



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Živilė Olišauskaitė

KORTEVEGO-DE VRYSO
DIFERENCIALINĖS LYGTIES
SPRENDINIŲ TYRIMAS KOMPLEKSINIŲ
SKAIČIŲ LAUKE

Magistro darbas

Vadovas

doc. dr. Z. Navickas

KAUNAS, 2013



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU

Katedros vedėjas

doc. dr. N. Listopadskis

2013 06 10

KORTEVEGO-DE VRYSO
DIFERENCIALINĖS LYGTIES
SPRENDINIŲ TYRIMAS KOMPLEKSINIŲ
SKAIČIŲ LAUKE

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas

() **doc. dr. Z.Navickas**

2013 06 10

Recenzentas

() **K. Lukoševičiūtė**

2013 06 10

Atliko

FMMM1 stud.

() **Ž.Olišauskaitė**

2013 06 10

KAUNAS, 2013

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Rimantas Rudzkis, profesorius (VU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Jonas Valantinas, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., direktoriaus pavaduotojas (UAB „Danet Baltic“)

SANTRAUKA

Darbe nagrinėjamos lygtys, vadinamos Kortvego de Vryso (KdV) lygtimis. Pagal fizikinę prasmę šios lygtys yra įvairiapusiškos, pvz.: jomis aprašomas solitonas – bėganti banga. Yra daug kitų fizikinių KdV lygties prasmų. Lygtis yra diferencialinė, dalinėmis išvestinėmis, nestacionari. Skirtingų KdV lygčių yra nemažai. Tiriamajame darbe pagrinde lygčių nagrinėjimas yra fundamentinio pobūdžio, nerišant su konkrečia fizikine lygtimis aprašoma prasme. Nagrinėti jau XIX amžiuje gautų diferencialinių KdV lygčių sprendiniai. Lygčių nagrinėjimui taikyti fundamentiniai matematikos metodai, programavimas, matematikos programų paketai Maple ir Matlab. Tyrimo svarba yra didelė. Ištirinėta lygtis, nustatyti funkcijų kitimo dėsniai, atsirandantys iš šios lygties. Abstrakčiai, be jokių fizikinių prasmų. Tačiau, jeigu tokia lygtis aprašo kažkokį fizikinį reiškinį, tyrimo rezultatus ir metodus galima pritaikyti konkrečiam fizikiniam reiškiniui tirti, projektuoti, konstruoti, prognozuoti. Taigi – tyrimo formuluotė lemia tyrimo tikslus ir kai matematinis – fundamentinis tyrimas jau atliktas, jis lengvai gali būti pritaikomas arba adaptuojamas konkrečiam fizikiniam reiškiniui ištirti ir prognozuoti. Tyrimas pagrinde atliktas kai parametrų reikšmės kompleksinių skaičių lauke.

SUMMARY

In the scientific work are investigating the equations, known as the Korteweg de Vries (KdV) equations. According to the physical meaning of these equations it is a versatile, for example they describe soliton - running wave. There are many other physical meanings of KdV equations. The equations are differential equations, by the partial derivatives, non-permanently. Different KdV equations are quite a few. In research work is performed mainly fundamental equations analysis without the link with a specific physical sense. The solutions of differential equations of KdV got in nineteenth century. Equations are examined by the fundamental math methods, programming, math software packages Maple and Matlab. The importance of the study is significant. Studied equation to determine the number of changes without the physical meaning of equations. However, if this equation describes some kind of physical phenomenon, the results and methods can be applied to a physical phenomenon specific to research, design, development, predict. So - study the wording of the research objectives and the mathematical - Basic research already carried out, it can easily be adapted to a particular adaptive or a physical phenomenon to study and predict. The research have been done with the complex numbers of parameters.

Turinys

LENTELIŲ SĄRAŠAS	7
PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS	8
ĮVADAS	10
1. TEORINĖ DALIS	11
1.1 KORTEVEGO DE VRYSO LYGTYS	11
1.2 Sklindančios bangos lygties sprendiniai	11
1.3 kdv lygčių tyrinėjimo Istorija	13
1.4 Taikymai ir sąryšiai	14
1.5 KdV lygčių tipai	14
2. TIRIAMOJI DALIS	16
2.1 KORTEVEGO - DE VRYSO LYGTIS	16
2.2 solitonas	17
2.3 solitonas kompleksinių skaičių lauke	19
2.4 Kortevego de Vryso lygties sprendinių tyrimas	22
2.5 KARDIOIDĖ	27
2.6 kdv lygties sprendinio tyrimas, kai pošaknis neigiamas.....	31
2.7 kompleksinio skaičiaus γ trigonometrinės formos tyrimas.....	33
2.8 funkcijos ekstremumų nustatymo kdv lygtims bendruoju atveju formalizavimas	37
2.9 kdv lygties sprendinio nagrinėjimas, kai ω_2 yra kompleksinis skaičius	40
2.10 kdv lygties sprendinio nagrinėjimas, kai ω_1 yra kompleksinis skaičius	41
2.11 kdv lygties sprendinio nagrinėjimas, kai γ yra kompleksinis skaičius	43
2.12 kdv lygties sprendinio nagrinėjimas, kai γ yra kompleksinis skaičius ir kdv lygties sprendinio pošaknis yra neigiamas skaičius	44
2.13 kdv lygties sprendinio nagrinėjimas, kai γ yra kompleksinio skaičiaus trigonometrinėje formoje	47
2.14 sukurtos metodikos ir programinės įrangos taikymas	50
2.14.1 maple programų paketas	50

2.14.2 matlab programų paketas.....	51
DISKUSIJA.....	52
IŠVADOS.....	53
Literatūra	55

LENTELIŲ SĄRAŠAS

2.1 lentelė	14
2.2 lentelė Ekstremumai ir asimptotės.....	38
2.3 lentelė Ekstremumai ir asimptotės.....	39
2.4 lentelė Ekstremumai ir asimptotės.....	39
2.5 lentelė Ekstremumai ir asimptotės.....	40

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

2.1	pav. Solitonas, kai $c=15$	18
2.2	pav. Solitonas, kai $k=20$	18
2.3	pav. Solitonas, kai $c=25$	19
2.4	pav. Solitonas, kai: a) $c=1.5$; b) $c= -10+3i$	19
2.5	pav. Solitonas, kai $c=1.5$; $x= -10 - 3i$; $-10+4i$. a) – realioji dalis; b) – menamoji dalis	20
2.6	pav. Solitonas, kai: a) $k=8$; b) $k= 8-3i$	20
2.7	pav. Solitonas, kai $k=8$; $x= -10 - 3i$; $-10+4i$. a) – realioji dalis; b) – menamoji dalis	21
2.8	pav. Solitonas, kai: a) $c=15$; b) $c= 1.3+5i$	21
2.9	pav. Solitonas, kai $c=15$; $x= -10 - 3i$; $-10+3i$. a) – realioji dalis; b) – menamoji dalis	21
2.10	pav. Sprendinio (2.5) grafikas, kai : $s=0.5$; $\gamma = 1.3 + 5i$; $\omega_1 = 0.1$; $\omega_2 = 3$; $c=6$; a) Dekarto koordinatės; b) – kompleksinė plokštuma.	23
2.11	pav. Realiosios (a) ir menamosios (b) KdV lygties (2.1) sprendinio (2.5) dalių atvaizdavimas, kai: $s=0.5$; $\gamma = 1.3 + 5i$; $\omega_1 = 0.1$; $\omega_2 = 3$; $c=6$;.....	24
2.12	pav. Sprendinio (2.7) grafinė aproksimacija: a) ir c) – Dekarto koordinatėse; b) ir d) – kompleksinių skaičių plokštumoje; $s=5$, $\gamma = 0.4$, $\omega_1 = 1.8$, $\omega_2 = 0.5$, $c=0.9$	25
2.13	pav. Sprendinio (2.8) grafinė aproksimacija: a) ir c) – Dekarto koordinatėse; b) ir d) – kompleksinių skaičių plokštumoje, kai: kai $s=3$, $\gamma = 0.4$, $\omega_1 = 1.8$, $\omega_2 = 0.5$, $c=0.9$	25
2.14	pav. Sprendinio (2.6) grafinė aproksimacija: a) stačiakampėse koordinatėse ($s=0.5$, $\gamma = 1$, $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 1$, $c=15$); b) kompleksinėje plokštumoje ($s=0.5$, $\gamma = 10 + 5i$, $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 3$, $c=6$) c) – stačiakampėje koordinatėse; d) – kompleksinių skaičių plokštumoje, kai $x[-10 - 3i; -10 + 4i]$	26
2.15	pav. Kardioidė, kai: a) $s = 5 + 10 \cdot i$, $\gamma = 10 - 5 \cdot i$, $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 3$, $c = 6$; b) $s = 5 - 10 \cdot i$, $\gamma = 10 - 5i$, $\omega_1 = 0.1 - 5 \cdot i$, $\omega_2 = 3$, $c = 6$; c) $s = 5 - 10 \cdot i$, $\gamma = 10 - 5i$, $\omega_1 = 0.1 - 5 \cdot i$, $\omega_2 = 13 + 1 \cdot i$, $c = 6$; d) $s = 5 - 10 \cdot i$, $\gamma = 10 - 5i$, $\omega_1 = 0.1 - 5 \cdot i$, $\omega_2 = 13 + 31 \cdot i$, $c = 6$; e) $s = 5 - 10 \cdot i$, $\gamma = 10 - 5i$, $\omega_1 = 0.1 - 5 \cdot i$, $\omega_2 = -13 - 10 \cdot i$, $c = 6$; f) $s = 5 - 10 \cdot i$, $\gamma = 10 - 5i$, $\omega_1 = 0.1 - 5 \cdot i$, $\omega_2 = -13 - 10 \cdot i$, $c = 6 + 5 \cdot i$; g) $s = 5$, $\gamma = -0.1$, $\omega_1 = 1 + 8 \cdot i$, $\omega_2 = -13 - 10 \cdot i$, $c = -1 + 1 \cdot i$; h) $s = 5 + 10 \cdot i$, $\gamma = 5 \cdot i$, $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 3$, $c = 6$;.....	28
2.16	pav. Paskalio sraigtinė	29
2.17	pav. Paskalio sraigtinė: a) kai $b > 2a$; b) kai $\cos\varphi = -b/2a$; c) kai $b = 2a$	30
2.18	pav. KdV lygties sprendinio (2.5) graifikas, kai pošaknis – neigiamas arba menamas skaičius.	32

2.19 pav. Kompleksinio skaičiaus trigonometrinių formos grafikai, kai $-10 \leq x \leq 10$: a) kosinuso ir sinuso dedamosios b) kosinuso ir sinuso dedamosios vienoje plokštumoje.....	33
2.20 pav. Skaičiaus γ kompleksinėje formoje modulio kitimas, kintant x	34
2.21 pav. Grafinis lokalinių ekstremumų atvaizdas	36
2.22 pav. Spirale ir KdV lygties sprendinys kompleksinių skaičių plokštumoje	36
2.23 pav. Sprendinio 2.5 kitimo grafikai, esant kintantiems γ , kai: a) duomenys 2.2 lentelėje; b) duomenys 2.3 lentelėje	38
2.24 pav. KdV lygties (2.1) sprendinio (2.5) kitimo grafikai.....	39
2.25 pav. KdV sprendinių grafikas, kai ω_2 yra kintamas kompleksinis skaičius.....	41
2.26 pav. KdV lygties sprendinio grafikai, kai ω_1 yra kompleksinis skaičius.....	42
2.27 pav. KdV lygties grafikai, kai ω_1 kompleksinio skaičiaus realioji dalis neigiama	43
2.28 pav. KdV lygties grafikai, kai ω_1 kompleksinio skaičiaus realioji dalis teigiama	43
2.29 pav. KdV lygties sprendinio grafikai, kai γ yra kompleksinis skaičius	44
2.30 pav. KdV lygties sprendinio kitimo grafikai, kai γ kompleksinis skaičius ir pošaknis mažesnis už nulį	45
2.31 pav. KdV lygties sprendinio kitimo grafikai, kai γ kompleksinis skaičius ir pošaknis mažesnis už nulį (a pav. ir b pav.) ir grafiškai pavaizduota, kaip kompleksinio skaičiaus γ menamoji dalis artėja į nulį (c pav.)	46
2.32 pav. KdV lygties sprendinio (2.5) kitimo grafikai, kai skaičius γ yra kompleksinis skaičius.47	
2.33 pav. KdV lygties sprendinio (2.5) kitimo grafikai, kai skaičius γ yra kompleksinis skaičius 48	
2.34 pav. KdV lygties sprendinio (2.5) kitimo grafikai, kai skaičius γ yra kompleksinis skaičius 49	
2.35 pav. KdV lygties sprendinio (2.5) kitimo grafikai, kai skaičius γ yra kompleksinis skaičius 49	

ĮVADAS

Jau XIX amžiuje Diederik Korteweg ir Gustav de Vries nagrinėjo lygtį, kuri vėliau jų garbei pavadinta Kortevego de Vryso lygtimi. Pirmasis lygtį paskelbė Džozefas Businesskas 1877 metais. Matematinėje fizikoje Kortevego–de Vryso (Korteweg – de Vries) (KdV) lygtis naudojama kaip matematinis modelis, apibūdinantis ir bangas, sklindančias seklaus arba negilaus vandens paviršiumi. Tai netiesinė diferencialinė dalinių išvestinių lygtis, kurios sprendiniai gali būti pavaizduoti analitiniu būdu. Vienas iš šios lygties analitinių sprendinių yra solitonas. Solitonas (angl. soliton, solitary wave) - struktūriškai pastovi pavienė bėgančioji banga, susidariusi dėl to, kad skirtingo ilgio bangos sklinda nevienodu greičiu ir tarpusavyje sąveikauja. KdV lygtis yra viena išsamiausiai išnagrinėtų lygčių matematinėje fizikoje. Matematinė KdV lygties teorija gausi ir įdomi, ji iki šiol aktyviai tirama.

KdV lygčių yra daug skirtingų matematiškai ir pagal fizikinę prasmę. Lygtys aprašo magnetizmo procesus, yra lygčių, matematiškai ir pagal fizikinę prasmę susijusių su plazma, taip pat apibūdina ir bėgančią bangą sekliame arba negiliame vandenyje, mokslinėje literatūroje vadinamą solitonu. Darbe tyrinėjami sprendiniai, susiję būtent su solitonu. Sprendiniai parašyti esant tam tikroms parametrų reikšmėms, neišeinant už kurių lygčių sprendiniai galioja ir matematiškai teisingai aprašo tiriamus fizikinius reiškinius. KdV lygčių sprendiniai tyrinėjami įvairiapusisškai, taikant matematikos metodus, pvz.: sudaromi įvairūs lygčių sprendinių parametrų reikšmių deriniai, kuriems esant funkcijos grafikai įgauna geometrinę figūrą, kuri matematikoje turi pavadinimą ir klasifikuojama matematikos teorijoje. KdV lygčių sprendiniai nagrinėjami kompleksinėje plokštumoje ir erdvėje, atliekama lygčių analizė taikant įvairius matematikos metodus, pvz.: taikomi funkcijų ekstremumų nustatymo metodai, ribų apskaičiavimo metodai, diferencijavimas, kompiuterinis programavimas, matematikos veiksmai kompleksinių skaičių aibėje. Tyrimams taikomi matematikos programų paketai Maple ir Matlab. Tyrimas atliekamas pagrindė kompleksinių skaičių laukuose.

Solitonas yra pavienė sklindanti vandens paviršiumi banga. Matematiškai, tada, kai galioja matematinis modelis įmanoma nustatyti bangos amplitudę ir kitus svarbius parametrus. Nustatyti matematiniai dėsnigumai, tampriai susiję su fizikine reiškinių prigimtimi, gali būti pritaikyti atkurti sąlygas, kurioms esant banga – solitonas įgyja ekstremumus, valdyti ekstremumų dydį, pritaikant kitus fizikinius reiškinius ir gamtos dėsnius.

1. TEORINĖ DALIS

Kortevogo de Vryso lygtys plačiai žinomos matematinėje fizikoje [1]. Jas tyrinėjo daugelis mokslininkų: Diederik Korteweg ir Gustav de Vries, *Boussinesq*, *Zabusky*^[4], N. J.; *Kruskal*^[5], M. D. ir t.t. Yra daugybė KdV lygčių variacijų: cilindrinė KdV, deformuota KdV, apibendrinta KdV, modifikuota KdV, dukart modifikuota KdV, sferinė KdV, pereinamoji KdV, kintamų koeficientų KdV, *Biurgeso KdV* ir t.t.

1.1 KORTEVEGO DE VRYSO LYGTYS

Matematinėje fizikoje Kortevogo–de Vryso (Korteweg – de Vries) (KdV) lygtis naudojama kaip matematinis modelis, apibūdinantis ir bangas, sklindančias seklaus arba negilaus vandens paviršiumi, vadinamas solitonu. Tai - netiesinė diferencialinė lygtis dalinėmis išvestinėmis, kurią įmanoma išspręsti ir analitiškai. Vienas iš šios lygties analitinių sprendinių ir yra solitonas. KdV lygtis yra viena išsamiausiai išnagrinėtų matematinės fizikos lygčių. Matematinė KdV lygties teorija gausi ir įdomi. Ji iki šiol aktyviai tiriama. Lygtis pavadinta Dyderiko Kortevogo (Diederik Korteweg) ir Gustavo de Vryso (Gustav de Vries) vardais. Jie nagrinėjo lygtį 1895 metais, nors pirmą kartą ją paskelbė Džozefas Businesskas (Joseph Boussinesq) 1877 m.

KdV lygtis – tai netiesinė diferencialinė lygtis dalinėmis išvestinėmis ir yra dviejų kintamųjų - koordinatės x ir laiko t funkcija: $\phi = \phi(x, t)$ [1]:

$$\partial_t \phi + 6\phi \partial_x \phi + \partial_x^3 \phi = 0 \quad (1.1)$$

čia ∂x ir ∂t – dalinės funkcijos ϕ išvestinės x ir t atžvilgiu; x – koordinatė; t – laikas.

1.2 SKLINDANČIOS BANGOS LYGTIES SPRENDINIAI

Apžvelkime pastovaus profilio bangos, sklindančios į dešinę, lygties sprendinius.

Padarome pakeitimą: nepriklausomus kintamuosius x ir t išreiškiame per kintamąjį ξ pagal tokį sąryšį: $\xi = x - ct$. Po pakeitimo gauname paprastą diferencialinę lygtį [1]:

^[1]Diederik Johannes Korteweg (31 Kovo 1848 – 10 Gegužės 1941); ^[2]Gustav de Vries (22 Sausio 1866–16 Gruodžio 1934); ^[3]Joseph Valentin Boussinesq (13 Kovo 1842 – 19 Vasario 1929)

$$-c \frac{d\phi}{d\xi} + 6\phi \frac{d\phi}{d\xi} + \frac{d^3\phi}{d\xi^3} = 0 \quad (1.2)$$

Suintegravę ją pirmą kartą pagal kintamąjį ξ , gauname:

$$3\phi^2 + \frac{d^2\phi}{d\xi^2} - c\phi = A \quad (1.3)$$

čia A - integravimo konstanta. Pažymime:

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} = \phi'^2 = -2f(\phi),$$

ir suintegravę (1.2) lygtį antrą kartą, gauname:

$$\phi'^2 = -2f(\phi), \quad f(\phi) = \frac{d\phi}{d\xi} = \phi^3 - \frac{c}{2}\phi^2 - A\phi - B, \quad (1.4)$$

Funkciją $f(\phi)$ patogiu pavaizduoti kaip $f(\phi) = (\phi - \alpha)(\phi - \beta)(\phi - \gamma)$, čia α, β, γ ($\alpha \geq \beta \geq \gamma$) yra realios kubinės lygties $f(\phi) = 0$ šaknys:

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = B \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -A \\ \alpha + \beta + \gamma = \frac{c}{2} \end{cases} \quad (1.5)$$

Tuomet lygties (1.4) sprendinį galima pateikti neišreikštine forma [1]:

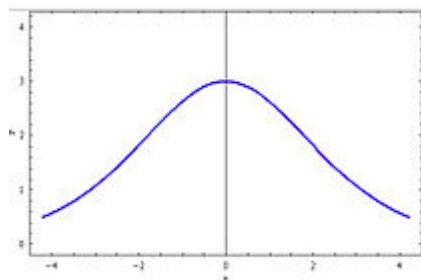
$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{2(\alpha - \phi)(\phi - \beta)(\phi - \gamma)}} = (x - ct) + C \quad (1.6)$$

čia α, β, γ ir C – konstantos.

Apžvelkime du svarbius atskirus atvejus, kai šios lygties sprendinius galima pateikti išreikštine forma: tai solitonas ir knoidalinė banga. Solitonas (1.1 pav.) – sklindančios bangos KdV lygties sprendinys [1]:

$$\phi(x, t) = \frac{c}{2} ch^{-2} \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - a) \right], \quad (1.7)$$

kuriame $c/2$ – solitono amplitudė ir a – jo centro padėtis – pastovūs dydžiai.



1.1 pav. Solitono grafinis atvaizdas

Lygtyje (1.6) toks sprendinys atitinka atveją, kai $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = c/2$. Toks solitonas yra sklindanti į dešinę pavienė banga. Būtent tokią bangą stebėjo Džonas Raselas ([John Russell](#)) 1834 metais (1.1 pav.).

KdV lygtis turi taip pat ir kitus, čia nenagrinėjamus sprendinius.

1.3 KDV LYGČIŲ TYRINĖJIMO ISTORIJA

KdV lygties istorija prasidėjo nuo Džono Skoto Raselo (John Scott Russell) 1834 metų eksperimentų (1.1 pav.). Vėliau, apytiksliai 1870 metais teorinius tyrimus atliko Lordas Relėjus (Lord Rayleigh) ir Džozefo Businesskas (Joseph Boussinesq). Dar vėliau – 1895 m. tyrimus atliko Diederik Korteweg ir Gustav de Vries [1].

Po jų KdV lygtis buvo beveik nenagrinėjama, kol Zabusky (Zabusky) ir Kruskalas (Kruskal) 1965 m. skaitmeniniuose eksperimentuose pastebėjo, kad asimptotiniai KdV lygties sprendiniai suskyla į „solitonų“ rinkinį – aiškiai išreikštas atskiras pavienes bangas. Be to, solitonai, praktiškai nekeisdami formos bet keisdami padėtį pereina vienas per kitą. Jie taip pat pastebėjo sąryšį tarp KdV lygties ir anksčiau atliktų skaitmeninių Fermi^[6] (Fermi), Pastos^[7] (Pasta) ir Ulamo^[8] (Ulam) eksperimentų. Analizinis KdV lygties sprendinys, pasinaudojus ASUM, buvo rastas Grino^[11] (Greene) [1].

^[6] Enrico Fermi 29 Rugsėjo 1901 – 28 Lapkričio 1954, ^[7] John R. Pasta (1918–1984), ^[8] Stanislaw Marcin Ulam (13 Balandžio 1909 – 13 Gegužės 1984), ^[9] Brian Greene (Vasario 9, 1963)

1.4 TAIKYMAI IR SĄRYŠIAI

KdV lygties sąryšis su kitomis matematinėmis, fizikinėmis ir kitų gamtos mokslų problemomis pakankamai gausus ir turiningas. KdV lygtis matematiškai apibūdina [1]:

magneto - akustines ir jonines - akustines bangas plazmoje;

akustines bangas kristalinėse gardelėse

viršvandenines ir povandenines bangas jūroje ir vandenyne.

1.5 KdV LYGČIŲ TIPAI

Yra daugybė KdV lygčių tipų. Kai kurios lygtys pateiktos lentelėje [2.1]:

2.1 lentelė

Pavadinimas	Lygtis
Kortvego–de Vryso (KdV)	$\partial_t \phi + 6\phi \partial_x \phi + \partial_x^3 \phi = 0$
Cilindrinė KdV	$\partial_t u + \partial_x^3 u - 6u \partial_x u + u/2t = 0$
Deformuota KdV	$\partial_t u + \partial_x (\partial_x^2 u - 2\eta u^3 - 3u (\partial_x u)^2 / 2(\eta + u^2)) = 0$
Apibendrinta KdV	$\partial_t u + \partial_x^3 u = \partial_x^5 u$
Modifikuota KdV	$\partial_t u + \partial_x^3 u \pm 6u^2 \partial_x u = 0$
Dukart modifikuota KdV	$\partial_t u + \partial_x^3 u - (\partial_x u)^3 / 8 + (\partial_x u)(Ae^{au} + B + Ce^{-au}) =$
Sferinė KdV	$\partial_t u + \partial_x^3 u - 6u \partial_x u + u/t = 0$
Super-KdV	$\partial_t u = 6u \partial_x u - \partial_x^3 u + 3w \partial_x^2 w,$

	$\partial_t w = 3(\partial_x u)w + 6u\partial_x w - 4\partial_x^3 w$
Pereinamoji KdV	$\partial_t u + \partial_x^3 u - 6f(t)u\partial_x u = 0$
Kintamųjų koeficientų KdV	$\partial_t u + \beta t^n \partial_x^3 u + \alpha t^n u \partial_x u = 0$
Biurgerso-KdV lygtis	$\partial_t u + \mu \partial_x^3 u + 2u\partial_x u - \nu \partial_x^2 u = 0$

Disipacinėse aplinkose arba aplinkose, kuriose vyksta disipacija (negrįžtami procesai, pvz.: energijos perdavimas šiluma ir t.t.) reikia nagrinėti KdV lygties modifikacijas, pvz., Biurgerso–KdV lygtį:

$$\partial_t \phi + 6\phi \partial_x \phi + \partial_x^3 \phi = \nu \partial_x^2 \phi \quad (1.8)$$

Stacionarūs (be laiko kintamojo) Biurgerso–KdV lygties sprendiniai apibūdina smūginių bangų (taip pat ir nesusiduriančių) struktūrą dispersinėse terpėse, kuriose vyksta bangų sklaida ir atsiskyrimas ir t.t.

Tiriamajame darbe nagrinėjamas šios KdV lygties sprendiniai [(2.5), (2.6), (2.7), (2.8)] [1]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - 6\omega \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial z^3} = 0 \quad (1.9)$$

Sprendiniai gauti taikant sudėtingus analitinius matematikos metodus. Algebraisiais veiksmais analitiškai gauti solitoniniai KdV lygties sprendiniai bei sąlygos, kurioms esant solitoniniai sprendiniai egzistuoja. Bendrieji (1.12) lygties sprendiniai rasti realiųjų skaičių aibėje. Vienas iš gautų KdV lygties (1.12) bendrųjų sprendinių yra toks:

$$\omega \left(x, c, s, \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \gamma (s - \omega_1) \sqrt{2s + \omega_1 - 3\omega_2} \right) \right) = y_{11}(x, c, s) = \omega_1 +$$

$$+ \frac{12(\omega_1 - \omega_2)(s - \omega_1)e^{(\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2})(x-c)}}{\left(\left(\sqrt{3(\omega_1 - \omega_2)} + \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1}\right) + \left(\sqrt{3(\omega_1 - \omega_2)} - \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1}\right)e^{(\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2})(x-c)}\right)^2} \quad (1.10)$$

Sprendinys gautas esant tam tikroms pradinėms KdV lygties sąlygoms ir priklauso nuo keleto kintamųjų: $x, s, \gamma, c, \omega_1, \omega_2$. Tiriamajame darbe ir nagrinėjami KdV lygties sprendiniai, kai kintamieji yra ir realūs, ir kompleksiniai skaičiai kompleksinių skaičių lauke.

Darbe taip pat tiriami (1.1) lygties sprendiniai [(2.2), (2.3) ir (2.4)]:

$$\partial_t \phi + 6\phi \partial_x \phi + \partial_x^3 \phi = 0 \quad (1.1)$$

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1 KORTEVEGO - DE VRYSO LYGTIS

Matematinėje fizikoje Kortevego–de Vryso (Korteweg – de Vries) (KdV) lygtis naudojama kaip matematinis modelis, apibūdinantis ir bangas, sklindančias seklaus arba negilaus vandens paviršiumi. Tai – analitiškai išsprendžiama netiesinė diferencialinė lygtis. Jos sprendiniai gali būti pavaizduoti elementariosiomis funkcijomis. Vienas iš šios lygties analitinių sprendinių yra [solitonas](#). Solitonas (angl. soliton, solitary wave) - struktūriškai pastovi pavienė bėgančioji banga, susidariusi dėl to, kad skirtingo ilgio bangos sklinda nevienodu greičiu ir nevienodomis kryptimis. KdV lygtis yra viena iš plačiausiai išnagrinėtų lygčių matematinėje fizikoje. Matematinė KdV lygties teorija turininga ir įdomi, lygtis iki šiol tirama. Ji pavadinta Dyderiko Kortevego ([Diederik Korteweg](#)) ir Gustavo de Vryso ([Gustav de Vries](#)) vardais. Jie nagrinėjo šią lygtį 1895 metais, nors pirmą kartą šią lygtį paskelbė Džozefas Businesskas ([Joseph Boussinesq](#)) 1877 m.

KdV lygtis – tai netiesinė diferencialinė dalinių išvestinių lygtis dviejų realių kintamųjų funkcijai – koordinatės z ir laiko t - $\omega = \omega(z, t)$ [1], [2], [3], [4], [5]:

$$\omega''_{xx} = y^2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)$$

Po pertvarkymų, kurie čia nenagrinėjami, gaunama:

$$y'_x = \frac{2}{3}y^2(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$$

Tada, apibendrintas KdV lygties sprendinys:

$$\omega \left(x, c, s \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma (s - \omega_r) \sqrt{2s + \omega_r - 3\omega_j} \right) \right) = y_0(x, c, s) = \omega_r +$$

$$+ \frac{12(\omega_r - \omega_j)(s - \omega_r) e^{\left(\gamma \sqrt{\omega_r - \omega_j} (x - c) \right)}}{\left(\left(\sqrt{3(\omega_r - \omega_j) \pm \sqrt{2s - 3\omega_j + \omega_r}} \right) + \left(\sqrt{3(\omega_r - \omega_j) \mp \sqrt{2s - 3\omega_j + \omega_r}} \right) e^{\left(\gamma \sqrt{\omega_r - \omega_j} (x - c) \right)} \right)^2} r, j = 1, 2, r \neq j \quad (2.1)$$

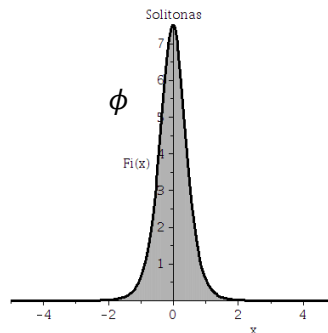
KdV lygtis yra netiesinės fizikos paradigma. Ji aprašo vienmatę bangą sekliame vandenyje, turinčią nedidelę amplitudę. Ji naudojama ir kai kuriems kitiems fizikiniams fenomenams aprašyti: akustinėms bangoms kristaluose ir kitoms akustinėms bangoms matematiškai aprašyti [5, 6, 7, 8, 9, 10]. Taikant įvairius matematikos metodus gauti lygties sprendiniai (žiūr. 2.4 skyrelį ir lygtis 2.5, 2.6, 2.7, 2.8). Lygčiai 1.1 išspręsti taikomi įvairūs sudėtingi matematikos metodai [6, 12, 13, 14]. KdV lygties (1.1) atskiriems sprendiniams ištirti taikomi matematinio modeliavimo paketai Matlab ir Maple. Darbo tikslas yra ištirti, kaip kinta KdV lygties (1.1) sprendiniai, kai kinta sprendiniuose esančių parametru reikšmės.

2.2 SOLITONAS

Solitonas – tai sklindančios bangos diferencialinės lygties (1.1) vienas iš sprendinių

$$\phi(x) = \frac{c}{2} \cosh^{-2} \left[\frac{\sqrt{c}}{2} x \right] \quad (2.2)$$

čia $c/2$ – solitono amplitudė - konstanta; x – kintamasis. Nuo šiol žymuo $\omega(z, t)$ pakeičiamas žymeniu $\phi(x)$ ir naudojamas tekste žemiau. Toks solitonas yra sklindanti į dešinę pavienė banga. Solitono grafikas pavaizduotas 2.1 pav.:

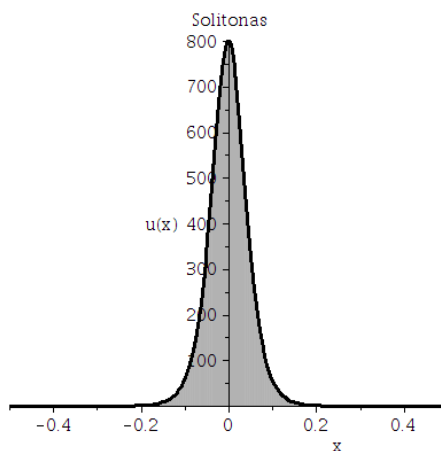


2.1 pav. Solitonas, kai $c=15$.

Kitas tikslus Kortvego de Vryso lygties sprendinys yra toks:

$$u(x) = \frac{2k^2}{\cosh^2[kx]} \quad (2.3)$$

čia k – parametras, nuo kurio priklauso solitono aukštis ir plotis, taip pat greitis. Tokio solitono grafikas, kai $k=20$, pavaizduotas 2.2 pav.

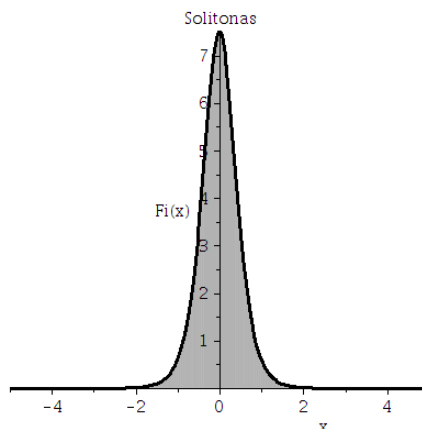


2.2 pav. Solitonas, kai $k=20$

Dar vienas tikslus Kortvego de Vryso lygties sprendinys yra toks:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}c \cdot \operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}x\right] \quad (2.4)$$

čia sech – hiperbolinis sekantas; c – konstanta. (2.3) sprendiniu aproksimuojamas solitonas yra judanti į dešinę banga, pavaizduota 2.3 pav. Pastebėtina, kad solitono lygtis yra supaprastinta ir joje nėra laiko kintamojo.

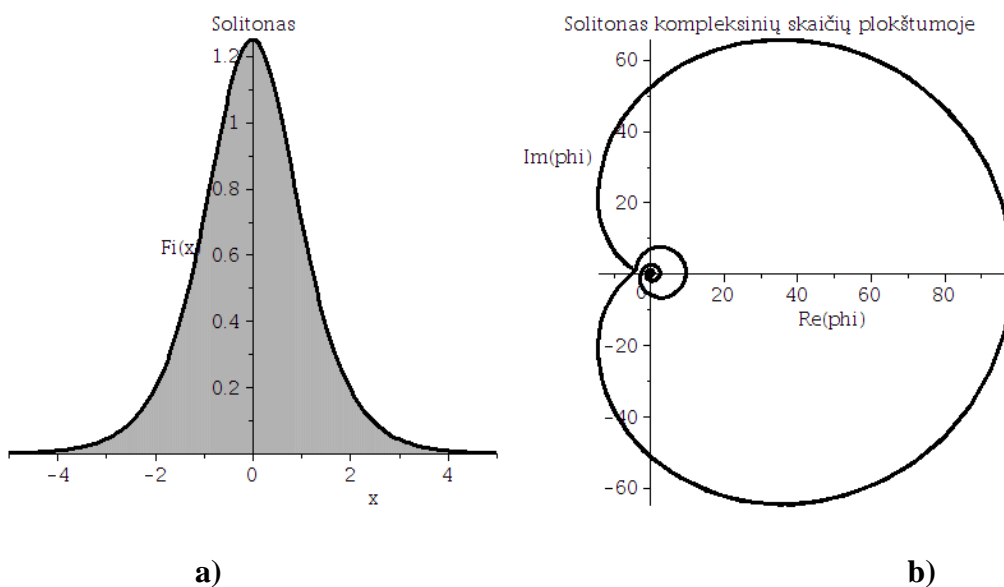


2.3 pav. Solitonas, kai $c=25$

Iš 2.1 – 2.3 pav. matoma, kad esant tam tikroms parametru reikšmėms skaitiniai lygčių sprendiniai grafikuose yra panašūs, tačiau skirtinguose absčių ir ordinačių ašių masteliuose.

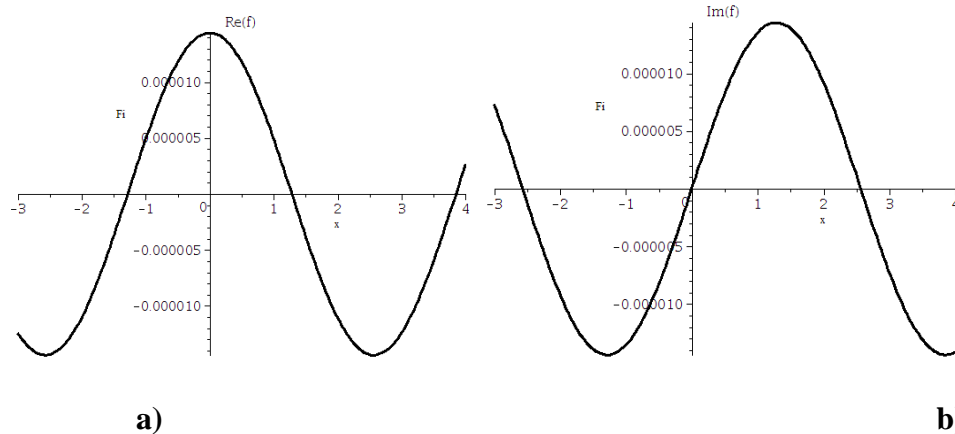
2.3 SOLITONAS KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ LAUKE

Nubraižyti funkcijų kitimo grafikai pagal Kortvego de Vryso lygčių sprendinius, kai parametrai ir kintamieji yra realūs ir kompleksiniai skaičiai Dekarto koordinatėse ir kompleksinių skaičių plokštumose. Tas pats solitonas, aproksimuojamas pagal (2.2) lygtį, tačiau, kai $c=1.5$ pavaizduotas 2.4 pav. a). Tame pačiame paveiksle b) nubraižytas tos pačios funkcijos grafikas, tačiau c lygtyje (2.2) yra kompleksinis skaičius: $c = -10+3i$.



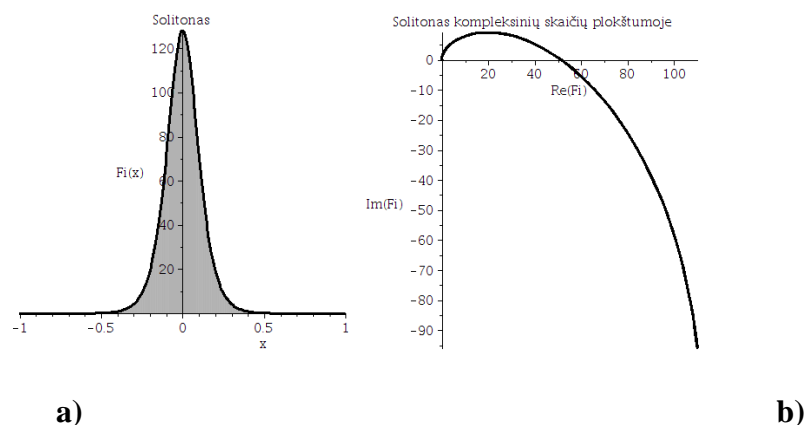
2.4 pav. Solitonas, kai: a) $c=1.5$; b) $c = -10+3i$.

Taipogi 2.5 pav. nubraižyti (2.2) sprendinio grafikai, kuriuose pavaizduota vien tik menamoji (b) ir vien tik realioji (a) KdV lygties sprendinio (2.2) dalys, kai $x = -10 - 3i$; $-10+4i$.



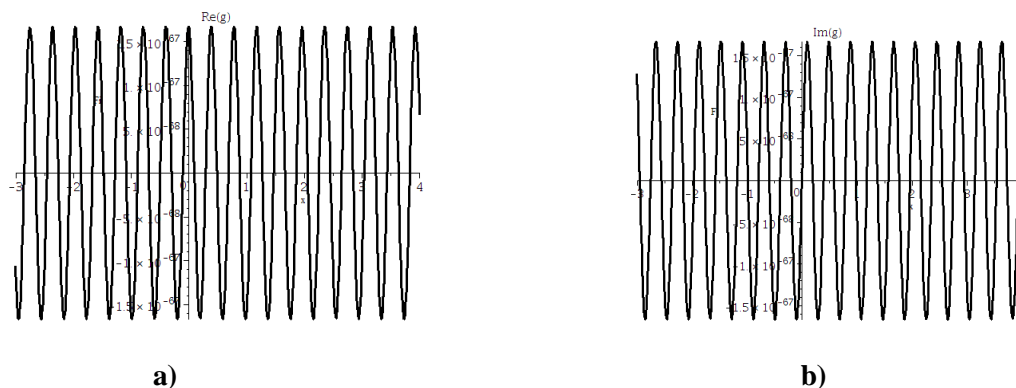
2.5 pav. Solitonas, kai $c=1.5$; $x = -10 - 3i$; $-10+4i$. a) – realioji dalis; b) – menamoji dalis

Analogiški grafikai nubraižyti ir solitonui, aproksimuojamam pagal KdV lygties sprendinį (2.3), kai $k=8$ (2.6 pav.).



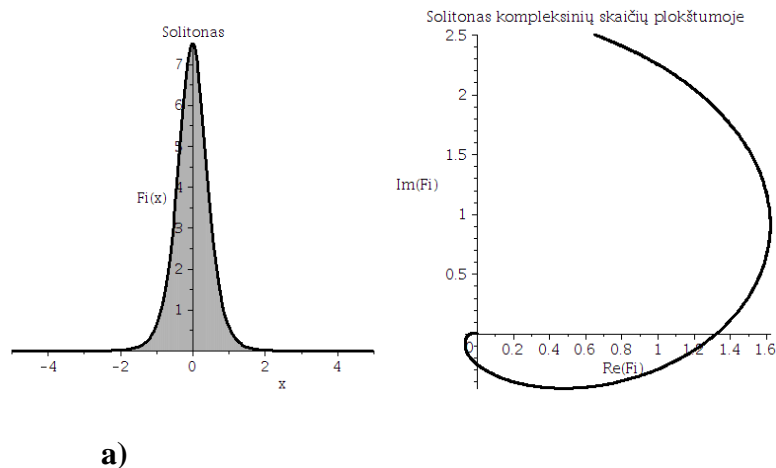
2.6 pav. Solitonas, kai: a) $k=8$; b) $k= 8-3i$.

2.7 pav. nubraižyti (2.3) lygties grafikai, kuriuose pavaizduota vien tik menamoji (b) ir vien tik realioji (a) KdV lygties sprendinio (2.3) dalys. Šiuose paveiksluose x įgyja kompleksinio skaičiaus reikšmes ir yra kompleksinis skaičius. Reikia pastebėti, kad kompleksinio skaičiaus modulis yra realus skaičius, todėl kompleksinio skaičiaus formą turintį kintamąjį bet kada galima išreikšti realiuoju skaičiumi, kurį praktikoje, taikant gamtos dėsnius ir jų valdymą, įmanoma įgyvendinti arba sudaryti sąlygas, prie kurių skaičius įgyja grafikuose esančių reikšmių diapazoną ir tokiu būdu praktiškai atkuriamas grafikuose pavaizduotas dėsningumas.



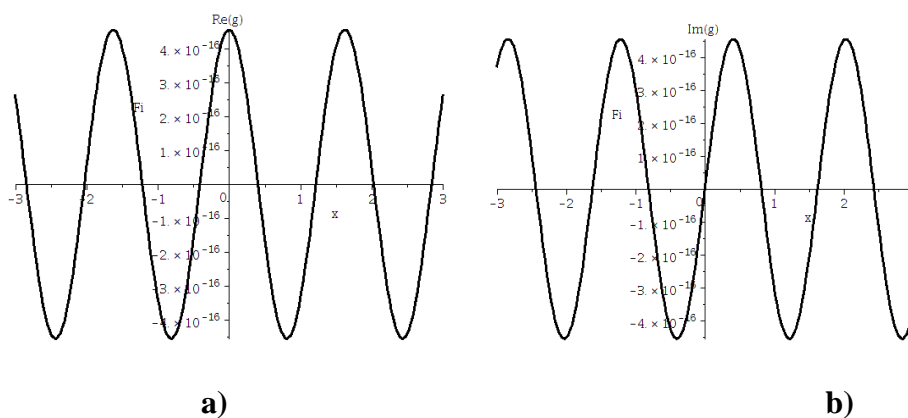
2.7 pav. Solitonas, kai $k=8$; $x = -10 - 3i$; $-10+4i$. a) – realioji dalis; b) – menamoji dalis

Analogiški grafikai nubraižyti ir solitonui, aproksimuojamam pagal KdV lygties sprendinį (2.4), kai $c=15$ (2.8 pav.).



2.8 pav. Solitonas, kai: a) $c=15$; b) $c = 1.3+5i$

2.9 pav. nubraižyti KdV lygties sprendinio (2.4) grafikai, kuriuose pavaizduota vien tik menamoji (b) ir vien tik realioji (a) lygties (2.3) dalys.



2.9 pav. Solitonas, kai $c=15$; $x = -10 - 3i$; $-10+3i$. a) – realioji dalis; b) – menamoji dalis

Iš 2.1 skyrelio matoma, kad KdV lygties sprendiniais aprašomi solitonai, gauti iš trijų atskirų KdV lygties (2.1) sprendinių, stačiakampėje koordinačių sistemoje yra panašūs. Skirtumai išryškėja kompleksinių skaičių plokštumose, kai kintamojo ir parametų reikšmės yra kompleksiniai skaičiai. Iš solitonų vaizdavimo 2.5, 2.7 ir 2.9 paveiksluose matoma, kad skiriasi solitonų amplitudės bei dažniai. Grafikai 2.4, 2.6 ir 2.8 pav. pavaizduoja solitonų skirtumą.

2.4 KORTEVEGO DE VRYSO LYGTIES SPRENDINIŲ TYRIMAS

Ištirsime šiuos KdV lygties (2.1) sprendinius:

$$\omega \left(x, c, s, \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \gamma (s - \omega_1) \sqrt{2s + \omega_1 - 3\omega_2} \right) \right) = y_{11}(x, c, s) = \omega_1 +$$

$$+ \frac{12(\omega_1 - \omega_2)(s - \omega_1)e^{(\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2})(x-c)}}{\left(\left(\sqrt{3(\omega_1 - \omega_2)} + \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1} \right) + \left(\sqrt{3(\omega_1 - \omega_2)} - \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1} \right) e^{(\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2})(x-c)} \right)^2} \quad (2.5)$$

$$\omega \left(x, c, s, \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \gamma (s - \omega_1) \sqrt{2s + \omega_1 - 3\omega_2} \right) \right) = y_{12}(x, c, s) = \omega_1 +$$

$$+ \frac{12(\omega_1 - \omega_2)(s - \omega_1)e^{(\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2})(x-c)}}{\left(\left(\sqrt{3(\omega_1 - \omega_2)} - \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1} \right) + \left(\sqrt{3(\omega_1 - \omega_2)} + \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1} \right) e^{(\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2})(x-c)} \right)^2} \quad (2.6)$$

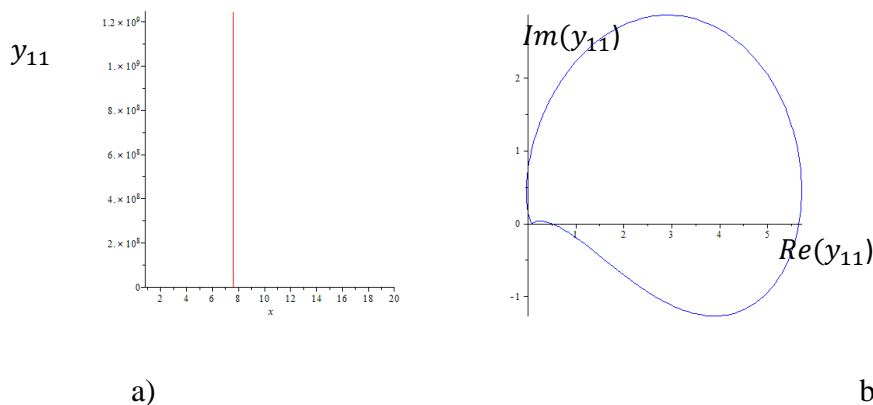
$$\omega \left(x, c, s, \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \gamma (s - \omega_2) \sqrt{2s + \omega_2 - 3\omega_1} \right) \right) = y_{21}(x, c, s) = \omega_2 +$$

$$+ \frac{12(\omega_2 - \omega_1)(s - \omega_2)e^{(\gamma\sqrt{\omega_2 - \omega_1})(x-c)}}{\left(\left(\sqrt{3(\omega_2 - \omega_1)} + \sqrt{2s - 3\omega_1 + \omega_2} \right) + \left(\sqrt{3(\omega_2 - \omega_1)} - \sqrt{2s - 3\omega_1 + \omega_2} \right) e^{(\gamma\sqrt{\omega_2 - \omega_1})(x-c)} \right)^2} \quad (2.7)$$

$$\omega \left(x, c, s, \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \gamma (s - \omega_2) \sqrt{2s + \omega_2 - 3\omega_1} \right) \right) = y_{22}(x, c, s) = \omega_2 +$$

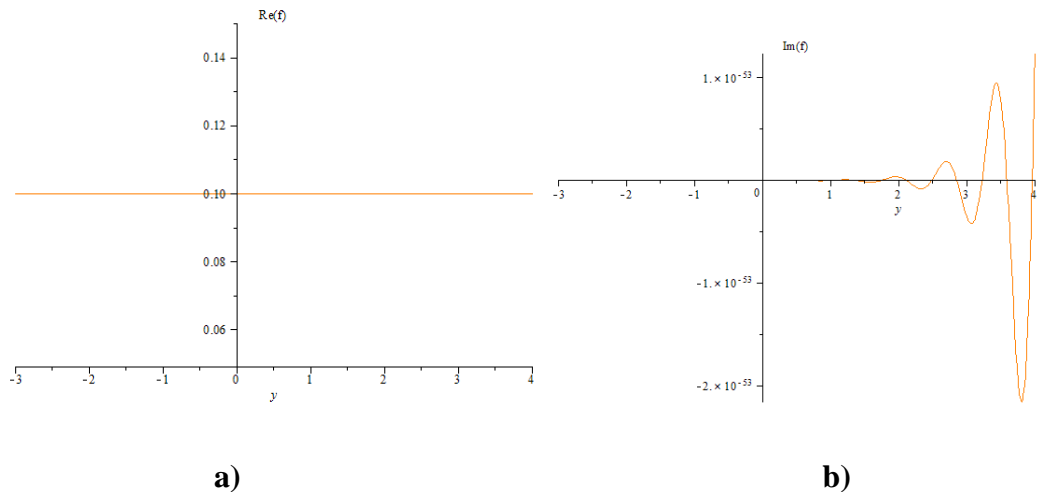
$$+ \frac{12(\omega_2 - \omega_1)(s - \omega_2)e^{(\gamma\sqrt{\omega_2 - \omega_1})(x-c)}}{\left((\sqrt{3}(\omega_2 - \omega_1) - \sqrt{2s - 3\omega_1 + \omega_2}) + (\sqrt{3}(\omega_2 - \omega_1) + \sqrt{2s - 3\omega_1 + \omega_2})e^{(\gamma\sqrt{\omega_2 - \omega_1})(x-c)} \right)^2} \quad (2.8)$$

Sprendiniai (2.5) – (2.8) tiriami taikant specializuotą matematikos paketą Maple ir matematikos metodus. Tyrimui panaudoti ir kompleksiniai skaičiai bei matematikos veiksmai su jais. Grafikai braižomi Dekarto koordinačių sistemoje su realiais skaičiais, taip pat braižomi koordinačių sistemoje, kurios abscisių ašis yra realūs skaičiai, o ordinačių – kompleksiniai skaičiai, t.y. – kompleksinėje plokštumoje. Taip pat funkcijų kitimo grafikai braižomi išskiriant realias ir menamasias lygčių dedamasias atskirai Dekarto koordinatėse ir kompleksinėje plokštumoje. (2.5) sprendinio grafikas Dekarto koordinačių sistemoje (a) ir koordinatėse, kuriose abscisių ašis yra realūs skaičiai, o ordinačių – menamieji (kompleksinių skaičių plokštumoje (b)) pavaizduotas 2.10 pav. Parametrų reikšmės: $s=0.5$; $\gamma = 1.3 + 5i$; $\omega_1 = 0.1$; $\omega_2 = 3$; $c=6$



2.10 pav. Sprendinio (2.5) grafikas, kai : $s=0.5$; $\gamma = 1.3 + 5i$; $\omega_1 = 0.1$; $\omega_2 = 3$; $c=6$; a) Dekarto koordinatės; b) – kompleksinė plokštuma.

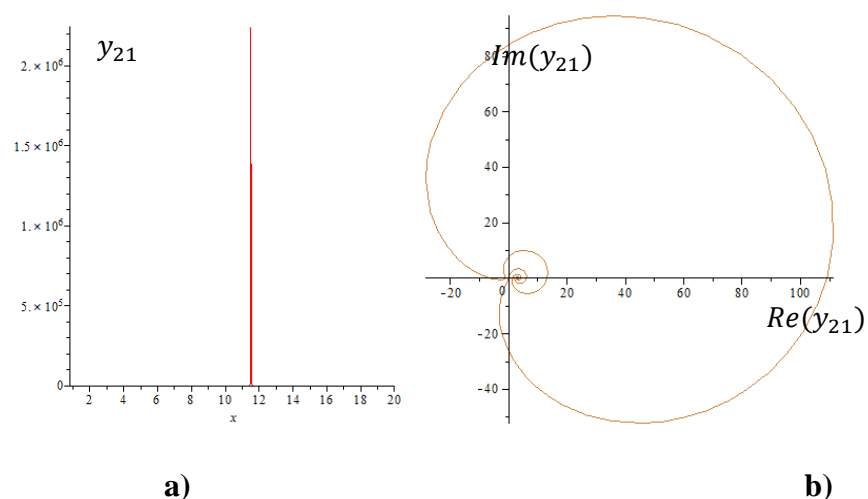
Pagal analogiją, esančią skyreliu aukščiau, 2.5 sprendiniui nubraižyti grafikai dviejose koordinačių sistemose. Pirmoji koordinačių sistema yra realiosios kompleksinio skaičiaus dalies kitimas kintant argumentui x abscisių ašyje, o antrojoje koordinačių sistemoje atvaizduojama menamoji kompleksinio skaičiaus dalis, kai kinta argumentas x (2.11 pav. atitinkamai a) ir b)).

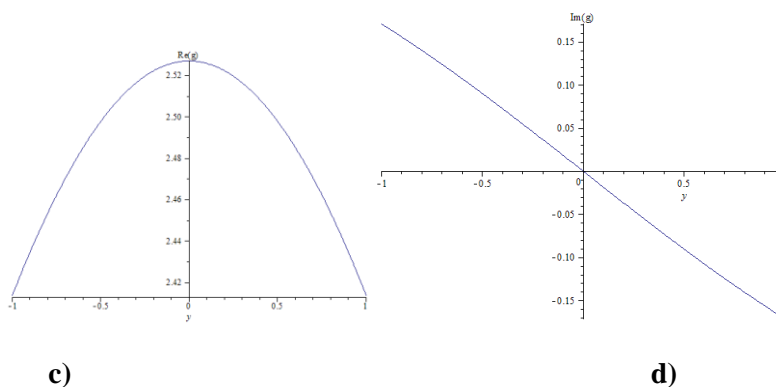


2.11 pav. Realiosios (a) ir menamosios (b) KdV lygties (2.1) sprendinio (2.5) dalių atvaizdavimas, kai: $s=0.5$; $\gamma = 1.3 + 5i$; $\omega_1 = 0.1$; $\omega_2 = 3$; $c=6$;

Iš 2.10 pav. a) matoma, kad (2.5) sprendiniu aprašomos funkcijos grafikas yra panašus į tiesę. 2.10 pav. b) matoma, kad funkcijos grafikas yra tolydi uždara kreivė. 2.11 pav. matoma, kad realiųjų skaičių koordinatinių sistemoje funkcijos grafikas yra tiesė, lygiagreti ordinačių ašiai. Menamųjų skaičių arba kompleksinių skaičių plokštumoje funkcijos, aproksimuojamas (2.5) sprendiniu grafikas yra panašus į didėjančių svyravimų grafiką, kai didėja virpesių amplitudė, periodas ir kinta kiti parametrai.

Atlikta analogiška (2.7) sprendinio analizė, kurios grafinė aproksimacija pavaizduota 2.12 pav., kai $s=5$, $\gamma = 0.4$, $\omega_1 = 1.8$, $\omega_2 = 0.5$, $c=0.9$.

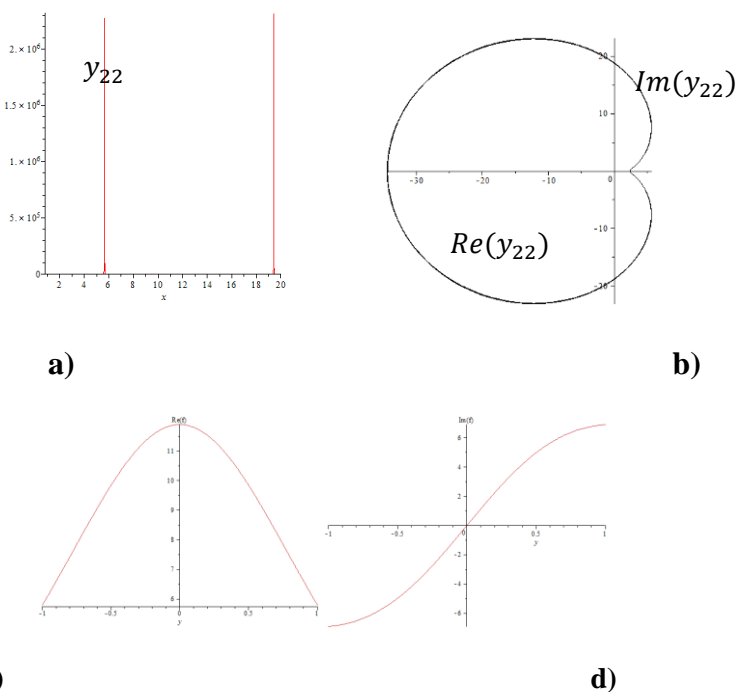




2.12 pav. Sprendinio (2.7) grafinė aproksimacija: a) ir c) – Dekarto koordinatėse; b) ir d) – kompleksinių skaičių plokštumoje; $s=5$, $\gamma = 0.4$, $\omega_1 = 1.8$, $\omega_2 = 0.5$, $c=0.9$.

Iš 2.12 pav. matoma, kad funkcijos, aprašomos sprendiniu (2.7) kitimo pobūdis stačiakampėje koordinatinių sistemoje yra panašus į aukščiau išnagrinėtus kitų analogiškų lygčių grafikus, išskyrus 2.12 pav. c), kuriame funkcijos aproksimuojamos KdV lygties sprendiniu (2.7) grafikas yra panašus į parabolę. Kompleksinių skaičių plokštumose (b) gaunamas grafikas, panašus į aukščiau išnagrinėtus grafikus. Nuo kitų grafikų skiriasi grafikas, pavaizduotas 2.13 pav. (d). Jame pavaizduota kreivė, einanti per koordinatinių pradžių ir sudaranti apytiksliai 45° kampą su koordinatinių ašimis pirmame ir trečiame ketvirčiuose.

Atlikta analogiška (2.7) sprendinio analizė, kurios grafinė aproksimacija pavaizduota 2.13 pav., kai $s=3$, $\gamma = 0.4$, $\omega_1 = 1.8$, $\omega_2 = 0.5$, $c=0.9$.

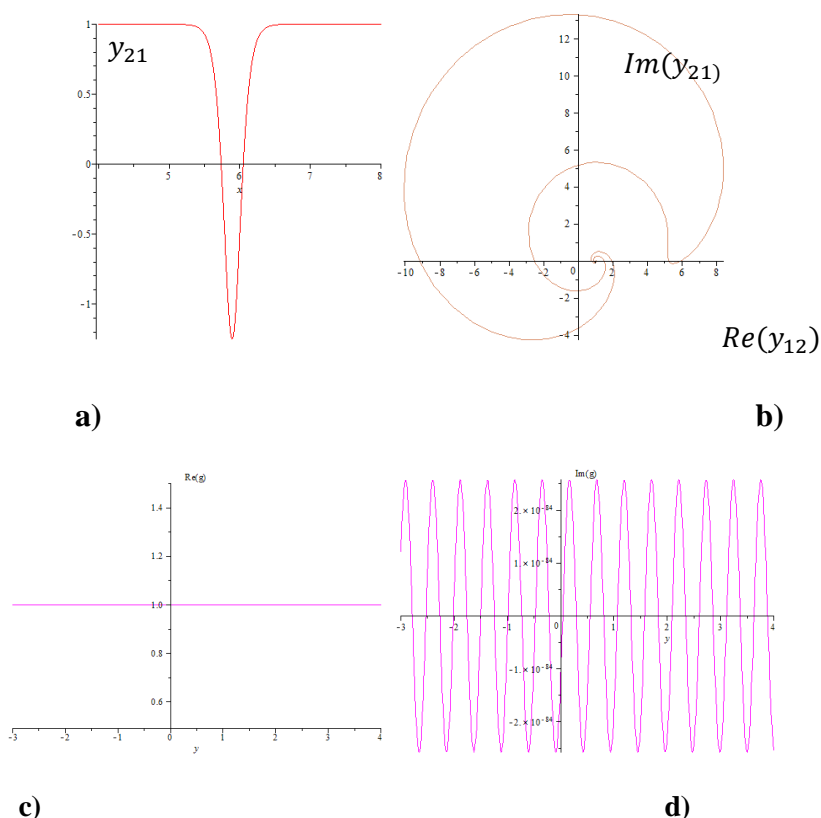


2.13 pav. Sprendinio (2.8) grafinė aproksimacija: a) ir c) – Dekarto koordinatėse; b) ir d) – kompleksinių skaičių plokštumoje, kai: $s=3$, $\gamma = 0.4$, $\omega_1 = 1.8$, $\omega_2 = 0.5$, $c=0.9$

Iš 2.13 pav. matoma, kad (2.8) sprendiniu aprašomos funkcijos grafikas yra panašus į kai kuriuos aukščiau išnagrinėtus.

Iš 2.14 pav. a) matoma, kad pasikeitus parametų reikšmėms, pasikeitė KdV lygties sprendinio grafikas, o b), c) ir d) paveiksluose pakitimų nėra lyginant su 2.10 pav. ir 2.11 pav.

Analogiškai ištirtas ir (2.6) sprendinys, kai $s=0.5$, $\gamma = 10$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 0.5$, $c=6$ (2.16 pav.).



2.14 pav. Sprendinio (2.6) grafinė aproksimacija: a) stačiakampėse koordinatėse ($s=0.5$, $\gamma = 1$, $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 1$, $c=15$); b) kompleksinėje plokštumoje ($s=0.5$, $\gamma = 10 + 5i$, $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 3$, $c=6$) c) – stačiakampėje koordinatinių sistemoje; d) – kompleksinių skaičių plokštumoje, kai $x[-10 - 3i; -10 + 4i]$

Analogiškai 2.13 pav., šiame paveiksle (2.14 pav.) skiriasi nuo grafikų aukščiau tik a) pav. funkcijos kitimo grafikas. Visi kiti grafikai nepakitę, lyginant su 2.12 pav.

Lyginant su 2.12 pav., funkcijų kitimo pobūdis grafikuose pakito. Kompleksinėje plokštumoje funkcijos grafikas lyginant su grafikais aukščiau taip pat pakito. Pakito ir reali bei menamoji KdV lygties (2.1) sprendinio (2.7) dedamosios, grafiškai pavaizduotos 2.17 pav. atitinkamai c) ir d) paveiksluose. Iš 2.14 pav. b) matome, kad, esant ω_1 ir ω_2 kompleksiniams skaičiams, kardioidė keičia savo geometrinę formą, tačiau lieka uždara. kreive.

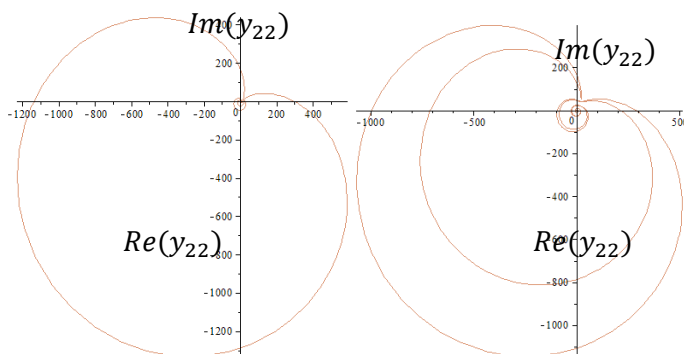
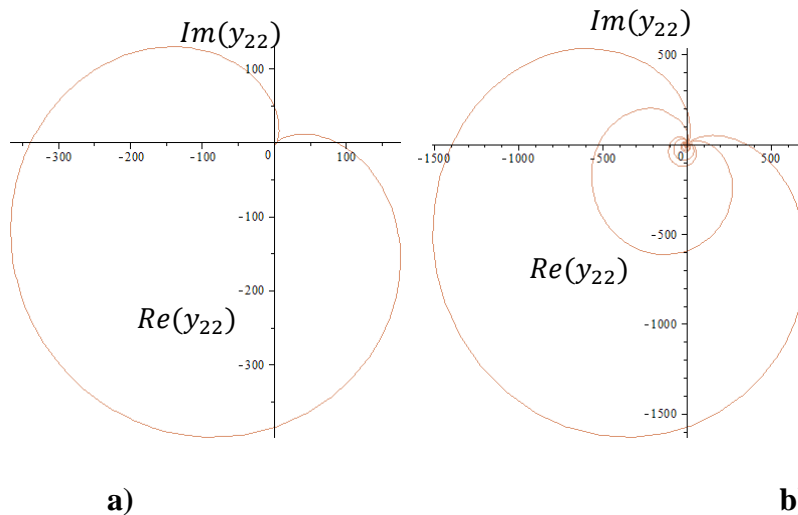
Apibendrinant skyrelio rezultatus galima teigti, kad keturiais KdV lygties (2.1) sprendiniais ((2.5 – (2.8) aprašomų funkcijų kitimo grafikai yra skirtingi. Funkcijos atvaizdai priklauso nuo parametrų reikšmių derinių.

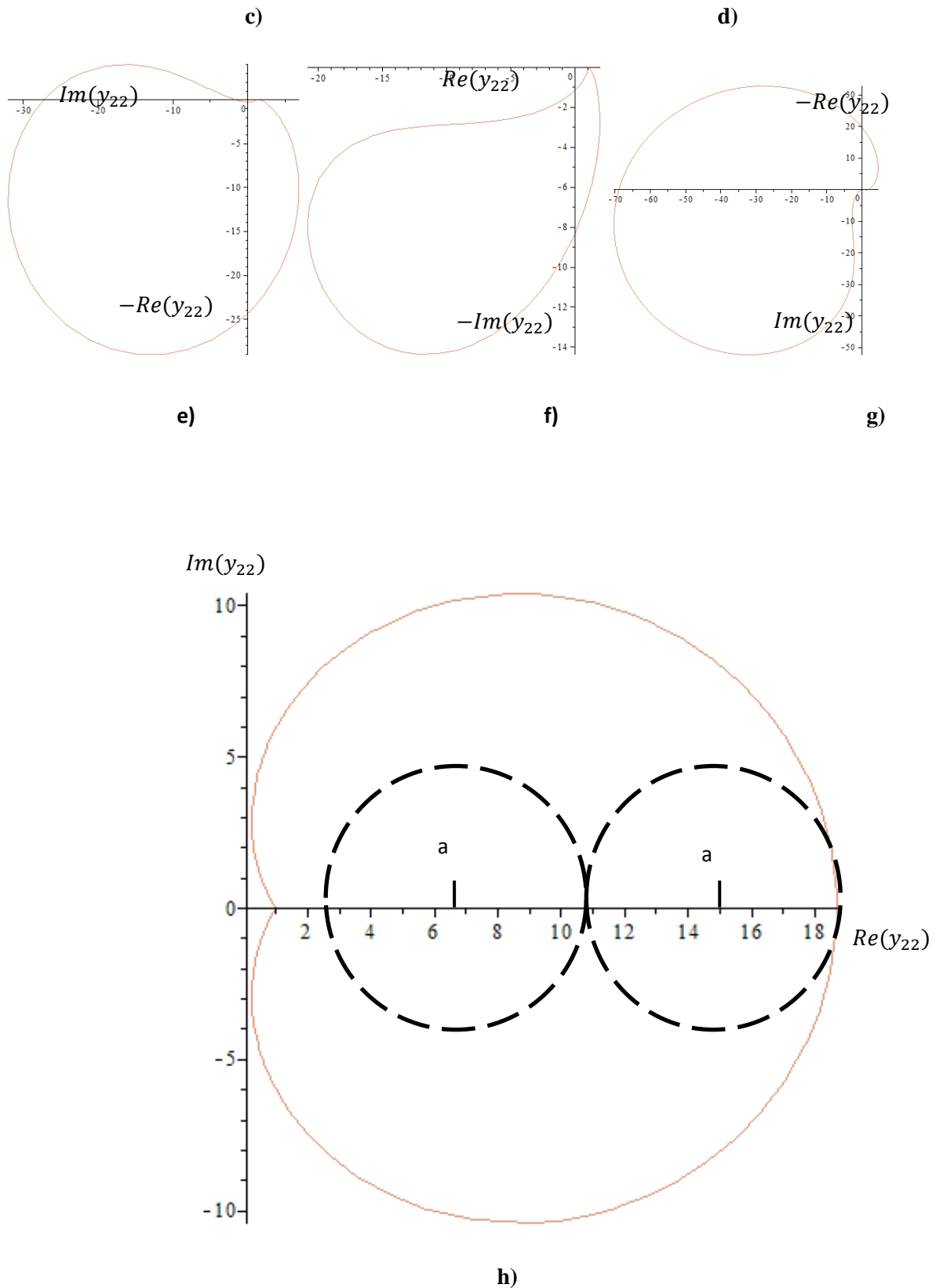
2.5 KARDIOIDĖ

Panagrinėkime 2.16 pav. pavaizduotą kreivę. Kreivė nubraižyta iš (2.8) sprendinio:

$$\omega \left(x, c, s, \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \gamma (s - \omega_2) \sqrt{2s + \omega_2 - 3\omega_1} \right) \right) = y_{22}(x, c, s) = \omega_2 + \frac{12(\omega_2 - \omega_1)(s - \omega_2)e^{(\gamma\sqrt{\omega_2 - \omega_1})(x-c)}}{\left((\sqrt{3(\omega_2 - \omega_1)} - \sqrt{2s - 3\omega_1 + \omega_2}) + (\sqrt{3(\omega_2 - \omega_1)} + \sqrt{2s - 3\omega_1 + \omega_2})e^{(\gamma\sqrt{\omega_2 - \omega_1})(x-c)} \right)^2} \quad (2.8)$$

kompleksinių skaičių plokštumoje esant tokioms parametrų reikšmėms: $s=0.5$, $\gamma = 10 + 5i$, $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 3$, $c=6$. Keičiant parametrų reišmes, kinta kreivės geometrinė figūra (2.19 pav.):

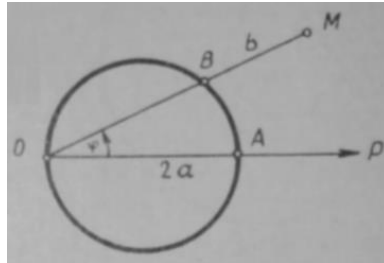




- 2.15 pav. Kardioidė, kai: a) $s = 5 + 10 \cdot i$, $\gamma = 10 - 5 \cdot i$, $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 3$, $c = 6$; b) $s = 5 - 10 \cdot i$, $\gamma = 10 - 5i$, $\omega_1 = 0.1 - 5 \cdot i$, $\omega_2 = 3$, $c = 6$; c) $s = 5 - 10 \cdot i$, $\gamma = 10 - 5i$, $\omega_1 = 0.1 - 5 \cdot i$, $\omega_2 = 13 + 1 \cdot i$, $c = 6$; d) $s = 5 - 10 \cdot i$, $\gamma = 10 - 5i$, $\omega_1 = 0.1 - 5 \cdot i$, $\omega_2 = 13 + 31 \cdot i$, $c = 6$; e) $s = 5 - 10 \cdot i$, $\gamma = 10 - 5i$, $\omega_1 = 0.1 - 5 \cdot i$, $\omega_2 = -13 - 10 \cdot i$, $c = 6$; f) $s = 5 - 10 \cdot i$, $\gamma = 10 - 5i$, $\omega_1 = 0.1 - 5 \cdot i$, $\omega_2 = -13 - 10 \cdot i$, $c = 6 + 5 \cdot i$;

$$\text{g) } s = 5 \quad \gamma = -0.1, \quad \omega_1 = 1 + 8 \cdot i, \quad \omega_2 = -13 - 10 \cdot i, \quad c = -1 + 1 \cdot i; \quad \text{h) } s = 5 + 10 \cdot i, \\ \gamma = 5 \cdot i, \quad \omega_1 = 0.1, \quad \omega_2 = 3, \quad c = 6;$$

Šiame 2.15 pav. (a) – h) paveiksluose) pavaizduota kreivė yra vadinama Paskalio sraigine ir atskiru atveju - kardioide arba širdine kreive. Nubrėškime apskritimą spinduliu a (2.16 pav.).



2.16 pav. Paskalio sraigtinė

Iš jo taško O , kuris laikomas poliumi, nubrėžiamas spindulys – vektorius ir ant jo nuo taško, kuriame jis kerta apskritimą, atidedama pastovaus ilgio atkarpa $BM=b$. Pažymimos taško M polinės koordinatės (ρ, φ) . Keičiant kampą φ nuo 0 iki 2π , įvairios taško M padėties sudarys geometrinę taškų vietą, vadinama Paskalio sraigine. Iš 2.17 pav. turima:

$$\rho = OB + BM,$$

bet

$$OB = 2a \cos \varphi \text{ ir } BM=b$$

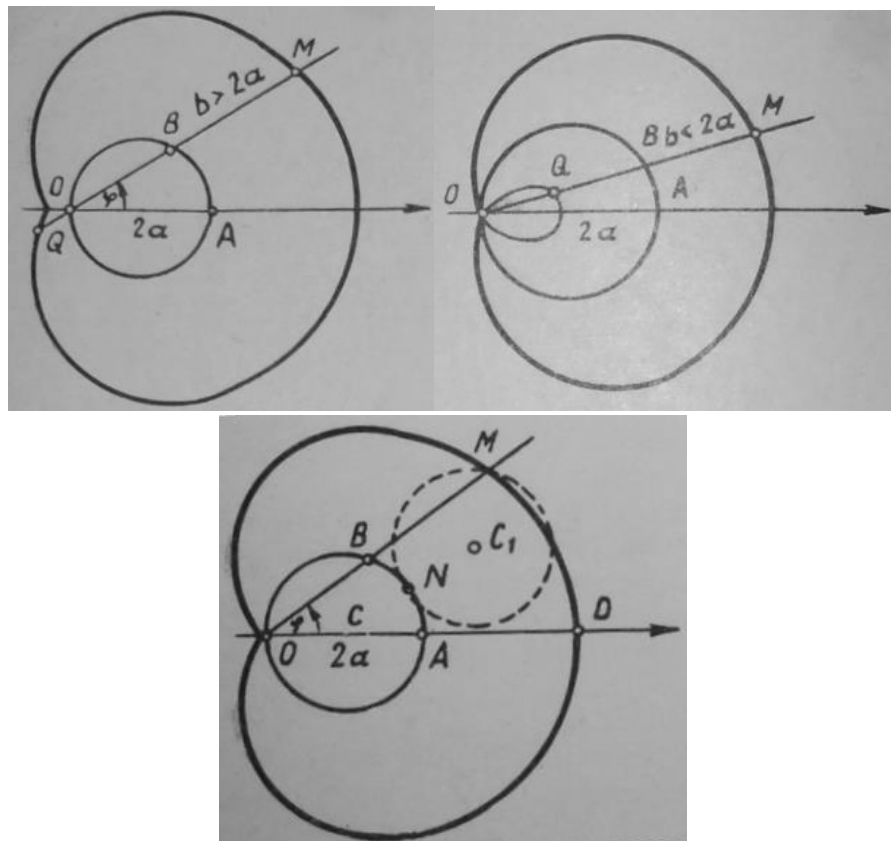
todėl

$$\rho = 2a \cos \varphi + b$$

Išskiriami trys atvejai:

$$b > 2a$$

Kadangi $|\cos \varphi| \leq 1$, tai matoma, kad šiuo atveju ρ bus teigiamas ir polius bus kreivės viduje (2.17 pav. a)).



a)

b)

c)

2.17 pav. Paskalio sraigtinė: **a)** kai $b > 2a$; **b)** kai $\cos \varphi = -\frac{b}{2a}$; **c)** kai $b = 2a$

$$b > 2a$$

Šiuo atveju ρ bus teigiamas, kai $\cos \varphi > -\frac{b}{2a}$, neigiamas, kai $\cos \varphi < -\frac{b}{2a}$ ir $\rho = 0$, kai $\cos \varphi = -\frac{b}{2a}$. Kreivė eis per polių ir, jame persikirsdama, padarys kilpą (2.18 pav. b)).

$$b = 2a$$

Šiuo atveju turima:

$$\rho = 2a(1 + \cos \varphi),$$

su visomis φ reikšmėmis $\rho > 0$; kai $\varphi = \pi$, tai $\rho = 0$. Kreivė dėl savo panašumo į širdį vadinama kardioidė (2.18 pav. c)).

Bendroju atveju kardioidės (2.16 pav. h)) lygtis polinėse koordinatėse yra tokia:

$$\rho = a(1 - \cos \varphi)$$

Kreivė yra uždara. Jos lygtyje yra transcendentinė arba periodinė arba trigonometrinė funkcija – kosinusas, todėl kreivė yra ir periodinė, ir, prie tam tikrų reikšmių – neperiodinė.

Tiriamajame darbe kardioidė nubraižyta įrašius kompleksinius skaičius į (2.8) sprendinį:

$$\omega \left(x, c, s, \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \gamma (s - \omega_2) \sqrt{2s + \omega_2 - 3\omega_1} \right) \right) = y_{22}(x, c, s) = \omega_2 +$$

$$+ \frac{12(\omega_2 - \omega_1)(s - \omega_2)e^{(\gamma\sqrt{\omega_2 - \omega_1}(x-c))}}{\left((\sqrt{3(\omega_2 - \omega_1)} - \sqrt{2s - 3\omega_1 + \omega_2}) + (\sqrt{3(\omega_2 - \omega_1)} + \sqrt{2s - 3\omega_1 + \omega_2})e^{(\gamma\sqrt{\omega_2 - \omega_1}(x-c))} \right)^2} \quad (2.8)$$

2.16 pav. h) grafikas nubraižytas esant kompleksiniais skaičiais parametrams s ir γ . Šis grafikas tiksliai atitinka kardioidę, nubraižytą polinėje koordinačių sistemoje. 2.16 a pav. b) gautas pakeitus kompleksinio skaičiaus γ reikšmę. Trečias paveikslas nubraižytas esant kompleksiniams skaičiams s , γ ir ω_1 . 2.16 pav. c) nubraižytas esant kompleksiniams skaičiams s , γ , ω_1 ir ω_2 . 2.16 pav. d) nubraižytas esant pakeitus kompleksinio skaičiaus ω_2 reikšmę lyginant su 2.16 pav. c). Analogiškai gautas ir 2.16 pav. e). Kai visų parametrų (s , γ , ω_1 ir ω_2 ir c) reikšmės yra kompleksiniai skaičiai nubraižytas 2.16 pav. g). Matematinė prasme kompleksinėje plokštumoje x ašyje atvaizduota reali kompleksinio skaičiaus arba funkcijos, kurios parametrai – kompleksiniai skaičiai, dedamoji (pvz.: $Re(y_{11})$), o ordinačių ašyje – menamoji dedamoji ($Im(y_{11})$). Kompleksinėje plokštumoje atidėta aibė taškų $A_i(Re(y_{11}), Im(y_{11}))$, kurie sujungti tolydžia kreive. Fizikine prasme ji reiškia solitoną – sklindančią į dešinę brėžinio plokštumoje bangą. Jeigu solitono lygtyje nėra laiko argumento, tada lygtis yra stacionari ir atvaizduoja stacionarią kreivę, arba stovinčią bangą.

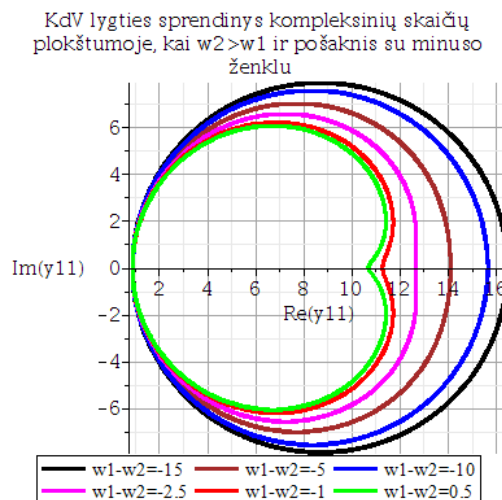
2.6 KDV LYGTIES SPRENDINIO TYRIMAS, KAI POŠAKNIS NEIGIAMAS

Nagrinėjamas (2.5) sprendinys atveju, kai pošaknis neigiamas - $\sqrt{a} < 0$:

$$\omega \left(x, c, s, \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \gamma (s - \omega_1) \sqrt{2s + \omega_1 - 3\omega_2} \right) \right) = y_{11}(x, c, s) = \omega_1 +$$

$$+ \frac{12(\omega_1 - \omega_2)(s - \omega_1)e^{(\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2}(x-c))}}{\left((\sqrt{3(\omega_1 - \omega_2)} + \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1}) + (\sqrt{3(\omega_1 - \omega_2)} - \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1})e^{(\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2}(x-c))} \right)^2} \quad (2.5)$$

Sudaryti funkcijos grafikai esant tokioms parametru reikšmėms: $s = 0.9, \gamma = 3, \omega_1 = 10, \omega_2, c = 6$. Jie pavaizduoti 2.18 pav.:



2.18 pav. KdV lygties sprendinio (2.5) graifikas, kai pošaknis – neigiamas arba menamas skaičius.

Matome, kad didėjant skirtumui $\omega_2 - \omega_1 = a$, kreivės apribojamas plotas didėja. Kai skirtumas artėja į nulį, kreivės geometrinė figūra artėja į širdinę kreivę arba kardioide. Perrašau lygtį (2.5), kai $\omega_2 > \omega_1$ ir $\sqrt{a} < 0$:

$$\begin{aligned}
 & \omega \left(x, c, s, \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \gamma (s - \omega_1) \sqrt{2s + \omega_1 - 3\omega_2} \right) \right) = y_{11}(x, c, s) = \omega_1 + \\
 & + \frac{12(\omega_1 - \omega_2)(s - \omega_1)e^{(\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2})(x-c)}}{\left(\left(\sqrt{3}(\omega_1 - \omega_2) + \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1} \right) + \left(\sqrt{3}(\omega_1 - \omega_2) - \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1} \right) e^{(\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2})(x-c)} \right)^2} \quad (1.5) \\
 & = \omega_1 + \frac{12(\omega_1 - \omega_2)(s - \omega_1)e^{(\gamma\sqrt{a^2})(x-c)}}{\left((3\sqrt{a^2} + \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1}) + (3\sqrt{a^2} - \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1}) e^{(\gamma\sqrt{a^2})(x-c)} \right)^2} = \\
 & = \omega_1 + \frac{12(\omega_1 - \omega_2)(s - \omega_1)e^{(\gamma a)(x-c)}}{\left((3a + \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1}) + (3a - \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1}) e^{(\gamma a)(x-c)} \right)^2} = \\
 & = \omega_1 + \frac{12(\omega_1 - \omega_2)(s - \omega_1)e^{(\gamma a)(x-c)}}{\left(3a + 3ae^{(\gamma a)(x-c)} - \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1} (1 - e^{(\gamma a)(x-c)}) \right)^2},
 \end{aligned}$$

čia $a = \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2}$.

2.7 KOMPLEKŠINIO SKAIČIAUS γ TRIGONOMETRINĖS FORMOS TYRIMAS

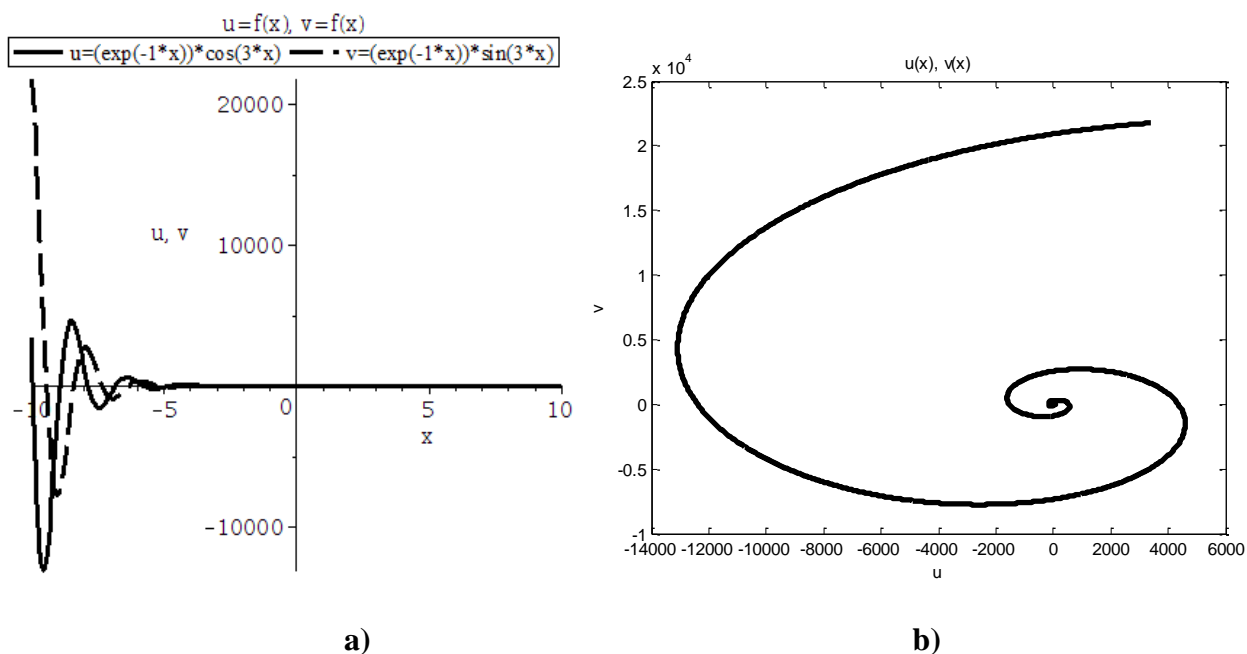
Eksponentę ir jos laipsnio rodiklį γ pagal Oilerio formulę galima išreikšti taip:

$$e^{(-1+3i)x} = e^{-1x}(\cos 3x + i \sin 3x).$$

Trigonometrinę kompleksinio skaičiaus formą išskaidome taip:

$$\begin{cases} u = e^{-x} \cos 3x \\ v = e^{-x} \sin 3x \end{cases}$$

Nubraižome funkcijų kitimo grafikus (2.19 pav. a)):

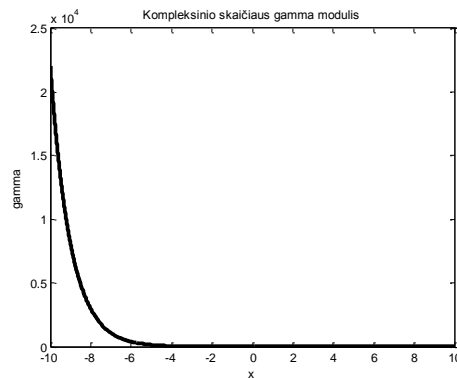


2.19 pav. Kompleksinio skaičiaus trigonometrinių formos grafikai, kai $-10 \leq x \leq 10$: **a)** kosinuso ir sinuso dedamosios **b)** kosinuso ir sinuso dedamosios vienoje plokštumoje.

Tam, kad skaičiaus γ kompleksinę dedamąją galėtume naudoti KdV lygties sprendiniuose, reikia apskaičiuoti kompleksinio skaičiaus modulį. Tai atliekama pagal Pitagoro teoremą:

$$|\gamma| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Nubraižytas funkcijų kitimo grafikas (2.20 pav.)



2.20 pav. Skaičiaus γ kompleksinėje formoje modulio kitimas, kintant x

Iš 2.20 pav. matome, kad skaičius γ eksponentiškai (pagal eksponentės dėsnį) mažėja, didėjant argumento reikšmėms.

Nustatomi funkcijų, pavaizduotų 2.21 pav. ekstremumai:

$$\begin{cases} u = e^{-x} \cos 3x \\ v = e^{-x} \sin 3x \end{cases}$$

Ekstremumai nustatomi pagal tokį algoritmą:

Surandama funkcijos pirmoji išvestinė;

Ji prilyginama nuliui ir randamos duotosios lygties tikrosios šaknys;

Surandama antroji išvestinė;

Į antrąją išvestinę įrašomos gautos iš lygties $f' = 0$ reikšmės;

Jeigu apskaičiavus antros eilės išvestines gaunamas neigiamas skaičius, tai, esant šiai x reikšmei duotoji funkcija turi maksimumą; jeigu apskaičiavus antros eilės išvestines gaunamas teigiamas skaičius, tai, esant šiai x reikšmei duotoji funkcija turi minimumą;

Jeigu antroji išvestinė lygi nuliui, arba visai neegzistuoja, tada šis metodas yra nepritaikomas, ir duotosios funkcijos ekstremumui nustatyti tenka panaudoti pirmosios išvestinės ženklo keitimo metodą. Pastebėtina, kad funkcijos ekstremumai yra lokalinio pobūdžio ir kai kuriais atvejais maksimumas gali būti mažesnis už nagrinėjamos funkcijos minimumą.

Nustatomi funkcijos

$$u = e^{-x} \cos 3x$$

ekstremumus. Randama pirmoji funkcijos išvestinė ir prilyginama nuliui:

$$u' = -e^{-x} \cos 3x - 3e^{-x} \sin 3x = 0.$$

Išsprendus x atžvilgiu, apskaičiuojama x reikšmė:

$$x = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = -0.1072501848$$

Randama antroji išvestinė:

$$u'' = -8e^{-x} \cos 3x + 6e^{-x} \sin 3x$$

Į antrąją išvestinę įstatoma gauta x reikšmė ir gaunama:

$$u'' = -8e^{-x} \cos 3x + 6e^{-x} \sin 3x = -10.5609$$

Kadangi gautas neigiamas skaičius, reiškia tame taške funkcija turi maksimumą. Jo reikšmė:

$$u(-0.1072501848) = e^{-x} \cos 3x = 1.0561$$

Analogiškai skaičiavimai atliekami ir su kita funkcija:

$$v = e^{-x} \sin 3x$$

Randama pirmoji funkcijos išvestinė ir prilyginama nuliui:

$$v' = -e^{-x} \sin 3x + 3e^{-x} \cos 3x = 0$$

Išsprendus x atžvilgiu, apskaičiuojama x reikšmė:

$$x = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3) = 0.4163485906$$

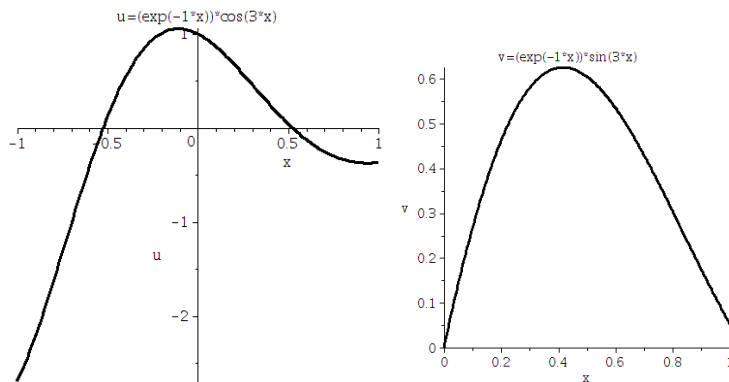
Randama antroji išvestinė:

$$u'' = -8e^{-x} \sin 3x - 6e^{-x} \cos 3x = -6.2561$$

Kadangi gautas neigiamas skaičius, reiškia ir tame taške funkcija turi maksimumą. Jo reikšmė:

$$v(0.4163485906) = e^{-x} \sin 3x = 0.6256$$

Grafiškai maksimumai pavaizduoti 2.21 pav.



a)

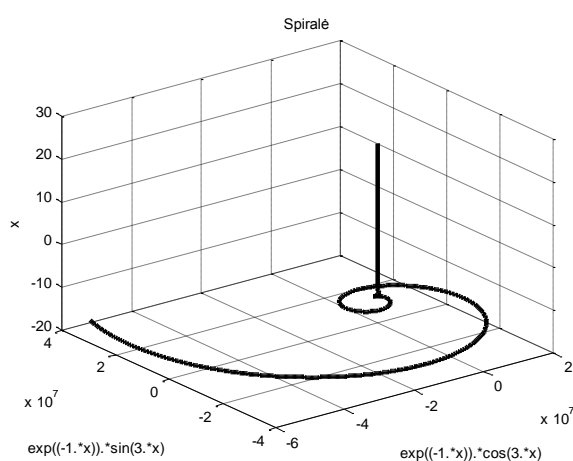
b)

2.21 pav. Grafinis lokaliųjų ekstremumų atvaizdas

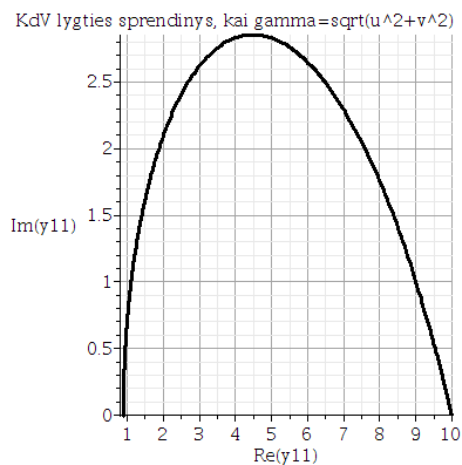
Funkcijos grafikas, aprašomas tokiomis lygtimis:

$$\begin{cases} u = e^{-x} \cos 3x \\ v = e^{-x} \sin 3x \\ w = x \end{cases}$$

Toks trimatis grafikas, nubraižytas su programa Matlab, pavaizduotas 2.22 pav. a). Nubraižytas funkcijos kitimo grafikas išnagrinėtam aukščiau tam atvejui, kai parametras γ yra apskaičiuojamas pagal Oilerio formulę kompleksinio skaičiaus geometrinei formai (2.22 pav. b)). Iš grafiko matome, kad skaičiaus γ forma, kaip kompleksinio skaičiaus trigonometrinės formos modulis turi pastebimą įtaką grafiko geometriniam atvaizdavimui.



a)



b)

2.22 pav. Spiralė ir KdV lygties sprendinys kompleksinių skaičių plokštumoje

2.8 FUNKCIJOS EKSTREMUMŲ NUSTATYMO KDV LYGTIMS BENDRUOJU ATVEJU FORMALIZAVIMAS

Randame funkcijos ekstremumus pagal algoritmą:

Randama funkcijos išvestinė;

Rastoji išvestinė prilyginama nuliui ir iš gautosios lygties randami galimo ekstremumo taškai;

Išnagrinėjama atskirai kiekvieno galimo ekstremumo taško aplinka, t.y. ištiriama, ar pereinama ekstremumo tašką, duotosios funkcijos išvestinė keičia ženklą, ar ne. Jeigu išvestinė keičia ženklą iš pluso į minusą, gaunamas maksimumas, ir, jeigu ji keičia ženklą iš minuso į plusą, gaunamas minimumas; jeigu išvestinė ženklo nekeičia, negaunamas nei maksimumas, nei minimumas;

Pats funkcijos ekstremumas randamas, apskaičiuojant duotosios funkcijos reikšmę surasto ekstremumo taške.

Apskaičiuojamas KdV lygties (2.1) sprendinio (2.5) ekstremumas:

$$\omega \left(x, c, s, \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \gamma (s - \omega_1) \sqrt{2s + \omega_1 - 3\omega_2} \right) \right) = y_{11}(x, c, s) = \omega_1 +$$

$$+ \frac{12(\omega_1 - \omega_2)(s - \omega_1)e^{\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2}(x-c)}}{\left((\sqrt{3(\omega_1 - \omega_2)} + \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1}) + (\sqrt{3(\omega_1 - \omega_2)} - \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1})e^{\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2}(x-c)} \right)^2} \quad (2.5)$$

Pagal algoritmą, visų pirma randama duotosios funkcijos išvestinė:

$$\frac{dy_{12}}{dx} = \frac{12 \cdot \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^3} \cdot (s - \omega_1) \cdot \gamma \cdot e^{\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2}(x-c)}}{\left(\sqrt{3 \cdot \omega_1 - 3 \cdot \omega_2} + \sqrt{2 \cdot s - 3 \cdot \omega_2} + (\sqrt{3 \cdot \omega_1 - 3 \cdot \omega_2} - \sqrt{2 \cdot s - 3 \cdot \omega_2 + \omega_1}) \cdot e^{\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2}(x-c)} \right)^2} -$$

$$= \frac{24 \cdot \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^3} \cdot (s - \omega_1) \cdot (\gamma \cdot e^{\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2}(x-c)})^2 \cdot (\sqrt{3 \cdot \omega_1 - 3 \cdot \omega_2} - \sqrt{2 \cdot s - 3 \cdot \omega_2 + \omega_1}) \cdot \gamma}{\left(\sqrt{3 \cdot \omega_1 - 3 \cdot \omega_2} + \sqrt{2 \cdot s - 3 \cdot \omega_2} + (\sqrt{3 \cdot \omega_1 - 3 \cdot \omega_2} - \sqrt{2 \cdot s - 3 \cdot \omega_2 + \omega_1}) \cdot e^{\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2}(x-c)} \right)^3}$$

Rastoji išvestinė prilyginama nuliui ir iš gautosios lygties randami galimo ekstremumo taškai:

$$\frac{dy_{12}}{dx} = \frac{12 \cdot \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^3} \cdot (s - \omega_1) \cdot \gamma \cdot e^{\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2}(x-c)}}{\left(\sqrt{3 \cdot \omega_1 - 3 \cdot \omega_2} + \sqrt{2 \cdot s - 3 \cdot \omega_2} + (\sqrt{3 \cdot \omega_1 - 3 \cdot \omega_2} - \sqrt{2 \cdot s - 3 \cdot \omega_2 + \omega_1}) \cdot e^{\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2}(x-c)} \right)^2} -$$

$$= \frac{24 \cdot \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^3} \cdot (s - \omega_1) \cdot (\gamma \cdot e^{\gamma \cdot \sqrt{\omega_1 - \omega_2} \cdot (x - c)})^2 (\sqrt{3 \cdot \omega_1 - 3 \cdot \omega_2} - \sqrt{2 \cdot s - 3 \cdot \omega_2 + \omega_1}) \cdot \gamma}{(\sqrt{3 \cdot \omega_1 - 3 \cdot \omega_2} + \sqrt{2 \cdot s - 3 \cdot \omega_2 + \omega_1}) \cdot (\sqrt{3 \cdot \omega_1 - 3 \cdot \omega_2} - \sqrt{2 \cdot s - 3 \cdot \omega_2 + \omega_1}) \cdot e^{\gamma \cdot \sqrt{\omega_1 - \omega_2} \cdot (x - c)} } = 0$$

(2.5 a)

Funkcijos ekstremumai gali būti nustatomi pagal aukščiau aprašytą algoritmą, ir pagal šį algoritmą, adaptuotą konkrečiai programinei įrangai Matlab:

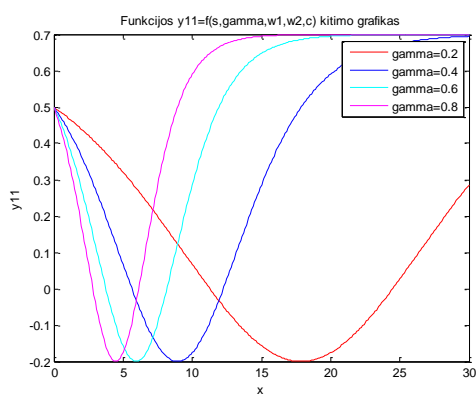
nubraižomas funkcijos (ne išvestinės) grafikas. Randami taškai, kuriuose grafikas kerta x ašį ($y=0$) (failas “grafik.m” (žiūr. 2 priedą)). Taškai randami interpoliuojant ir nurašomi iš Matlab komandinio lango į failą “zenklkit.m” (žiūr. priedus). Jame patikrinama, ar išvestinė keičia ženklą ir kaip ji keičia ženklą. Konkrečiu nagrinėjamu atveju nustatyta, kad ekstremumo reikšmė yra $f_{ekstr} = -0.1985 \approx -0.2$. Tačiau funkcijos išvestinė ženklo nekeičia, todėl taškas yra ekstremumas, tačiau, pagal teoriją - nei minimumas, nei maksimumas. Taip pat randamos asimptotės [14]. Tiriama lygties (2.1) sprendinys (2.5) esant tokioms parametrų reikšmėms (2.2 lentelė):

2.2 lentelė

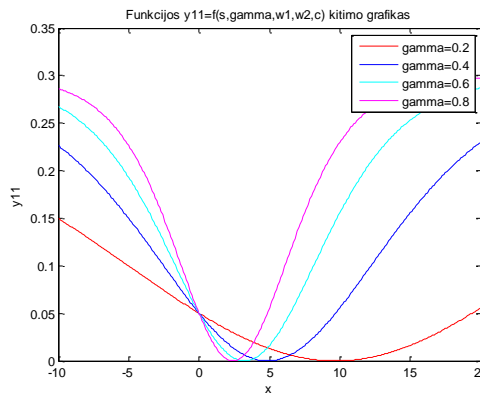
Ekstremumai ir asimptotės

$w(x, 0, 0.5, \text{gamma}, 0.1, 0.7)$	γ			
	0.8	0.6	0.4	0.2
Apskaičiuotos ekstremumų reikšmės	-0.1964	-0.1985	-0.1964	-0.1798
Horizontalioji asimptotė	0.5	0.5	0.5	0.5

Sprendinio (2.5) kitimo grafikai pavaizduoti 2.23 pav. a)



a)



b)

2.23 pav. Sprendinio 2.5 kitimo grafikai, esant kintantiems γ , kai: a) duomenys 2.2 lentelėje; b) duomenys 2.3 lentelėje

2.3 lentelė

Ekstremumai ir asimptotės

$w(x, 0.05, \textit{gamma}, 0.3, 0.1)$	γ			
	0.8	0.6	0.4	0.2
Ekstremumai: min	0.0161	0.0232	0.0280	0.0374
Horizontalioji asimptotė	0.05	0.05	0.05	0.05

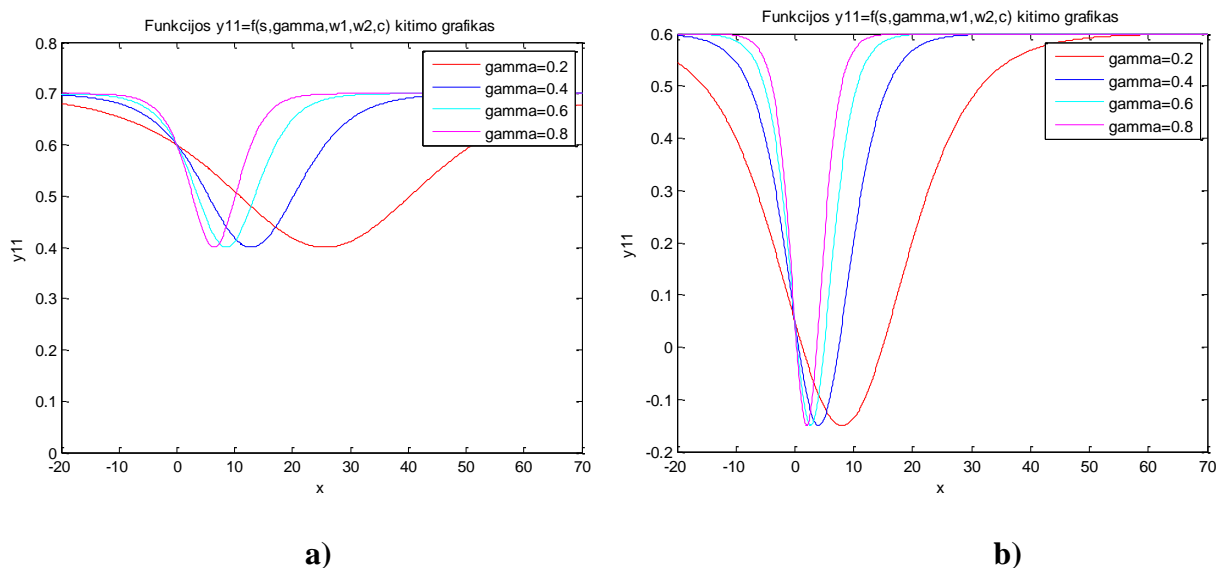
2.4 lentelėje pavaizduoti atitinkamai KdV lygties sprendinio ekstremumai ir asimptotės, esant kitam, negu išnagrinėti aukščiau, parametų reikšmių deriniui.

2.4 lentelė

Ekstremumai ir asimptotės

$w(x, 0.6, \textit{gamma}, 0.7, 0.5)$	γ			
	0.8	0.6	0.4	0.2
Apskaičiuoti ekstremumai: min	0.4738	0.4985	0.5292	0.5640
Apskaičiuoti ekstremumai: max	0.7	0.7	0.7	0.6782
Horizontalioji asimptotė	0.6	0.6	0.6	0.6

2.24 pav. a) pavaizduoti funkcijų kitimo grafikai kai parametų reikšmės lygios 2.4 lentelėje esančioms parametų reikšmėms.



2.24 pav. KdV lygties (2.1) sprendinio (2.5) kitimo grafikai

2.5 lentelėje pavaizduoti atitinkamai KdV lygties ekstremumai ir asimptotės, esant kitam, negu išnagrinėti aukščiau, parametrų reikšmių deriniui.

2.5 lentelė

Ekstremumai ir asimptotės

$w(x, 0.05, \textit{gamma}, 0.6, 0.1)$	γ			
	0.8	0.6	0.4	0.2
Apskaičiuotos ekstremumų reikšmės: min	-0.1490	-0.1181	-0.1490	-0.1361
Horizontalioji asimptotė	0.05	0.05	0.05	0.05

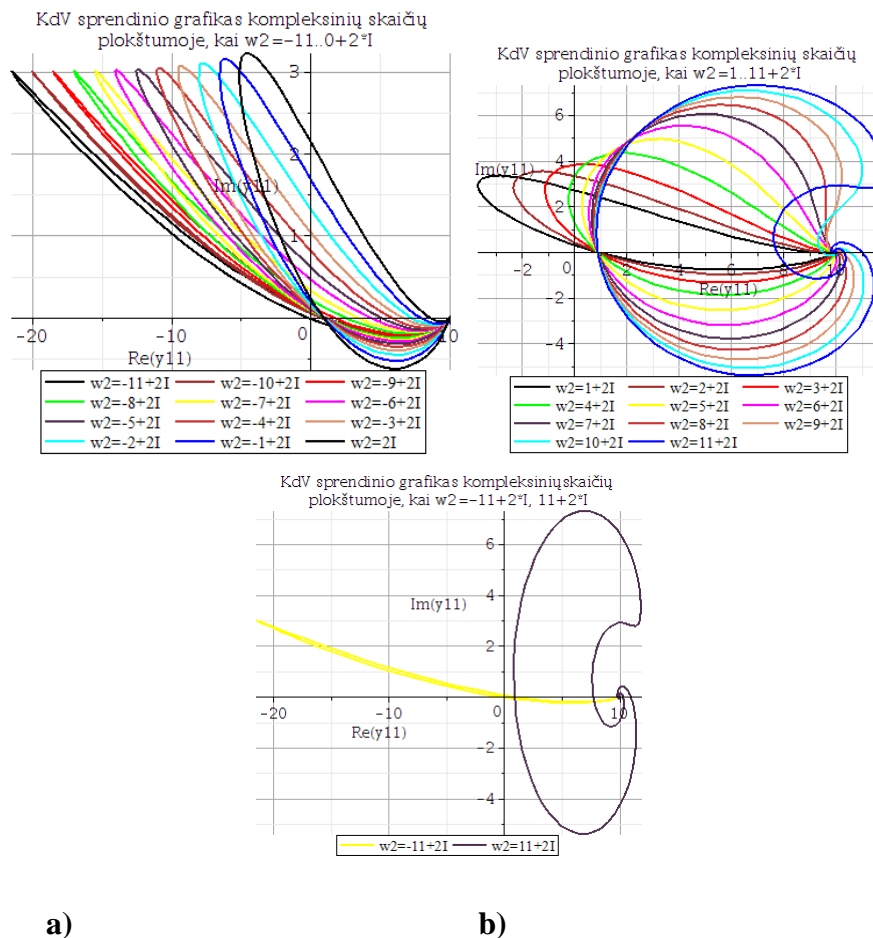
2.24 pav. b) pavaizduoti funkcijų kitimo grafikai kai parametrų reikšmės lygios 2.5 lentelėje esančioms parametrų reikšmėms. Kreivių horizontalios asimptotės nustatytos apskaičiuotus lygties (2.5) ribas.

2.9 KdV LYGTIES SPRENDINIO NAGRINĖJIMAS, KAI ω_2 YRA KOMPLEKŠINIS SKAIČIUS

Nagrinėjama tas pats KdV lygties sprendinys:

$$\omega \left(x, c, s, \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \gamma (s - \omega_1) \sqrt{2s + \omega_1 - 3\omega_2} \right) \right) = y_{11}(x, c, s) = \omega_1 + \frac{12(\omega_1 - \omega_2)(s - \omega_1)e^{(\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2})(x-c)}}{\left(\left(\sqrt{3(\omega_1 - \omega_2)} + \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1} \right) + \left(\sqrt{3(\omega_1 - \omega_2)} - \sqrt{2s - 3\omega_2 + \omega_1} \right) e^{(\gamma\sqrt{\omega_1 - \omega_2})(x-c)} \right)^2} \quad (1.5)$$

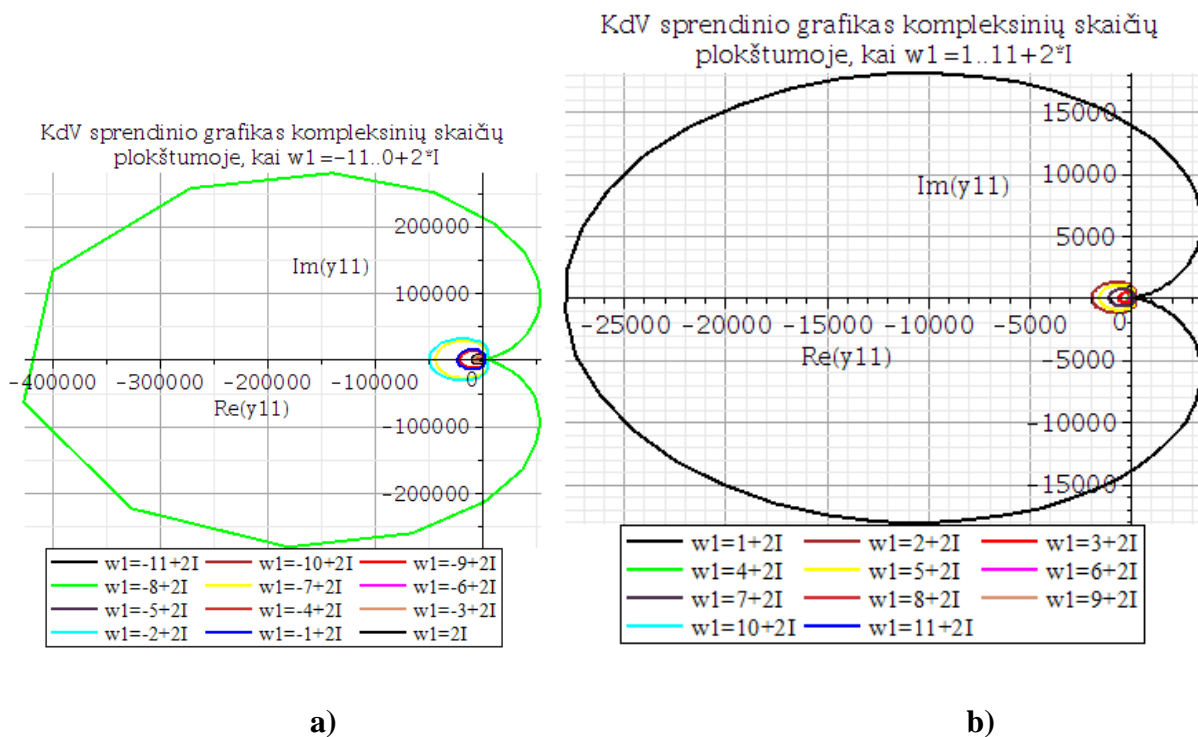
Tyrime skaičiui arba KdV lygties sprendinio parametrai ω_2 suteikiamos kompleksinio skaičiaus reikšmės. Skaičius kinta diapazone nuo $\omega_2 = -11 + 2i$ iki $\omega_2 = 11 + 2i$. 2.29 pav. pavaizduoti grafikai, kai $\omega_2 = -11 + 2i$ iki $\omega_2 = 2i$. Iš 2.25 pav. a) matoma, kad didėjant kompleksinio skaičiaus realiai daliai, uždara vingiuota linija plėtėja. Kitų parametrų reikšmės yra tokios: $s = 0.9, \gamma = 4, \omega_1 = 10, \omega_2, c = 6$. Tame pačiame paveiksle b) pavaizduotos KdV sprendinio kreivės, kai kompleksinis skaičius kinta $\omega_2 = 1.11 + 2i$. Matoma, kad didėjant realios dalies reikšmei, KdV sprendinio grafikas tampa panašus į kardioidę. Singuliarinis kardioidės taškas sutampa su skaičiaus $\omega_1 = 10$ reikšme.



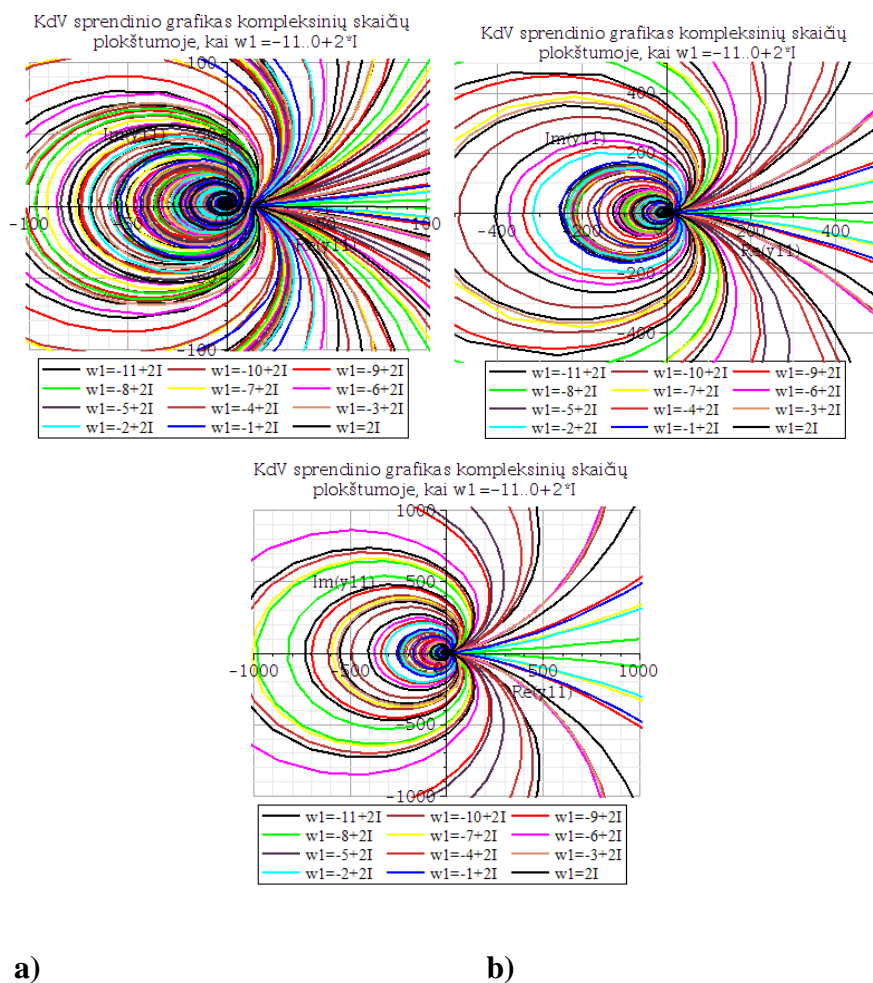
2.25 pav. KdV sprendinių grafikas, kai ω_2 yra kintamas kompleksinis skaičius

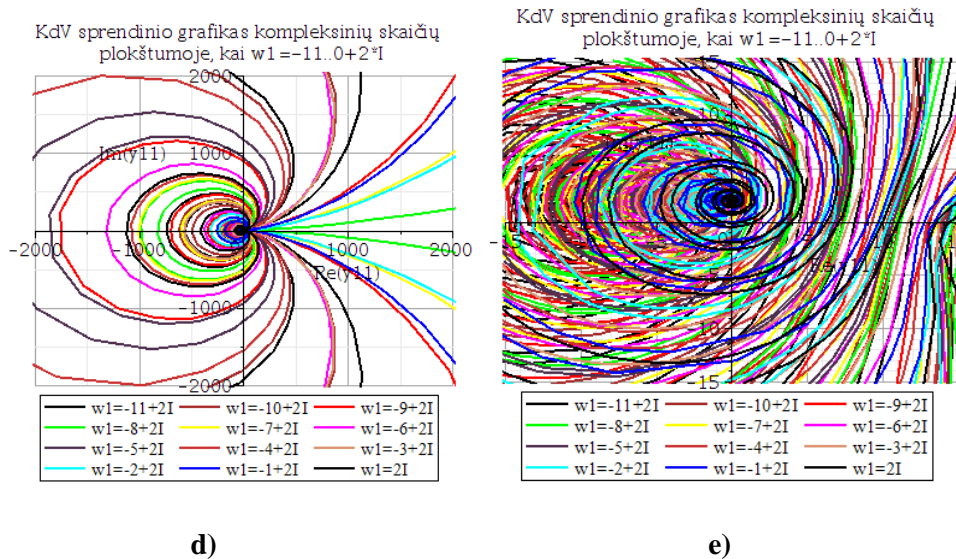
2.10 KDV LYGTIES SPRENDINIO NAGRINĖJIMAS, KAI ω_1 YRA KOMPLEKSINIS SKAIČIUS

Tiriamas tas pats KdV lygties sprendinys (2.5). Tyrime skaičiui arba KdV lygties sprendinio parametrui ω_1 suteikiamos kompleksinio skaičiaus reikšmės. Skaičius kinta diapazone nuo $\omega_1 = -11 + 2i$ iki $\omega_1 = 11 + 2i$, kai kiti parametrai lygūs: $s = 0.9, \gamma = 4, \omega_2 = 10, c = 6$. Funkcijų grafikai pavaizduoti 2.30 pav. a) ir b). Iš grafiko 2.26 pav. a) matome, kad grafiko kreivės ribojamas plotas yra didžiausias, kai $\omega_1 = -8 + 2i$. 2.30 pav. b) didžiausias kreivės ribojamas plotas yra tada, kai $\omega_1 = 1 + 2i$. Tam, kad pavaizduoti, kaip kreivės išsidėstę arčiau poliaus arba singularinio taško, sudaryta keletas grafikų (2.31 ir 2.32 pav.). Šiuose paveiksluose atitinkamai pavaizduotos kreivės, kai ω_1 realioji dalis yra neigiama ir teigiama skirtinguose ašių masteliuose. Singularinio taško reikšmė iš grafikų tiksliai nenustatoma.



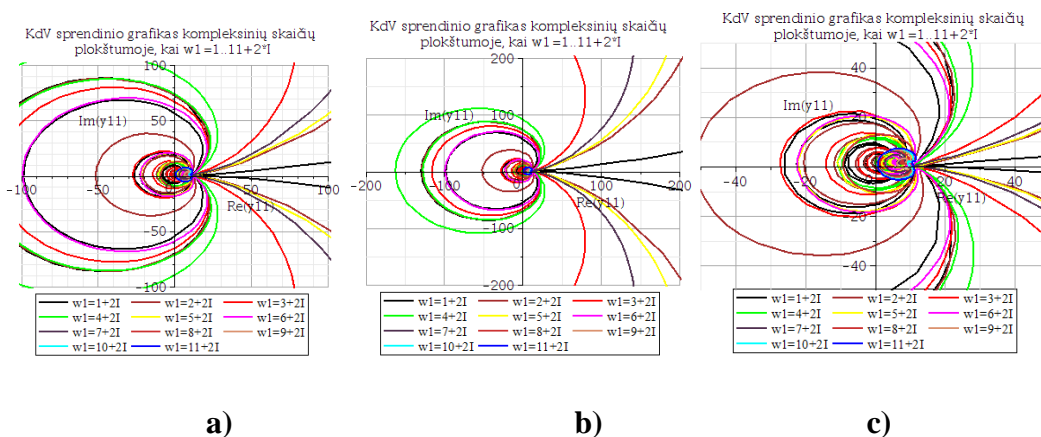
2.26 pav. KdV lygties sprendinio grafikai, kai ω_1 yra kompleksinis skaičius





2.27 pav. KdV lygties grafikai, kai ω_1 kompleksinio skaičiaus realioji dalis neigiama

Analogiški grafikai nubraižyti ir kai ω_1 kompleksinio skaičiaus realioji dalis teigiama (2.28 pav.)



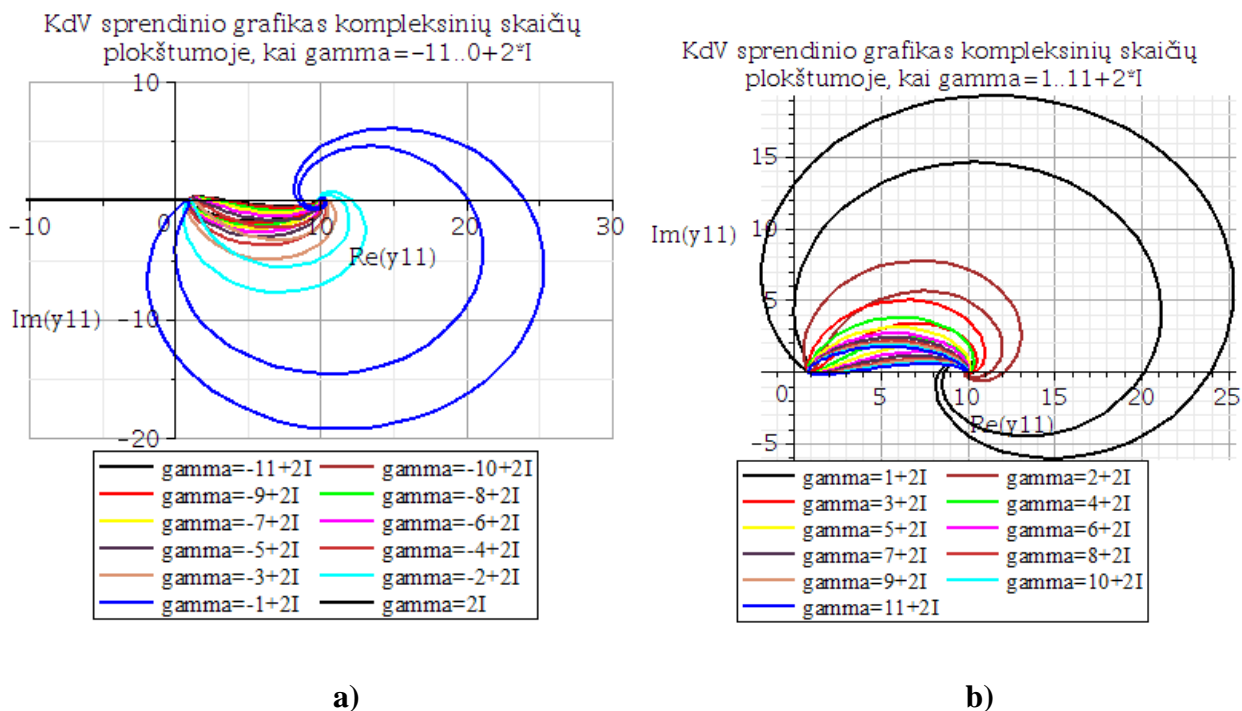
2.28 pav. KdV lygties grafikai, kai ω_1 kompleksinio skaičiaus realioji dalis teigiama

Visos kreivės turi vieną bendrą tašką, vadinamą singulariniu tašku arba poliumi.

2.11 KDV LYGTIES SPRENDINIO NAGRINĖJIMAS, KAI γ YRA KOMPLEKSINIS SKAIČIUS

Nagrinėjamas KdV lygties sprendinys (2.5). Visi lygties parametrai turi fiksuotas reikšmes, išskyrus parametą γ . Jis kinta ribose: $\gamma = -11 + 2i$ ir $\gamma = 11 + 2i$. Kitų parametų reikšmės tokios: $s = 0.9$, $\omega_1 = 10$, $\omega_2 = 4$, $c = 6$. 2.29 pav. a) pavaizduoti grafikai, kai $\gamma = -11 \dots 0 + 2i$. Jame pastebime, kad funkcija tuo atveju, kai γ yra kompleksinis skaičius, yra veidrodiskai simetriška (2.29 pav. b), t.y., kai $\gamma = -11.0 + 2i$, grafikai yra išsidėstę ir iš poliaus arba singularinio taško išeinatrajektorija, veidrodiskai priešinga trajektorijai tuo atveju, kai $\gamma = 1.11 +$

2i. Tai įmanoma tada, kai kompleksinis skaičius pakeičiamas jam jungtiniu kompleksiniu skaičiumi, t.y., pvz.: $a = 11 + 2i$ pakeičiamas į $a = 11 - 2i$, arba pakeičiamas funkcijos ženklas iš $-i + i$ ir atvirkščiai, t.y.: $y = f(x)$ pakeičiamas į $y = -(f(x))$.

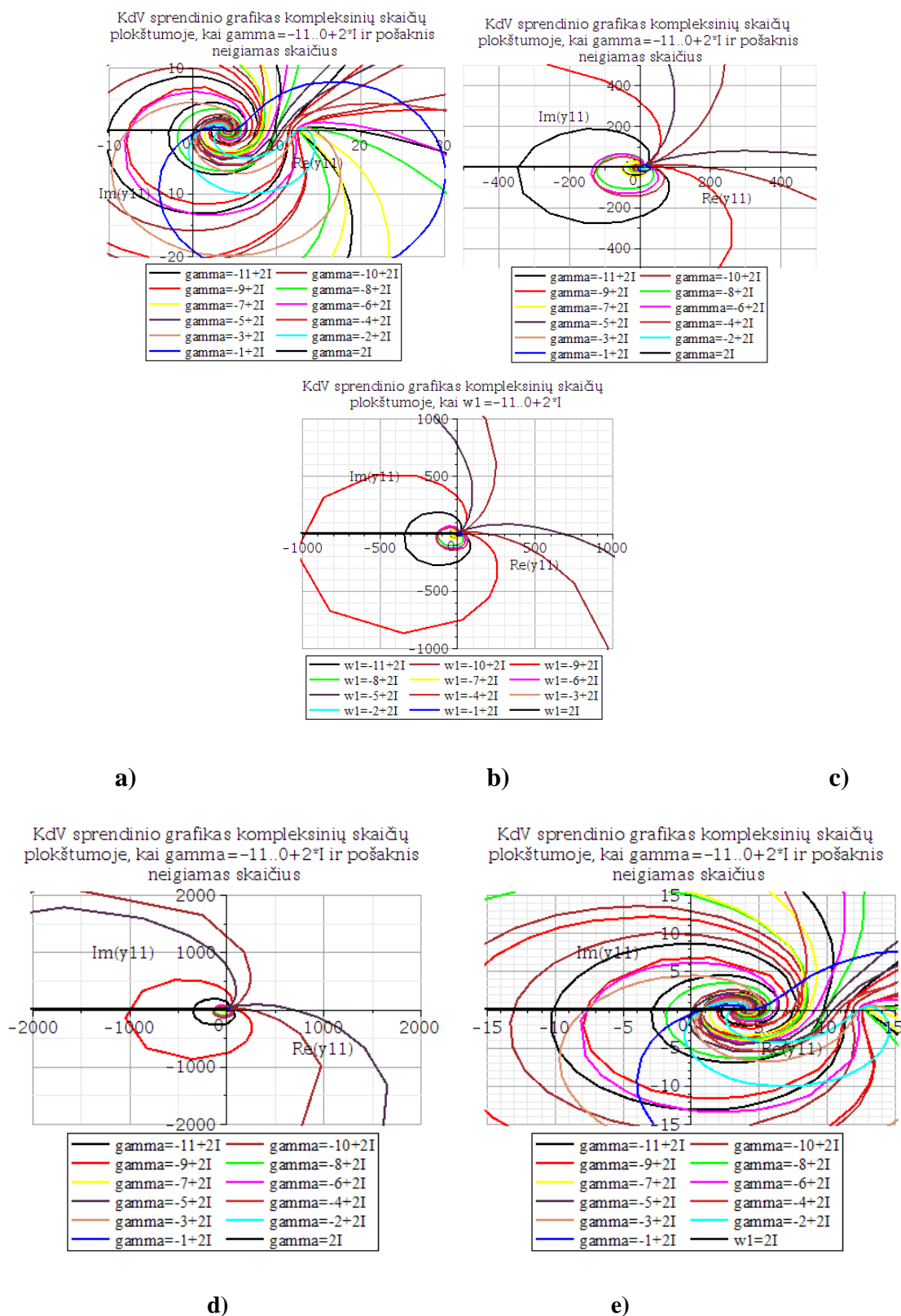


2.29 pav. KdV lygties sprendinio grafikai, kai γ yra kompleksinis skaičius

Iš 2.29 grafikų taip pat matome, kad singularinis taškas: $\omega_1 = 10$.

2.12 KDV LYGTIES SPRENDINIO NAGRINĖJIMAS, KAI γ YRA KOMPLEKSINIS SKAIČIUS IR KDV LYGTIES SPRENDINIO POŠAKNIS YRA NEIGIAMAS SKAIČIUS

Atlikta (2.5) sprendinio analizė tuo atveju, kai γ yra kompleksinis skaičius ir pošaknis neigiamas - $\sqrt{\omega_1 - \omega_2} < 0$ (2.30 pav.). Kitų parametų reikšmės yra tokios: $s = 0.9$, $\omega_1 = 4$, $\omega_2 = 10$, $c = 6$.

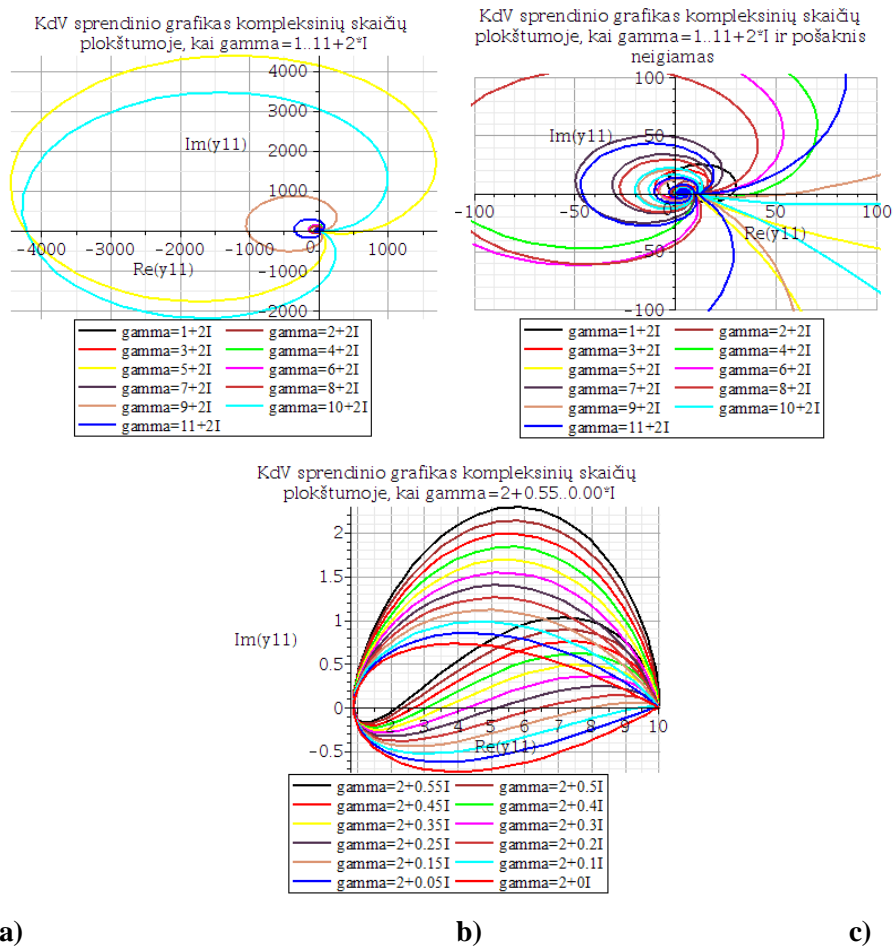


2.30 pav. KdV lygties sprendinio kitimo grafikai, kai γ kompleksinis skaičius ir pošaknis mažesnis už nulį

Iš čia ir iš aukščiau pavaizduotų grafikų tampa aiški tendencija, kai singularinis taškas sutampa su ω_1 reikšme. Dvimatėje erdvėje tai įmanoma tada, kai $x = \omega_1, y = 0$, t.y. – reikia atrasti

tokias parametrų reikšmes, kurias išpildžius dvimatės erdvės taškas turės tokias koordinatas: $A(\omega_1, 0)$.

Panašūs į aukščiau esančius grafikus gaunami grafikai, kai $\gamma = 1.11 + 2i$ ir pošaknis neigiamas (2.31 pav.).



2.31 pav. KdV lygties sprendinio kitimo grafikai, kai γ kompleksinis skaičius ir pošaknis mažesnis už nulį (a pav. ir b pav.) ir grafiškai pavaizduota, kaip kompleksinio skaičiaus γ menamoji dalis artėja į nulį (c pav.)

Taip pat atliktas funkcijos kitimo pobūdžio tyrimas, kai kompleksinio skaičiaus menamoji dedamoji artėja į nulį ir kompleksinis skaičius tampa realiuoju skaičiumi (2.31 pav. c)) Kompleksiniu skaičiumi buvo pasirinktas skaičius γ . Visų kitų parametrų reikšmės nepasikeitė ir sutampa su skyrelio pradžioje surašytomis reikšmėmis. Matome, kad visos kreivės yra panašios savo geometrine figūra.

2.13 KDV LYGTIES SPRENDINIO NAGRINĖJIMAS, KAI γ YRA KOMPLEKSINIO SKAIČIAUS TRIGONOMETRINĖJE FORMOJE

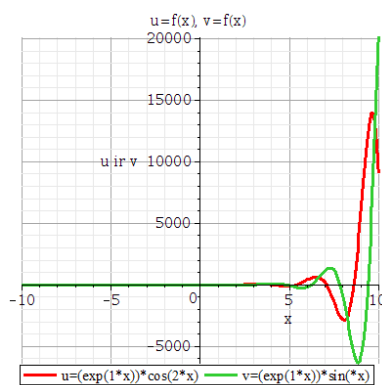
Nagrinėjamas KdV lygties (1.9) vienas iš sprendinių (2.5). Jame parametrai γ užduodama kompleksinio skaičiaus trigonometrinė forma tokios reikšmės:

$e^{(1+2i)x} = e^{1x}(\cos 2x + i \sin 2x) .$ $\begin{cases} u = e^x \cos 2x \\ v = e^x \sin 2x \\ w = x \end{cases}$	$e^{(1+i)x} = e^x(\cos x + i \sin x) .$ $\begin{cases} u = e^x \cos x \\ v = e^x \sin x \\ w = x \end{cases}$
$e^{(1+0.3i)x} = e^x(\cos 0.3x + i \sin 0.3x) .$ $\begin{cases} u = e^x \cos 0.3x \\ v = e^x \sin 0.3x \\ w = x \end{cases}$	$e^{(1+0.001i)x} = e^x(\cos 0.001x + i \sin 0.001x) .$ $\begin{cases} u = e^x \cos 0.001x \\ v = e^x \sin 0.001x \\ w = x \end{cases}$

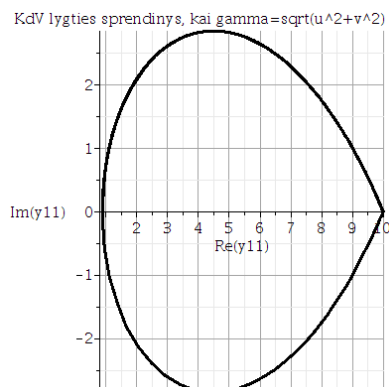
Visiems 4 atvejams nubraižomi tokie funkcijų grafikai:

$$u = f(x), v = f(x), F = u(x), v(x), F = f(u(x), v(x), x) = f(u, v, w), y_{11} = f(x) .$$

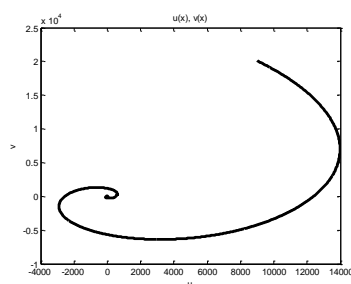
Pirmas atvejis (2.32 pav.):



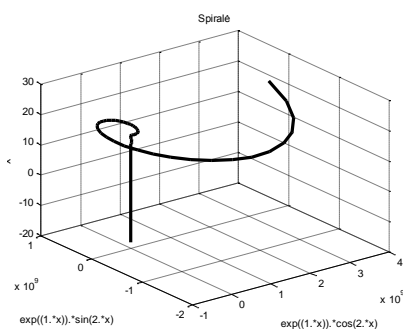
a)



b)



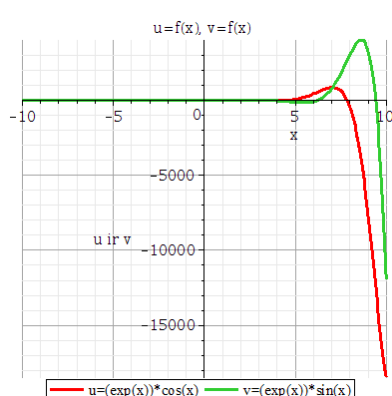
c)



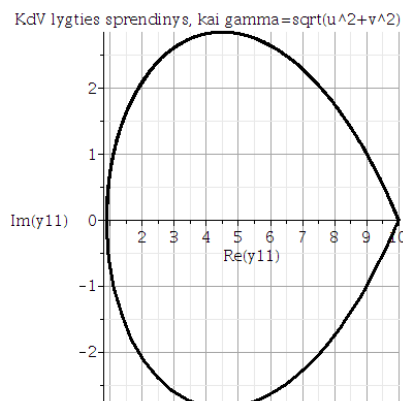
d)

2.32 pav. KdV lygties sprendinio (2.5) kitimo grafikai, kai skaičius γ yra kompleksinis skaičius.

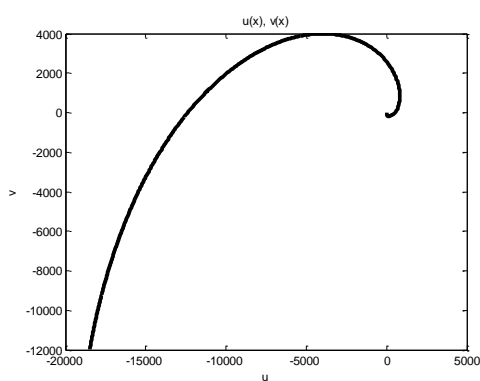
Nubraižyti analogiški grafikai antram atvejui pavaizduoti 2.33 pav.



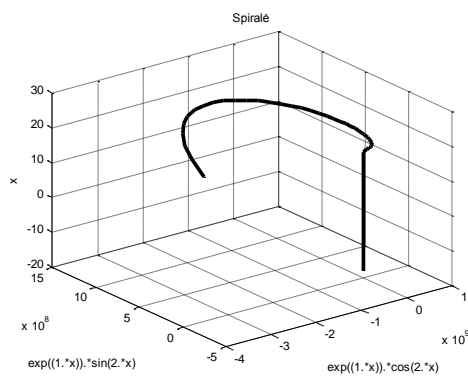
a)



b)



c)



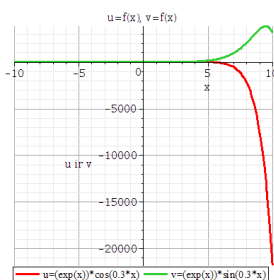
d)

2.33 pav. KdV lygties sprendinio (2.5) kitimo grafikai, kai skaičius γ yra kompleksinis skaičius

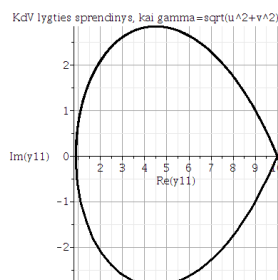
Trečias atvejis (2.34 pav.), kai:

$$e^{(1+0.3i)x} = e^x(\cos 0.3x + i \sin 0.3x).$$

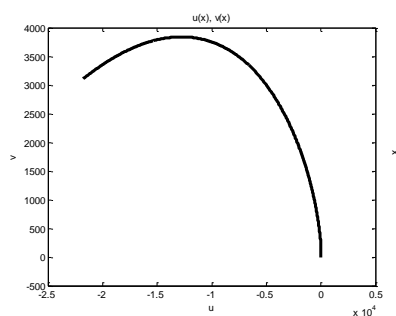
$$\begin{cases} u = e^x \cos 0.3x \\ v = e^x \sin 0.3x \\ w = x \end{cases}$$



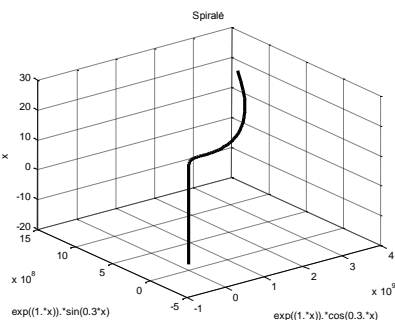
a)



b)



c)



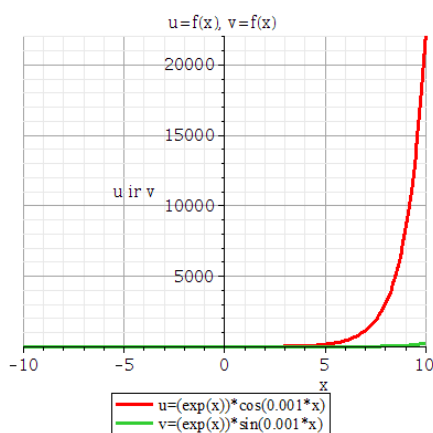
d)

2.34 pav. KdV lygties sprendinio (2.5) kitimo grafikai, kai skaičius γ yra kompleksinis skaičius

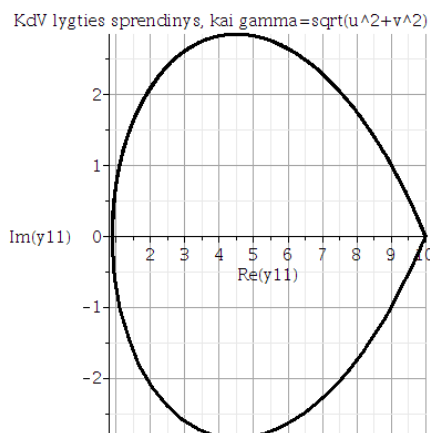
Ketvirtas atvejis (2.35 pav.), kai:

$$e^{(1+0.001i)x} = e^x(\cos 0.001x + i \sin 0.001x).$$

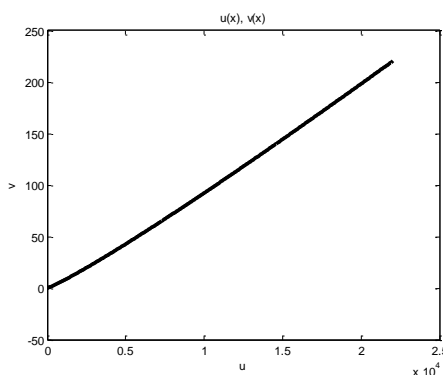
$$\begin{cases} u = e^x \cos 0.001x \\ v = e^x \sin 0.001x \\ w = x \end{cases}$$



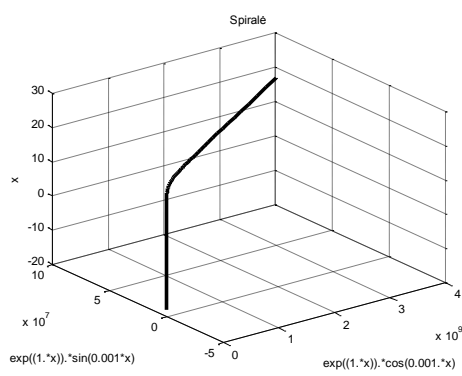
a)



b)



c)



d)

2.35 pav. KdV lygties sprendinio (2.5) kitimo grafikai, kai skaičius γ yra kompleksinis skaičius

Kompleksinio skaičiaus menamajai daliai artėjant prie nulio, grafikai praranda kreivumą bei susisukimą. Taip pat iš visų keturių paveikslų grupių c) paveikslų matoma, kad skaičiaus γ kitimas neturi jokios įtakos grafikams kompleksinėje plokštumoje. Visi jie vienodi, esant tokioms γ reikšmėms ir jų kitimui.

2.14 SUKURTOS METODIKOS IR PROGRAMINĖS ĮRANGOS TAIKYMAS

2.14.1 MAPLE PROGRAMŲ PAKETAS

KdV lygčių tyrimui pritaikytas matematikos programų paketas Maple. Programų pakete integruota labai daug matematikos uždavinių sprendimo programinių modulių, pvz.: integravimo, diferencijavimo, algebrinių lygčių, diferencialinių lygčių, interpoliavimo, spausdinimo ir t.t. Maple integruota programavimo leksika, kuri pritaikoma įprastam programų kūrimui ir rašymui. Joje netrūksta nieko, kas yra integruota kituose programavimo moduluose. Norint sėkmingai dirbti su Maple, reikia mokėti Maple programavimo kalbą. Vartotojo sąsaja labai informatyvi, unifikuota pagal įprastas Windows ir kitų programų atitikmenis, todėl lengvai išmokstama. Programoje, taikant jos leksiką, išsikviečiami programiniai moduliai, arba, kitais žodžiais: programiniai moduliai įjungiami darbui atlikti, pvz.: norint išsikviesti tiesinės algebros programinį modulį arba visas tiesinės algebros uždavinių sprendimo paprogrames paruošti dirbti (atlikti skaičiavimus, spręsti algebrines lygtis ir t.t.), vartotojo sąsajos lange reikia suvesti tekstą „with(linalg);“ ir paspausti „enter“. Vartotojo sąsajos lange matomos visos tiesinės algebros uždavinių sprendimo paprogramės (jų pavadinimai). Norint išsiaiškinti, kaip taikyti konkrečią paprogramę konkrečiam uždaviniui išspręsti, reikia Maple vartotojo sąsajos lange įvesti klaustuką ir prie jo parašyti paprogramės pavadinimą. Taigi, nesudėtinga pradėti mokintis skaičiuoti ir programuoti su Maple programų paketu.

Šiame tiriamajame darbe pritaikytos Maple programų paketo programavimo kalba ciklų kūrimui, masyvų kūrimui ir veiksams su jais, procedūrų arba paprogramių kūrimo leksika, funkcijų grafikų braižymo leksika ir kt. Dirbant su Maple, po programos suderinimo ir visiško pabaigimo, vartotojo sąsajos lange matomas ne tik programos tekstas, bet ir programavimo rezultatai, todėl po kiekvieno programos aktyvavimo, ją išjungiant įrašomas ne tik programos tekstas, bet ir visa programos darbo metu gauta informacija. Todėl, po kiekvieno įrašymo, atidarant iš naujo programą, vartotojo sąsajoje yra visi skaičiavimo su programa rezultatai (formulės, funkcijų grafikai ir t.t.). Norint pakeisti kažkokių parametrų reikšmes, tą įmanoma nesudėtingai

atlikti su klaviatūra tiesiog kaip suvedant tekstą į programą word ir iš naujo atlikti visus skaičiavimo veiksmus tam pagrinde naudojant tik klavišą „enter“.

2.14.2 MATLAB PROGRAMŲ PAKETAS

Programų paketas Matlab yra matematinio modeliavimo paketas su labai įvairiapusėmis arba daugiarūšėmis programavimo galimybėmis. Jame integruota labai daug programinių modulių, pvz.: diferencialinių lygčių skaitmeninio sprendimo paprogramės, GUI modulis, vaizdų (video ir nuotraukų bei kitų grafinių objektų) nuskaitymo, interpretavimo, apdorojimo modulis su ROI algoritmu smulkiems objektams iš grafikos failo išimti ir padidinti, matematinės statistikos modulis, raiškiosios logikos modulis, kreivių apdorojimo modulis, simbolinių matematinių pertvarkymų modulis, diferencialinių lygčių su dalinėmis išvestinėmis sprendimo modulis, optimizavimo modulis, genetinių algoritmų modulis, signalų apdorojimo modulis (pvz.: Mendelio simfonijos paprogramė, įgalinanti suprogramuoti simfoniją ir ją išklausti per Matlab programą), jau minėtas vaizdų apdorojimo modulis, duomenų bazių modulis, sistemų identifikavimo modulis, veivletinis modulis, filtravimo modulis, geografijos duomenų analizės modulis, valdymo sistemų modulis, optimalių ir robastinių sistemų valdymo modulis, finansinis modulis, finansinių laiko eilučių modulis, finansinių išvestinių modulis, simulink'as (blokinių skaičiavimų modulis arba skaičiavimų panaudojant blokus, kurie yra programiniai moduliai arba paprogramių superpozicija tam tikram standartiniam matematiniam veiksmui atlikti, virtualios realybės modulis ir t.t. Taigi, lengva susidaryti teisingą įspūdį apie Matlab: tai neribotų techninių galimybių turbūt pats galingiausias matematikos programų paketas. Verta žinoti, kad yra „Statistica“ programų paketas, skirtas atlikti statistikos mokslo skaičiavimams. Jis yra specializuotas ir apsiriboja tik statistikos mokslu. Matlab statistikos paketas yra tik vienas iš daugelio Matlab programų paketo modulių. Be abejo, pradėjus nagrinėti Statistica programų paketo ir Matlab programų modulio statistiniams skaičiavimams galimybes, gali paaiškėti, kad Matlab neturi tiek daug ir įvairiapusių statistinių skaičiavimų atlikimo galimybių, tačiau įspūdis gali būti klaidingas.

Matlab, kaip ir visi programavimo paketai, turi savo programavimo kalbą. Norint ją taikyti sėkmingai, savaime suprantama, reikia išmokti kalbos „gramatiką“ ir „leksiką“. Ciklams ir loginėms operacijoms ji nesudėtinga. Matlab programų paketas taip pat atlieka visus įmanomus veiksmus su masyvais, matricomis ir vektoriais, skaliariais (1×1 matrica). Darbe pritaikyta Matlab programavimo kalba, paprogramės mažiausių kvadratų metodei taikyti, grafikų braižymo ir atvaizdavimo paprogramės arba funkcijos, interpoliavimo paprogramės ir t.t. Norint dirbti su sukurtomis programomis, reikia atidžiai perskaityti tekstą Matlab redaktoriuje ir jį aktyvuoti

spustelėjus F5, arba, tame pačiame redaktoriuje keisti duomenis, kai tai būtina, taip pat, kaip bet kokiame kitame teksto redaktoriuje.

DISKUSIJA

Tam tikrose apibrėžtose tyrimų rėmuose išnagrinėtos Kortvego De Vryso lygtys. Nagrinėjimas yra matematinio - fundamentinio pobūdžio, be konkrečios fizikinės prasmės, nors darbo pradžioje užsiminta apie solitoną, bėgančią bangą, kuri aprašoma KdV lygtimis. Atliktas tyrimas parodė, kad lygties parametrų matematinės prigimties įvairumas (realūs skaičiai, kompleksiniai skaičiai), dabartinių kompiuterių, programinės įrangos dėka bei kūrybiškai keičiant lygčių parametrų ir kintamųjų duomenis, iš šių lygčių nubraižytuose funkcijų kitimo grafikuose yra didelė rezultatų įvairovė ir atvaizdavimo įvairiapusiškumas. Rezultatai atvaizduoti stačiakampėje koordinatinių sistemoje (dvimatėje ir trimatėje), kompleksinėje plokštumoje, taip pat kompleksinėje erdvinėje arba trimatėje koordinatinių sistemoje. Taikyti ir fundamentalūs matematikos metodai: ekstremumų nustatymas, ribų apskaičiavimas, diferencijavimas, algebrinių lygčių sprendimas ir t.t. Šiuolaikinės techninės priemonės daug kartų pagreitino skaičiavimus ir tuo pačiu padidino tyrimų gausą ir įvairovę.

IŠVADOS

1. Taikyti šie matematikos ir informatikos metodai:
 - a. Empirinis tyrimas darbe vartojamas tokia prasme: parašius kompiuterinę programą atliekami daugkartiniai skaičiavimai su ja ir matematiškai arba kompiuterinės matematikos metodais matuojamas tiriamas parametras ir tokiu būdu nustatomas tiriamo parametro kitimas, keičiant kokio nors lygties parametro reikšmes. Tokie matavimai arba toks tyrimas yra vadinamas empiriniu tyrimu;
 - b. Taikytas interpoliavimas kompiuteriu metodas;
 - c. Taikytas funkcijų ekstremumų nustatymo analitiniu būdu metodas;
 - d. Su kompiuteriu spręstos netiesinės algebrinės lygtys, taikant Matlab programų pakete esančią programą fzero;
 - e. Atliktas ekstremumų nustatymo KdV lygties sprendiniams formalizavimas;
 - f. Taikytas analitinis kreivės asimptočių nustatymo matematinis metodas;
 - g. Taikyti matematiniai veiksmai su kompleksiniais skaičiais, būtent: Eulerio formulė, ir kt.;
 - h. Smulkiai aprašyta kardioidės lygtis;
 - i. Taikyti informatikos metodai: programavimas Matlab ir Maple terpėje;
 - j. Parašytos programos Maple ir Matlab terpėse. Jos pritaikytos šio tyrimo tikslams įgyvendinti.
2. Tyrinėjamos lygtys, vadinamos Kortevego de Vryso lygtimis ir esančios diferencialinės lygties dalinėmis išvestinėmis, vadinamos Kortevego de Vryso (KdV) lygtimi (2.1), sprendiniais;
3. Sprendiniai pagrinde nagrinėjami su kompleksiniais kintamaisiais bei parametrais;
4. Nagrinėti septyni KdV lygties sprendiniai.
5. Atliktas KdV lygties (2.1) sprendinio (2.5) grafiko kitimo priklausomybės nuo ω_1 , ω_2 , γ tyrimas, esant šiems parametrams kompleksiniams skaičiams;
 - 5.1 Nustatyta, kad funkcija esant tam tikroms parametru reikšmėms yra veidrodžiškai simetriška;
 - 5.2 Nustatyta, kad funkcija turi singularinį tašką su koordinatėmis $A(\omega_1, 0)$.
6. Nubraižytos KdV lygties sprendinių kreivių šeimos stačiakampėse koordinatėse. Nustatyti ekstremumai nagrinėjamuose intervaluose. Pastebėta, kad esant tam tikram parametru reikšmių deriniui sprendiniuose, visos kreivės kerta ordinačių ašį taške, kurio reikšmė lygi parametro s reikšmei. Taip pat nustatyta, kad prie tam tikrų parametru reikšmių derinių

kreivių minimumo padėtis priklauso nuo ω_1 ir stačiakampėje koordinačių sistemoje lygi ω_1 ir kreivių maksimumo padėtis priklauso nuo ω_2 ir sutampa su ω_2 reikšme. Formalizuota ekstremumų nustatymo procedūra nagrinėjama atvejui.

7. Atliktas Euklidinio atstumo skaičiavimas kompleksinio skaičiaus γ trigonometrinėje formoje. Trimatėje erdvėje pavaizduoti funkcijų kitimo grafikai, kai argumentas yra realus ir kompleksinis skaičius.
8. Atliktas KdV lygties sprendinių tyrimas. Jo rezultatai gali būti naudojami praktikoje tiriant KdV lygtimi aproksimuojamus fizikinę prasmę turinčius reiškinius.

LITERATŪRA

1. Z. Navickas, L. Bikulciene, M. Rahula, M. Ragulskis. Algebraic operator method for the construction of solitary solutions to nonlinear differential equations. Elsevier: 2012.
2. http://lt.wikipedia.org/wiki/Kortevogo%20%80%93de_Vryso_lygtis
3. http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%9A%D0%BE%D1%80%D1%82%D0%B5%D0%B2%D0%B5%D0%B3%D0%B0_%E2%80%94%D0%B4%D0%B5_%D0%A4%D1%80%D0%B8%D0%B7%D0%B0
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Korteweg%20%80%93de_Vries_equation
5. Ebaid A. Exact solitary wave solutions for some nonlinear evolution equations via Exp-function method. Phys Lett A 2007:365:213-9.
6. Fan E.G. Extended tanh function method and its application to nonlinear equations. Phys Lett A 2000: 277:2012-8
7. Fokas E. S., Lenells J. Explicit soliton asymptotic for the Korteweg de Vries equation on the half time. Nonlinearity 2010:23:937-76.
8. Gardner C. S., Green J.M. , Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving Korteweg de Vries equations. Phys Rev Lett 1967:19:1095-7.
9. He J. H., Wu X. H. Exp function method for nonlinear wave equations. Chaos Solitons Fract. 2006:30:700-8.
10. Hirota R. Exact solution of Korteweg de Vries equation for multiple collisions of solitons. Phys Rev Lett. 1971:27:1192-4.
11. Kudryashov N. A. On new travelling wave solutions of the KdV and the KdV-Burgers equation. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 2009:14:1881-900.
12. Kudryashov N. A., Loguinova N. B. Be careful with with Exp-function method. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 2009:14:1881-90.
13. Kudryashov N. A. Seven common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations. Commun Nonlinear Sci Numer Simul 2009:14:3507-29.
14. <http://lt.wikipedia.org/wiki/Asimptot%C4%97>

PRIEDAI

PRIEDAS 1

MAPLE PROGRAMOS

Kortevego de Vryso lygčių grafikų braižymo programos programų pakete Maple.

```

> restart;
> with(plots);
> # Pirmoji Kortevego de Vryso lygtis
c:=15;
> d:=cosh(sqrt(c)*x/2);
> f:=d*d;
> g:=(c)/(2*f);
> plot(g, x=-5..5);
> # Antroji Kortevego de Vryso lygtis
> k:=20;
> l:=cosh(k*x);
> m:=l*l;
> n:=(2*k*k)/(m);
> plot(n, x=-0.5..0.5);
> # Trecioji Kortevego de Vryso lygtis
> c1=15;
> p:=sech(sqrt(c1)*x/2);
> r:=p*p;
> s:=c1*r/2;
> plot(s, x=-10..10);
*****

> # Programa braizo funkciju kitimo grafikus pagal Kortevego de Vryso lygtis tada, kai parametrai ir # #
kintamieji yra realus ir kompleksiniai skaciai Dekarto ir kompleksiniu skaicium plokstumose
restart;
with(plots);
> Solut5:=proc(c)
local d, f, g;
global x;
d:=cosh(sqrt(c)*x/2);
f:=d*d;

```



```

(c)/(2*f);
end proc;
f:=Solut5(1.5);
plot(Solut5(2.5), x=-5..5);
complexplot(Solut5(-10+3*I), x=-10..20); # Braizo grafikus realiu ir kompleksiniu skaiciu #####
plokstumoje. x-asyje - realieji skaiciai, o y-asyje - kompleksiniai skaiciai
> Solut6:=proc(k)
local l, m;
l:=cosh(k*x);
m:=l*I;
(2*k*k)/(m);
end proc;
g:=Solut6(8);
plot(Solut6(8), x=-1..1);
> complexplot(Solut6(8-3*I), x=-10..20);
plotcompare(f, g, x=-10-3*I..-10+4*I, colors=[aquamarine, sienna]); # Braizo ir palygina dviejų ###
funkciju grafikus realiu skaiciu ir kompleksiniu skaiciu plokstumose.
> Solut7:=proc(c)
local p, r;
p:=sech(sqrt(c)*x/2);
r:=p*p;
c*r/2;
end proc;
s:=Solut7(15);
plot(Solut7(15), x=-5..5);
complexplot(Solut7(1.3+5*I), x=-10..20);
plotcompare(f, s, x=-10-3*I..-10+3*I, colors=[black, yellow]);
plotcompare(s, g, x=-10-8*I..-10+8*I, colors=[tan, plum]);
# Programos pabaiga;
*****
> restart;
# Programa braizo funkciju kitimo grafikus pagal Kortevego de Vryso lygtis tada, kai parametrai # ir #
kintamieji yra realus ir kompleksiniai skaiciai Dekarto ir kompleksiniu skaiciu plokstumose
> with(plots);
> Solut1:=proc(s,gamma,w1,w2,c)
# Pirmoji Kortevego de Vryso lygtis*****
local y1, w;

```

```

y1:=x1->w1+12*(w1-w2)*(s-w1)*exp(gamma*sqrt(w1-w2)*(x-c))/
      ((sqrt(3*(w1-w2))+sqrt(2*s-3*w2+w1))+
      (sqrt(3*(w1-w2))-sqrt(2*s-3*w2+w1))*exp(gamma*sqrt(w1-w2)*(x-c)))^2;
y1(x1)
end proc;
a:=Solut1(0.5,1.3+5*I,0.1,3,6);
> plot(Solut1(0.5,1,0.3,0.1,3), x=1..20, discontinuous=true, numpoints=3000);
complexplot(Solut1(0.5,1.3+5*I,0.1,3,6), x=-10..20, color=blue, numpoints=3000); # Funkcijos kitimo #
grafikas spausdinamas kompleksiniu skaičiu plokštumoje, horizontalioje, abscisiu arba x asyje
# atdedama realioji kompleksinio # skaičiaus dedamoji, o vertikalioje, ordinacių arba y asyje atidedama
menamoji kompleksinio # # # # skaičiaus dedamoji
> Solut2:=proc(s,gamma,w1,w2,c)
# Antroji Kortevego de Vryso lygtis*****
> 1+12*(w1-w2)*(s-w1)*exp(gamma*sqrt(w1-w2)*(x-c))/
      ((sqrt(3*(w1-w2))-sqrt(2*s-3*w2+w1))+
      (sqrt(3*(w1-w2))+sqrt(2*s-3*w2+w1))*exp(gamma*sqrt(w1-w2)*(x-c)))^2;
> end proc;
b:=Solut2(5+3*I,10,2,0.5,6);
> plot(Solut2(5,10,2,0.5,6), x=1..20, discontinuous=true, numpoints=3000);
complexplot(Solut2(5,10+5*I,0.1,3,6), x=-10..20, color=tan, numpoints=3000);
plotcompare(a, b, x=-10-3*I..-10+4*I, colors=[coral, magenta]); # "plotcompare" palygina dviejų
# funkcijų kitimo grafikus ir # kiekvienai
funkcijai nubraizo po # atskira realios ir kompleksines dedamųjų grafikus
> Solut3:=proc(s,gamma,w1,w2,c)
> #Trecioji Kortevego de Vryso
lygtis*****
> w2+12*(w2-w1)*(s-w2)*exp(gamma*sqrt(w2-w1)*(x-c))/
      ((sqrt(3*(w2-w1))+sqrt(2*s-3*w1+w2))+
      (sqrt(3*(w2-w1))-sqrt(2*s-3*w1+w2))*exp(gamma*sqrt(w2-w1)*(x-c)))^2;
> end proc;
cc:=Solut3(3,0.4,1.8,0.5,0.9);
> plot(Solut3(3,0.4,1.8,0.5,0.9), x=1..20, discontinuous=true, numpoints=3000);
complexplot(Solut3(3+4*I,0.4,1.8,0.5,0.9), x=-100..100, color=black, numpoints=3000);
> Solut4:=proc(s,gamma,w1,w2,c);
> # Ketvirtoji Kortevego de Vryso lygtis*****
> w2+12*(w2-w1)*(s-w2)*exp(gamma*sqrt(w2-w1)*(x-c))/
      ((sqrt(3*(w2-w1))-sqrt(2*s-3*w1+w2))+

```

```

                (sqrt(3*(w2-w1))+sqrt(2*s-3*w1+w2))*exp(gamma*sqrt(w2-w1)*(x-c)))^2;
> end proc;
d:=Solut4(5,0.4,1.8,0.5,0.9);
plot(Solut4(5,0.4,1.8,0.5,0.9), x=1..20, discontinuous);
*****
restart;
# Programa braizo funkciju kitimo grafikus pagal Kortevego de Vryso lygtis tada, kai parametrai ir # # #
kintamieji yra realus ir kompleksiniai skaičiai Dekarto ir kompleksiniu skaičiu plokstumose
with(plots);
Solut1:=proc(s,gamma,w1,w2,c)
# Pirmoji Kortevego de Vryso lygtis*****
local y1, w;
y1:=x1->w1+12*(w1-w2)*(s-w1)*exp(gamma*sqrt(w1-w2)*(x-c))/
                ((sqrt(3*(w1-w2))+sqrt(2*s-3*w2+w1))+
                (sqrt(3*(w1-w2))-sqrt(2*s-3*w2+w1))*exp(gamma*sqrt(w1-w2)*(x-c)))^2;
y1(x1)
end proc;
proc(s, gamma, w1, w2, c) ... end;
a:=Solut1(0.5,1.3+5*I,0.1,3,6)
0.1 - (13.92 exp((-8.514693185 + 2.213820228 I) (x - 6)))/
((5.760270106 I + 0.138882376 I exp((-8.514693185 + 2.213820228 I) (x - 6)))^2 )
eval(a)
0.1 - (13.92 exp((-8.514693185 + 2.213820228 I) (x - 6)))/((5.760270106 I+ 0.138882376 I exp((-
8.514693185 + 2.213820228 I) (x - 6)))^2 )
plot(Solut1(0.5,1,3,1,15), x=12..20, discontinuous, numpoints=3000);
complexplot(Solut1(0.5,1.3+5*I,0.1,3,6), x=-10..20, color=blue, numpoints=3000); # Funkcijos kitimo #
grafikas spausdinamas
# kompleksiniu skaičiu plokstumoje, horizontalioje, abscisiu arba x asyje atdedama realioji # # # # #
kompleksinio skaičiaus dedamoji, o vertikalioje, ordinaciū arba y asyje atidedama menamoji # # # # #
kompleksinio skaičiaus dedamoji
Solut2:=proc(s,gamma,w1,w2,c)
# Antroji Kortevego de Vryso lygtis*****
1+12*(w1-w2)*(s-w1)*exp(gamma*sqrt(w1-w2)*(x-c))/
                ((sqrt(3*(w1-w2))-sqrt(2*s-3*w2+w1))+
                (sqrt(3*(w1-w2))+sqrt(2*s-3*w2+w1))*exp(gamma*sqrt(w1-w2)*(x-c)))^2;
end proc;
proc(s, gamma, w1, w2, c)

```

```

end;
b:=Solut2(5+3*I,10,2,0.5,6);
  1 + ((54.0 + 54.0 I) exp(12.24744871 x - 73.48469226))/((( -1.239735043 - 0.8925767817 I)
  + (5.482375731 + 0.8925767817 I) exp(12.24744871 x - 73.48469226))^2)
plot(Solut2(0.5,10,2,0.5,6), x=4...8, discontinuous=true, numpoints=3000);
complexplot(Solut2(5,10+5*I,0.1,3,6), x=-10..20, color=tan, numpoints=3000);
plotcompare(a, b, x=-10-3*I..-10+4*I, colors=[coral, magenta]); # "plotcompare" palygina dvieju
                        funkciju kitimo grafikus ir                        kiekvienai funkcijai                        #
nubraizo po atskira realios                        # ir kompleksines dedamuju
grafikus
Solut3:=proc(s,gamma,w1,w2,c)
# Trecioji Kortevego de Vryso lygtis*****
w2+12*(w2-w1)*(s-w2)*exp(gamma*sqrt(w2-w1)*(x-c))/
  ((sqrt(3*(w2-w1))+sqrt(2*s-3*w1+w2))+
  (sqrt(3*(w2-w1))-sqrt(2*s-3*w1+w2))*exp(gamma*sqrt(w2-w1)*(x-c)))^2;
end proc;
proc(s, gamma, w1, w2, c) ... end;
cc:=Solut3(3,4,1.8,0.5,0.9);
0.5 - (39.00 exp(4.560701700 I (x - 0.9)))/(((1.048808848+ 1.974841766 I)+ (-1.048808848 + 1.974841766
I) exp(4.560701700 I (x - 0.9)))^ 2)
plot(Solut3(3,0.4,1.8,0.5,1), x=19..20, discontinuous=true);
complexplot(Solut3(5+4*I,0.4,1.8,0.5,0.9), x=-100..100, color=black, numpoints=3000);
Solut4:=proc(s,gamma,w1,w2,c);
# Ketvirtoji Kortevego de Vryso # # # # # *****
# lygtis*****
w2+12*(w2-w1)*(s-w2)*exp(gamma*sqrt(w2-w1)*(x-c))/
  ((sqrt(3*(w2-w1))-sqrt(2*s-3*w1+w2))+
  (sqrt(3*(w2-w1))+sqrt(2*s-3*w1+w2))*exp(gamma*sqrt(w2-w1)*(x-c)))^2;
end proc;
proc(s, gamma, w1, w2, c)
end;
d:=Solut4(5,0.4,1.8,0.5,0.9);
0.5 - (70.20 exp(0.4560701700 I (x - 0.9)))/((( -2.258317958+ 1.974841766 I)+ (2.258317958 + 1.974841766
I) exp(0.4560701700 I (x - 0.9)))^ 2)
plot(Solut4(5,0.4,1.8,0.5,0.9), x=11.5..11.7);
complexplot(Solut4(5+10*I,1.3+5*I,0.1,3,6), x=-10..20, color=gold, numpoints=3000);
plotcompare(cc, d, x=-10-I..-10+I,colors=[orange, navy]);

```

```

plot([Solut1(0.5,1,3,1,15),Solut2(0.5,10,2,0.5,6)], x=1..20);
plot([Solut3(3,0.4,1.8,0.5,1),Solut4(5,0.4,1.8,0.5,0.9)], x=5..20);
# Palyginamieji grafikai:
plotcompare(a, cc, x=-10-I..-10+I,colors=[aquamarine, black]);
plotcompare(a, d, x=-10-I..-10+I,colors=[blue, coral]);
plotcompare(b, cc, x=-10-I..-10+I,colors=[navy, cyan]);
plotcompare(b, d, x=-10-I..-10+I,colors=[brown, green]);
plotcompare(a, d, x=-10-I..-10+I,colors=[maroon, orange]);
# Programos pabaiga
*****
restart;
> with(plots);

> Solut4:=proc(s,gamma,w1,w2,c);
> # Ketvirtoji Kortevego de Vryso lygtis*****
> w2+12*(w2-w1)*(s-w2)*exp(gamma*sqrt(w2-w1)*(x-c))/
      ((sqrt(3*(w2-w1))-sqrt(2*s-3*w1+w2))+
      (sqrt(3*(w2-w1))+sqrt(2*s-3*w1+w2))*exp(gamma*sqrt(w2-w1)*(x-c)))^2;
> end proc;

> d:=Solut4(5,0.4,1.8,0.5,0.9);

> plot(Solut4(-1,1,1,5,0), x=-1..1, discontin=true);

> # Antroji Kortevego de Vryso lygtis is Vikipedijos (sestoji paeiliui):
> k:=-3;
> l:=cosh(k*x);
> m:=1*1;
> n:=(2*k*k)/(m);
> plot(n, x=-0.01..0.01, color=cyan);
*****

```

PRIEDAS 2

MATLAB PROGRAMOS

```

grafik.m
clc
close all

w1=0.7
w2=0.1
s=0.5
% gamma=0.2
c=0

x=0:.1:30

gamma=0.2
y=w1+(12.*(w1-w2).*(s-w1).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))./((sqrt(3.*(w1-w2))+sqrt(2*s-3.*w2+w1)))+(sqrt(3.*(w1-w2))-sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))).^2)

gamma=0.4
y1=w1+(12.*(w1-w2).*(s-w1).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))./((sqrt(3.*(w1-w2))+sqrt(2*s-3.*w2+w1)))+(sqrt(3.*(w1-w2))-sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))).^2)

gamma=0.6
y2=w1+(12.*(w1-w2).*(s-w1).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))./((sqrt(3.*(w1-w2))+sqrt(2*s-3.*w2+w1)))+(sqrt(3.*(w1-w2))-sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))).^2)

gamma=0.8
y3=w1+(12.*(w1-w2).*(s-w1).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))./((sqrt(3.*(w1-w2))+sqrt(2*s-3.*w2+w1)))+(sqrt(3.*(w1-w2))-sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))).^2)

plot(x,y,'r',x,y1,'b',x,y2,'c',x,y3,'m')
xlabel('x')
ylabel('y11')
title('Funkcijos y11=f(s,gamma,w1,w2,c) kitimo grafikas')
hleg=legend('gamma=0.2','gamma=0.4','gamma=0.6','gamma=0.8')
interpl(y,x,0)

```

```

zenklkit.m
clc
close all

gamma=0.2
w1=0.6
w2=0.1
s=0.05
c=0

% x=0.8401-0.01 % Kai funkcija keicia zenkla is - i + gaunamas minimumas.
% Kai funkcija keicia zenka is + i - gaunamas maksimumas.
% Kai funkcija zenklo nekeicia, negauname nei maksimumo, nei minimumo

% 1) s=0.5; gamma=0.2:0.2:0.8; w1=0.1; w2=0.7; c=0.
% x=4.2626-0.01 % gamma=0.8; saknys x1=2.8160; x2=4.2626. Kai x=x2, esktremumas: -0.1964
% x=2.8160+0.01
% x=6.1340%+0.01 % gamma=0.6; saknys: x1=6.1340; x2=3.7547. Kai x=x1, esktremumas: -0.1985
% x=3.7547+0.01
% x=5.6318+0.01 % gamma=0.4; saknys: x1=5.6318; x2=8.5252. Kai x=x2, esktremumas: -0.1964
% x=8.5252+0.01

```

```
% x=11.2634-0.01 % gamma=0.2; saknys: x1=11.2634; x2=19.8192. Kai x=x2,esktremumas: -0.1798
% x=19.8192+0.01
```

```
% 2) s=0.05; gamma=0.2:0.2:0.8; w1=0.3; w2=0.1; c=0.
% x=1.1028%+0.01 % gamma=0.8; ekstremumas: 0.0161
% x=1.1028%+0.01 % gamma=0.6; ekstremumas: 0.0232
% x=1.3188%+0.01 % gamma=0.4; ekstremumas: 0.0280
% x=1.4422%-0.01 % gamma=0.4; ekstremumas: 0.0374
% 3) s=0.6; gamma=[0.2; 0.4; 0.6; 0.8], w1=0.7, w2=0.5
% x=3.3672%-0.01 % gamma=0.8; ekstremumas: 0.4738
% x=3.6823%+0.01 % gamma=0.6; ekstremumas: 0.4985
% x=4.0268%+0.1 % gamma=0.4; ekstremumas: 0.5292
% x=4.4036%+0.01 % gamma=0.2; ekstremumas: 0.5640
```

```
% 4) gamma=[0.8; 0.6; 0.4; 0.2], w1=0.6, w2=0.1, s=0.05, c=0
% x=1.8918 % gamma=0.8; saknys x1=1.8918; x2=0.3191. Kai x=x1, % esktremumas: -0.1490
% x=0.3191
% x=0.4254 % gamma=0.6; saknys x1=1.7071; x2=0.4254. Kai x=x1, % esktremumas: -0.1180
% x=1.7071
% x=0.6380 % gamma=0.4; saknys x1=3.7837; x2=0.6380. Kai x=x1, % esktremumas: -0.1490
% x=3.7837
% x=1.2757 % gamma=0.2; saknys x1=10.0186; x2=1.2757. Kai x=x1, % esktremumas: -0.1490
x=10.0186
```

```
f=((12.*(w1-w2).^(3./2).*(s-w1).*gamma.*exp(gamma.*sqrt(w1-w2)).*(x-c))/(sqrt(3.*w1-3.*w2)+sqrt(2.*s-
3.*w2+w1)+(sqrt(3.*w1-3.*w2)-...
sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2)).*(x-c)).^2)-(24.*(w1-w2).^(3/2).*(s-w1).*(exp(gamma.*sqrt(w1-
w2)).*(x-c)).^2.*...
(sqrt(3.*w1-3.*w2)-sqrt(2.*s-3.*w2+w1).*gamma))/((sqrt(3.*w1-3.*w2)+sqrt((2.*s-3.*w2+w1)+(sqrt(3.*w1-
3.*w2)-...
sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2)).*(x-c))).^3)
```

```
fekstr=w1+12.*(w1-w2).*(s-w1).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2)).*(x-c))./...
((sqrt(3.*(w1-w2))+sqrt(2.*s-3.*w2+w1))+...
(sqrt(3.*(w1-w2))-sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2)).*(x-c)).^2
```

grafik22lent.m

```
Clc
close all
% *****
% gamma=0.2
w1=0.6
w2=0.1
s=0.05
c=0
% *****

x=-20:.1:70
gamma=0.2
y=w1+(12.*(w1-w2).*(s-w1).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2)).*(x-c))./((sqrt(3.*(w1-w2))+sqrt(2*s-
3.*w2+w1)+(sqrt(3.*(w1-w2))-sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2)).*(x-c)).^2);
```

```

mnm=min(y) % nustatoma minimali y reiksme is visu reiksmiu
mnm1=abs(min(y)) % nustatomas minimalios y reiksmes absoliutinis didumas
mxm=max(y) % nustatoma maksimali y reiksme is visu reiksmiu
mxm1=abs(max(y)) % nustatomas maksimalios y reiksmes absoliutinis didumas

gamma=0.4
y1=w1+(12.*(w1-w2).*(s-w1).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))./((sqrt(3.*(w1-w2))+sqrt(2*s-
3.*w2+w1))+sqrt(3.*(w1-w2))-sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))).^2);

gamma=0.6
y2=w1+(12.*(w1-w2).*(s-w1).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))./((sqrt(3.*(w1-w2))+sqrt(2*s-
3.*w2+w1))+sqrt(3.*(w1-w2))-sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))).^2);

gamma=0.8
y3=w1+(12.*(w1-w2).*(s-w1).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))./((sqrt(3.*(w1-w2))+sqrt(2*s-
3.*w2+w1))+sqrt(3.*(w1-w2))-sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2).*(x-c))).^2);

plot(x,y,'r',x,y1,'b',x,y2,'c',x,y3,'m')%x,y,'r', ,
% plot(x,y)
xlabel('x')
ylabel('y11')
title('Funkcijos y11=f(s,gamma,w1,w2,c) kitimo grafikas')
hleg=legend('gamma=0.2','gamma=0.4','gamma=0.6','gamma=0.8')

% axis([-20,70,0,0.8]) % Keiciamas asiui mastelis
interp1(y,x,0) % Interpoliuojama tam, kad nustatyti x reiksme, kai funkcijos grafikas kerta x asi (yii=0).

```

tiesalg.m

```

function [f]=tiesalg(x)

% *****
gamma=0.8
w1=0.6
w2=0.1
s=0.05
c=0
% *****
% Funkcija f
% f=w1+12*(w1-w2)*(s-w1)*exp(gamma*sqrt(w1-w2)*(x-c))/...
% ((sqrt(3*(w1-w2))+sqrt(2*s-3*w2+w1))+...
% (sqrt(3*(w1-w2))-sqrt(2*s-3*w2+w1))*exp(gamma*sqrt(w1-w2)*(x-c)))^2;

% Jos isvestine pagal kintamaji x (df/dx):
f=((12.*(w1-w2).^(3/2).*(s-w1).*gamma.*exp(gamma.*sqrt(w1-w2)).*(x-c))./(sqrt(3.*w1-3.*w2)+sqrt(2.*s-
3.*w2+w1))+sqrt(3.*w1-3.*w2)-...
sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2)).*(x-c))^2-(24.*(w1-w2)^(3/2).*(s-w1).*(exp(gamma.*sqrt(w1-
w2)).*(x-c))^2.*...
(sqrt(3.*w1-3.*w2)-sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*gamma)/((sqrt(3.*w1-3.*w2)+sqrt((2.*s-3.*w2+w1))+sqrt(3.*w1-
3.*w2)-...
sqrt(2.*s-3.*w2+w1)).*exp(gamma.*sqrt(w1-w2)).*(x-c))).^3)

f=abs(ff) % Idvestines modulis

```

tieslygt.m

```

Clc
clear all

```



```

a=fzero('tiesalg',28) % Paprograme netiesinems algebrinems lygtims spresti

ccc=abs(a)
pause           % pause - sustabdo skaiciavimus ir tesia tik po "enter" paspaudimo

b=fminbnd('tiesalg',-10,20) % Paprograme, randanti funkcijos minimuma uzduotame intervale

cc=abs(b)

```

Spirale.m

```

clc
close all
clear all

x=18:.1:22

plot3(exp((-1.*x)).*cos(3.*x), exp((-1.*x)).*sin(3.*x), x)
title('Spirale')
xlabel('exp((-1.*x)).*cos(3.*x)')
ylabel('exp((-1.*x)).*sin(3.*x)')
zlabel('x')
grid on

```

```

clc
close all
clear all

x=-10:.001:10

% u=(exp(-1.*x)).*cos(3.*x)
% v=(exp(-1.*x)).*sin(3.*x)

% u=(exp(1.*x)).*cos(2.*x)
% v=(exp(1.*x)).*sin(2.*x)

% u=(exp(1.*x)).*cos(1.*x)
% v=(exp(1.*x)).*sin(1.*x)

% u=(exp(1.*x)).*cos(0.3.*x)
% v=(exp(1.*x)).*sin(0.3.*x)

u=(exp(1.*x)).*cos(0.001.*x)
v=(exp(1.*x)).*sin(0.001.*x)

figure(1)
plot(u,v)

xlabel('u')
ylabel('v')
title('u(x), v(x)')

figure(2)
plot(x,u,'r',x,v,'b')

gamma=sqrt(u.^2+v.^2)

```

```

figure(3)
plot(x,gamma)
xlabel('x')
ylabel('gamma')
title('Kompleksinio skaičiaus gamma modulis')

```

```

clc
close all
clear all

x=-18:1:22

figure(1)

% (plot3((exp((-1.*x)).*cos(3.*x)), exp((-1.*x)).*sin(3.*x), x))
% (plot3((exp((1.*x)).*cos(2.*x)), exp((1.*x)).*sin(2.*x), x))
% (plot3((exp((1.*x)).*cos(x)), exp((1.*x)).*sin(x), x))
% (plot3((exp((1.*x)).*cos(0.3.*x)), exp((1.*x)).*sin(0.3.*x), x))
(plot3((exp((1.*x)).*cos(0.001.*x)), exp((1.*x)).*sin(0.001.*x), x))

title('Spiralė')
xlabel('exp((1.*x)).*cos(0.001.*x)')
ylabel('exp((1.*x)).*sin(0.001.*x)')
zlabel('x')
grid on

figure(2)
u=exp((1.*x)).*cos(2.*x)
plot(x,u)
xlabel('x')
ylabel('u')
title('u=exp((-1.*x)).*cos(3.*x)')
grid on

figure(3)
v=exp((1.*x)).*sin(2.*x)
plot(x,u)
xlabel('x')
ylabel('v')
title('v=exp((-1.*x)).*sin(3.*x)')
grid on

```