



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

Lina Morkevičiūtė

MATEMATINIAI BIOLOGINIŲ NEURONŲ
MODELIAI

Magistro darbas

Vadovas
asist. E. Šakytė

KAUNAS, 2013



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. habil.dr. V.Pekarskas
2012 06 07

MATEMATINIAI BIOLOGINIŲ NEURONŲ
MODELIAI

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
asist. E. Šakytė
2013 06 07

Recenzentas
dr. R. Kregždytė
2010 06 03

Atliko
FMMM 1 gr. stud.
L. Morkevičiūtė
2012 06 07

KAUNAS, 2013

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Rimantas Rudzkis, profesorius (VU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Jonas Valantinas, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., direktoriaus pavaduotojas (UAB „Danet Baltic“)

SANTRAUKA

Morkevičiūtė L. Mathematical models of biological neurons: Master's work in applied mathematics / supervisor assist. Edita Šakytė; Department of Mathematical Research in Systems, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2013. – 46 p.

One of the most active areas in modern network theory is the study of relations between topological network characteristics and synchronization dynamics of these networks. It was shown that synchronization of neurons may depend on a network they are embedded

To study the role played by different topologies in the synchronization, four of them were considered: all-to-all, random, small-world, scale-free. The neural networks of different topologies, consisting of one hundred identical neurons with dendritic dynamics were analysed in this work. Three different types of stimulations were applied to those networks, and their effects on robustness to noise, collective firing behaviour and calming rate were investigated.

The results of the study showed that each neural network, after being stimulated, can display three different states: quiet, oscillating and mixed, when some of neurons fire and some of them are calm. Also, it was learned that the most robust topology was scale-free, while the fastest calming rate was found in the random network. It is worth mentioning that with some particular parameters random and small-world neural networks can evolve into quiet regime under continued stimulation.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS.....	6
PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS.....	7
ĮVADAS.....	8
1. TEORINĖ DALIS.....	10
1.1. ANALITINĖ DALIS.....	10
1.1.1. NEURONINĖS SISTEMOS ELEMENTAI.....	10
1.1.2. NEURONO DINAMIKA.....	10
1.1.3. NEURONO MODELIAI.....	11
1.1.4. MATEMATINIŲ TINKLŲ TEORIJS REIKŠMĖ NEURONŲ TINKLUOSE	14
1.2. METODAI.....	16
1.2.1. DENDRITINIS NEURONO MODELIS	16
1.2.2. ERDŐS – RĒNYI TINKLAS	18
1.2.3. WATTS IR STROGATZ TINKLAS	21
1.2.4. BARABASI - ALBERT TINKLAS.....	23
2. TIRIAMOJI DALIS	26
2.1. TYRIMO DUOMENYS.....	26
2.2. TYRIMO REZULTATAI.....	26
2.2.1. PILNASIS TINKLAS	26
2.2.2. ERDŐS – RĒNYI TINKLAS	29
2.2.3. WATTS IR STROGATZ TINKLAS	31
2.2.4. BARABASI - ALBERT TINKLAS.....	33
2.3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI.....	36
DISKUSIJOS	37
IŠVADOS.....	39
LITERATŪRA.....	40
PRIEDAS A. PROGRAMINIS KODAS.....	42

LENTELIŲ SĄRAŠAS

2.1 Lentelė. Skirtingų topologijų tinklų modelių parametrai	26
---	----

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1.1 pav. Bendrą sistemos ritmą nusakančio parametro geometrinė interpretacija	14
1.2 pav. Biologinio neurono modelis	16
1.3 pav. Bifurkacijos diagrama	17
2.1 pav. Neuronų tinklo vidutinio fazinio greičio kitimas jį nuolat veikiant silpna stimuliacija	27
2.2 pav. Neuronų tinklo vidutinio fazinio greičio kitimas jį nuolat veikiant vidutine stimuliacija	27
2.3 pav. Neuronų tinklo vidutinio fazinio greičio kitimas jį nuolat veikiant stipria stimuliacija.....	27
2.4 pav. Neuronų fazinių greičių kitimas, kai pradinės fazės yra atsitiktinės	28
2.5 pav. Triukšmo poveikis neuronų tinklui, kai $Istim = 6\pi$	28
2.6 pav. Neuronų tinklo „šaudymo“ dažnis laikui bėgant.....	28
2.7 pav. Neuronų fazinių greičių kitimas, kai $p = 0.9$	29
2.8 pav. Neuronų fazinių greičių kitimas, kai $p = 0.4$	29
2.9 pav. Neuronų fazinių greičių kitimas, kai $p = 0.1$	29
2.10 pav. Nutilusių neuronų skaičiaus priklausomybė nuo tinklo parametro p	30
2.11 pav. Tinklų vidutiniai faziniai greičiai, kai triukšmo parametras $D = 0$	30
2.12 pav. Tinklų vidutiniai faziniai greičiai, kai triukšmo parametras D atitinkamai lygus 0.2 ir 0.5	30
2.13 pav. Neuronų tinklo „šaudymo“ dažnis, kai $p = 0.1$ ir $p = 0.4$	31
2.14 pav. Tinklų vidutiniai faziniai greičiai, kai neuronų skaičius K tinklo konstravimo pradžioje atitinkamai lygus 10 ir 40.	31
2.15 pav. Tinklo neuronų faziniai greičiai, kai briaunos perjungimo tikimybė $p = 0.9$	32
2.16 pav. Tinklų vidutinių fazinių greičių kitimas	32
2.17 pav. Tinklų vidutiniai faziniai greičiai, kai triukšmo parametras D atitinkamai lygus 0.2 ir 0.5	32
2.18 pav. Neuronų tinklo „šaudymo“ dažnis, kai p kinta nuo 0.1 ir 1.....	33
2.19 pav. Tinklų vidutiniai faziniai greičiai, kai parametras m_0 kinta nuo 22 iki 90	33
2.20 pav. Tinklo vidutinis fazinis greitis ir atskirų neuronų faziniai greičiai, kai $m_0 = 52$, $k = 20$	34
2.21 pav. Tinklo vidutinis fazinis greitis, kai triukšmo parametras D atitinkamai lygus 0.2 ir 0.5.....	34
2.22 pav. Neuronų tinklo „šaudymo“ dažnis.....	35

IVADAS

Žmogaus smegenys yra pati sudėtingiausia žinoma sistema. Ji susideda iš 100 milijardų neuronų, kurie tarpusavyje sąveikauja gana sudėtingais principais. Neuronai yra netiesiniai elementai. Didžioji dalis jų sugeba išsiųsti dideles atskirų šuolių virtines, kuriomis keičiamasi informacija. Dabar yra manoma, kad koreliacija tarp šuolių vaidina svarbų vaidmenį smegenų veikloje. Pavyzdžiui, sinchronizacija yra pagrindinis mechanizmas leidžiantis suprasti, kaip smegenys sprendžia bendrinimo uždavinį: citrina gali būti charakterizuota pagal jos formą, kvapą, spalvą ir t. t. Nors visi šie aspektai yra apdorojami skirtingose smegenų dalyse, suvokiama, kad citrina yra objektas. Kita vertus, sinchronizacija tarp kelių didelių neuronų grupių gali būti žalinga. Pavyzdžiui, epilepsijos traukuliai, Parkinsono ligos drebulys yra šio mechanizmo pasekmės [9].

Biologinių neuronų dinamikos konstravimo pradžia davė „integracijos ir sužadavimo“ modelis. Šiuo metu geriausiai biologinio neurono veikimą aprašo A. L. Hodgkin ir A. Huxley darbai [6]. Tyrinėjant du, tris ir daugiau neuronų, jų dinamikos dėsnius stengiamasi supaprastinti, kadangi domina elementų sąveikos rezultatai, o ne kiekvieno sistemos elemento duomenys. Literatūroje dažniausiai aprašomi du pagrindiniai neuronų jungimo į neuronų tinklą būdai. Vienas iš jų – sinusinio jungimo modelis, priklausantis nuo dviejų neuronų santykinų fazių [8]. Modelio teorija yra pagrįsta fazės osciliatoriais, t. y. fizikinėmis sistemomis, kurių dinamika gali būti aprašoma tik viena charakteristika, faze [5].

Biologinių neuronų tinklų analizei populiariau naudoti matematinių tinklų teoriją. Ji geriausiai iš visų matematinių sistemų geba aprašyti, įvertinti ir modeliuoti didelių sistemų, sudarytų iš susijungusių elementų, savybes. Vienas iš svarbiausių neurologijos mokslo atradimų buvo tai, kad neuronų tinklas, smegenys, pasižymi telkimusi tam tikruose taškuose su stipria tarpusavio integracija [18]. Toks neuronų susijungimo modelis yra vienas iš „Mažojo pasaulio“ modelio charakteristikų ir buvo pademonstruotas žmonių smegenyse [2]. Pavyzdžiui, buvo nustatyta, kad, tiriamuose sveikuose subjektuose, aukštesnis IQ yra koreliuotas su trumpu kelio ilgiu, t. y. su kelio atkarpų skaičiumi tarp dviejų bet kurių smegenų sričių [18]. Reikia paminėti, kad neuronų tinklas, veikiamas genetikos ir kitų faktorių, gali atitikti nuo atsitiktinio iki reguliaraus matematinį tinklų modelį.

Šio darbo tikslas – pritaikyti matematinį dendritinį neurono modelį skirtingų topologijų neurotinklams ir atlikti tinklo savybių tyrimą. Tyrimo būdas nagrinės visų neuronų pastovios stimuliacijos pasekmes bendram tinklui.

Šio darbo pradžioje pristatomi neuroninės sistemos elementai, biologinių neuronų dinamikos modeliavimo principai bei matematinių tinklų teorijos reikšmė neuronų tinklams. Metodų poskyryje pateikiamas tyrime naudojamas neurono dinamikos modelis bei atsitiktinių tinklų konstravimo būdai. Kadangi neuronų sinchronizaciją lemia tinklo struktūra, todėl bus analizuojamos keturios skirtingos topologijos: pilnasis, Erdős–Rényi, Watts – Strogatz ir Barabasi – Albert tinklai. Antroje dalyje pateikiami įvykdytų dinamikos tyrimų įvairiose topologijose rezultatai, pateikiamos priklausomybės nuo tinklų parametrų. Lyginant gautus rezultatus, formuojamos išvados apie neuroninių tinklų charakteristikas.

1. TEORINĖ DALIS

Šioje dalyje pateikiama su magistro baigiamojo darbo tikslais susijusios literatūros ir tiriamos problemos sprendimui taikomų matematinių metodų analizė.

1.1. ANALITINĖ DALIS

Iš tikrųjų, pats savaimė neuronas yra sudėtinga sistema, kurios mikroskopiniame lygmenyje vyksta įvairūs cheminiai ir elektrocheminiai procesai. Todėl, norint modeliuoti biologinį neuroną ar neuronų tinklus, reikia pasirinkti tam tikrą tyrimo lygmenį – pasirinkti, kokios neurono savybės bus nagrinėjamos, kokie procesai bus analizuojami.

1.1.1. NEURONINĖS SISTEMOS ELEMENTAI

Neuronas gali būti padalintas į tris, funkciniu pobūdžiu atskiras dalis: dendritus, kūną (somą) ir aksoną. Dendritas perduoda impulsą į neuroną, aksonas - iš neurono, o kūnas atlieka apdorojimą: jeigu į neuroną atėjusių signalų visuma viršija tam tikrą slenkstinį dydį, neuronas sužadinas - sugeneruojamas išėjimo signalas.

Sinapsė – tai jungtis tarp dviejų neuronų, pritaikyta signalams perduoti. Dažniausios sinapsės būna tarp vieno neurono aksono ir kito neurono dendrito, bet yra ir kitokių sinapsių. Pagal veikimo principą neuronų sinapsės yra dvejopos – cheminės sinapsės ir elektrinės sinapsės. Cheminėse sinapsėse nervinis signalas perduodamas chemiškai, difunduojančiomis neuromediatoriaus molekulėmis, o elektrinėse sinapsėse – elektriškai.

1.1.2. NEURONO DINAMIKA

Neurono sužadinimas gali būti įvairus, pavyzdžiui, sugeneruojami periodiniai šuoliai įėjimo signalui padidėjus vienetiniu dydžiu, sugeneruojamas tik vienas šuolis ar sugeneruojamų šuolių dažniai laikui bėgant mažėja. Neuronų sužadinimo būdų yra gana daug, tačiau ne kiekvienas biologinį neuroną vaizduojantis modelis geba visus aprašyti [19]. Šiame darbe bus nagrinėjami modeliai, kuriuose sužadintas neuronas sugeneruoja vienas šuolį.

Neuroniniai signalai susideda iš trumpų elektrinių impulsų, vadinamų veiksmo potencialais arba šuoliais, kurių amplitudė siekia 100 mV, o trukmė – 1 - 2 ms. Impulso pobūdis nesikeičia veiksmo potencialui keliaujant aksonu. Vieno neurono skleidžiama šuolių grandinė vadinama šuolių seka – įvykių, kurie įvyksta reguliariais ar nereguliariais laiko intervalais, eilė. Kadangi konkretaus neurono šuoliai

atrodo taip pat, veiksmo potencialo forma neperduoda jokios informacijos. Šuolių skaičius ir laikas yra svarbios charakteristikos. Veiksmo potencialas yra signalo perdavimo matavimo vienetas [8].

Veiksmo potencialai šuolių sekoje dažniausiai yra gerai atskiriami. Net ir su ypatingai stipriu jėjimu signalu, neįmanoma sužadinti antro šuolio per arba iš karto po pirmojo šuolio. Minimalus atstumas tarp dviejų šuolių apibrėžia neurono visiško atsparumo periodą, po kurio neuronas atsiduria santykinio atsparumo etape, kai yra labai sunku, bet įmanoma sužadinti veiksmo potencialą [19].

Neurono impulso poveikis kitam neuronui gali būti išmatuotas naudojantis mikroelektrodu, kuris matuoja potencialų skirtumą tarp ląstelės vidaus ir jos aplinkos. Šis potencialų skirtumas vadinamas membranos potencialu. Jeigu neuronas negavo signalo, tai jo membranos potencialas turės tam tikrą pastovią reikšmę. Atėjus signalui, potencialas pasikeičia, tačiau ilgainiui grįžta į pradinę reikšmę – ramybės potencialą. Jeigu pokytis yra teigiamas, sinapsė vadinama sužadinančiąja, priešingu atveju – slopinančiąja [8,10].

Depoliarizacija vadinamas ląstelės membranos potencialo mažėjimas. Ląstelės ramybės būsenoje registruojamas membranos potencialas apibūdinamas kaip ramybės potencialas. Procesas, kuomet jis tampa labiau teigiamu ir yra vadinamas depoliarizacija. Fizikiniu požiūriu ją sukelia jonų judėjimas per membraną į ląstelės vidų. Pasiekus maksimumą, vadinamąjį reversijos lygį, prasideda atvirkščias procesas - repoliarizacija, kurio metu jonai juda per membraną į ląstelės išorę. Šio proceso metu ramybės potencialas paprastai yra „prašokamas“ ir membranos potencialas tampa labiau neigiamu negu buvo ramybės būsenoje [8, 19].

1.1.3. NEURONO MODELIAI

Biologinis neurono modelis yra matematinis nervinių ląstelių arba neuronų aprašymas, konstruojamas taip, kad būtų galima tiksliai apibūdinti ir prognozuoti biologinius procesus.

- **INTEGRACIJOS IR SUŽADINIMO MODELIS**

„Integracijos ir sužadinimo modelis buvo pirmasis bandymas aprašyti neuroną naudojant jo membranos potencialą. Jį sukonstravo prancūzas Louis Lapicque [1], kuris, remdamasis eksperimentais su varlių nervų stimuliacija, pasiūlė, kad neurono veikimas pagrįstas tokia išraiška [13]:

$$I(t) = C_m \frac{dV_m}{dt}, \quad (1.1)$$

čia C_m – membranos „talpa“, o V_m – membranos įtampa.

Lapicque modeliavo neuroną naudodamasis elektros grandine, susidedančia iš lygiagrečiai sujungtų kondensatoriaus ir rezistoriaus. Jie atitinka ląstelės membranos talpą ir atsparumą nutekėjimo galimybei. Žinoma, tokia paprasta grandinė negali generuoti veiksmo potencialo, tačiau Lapicque teigė, kad, kai membranos kondensatorius įkraunamas iki tam tikros ribos, sugeneruojamas veiksmo potencialas (impulsas) ir kondensatorius išsikrauna atstatydamas membranos įtampą į pradinę reikšmę [1].

Šis modelis buvo naudojamas įvairių sričių tyrimuose pradedant neuronų sinapsių tyrimu ir nebaigiant tinklų, sudarytų iš šimtų tūkstančių neuronų, simuliacija. Jis pasirodė itin naudingas aiškinantis didelių neurotinklų savybes ir didelio skaičiaus sinapsinių jungčių įtaką tokiuose tinkluose. Nors savo metu L. Lapicque neturėjo kitų galimybių sumodeliuoti tikresnį neurono atitikmenį, šiandien jis vis dar naudojamas siekiant išvengti įtampos trajektorijos skaičiavimų veiksmo potencialo (impulso) generavimo metu [1,8].

Buvo pastebėta, kad šis modelis pasižymi vienu trūkumu: jeigu į neuroną ateina signalas, kurio potencialas nesiekia tam tikro slenksčio, tai neuronas įtampos padidėjimą išlaikys tol, kol sugeneruos impulsą. Šis trūkumas buvo ištaisytas „Nesandariame integracijos ir sužadavimo“ modelyje [8].

„Nesandaraus integracijos ir sužadavimo“ modelis irgi veikia kaip elektros grandinė, sudaryta iš lygiagrečiai sujungtų kondensatoriaus C ir rezistoriaus R , kuria teka srovė $I(t)$. Šią srovę galima išskaidyti į dvi komponentes: $I(t) = IR + IC$. Pirmoji komponentė - srovė IR , tekanti pro tiesinį rezistorių R . Ji suskaičiuojama naudojant omo dėsnį grandinės daliai. Antroji komponentė IC įkrauna kondensatorių C . Tada modelis aprašomas tokia matematine lygtimi [8]:

$$I(t) - \frac{V_m(t)}{R_m} = C_m \frac{dV_m(t)}{dt}, \quad (1.2.)$$

čia R_m – membranos varža. Vadinasi, norint, kad ląstelė iššautų, įėjimo srovei reikia pasiekti tam tikrą ribą, kitu atveju bet koks potencialo pasikeitimas „nutekės“.

Tarkime, kad neuronų tinklas pagrįstas „Nesandaraus integracijos ir sužadavimo“ modeliu. Tada kiekvienas neuronas turi skirtingą slenkstį, potencialo ribą, kuri turi būti pasiekama, kad neuronas iššautų. Kai ląstelė pasiekia slenkstį ir sugeneruoja impulsą, jis yra perduodamas kitam neuronui, kuris gali iššauti arba ne. Jeigu neuronas nesugeneruoja veiksmo potencialo, jo potencialas padidinamas, kad, jeigu bus gautas naujas signalas, bus didesnė tikimybė šuolio generavimui. Tačiau potencialo padidėjimas ilgai nesitęsia, pradeda mažėti iš karto po signalo gavimo. Jeigu neuronas sugeneruoja šuolį, jis yra perduodamas kitam neuronui, o iššovusi ląstelė pereina į tokią būseną, kai kurį laiką ji nereaguoja į ateinančius signalus [8].

• KURAMOTO MODELIS

Tradiciniai neuronų modeliai, tokie kaip integracijos ir sužadavimo, nagrinėja tiksliai ląstelių membranos potencialo reikšmes ir jas vertina atsižvelgdami į neuronų veiksmo potencialus. Kita vertus, modeliai, kurie pagrįsti Kuramoto specifikacija, nagrinėja neurono sužadavimo laiką ir dažnį lyginant su kitais sistemos neuronais. Pagrindinis Kuramoto modelio tikslas – paaiškinti, kaip susidaro sinchronizacija iš nesinchronizuotų osciliatorių, kaip sistema nusistovi tam tikroje būsenoje [14].

Tarkime, kad turima sistema iš N sujungtų osciliatorių. Tada kiekvieno osciliatoriaus fazės pokytį galima aprašyti tokiu būdu [5]:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), i = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

čia ω_i – i -tojo osciliatoriaus savasis dažnis, K – jungimosi konstanta, nusakanti, kaip stipriai osciliatoriai yra surišti vieni su kitais, $\theta_j - \theta_i$ – skirtumas tarp i -tojo ir j -tojo osciliatorių fazių. Pabrėžiama, kad visi osciliatoriai yra identiški savo savybėmis, išskyrus jų savąjį dažnį.

Y. Kuramoto atrado, kad egzistuoja tam tikra jungimosi konstantos kritinė reikšmė K_c , tokia, kad, jeigu $K < K_c$ osciliatorių sistemai neįmanoma pasiekti sinchronizacijos būsenos. Tačiau, kai $K \gg K_c$, vis daugiau osciliatorių sinchronizuojasi su tam tikru, pusiausvyrą pasiekusiu klasteriu. K_c reikšmė priklauso nuo osciliatorių savųjų dažnių pasiskirstymo [5,14]:

$$K_c = \frac{2}{\pi g(\omega)} \quad (1.4)$$

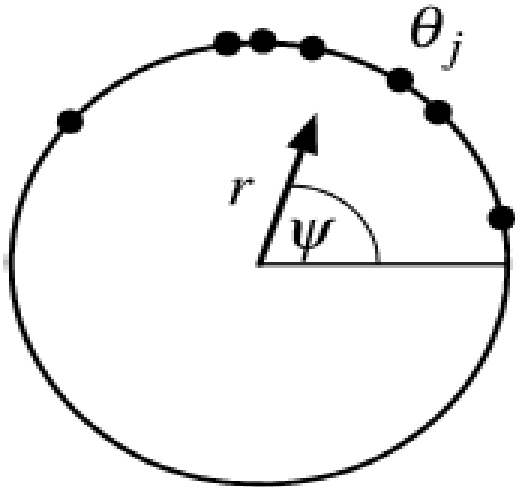
čia $g(\omega)$ – tikimybinis tankis.

Bendrą sistemos ritmą nusako toks parametras [14]:

$$r \exp(i\psi) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp(i\theta_k), \quad (1.5)$$

čia ψ – vidutinė osciliatorių sistemos fazė, r – kompleksinio skaičiaus modulis, nusakantis sistemos sinchronizaciją.

Fazių dinamiką galima įsivaizduoti kaip taškų spiečių (1.1 pav.), judančių aplink vienetinį apskritimą kompleksinėje plokštumoje [5, 14]. Pavyzdžiui, jeigu taškai juda viename būryje, tai $r \approx 1$, jeigu jie išsidėstę po visą apskritimą - $r \approx 0$.



1.1 pav. Bendrą sistemos ritmą nusakančio parametro geometrinę interpretaciją

Kuramoto modelis turi panašumų lyginant jį su procesais, vykstančiais smegenyse. Pavyzdžiui, modelis aprašo, kad kiekvienas osciliatorius turi savąjį dažnį ω_i . Tai atitinka neurono savąjį „šaudymo“ įvertį. Šis modelis taip pat nusako, kiek kiekvienas osciliatorius veikia savo kaimyną (konstanta K). Tai galima susieti su neurono impulso sužadimu/slopinimu, kuriam įtaką daro ateinantys signalai iš kaimyninių neuronų dendritų [14].

Tačiau aprašytas modelis turi ir savo trūkumų: neurono impulsas sugeneruojamas tik tada, kai yra viršijamas tam tikras slenkstis, kuris laikui bėgant gali keistis, tada, tokiu būdu, keičiasi ir neurono „šaudymo“ įvertis [5]. Pastebėtina, kad neuronų ryšių stiprumas su kaimyniniais neuronais gali skirtis įvairiais laiko tarpais, kadangi jis priklauso nuo neuromediatorių srauto kitimo. Kuramoto modelis priima, kad kiekvienas osciliatorius yra susijungęs su kiekvienu kitu sistemos osciliatoriumi. Realybėje, neuronai gali būti susijungę vienas su kitu įvairiais būdais [13].

Labiau realybę atitinkantis modelis – apibendrintas Kuramoto modelis. Jame buvo bandoma ištaisyti aukščiau paminėtus trūkumus. Pavyzdžiui, modelyje naudojami savieji dažniai yra priklausomi nuo laiko – $\omega_i(t)$, galimybė neuronams susijungti įvairiais būdais įgyvendinama jungimosi matrica $K_{i,j}(t)$, kurios elementai, jungimosi stiprumai tarp i -tojo ir j -tojo neuronų, priklauso nuo laiko t . Tada apibendrintas Kuramoto modelis atrodo taip [5]:

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_{i,j}(t) \sin(\theta_j - \theta_i), i = 1, \dots, N, \quad (1.6)$$

Iš šio modelio nesunkiai galima gauti pradinį Kuramoto modelį.

1.1.4. MATEMATINIŲ TINKLŲ TEORIJS REIKŠMĖ NEURONŲ TINKLUOSE

Matematiškai, tinklas yra grafas - aibių pora $G = (V, E)$, kur V – netuščia viršūnių aibė, o E – briaunų aibė. Jeigu grafas yra abstraktus matematinis objektas, tai tinklas yra realaus pasaulio sistema, turinti konkrečias struktūrines savybes. Pasitelkiant tinklinio tipo struktūras galima aprašyti įvairios svarbos technologines, socialines ar biologines sistemas.

Neuronų tinklų, smegenų, topologiją galima taip pat galima aprašyti naudojant matematinius tinklus. Nors kiekvienas neuronų tinklas gali turėti unikalią topologinę struktūrą, tačiau egzistuoja tam tikros tinklų grupės ar klasės, kurios gali būti naudojamos klasifikavimui ir lyginimui. Skirstymas į klases yra pagrįstas tinklo viršūnių pasiskirstymu ir klasterizacija.

Šiuo metu empiriniai rezultatai rodo, kad vienas patraukliausių matematinių tinklų modelių neuronų topologijai modeliuoti yra „Mažieji pasauliai“ - tinklai, sudaryti iš daug viršūnių, pasižymintys pakankamai trumpais atstumais tarp bet kurių dviejų mazgų ir aukštu klasterizacijos laipsniu [2]. D. J. Watts ir S. Strogatz pirmieji pasiūlė tokių tinklų modelį [17]. Teoriniai pagrindimai atrodo taip:

- Didžioji dalis realiojo pasaulio tinklų demonstruoja „Mažojo pasaulio“ savybes, todėl būtų mažų mažiausiai keista, jog tokia sudėtinga tinklinė struktūra, galinti įgyti be galo daug skirtingų ir unikalių topologijų, neturėtų „Mažojo pasaulio“ savybių [2].
- Smegenys, tokios, kokios jos dabar yra, išsivystė taip, kad informacijos perdavimas būtų kiek įmanoma efektyvesnis minimizuojant jos apdorojimo kaštus. „Mažojo pasaulio“ topologija atspindi šią tendenciją [2].

Realiojo pasaulio tinklų tyrimų rezultatai parodė, kad dauguma didelių tinklų yra be mastelio, t. y. jų viršūnių laipsnių pasiskirstymas yra laipsninė funkcija. „Mažojo pasaulio“ modeliai nepasižymi šia savybe. Tokiu būdu į tinklų raidos teoriją buvo įvestas naujas, tinklo „be mastelio“, modelis, kuris savo savybėmis yra artimas realiems tinklams. Jo konstravimo algoritmą tiksliausiai apibūdino Albert -László Barabási ir Réka Albert [11, 12].

Tinklo „be mastelio“ modelis buvo bandomas pritaikyti neuronų tinklams. Nors viršūnių laipsnių pasiskirstymo nepavyko patikrinti, tačiau atsparumas imituojamiems pažeidimams buvo būdingas tinklui „be mastelio“. Taip pat, buvo nustatyta, jog smegenų žievės tinkluose egzistuoja mazgai, turintys labai didelį viršūnės laipsnį. Tokie mazgai kitų tinklų modeliuose tiesiog negali susiformuoti [20].

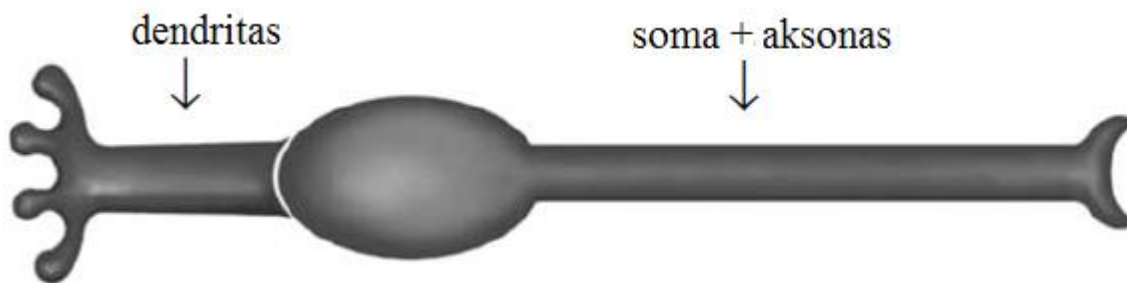
Jeigu priimama, jog „Mažojo pasaulio“ tinklai atitinka sveikas smegenis, tai esant smegenų veiklos sutrikimui, tinklas iš „Mažojo pasaulio“ gali regresuoti į labiau atsitiktinį. Alzheimerio liga, smegenų navikai ir šizofrenija yra tik keletas pavyzdžių, kuriuose tokios tendencijos buvo pastebėtos. Be to, atsiranda konkrečių ligų scenarijai, pavyzdžiui, sergant Alzheimeriu centriniai mazgai yra paveikiami labiau negu kiti. Epilepsijos atveju neuronų tinklas turi neįprastą tendenciją susisinchronizuoti. Smegenų topologija gali kisti esant genetinėms priežastims ar atsiradus smegenų pažeidimams, pavyzdžiui, augliams, kraujavimui [2].

1.2.METODAI

Šioje dalyje aprašomi tiriamojame dalyje naudojami matematiniai metodai.

1.2.1. DENDRITINIS NEURONO MODELIS

Šis modelis yra kelių pagrindinių neuronų ir jų tyrimų rezultatų hibridas. Fazės osciliatoriais galima aprašyti periodiškai aktyvių neuronų sistemas. Tačiau dendritų dinamikos poveikis neuronų populiacijai nebuvo tirtas.



1.2 pav. Biologinio neurono modelis

Minimas neurono modelis susideda iš vieno dendrito ir vieno aksono (1.2 pav.) [7]. Dendrito dinamiką aprašo tokia lygtis [7, 15]:

$$\dot{\psi}_i(t) = \alpha f(\phi_j(t)) - \gamma \psi_i + \beta \xi(t), \quad (1.7.)$$

čia ψ_i žymi dendritinę srovę. Pirmasis dešinės pusės narys apibūdina sinapsinį signalą, atėjusį iš j -tojo neurono, ir kurį veikia dydis α – sinapsinė jėga (stiprumas). Dendrito atsakas į atėjusį signalą nyksta dydžiu γ – signalo slopimas yra būdingas pačiam dendritui, o β – triukšmo intensyvumas. $\xi(t)$ – baltasis triukšmas, kurio vidurkis 0, standartinis nuokrypis 1 ir jis statistiškai nepriklausomas dydis kiekvienam neuronui.

Aksono fazės dinamiką aprašo tokia lygtis [7, 15]:

$$\dot{\phi}_i(t) = c\psi_i(t) + \omega_i, \quad (1.8.)$$

čia srovė ψ_i , atėjusi iš dendrito, didinama tam tikra konstanta c , o ω_i – pastovi varomoji jėga. Varomoji jėga priverčia neuroną periodiškai generuoti dažnio ω_i elektrinį impulsą.

Sistema, apjungianti (1.7) ir (1.8) lygtis, atrodo taip:

$$\ddot{\phi}_i(t) = Af(\phi_j(t)) - \gamma(\omega_i - \dot{\phi}_i(t)) + c\beta\xi(t), \quad (1.9.)$$

čia $A = c\alpha$. Kintamasis $\phi_i(t)$ žymi dendritines sroves.

Pažyminėjus, kad $m = 1/\gamma$, $\sqrt{2D} = c\beta/\gamma$ ir įvedus neuronų jungimąsi bei stimuliaciją, gaunama tokia išraiška [7, 15]:

$$m\ddot{\phi}_j(t) = \omega_j - \dot{\phi}_j + W_j + S(\phi_j) + \sqrt{2D} \xi(t) \quad (1.10.)$$

kur m – osciliatoriaus inercija, $\omega_j - j$ – tojo neurono savasis dažnis (dažnis, kai jo neveikia stimuliacija bei nėra neuronų jungimosi į vieną sistemą).. W_j – periodinė funkcija, apibūdinanti neuronų jungimąsi į vientisą sistemą [7, 15]:

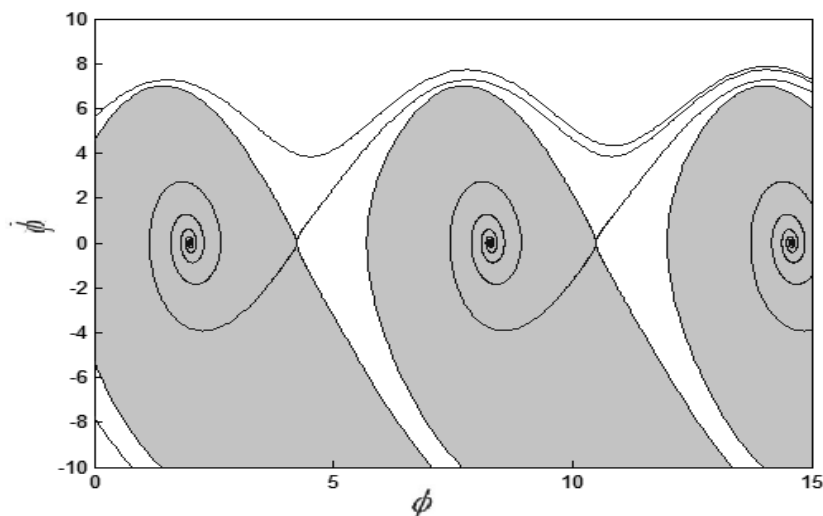
$$W_j = \frac{K}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\phi_k - \phi_j), \quad (1.11.)$$

čia K – jungimosi stiprumo konstanta, N – neuronų skaičius tinkle. Funkcija $S(\phi_j)$ apibūdina neurono stimuliaciją, kuri veikia visus elementus taip pat visame tinkle. Iš tikrųjų, tai gali būti bet kokia periodinė funkcija, parinkta priklausomai nuo nagrinėjamo neurono dinamikos [7, 15]. Šiuo atveju naudojama tokia išraiška: $S(\phi_j) = I_{stim} \cos(\phi_j)$, I_{stim} – intensyvumo konstanta. Atsitiktinių jėgų poveikis modeliuojamas naudojant amplitudės D baltąjį triukšmą $\xi(t)$.

Vieno neurono dinamiką galima aprašyti, kai nėra modeliuojamas atsitiktinių jėgų poveikis, tokiu būdu [7]:

$$m\ddot{\phi} = \omega - \dot{\phi} + I_{stim} \cos(\phi) \quad (1.12.)$$

kur m – neurono inercija, ω – savasis dažnis. Laikoma, kad $m = 1$ ir $\omega = 2\pi$.



1.3 pav. Bifurkacijos diagrama

Pasirodo, veikiant neuroną silpna srove $I_{stim} < \omega$, jis virpa – sistema yra ribiniame cikle. Kai $I_{stim} > \omega$, sistemoje atsiranda dviejų tipų fiksuoti taškai: stabilus židinytis ir nestabilus balno taškas. Sistemos stabilumo dvilypumas, ribinis ciklas ir stabilus židinytis, atitinka neurono dvi būsenas, t. y. neuronas gali įeiti į dvi būsenas: virpėjimo ir rimties. 1.3 paveiksle pilki plotai žymi atraktoriaus (stabilaus židinio) pritraukimo zonas.

Neuroninio tinklo dinamikos tyrimui bus naudojamas vidutinis fazinis greitis, sinchronizacijos matas bei šaudymo dažnis.

Tinklo vidutinis fazinis greitis atrodo taip [7, 15]:

$$\bar{v}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{\phi}_k(t), \quad (1.13.)$$

čia N – neuronų skaičius tinkle, o $\dot{\phi}_k$ – k -tojo neurono fazinis greitis. Vidutinis tinklo fazinis įvertina vidutinį neuronų šaudymo dažnį.

Nuo laiko priklausančios sinchronizacijos mastą nusako dydis [7, 15]:

$$Z(t) = R(t) \exp[i\psi(t)] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp[i\varphi_k(t)], \quad (1.14.)$$

čia $Z(t)$ – kompleksinis skaičius, kurio modulis $R(t)$ – sinchronizacijos matas: esant visiškai sinchronizacijai $R(t) = 1$, o tinklui išsinchronizavus - $R(t) = 0$. $\psi(t)$ žymi vidutinę viso tinklo fazę.

Dar vienas tinklo dinamiką apibūdinantis dydis – šaudymo dažnis, atspindintis bendrą tinklo „šaudymą“. Taria, kad neuronas sužadinas, kai jo fazė „išnyksta“. Tada šaudymo tankį galima aprašyti tokiu būdu [7,15]:

$$p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma(\phi_k), \sigma(\phi_k) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \cos(2\pi\phi_k) > 0.975 \\ 0, & \text{kitu atveju} \end{cases} \quad (1.15.)$$

N – neuronų skaičius tinkle, o ϕ_k – k -tojo neurono fazė.

1.2.2. ERDŐS – RÉNYI TINKLAS

Erdős–Rényi tinklo modelį aprašė du vengrų matematikai, kurie tyrinėdami telekomunikacijos tinklus pasiūlė, kad tokios sistemos gali būti modeliuojamos sujungiant grafo viršūnes su atsitiktinai parenkamomis briaunomis.

Matematinėje literatūroje atsitiktinio grafo konstravimas vadinamas evoliucija: pradėdamas nuo N izoliuotųjų viršūnių grafas sėkmingai vystosi pridėdam atsitiktines briaunas. Grafas, gautus skirtinguose šio proceso etapuose, atitinka didesnės briaunos prisijungimo tikimybės p , galiausiai gaunamas pilnai sujungtas grafas, kai $p \rightarrow 1$. Svarbiausias atsitiktinių grafų teorijos uždavinys yra nustatyti ties kokia briaunos prisijungimo tikimybė p labiausiai tikėtina, kad grafas pradės pasižymėti tam tikra savybe. Erdős ir Rényi tyrinėdami atsitiktinių grafų savybes, naudojo apibrėžimu, kad beveik kiekvienas grafas turi savybę Q , jeigu tikimybė ją turėti artėja prie 1, kai $N \rightarrow \infty$. Didžiausias jų atradimas buvo tai, kad dauguma svarbiausių grafo savybių atsiranda „staiga“, t. y. esant tam tikrai tikimybei p arba beveik kiekvienas grafas turi savybę Q , arba beveik visi grafai neturi jos – savybės perėjimas nuo „labai mažai tikėtinos“ prie „labai tikėtinos“ statuso įvyksta labai greitai. Daugeliui savybių egzistuoja tam tikra kritinė tikimybė $p_c(N)$ ir ji dažniausiai nėra nepriklausoma nuo grafo viršūnių skaičiaus. Tačiau buvo pastebėta, kad vidutinis viršūnių laipsnis, grafo savybė, kuri naudojama kitos savybės analizuoti, vis dėlto turi kritinę reikšmę, kuri nepriklauso nuo sistemos dydžio [4, 11].

$$\langle k \rangle = p(N - 1) \simeq pN \quad (1.16.)$$

Viena pirmųjų nagrinėtų Erdős – Rényi modelio savybių buvo pografių atsiradimas. Patys paprasčiausi pografių pavyzdžiai galėtų būti medžiai, ciklai ir pilnieji grafai. Tarkime, kad grafas pradėdamas nuo N izoliuotų viršūnių, kiekviena viršūnių pora sujungiama su tikimybe p . Esant mažai prisijungimo tikimybei, dauguma viršūnių yra izoliuotos, tačiau didėjant p , o kartu su ja ir briaunų skaičiui, briaunos gali susijungti bendra viršūne, šitaip suformuodamos kurį nors pografį [4].

Grafo komponentė, kuri pagal apibrėžimą yra jungus izoliuotasis pografis, tinklų teorijoje dar vadinama klasteriu. Erdős ir Rényi parodė, kad klasterio struktūra ženkliai pasikeičia vidutiniam viršūnių laipsniui $\langle k \rangle$ artėjant prie 1 – įvyksta „būsenos virsmas“. Kai $0 < \langle k \rangle < 1$, beveik visi klasteriai yra arba medžiai, arba klasteriuose egzistuoja lygiai vienas ciklas. Kai $\langle k \rangle$ įgyja reikšmę 1, grafo struktūra stipriai pasikeičia. Esant $\langle k \rangle < 1$ didžiausias klasteris yra medis, kai $\langle k \rangle = 1$ jis apytiksliai turi $N^{\frac{2}{3}}$ viršūnių, esant $\langle k \rangle > 1$, didžiausias klasteris turi $[1 - f(\langle k \rangle)]N$ viršūnių, kur $f(x)$ – eksponentiškai mažėjanti nuo $f(1) = 1$ iki 0, kai $x \rightarrow \infty$, funkcija, Todėl baigtinė dalis $S = 1 - f(\langle k \rangle)$ viršūnių priklauso didžiausiam klasteriui. Išskyrus šią didžiąją komponentę, visi kiti klasteriai yra pakankamai maži ir dažniausiai yra medžiai [4].

Viena iš atsitiktinio grafo išsisklaidymą charakterizuojančių savybių yra vidutinis atstumas tarp bet kurių viršūnių porų arba tiesiog vidutinis kelio ilgis [4]:

$$l_{rand} = \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle} \quad (1.17.)$$

Ši išraiška suteikė galimybę lyginti realių tinklų ir atsitiktinių grafų vidutinius kelio ilgius. Iš atliktų bandymų paaiškėjo, kad teoriniai spėjimai su keliomis išimtimis pasitvirtino: realiojo pasaulio tinklai išsisklaido pagal tokią pačią tendenciją [11].

Buvo pastebėta, kad realiojo pasaulio tinklai pasižymi stipria klasterizacija. Atsitiktiniame tinkle nagrinėjama tam tikra viršūnė ir jos artimiausios „kaimynės“: tada tikimybė, kad dvi iš šių viršūnių yra susijungusios, lygi tikimybei, kad bet kurios dvi viršūnės yra susijungusios. Todėl atsitiktinio grafo klasterizacijos koeficientas yra lygus [4, 11]:

$$C_{rand} = p = \frac{\langle k \rangle}{N} \quad (1.18.)$$

Tačiau buvo įrodyta, kad realiojo pasaulio tinklų klasterizacijos koeficientas neatitinka Erdős – Rényi modelio išraiškos - jis, palyginus su ER modeliu, yra ganėtinai aukštas [4, 11].

Erdős ir Rényi buvo pirmieji kurie analizavo viršūnių laipsnių pasiskirstymus. Atsitiktiniame grafe su briaunų prisijungimo tikimybe p i – tosios viršūnės laipsnis k_i pasiskirstęs pagal binominį dėsnį su parametrais $N - 1$ ir p [4].

$$P(k_i = k) = C_{N-1}^k p^k (1-p)^{N-1-k} \quad (1.19.)$$

(1.19.) parodo tikimybę nubrėžti k briaunų iš tam tikros viršūnės i : tikimybė, kad bus suformuotos k briaunos lygi p^k , tikimybė, kad nebus papildomų briaunų $(1-p)^{N-1-k}$ ir yra C_{N-1}^k būdų parinkti šioms briaunos galus. Dar daugiau, jeigu i ir j yra skirtingos viršūnės, tai $P(k_i = k)$ ir $P(k_j = k)$ yra beveik nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Norint surasti grafo viršūnių laipsnių pasiskirstymą reikia analizuoti viršūnių su k laipsniu skaičių X_k . Reikia nustatyti tikimybę su kuria X_k įgyja duotą reikšmę, $P(X_k = r)$. Tikėtinas viršūnių su laipsniu k skaičius yra [4]:

$$E(X_k) = NP(k_i = k) = \lambda_k, \quad (1.20.)$$

kur

$$\lambda_k = NC_{N-1}^k p^k (1-p)^{N-1-k}. \quad (1.21.)$$

Galiausiai buvo gauta, kad X_k reikšmių pasiskirstymas, $P(X_k = r)$, yra artimas Puasono skirstiniui [4]:

$$P(X_k = r) = e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^r}{r!} \quad (1.22.)$$

(1.22.) formulė nurodo, kad X_k daug nenukrypsta nuo apytikslio rezultato $X_k = NP(k_i = k)$, jeigu viršūnės yra nepriklausomos. Todėl gerai aproksimuotas grafo viršūnių laipsnių pasiskirstymas yra binominis [4]:

$$P(k) = C_{N-1}^k p^k (1-p)^{N-1-k}, \quad (1.23.)$$

Kuris, kai $N \rightarrow \infty$, gali būti pakeistas Puasono skirstiniu:

$$P(k) = e^{-pN} \frac{(pN)^k}{k!} = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}. \quad (1.24.)$$

1.2.3. WATTS IR STROGATZ TINKLAS

Realiojo pasaulio tinklai pasižymi „Mažojo pasaulio“ savybe kaip ir atsitiktiniai tinklai, tačiau turi neįprastai aukštą klasterizacijos koeficientą, kuris dar ir nepriklauso nuo tinklo dydžio. Pirmasis sėkmingas bandymas sukonstruoti grafa su aukštu klasterizacijos koeficientu ir mažu vidutiniu kelio ilgiu pavyko Watts ir Strogatz.

Watts ir Strogatz (1998 m.) pasiūlė vieno parametro tinklo modelį, kuris balansuoja tarp baigtinės dimensijos tinklelio ir atsitiktinio grafo. Šis modelis pradedamas konstruoti nuo žiedo tinklelio su N viršūnių, kuriame kiekviena viršūnė yra sujungta su K artimiausių ($K/2$ kiekvienoje pusėje) „kaimynių“. Tada modelis užbaigiamas dalį grafo briaunų perjungiant prie kitų viršūnių tokiu būdu, kad nebūtų kilpų ir pasikartojančių briaunų. Perjungimas atliekamas taip: pasirenkama viršūnė ir briauna, jungianti ją su artimiausia pagal laikrodžio rodyklę „kaimyne“, tada su tikimybe p briauna prijungiama prie kitos vienodai atsitiktinai parinktos viršūnės. Jeigu parinkta viršūnė turi briauną, perjungimas nevykdomas. Šis veiksmas kartojamas su kiekviena grafo viršūne judant pagal laikrodžio rodyklę. Apėjus visą ratą, pasirenkama briauna, jungianti viršūnę su jos antra artimiausia „kaimyne“ ir procesas pradedamas iš pradžių. Kaip ir prieš tai, kiekviena iš briaunų atsitiktinai perjungiamas su tikimybe p . Procesas tęsiamas: kiekvieną kartą apėjus žiedą parenkama briauna, jungianti tolimesnę gretimą viršūnę. Kadangi visame grafe yra $NK/2$ briaunų, „Mažojo pasaulio“ modelio formavimas, baigiamas po $K/2$ ratų [17].

Perjungimo procesas leidžia „Mažojo pasaulio“ modeliui balansuoti tarp reguliariojo grafo ir tarp panašaus į atsitiktinį grafo. Kai $p = 0$ gaunamas reguliarus tinklelis, t. y. perjungimo procesas nevykdomas. Esant $p = 1$ visos briaunos yra perjungiamos į naujas viršūnes, tokiu būdu gaunant modelį su atsitiktiniams grafams būdingu kelio ilgiu ir labai mažu klasterizacijos koeficientu [17].

Watts – Strogatz pasiūlytame modelyje buvo pastebėtas charakteristinio kelio l ilgio kitimas. Esant mažam p , l kinta tiesiškai kartu su sistemos dydžiu, o esant didesnei tikimybei kitimas vyksta

logaritmiškai. Toks stiprus ilgio l kitimas įvyksta dėl briaunų perjungimo: kiekviena naujai perjungta briauna yra linkusi sujungti ganėtinai nutolusias viena nuo kitos grafo dalis. Net ir mažiausia perjungtų briaunų dalis drastiškai sumažina vidutinio kelio ilgį, nors pats tinklas išlieka ganėtinai tvarkingas [4, 11].

Dabar yra pripažinta, kad vidutinis kelio ilgis paklūsta tokiai formai [4, 11]:

$$l(N, p) \sim \frac{N^{\frac{1}{d}}}{K} f(pKN), \quad (1.25.)$$

kur d – pirminio tinklelio dimensija, o $f(u)$ yra universali dydžio funkcija [4, 11]:

$$f(u) = \begin{cases} \text{const}, & \text{jeigu } u \ll 1 \\ \frac{\ln(u)}{u}, & \text{jeigu } u \gg 1 \end{cases} \quad (1.26.)$$

Newman, Moore ir Watts (2000 m.) suskaičiavo tikslesnę universaliosios funkcijos formą [4, 11]:

$$f(u) = \frac{4}{\sqrt{u^2 + 4u}} \tanh^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + 4u}} \right). \quad (1.27.)$$

Kita pagrindinė „Mažojo pasaulio“ modelio savybė yra aukštas klasterizacijos koeficientas. Esant reguliariam tinkleliui ($p = 0$) klasterizacijos koeficientas nepriklauso nuo tinklelio dydžio, tik nuo jo topologijos. Kai briaunos yra perjungiamos, jis išlieka artimas pradinio tinklelio koeficientui net ir prie sąlyginai didelių p reikšmių [17].

Klasterizacijos koeficiento $C(p)$ priklausomybę nuo parametro p galima išvesti pasinaudojus šiek jo tiesioginiu apibrėžimu. Pagal jį, $C'(p)$ – santykis tarp vidutinio skaičiaus briaunų, esančių tarp viršūnės „kaimynių“, ir vidutinio visų įmanomų briaunų, esančių tarp šių „kaimynių“, skaičiaus [4, 11]., t. y.

$$C' = \frac{3 \times \text{trikampių skaičius}}{\text{susijungusių tripletų skaičius}}. \quad (1.28.)$$

Čia trikampiai – viršūnių trejetai, kuriuose kiekviena viršūnė yra susijungus su kiekviena kita, o susijungę tripletai – viršūnių trejetai, iš kurių bent viena yra susijungusi su kitomis dviem, daugiklis 3 naudojamas, nes kiekvienas trikampis priklauso trimis tripletams.

Norint suskaičiuoti WS modelio $C'(p)$, reikia pradėti nuo tinklelio su klasterizacijos koeficientu $C(0)$. Esant $p > 0$ dvi viršūnės i kaimynės, kurios buvo susijungusios esant $p = 0$, vis dar yra i viršūnės „kaimynės“ ir susijungusios briauna su tikimybe $(1 - p)^3$ (laipsnis 3, kadangi turi būti nepalietos trys briaunos) [4, 11]. Tada:

$$C'(p) \simeq C(0)((1-p)^3) = \frac{3(K-2)}{4(K-1)}((1-p)^3). \quad (1.29.)$$

Buvo nustatyta, kad $C'(p)$ nuokrypis nuo šios išraiškos yra labai nežymus ir artėja prie 0, kai $N \rightarrow \infty$.

Viršūnių laipsnių pasiskirstymas nevisiškai atitinka realiųjų tinklų viršūnių pasiskirstymą. WS modelio visos viršūnės esant $p = 0$ turi tokį patį laipsnį. Todėl viršūnių laipsnių pasiskirstymas yra delta funkcija. Nenulinė briaunų perjungimo tikimybė įneša netvarką į tinklą, šitaip išplėsdama viršūnių pasiskirstymą ir išlaikydama vidutinį viršūnės laipsnį lygų K . Kadangi tik vienas briaunos galas yra perjungiamas prie kitos, tai kiekviena viršūnė turi bent $K/2$ briaunų po perjungimo proceso. Todėl, kai $K > 2$, grafe nėra izoliuotų viršūnių ir tinklas dažniausiai yra susijungęs. Esant $p > 0$ viršūnės i laipsnis gali būti perrašytas į $k_i = \frac{K}{2} + c_i$, kur elementas c_i gali būti padalintas į dvi dalis: $c_i^1 \leq K/2$ - briaunos buvo paliktas savo vietoje (su tikimybe $1-p$) ir $c_i^2 \leq c_i - c_i^1$ - briaunos, kurios buvo perjungtas prie viršūnės i , kiekviena su tikimybe $\frac{1}{N}$. Tikimybiniai c_i^1 ir c_i^2 skirstiniai atitinkamai lygūs [4, 11].:

$$P_1(c_i^1) = C_K^{c_i^1} (1-p)^{c_i^1} p^{\frac{K}{2}-c_i^1} \quad (1.30.)$$

ir

$$P_2(c_i^2) = C_{pN\frac{K}{2}}^{c_i^2} \left(\frac{1}{N}\right)^{c_i^2} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{pN\frac{K}{2}-c_i^2} \simeq \frac{\left(\frac{pK}{2}\right)^{c_i^2}}{c_i^2!} e^{-\frac{pK}{2}} \quad (1.31.)$$

esant dideliems N . Sudėjus šiuos faktorius gaunamas viršūnių laipsnių pasiskirstymas [4, 11].:

$$P(k) = \sum_{n=0}^{f(k,K)} C_{\frac{K}{2}}^n (1-p)^n p^{\frac{K}{2}-n} \frac{\left(\frac{pK}{2}\right)^{k-\frac{K}{2}-n}}{\left(k - \frac{K}{2} - n\right)!} e^{-\frac{pK}{2}}, \quad (1.32.)$$

su $k \geq \frac{K}{2}$, kur $f(k, K) = \min(k - \frac{K}{2}, K/2)$.

1.2.4. BARABASI - ALBERT TINKLAS

Laipsninę pasiskirstymo funkciją, pastebėtą realiojo pasaulio tinkluose, pirmieji įvardino Barabasi ir Albert, kurie teigė, kad tinklo „be mastelio“ kilmė priklauso nuo dviejų tinklo konstravimo mechanizmų, kuriuos turi dauguma realiųjų tinklų. Visi anksčiau aprašyti modeliai prasideda nuo fiksuoto viršūnių skaičiaus N , vėliau viršūnės sujungiamos atsitiktinai ar jas jungiančias briaunas atsitiktinai perjungiant prie kitų viršūnių. Pirminis viršūnių skaičius N lieka nepakitęs. Tačiau realiojo pasaulio tinklai yra apibūdinami kaip atviros sistemos, kurios auga nuolat pridodant naujas viršūnes. Antra, ankstesni tinklų

modeliai priima, kad tikimybė, kad dvi viršūnės yra susijungusios, yra nepriklausoma nuo viršūnės laipsnio, t. y. briaunos yra prijungiamos atsitiktinai vienodai. Dauguma realiųjų tinklų pasižymi preferenciniu prijungimu - prisijungimas prie viršūnės priklauso nuo jos laipsnio [4, 11].

Šie du aspektai, augimas ir preferencinis prijungimas, sudarė sąlygas Barabasi - Albert modelio konstravimui, kuris buvo pirmasis modelis su laipsnine pasiskirstymo funkcija. Modelio konstravimo algoritmas atrodo taip [3]:

- *Augimas*: modelis pradedamas nuo mažo viršūnių skaičiaus m_0 , kiekviename žingsnyje pridedama nauja viršūnė su $m(\leq m_0)$ briaunomis, kurios sujungia ją su skirtingomis ir jau sistemoje esančiomis viršūnėmis [3].

- *Preferencinis prijungimas*: renkant viršūnę prie kurios prisijungs nauja viršūnė, priimama, kad tikimybė Π , kad nauja viršūnė bus prijungta prie viršūnės i , priklauso nuo jos laipsnio k_i taip:

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_i} \quad (1.33.)$$

Po t žingsnių ši procedūra baigiasi suformavusi tinklo modelį su $N = t + m_0$ viršūnių ir mt briaunų [3].

Viena iš empiriškai analizuotų tinklo „be mastelio“ savybių – vidutinis kelio ilgis. Buvo pastebėta, kad vidutinis kelio ilgis yra mažesnis negu atsitiktinio grafo su bet koku N , tai reiškia, kad heterogeniška tinklo topologija yra kur kas efektyvesnė siekiant suartinti viršūnes negu homogeniška atsitiktinių tinklų topologija. Neseniai gauti analitiniai rezultatai parodė, kad vidutinis kelio ilgis geriausiai atitinka tokią išraišką [3].

$$l \sim \frac{\ln(N)}{\ln \ln(N)} \quad (1.34.)$$

Jeigu WS modelio klasterizacijos koeficientas buvo išanalizuotas labai gerai, tai to paties negalima pasakyti apie Barabasi - Albert modelį – analizinės išraiškos vis dar nėra. Tačiau buvo pastebėta, kad BA modelio klasterizacijos koeficientas yra 5 kartus didesnis negu atsitiktinio grafo ir didėjant viršūnių skaičiui šis santykis lėtai kyla. Tačiau minėtas koeficientas krenta kartu su tinklo dydžiu pagal dėsnį $C \sim N^{-0.75}$, nors tai yra ir lėtesnis kritimas negu pastebėtas atsitiktiniuose grafuose, $C \sim \langle k \rangle N^{-1}$, tačiau skiriasi nuo „Mažąjo pasaulio“ modelių, kurių klasterizacijos koeficientas yra nepriklausomas nuo N [3, 4, 11]].

Augimo ir preferencinio prijungimo kombinacija leidžia pastebėti įdomią individualių viršūnių jungimo dinamiką. Viršūnės, kurios turi daugiausiai briaunų, yra tos, kurios buvo pridėtos prie tinklo

pačioje jo augimo pradžioje. Buvo apskaičiuota tam tikros viršūnės i laipsnio k_i priklausomybė nuo laiko [3]:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \prod(k_i) = m \frac{k_i}{\sum_{j=1}^{N-1} k_j}. \quad (1.35.)$$

Kadangi suma, esanti vardiklyje, paima visas tinklo viršūnes išskyrus naujas, tai $\sum_j k_j = 2mt - m$, o tai reiškia, kad formulę (1.35.) galima perrašyti taip [3]:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t} \quad (1.36.)$$

Šios sistemos sprendinys su pradine sąlyga, kad kiekviena viršūnė i savo gyvavimo pradžioje turi laipsnį, lygų $k_i t_i = m$, yra toks [3]:

$$k_i(t) = m \frac{t^\beta}{t_i} \text{ su } \beta = \frac{1}{2}. \quad (1.37.)$$

Tai rodo, kad visų viršūnių laipsniai kinta tokiu pat būdu, pagal laipsninę funkciją, vienintelis skirtumas – konstanta m .

Pasinaudojus (1.37.) formule galima užrašyti tikimybę [3]:

$$P[k_i(t) < k] = P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right). \quad (1.38.)$$

Tariama, kad viršūnės pridedamos vienodais laiko intervalais:

$$p t_i = \frac{1}{m_0 + t}, \quad (1.39.)$$

kur m_0 – viršūnių skaičius modelio pradžioje. Formulė (1.38.) įrašoma į (1.39.) ir gaunama, kad

$$P\left(t_i > \frac{m^2 t}{k^2}\right) = 1 - \frac{m^2 t}{k^2(t + m_0)}. \quad (1.40.)$$

Tada viršūnių laipsnių pasiskirstymas gaunamas taip [3]:

$$P(k) = \frac{\partial P[k_i(t) < k]}{\partial k} = \frac{2m^2 t}{m_0 + t} \frac{1}{k^{2+1}}, \quad (1.41.)$$

kai $t \rightarrow \infty$.

$$P(k) \sim 2m^2 k^{-\gamma} \text{ su } \gamma = 3 \quad (1.42.)$$

2. TIRIAMOJI DALIS

Šioje dalyje pateikiami skirtingų topologijų, pilnojo ir atsitiktinių, tinklų dinamikos tyrimo rezultatai. Tinklų dinamika buvo analizuojama remiantis neuronų faziniu greičiu, „šaudymo“ dažniu ir atsparumu triukšmui bei jų priklausomybe nuo pagrindinių tinklų parametrų.

2.1. TYRIMO DUOMENYS

Atliekant tinklų dinamikos tyrimus buvo konstruojami 100 viršūnių tinklai su kiekvienam modeliui reikalingais parametrais, pateiktais 2.1 lentelėje.

2.1 Lentelė. Skirtingų topologijų tinklų modelių parametrai

Tinklo modelis	Briaunos prisijungimo tikimybė	Pradinis viršūnių skaičius	Galutinis viršūnių skaičius	Prisijungiančių briaunų skaičius
Pilnasis tinkas	1	N	N	–
Erdős – Rényi (ER)	p_{ER}	N	N	–
Watts - Strogatz (WS)	p_{WS}	N	N	$K/2$
Barabasi - Albert (BA)	–	m_0	N	k

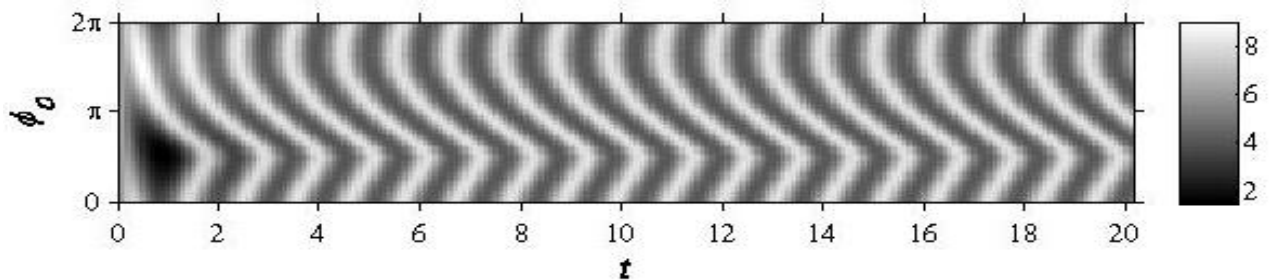
Remiantis [7, 15] literatūros šaltiniais, priimama, visi neuronų tinklo elementai yra identiškai vieni kitiems, t. y. kiekvienas neuronas tinkle yra susijungęs su kitu neuronu dydžiu $K = 8\pi$, jungimosi konstanta, nusakanti, kaip stipriai neuronai yra surišti vieni su kitais tinkle ir kiekvieno neurono savasis dažnis - $\omega = 2\pi$.

2.2. TYRIMO REZULTATAI

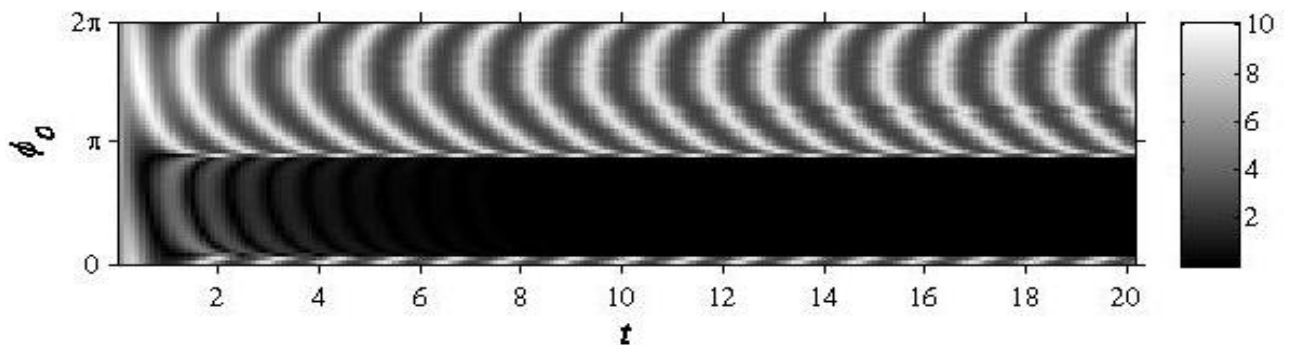
2.2.1. PILNASIS TINKLAS

Pilnasis neuronų tinklas – toks tinklas, kuriame kiekvienas neuronas yra susijungęs su kiekvienu kitu tinklo neuronu. Tokio tinklo dinamikos tyrimui buvo naudojamas vidutinis fazinis greitis. Jis nusako neuronų tinklo būseną tam tikru laiko momentu, naudojantis juo galima apibūdinti neuronų užgesimo greitį.

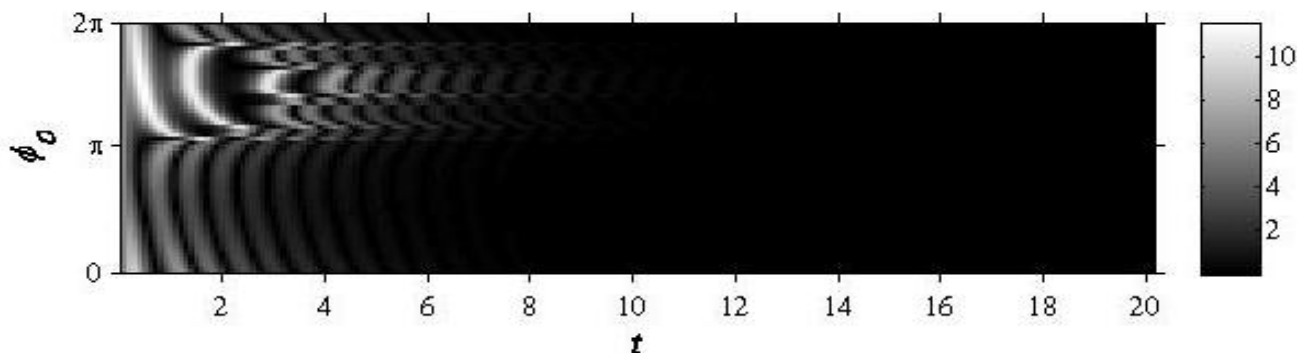
Neuronų tinklas buvo veikiamas trimis skirtingomis nuolatinėmis stimuliacijomis: silpna stimuliacija ($I_{stim} \leq 4\pi$), vidutine stimuliacija ($4\pi < I_{stim} \leq 6\pi$) bei stipria ($I_{stim} > 6\pi$). Tinklo dinamika buvo stebima $t = 20$ laiko vienetų. Tyrimo pradžioje laikoma, kad tinklas yra sinchronizuotoje būsenoje – visos neuronų fazės yra lygios, o išorinių jėgų poveikis lygis 0. Tinklo vidutinio fazinio greičio priklausomybė nuo pradinių fazių veikiant jį skirtingomis stimuliacijomis parodyta 2.1 – 2.3 paveikslėliuose.



2.1 pav. Neuronų tinklo vidutinio fazinio greičio kitimas jį nuolat veikiant silpna stimuliacija

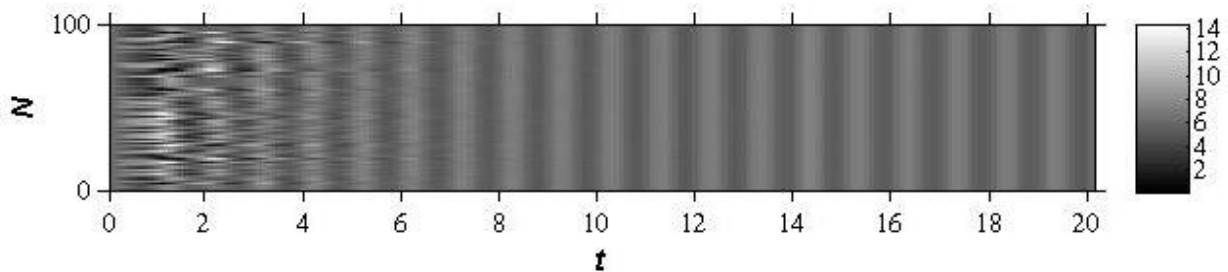


2.2 pav. Neuronų tinklo vidutinio fazinio greičio kitimas jį nuolat veikiant vidutine stimuliacija



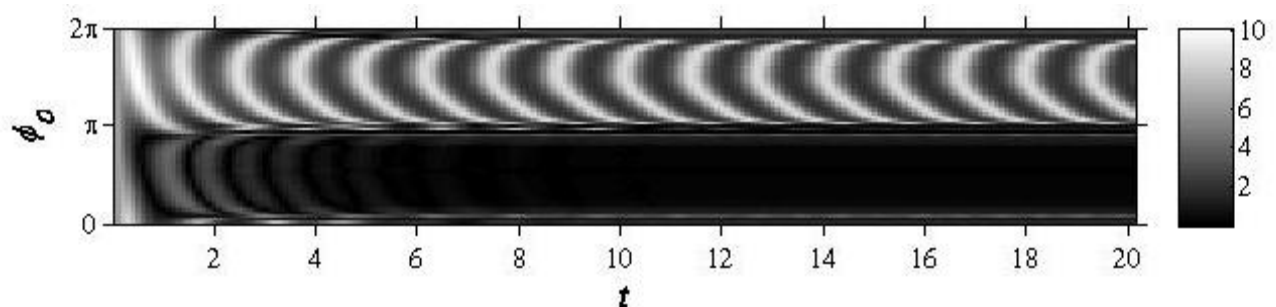
2.3 pav. Neuronų tinklo vidutinio fazinio greičio kitimas jį nuolat veikiant stipria stimuliacija

2.1 – 2.3 paveiksluose buvo tiriamas tinklo fazinis greitis, kai tyrimo pradžioje neuronai buvo tobuloje sinchronizacijoje su kitais neuronais. Tačiau tokios situacijos yra retos. Dažniau pasitaiko situacijų, kai neuronų fazės tyrimo pradžioje skiriasi nedideliu dydžiu arba tiesiog skiriasi. Toks atvejis



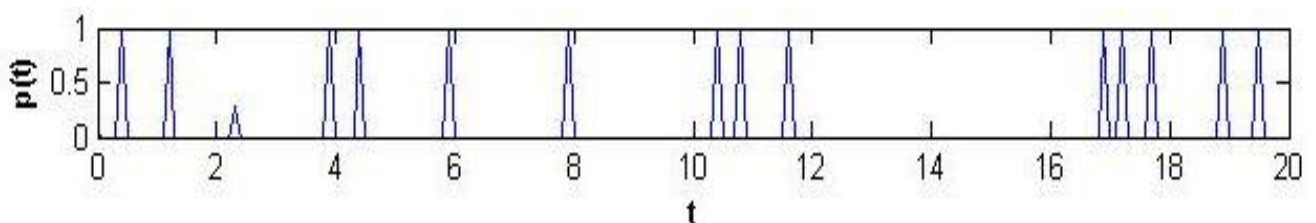
2.4 pav. Neuronų fazinių greičių kitimas, kai pradinės fazės yra atsitiktinės pavaizduotas 2.4 pav. Jame vaizduojamas atskirų neuronų fazinių greičių kitimas laike. N žymi neurono numerį. Tinklas buvo veikiamas vidutine stimuliacija, t. y. $I_{stim} = 6\pi$.

Tinklo atsparumo tyrimui buvo generuojamos $D = 0.2$ dydžio išorinės atsitiktinės jėgos. Buvo tiriama $I_{stim} = 6\pi$, nes tinklas tokiu atveju (2.2 pav), priklausomai nuo pradinių fazių, gali įgyti kelias būsenas: svyruojančią ir nutilusią. Triukšmo poveikis neuronų tinklui vaizduojamas 2.5 pav.



2.5 pav. Triukšmo poveikis neuronų tinklui, kai $I_{stim} = 6\pi$

Neuronų tinklo „šaudymo“ dažnis yra viena iš charakteristikų, leidžiančių nusakyti neuronų tinklo elgsena. 2.6 paveikslukas vaizduoja tinklo šaudymą, kai jis yra veikiamas $I_{stim} = 5\pi$ dydžio stimuliacija, o jo triukšmo poveikis yra ignoruojamas. Reikšmė 1 reiškia, kad visi tinkle esantys neuronai „šaudė“, reikšmė 0 reiškia, kad tinklas yra nutilęs.

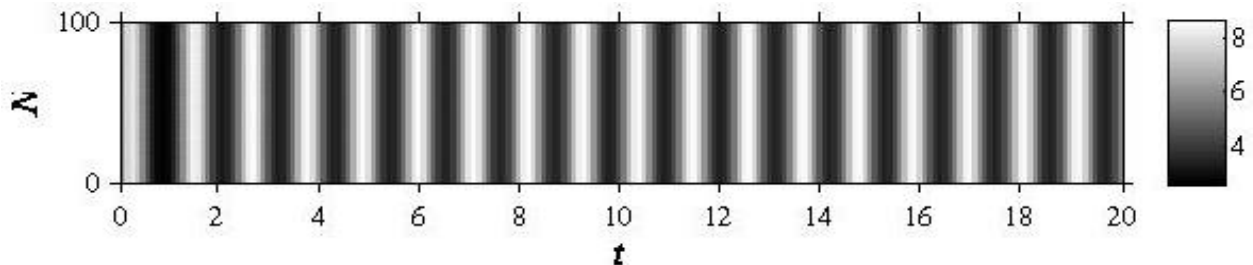


2.6 pav. Neuronų tinklo „šaudymo“ dažnis laikui bėgant

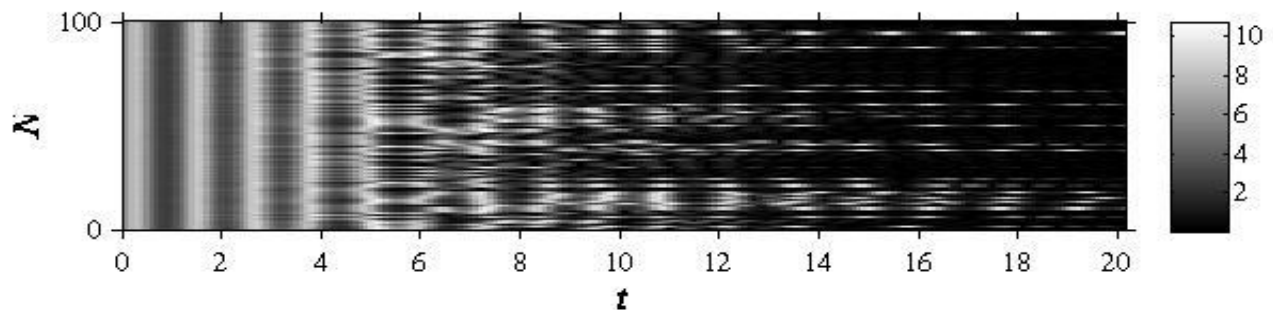
2.2.2. ERDŐS – RÉNYI TINKLAS

Erdős – Rényi modelio neuronų tinklas konstruojamas turint $N = 100$, kai kiekvienas iš jų yra susijungęs su kitu neuronu su tikimybe p . Kai $p \rightarrow 1$, gaunamas pilnasis tinklas.

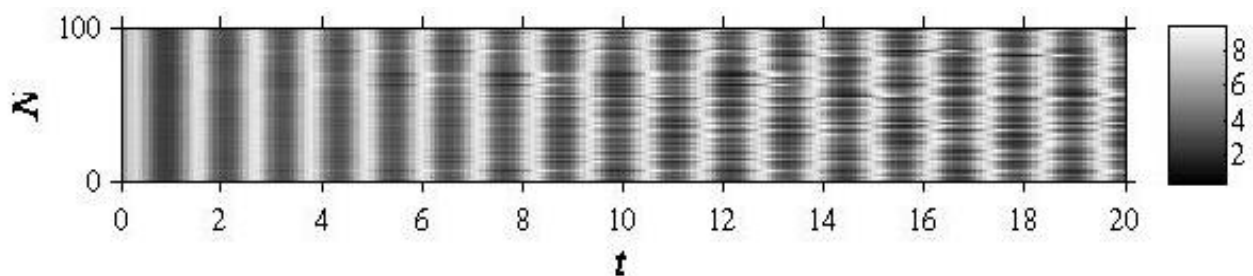
Pirmiausia bus tiriama, kaip neuronų fazinių greičių veikia tinklo struktūra, kuri nusakoma parametru p . Tyrimo pradžioje laikoma, kad visų neuronų $\phi_0 \approx 0$, o tinklas veikiamas vidutine stimuliacija. Apie tinklo užgesimo greitį galima spręsti iš 2.7 - 2.9 paveikslėlių, kuriuose neurono prisijungimo prie kito neurono tikimybės atitinkamai lygios 0.9, 0.4 ir 0.1.



2.7 pav. Neuronų fazinių greičių kitimas, kai $p = 0.9$

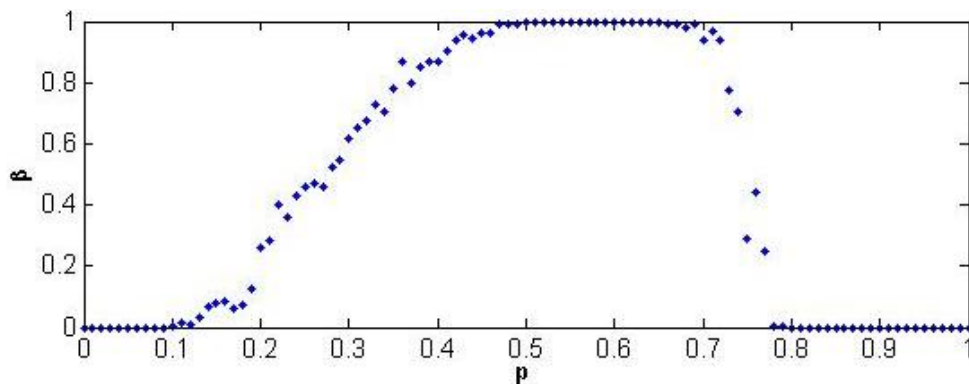


2.8 pav. Neuronų fazinių greičių kitimas, kai $p = 0.4$



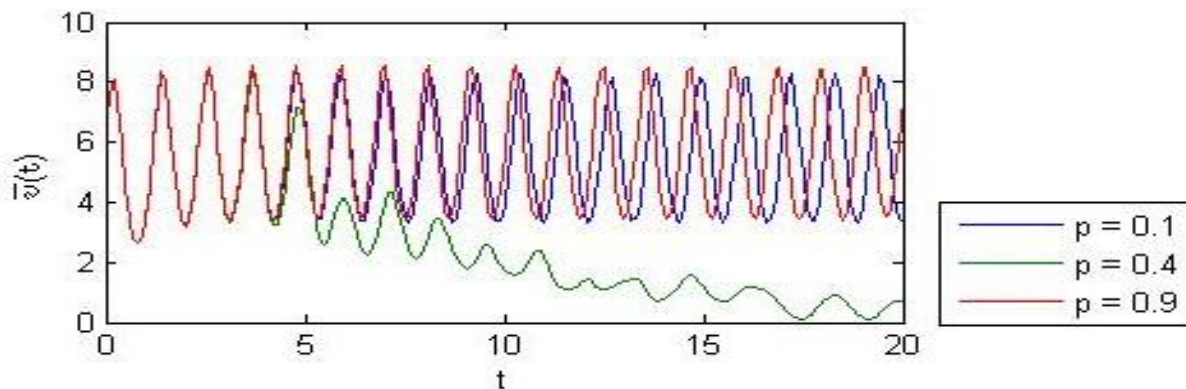
2.9 pav. Neuronų fazinių greičių kitimas, kai $p = 0.1$

Neuronų tinklo užgesimo greičiui tirti galima pasižymėti nutilusių neuronų kiekį tinkle kaip dydį β . Tada nutilusių neuronų skaičiaus priklausomybė nuo tinklo parametro p , apibūdinančio tinklo struktūrą, atrodys taip (2.10 pav):



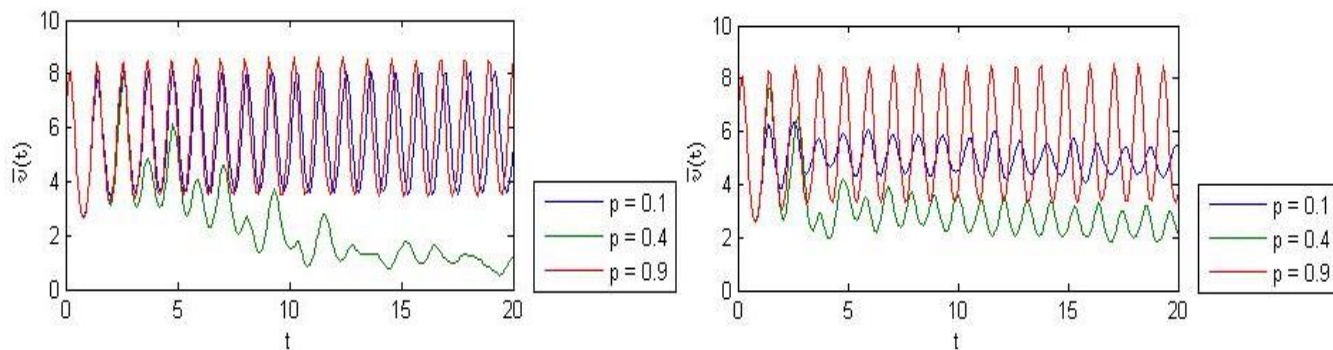
2.10 pav. Nutilusių neuronų skaičiaus priklausomybė nuo tinklo parametro p

Erdős – Rényi modelio neuronų tinklo atsparumas triukšmui tiriama naudojant vidutinį tinklo fazinį greitį. Buvo generuojami trys tinklai su parametro p reikšmėmis 0.9, 0.4 ir 0.1. Šie parametrai buvo parinkti atsižvelgiant į 2.10 paveikslėlyje vaizduojamus rezultatus. Minėtų tinklų vidutiniai faziniai greičiai pirmiausia demonstruojami, kai atsitiktinės jėgos tinklui nedaro jokios įtakos - parametras $D = 0$ (2.11 pav.):



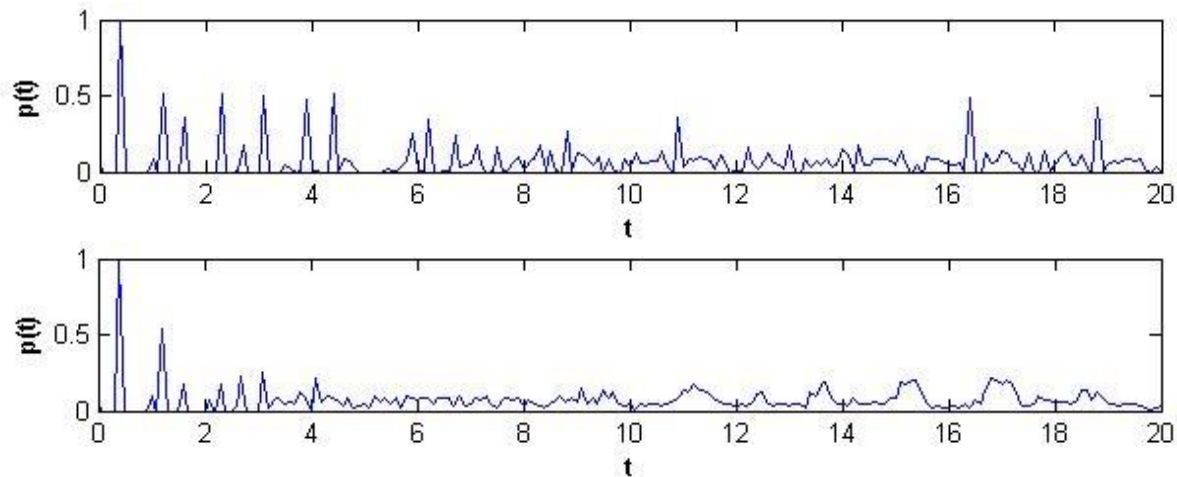
2.11 pav. Tinklų vidutiniai faziniai greičiai, kai triukšmo parametras $D = 0$

Vėliau jie veikiami $D = 0.2$ ir $D = 0.5$ dydžių triukšmu, kurio poveikis vaizduojamas 2.12 paveikslėlyje.



2.12 pav. Tinklų vidutiniai faziniai greičiai, kai triukšmo parametras D atitinkamai lygus 0.2 ir 0.5

Neuronų tinklo „šaudymo“ dažnis įvairioms neurono prijungimo tikimybėms vaizduojamas 2.13 paveikslėlyje, paminėtina, kad neuronų tinklas buvo veikiamas nuolatine dydžio $I_{stim} = 5\pi$ stimuliacija.

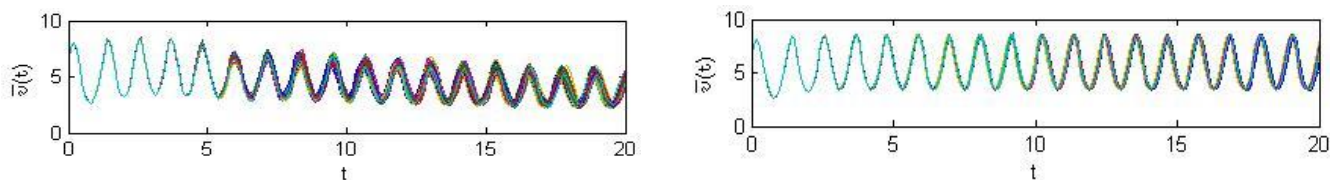


2.13 pav. Neuronų tinklo „šaudymo“ dažnis, kai $p = 0.1$ ir $p = 0.4$

2.2.3. WATTS IR STROGATZ TINKLAS

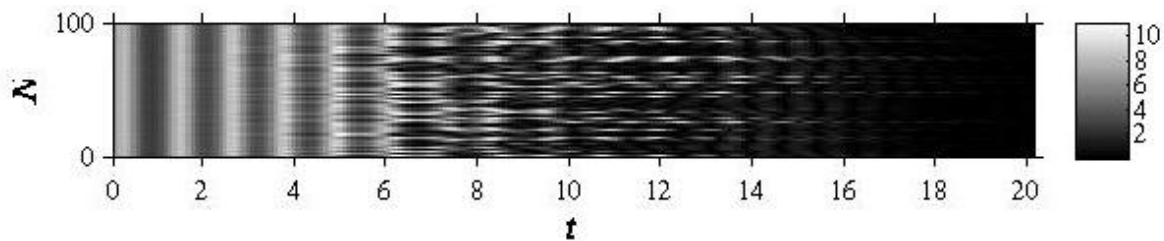
Watts ir Strogatz modelio neuronų tinklas gaunamas, kai turint N neuronų, kurie yra susijungę su k kaimyninių neuronų, atliekamas kiekvienos briaunos perjungimas su tikimybe p .

Šio tinklo atveju reikia atsižvelgti į du parametrus: į perjungimo tikimybę p ir neuronų briaunų skaičių tinklo konstravimo pradžioje. Jeigu bus pasirinktas mažas briaunų skaičius, tai tinklas bus retas, savo savybėmis panašus į ER atvejį, jeigu bus pasirinktas didelis briaunų skaičius, gausime pilnajam tinklui artimą modelį. Pavyzdžiai pateikti 2.14 paveiksle. Abejais atvejais tinklas buvo veikiamas vidutine stimuliacija, t. y. $I_{stim} = 5\pi$, o jo vidutinis fazinis greitis skaičiuojamas tikimybei p kinant nuo 0 iki 1 žingsniu 0.01.

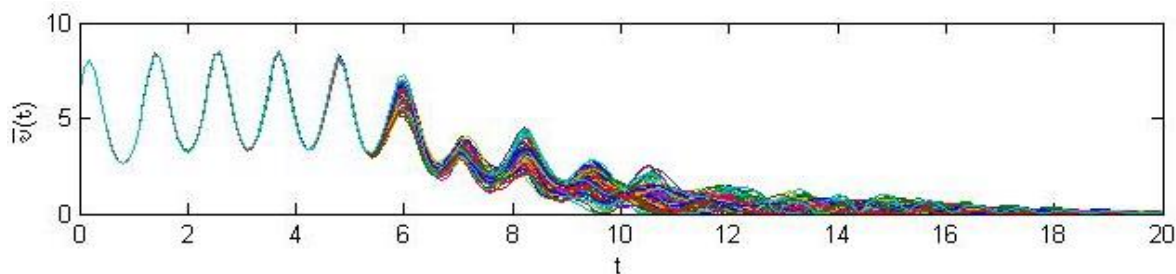


2.14 pav. Tinklų vidutiniai faziniai greičiai, kai neuronų skaičius K tinklo konstravimo pradžioje atitinkamai lygus 10 ir 40.

Tolimesniam tyrimui buvo pasirinkta konstruoti WS tinklą, kai kiekvienas neuronas yra susijungęs su 25 artimiausiais neuronais iš vienos pusės, tada tokio tinklo neuronų faziniai greičiai laikui bėgant atrodys taip:



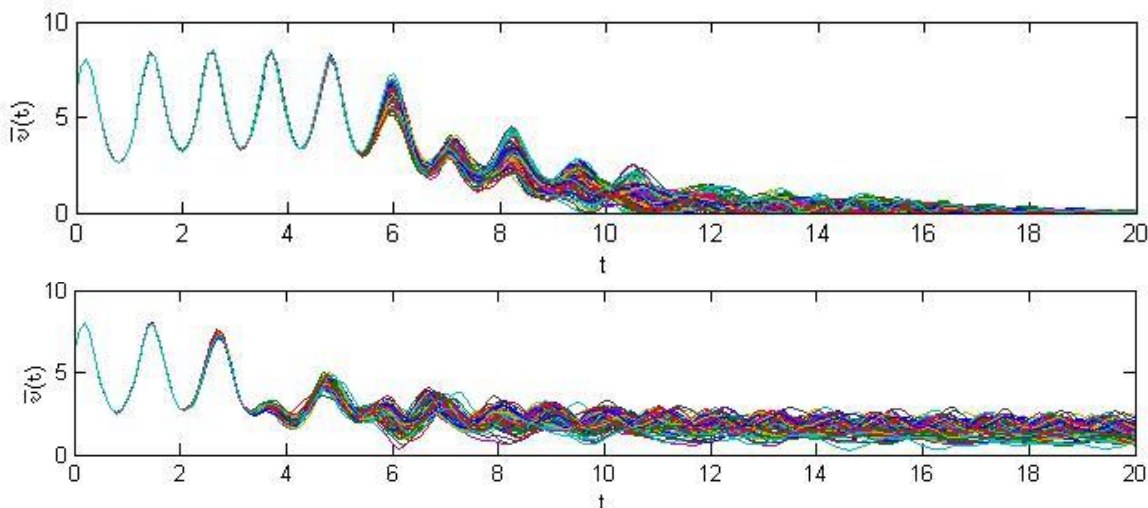
2.15 pav. Tinklo neuronų faziniai greičiai, kai briaunos perjungimo tikimybė $p = 0.9$



2.16 pav. Tinklų vidutinių fazinių greičių kitimas

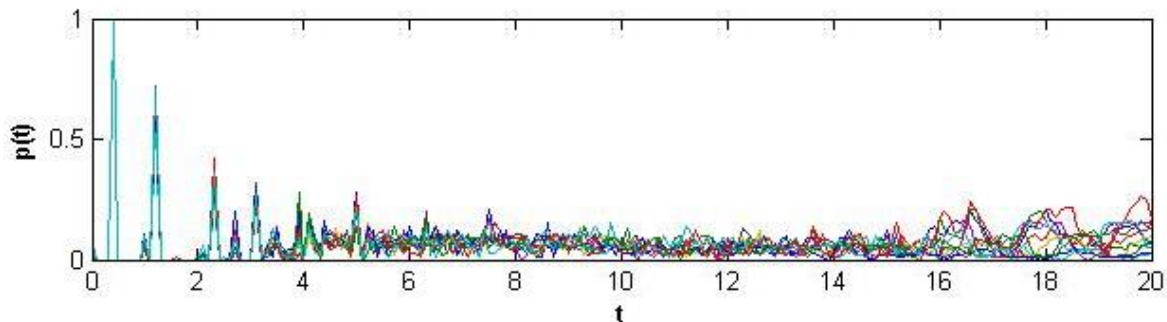
Nagrinėjant tinklo struktūros įtaką neuronų dinamikai, reikia peržiūrėti ir įvairias briaunos perjungimo tikimybes. Rezultatas pateikiamas 2.16 paveiksle, vaizduojančiame tinklą su įvairiomis briaunos perjungimo tikimybėmis vidutinio fazinio greičio kitimą.

Watts ir Strogatz modelio neuronų tinklo atsparumą triukšmui tirti galima analizuojant vidutinį fazinį greitį. Šiuo atveju, tinkle vyrauja triukšmas su parametro $D = 0.2$ ir $D = 0.5$ reikšmėmis. Jo įtaką galime stebėti 2.17 pav.



2.17 pav. Tinklų vidutiniai faziniai greičiai, kai triukšmo parametras D atitinkamai lygus 0.2 ir 0.5

WS modelio tinklo „šaudymo“ dažnis, kai kiekvienas neuronas yra susijungęs su 25 artimiausiais neuronais iš vienos pusės, o briaunų perjungimo tikimybė p kinta nuo 0.1 ir 0.9 vaizduojamas 2.18 pav.

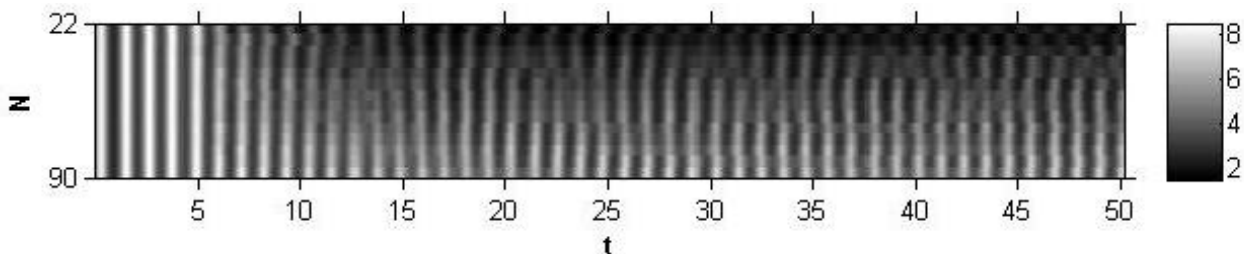


2.18 pav. Neuronų tinklo „šaudymo“ dažnis, kai p kinta nuo 0.1 ir 1

2.2.4. BARABASI - ALBERT TINKLAS

Šis neuronų tinklo modelis pasižymi tuo, kad jis sudaromas dviem etapais: tinklas pradamas formuoti nuo mažo neuronų skaičius m_0 , kiekviename žingsnyje prijungiamas naujas neuronas. Renkant tinklo neuroną, prie kurio prisijungs naujas neuronas priimama, kad tikimybė, jog naujas neuronas bus prijungtas prie neurono i , priklauso nuo prisijungusių prie jo neuronų skaičiaus.

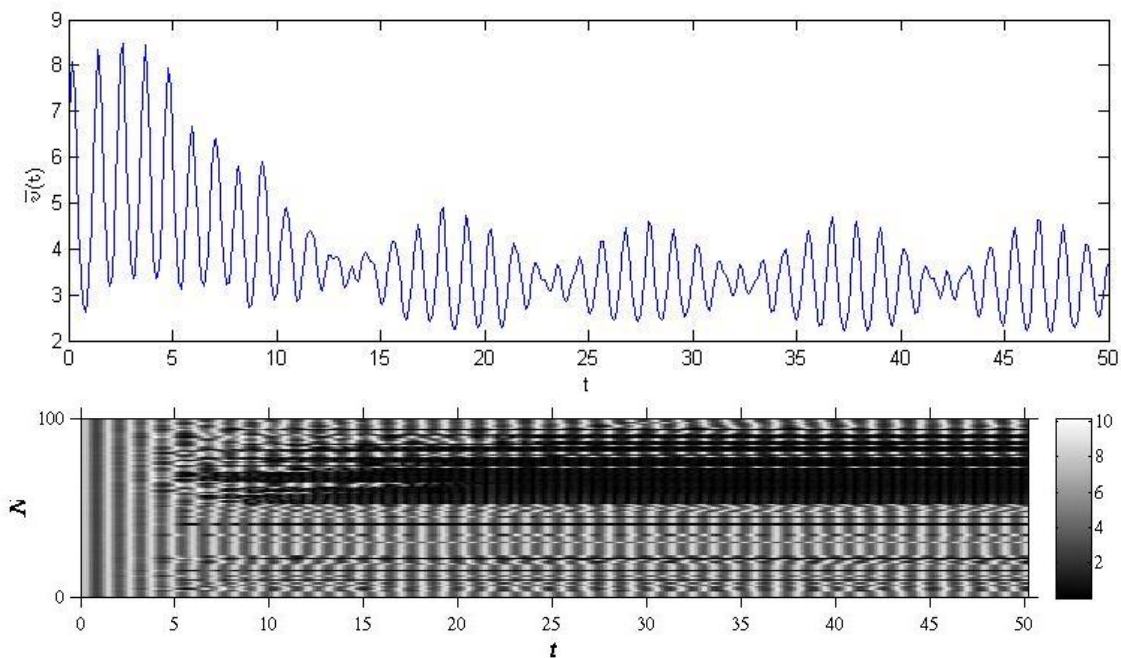
Tiriant BA neuronų tinklo dinamiką svarbūs yra du parametrai: pradinis neuronų skaičius tinklo konstravimo pradžioje ir prie jo prisijungiančių kitų neuronų skaičius. Neuronų tinklo dinamika, šiuo atveju, buvo stebima $t = 50$ laiko vienetų. Buvo fiksuojamas prisijungiančių neuronų skaičius, 20. Mažesnis skaičius būtų lėmęs retesnę tinklą, kuris savo savybėmis būtų artimas ER modelio tinklui, o didesnis skaičius - tinklą, artimą pilnajam. Fiksavus neuronų skaičių, buvo keičiamas pradinių neuronų skaičius. Gautų tinklų vidutiniai faziniai greičiai parodyti 2.19 pav. Gauti tinklai buvo stimuliuojami dydžiu $I_{stim} = 5\pi$.



2.19 pav. Tinklų vidutiniai faziniai greičiai, kai parametras m_0 kinta nuo 22 iki 90

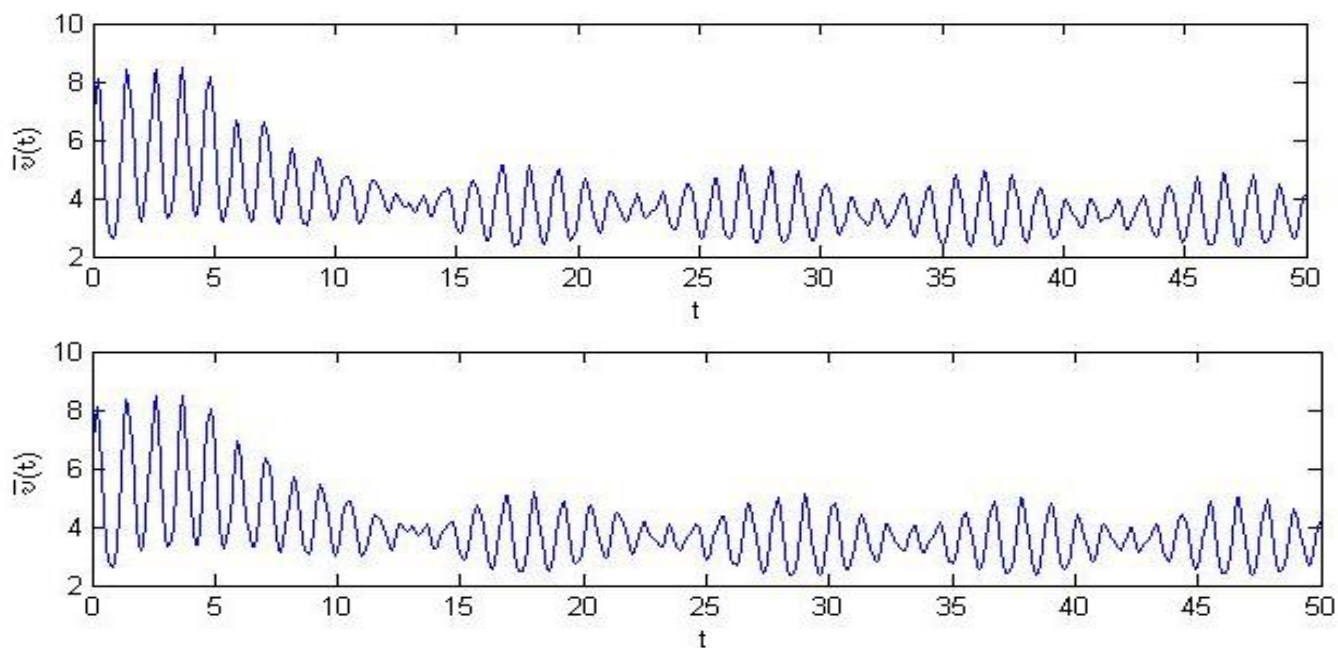
Įdomesnis atvejis pateiktas 2.20 pav.: viršutinis vaizduoja gauto tinklo vidutinį fazinį greitį, o apatinis – visų neuronų fazinius greičius laikui bėgant. Paminėtina, kad šie vaizdai buvo gauti, kai

generavimo pradžioje tinklą sudarė 52 neuronai, o prie kiekvieno naujo neurono prisijungia 20 neuronų. Tinklas buvo stimuliuojamas dydžiu $I_{stim} = 5\pi$.



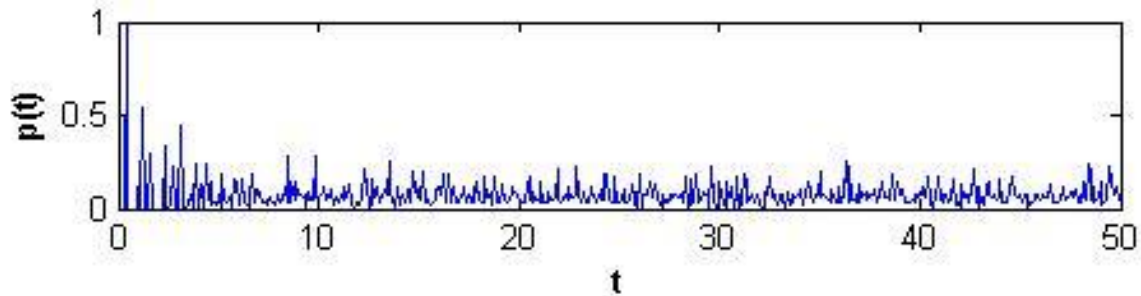
2.20 pav. Tinklo vidutinis fazinis greitis ir atskirų neuronų faziniai greičiai, kai $m_0 = 52$, $k = 20$

Pasinaudojant tais pačiais parametrais buvo tiriamas ir BA neuronų tinklo atsparumas triukšmui. Pavyzdys pateikiamas 2.21 pav. Tinklas buvo veikiamas triukšmo dydžiais $D = 0.2$ ir $D = 0.5$.



2.21 pav. Tinklo vidutinis fazinis greitis, kai triukšmo parametras D atitinkamai lygus 0.2 ir 0.5

Analizuojant BA modelio tinklo „šaudymo“ dažnį reikia atkreipti dėmesį, kad skirtingi parametru rinkiniai rodytų skirtingus rezultatus. 2.22 paveikslas atspindi tuos tinklus, kurių parametras k yra daug mažesnis už m_0 .



2.22 pav. Neuronų tinklo „šaudymo“ dažnis

2.3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Dendritinio neurono modelis bei atsitiktiniai tinklai, suformuluoti ir pateikti ankstesniuose skyriuose, buvo realizuoti MATLAB aplinkoje - interaktyvioje sistemoje, skirtoje atlikti inžinerinius bei mokslinius skaičiavimus. Kadangi darbo tikslas yra įgyvendinti tam tikrą modelį, o ne sukurti konkrečią programinę įrangą taikymams, darbas buvo realizuotas programinės bibliotekos būdu, sukuriant reikalingas funkcijas tinklo savybių tyrimui.

Toliau pateikiamas sukurtų funkcijų sąrašas ir kokių parametrų jos reikalauja savo tikslams pasiekti.

- **[A,l,C,degree] = ER(N, p)**

Funkcija sugeneruoja N dydžio parametro p Erdős – Rényi tinklą ir grąžina sukonstruoto tinklo gretimumo matricą, vidutinį kelio ilgį, klasterizacijos koeficientą ir viršūnių laipsnius. Su šia funkcija galima gauti pilnąjį tinklą, kai parametras $p = 1$.

- **[A,l,C,degree] = WS(N, p, k)**

Funkcija sugeneruoja N dydžio Watts – Strogatz tinklą, kai konstravimo pradžioje kiekvienas mazgas yra susijungęs su k viršūnių vienoje pusėje, o vėliau visos briaunos yra perjungiamos su tikimybe p . Grąžina sukonstruoto tinklo gretimumo matricą, vidutinį kelio ilgį, klasterizacijos koeficientą ir viršūnių laipsnius.

- **[A,l,C,degree] = BA(N, k, m)**

Funkcija sugeneruoja N dydžio Barabasi – Albert tinklą, kai konstravimo pradžioje tinkle yra m viršūnių, o prie kiekvieno naujo tinkle atsiradusio mazgo prisijungia k viršūnių. Grąžina sukonstruoto tinklo gretimumo matricą, vidutinį kelio ilgį, klasterizacijos koeficientą ir viršūnių laipsnius.

- **atsakymas = vidutinis_fazinis_greitis(d_fi)**

Suskaičiuoja tinklo vidutinį fazinį greitį.

- **atsakymas = daznis(fi)**

Suskaičiuoja tinklo šaudymo dažnį.

- **dy = Solve(t,y,fi, model, N, t_span, triuksmas)**

Sudarytų diferencialinių lygčių sprendimo funkcija.

DISKUSIJOS

Šiame darbe buvo nagrinėti keturių skirtingų topologijų tinklai. Pasitelkiant dendritinį neuronų dinamikos modelį analizuojamos tokios neuronų tinklų savybės: neuronų užgesimo greitis, „šaudymo“ dažnis ir atsparumas triukšmui. Reikia pastebėti, kad lyginti vieno tinklo savybes su kito tinklo savybėmis yra sudėtinga, nes kiekvienam tinklui konstruoti reikalingi skirtingi parametrai, nuo kurių priklauso tinklo elgesys veikiant nuolatine stimuliacija.

Neuronų užgesimo greitis kiekvienam tinklui yra skirtingas, didžiausią įtaką jam daro, kokio stiprumo stimuliacija yra veikiamas tinklas. Jeigu tinklas bus veikiamas silpna stimuliacija, tai jis niekada nenustos šaudyti. Tai galioja visiems keturiems neuronų tinklams. Jeigu bus pasirinkta stipri stimuliacija, bet kurios topologijos tinklas ilgainiui užges. Įdomiausia rezultatai gaunami, kai tinklai veikiami vidutine stimuliacija. Pavyzdžiui, pilnasis tinklas užges, kai pradinės neuronų fazės bus tik tam tikrame intervale, $[0; \pi]$. Erdős – Rényi tipo neuronų tinklo užgesimo greitis priklauso nuo briaunos prijungimo tikimybės: veikiamas vidutinės stimuliacijos tinklas užges, kai $p \in [0.45; 0.7]$. Watts ir Strogatz modelio tinklas yra ypatingas tuo, kad jis yra tarpinis rezultatas, tarp ER ir atsitiktinio tinklo, todėl, net ir veikiant vidutinei stimuliacijai, galima gauti gęstančio ir negęstančio tinklo atveju. Didžiausią įtaką tam daro pradinis susijungusių neuronų skaičius, t. y. su kiek kaimynų yra susijungęs neuronas tinklo formavimo pradžioje. Analogiška situacija susidaro ir Barabasi – Albert tinkle: mažesnis prie naujų neuronų prisijungiančių tinklo viršūnių skaičius lemia greitesnį tinklo gesimo greitį. Tokia pati situacija stebima nagrinėjant ir pradinį neuronų skaičių tinkle, t. y. mažesnis neuronų skaičius lemia gęstančią tinklo dinamiką. Dendritinio neuronų dinamikos modelio įtaka buvo tirta abejais atvejais: kai pradinės neuronų fazės buvo lygios, kai pradinės neuronų fazės – atsitiktinės. Greičiausiai geso Erdős – Rényi tipo neuronų tinklas. Kai kuriuose atvejuose, užteko 6 laiko žingsnių rimčiai pasiekti.

Tinklo atsparumas triukšmui dar viena svarbi tinklo savybė. Buvo nagrinėjami kelių triukšmo parametro reikšmių ($D = 0.2$ ir $D = 0.5$) įtaką tinklo vidutiniam faziniam greičiui. Pilnojo tinklo atveju gauname, kad triukšmo įtaką nėra didelė, tinklų vidutiniai faziniai greičiai paveikiami nedaug, o vizualiai skirtumo dinamikoje nesimato. Erdős – Rényi atveju, kai parametro p reikšmė yra tokia, jog tinklas gęsta, triukšmas gesimą slopina, t. y. reikia daugiau laiko žingsnių pasiekti nutilusio tinklo būseną. Kitu atveju, triukšmas reikšmingos įtakos nedaro – tinklas išlieka nuolatiniame ritme, tačiau svyravimų amplitudė sumažėja. Analogiška situacija kartojasi ir Watts ir Strogatz modelio neuronų tinklo atveju – reikia daugiau žingsnių tyliai būsenai gauti, didesnė triukšmo parametro reikšmė lemia, kad tinklas iš ritmo

„išmušamas“ greičiau. Visai kitokia situacija su Barabasi – Albert tinklu. Jis yra labiausiai atsparus triukšmui: nagrinėtos triukšmo parametro D reikšmės beveik nedarė įtakos tinklų vidutiniam greičiui.

Reikia pastebėti, jog pilnojo, Erdős – Rényi, Watts ir Strogatz tinklo vidutinis fazinis greitis, kai tinklas yra virpėjimo būsenoje, kinta pagal vienodą tendenciją, t. y. tinklas yra ritme su pastovia amplitude. Barabasi – Albert tinklo virpėjimo amplitudė kinta laikui bėgant, tačiau ritmas išlieka pastovus.

Tinklo „šaudymo“ dažnis viena iš savybių nusakanti bendrą neuronų tinklo elgesį. Visų neuronų tinklų atveju, nuolatinės stimuliacijos pradžioje „šaudymo“ dažnis buvo didžiausias – „šaudė“ beveik visi tinklo neuronai. Laikui bėgant bendras šaudančių neuronų skaičius mažėja. To negalima pasakyti apie pilnąjį tinklą. Tokią situaciją lemia tai, kad kituose tinkluose yra nutrauktos grandys su kai kuriais neuronais.

IŠVADOS

- Magistro baigiamojo darbo metu buvo realizuotas matematinis dendritinis neurono modelis skirtingų topologijų neurotinklams. Watts - Strogatz ir Barabasi – Albert tinklams šis modelis buvo pritaikytas pirmą kartą.
- Gauta, kad kiekvienas skirtingos topologijos neuronų tinklas, veikiamas nuolatine stimuliacija, gali pasižymėti trimis būsenomis: nuolatinio virpėjimo, tyliąja ir mišria, kai dalis neuronų „šauda“, o dalis tyla laikui bėgant.
- Lyginant tinklų vidutinius fazinius greičius, pastebėta, jog greičiausiai tylantis neuronų tinklo modelis - Erdős – Rényi. Likusių tinklų modelių užgesimo greičiai nesiskyrė, kai buvo stebimi tarpusavyje panašūs neuronų tinklai.
- Erdős – Rényi modelio neuronų tinklas, kai parametras $p \in [0.45; 0.7]$ ir tinklas buvo veikiamas vidutine stimuliacija, tilo savaime, neveikiamas pašalinių jėgų. Analogiška situacija buvo pastebėta ir Watts - Strogatz modelyje. Šiuo atveju, tinklo pervedimui į tylų įtaką darė pradinis neuronų jungčių skaičius.
- Gauta, kad bendra atsparumo triukšmui tendencija, kai tinklai yra veikiami vidutine stimuliacija ir tarpusavyje yra panašūs, yra tokia: BA tinklas, pilnasis tinklas, WS tinklas ir Erdős – Rényi tinklas.
- Kai tinklai yra virpėjimo būsenoje, pilnojo, Erdős – Rényi, Watts ir Strogatz tinkluose svyravimų amplitudė išlieka pastovi, o Barabasi – Albert tinkle ji yra nepastovi.
- Gauta, jog vienintelis pilnasis tinklas geba išlaikyti pilnąją šaudymo elgseną, t. y. tinkle šauda 100% neuronų, kai tinklai buvo veikiamas nuolatine vidutine stimuliacija.

LITERATŪRA

1. Abbott L.F. Lapique's introduction of the integrate-and-fire model neuron (1907).// Brain Research Bulletin, 50, p. 303 – 304.
2. Basset S. D., Bullmore E. Small-World Brain Networks.//Neuroscientist, 2006, p. 512 – 523.
3. Barabasi L.A., Albert R., Jeong H. Mean-field theory for scale-free random networks // Physica A, 1999, 272, p. 173 – 187.
4. Barabasi L.A., Albert R. Statistical mechanics of complex networks //Reviews of modern physics, 2002, 74, p. 47 – 97.
5. Cumin D., Unsworth C.P. Generalising the Kuramoto model for the study of neuronal synchronisation in the brain. // Physica D 226, 2007, p. 181 – 196.
6. Brenner M. P., Colwell L. J. Action Potential Initiation in the Hodgkin-Huxley Model // Computational Biology, 2009, p. 1 – 7.
7. Dolan K., Majtanik M., Tass P. A.. Desynchronization in networks of globally coupled phase oscillators with inertia // Physica, 2006 p. 307 – 333.
8. Gerstner W., Kistler W. M. Spiking Neuron Models.2002. 496 p.
9. Haken, H. Brain Dynamics: An Introduction to Models and Simualtions. Berlin, 2008. 333 p.
10. Izhikevich, E. M. Simple Model of Spiking Neurons. // IEEE Transactions on neural networks, 14, 2003, p. 1569 – 1573
11. Newman M. E. J. The structure and function of complex networks // Siam Review, 2003, 45, p. 167 – 256.
12. Menche J., Valleriani A., Lipowsky R. Dynamical processes on dissortative scale-free networks// A Letters Journal Exploring the Frontiers of Physics, 2010, 89, 18002.
13. Pérez T. Dynamics and Synchronization in Neuronal Models. Palma, 2009. 205 p.
14. Strogatz H. S. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators.// Physica D 143, 2000, p. 1 – 20.
15. Šakyatè E., Ragulskis M. Self-calming of a random network of dendritic neurons. //Neurocomputing, 2011, p. 3912 – 3920.
16. Wasserman I., Faust S., Faust K. Social network analysis: methods and applications. New York, 1994. p. 92 – 166.

17. Watts D. J., Strogatz S.H. Collective dynamics of “small-world” networks // Nature, 1988, 393, p. 440 – 442.
18. Connected Brains: a website on complex brain network research - [žiūrėta 2013-04-13]. Prieiga per internetą: <<http://home.kpn.nl/stam7883/index.html>>
19. Neural Networks Pt. 4 Spiking Neuron Models - [žiūrėta 2013-03-31]. Prieiga per internetą: <<http://informatics.indiana.edu/larry/al4ai/lectures/09.NN4-SpikingNeuronModels.pdf>>
20. A tutorial in connectome analysis: Topological and spatial features of brain networks - [žiūrėta 2013-04-23]. Prieiga per internetą: <<http://www.biological-networks.org/pubs/Kaiser2011Neuroimage.pdf>>

PRIEDAS A. PROGRAMINIS KODAS

A1.ER.m

```

function [A,l,C,degree] = ER(N, p)
% N - viršūnių skaičius
% p - briaunų prijungimo tikimybė
% l - vidutinis kelio ilgis
% C - klasterizacijos koeficientas
% degree - viršūnių laipsniai
A = zeros(N,N);
for i=1:N
    for j=i+1:N
        if rand<=p
            A(i,j)=1;
            A(j,i)=1;
        end
    end
end
k = p*(N-1);
l = log(N)/(log(k));
C = k/N;
degree = sort(sum(A));

```

A2.WS.m

```

function [A,l,C,degree] = WS(n, p, k)
% n - viršūnių skaičius
% p - briaunų perjungimo tikimybė
% k - briaunų skaičius/2 modelio konstravimo pradžioje
% l - vidutinis kelio ilgis
% C - klasterizacijos koeficientas
% degree - viršūnių laipsniai
A = zeros(n,n);
for i=1:n
    for j = 1:k
        next = mod(i+j,n);
        prev = mod(i-j,n);
        if (next ==0)
            next = n;
        end;
        if (prev==0)
            prev = n;
        end;
        A(i,next) = 1;
        A(i,prev) = 1;
    end
end

```

```

    end;
end;

for k = 1:k
    for i = 1:n
        j = mod(i+k,n);
        if (j ==0)
            j = n;
        end;
        r = rand;
        if (p>r)
            e_vector = find(A(i,:)==0);
            l = length(e_vector);
            index = ceil(rand*l);
            while (e_vector(index)==i)
                index = ceil(rand*l);
            end;
            A(i,j)=0;
            A(j,i)=0;
            A(e_vector(index),i) = 1;
            A(i,e_vector(index)) = 1;
        end;
    end;
end;

l = (n/2*k)*fu(p*2*k*n);
C = (1-p)^3*(3*(k-1))/(2*(2*k-1));
degree = sum(A);
%-----
function f = fu(u)

f = (4/sqrt(u^2+4*u))*atanh(u/sqrt(u^2+4*u));

```

A3.BA.m

```

function [A,l,C,degree] = BA(n, m, k)
%n - galutinis viršūnių skaičius
%m -pradinių viršūnių skaičius
%k - prisijungiančių briaunų skaičius
% l - vidutinis kelio ilgis
% C - klasterizacijos koeficientas
% degree - viršūnių laipsniai
A = zeros (n,n);
nodes = k;
while (nodes~=n)
    nodes = nodes + 1;
    links = 0;

```

```

while (links~=m)
    graph_degree = sum(sum(A))/2;
    if (graph_degree==0)
        while (links~=m)
            random_node = ceil(rand*(nodes-1));
            if (A(nodes, random_node)~=1)
                A(nodes, random_node) = 1;
                A(random_node, nodes) = 1;
                links = links + 1;
            end;
        end;
    else
        random_node = ceil(rand*(nodes-1));
        random_node_degree = sum (A(random_node,:));
        if rand < (random_node_degree/graph_degree)
            if (A(nodes, random_node)~=1)
                A(nodes, random_node) = 1;
                A(random_node, nodes) = 1;
                links = links + 1;
            end;
        end;
    end;
end;
end;
end;
l = log(n)/log(log(n));
C = n^(-0.75);
degree = sum(A);

```

A4. vidutinis_fazinis_greitis.m

```

function atsakymas = vidutinis_fazinis_greitis(d_fi)
    atsakymas = abs(mean(d_fi,2));
end

```

A5. daznis.m

```

function atsakymas = daznis(fi)
    c = 0.975;
    B = (cos(2*pi*fi)>c);
    atsakymas = mean(B,2);
end

```

A6.solve.m

```

function dy = Solve(t,y,fi, model, N, t_span, triuksmas)
    c = 2*pi;
    K = 8*pi;
    k = 3*pi; %<4pi - silpna srovė %
    dy = zeros(N*2,1);
    dyy = zeros(N,1,2);
    y = reshape(y,N,2);
    r = repmat(y(:,1),1,N);
    cc = repmat(c,N,1);
    new = sum(diag(y(:,2)')*model,2)/(N-1);
    new = y(:,2);
    dy1 = y(:,2);
    dy2 = cc-new+k*cos(y(:,1))+ K*sum(model.* sin(r'-
r),2)/N+triuksmas;
    dyy(:,:,1) = dy1;
    dyy(:,:,2) = dy2;
    dy = dyy(:);
end

```

A7.pagrindine.m

```

N = 100; %Neuronų skaičius tinkle
tspan = 0:0.1:20; %laiko žingsnis%
greitis = zeros(1,length(tspan));
dazniss = zeros(1,length(tspan));
dfi_initial = ones(N,1)*2*pi; %Šaudymo režimas%
tt = 0;
D = 0;
triuksmas=randn(N,1)*sqrt(2*D);
h =0;
v = 0.1;
ats = zeros(length(v),length(tspan));
for gen =1
    h= h+1;
    kreive = zeros(1,1);
    [A,l,C,degree] = ER(N,gen);
    for k = 1:1
        tt=tt+1;
        fi_initial=(randn(N,1)*0.5*pi)+2*pi;
        fi = zeros(length(tspan),N);
        d_fi = zeros(length(tspan),N);
        [t,y] = ode45(@(t,y)Solve(t,y,fi, A,N,tspan,
triuksmas),tspan,[fi_initial dfi_initial]);
        fi = y(1:size(t,1),1:N);
        d_fi = y(1:size(t,1),N+1:end);
        greitis(tt,:) = vidutinis_fazinis_greitis(d_fi)';
        dazniss(tt,:) = dazniss(fi)';
        B = sum(abs(d_fi(end,:))<1)/N;
    end

```

```
    R= abs(sum(exp(fi*1i),2)/N);  
end;  
    ats(h,:) = B;  
end;  
naujas = flipud(greitis);  
imagesc(naujas); colorbar; colormap('gray');
```