 1.8598 = 2.0427 + 4.8460 = 6.8887\ (m = 3001);$$

$$6.8606 + 0.0279 = 5.4266 + 1.4619 = 3.0442 + 3.8443 = 6.8885\ (m = 3001).$$

**2.3 lentelė**

**Europietiškųjų pasirinkimo pirkti barjero sandorių kainos, kai barjeras žemiau vykdomosios kainos; barjerą kirsti būtina**

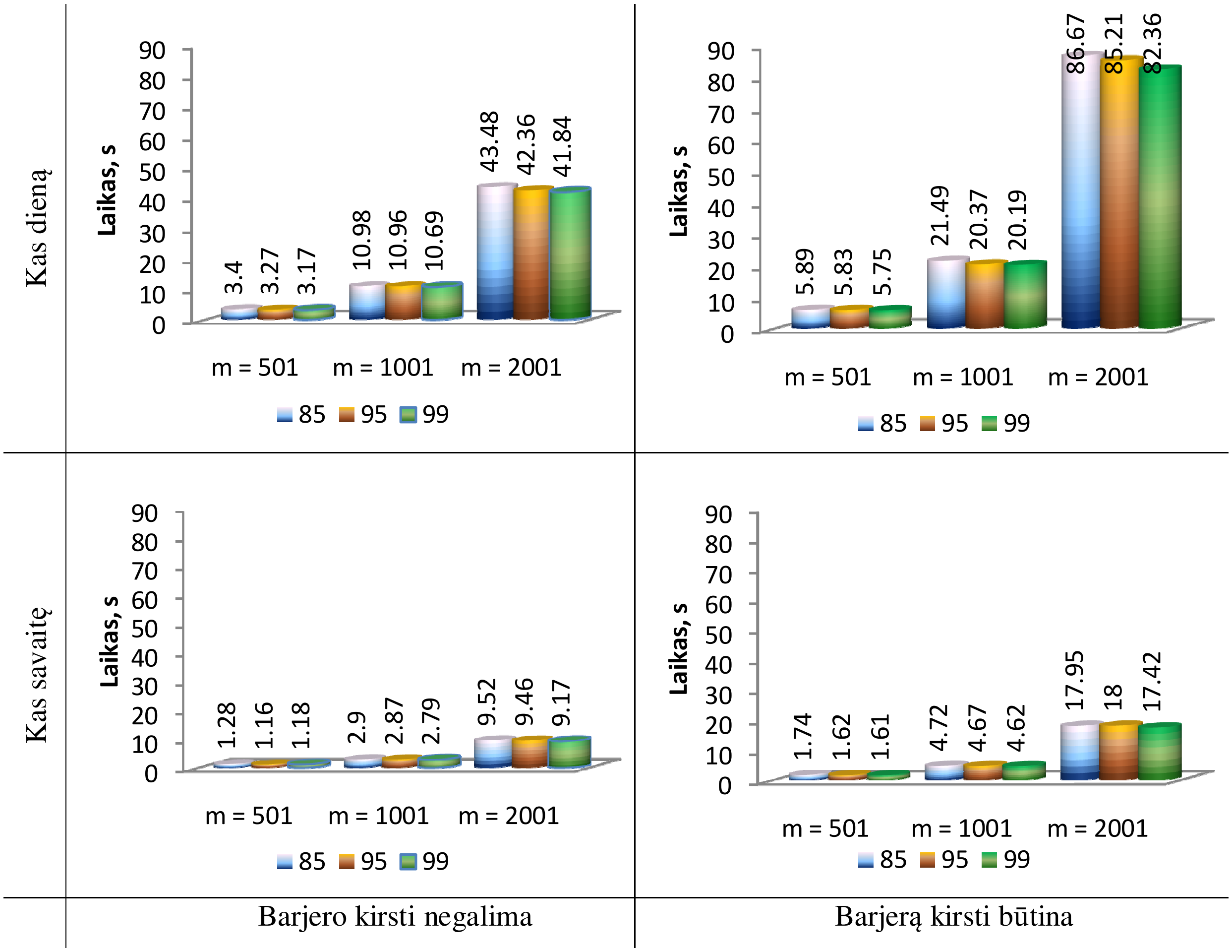
| | Kas dieną | | | Kas savaitę | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Barjeras, (*L*) | 85 | 95 | 99 | 85 | 95 | 99 |
| m = 101 | 0.0447 | 1.7682 | 4.4764 | 0.0259 | 1.3301 | 3.5096 |
| m = 301 | 0.0396 | 1.8791 | 4.9874 | 0.0262 | 1.4706 | 3.9426 |
| m = 601 | 0.0413 | 1.8405 | 4.8672 | 0.0277 | 1.4442 | 3.8584 |
| m = 901 | 0.0404 | 1.8736 | 4.8212 | 0.0272 | 1.4726 | 3.8251 |
| m = 1201 | 0.0409 | 1.8847 | 4.8843 | 0.0275 | 1.4821 | 3.8726 |
| m = 1401 | 0.0409 | 1.8744 | 4.8599 | 0.0275 | 1.4737 | 3.8545 |
| m = 1601 | 0.0420 | 1.8653 | 4.8409 | 0.0283 | 1.4663 | 3.8404 |
| m = 1801 | 0.0416 | 1.8574 | 4.8859 | 0.0280 | 1.4598 | 3.8740 |
| m = 1901 | 0.0414 | 1.8682 | 4.8763 | 0.0279 | 1.4687 | 3.8669 |
| m = 2001 | 0.0412 | 1.8502 | 4.8675 | 0.0278 | 1.4539 | 3.8603 |
| m = 2801 | 0.0412 | 1.8671 | 4.8572 | 0.0277 | 1.4679 | 3.8527 |
| m = 2901 | 0.0416 | 1.8537 | 4.8514 | 0.0280 | 1.4569 | 3.8484 |
| m = 3001 | 0.0414 | 1.8598 | 4.8460 | 0.0279 | 1.4619 | 3.8443 |

Parametrai: $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0.05$, $T_m = 0.5$, $\sigma = 0.2$.

Išanalizavus 2.2 ir 2.3 lenteles galima pastebėti, kad jei barjeras nėra artimas pirminio aktyvo kainai (pvz., $L = 85$), sandorio kainos įvertis 1E-02 tikslumu nusistovi pakankamai greitai. Tokiu atveju užtenka 601 pirminio aktyvo kainos būsenos. Jei barjeras yra artimas pirminio aktyvo kainai (pvz., $L = 99$), sandorio kainos įvertis 1E-02 tikslumu nežymiai svyruoja net ir kai $m \geq 2801$. Svarstant kokią įtaką barjero sandorio atveju turi pirminio aktyvo kainos stebėsena, akivaizdu, kad kuo laiko žingsnis mažesnis, tuo barjero sandoris, kai barjero kirsti negalima, yra pigesnis, o jei barjerą kirsti būtina, – brangesnis, kadangi mažinant laiko žingsnį didėja tikimybė kažkuriuo laiko momentu kliudyti nustatytą barjerą ir atvirkščiai. Taigi, norint gauti tikslų barjero sandorio kainos įvertį realioje finansų rinkoje, būtina pirminio aktyvo kainos stebėsenos dažnį parinkti kiek įmanoma artimesnį realybei, o ne tolydžiam atvejui.

Vertinant metodo efektyvumą, svarbu žinoti, kokią įtaką laiko sąnaudoms turi barjero vieta, laiko žingsnio ilgis, pirminio aktyvo kainos būsenų skaičius ir netgi pats barjero sandorio tipas (žiūr. 2.3 pav.).

Įkainojant barjero sandorį, kai barjerą kirsti būtina, (1.72) formulėje lyginant su (1.53) formule vietoje $\Pi^T$ atsiranda skirtumas $(Q^T - \Pi^T)$ ir sudėtingesnė tampa antroji sąlyga, jei $a_t = 1$. Kaip matyti 2.3 pav. dešinėje, tai beveik dvigubai prailgina programos darbo laiką. Atidžiau pažvelgus į 2.3 pav. taip pat galima pastebėti, kad laiko sąnaudos visais atvejais yra mažesnės, kai barjeras yra artimas pirminio aktyvo kainai (pvz., $L = 99$), kadangi perėjimo tikimybių matrica $\Pi$, šiuo atveju, yra retesnė.




**2.3 pav. Laiko sąnaudų sekundėmis grafikai įkainojant Europietiškuosius pasirinkimo pirkti barjero sandorius, kai barjeras žemiau vykdomosios kainos ($S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0.05$, $T_m = 0.5$, $\sigma = 0.2$)[3]**

Nesunku pastebėti, kad barjero stebėseną iš kasdieninės pakeitus į savaitinę, kitaip tariant, praretinus 5 kartus (paprastai savaitėje yra 5 prekybos akcijomis biržoje dienos), darbo laikas taipogi sutrumpėja ~ 4.5 karto (žiūr. 2.3 pav. apatinę dalį). Šis tiesioginis ryšys yra akivaizdus, kadangi ilginant laiko žingsnį mažėja jų skaičius opciono galiojimo laikotarpyje, o kartu ir atliekamų veiksmų skaičius.

Atrodytų, kad didinant pirminio aktyvo kainos būsenų skaičių, tendencija turėtų išlikti analogiška laiko žingsnio trumpinimui (tiesioginis ryšys). Vis dėlto, pagal 2.3 pav. matyti, kad pakeitus $m$ reikšmę iš 501 į 1001, laiko sąnaudos išauga ~ 3-3.5 karto, o pasirinkus $m = 2001$, programos darbas užtrunka jau net 4 kartus ilgiau nei prieš tai, kai $m = 2001$.

Taigi, norint per priimtiną laiką Markovo grandinių metodu įkainoti barjero sandorį, būtina apgalvotai parinkti laiko žingsnio ir pirminio aktyvo kainos būsenų skaičiaus parametrus.

[3] Procesorius - Intel(R) Core(TM) i3-2310M CPU @ 2.10GHz 2.10.

**2.4 lentelė**

**Europietiškųjų pasirinkimo pirkti įprastinių ir barjero, kai barjeras aukščiau vykdomosios kainos, sandorių kainos**

| | Barjero kirsti negalima | | | Barjerą kirsti būtina | | | Įprastinis sandoris |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Barjeras, (*H*) | 105 | 115 | 135 | 105 | 115 | 135 | |
| m = 101 | 0.0298 | 1.3080 | 5.6325 | 7.0239 | 5.7456 | 1.4211 | 7.0536 |
| m = 301 | 0.0375 | 1.2133 | 5.5742 | 6.8712 | 5.6954 | 1.3345 | 6.9087 |
| m = 601 | 0.0391 | 1.2104 | 5.5594 | 6.8545 | 5.6832 | 1.3342 | 6.8936 |
| m = 901 | 0.0404 | 1.2276 | 5.5401 | 6.8503 | 5.6631 | 1.3506 | 6.8907 |
| m = 1201 | 0.0414 | 1.2221 | 5.5438 | 6.8483 | 5.6675 | 1.3459 | 6.8897 |
| m = 1401 | 0.0405 | 1.2227 | 5.5502 | 6.8489 | 5.6666 | 1.3391 | 6.8894 |
| m = 1601 | 0.0418 | 1.2249 | 5.5450 | 6.8473 | 5.6643 | 1.3441 | 6.8891 |
| m = 1801 | 0.0411 | 1.2278 | 5.5430 | 6.8479 | 5.6612 | 1.3460 | 6.8890 |
| m = 1901 | 0.0409 | 1.2295 | 5.5481 | 6.8481 | 5.6594 | 1.3408 | 6.8889 |
| m = 2001 | 0.0406 | 1.2312 | 5.5429 | 6.8483 | 5.6577 | 1.3460 | 6.8889 |
| m = 2801 | 0.0407 | 1.2258 | 5.5447 | 6.8480 | 5.6629 | 1.3440 | 6.8887 |
| m = 2901 | 0.0406 | 1.2283 | 5.5430 | 6.8481 | 5.6604 | 1.3457 | 6.8887 |
| m = 3001 | 0.0405 | 1.2307 | 5.5485 | 6.8482 | 5.6580 | 1.3402 | 6.8887 |

Parametrai: $S_0 = 100, K = 100, r = 0.05, T_m = 0.5, \sigma = 0.2, \Delta t = 1/250.$

2.4 lentelėje pateikti rezultatai įkainojant Europietiškuosius pasirinkimo pirkti barjero sandorius, kai barjeras aukščiau vykdomosios kainos, abiem atvejais – jei barjero kirsti negalima ir jei barjerą kirsti būtina. Be abejonės, vėlgi nesunku patikrinti paritetinį ryšį, o pastebėjimai apie kainos nusistovėjimą įvairiose situacijose išlieka analogiški anksčiau aptartiems atvejams.

**2.5 lentelė**

**Europietiškųjų pasirinkimo pirkti įprastinių ir dvigubo barjero, kai vykdomoji kaina yra tarp apatinio ir viršutinio barjerų, sandorių kainos**

| | Barjero kirsti negalima | | | Barjerą kirsti būtina | | | Įprastinis sandoris |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Virš. barjeras, (*H*) | 115 | | | 115 | | | |
| Apat. barjeras, (*L*) | 85 | 95 | 99 | 85 | 95 | 99 | |
| m = 101 | 1.2742 | 0.5722 | 0.1258 | 5.7795 | 6.4815 | 6.9279 | 7.0536 |
| m = 301 | 1.1835 | 0.4812 | 0.0667 | 5.7251 | 6.4275 | 6.8420 | 6.9087 |
| m = 601 | 1.1794 | 0.4882 | 0.0733 | 5.7142 | 6.4053 | 6.8203 | 6.8936 |
| m = 901 | 1.1972 | 0.4903 | 0.0737 | 5.6935 | 6.4004 | 6.8120 | 6.8907 |
| m = 1201 | 1.1914 | 0.4844 | 0.0753 | 5.6983 | 6.4053 | 6.8160 | 6.8897 |
| m = 1401 | 1.1920 | 0.4872 | 0.0754 | 5.6973 | 6.4021 | 6.8140 | 6.8894 |
| m = 1601 | 1.1934 | 0.4907 | 0.0769 | 5.6958 | 6.3985 | 6.8122 | 6.8891 |
| m = 1801 | 1.1966 | 0.4944 | 0.0744 | 5.6924 | 6.3946 | 6.8146 | 6.8890 |
| m = 1901 | 1.1984 | 0.4927 | 0.0753 | 5.6906 | 6.3962 | 6.8137 | 6.8889 |
| m = 2001 | 1.2002 | 0.4982 | 0.0761 | 5.6887 | 6.3907 | 6.8128 | 6.8889 |
| m = 2801 | 1.1949 | 0.4908 | 0.0760 | 5.6938 | 6.3979 | 6.8127 | 6.8887 |
| m = 2901 | 1.1970 | 0.4955 | 0.0767 | 5.6917 | 6.3931 | 6.8120 | 6.8887 |
| m = 3001 | 1.1996 | 0.4955 | 0.0774 | 5.6891 | 6.3932 | 6.8112 | 6.8887 |

Parametrai: $S_0 = 100, K = 100, r = 0.05, T_m = 0.5, \sigma = 0.2, \Delta t = 1/250.$

Europietiškieji pasirinkimo pirkti dvigubo barjero sandoriai, kai barjero kirsti negalima, yra pigesni nei atitinkami viengubo barjero variantai. Tai sąlygoja didesnė rizika kliudyti bent vieną iš barjerų. Kita vertus, jei barjerą kirsti būtina, kaina dėl ką tik minėtos priežasties iškart išauga.

### 2.3.2 AMERIKIETIŠKŲJŲ BARJERO SANDORIŲ ĮKAINOJIMAS MARKOVO GRANDINĖMIS

Ne visais opcionų įkainojimo metodais lengva įvertinti Amerikietiškojo barjero sandorio vertę, kadangi tuomet galimas išankstinis opciono vykdymas, dėl kurio kiekviename žingsnyje reikia tikrinti opciono įvykdymo optimalumo sąlygą. Markovo grandinių metodu tai padaryti nesudėtinga. 2.6 lentelėje įkainoti Europietiškieji ir Amerikietiškieji pasirinkimo parduoti barjero sandoriai (kai barjero kirsti negalima ir kai tai padaryti būtina), kai barjeras žemiau vykdomosios kainos.

**2.6 lentelė**

**Europietiškųjų ir Amerikietiškųjų pasirinkimo parduoti įprastinių ir barjero, kai barjeras žemiau vykdomosios kainos, sandorių kainos**

| | Europietiškieji | | | Amerikietiškieji | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Barjero sandoriai | | Įprastinis sandoris | Barjero sandoriai | | Įprastinis sandoris |
| | Kirsti negalima + | Kirsti būtina = | | Kirsti negalima + | Kirsti būtina ≥ | |
| m = 101 | 1.4833 | 3.0529 | 4.5362 | 4.7579 | 3.2222 | 4.7753 |
| m = 301 | 1.5020 | 2.9323 | 4.4343 | 4.6553 | 3.0939 | 4.6687 |
| m = 601 | 1.4772 | 2.9464 | 4.4236 | 4.6428 | 3.1094 | 4.6574 |
| m = 901 | 1.4870 | 2.9345 | 4.4215 | 4.6412 | 3.0965 | 4.6552 |
| m = 1201 | 1.4810 | 2.9397 | 4.4207 | 4.6400 | 3.1022 | 4.6544 |
| m = 1401 | 1.4813 | 2.9391 | 4.4204 | 4.6398 | 3.1015 | 4.6541 |
| m = 1601 | 1.4684 | 2.9518 | 4.4203 | 4.6388 | 3.1153 | 4.6539 |
| m = 1801 | 1.4728 | 2.9473 | 4.4201 | 4.6390 | 3.1104 | 4.6538 |
| m = 1901 | 1.4751 | 2.9450 | 4.4201 | 4.6391 | 3.1079 | 4.6537 |
| m = 2001 | 1.4774 | 2.9427 | 4.4201 | 4.6392 | 3.1054 | 4.6537 |
| m = 2801 | 1.4779 | 2.9420 | 4.4199 | 4.6390 | 3.1046 | 4.6535 |
| m = 2901 | 1.4722 | 2.9477 | 4.4199 | 4.6386 | 3.1108 | 4.6535 |
| m = 3001 | 1.4751 | 2.9448 | 4.4199 | 4.6388 | 3.1077 | 4.6535 |

Parametrai: $S_0 = 100, K = 100, r = 0.05, T_m = 0.5, \sigma = 0.2, L = 85, \Delta t = 1/250$.

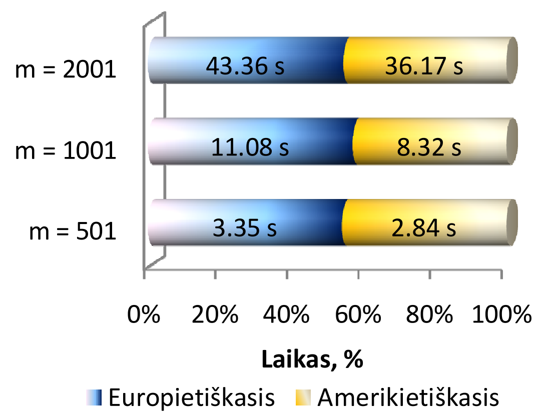
Dėl galimo išankstinio vykdymo, Amerikietiškieji barjero sandoriai yra brangesni nei analogiški Europietiškieji variantai (žiūr. 2.6 lentelę). Be to, atsižvelgiant į tai, kad įprastinis Amerikietiškasis opcionas, esant šiems parametrams, kainuoja 4.6535, kai $m = 3001$, akivaizdu, kad Amerikietiškiesiems sandoriams negalioja paritetinis ryšys (žiūr. (1.9) formulę):

$$4.6388 + 3.1077 > 4.6535 \ (m = 3001).$$

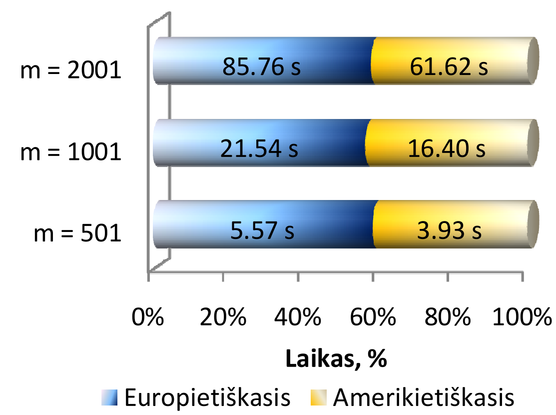
(1.9) lygybė virsta nelygybe:

$$kaina_{\text{kirsti negalima}} + kaina_{\text{kirsti būtina}} \geq kaina_{\text{įprastinis}}.$$

Tarkime, kad portfelio, susidedančio iš Amerikietiškųjų pasirinkimo pirkti barjero sandorių, kai barjero kirsti negalima, ir, kai barjerą kirsti būtina, savininkas pirmajam opcionui parenka tokią pat įvykdymo strategiją, kaip ir įprastinio Amerikietiškojo pasirinkimo pirkti sandorio atveju. Portfelio išmokėjimas visuomet bus didesnis nei įprastinio sandorio atveju, kadangi portfelyje yra papildomas Amerikietiškasis pasirinkimo pirkti barjero sandoris, kai barjerą kirsti būtina. Tik opcionų galiojimo pabaigoje įvykdyto portfelio išmokėjimas bus lygus įvykdyto įprastinio sandorio išmokėjimui.




**(A)** Barjero kirsti negalima




**(B)** Barjerą kirsti būtina

**2.4 pav. Laiko sąnaudų procentais grafikai įkainojant Europietiškuosius ir Amerikietiškuosius pasirinkimo parduoti barjero sandorius, kai barjeras žemiau vykdomosios kainos** ($S_0 = 100, K = 100, r = 0.05, T_m = 0.5, \sigma = 0.2, \Delta t = 1/250, L = 85$)

Išanalizavus 2.4 pav. galima teigti, kad Amerikietiškųjų barjero sandorių įkainojimas eikvoja perpus mažiau programos darbo laiko resursų. Vadinasi, naudojantis rekursine sistema barjero opciono įkainojimas Markovo grandinių metodu vyksta žymiai sparčiau. Taigi, Europietiškojo barjero sandorio, kai barjero kirsti negalima, kainą optimalu vertinti pagal (1.50)-(1.52) formules, kai $g(\bar{p}, K, a_t = 0) = \vec{\mathbf{0}}$ (nei naudojantis (1.53) išraiška), o kai barjerą kirsti būtina – pagal (1.66)-(1.69) formules, kai $g(\bar{p}, K, a_t = 1) = \vec{\mathbf{0}}$ (nei naudojantis (1.72) išraiška).

### 2.3.3 MARKOVO GRANDINIŲ METODO TIKSLUMO VERTINIMAS

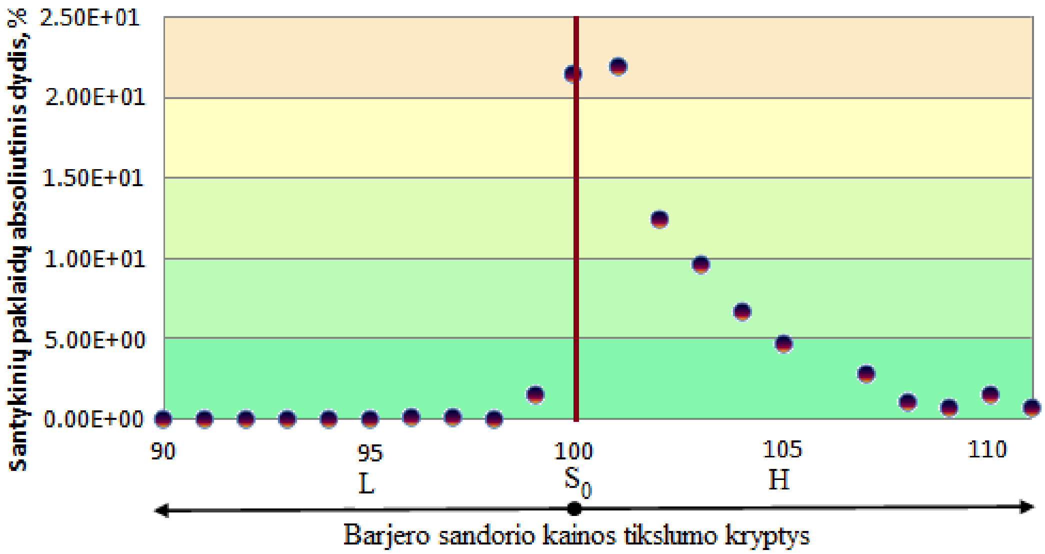
Markovo grandinių metodo tikslumui vertinti etaloninėmis barjero sandorių kainomis pasirinktos pagal Bleiko ir Šolso analizines formules (žiūr. 1.4.1 poskyrį) apskaičiuotos opcionų vertės, taikant (1.31)-(1.32) išraiškomis aprašytą pataisą, kadangi Bleiko ir Šolso modelis išvestas atsižvelgiant į tolydinės pirminio aktyvo kainos stebėsenos prielaidą, todėl įkainoti diskrečiam atvejui netinka. 2.7 lentelėje pateikti rezultatai, gauti įkainojant Europietiškuosius pasirinkimo pirkti barjero sandorius, kai barjero kirsti negalima.

**2.7 lentelė**

**Europietiškųjų pasirinkimo pirkti barjero sandorių kainos, kai barjero kirsti negalima**

| Barjeras, (*L*) | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 99.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Markovo gr. | 6.5156 | 6.3565 | 6.1337 | 5.8487 | 5.4796 | 5.0289 | 4.4696 | 3.7858 | 2.9615 | 2.0427 | 1.1220 |
| Analizinė | 6.4145 | 6.2142 | 5.9499 | 5.6085 | 5.1766 | 4.6408 | 3.9883 | 3.2073 | 2.2875 | 1.2205 | 0.0130 |
| Etaloninė | 6.5176 | 6.3544 | 6.1361 | 5.8506 | 5.4850 | 5.0261 | 4.4610 | 3.7772 | 2.9638 | 2.011 | 0.9230 |
| Sant. pak., % | 3.07 E-02 | -3.30 E-02 | 3.91 E-02 | 3.25 E-02 | 9.85 E-02 | -5.57 E-02 | -1.93 E-01 | -2.28 E-01 | 7.76 E-02 | -1.58 E+00 | -2.16 E+01 |
| Barjeras, (*H*) | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 | 111 |
| Markovo gr. | 0.0003 | 0.0021 | 0.0075 | 0.0192 | 0.0405 | 0.0748 | 0.1231 | 0.1924 | 0.2797 | 0.3841 | 0.5156 |
| Analizinė | 0.00003 | 0.0007 | 0.0034 | 0.0105 | 0.0247 | 0.0489 | 0.0862 | 0.1393 | 0.2103 | 0.3011 | 0.4126 |
| Etaloninė | 0.0004 | 0.0024 | 0.0083 | 0.0206 | 0.0425 | 0.0769 | 0.1268 | 0.1945 | 0.2819 | 0.3902 | 0.5198 |
| Sant. pak., % | 2.20 E+01 | 1.25 E+01 | 9.64 E+00 | 6.80 E+00 | 4.71 E+00 | 2.73 E+00 | 2.92 E+00 | 1.08 E+00 | 7.80 E-01 | 1.56 E+00 | 8.08 E-01 |

Parametrai: $S_0 = 100, K = 100, r = 0.05, T_m = 0.5, \sigma = 0.2, \Delta t = 1/250, m = 3001.$




**2.5 pav. Santykinių paklaidų absoliutinių dydžių procentais grafikas įkainojant Europietiškuosius pasirinkimo pirkti barjero sandorius, kai barjero kirsti negalima ($S_0 = 100, K = 100, r = 0.05, T_m = 0.5, \sigma = 0.2, \Delta t = 1/250, m = 3001$)**

Išanalizavus 2.7 lentelę ir 2.5 pav. galima teigti, kad esant šiems parametrams Markovo grandinių metodu gautos Europietiškųjų barjero sandorių, kai barjeras žemiau vykdomosios kainos ir jo kirsti negalima, kainų įverčių santykinių paklaidų absoliutinės reikšmės neviršija 1.6 proc., atmetant išimtinį atvejį, kai barjeras yra labai artimas pirminio aktyvo kainai ($L = 99.99$) ir absoliutinis santykinės paklaidos dydis siekia net 21.6 proc. Europietiškųjų barjero sandorių, kai barjeras aukščiau vykdomosios kainos ir jo kirsti negalima, įkainojimo tikslumas esant šiems parametrams prastesnis dėl sąlyginai mažų opciono kainų (≤ 0.5).

Santykinių paklaidų absoliutiniai dydžiai auga pirminio aktyvo kainai artėjant prie barjero. Vis dėlto, metodas konverguoja į pakankamai tikslų barjero sandorio kainos įvertį ir daugelyje situacijų, kai barjeras nėra artimas pirminio aktyvo kainai, opciono vertė gaunama 1E-02 tikslumu.

## 2.4 MARKOVO GRANDINIŲ METODO IR MONTE KARLO METODO PALYGINIMAS

Markovo grandinių metodo ir Monte Karlo metodo efektyvumas priklauso nuo tikslumo įvairiose situacijose. Abiejų metodų tikslumą įvertinsime pasinaudodami kvadratine šaknimi iš santykinių paklaidų kvadratų vidurkio (žymėsime RMSE, *angl.* root mean square error) ([10]):

$$\boldsymbol{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{E_i-(MG\ arba\ MK)_i}{C_i}\right)^2}, \qquad \textbf{(2.1)}$$

čia $N$ – yra įkainotų barjero opcionų su atsitiktiniais parametrais skaičius, $E_i$ – etaloninė barjero sandorio kaina, $(MG\ arba\ MK)_i$ – atitinkamai Markovo grandinių arba Monte Karlo metodais gauta barjero sandorio kaina. Tyrime $N = 10$. Abiejų metodų tikslumas vertinamas įkainojant Europietiškuosius pasirinkimo pirkti barjero sandorius, kai barjero kirsti negalima, 32-ose grupėse (žymimos $A, B, \cdots, AF$). Kiekvieną grupę sudaro 5 atsitiktiniai parametrai: $\sigma$ – aktyvo kainos nepastovumas (metinis), $T_m$ – sandorio galiojimo laikotarpis (metinis), $r$ – nerizikingoji palūkanų norma (metinė), barjero sandorio tipas, priklausomai nuo jo pagrindą sudarančio turto vertės kitimo rinkoje krypties, barjeras. Kiekvienas parametras turi po 2 variantus. Jei parametras yra skaitinis, tai kiekvieną variantą sudaro intervalas arba aibė, iš kurių kaskart atsitiktinai pagal tolygųjį skirstinį sugeneruojama viena reikšmė. Taigi, kiekvienoje grupėje naudojantis tiek Markovo grandinių metodu, tiek Monte Karlo metodu įkainojami 10 Europietiškųjų pasirinkimo pirkti barjero sandorių, kai barjero kirsti negalima su atsitiktinai parinktais parametrais, ir vertinama abiejų metodų RMSE.

Atsitiktinai parenkami parametrai:

- $\sigma$ – aktyvo kainos nepastovumas (metinis):
  1. $[0.1, 0.4]$
  2. $[0.1, 0.6]$.
- $T_m$ – sandorio galiojimo laikotarpis (metinis):
  3. $\{0.1, 0.2, 0.3\}$,
  4. $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$,
- $r$ – nerizikingoji palūkanų norma (metinė):
  5. $[0, 0.05]$,
  6. $[0, 0.1]$.
- barjero sandorio tipas priklausomai nuo jo pagrindą sudarančio turto vertės kitimo rinkoje krypties:
  7. mažėjantis,
  8. didėjantis.
- barjero dydis:

- apatinis barjeras, ($L$):

  9. $[0.9L,\ S_0 - 0.1]$,

  10. $[0.85L,\ S_0 - 0.1]$.

- viršutinis barjeras, ($H$):

  11. $[\ S_0 + 0.1, 1.1H\ ]$,

  12. $[S_0 + 0.1, 1.15H]$.

**2.8 lentelė**

**Europietiškųjų pasirinkimo pirkti barjero sandorių kvadratinės šaknys iš santykinių paklaidų kvadratų vidurkio (RMSE) įkainojant Markovo grandinių ir Monte Karlo metodais, kai barjero kirsti negalima**

| Grupė | Atsitiktinai parinkti parametrai | | | | | | | | | | | | Metodas | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Markovo gr. RMSE | Monte Karlo RMSE |
| A | x | | x | | x | | x | | x | | | | 4.22E-03 | 6.84E-03 |
| B | x | | x | | x | | x | | | x | | | 5.84E-04 | 1.79E-03 |
| C | x | | x | | x | | | x | | | x | | 1.02E-01 | 1.05E-01 |
| D | x | | x | | x | | | x | | | | x | 4.68E-02 | 6.32E-02 |
| E | x | | x | | | x | x | | x | | | | 3.32E-04 | 2.73E-03 |
| F | x | | x | | | x | x | | | x | | | 6.51E-04 | 3.07E-03 |
| G | x | | x | | | x | | x | | | x | | 2.57E-01 | 3.07E-01 |
| H | x | | x | | | x | | x | | | | x | 1.98E-01 | 2.12E-01 |
| I | x | | | x | x | | x | | x | | | | 8.67E-04 | 3.02E-03 |
| J | x | | | x | x | | x | | | x | | | 1.00E-02 | 9.40E-03 |
| K | x | | | x | x | | | x | | | x | | 6.90E-02 | 7.95E-02 |
| L | x | | | x | x | | | x | | | | x | 7.15E-03 | 8.18E-03 |
| M | x | | | x | | x | x | | x | | | | 4.74E-04 | 2.64E-03 |
| N | x | | | x | | x | x | | | x | | | 1.16E-03 | 3.23E-03 |
| O | x | | | x | | x | | x | | | x | | 8.51E-03 | 1.00E-02 |
| P | x | | | x | | x | | x | | | | x | 5.47E-03 | 6.11E-03 |
| Q | | x | x | | x | | x | | x | | | | 2.35E-03 | 2.87E-03 |
| R | | x | x | | x | | x | | | x | | | 3.17E-04 | 2.26E-03 |
| S | | x | x | | x | | | x | | | x | | 2.33E-02 | 2.98E-02 |
| T | | x | x | | x | | | x | | | | x | 1.39E-02 | 2.06E-02 |
| U | | x | x | | | x | x | | x | | | | 3.95E-02 | 3.88E-02 |
| V | | x | x | | | x | x | | | x | | | 7.64E-04 | 3.17E-03 |
| W | | x | x | | | x | | x | | | x | | 9.45E-02 | 8.78E-02 |
| X | | x | x | | | x | | x | | | | x | 1.20E-01 | 1.40E-01 |
| Y | | x | | x | x | | x | | x | | | | 3.50E-02 | 3.49E-02 |
| Z | | x | | x | x | | x | | | x | | | 1.04E-03 | 2.22E-03 |
| AA | | x | | x | x | | | x | | | x | | 7.94E-02 | 9.15E-02 |
| AB | | x | | x | x | | | x | | | | x | 5.86E-02 | 6.04E-02 |
| AC | | x | | x | | x | x | | x | | | | 2.83E-02 | 3.23E-02 |
| AD | | x | | x | | x | x | | | x | | | 1.84E-03 | 3.81E-03 |
| AE | | x | | x | | x | | x | | | x | | 2.30E-01 | 2.32E-01 |
| AF | | x | | x | | x | | x | | | | x | 3.22E-01 | 2.80E-01 |

Pastovūs parametrai: *$S_0$ = 100, K = 100, Δt = 1/250, m = 3001, L = 95, H = 105.* Monte Karlo modeliavimui generuojami 200,000 aktyvo kainos kelių iki opciono galiojimo termino pabaigos.

2.8 lentelėje kiekvienoje parametrų grupėje geltona spalva paryškinta mažesnė kvadratinė šaknis iš santykinių paklaidų kvadratų vidurkio (RMSE) – tikslesnis metodas, o mėlyna spalva fiksuotas minėto rodiklio dydis. Akivaizdu, kad daugeliu atvejų (27 iš 32) Markovo grandinių metodo rezultatai, įkainojant Europietiškuosius pasirinkimo pirkti barjero sandorius, kai barjero kirsti negalima, yra artimesni analizinėms opcionų vertėms pagal Bleiko ir Šolso įkainojimo modelį, taikant pataisą tolydžiam atvejui susieti su diskrečiu.

# IŠVADOS

Egzotiniai barjero sandoriai yra sparčiai plintanti finansinė išvestinė priemonė, kurios adekvatus įkainojimas abiejų sandorio šalių ir finansų rinkos atžvilgiu skatina poreikį ieškoti greitesnių ir patikimesnių metodų nei iki šiol siūlomi.

Visų pirma, Markovo grandinių metodas pasižymi barjero sandorio kainos vertinimo sparta ir metodikos paprastumu.

Taipogi, Markovo grandinių metodu įkainojant barjero pasirinkimo sandorius laiko žingsnio ilgį ir pirminio aktyvo kainos būsenų vektorių nesunkiai galima pritaikyti taip, kad pastarieji dydžiai tiksliai atitiktų pirminio aktyvo kainos stebėsenos dažnį ir nustatytą barjerą (-us) realioje finansų rinkoje.

Šis metodas yra efektyvus įvairiose barjero sandorių įkainojimo situacijose. Jei barjeras nėra artimas pirminio aktyvo kainai, Markovo grandinių metodu gautų barjero opcionų verčių tikslumas yra 1E-02 arba didesnis. Priešingu atveju, santykinių paklaidų absoliutiniai dydžiai auga pirminio aktyvo kainai artėjant prie barjero arba esant sąlyginai mažai sandorio kainai $(\leq 0.5)$ ir išryškėja ženklūs vertinimo netikslumai. Vis dėlto, šio trūkumo neįmanoma išvengti net ir vertinant barjero sandorius kitais metodais.

Vienas išskirtinių Markovo grandinių metodo privalumų yra nesudėtingas ir greitas Amerikietiškųjų barjero sandorių vertinimas, kuomet galimas išankstinis opciono vykdymas, kadangi dažniausiai šių sandorių įkainojimas yra sudėtingas, ilgai trunkantis ir nemažai kompiuterio resursų ir skaičiavimų naudojantis procesas.

Galiausiai, šio darbo tyrimo metu įrodytas akivaizdus Markovo grandinių metodo įkainojant barjero pasirinkimo sandorius tikslumo pranašumas lyginant su vienu populiariausių ir plačiausiai naudojamų opcionų įkainojimo metodų – Monte Karlo modeliavimu.

# LITERATŪROS SĄRAŠAS


1. Abukar, M. Ali. Exotic Options: Pricing Path-dependent single Barrier Option contracts, Mathematics and Statistics department, Birkbeck, University of London, p. 28.
2. Aksomaitis A. Tikimybių teorija ir statistika: mokomoji priemonė, Kaunas: Technologija, 2002. 374 p.
3. Broadie, M., P. Glasserman, S. Kou. A Continuity Correction for Discrete Barrier Options, *Mathematical Finance*, Vol. 7, No. 4, October 1997, p. 325-348.
4. Cartea, A. Brownian Motion and Ito's Lemma, Birkbeck college, Univeristy of London, p. 19.
5. Diogo Monteiro da Costa Soares Justino Hedging of Barrier Options, 2010, p. 60.
6. Duan, J.C. and J.G. Simonato. American Option Pricing under GARCH by a Markov Chain Approximation, *Journal of Economic Dynamics and Control* 25, 2001, p. 1689-1718.
7. Duan, J.C. American Option Pricing Using A Markov Chain Approximation, Hong Kong, 2000, p. 19.
8. Duan, J.C., Gauthier, G. and J.G. Simonato, An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model, *Journal of Computational Finance* 2, 1999, p. 75-116.
9. Duan, J.C., E. Dudley, G. Gauthier, J.G. Simonato Pricing Discretely Monitored Barrier Options by a Markov Chain, Montréal, 1999, p. 44.
10. Duan, J.C., E. Dudley, G. Gauthier, J.G. Simonato Pricing Discretely Monitored Barrier Options by a Markov Chain, 2003, p. 43.
11. Howison, S. Barrier Options, Oxford centre for Industrial and Applied Mathematics, p. 44.
12. Investopedia - largest site devoted entirely to investing education. Prieiga per internetą: < http://www.investopedia.com>
13. Juozapavičienė A. Išvestiniai instrumentai tarptautinėse finansų rinkose, Kaunas: Technologija, 2008. 388 p.
14. Papatheodorou, B. Enhanced Monte Carlo Methods for Pricing and Hedging Exotic Options, University of Oxford, 2005, p. 70.
15. Račkauskas A. Atsitiktinių procesų teorijos įvadas, Matematikos ir Informatikos fakultetas, Vilnius, 2008, 93 p.
16. Rebib, R. Oliver Chen Barrier Option Pricing, 2008, p. 34.
17. Urniežius R. Finansinių investicijų valdymas – paskaitų konspektai: 1-17 p., 22-28 p.
18. Valakevičius E. Investavimas finansų rinkose, Kaunas: Technologija, 2007. 215-289 p.
19. Valakevičius E. Investicijų mokslas, Kaunas: Technologija, 2007. 273-298 p.
20. Westermark, N. Barrier Option Pricing, p. 38.

# 1 priedas. Geometrinis Brauno judesys

<u>*Apibrėžimas*</u>. Atsitiktinis procesas $(B_t, t \geq 0)$ vadinamas Brauno judesiu ([4], [15]), jei jis turi šias savybes:

1) $B_0 = 0$;
2) proceso prieaugliai yra nepriklausomi: $\forall\, 0 \leq t_1 < .. < t_n$ atsitiktiniai dydžiai $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_2} - B_{t_1}$ yra nepriklausomi;
3) jei $0 \leq s < t$, tai atsitiktinis dydis $B_t - B_s$ turi normalųjį skirstinį $N(0, t-s)$;
4) proceso $(B_t, t \geq 0)$ trajektorijos yra tolydžios.

Brauno judesys yra Gauso procesas. Atsitiktinio vektoriaus $(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$ skirstinys yra normalinis $\forall\, 0 \leq t_1 < .. < t_n$. Brauno judesio vidurkis

$$E_B(t) = E(B_t) = 0,\ \ t \geq 0, \tag{1.1}$$

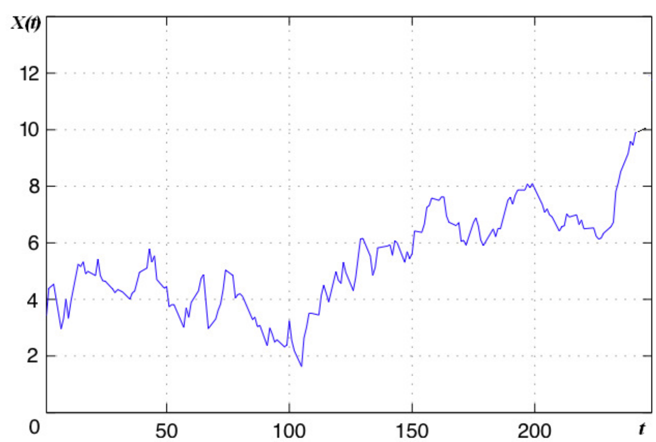
o kovariacija

$$\mathrm{cov}_B(s,t) = E(B_s B_t) = \min\{s,t\}. \tag{1.2}$$

Geometrinis Brauno judesys apibrėžiamas taip:

$$X_t = e^{\sigma B_t + \mu t},\ \ t \geq 0,\ \ \sigma > 0,\ \ t \in R,\ \ \sigma, t = const. \tag{1.3}$$

Šį procesą Bleikas ir Šolsas pasiūlė akcijų kainų modeliavimui. Procesas nėra Gausinis. Vizualinė geometrinio Brauno judesio interpretacija pateikta 1.1 pav.




**1.1 pav. Geometrinis Brauno judesys**

Finansų matematikoje geometrinis Brauno judesys dažniausiai apibrėžiamas kaip stochastinis procesas $S_t$, kuris tenkina stochastinę diferencialinę lygtį:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{1.4}$$

čia $B_t$ – Brauno judesys, $\mu$ – pelno normų vidurkis, $\sigma$ – vidutinis pelno normų standartinis nuokrypis $\mu, \sigma = const.$ Jei aktyvo kainos dinamika neutrali rizikai, tuomet $\mu = r$, $r$ – nerizikingoji palūkanų norma ([9], [10]).

## 2 priedas. Ito lema

Tarkime, $dx = adt + bdB_t$ yra stochastinis Ito procesas ([4]), čia $B_t$ – Brauno judesys. Tuomet:

$$df = \left( a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)dt + b\frac{\partial f}{\partial x}dB_t. \qquad \textbf{(2.1)}$$

Procesas $S_t$ yra geometrinis Brauno judesys, tenkinantis stochastinę diferencialinę lygtį $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$. Pritaikius Ito lemą ([4]) , kai $f(S_t) = \ln S_t$ gauname

$$d\ln S_t = f'(S_t)dS_t + \frac{1}{2}f''(S_t)S_t^2\sigma^2 dt = \frac{1}{S_t}(\sigma S_t dB_t + \mu S_t dt) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt = \sigma dB_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt. \qquad \textbf{(2.2)}$$