



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA**

**Irena Gustainytė**

**VERTYBINIŲ POPIERIŲ GRAŽŲ**  
**MODELIAVIMAS TIKIMYBINIAIS DĖSNIAIS**  
**SU TRŪKIA PASISKIRSTYMO FUNKCIJA**

Magistro darbas

**Vadovas**

**doc. dr. A. Kabašinskas**

**KAUNAS, 2013**



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA**

**TVIRTINU**  
**prof. habil. dr. V. Pekarskas**  
**2013 06 02**

**VERTYBINIŲ POPIERIŲ GRAŽŲ**  
**MODELIAVIMAS TIKIMYBINIAIS DĖSNIAIS**  
**SU TRŪKIA PASISKIRSTYMO FUNKCIJA**

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

**Vadovas**  
\_\_\_\_\_ **doc. dr.**  
**A. Kabašinskas**  
**2013 06 01**

**Recenzentas**  
\_\_\_\_\_ **doc. dr. I. Belovas**  
**2013 06 01**

**Atliko**  
**FMM 1/1 gr. stud.**  
\_\_\_\_\_ **I. Gustainytė**  
**2013 05 30**

**KAUNAS, 2013**

## KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

**Pirmininkas:** Rimantas Rudzkis, profesorius (VU)

**Sekretorius:** Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

**Nariai:** Jonas Valantinas, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., direktoriaus pavaduotojas (UAB „Danet Baltic“)

**Gustainytė I. Stock price modeling by probability law with discontinuous distribution function: Master's work in applied mathematics / supervisor assoc. prof. dr. A. Kabašinskas; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2013. – 83 p.**

## SUMMARY

One of the most important problems in emerging financial markets is that these markets in financial data often do not meet the conditions of normality. Many securities markets research carried out on the assumption that financial data is distributed according to Gauss's law and therefore not all of these research findings and the results can be applied to developing the financial markets. To solve the zero returns problem was suggested stable patterns change mixed - continuous and discrete models mixture.

One of the tasks in this work was to investigate distribution of the dependent mixed-normal sequences. The results showed that when the number of sequences is less than 5 (as well as for independent sequences) mixed-normal distribution describes the sequence of sums better than the normal distribution. When increasing the number of summands, number of sequence that are distributed by normal law is increasing, while compatibility with mixed-normal distribution seem no longer justified.

In this we introduce new stock portfolio model, which is based on a mixed-normal distribution. This is a modification of the Markowitz model, adding stock returns mean and variance without 0, and evaluating the effect of no change in stock prices, i.e. stock price change probability  $p$ . For analysis were selected Lithuania stock data. For all sampled stock returns, Kolmogorov-Smirnov and Kountruvelis tests, verified by normality and compatibility with mixed-normal laws. The results showed that none of the selected stock satisfy the conditions of normality. Selected stock returns are better described by mixed-normal law. To show efficiency of model developed, we have compared it to Markowitz, MAD and Minmax model portfolios. For all portfolios were calculated portfolio behavioral ratios: Sharpe, Sortino, Var, Starr, Rachev. Sharpe, Sortino, VaR and Starr ratios suggests to choose MixNormal portfolio. However Rachev R-ratio predicted to be the best Markowitz portfolio. Historical estimation of possible profit showed that the maximum yield was obtained by a new method consisting MixNormal portfolio.

## TURINYS

TURINYS.....	5
LENTELIŲ SĄRAŠAS.....	7
PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS.....	8
ĮVADAS.....	10
1. ANALITINĖ DALIS.....	11
1.1 MIŠRIEJI SKIRSTINIAI.....	11
1.2 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO FORMAVIMAS.....	12
1.3 VIDURKIO-RIZIKOS MODELIAI.....	13
1.4 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO ELGESIO MATŲ ISTORINIO VYSTYMOSI APŽVALGA.....	13
1.5 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO ELGESIO MATŲ KLASIFIKACIJA.....	15
1.6 AKCIJŲ KAINŲ MODELIAI.....	16
1.7 MATEMATINĖ PROGRAMINĖ ĮRANGA.....	20
1.8 DARBO UŽDAVINIAI.....	21
2. METODOLOGINĖ DALIS.....	22
2.1 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO KIEKYBINĖS CHARAKTERISTIKOS.....	22
2.2 MIŠRUSIS-NORMALUSIS DĖSNIS.....	23
2.3 PRIKLAUSOMŲ MIŠRIŲJŲ-NORMALIŲJŲ SEKŲ SUMŲ PASISKIRSTYMO DĖSNIŲ NUSTATYMAS.....	25
2.4 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO AKCIJŲ GRAŽŲ ANALIZĖ.....	35
2.5 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO ELGESIO MATŲ ANALIZĖ.....	38
2.5.1 SHARPE KOEFICIENTAS.....	39
2.5.2 SORTINO KOEFICIENTAS.....	40
2.5.3 $VAR_{\alpha\%}$ KOEFICIENTAS.....	41
2.5.4 STARR KOEFICIENTAS.....	42
2.5.5 RACHEV KOEFICIENTAS.....	43
2.6 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIŲ OPTIMIZAVIMAS VIDURKIO-RIZIKOS METODAIS.....	43
2.6.1 MARKOWITZ KLASIKINIS MODELIS.....	44
2.6.2 VIDUTINIO ABSOLIUTINIO NUOKRYPIO MODELIS MAD.....	45
2.6.3 MINMAX MODELIS.....	46
2.6.4 MIXNORMAL MODELIS.....	46
2.7 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO ELGESIO MATŲ TYRIMO METODOLOGIJA.....	47
3. TIRIAMOJI DALIS.....	48

3.1 VERTYBINIŲ POPIERIŲ GRAŽŲ DUOMENŲ ANALIZĖ.....	48
3.1.1 VERTYBINIŲ POPIERIŲ GRAŽŲ SKAITINĖS CHARAKTERISTIKOS.....	48
3.1.2 VERTYBINIŲ POPIERIŲ GRAŽŲ SUDERINAMUMO TESTAI.....	49
3.2 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIŲ SUDARYMAS.....	51
3.2.1 MARKOWITZ PORTFELIS.....	51
3.2.2 MAD PORTFELIS.....	53
3.2.3 MINMAX PORTFELIS.....	54
3.2.4 MIXNORMAL PORTFELIS.....	56
3.2.5 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIŲ ANALIZĖ IR PALYGINIMAS.....	58
3.3 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIŲ ELGESIO MATŲ ANALIZĖ.....	60
3.3.1 INVESTICINIO SPRENDIMO PRIĖMIMAS PASITELKIANČIUS PORTFELIŲ ELGESIO MATUS.....	61
REKOMENDACIJOS IR TOLESNI TYRIMAI.....	62
IŠVADOS.....	63
LITERATŪRA.....	64
PRIEDAI.....	67
1 PRIEDAS. AKCIJŲ GRAŽŲ DIAGRAMOS (2001 SAUSIO 2 D.–2012 LAPKRIČIO 17 D.).....	67
2 PRIEDAS. ATRINKTŲ AKCIJŲ KAINOS 2013 SAUSIO 2 D.–2013 KOVO 31 D., EUR.....	71
3 PRIEDAS. ATRINKTŲ AKCIJŲ GRAŽŲ 2013 SAUSIO 2 D.–2013 KOVO 31 D.....	72
4 PRIEDAS. AKCIJŲ GRAŽŲ DIAGRAMOS (2013 SAUSIO 2 D.–2013 KOVO 31 D.).....	73
5 PRIEDAS. PASIRINKTŲ AKCIJŲ SKAITINĖS CHARAKTERISTIKOS IKI 2012 11 17.....	76
6 PRIEDAS. PORTFELIŲ KAINOS 2013 SAUSIO 2 D.–2013 KOVO 31 D., EUR.....	77
7 PRIEDAS. KOLMOGOROV-SMIRNOV SUDERINAMUMO TESTO MATHCAD REALIZACIJA.....	78
8 PRIEDAS. VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIŲ OPTIMIZAVIMO MATHCAD REALIZACIJA.....	79
9 PRIEDAS. PORTFELIŲ ELGESIO MATŲ SKAIČIAVIMO MATHCAD REALIZACIJA.....	82

## Lentelių sąrašas

Lentelė 3.1. Pasirinktų akcijų skaitinės charakteristikos iki 2012 11 17 .....	48
Lentelė 3.2. Kolmogorov-Smirnov suderinamumo su normaliuoju skirstiniu testo rezultatai .....	49
Lentelė 3.3. Kolmogorov-Smirnov suderinamumo su mišr.-norm. skirstiniu testo rezultatai .....	49
Lentelė 3.4. Koutrouvelis suderinamumo su normaliuoju skirstiniu testo rezultatai .....	50
Lentelė 3.5. Koutrouvelis suderinamumo su mišr.-norm. skirstiniu testo rezultatai .....	50
Lentelė 3.6. Kolmogorov-Smirnov suderinamumo su normaliuoju skirstiniu testo rezultatai .....	50
Lentelė 3.7. Kolmogorov-Smirnov suderinamumo su mišr.-norm. skirstiniu testo rezultatai .....	50
Lentelė 3.8. Koutrouvelis suderinamumo su normaliuoju skirstiniu testo rezultatai .....	50
Lentelė 3.9. Koutrouvelis suderinamumo su mišr.-norm. skirstiniu testo rezultatai .....	50
Lentelė 3.10. Markowitz vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2012 11 17 .....	51
Lentelė 3.11. Markowitz vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2013 03 31 .....	51
Lentelė 3.12. MAD vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2012 11 17 .....	53
Lentelė 3.13. MAD vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2013 03 31 .....	53
Lentelė 3.14. MinMax vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2012 11 17 .....	54
Lentelė 3.15. MinMax vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2013 03 31 .....	55
Lentelė 3.16. MixNormal vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2012 11 17 .....	56
Lentelė 3.17. MixNormal vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2013 03 31 .....	56
Lentelė 3.18. MixNormal v. p. portfelio akcijų svorio koeficientai, kai dydžiai nepriklausomi .....	57
Lentelė 3.19. MixNormal v. p. portfelio akcijų svorio koeficientai, kai dydžiai priklausomi .....	58
Lentelė 3.20. Vertybinių popierių portfelių pelningumas .....	60
Lentelė 3.21. Vertybinių popierių portfelių elgesio matai .....	61

## Paveikslų sąrašas

Paveikslas 1.1. Anykščių vyno akcijų gražos 2013 m. I–III mėn. ....	11
Paveikslas 1.2. Binominis modelis.....	17
Paveikslas 1.3. Akcijos kainos kitimas, per keturis laiko periodus, taikant binominį modelį .....	17
Paveikslas 1.4. Trinominis modelis.....	18
Paveikslas 1.5. Vieno laiko žingsnio ir dviejų laiko žingsnių trinominis modelis.....	19
Paveikslas 1.6. Tipinis akcijos kainos modeliavimas šuolio difuzijos būdu.....	20
Paveikslas 2.1. Tankio funkcijų grafinis palyginimas.....	23
Paveikslas 2.2. Pasiskirstymo funkcijų grafinis palyginimas .....	24
Paveikslas 2.3. Charakteringųjų funkcijų grafinis palyginimas .....	24
Paveikslas 2.4. Sekų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsnium, $SS = 2$ .....	30
Paveikslas 2.5. Sekų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsnium, $SS = 5$ .....	30
Paveikslas 2.6. Sekų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsnium, $SS = 15$ .....	30
Paveikslas 2.7. Kolmogorov-Smirnov testo rezultatų palyginimas, $SS = 2$ .....	33
Paveikslas 2.8. Skirtingai pasiskirsčiusių sekų sumų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsnium, $SS = 2$ .....	33
Paveikslas 2.9. Skirtingai pasiskirsčiusių sekų sumų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsnium, $SS = 5$ .....	33
Paveikslas 2.10. Skirtingai pasiskirsčiusių sekų sumų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsnium, $SS = 15$ .....	34
Paveikslas 2.11. Sumų suderinamumas su normaliuoju dėsnium (Kolmogorov-Smirnov testas).....	34
Paveikslas 2.12. Sumų suderinamumas su normaliuoju dėsnium (Koutrouvelis testas).....	35
Paveikslas 2.13. Sumų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsnium (Koutrouvelis testas).....	35
Paveikslas 2.14. Vertybinių popierių elgesio matų palyginimo grafikas.....	38
Paveikslas 2.15. Markowitz efektyvioji riba.....	45
Paveikslas 3.1. Markowitz portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2012 11 17.....	52
Paveikslas 3.2. Markowitz portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2013 03 31.....	52
Paveikslas 3.3. MAD portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2012 11 17.....	54
Paveikslas 3.4. MAD portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2013 03 31 .....	54
Paveikslas 3.5. MinMax portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2012 11 17 .....	55
Paveikslas 3.6. MinMax portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2013 03 31 .....	56
Paveikslas 3.7. MixNormal portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2012 11 17 .....	57
Paveikslas 3.8. MixNormal portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2013 03 31 .....	57
Paveikslas 3.9. MixNormal v. p. portfelio akcijų svorio koeficientai, kai dydžiai nepriklausomi .....	58
Paveikslas 3.10. MixNormal v. p. portfelio akcijų svorio koeficientai, kai dydžiai priklausomi .....	58



Paveikslas 3.11. Sudarytų vertybinių popierių portfelių grąžų diagramos .....	59
Paveikslas 3.12. Vertybinių popierių portfelių kainų diagrama.....	60

## IVADAS

Viena iš svarbiausių problemų besiformuojančiose finansinėse rinkose yra ta, kad tokių rinkų finansiniai duomenys dažniausiai netenkina normalumo sąlygos. Daugelis vertybinių popierių rinkų tyrinėjimų atlikti laikantis prielaidos, kad finansiniai duomenys yra pasiskirstę pagal Gauso dėsnį, todėl ne visos šių tyrimų išvados ir rezultatai gali būti pritaikomi besivystančioms finansinėms rinkoms.

Nulinių gražų problemai spręsti siūloma stabiluosius modelius keisti mišriaisiais – tolydžių ir diskrečių modelių mišiniu [4]. I. Belovo, A. Kabašinsko ir L. Sakalausko pasiūlytas ir ištyrinėtas mišrusis-stabilusis modelis yra nedaug sudėtingesnis nei stabilusis, tačiau daug efektyviau aprašo empirines duomenų charakteristikas.

Pagrindinis mišriųjų-stabiliųjų modelių trūkumas yra tas, kad tik keliais išimtiniais atvejais yra žinomos tikslios tankio ir pasiskirstymo funkcijų išraiškos. Be to, šie skirstiniai neturi baigtinės dispersijos, kai  $\alpha = 2$ , o kai  $\alpha \leq 1$  – ir vidurkio [4]. Klasikinėje investicinio portfelio teorijoje dispersija yra pagrindinis rizikos matas, todėl bendruoju atveju mišriųjų-stabiliųjų skirstinių taikymas praktikoje yra sudėtingas.

Atskiras mišriųjų-stabiliųjų skirstinių atvejis yra mišrusis-normalusis skirstinys. Šis skirstinys ypatingas tuo, kad turi išreikštinę tankio funkcijos formą, taip pat – baigtinius pirmosios ir antrosios eilės momentus. Taigi, mišrusis-normalusis dėsnis yra paprastas ir patogus finansinėms rinkoms tirti ir modeliuoti.

Šiame darbe atliekamo tyrimo tikslas:

- Eksperimentiškai ištirti priklausomų atsitiktinių dydžių sumų pasiskirstymą.
- Ištirti vertybinių popierių portfelio sudarymo galimybes, kai jų gražos pasiskirstę pagal Mix-Normal skirstinį.
- Pagrįsti gautų rezultatų patikimumą.

## 1. ANALITINĖ DALIS

Besivystančių finansinių rinkų vertybinių popierių gražų sekose pastebimos ilgos nulinių gražų serijos. Tai reiškia, kad egzistuoja gana ilgi laikotarpiai, kai konkrečios akcijos kaina nesikeičia. Šis reiškinys vadinamas stagnacijos arba pasyvumo efektu [4]. Pasyvumo problema yra labai opi Baltijos ir kitų Centrinės ir Rytų Europos šalių finansų rinkose. Šių šalių vertybinių popierių rinkose nulinių būsenų skaičius gražų sekose svyruoja tarp 25 % ir 60 %. Vidutiniškai nulinės būsenos sudaro beveik pusę visos gražų sekos.

Šį reiškinį puikiai iliustruoja 1.1 paveikslas, kuriame pateikta AB „Anykščių vinas“ akcijų gražos 2013 m. sausio –kovo mėnesiais.



**Paveikslas 1.1. Anykščių vynu akcijų gražos 2013 m. I–III mėn.**

Daugelis vertybinių popierių rinkų tyrinėjimų atlikti laikantis prielaidos, kad finansiniai duomenys yra pasiskirstę pagal Gauso dėsnį. Dėl šios priežasties ne visos šių tyrimų išvados ir rezultatai gali būti pritaikomi besivystančioms finansinėms rinkoms. Tokiose finansinėse rinkose vis dažniau taikomi stabilieji skirstiniai, kurie paprastai pasižymi asimetrija ir ekscesu. Nors šie modeliai gana gerai aprašo finansinių duomenų sekas, tačiau dar geriau sekas su stagnacijos efektu aprašo mišrieji-stabilieji skirstiniai.

### 1.1 MIŠRIEJI SKIRSTINIAI

Mišrieji gražų modeliai sudaromi laikantis prielaidos, kad su tam tikra tikimybe  $p$  gražos yra pasiskirsčiusios pagal tam tikrą tolydųjį dėsnį ir su tikimybe  $(1-p)$  jos lieka nepakitusios. Tarkime, kad  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)$  – tam tikros pasiskirstymo funkcijos, o  $p_1, p_2, \dots, p_k$  – teigiami realieji skaičiai, kurių suma  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ . Apibrėžiama funkcija  $G(x)$ :

$$G(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + \dots + p_k F_k(x) \quad (1.1)$$

Akivaizdu, kad ši funkcija tenkina visas pasiskirstymo funkcijų savybes: funkcija  $G(x)$  yra nemažėjanti ir apibrėžta intervale  $[0, 1]$ , taip pat  $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$  ir  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$ , t. y. funkcija  $G(x)$  apibrėžia tam tikrą pasiskirstymą. Ši funkcija vadinama mišriojo pasiskirstymo funkcija, kadangi ji „sumaišo“ įvairias skirtingas pasiskirstymo funkcijas pagal jų tikimybinį pasiskirstymą. Kokia yra pati mišrioji pasiskirstymo funkcija – tolydi ar diskreti – priklauso nuo jungiamų pasiskirstymo funkcijų: kai jos yra diskrečios, tai ir mišrioji pasiskirstymo funkcija yra diskreti, o kai šios funkcijos yra tolydžios, tai ir mišrioji pasiskirstymo funkcija yra tolydi. Tačiau egzistuoja ir tokie mišrieji pasiskirstymai, kurių negalima priskirti nei vienai iš minėtųjų funkcijų klasių: diskrečiųjų ir tolydžiųjų pasiskirstymo funkcijų mišiniai [10]. Būtent tokie yra mišrieji-stabilieji pasiskirstymo dėsniai.

Mišrieji-stabilieji dėsniai aprašomi penkiais parametrais:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  ir tikimybe  $p$ . Čia parametrai apibūdina:  $\alpha$  – stabilumą,  $\beta$  – asimetriją,  $-1 \leq \beta \leq 1$ ,  $\mu \in R$  – poslinkį.  $\sigma$  yra mastelio parametras,  $\sigma > 0$ ,  $p$  – tikimybė, kad akcijos kaina pasikeis.

Kai stabilumo indeksas  $\alpha < 1$  neegzistuoja pirmasis momentas, o kai  $\alpha < 2$  neegzistuoja antrasis momentas. Modeliuojant finansines sekas paprastai laikoma, kad  $\alpha \in (1, 2]$ , todėl praktiškai pritaikyti mišriuosius-stabiliuosius dėsnius vertinant riziką yra sudėtinga (dispersija, klasikinis rizikos matas, egzistuoja tik kai  $\alpha = 2$ ). Mišriųjų-stabiliųjų skirstinių tikimybinis tankis, kaip ir stabilijų skirstinių atveju, išreikštinę formą turi tik tam tikrais išimtiniais atvejais. Mišrusis-normalusis skirstinys yra atskiras mišriųjų-stabiliųjų skirstinių atvejis, kai stabilumo indeksas  $\alpha = 2$ , tai simetrijos parametras  $\beta$  gali būti bet koks. Mišrusis-normalusis skirstinys yra analiziškai „patogus“ – turi išreikštinę tankio funkciją, baigtinius pirmąjį ir antrąjį momentus, todėl jis yra siūlomas besivystančių vertybinių popierių rinkų duomenims modeliuoti [17] [18].

## 1.2 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO FORMAVIMAS

Vieno periodo vertybinių popierių portfelio formavimo problema yra pasirinkimo tarp atsitiktinių dydžių sprendimo ieškojimas, kai tikimasi didžiausios grąžos ir mažiausio rizikos laipsnio. Formuoti investicinį apsisprendimą padeda trijų tipų modeliai: tikėtinos naudos maksimizavimo, stochastinio dominavimo ir vidurkio-rizikos [32].

Pradedant formuoti vertybinių popierių portfelį apibrėžiama, kaip tam tikrame modelyje vertinsime riziką ir laukiamą pelną. Pasižymėkime  $\rho$  – rizikos matas, t. y. funkcija, atvaizduojanti atsitiktinį dydį į realių skaičių aibę. Laikysime, kad pelno norma arba aktyvo grąža bus santykis tarp periodo pradžios ir pabaigos akcijų grąžų skirtumo ir periodo pradžios grąžos.

### 1.3 VIDURKIO-RIZIKOS MODELIAI

Klasikinį vidurkio-rizikos modelį 1952 m. pristatė Markowitz. Jis pasiūlė naudoti portfelio grąžų standartinį nuokrypį kaip rizikos matą ir manydamas, jog grąžos pasiskirsčiusios pagal normalųjį dėsnį, aprašė efektyviają portfelio kreivę, kuri yra apibrėžiama minimalia rizika (dispersija) ir užsibrėžtu laukiamu pelnu [2]. Markowitz darbai buvo svarbūs formuojantis moderniajai vertybinių popierių portfelio teorijai. Jo pradėta vidurkio-rizikos modelių revoliucija tęsiasi iki dabar. Už šią teoriją 1990 m. Markowitz gavo Nobelio premiją ekonomikos srityje.

Mokslininkai ir dabar stengiasi pasiūlyti alternatyvius portfelio vidurkio-rizikos metodus, kurių daugelis realizuojami tiesinio programavimo metodais. 1988 m. Konno [21], laikydamiesi grąžų daugiamačio normalumo sąlygos, parodė, kad vidutinio absoliutinio nuokrypio (angl. Mean Absolute Deviation, žym. MAD) rizikos matas yra ekvivalentus dispersijos modelio matui. 1998 m. pasiūlytas Minmax (Young [14]) modelio portfelis, kuris iš  $n$  akcijų pasirenka akcijas tiesiogiai remiantis portfelio elgesiu praeityje per visus istorinius stebėjimus  $t = 1, \dots, T$ . Minimali grąža, kuri galėjo būti praeityje, šiuo atveju sutampa su rizikos matu. Modeliu stengiamasi maksimizuoti šią reikšmę, kol pasiekiamas nurodytas laukiamos grąžos lygis. Kita, alternatyvi ir dažniausiai naudingesnė, Minmax portfelio parinkimo sąlyga yra – maksimalaus stebėtame laike galimo nuostolio minimizavimas. Galutinį sprendinį gali labai stipriai paveikti netgi viena išsišokanti duomenų reikšmė. 2000 m. Horniman ir kt. [12] išspausdino alternatyvių portfelio parinkimo modelių apžvalgą.

### 1.4 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO ELGESIO MATŲ ISTORINIO VYSTYMO SI APŽVALGA

Markowitz finansų teorijos darbai „Portfolio selection“ [23] ir „The optimization of a quadratic function subject to linear constraints“ [23] buvo ne tik vidurkio-rizikos vertybinių popierių formavimo modelių pagrindas, bet ir vertybinių popierių elgesio matų vystymosi pradžia.

1966 m. William Forsyth Sharpe darbas „Mutual Fund Performance“ [33] pradėjo diskusijas apie vertybinių popierių portfelio elgsenos prognozavimą atsižvelgiant į riziką ir pelną. Jis taip pat, kaip ir Markowitz, nagrinėjo normaliai pasiskirsčiusias akcijų grąžas. Mokslininko pasiūlyta statistika matavo portfelio elgesį kaip pelno pokytį per vieną rizikos vienetą. Pradžioje pavadintas pelno rizikai matu, per ilgą laiką tapo žinomas kaip Sharpe koeficientas. W.F Sharpe, nagrinėdamas savo modelį, iškėlė du pagrindinius klausimus. Pirmas: kas yra tinkamiausias portfelio rizikos rodiklis? Ir antras: kokia yra pusiausvyra tarp portfelio rizikos ir laukiamos grąžos? Kaip ir Markowitz portfelio formavimo metodas, Sharpe rodiklis investuotojui padeda priimti sprendimą atsižvelgdamas į vieno periodo akcijų grąžų vidurkius ir standartinį nuokrypį, tardamas, kad egzistuoja duomenų dispersija.

Nepaisant plačiai naudojamo Sharpe rodiklio, didelė mokslinės literatūros dalis rodo, kad akcijų gražos paprastai nėra normaliai paskirsčiusios ir ne visada egzistuoja akcijų gražų dispersija [4][16]. 1979 m. australų mokslininkas W. L. Beedles [3] užsiminė apie portfelio elgesio prognozavimą pasitelkiant asimetrijos koeficientą ir investiciniuose sprendimuose aiškiai teikiant pirmenybę teigiamai asimetrijai. Hayne E. Leland [5] savo darbe nurodė, kad jei investicijų graža turi didelę asimetriją, tai taikyti Sharpe rodiklio negalima.

Mokslininkai ilgai nagrinėjo Sharpe rodiklį keldami klausimą, ar tinkamai pasirinktas standartinis nuokrypis kaip rizikos matas. 1959 m. Markowitz bandė standartinį nuokrypį pakeisti pusiau dispersija, kuri matuotų nuokrypį žemiau gražų vidurkio. Pasinaudoję šiuo pasiūlymu 1991 m. Sortino ir van der Meer [35] standartinį nuokrypį pasiūlė pakeisti pusiau dispersijos rizikos matu. Po kelių metų buvo išvestas Sortino koeficientas, kuris pakeitė Sharpe koeficiento vardiklyje esantį rizikos matą pusiau dispersija. Kol Sharpe rodiklis teikia didelę reikšmę akcijos gražos nepastovumui, Sortino koeficientas diferencijuoja nepastovumą į aukštyn ir žemyn nuklystančius akcijų gražų pokyčius. Pokyčiai aukštyn yra pageidaujami ir nepriskiriami nepastovumui.

M. Stutzer [25] tai pat pasiūlė savo indeksą, kuris išspręstų Sharpe koeficiento naudojimo tik normaliai pasiskirsčiusiems duomenims problemą. Jis išvedė portfelio elgesio matą, kuris portfelį vertina pagal mažiausią nukrypimo nuo etalono tikimybę. Techniškai Stutzer indeksas blogai vertina portfelius su neigiama asimetrija ir dideliu ekscesu – tokie portfeliai turėtų žemesnį Stutzer indeksą nei normaliai pasiskirstę, nors ir su tuo pačiu vidurkiu ir dispersija. Jei šį indeksą skaičiuotume normaliai pasiskirsčiusiems duomenims, jis sutaptų su Sharpe koeficientu.

Kitas plačiai naudojamas rizikos matas yra vertė rizikai (Value-at-risk). Pagal apibrėžimą VaR yra atitinkamas nuostolių pasiskirstymo dėsnio percentilis, t. y. su tam tikru pasikliovimo lygmeniu  $\gamma$ , portfelio  $\gamma$ -VaR yra tam tikras mažiausias pinigų kiekis  $\zeta$ , kad su tikimybe  $\gamma$ , nuostoliai bus ne didesni nei  $\zeta$ . VaR rizikos mato populiarumą nulėmė jo interpretacijos paprastumas (Puelz [30]). Šis rizikos matas naudojamas to pačio pavadinimo efektyvumo mato VAR apskaičiavime. Portfelio elgesio matas skaičiuoja santykį tarp laukiamos gražos ir vertės rizikai. Tačiau VaR yra sunku taikyti esant diskretiems dėsniams. Šiuo atveju VaR funkcija nėra išgaubta ir glodi, bei gali turėti keletą lokalių ekstremumų. Šis modelis taip pat buvo tikrinamas esant įvairiems nuostolių skirtiniams ir esant kai kuriems jų VaR netenkina dalies savo savybių, pavyzdžiui, Gauso dėsniumi.

VaR koeficiento trūkumai pastūmėjo mokslininkus tobulinti šį modelį ir išvesti sąlyginę rizikuojamąją vertę (angl. Conditional Value-at-Risk arba CVaR). Bendru atveju, įskaitant ir diskrečius dėsnius, CVaR aprašomas kaip VaR ir griežtų nuostolių, viršijančių VaR, vidurkis. CVaR, kuris yra išvedamas panaudojant VaR rizikos matą, turi daugiau teigiamų savybių nei VaR: CVaR rizikos funkcija yra informatyvesnė, subadityvi ir išgaubta [31].

Pasitelkiant CvaR informatyvumą buvo sukurti populiarūs STARR ir Rachev portfelio elgesio matai, kurių apskaičiavimui buvo naudojamas šis rizikos matas. STARR koeficientas [24] skaičiuojamas ieškant santykio tarp nuokrypio nuo vidurkio pertekliaus ir CvaR. Rachev kitaip R-Ratio [6] skaičiuoja santykį tarp CvaR prie priešingo pasiklivimo lygmens ir CvaR prie kito pasiklivimo lygmens.

## 1.5 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO ELGESIO MATŲ KLASIFIKACIJA

Simone Farinelli kartu su bendraautorais [11] pasiūlė portfelio elgesio matus skirstyti į:

- vienpusius;
- dvipusius.

Sharpe rodiklis skaičiuoja portfelio grąžą ir riziką dvipusiais matais, t. y. teigiami ir neigiami portfelio grąžų nuokrypiai yra traktuojami vienodai. Tai galėtų suklaidinti, jei investuotoją domina teigiamų arba/ir neigiamų nukrypimų nuo grąžų vidurkio kontrolė. Bet tai galėtų būti korektiška, jei, pavyzdžiui, investuotojas siekia užfiksuoti stabilumą apie grąžų vidurkį. Situacija galėtų būti dar blogesnė, jei investuotojas dirba su asimetriškais ir sunkias uodegas turinčiomis grąžomis.

Skirtingas neigiamų ir teigiamų nuokrypių matavimas ir atitinkamai pajamų ir nuostolio traktavimas yra išpildytas vienpusiuose portfelio elgesio matuose, pavyzdžiui, Rachev koeficiente. Investuotojas atsižvelgdamas į elgesio mato skaičiavimo rezultatus, bei laukiamų pajamų ir portfelio rizikos santykį, sprendžia ar jį tenkina prognozuojami grąžų ekstremumai.

Portfelio elgesio matai yra nagrinėjami ir skirstomi pagal juose naudojamus rizikos matus. Populiariausią rizikos matų aksiomatinę charakteristiką kartu su kolegomis pasiūlė Artzner [21]. Aksiomų sistema, pavadinta ADEH, apibrėžė keturias rizikos mato  $R(X)$ , kur  $X$  – portfelio grąža, aksiomas:

- |                              |  |
|------------------------------|--|
| 1. Subadityvumo              | $R(X_1 + X_2) \leq R(X_1) + R(X_2);$   |
| 2. Teigiamo homogeniškumo    | $R(cX) = cR(X), \quad c \geq 0;$   |
| 3. Poslinkio invariantiškumo | $R(X + c) = R(X), \quad \forall c;$ <span style="float: right;">(1.2)</span> |
| 4. Monotoniškumo             | $X \leq Y \Rightarrow R(Y) \leq R(X).$                                       |

Rizikos matas, tenkinantis (1.2) aksiomas, vadinamas koherentiniu. Kai  $R(X) \geq 0$ ,  $R(X)$  galima suprasti kaip minimalų papildomą reikiamą kapitalą, kurį pridėję prie rizikingos pozicijos  $X$  nustatytume nerizikingą poziciją ir patenkintume reikalavimus. Jei  $R(X) < 0$ , dydis  $|R(X)|$  gali būti atimtas nesukeliant pavojaus rizikos padidėjimui arba nepažeidžiant keliamų reikalavimų. Subadityvumas reikalauja, kad kompleksinių pozicijų rizika būtų ne didesnė nei atskirų tų pozicijų

rizikos suma. Homogeniškumas reiškia, kad tam tikros tos pačios pozicijos kartotinių gražų rizika yra atitinkamai daugkartinės pagrindinės pozicijos rizika. Poslinkio invariantiškumo aksioma teigia, kad pridėdami tam tikrą sumą prie pradinės rizikos mato pozicijos tuo dydžiu galime sumažinti riziką. Monotoniškumas aprašo, kad dėl didesnių galimų nuostolių  $X$  portfelis yra rizikingesnis nei  $Y$ .

Apskritai, rizikos matai  $R(X) = E(-X)$  ir  $R(X) = \max(-X)$  yra koherentiniai rizikos matai. Tai reiškia, kad net jei koherentiškumo sąlygos gali išskirti tinkamus reikalavimus priimtiniams rizikos matams, ne visi koherentiški rizikos matai gali būti tinkami.

## 1.6 AKCIJŲ KAINŲ MODELIAI

Procesas, kurio kitimas priklauso nuo atsitiktinumo, yra vadinamas stochastiniu procesu. Stochastiniai procesai gali būti klasifikuojami į diskretaus ar tolydaus laiko procesus. Diskretaus laiko stochastinis procesas yra toks, kai kintamojo reikšmė gali kisti tik pastoviais fiksuotais laiko momentais, o tolydaus laiko stochastiniais procesais vadinami tie, kurių metu pokyčiai gali atsirasti bet kuriuo laiko momentu. Stochastiniai procesai taip pat gali būti klasifikuojami į tolydaus arba diskretaus kintamojo procesus. Tolydaus kintamojo procesuose pagrindinis kintamasis gali įgyti bet kurią reikšmę tam tikrame intervale, o diskretaus kintamojo procesuose yra galima tik tam tikra diskreti reikšmė [14].

Anglų ir amerikiečių statistikai ir ekonomistai, kurie 20 a. pradėjo empiriškai ir teoriškai nagrinėti akcijų kainas, atrado tiesioginį Wiener'io proceso ryšį. Svarbus įnašas buvo padarytas 1959 m. amerikiečių astrofiziko M. F. Maury Osborn'o, kuris pirmas publikavo detalią hipotezių, kad akcijų kainos yra geometrinis Brauno judesys, analizę. Šis modelis buvo pavadintas Osborne'o lognormaliuoju modeliu, nes jis įrodė, kad akcijų kainų logaritmai yra pasiskirstę pagal Brauno judesį [27].

Naudojant geometrinį Brauno judesio modelį tariama, kad akcijų kainų gražos yra apibendrintas Wiener'io procesas. Tai reiškia, kad ji turi pastovų vidurkį ir pastovią dispersiją.

Empiriniai tyrimai rodo, kad pastaraisiais metais tik dalies akcijų gražos pasiskirstę pagal lognormalųjį dėsnį. Pastebėta, kad finansinių aktyvų gražos, ypač jei matavimo dažnis didelis (kas dieną, ar kas kelios valandos), pasižymi dideliu eksceso koeficientu, kuris auga didėjant gražų matavimo dažniui. Didelis eksceso koeficientas lemia ir didesnę ekstremaliųjų reikšmių tikimybę – sunkesnes, nei normaliojo skirstinio, uodegas. Todėl tam tikroms gražoms daryti normalumo prielaidą yra nekorektiška [27].

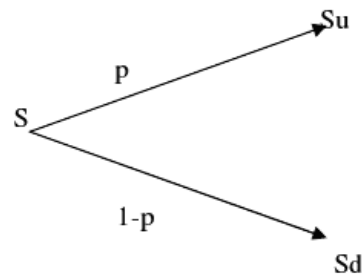
Kai akcijų kainų gražos turi pastovų vidurkį ir dispersiją, tada galima tarti, kad akcijų kainų gražos yra apibendrintas Wiener'io procesas.



Jei akcijų gražos pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį, tai gali būti naudojamas Brauno judesio procesas. Tai yra tolydus laike stochastinis procesas, kur ekstremumai atsiranda retai, atsižvelgiant į normaliojo skirstinio uodegų tikimybes.

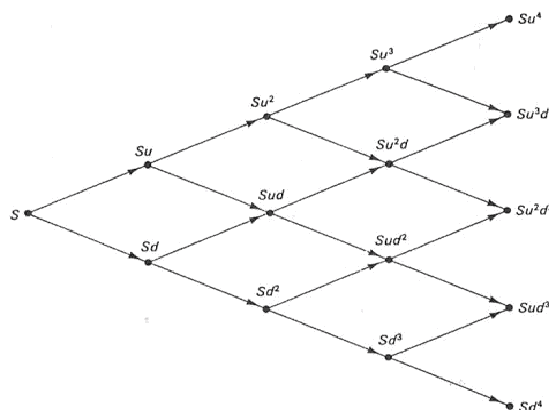
Akcijų kainų gražų procesui aprašyti taikomas geometrinis Wiener'io procesas patogus teorinėms išvadoms, tačiau turi nemažai trūkumų, susijusių su realios rinkos atitikimu. Daugelio finansų teoretikų, tarp kurių B. B. Mandelbrot (1960) yra vienas iš pirmųjų ir aktyviausių šios teorijos reiškėjų. Jo nuomone, pagrindinės problemos susijusios su Wiener'io proceso vienmačio marginaliojo skirstinio uodegos lengvumu, pokyčių nepriklausomumu ir trajektorijų tolydumu. Per pastaruosius kelis dešimtmečius kainų modeliavimui buvo išbandyti praktiškai visi žinomi atsitiktiniai procesai ir jų klasės.

Binominis modelis yra populiariausias ir vienas paprasčiausių vertybinių popierių įkainojimo metodų. Taikant šį modelį, akcijų kainos mažame laiko intervale kinta kaip pavaizduota Paveiksle 1.2.



**Paveikslas 1.2. Binominis modelis**

Jei tarsime, kad akcijos kaina prasideda nuo  $S$ , tai su tikimybe  $p$  akcijos kaina pakyla iki kainos  $Su$ , o su tikimybe  $p - 1$  nukrenta iki kainos  $Sd$ .



**Paveikslas 1.3. Akcijos kainos kitimas, per keturis laiko periodus, taikant binominį modelį**

Kaip matyti iš Paveikslo 1.3, taikant binominį modelį po dviejų laiko intervalų turėsime tris akcijų kainas, po trijų – keturias, po keturių – penkias ir t. t.

Šio modelio kintamieji  $u$ ,  $d$  ir  $p$  turi būti parinkti taip, kad mažame laiko intervale  $\Delta t$ , laukiama akcijos pelno norma būtų  $\mu\Delta t$  ir pelno normos dispersija būtų  $\sigma^2\Delta t$ . Modelio parametrai apibrėžiami taip:

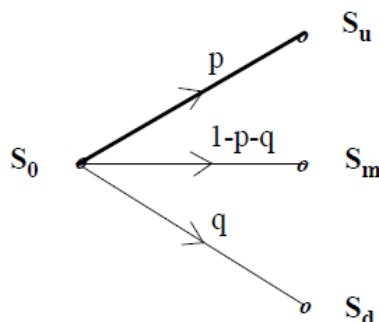
$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (1.3)$$

$$d = \frac{1}{u} = \frac{1}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}} \quad (1.4)$$

$$p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - d} \quad (1.5)$$

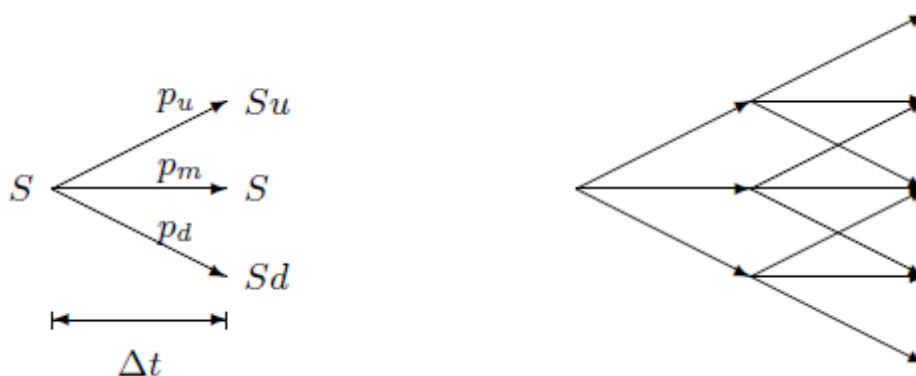
Galima įrodyti, kad riboje, kai  $\Delta t \rightarrow 0$ , binominio modelio akcijų kainų pokyčiai tampa geometrinu Brauno judesio modeliu [15].

Binominio modelio pratęsimas yra trinominis modelis (žr. Paveikslas 1.4.), tai gardelės pagrindu pagrįstas modelis naudojamas finansų matematikoje opcionų įkainojimui. Šį modelį 1986 m. sukūrė Phelim Boyle [8]. Taip pat galima būtų įrodyti, kad metodas atitinka baigtinių skirtumų metodu opcionų įkainojimą.



**Paveikslas 1.4. Trinominis modelis**

Pradžioje akcijos kaina yra  $S_0$ . Per laiko žingsnį akcijos kaina gali pajudėti trimis kryptimis: einant aukštyn su tikimybe  $p$  įgauti reikšmę  $S_u$ , einant žemyn su tikimybe  $q$  –  $S_d$  ir tiesiai su tikimybe  $1 - p - q$  –  $S_m$ . Laiko žingsnio pabaigoje gaunami penki nežinomi parametrai: dvi tikimybės  $p$  ir  $q$  ir trys naujos akcijų kainos:  $S_u, S_m, S_d$ .



**Paveikslas 1.5. Vieno laiko žingsnio ir dviejų laiko žingsnių trinominis modelis**

Rizikai neutraliame trinominiame modelyje laukiamoji akcijų reikšmė periodo pabaigoje turi būti pirminė kaina  $F_0 = S_0 e^{(r-\delta)\Delta t}$ , kur  $\delta$  yra dividendų pelningumas. Todėl:

$$pS_u + qS_d + (1 - p - q)S_m = F_0 \quad (1.6)$$

Jei akcijų kainos kintamumas per šį laikotarpį yra  $\sigma$ , tada susikirtimo taško kainos ir šuolių tikimybės atitinka:

$$p(S_u - F_0)^2 + q(S_d - F_0)^2 + (1 - p - q)(S_m - F_0)^2 = F_0^2 \sigma^2 \Delta t + O(\Delta t) \quad (1.7)$$

Čia  $O(\Delta t)$  žymi aukštesnio laipsnio reikšmes negu  $\Delta t$ . Skirtingos rizikai neutralaus modelio diskretizacijos turi skirtingas aukštesnės klasės reikšmes lygtyje (1.7).

Iš penkių parametrų, reikalingų sutvarkyti visa modelį, (1.6) ir (1.7) lygtys suteikia tik du apribojimus, todėl turime trimis parametrais daugiau negu reikia. Priešingai nei numanomam binominiam medžiui, visi nežinomi parametrai buvo nustatyti pagal apribojimus. Dėl to, galime sukonstruoti daug „ekonomiškai ekvivalenčių“ trinominių medžių, kurie riboje, kai laiko intervalai tampa labai maži, išreiškia tą pačią teoriją. Kai kintamumas nėra pastovus, paplitęs būdas yra pasirinkti akcijų kainas kiekviename mazge ir bandyti patenkinti du apribojimus per perėjimo tikimybių pasirinkimą. Reikia teisingai pasirinkti, kad perėjimo tikimybė išliktų tarp 0 ir 1. Tai būtina sąlyga išvengti arbitražo<sup>1</sup> [9].

Lévy procesas – tolydus stochastinis laiko procesas tikimybių teorijoje, kuris prasideda nuo 0, ir turi stacionarų nepriklausomą kedleg (càdlàg) tipo augimą. Tai yra stochastinis analogas nepriklausomų ir tapatingai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių, kurių labiausiai paplitę pavyzdžiai yra

<sup>1</sup> Arbitražo galimybė rinkoje atsiranda tada, kai egzistuoja tokia prekybos strategija (vienus vertybinius popierius perkant, o kitus parduodant), kai nulinė investicija į rizikingą vertybinių popierių portfelį atneša garantuotą teigiamą grąžą.

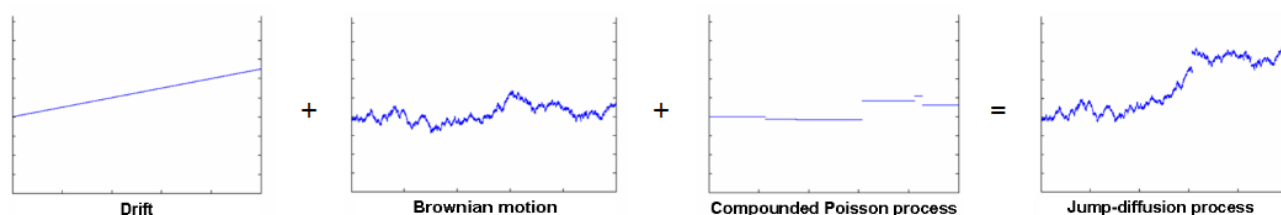
Wienerio (Wiener process) ir Puasono (Poisson process) tipo procesai. Pasiūlytas prancūzų matematiko Polio Lévy (Paul Pierre Lévy) [26].

Kiekvienam Lévy procese du pagrindiniai blokai yra Brauno judesys (difuzijos dalis) ir Puasono procesas (šolio dalis).

Akcijų kainų gražos empiriniai tyrimai parodė, kad sunkios uodegos yra nesuderinamos su Gauso modeliu, o tai reiškia, kad gali būti naudinga Brauno judėjimą pakeisti bendroju Lévy procesu.

Iš tiesų, H. Geman D. Madan ir M. Yor teigė, kad tai yra visiškai natūralu, Lévy-Ito skilimo požiūriu, kai mažo šolio sąvoka aprašo virpėjimą, kuris sukelia nedidelius kainų svyravimus. Didelio šolio sąvoka apibūdina didelius akcijų kainų pokyčius, kuriuos sukelia svarbūs rinkos sutrikimai, atsiradę dėl, pavyzdžiui, žemės drebėjimų ar teroristų išpuolių.

Šuolių-difuzijos modeliai yra ypatingi pasirinkimo sandorių įkainojimo modeliai. Kadangi bazinės kainos, pavyzdžiui, populiarios Black-Scholes modelio, modeliuojama Brauno judėjimu. Be to, šolio difuzijos modeliai apima šuolius, kurie yra realizuojami, pridėdant sudėtinį Puasono procesą.



**Paveikslas 1.6. Tipinis akcijos kainos modeliavimas šuolių difuzijos būdu [29]**

Akcijų kainų modeliavimui ir vertinimui naudojamas Merton'o šuolių – difuzijos metodas. Šuolių – difuzijos modeliuose akcijos kainos pokyčiai yra „susimaišę“ su normaliaisiais įvykiais, kurie sumodeliuoti kaip nereguliariai atsirandantys šuoliai. Tolydžioji akcijos kainos kitimo komponentė yra Wienerio (Brauno) procesas. Šuolio komponentė yra Puasono procesai.

## 1.7 MATEMATINĖ PROGRAMINĖ ĮRANGA

Programinė darbo dalis įgyvendinta MathCad programos pagalba. Šis paketas pasirinktas todėl, kad MathCad yra skaitmeninis matematinis paketas, turintis ir kai kurias simbolinio (analitinio) skaičiavimo funkcijas. Skaitmeniniai matematiniai paketai visus veiksmus atlieka apytiksliai, naudodami skaitmeninius skaičiavimo metodus, todėl jie ne visada gali pateikti analitinės išraiškas. Šio paketo pagalba automatizuojami sudėtingi skaičiavimo procesai. MathCad išsiskiria nesudėtinga vartotojo sąsaja, standartinių funkcijų ir simbolinio skaičiavimo bei programavimo priemonėmis, galimybe naudotis operacine sistema Windows, nereikalauja didelių kompiuterio resursų, pasižymi

puikia grafika ir labai didelė pavyzdžių biblioteka. Šiam darbui labai svarbus MathCad privalumas – optimizavimo paketas, kuris padės patogiai optimizuoti vertybinių popierių portfelius.

MS Office Excel 2013 programinė įranga naudojama suderinamumo testų rezultatams grafiškai iliustruoti, akcijų koreliacijos koeficientams apskaičiuoti ir kitiems paprastiems skaičiavimams atlikti.

## 1.8 DARBO UŽDAVINIAI

- Eksperimentiškai patikrinti ar priklausomų mišriųjų-normaliųjų sekų sumos skirstinys konverguoja į normalųjį ir mišrųjį-normalųjį dėsnį, kai:
  - a) sekos pasiskirstę vienodai;
  - b) sekų parametrai skiriasi.
- Ištirti vertybinių popierių portfelio įkainojimo modelį, kuris įvertintų tikimybę  $p$ , kad akcijos kaina pasikeis ir kai akcijų grąžos pasiskirstę pagal mišrųjį-normalųjį dėsnį.
- Pagrįsti gautų rezultatų patikimumą.

## 2. METODOLOGINĖ DALIS

### 2.1 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO KIEKYBINĖS CHARAKTERISTIKOS

Standartinis vertybinių popierių portfelis sudaromas iš  $n$  skirtingų akcijų, kurių svorio koeficientai portfelyje yra  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , su sąlyga, kad akcijų svorių suma lygi 1 ir akcijų svoriai yra teigiami dydžiai

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (2.1)$$

$$\text{kur } x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

Vertybinių popierių portfelio akcijos grąžas pažymėkime atsitiktiniais dydžiais  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , tuomet portfelio grąža bus

$$R = \sum_{i=1}^n x_i r_i, \quad (2.3)$$

$$\text{kur } x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

Žinodami kiekvienos vertybinio portfelio akcijos kainą  $k_i$ , akcijos grąžas  $r_i$  rasime pagal formulę

$$r_i = \frac{k_i - k_{i-1}}{k_{i-1}} \quad (2.5)$$

Laukiamą vertybinių popierių portfelio grąžos vidurkį žymėsime

$$E = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i, \quad (2.6)$$

$$\text{kur kiekvienos akcijos grąžų vidurkis yra: } \mu_i = E(r_i) \quad (2.7)$$

Vertybinių popierių portfelio grąžos dispersija vadinsime dydį

$$\begin{aligned} V &= E((r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)) = E\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i r_i - \sum_{i=1}^n x_i \mu_i\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j r_j - \sum_{j=1}^n x_j \mu_j\right)\right) = \\ &= E\left(\sum_{i=1}^n x_i (r_i - \mu_i) \sum_{j=1}^n x_j (r_j - \mu_j)\right) = E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j (r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

kur  $\sigma_{ij}$  yra kovariacija tarp grąžų  $r_i$  ir  $r_j$ , o apskaičiuojama

$$\sigma_{ij}^2 = E((r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)) \quad (2.9)$$

Lygtys (2.6) ir (2.8) yra teisingos atsitiktinai paskirsčiusiems dydžiams  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , kai egzistuoja tų dydžių dispersija. Nereikalaujama, kad minėti dydžiai būtų normaliai pasiskirstę.

## 2.2 MIŠRUSIS-NORMALUSIS DĒSNIS

Duomenims, kurių pasiskirstymo dėsnis dėl didelio akcijos kainos pasyvumo artėja į išsigimusį, taikant tolydžiuosius dėsnius – Gauso, stabiliuosius ir kitus – akcijų grąžų sekos aprašomos netinkamai. Šiame poskyryje pristatomas mišrusis-normalusis dėsnis [4], kuris buvo pristatytas tokiems duomenis modeliuoti.

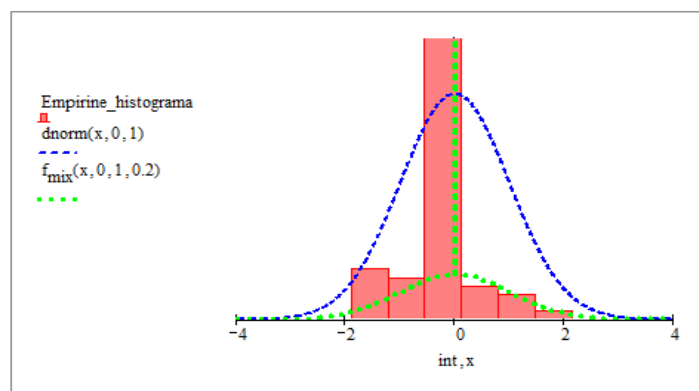
Atsitiktinio dydžio  $X$  skirstinį vadiname mišriuoju-normaliuoju, jeigu jo tankis:

$$f_{mix}(x, \mu, \sigma, p) = (1-p) \cdot \delta(x) + p \cdot f_n(x, \mu, \sigma), \quad (2.10)$$

su visais  $x \in R$ . Funkcija  $f_n(x, \mu, \sigma)$  yra normaliojo dėsnio tankio funkcija, o  $\mu$  ir  $\sigma$  yra normaliojo dėsnio parametrai. Parametras  $p$  – tikimybė, kad akcijos kaina pasikeis (t. y. grąža bus nenulinė). Funkcija  $\delta(x)$  – Dirako delta funkcija:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{kai } x = 0, \\ 0, & \text{kai } x \neq 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Paveiksle 2.1 pateikti standartinio normaliojo, mišriojo-normaliojo tankio funkcijų grafikai ir pagal tam tikrą algoritmą sugeneruotos mišriosios-normaliosios sekos santykinų dažnių histograma.



**Paveikslas 2.1. Tankio funkcijų grafinis palyginimas**

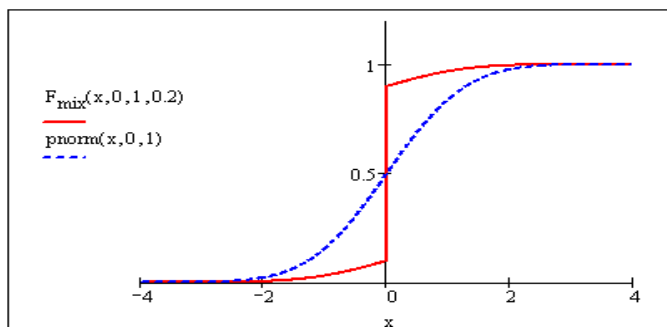
Mišriojo-normaliojo dėsnio pasiskirstymo funkcija:

$$F_{\text{mix}}(x, \mu, \sigma, p) = (1-p) \cdot \varepsilon(x) + p \cdot F_n(x, \mu, \sigma). \quad (2.12)$$

Funkcija  $F_n(x, \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$  yra normaliojo dėsnio pasiskirstymo funkcija, o funkcija  $\varepsilon(x)$ :

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leq 0, \\ 1, & \text{kai } x > 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Paveiksle 2.2 pavaizduotos standartinio normaliojo ir mišriojo-normaliojo dėsnų pasiskirstymo funkcijos.



**Paveikslas 2.2. Pasiskirstymo funkcijų grafinis palyginimas**

Mišriojo-normaliojo dėsnio charakteringoji funkcija:

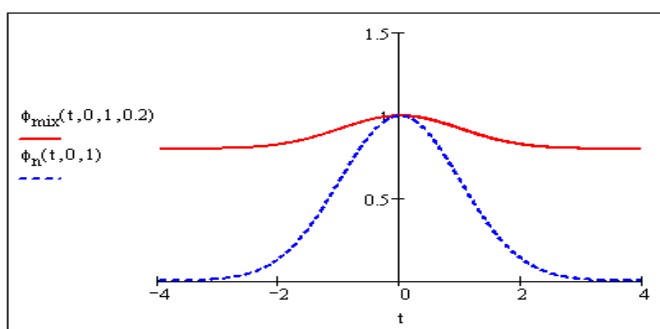
$$\phi_{\text{mix}}(t) = p \cdot \phi_n(t) + (1-p). \quad (2.14)$$

Funkcija  $\phi_n(t)$  yra normaliojo dėsnio charakteringoji funkcija.

Mišriojo-normaliojo dėsnio momentus generuojanti funkcija:

$$E[Y_t | W_w, 0 \leq u \leq s] = Y(s) \left(1 - p + p e^{\mu(t-s) + \frac{\sigma^2(t-s)}{2}}\right) = Y(s) \left(1 - p + p e^{(t-s)\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}\right) \quad (2.15)$$

Standartinio normaliojo ir mišriojo-normaliojo dėsnų charakteringųjų funkcijų modulių grafikai vaizduojami Paveiksle 2.3.



**Paveikslas 2.3. Charakteringųjų funkcijų grafinis palyginimas**



Mišriojo-normaliojo dėsnio vidurkis:

$$EX = p \cdot \mu, \quad (2.16)$$

čia  $\mu$  - normaliosios sekos be nulinių reikšmių vidurkis.

Mišriojo-normaliojo dėsnio dispersija:

$$DX = p \cdot (\sigma^2 + \mu^2(1 - p)), \quad (2.17)$$

čia  $\sigma^2$  – normaliosios sekos be nulinių reikšmių dispersija. Tuo galima įsitikinti suintegravus mišriojo

atsitiktinio dydžio tankio funkciją:  $\int_{-\infty}^{\infty} f_{mix}(x, \mu, \sigma, p) \cdot x^2 dx$ .

Teoriškai dispersija nuo sekos ilgio nepriklauso.

### 2.3 PRIKLAUSOMŲ MIŠRIŪJŲ-NORMALIŪJŲ SEKŲ SUMŲ PASISKIRSTYMO DĖSNIO NUSTATYMAS

D. Kašauskaitė baigiamajame bakalauriniame darbe „Vertybinių popierių portfelio modelio tyrimas, kai gražos pasiskirstę pagal mišrųjų-normalųjų dėsnį“ [19] nagrinėjo nepriklausomas mišriųjų-normaliųjų sekų sumas. Gauti rezultatai parodė, kad kai mišriųjų-normaliųjų sekų skaičius yra nedidelis (mažesnis už 5), sumas geriau nei normalusis dėsnis aprašo mišrusis-normalusis dėsnis. Didinant dėmenų skaičių sekų sumų suderinamumo su normaliuoju dėsniu rezultatai gerėja, o suderinamumo su mišriuojų-normaliuoju dėsniu tikrinimas nebetenka prasmės, nes sumų sekos parametro  $p_{max}$  įvertis  $\hat{p}_{max} \rightarrow 1$ . Šis rezultatas galioja tiek skirtingai, tiek vienodai pasiskirsčiusių mišriųjų-normaliųjų sekų sumoms. Taip pat pastebėta, kad didinant atsitiktinai generuojamų nepriklausomų mišriųjų-normaliųjų sekų skaičių, sumų parametro  $p$  įvertis žymiai greičiau artėja į vienetą nei naudojant realius rinkos duomenis, todėl netgi dešimties akcijų investiciniams portfeliams aprašyti labiau tinkamas mišrusis-normalusis, o ne normalusis dėsnis.

Praplečiant šį tyrimą buvo generuotos priklausomos mišriosios-normaliosios sekos ir atliktas tyrimas.

Kai turime nepriklausomus ir vienodai pasiskirsčiusius atsitiktinius dydžius, remiantis centrine ribine teorema (CRT) analiziškai galima įrodyti, kad priklausomų mišriųjų-normaliųjų sekų sumos skirstinys konverguoja į normalųjį dėsnį. Kai atsitiktiniai dydžiai yra priklausomi ir skirtingai pasiskirstę tai padaryti sudėtinga. Todėl šiame darbe tai padarysime eksperimentiškai. Tikrinsime kiek

reikia sudėti atsitiktinių dydžių, kad priklausomų mišriųjų-normaliųjų sekų sumos skirstinys būtų normalusis.

- **Vienodai pasiskirsčiusių priklausomų mišriųjų-normaliųjų sekų sumų tyrimas**

Tyrimui atlikti sugeneruotas tam tikras skaičius ( $SS$ ) vienodai pasiskirsčiusių mišriųjų-normaliųjų sekų, kuriose yra nuo 1000 iki 3000 elementų. Šie sekų ilgiai pasirinkti atsižvelgiant į realių Lietuvos biržos akcijų duomenų failuose esančių įrašų skaičių (žr. Lentelė 5). Generuojamų sekų vidurkiai  $\mu = 0$ , standartiniai nuokrypiai  $\sigma = 1$ . Tiriamos parametro  $p$  reikšmės kinta nuo 0.2 iki 0.95. Kolmogorov-Smirnov ir Koutrouvelis kriterijų reikšmingumo lygmuo  $\alpha = 0.05$ . Kiekvienam rezultatų matricos elementui gauti 1000 kartų atliktas sekų generavimas, sumavimas ir hipotezių tikrinimas. Visų generuojamų sekų svoriai vienodi.

Tyrimo rezultatai, kai atsitiktinai generuojamos dvi ( $SS = 2$ ) mišriosios-normaliosios sekos pateikiami Lentelėje 2.1. Rezultatai lentelėje rodo, kokia dalis suderinamumo hipotezių nebuvo atmesta (proc.). Sekų suderinamumo su mišriuoju-normaliuoju dėsnio hipotezėms tikrinti tinkamas tik Koutrouvelis testas, todėl Kolmogorov-Smirnov testo rezultatai nepateikiami. Kolmogorov-Smirnov testas mišriąsias-normaliąsias sekas atpažįsta tik kai parametro  $p$  reikšmės yra artimos vienetui, todėl tikrinant sekų suderinamumą su mišriuoju-normaliuoju dėsnio Kolmogorov-Smirnov testo rezultatais pasikliauti negalima.

**Lentelė 2.1. Prikl. vienodai pasiskirsčiusių sekų sumų pasiskirstymo dėsnio tyrimas,  $SS = 2$** 

Kriterijus	$p$	Sekos ilgis								
		1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000
Suderinamumas su normaliuoju dėsniu										
Kolmogorovo- Smirnov	0.95	100	100	100	100	100	99.9	100	100	99.8
	0.9	99.9	99.8	99.6	99.6	99.8	99.9	98.9	99	99.1
	0.8	89.9	85.4	79.6	67.7	61	50	41.6	33.8	23.5
	0.7	2.5	0.3	0	0	0	0	0	0	0
	0.6	100	100	100	100	100	99.9	100	100	99.8
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Kriterijus	$p$	Sekos ilgis								
		1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000
Koutrouvelio	0.95	93.3	93.3	92.5	91.2	92.8	92.4	90.6	90.3	91.4
	0.9	84.9	82.4	83.1	81.6	79.7	80.7	77.9	73.6	73.6
	0.8	62	52.8	45.5	35.5	31.9	26.4	21.3	16.1	12.2
	0.7	19.8	9.4	6.2	2.5	1.7	0.6	0.6	0.1	0.1
	0.6	1.3	0.3	0.1	0	0	0	0.1	0.1	0
	0.5	0	0	0.2	0.2	0	0.1	0.1	0.1	0
	0.4	0.6	0.3	0.6	0.1	0.6	0.5	0.5	0.4	0.2
	0.3	1.9	1.9	1.5	1.4	1.4	0.7	0.6	1.1	1.1
	0.2	1.4	1.3	0.9	0.5	0.7	0.9	0.5	0.3	0.3
Suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsniu										
Koutrouvelio	0.95	93.6	93.8	93.2	91.7	93.4	92.8	91.7	91.3	92.2
	0.9	88.6	85.7	87.3	85.1	85.6	85.8	83.7	80.7	80.7
	0.8	80.8	76.8	71.7	69.9	63.6	61.2	58.8	55	48.3
	0.7	70	64.6	59.6	53.4	49.6	43.8	41.1	36.8	31.9
	0.6	63.4	60.1	52.5	47.7	44.3	37.3	34.6	30.8	26.8
	0.5	65.1	60.5	53.2	50.7	46.8	40.4	32.2	31.9	27.9
	0.4	66.3	62.1	61.2	59.1	53.8	49.6	44.1	46.1	39.1
	0.3	76.6	71.7	72.2	69.9	66	63.5	59.8	56.9	54.8
	0.2	85.5	81.3	81.8	77.7	80.2	78.3	76.1	77.5	73.4

Pastebėta, kad tiek didėjant sekos ilgiui, tiek mažėjant parametro  $p$  reikšmėms vis mažesnis neatmestų suderinamumo su normaliuoju dėsniu hipotezių skaičius. Abu suderinamumo kriterijai šį teiginį patvirtina. Dviejų priklausomų vienodai pasiskirsčiusių sekų sumas geriau aprašo Mišrusis-normalusis dėsnis nei normalusis.

Lentelėje 2.2 pateikiami tyrimo rezultatai, kai atsitiktinai generuojamos penkios vienodai pasiskirsčiusios mišriosios-normaliosios sekos, Lentelėje 2.3 pateikiami tyrimo rezultatai, kai atsitiktinai generuojamos penkiolika vienodai pasiskirsčiusių mišrių-normaliųjų sekų.

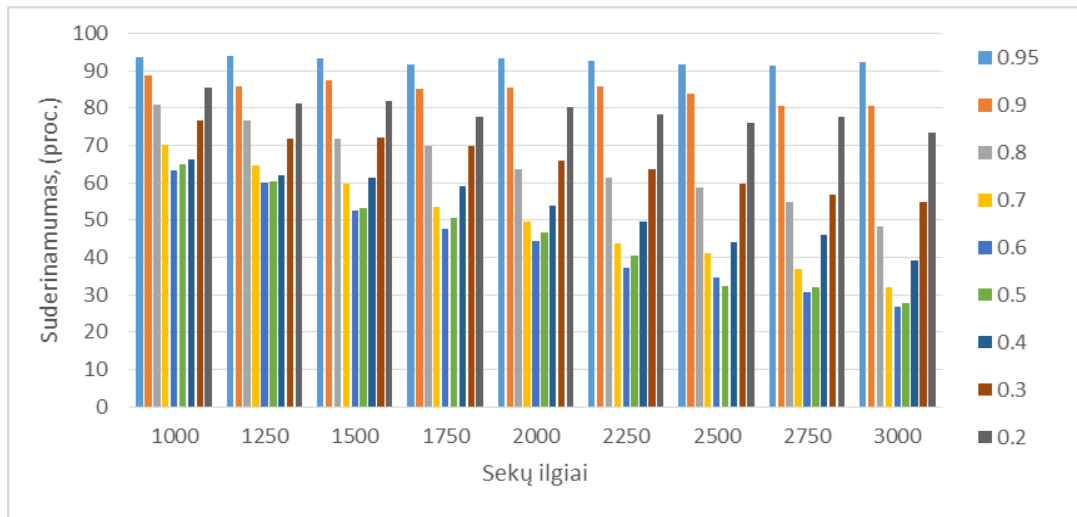
Lentelė 2.2. Prikl. vienodai pasiskirsčiusių sekų sumų pasiskirstymo dėsnio tyrimas,  $SS = 5$ 

Kriterijus	$p$	Sekos ilgis								
		1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000
Suderinamumas su normaliuoju dėsniu										
Kolmogorovo- Smirnov	0.95	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	0.9	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	0.8	100	100	100	100	99.9	99.9	99.9	99.9	99.9
	0.7	99.9	99.8	99.8	99.8	99.6	99.5	99.4	99.3	99.2
	0.6	99	98.5	98.9	98	97.4	97.2	94.1	92.7	91.2
	0.5	90.5	87.2	80.5	70.9	61.6	53.1	44.5	39.3	30.2
	0.4	8.2	1.7	0.1	0	0	0	0	0	0
	0.3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Kriterijus	$p$	Sekos ilgis								
		1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000
Koutrouvelio	0.95	93.6	90.9	91.8	91.7	93.3	92.4	93.1	92.1	90.9
	0.9	88.9	90.5	88.1	89	89.1	88.1	88.4	88.7	86.9
	0.8	83.5	82.1	80.1	80	79.1	78.4	77.5	73.1	74.3
	0.7	74.7	67	63.9	62.9	59.5	52.9	49.3	48.5	46.9
	0.6	52.1	44.6	37.4	32	27.9	22.1	16.6	15.6	11.2
	0.5	23.2	15	9.9	6.2	4.3	2.4	1.6	0.8	0.6
	0.4	4.8	1.8	0.4	0	0.1	0	0.1	0.1	0
	0.3	0.2	0	0	0	0.1	0	0	0	0
	0.2	0.3	0.3	0	0.5	0	0.1	0.3	0.4	0.1
Suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsniu										
Koutrouvelio	0.95	93.6	90.9	91.8	91.7	93.4	92.4	93.1	92.1	90.9
	0.9	88.9	90.5	88.2	89	89.1	88.2	88.4	88.6	87.2
	0.8	83.3	82.4	79.3	80.1	78.7	78.1	78.1	73.9	75
	0.7	75.6	66.3	65	63.6	60.5	54.7	52.9	51.9	49.6
	0.6	57.1	50.6	44.8	38.2	35.8	29.2	22.9	22.1	17.8
	0.5	41.1	30.6	23.5	19.3	14	10.8	8.3	5.7	2.6
	0.4	30.2	22.9	13.3	9.9	7.6	4.1	2.7	2.1	1.8
	0.3	27	19.8	13.8	8.9	6.5	3.9	3	2.5	1
	0.2	42.8	33.6	27.1	19.4	15.3	12.5	8.9	8.2	5.3

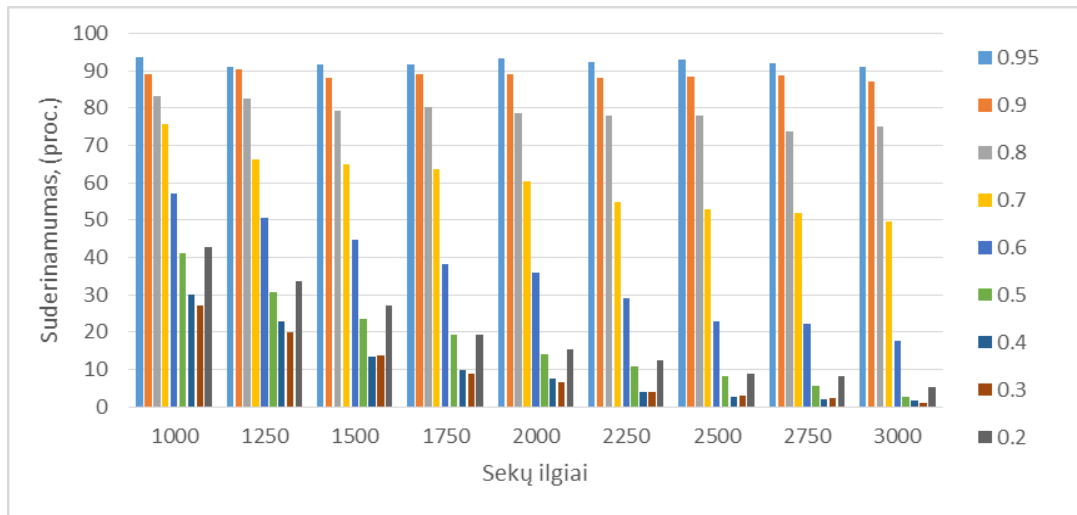
Lentelė 2.3. Prikl. vienodai pasiskirsčiusių sekų sumų pasiskirstymo dėsnio tyrimas,  $SS = 15$ 

Kriterijus	$p$	Sekos ilgis								
		1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000
Suderinamumas su normaliuoju dėsniu										
Kolmogorovo-Smirnovo	0.95	100.0	99.9	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100
	0.9	100.0	100.0	99.9	99.9	100.0	100.0	100.0	100.0	99.9
	0.8	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
	0.7	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
	0.6	99.9	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	99.9
	0.5	100.0	100.0	100.0	99.7	99.9	99.8	99.9	100.0	99.8
	0.4	100.0	99.8	99.8	99.9	99.5	99.8	99.5	99.3	99.2
	0.3	99.2	99.4	98.2	97.6	97.2	94.7	94.6	92.8	92.1
	0.2	79.5	68.7	54.1	44.0	31.2	20.0	13.8	9.0	4.9
Kriterijus	$p$	Sekos ilgis								
		1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000
Koutrouvelio	0.95	100	99.9	100	100	100	100	100	100	100
	0.9	100	100	99.9	99.9	100	100	100	99.9	100
	0.8	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	0.7	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	0.6	99.9	100	100	100	100	100	100	99.9	99.9
	0.5	100	100	100	99.7	99.9	99.8	99.9	100	99.8
	0.4	100	99.8	99.9	99.9	99.5	99.9	99.5	99.3	99.2
	0.3	99.7	99.5	98.9	98.4	97.9	96.6	96.2	95.8	95.2
	0.2	74.8	58	45.4	35.4	24.1	17.9	9.2	7.6	4.2
Suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsniu										
Koutrouvelio	0.95	92.8	93.7	92	92.8	93.4	93.5	93.2	93.1	93.5
	0.9	93.4	92.9	93.2	92.8	92.8	91.5	93	92.1	92
	0.8	90.4	92	90.9	88.8	89.1	87.8	90.1	89.2	90.2
	0.7	88.2	89	86.4	86	87.2	84.1	86.2	85.7	82.8
	0.6	81.2	81.9	81.4	77.4	75.9	75.7	76.3	73.3	74.2
	0.5	78.2	73.5	70.6	69.9	66.3	60.5	58.9	56.8	53.6
	0.4	64.9	54.3	49.1	47.6	41.5	35.8	33	29.3	25.3
	0.3	38.1	32.7	24.1	19.1	13.1	12	8.9	7.3	8.1
	0.2	11	5.2	3	2.3	0.7	0.9	0.6	0.9	0.6

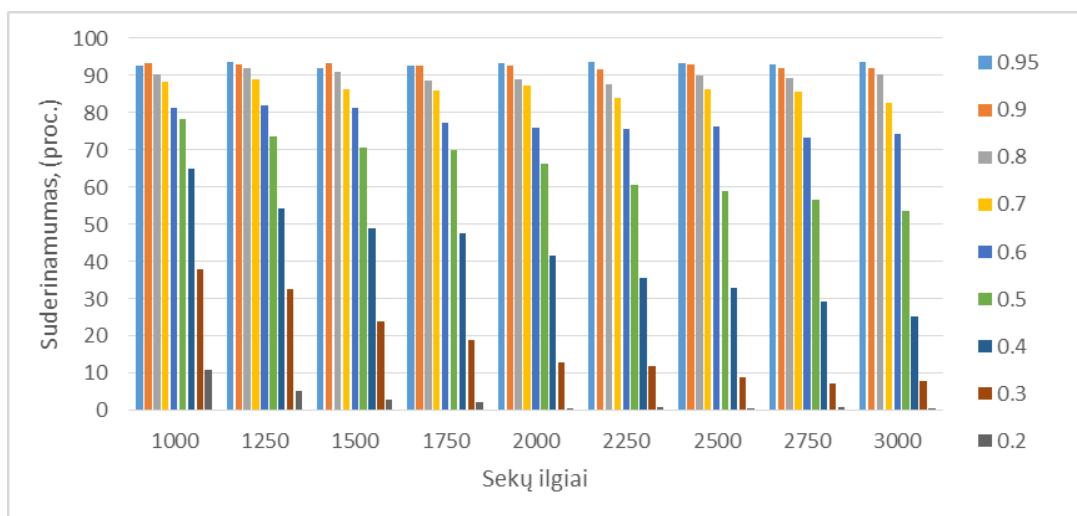
Didinant dėmenų skaičių sekų suderinamumo su normaliuoju dėsniu rezultatai gerėja, tačiau išlieka jų priklausomybė nuo sekų ilgių ir parametro  $p$  reikšmių. Mišrusis-normalusis dėsnis sumas aprašo geriau nei normalusis, tačiau padidėjus sumos dėmenų skaičiui suderinamumo su mišriuoju-normaliuoju dėsniu rezultatai pablogėjo (žr. Paveikslas 2.4., 2.5. ir 2.6.).



**Paveikslas 2.4.** Sekų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsniu,  $SS = 2$



**Paveikslas 2.5.** Sekų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsniu,  $SS = 5$



**Paveikslas 2.6.** Sekų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsniu,  $SS = 15$

Didinant dėmenų skaičių Koutrouvelis testo rezultatai, tikrinant sekų suderinamumą su normaliuoju ir mišriuoju-normaliuoju dėsniais, supanašėja. Taip nutinka todėl, kad gautos sekų sumos parametro  $p$  įvertis  $\hat{p}_{\max} \rightarrow 1$ . Tokiu atveju  $\phi_{\text{mix}}(t) \rightarrow \phi_n(t)$ . Tai reiškia, kad, didėjant dėmenų skaičiui, sumų sekas geriau aprašo nebe mišrusis-normalusis, o normalusis dėsnis.

- **Skirtingai pasiskirsčiusių priklausomų mišriųjų-normaliųjų sekų sumų tyrimas**

Tyrimo metodika analogiška aprašyti vienodai pasiskirsčiusių mišriųjų-normaliųjų sekų sumų tyrime: generuojamos mišriosios-normaliosios sekos ir tikrinamos sekų sumų suderinamumo su normaliuoju ir mišriuoju-normaliuoju dėsniais hipotezės. Kiekvienos generuojamos sekos parametrai skirtingi. Tyrimą sudaro dvi dalys: pirmojoje tiriamos mišriosios-normaliosios sekos, kurių vidurkiai ir standartiniai nuokrypiai yra atsitiktinai parenkami iš tam tikrų intervalų, o antrojoje – sekos, kurių ne tik vidurkiai ir standartiniai nuokrypiai, bet ir tikimybės  $p$  yra parenkamos atsitiktinai.

Norint įvertinti skirtingai pasiskirsčiusių mišriųjų-normaliųjų sekų sumų konvergavimą į normalųjį ar mišriųjų-normalųjį dėsnį, svarbu, kad sekų vidurkiai ir standartiniai nuokrypiai įgytų reikšmes iš pakankamai plačių intervalų. Generuojamų mišriųjų-normaliųjų sekų vidurkiai atsitiktinai parenkami iš intervalo  $[-40, 40]$ , o standartiniai nuokrypiai – iš intervalo  $[0, 10]$ .

Lentelėje 2.4 pateikiami tyrimo rezultatai, kai atsitiktinai generuojamos penkiolika mišriųjų-normaliųjų sekų, kurių vidurkiai ir standartiniai nuokrypiai atsitiktinai parenkami iš minėtųjų intervalų, tačiau sekų parametrai  $p$  yra tokie patys.

Lentelė 2.4. Prikl. skirtingai pasiskirsčiusių sekų sumų pasiskirstymo dėsnio tyrimas,  $SS = 15$ 

Kriterijus	$p$	Sekos ilgis								
		1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000
Suderinamumas su normaliuoju dėsniu										
Kolmogorovo-Smirnovo	0.95	90.3	90.1	89.3	88.1	90.5	88.5	86.7	88.7	88.8
	0.9	92.2	90.0	89.7	91.0	89.8	90.7	90.0	88.2	88.0
	0.8	95.1	95.2	92.9	92.3	91.8	92.9	92.9	91.8	91.1
	0.7	94.9	96.6	95.2	95.6	95.5	94.1	94.1	93.7	92.9
	0.6	95.5	96.4	93.7	93.5	93.2	90.7	92.7	89.1	88.3
	0.5	93.0	91.8	90.1	88.5	85.4	80.6	80.4	75.4	73.1
	0.4	86.9	80.5	78.8	70.0	64.4	57.7	57.1	49.6	46.9
	0.3	66.1	54.8	49.3	38.3	36.3	31.3	28.1	23.0	22.6
	0.2	24.0	17.3	9.5	7.90	6.2	2.80	2.2	0.80	0.20
Koutrouvelio	0.95	73.6	69.8	69.3	67.4	69.8	68.3	67.0	66.5	67.9
	0.9	70.7	67.1	65.7	68.3	64.5	65.4	63.9	62.2	64.4
	0.8	69.3	68.5	64.3	59.3	58.3	58.2	57.4	52.9	50.8
	0.7	65.2	62.8	54.5	54.3	48.2	47.1	40.5	42.5	38.3
	0.6	56.2	52.9	45.4	44.1	39.7	36.7	33.5	30.9	30.2
	0.5	41.2	33.3	31.6	28.8	27.3	23.7	20.6	21.1	19.5
	0.4	25.1	18.7	16.6	12.0	9.0	9.0	8.50	6.3	7.5
	0.3	8.6	4.0	3.7	2.2	1.6	1.3	1.3	1.0	0.7
	0.2	1.0	0.8	0.4	0.6	0.4	0.6	0.6	0.7	0.3
Suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsniu										
Koutrouvelio	0.95	73.6	69.8	69.3	67.4	69.8	68.3	67.0	66.5	67.9
	0.9	70.7	67.1	65.7	68.3	64.5	65.4	63.9	62.2	64.4
	0.8	69.3	68.5	64.3	59.3	58.3	58.2	57.4	52.9	50.8
	0.7	65.2	62.8	54.5	54.3	48.2	47.1	40.5	42.5	38.3
	0.6	56.2	52.9	45.5	44.1	39.7	36.8	33.5	30.9	30.2
	0.5	41.2	33.4	31.7	28.8	27.3	23.6	20.9	20.9	19.6
	0.4	24.2	18.5	16.2	11.4	8.1	7.5	7.0	5.8	6.0
	0.3	7.2	3.2	3.1	2.6	1.9	0.8	1.4	1.4	0.5
	0.2	2.7	1.9	0.6	1.2	0.4	1.0	1.7	0.5	0.6

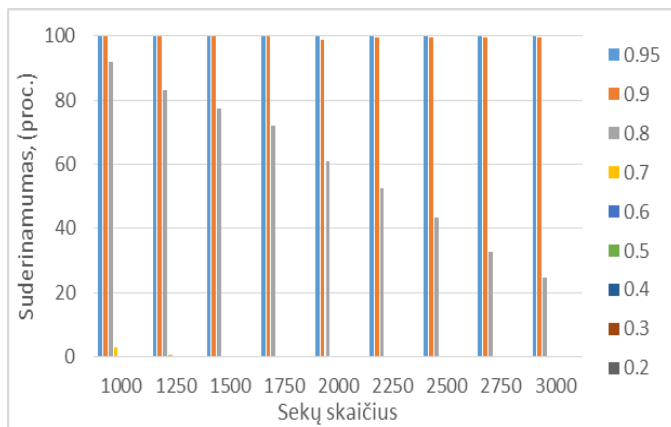
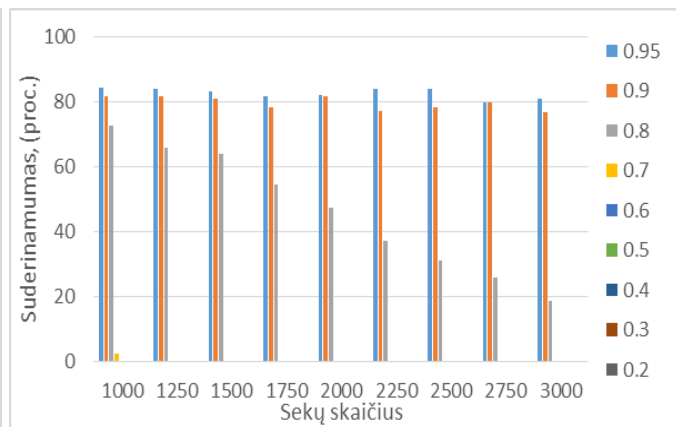
Mišrusis-normalusis dėsnis geriau aprašo dviejų priklausomų skirtingai pasiskirsčiusių mišriųjų-normaliųjų sekų sumas nei normalusis dėsnis, tačiau rezultatai yra blogesni, nei tuo atveju, kai generuojamos vienodai pasiskirsčiusios sekos. D. Kašauskaitės baigiamajame bakalauro darbe atliktas tyrimas parodė, kad dviejų nepriklausomų skirtingai pasiskirsčiusių mišriųjų-normaliųjų sekų sumas taip pat geriau aprašo mišrusis-normalusis dėsnis.

Paveiksle 2.7 grafiškai atvaizduoti Kolmogorov-Smirnov testo rezultatai gauti tikrinant dviejų priklausomų mišriųjų-normaliųjų sekų sumų suderinamumo su normaliuoju dėsniu hipotezes, kai:

- sekų parametrai  $\mu$ ,  $\sigma$  ir  $p$  yra tokie patys;
- sekų vidurkiai  $\mu$  ir standartiniai nuokrypiai  $\sigma$  yra skirtingi.

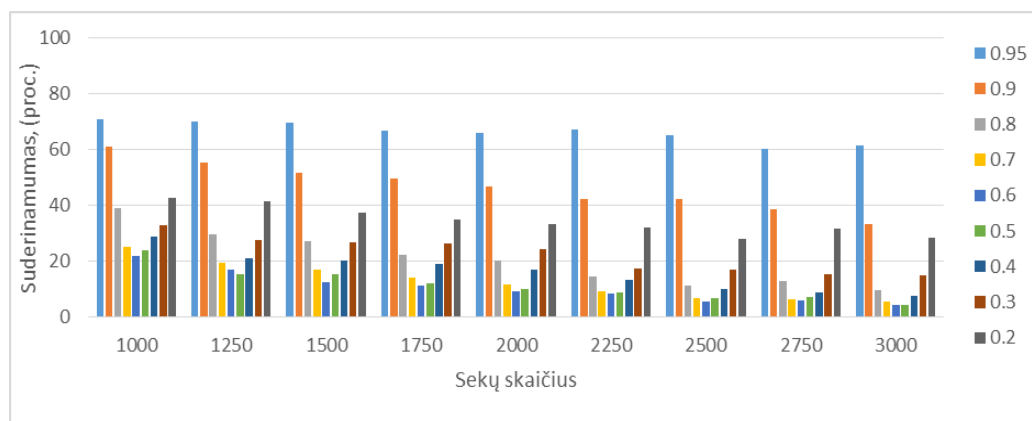
Šiame ir kituose šio poskyrio grafikuose horizontaliose ašyse atidedami sekų ilgai, o vertikaliose – neatmestų suderinamumo hipotezių dalys (proc.).



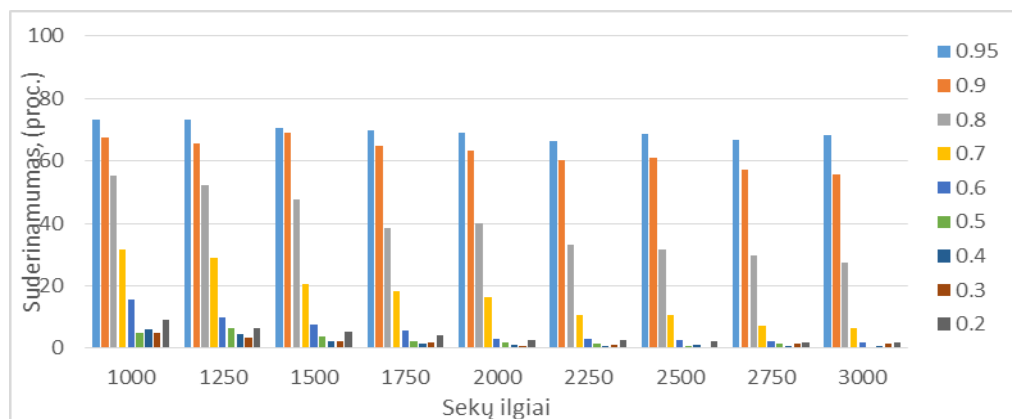
a) Sekų parametrai  $\mu$  ir  $\sigma$  tokie patysb) Sekų parametrai  $\mu$  ir  $\sigma$  skirtingi

### Paveikslas 2.7. Kolmogorov-Smirnov testo rezultatų palyginimas, $SS = 2$

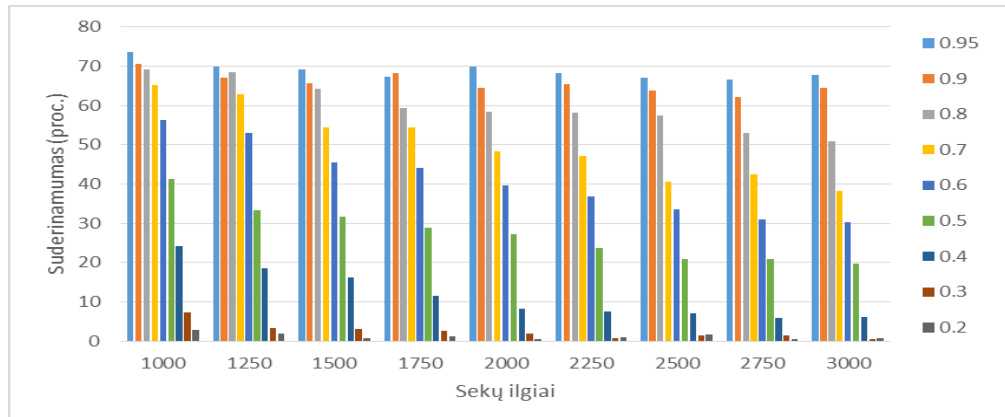
Abu suderinamumo testai patvirtina, kad skirtingai pasiskirsčiusių mišriųjų-normaliųjų sekų sumos į normalųjį dėsnį konverguoja lėčiau nei vienodai pasiskirsčiusių sekų sumos. Didinant dėmenų skaičių mišrusis-normalusis dėsnis sekų sumas aprašo vis blogiau (žr. Paveikslas 2.8. 2.9. ir 2.10.). Kai sekų skaičius pakankamai didelis jas geriau aprašo normalusis dėsnis.



Paveikslas 2.8. Skirtingai pasiskirsčiusių sekų sumų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsniumi,  $SS = 2$

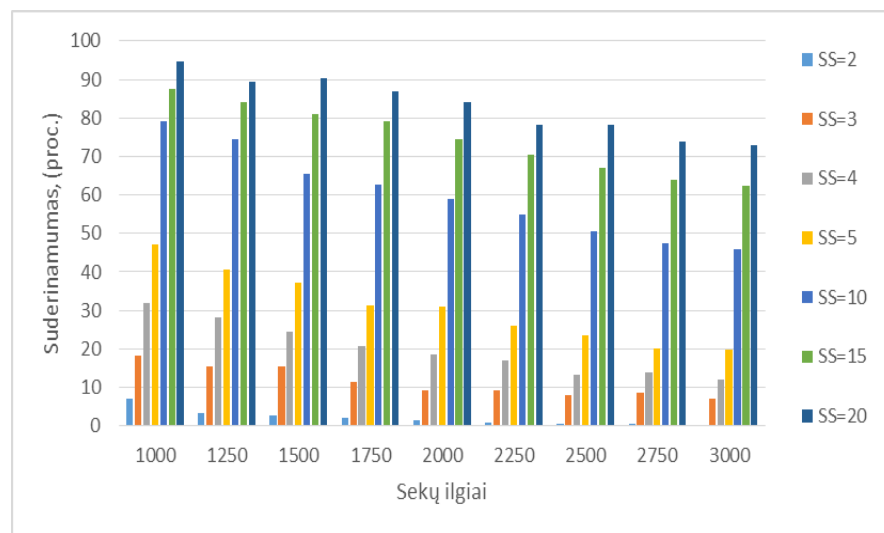


Paveikslas 2.9. Skirtingai pasiskirsčiusių sekų sumų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsniumi,  $SS = 5$

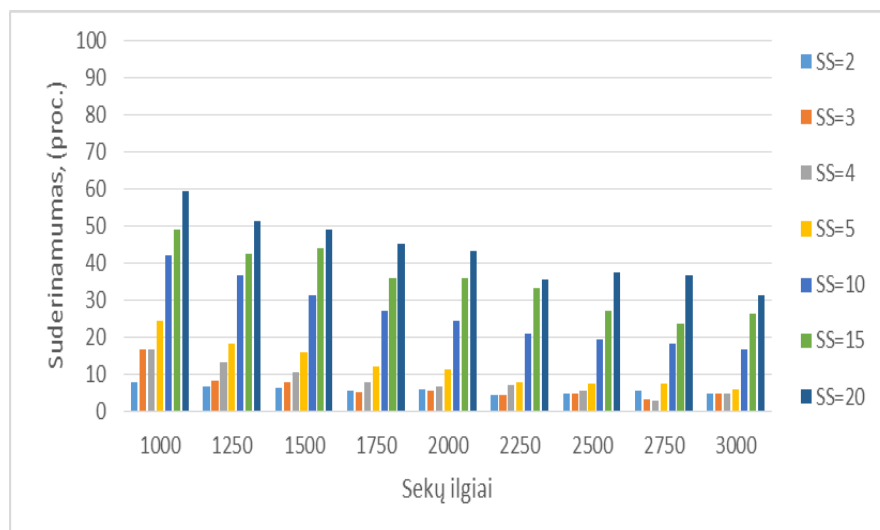


**Paveikslas 2.10. Skirtingai pasiskirsčiusių sekų sumų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsniu,  $SS = 15$**

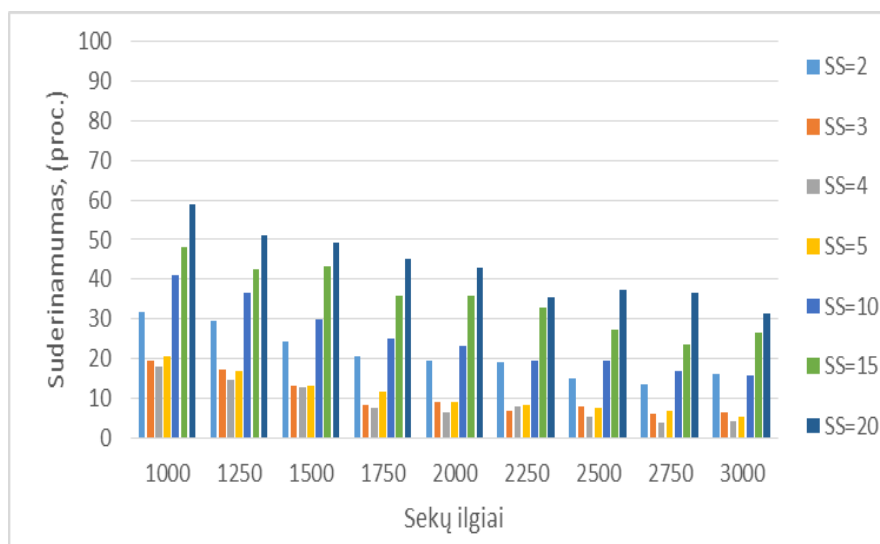
Toliau tyrimui atlikti generuojamos mišriosios-normaliosios sekos, kurių vidurkiai atsitiktinai parenkami iš intervalo  $[-40, 40]$ , standartiniai nuokrypiai – iš intervalo  $[0, 10]$ , o tikimybės  $p$  – iš intervalo  $[0.3, 0.8]$ . Tyrimo rezultatai grafiškai pateikiami Paveiksluose 2.11., 2.12. ir 2.13.



**Paveikslas 2.11. Sumų suderinamumas su normaliuoju dėsniu (Kolmogorov-Smirnov testas)**



**Paveikslas 2.12. Sumų suderinamumas su normaliuoju dėsniu (Koutrouvelis testas)**



**Paveikslas 2.13. Sumų suderinamumas su mišriuoju-normaliuoju dėsniu (Koutrouvelis testas)**

Abiejų testų rezultatai rodo, kad didinant dėmenų skaičių sumų sekų suderinamumo su normaliuoju dėsniu rezultatai gerėja – vis daugiau suderinamumo hipotezių nėra atmetamos. Kaip ir nepriklausomų sumų atveju, suderinamumo su mišriuoju-normaliuoju dėsniu rezultatai geresni nei suderinamumo su normaliuoju dėsniu tada, kai dėmenų skaičius yra mažas ( $SS < 5$ ); kai dėmenų pakankamai daug, parametro  $p$  įvertis  $\hat{p}_{\max} \rightarrow 1$  ir suderinamumo su mišriuoju-normaliuoju dėsniu hipotezių tikrinimas nebetenka prasmės.

## 2.4 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO AKCIJŲ GRAŽŲ ANALIZĖ

Mokslininkai, tirdami akcijų gražas, seniai pastebėjo, kad dauguma akcijų gražų nėra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį. Akcijų gražų nenormalumo atradimas ne tik sukėlė daug abejonių dėl

Markowitz sukurto vidurkio – rizikos modelių teorijos bei ja pagrįsto Sharpe rodiklio patikimumo, bet ir buvo pradžia tyrimų apie aukštesnių gražų momentų egzistavimą ir svarbą. Pavyzdžiui, padaugėjo akcijų gražų asimetriškumo tyrimų dėl dispersijos trūkumų, kuri yra antrasis momentas ir dažniausiai sutinkamas rizikos matas finansų tyrimuose. Dispersija turi ribotas galimybes užfiksuoti akcijų riziką ir ji negali išskirti gražas kaip esančias aukščiau ar žemiau vidurkio. Trečiasis momentas, asimetrija, įgyja vis didesnę reikšmę literatūroje būtent dėl to, kad gali tinkamai įvertinti akcijų teigiamas ir neigiamas gražas.

Abu atradimai, akcijų gražų pasiskirstymo nenormalumas ir aukštesnių momentų įtraukimas į finansinius modelius, buvo didelis postūmis finansiniuose tyrimuose.

Šiame darbe duomenų suderinamumui su normaliuoju ir mišriuoju – normaliuoju skirstiniais tikrinti naudojami du kriterijai – Kolmogorov-Smirnov kriterijus ir charakteristine funkcija paremtas Koutrouvelis kriterijus.

Nors Kolmogorov-Smirnov kriterijus nėra tinkamas tikrinti trūkioms sekoms, šiame darbe jis naudojamas patirinti ar ištikrųjų jis netinkamas praktikoje. Taip pat rezultatų palyginimui su Koutrouvelis kriterijaus rezultatais.

- **Kolmogorovo-Smirnovo testas**

Patikrinti ar akcijų gražų imtis yra pasiskirsčiusi pagal normalųjį dėsnį (ar kitą dėsnį) gali vienos imties Kolmogorov-Smirnov suderinamumo testas. Šis neparametrinis testas skaičiuoja Kolmogorov-Smirnov statistiką  $D_n$ , kuri įvertina atstumą tarp empirinės imties pasiskirstymo funkcijos  $F_n(x)$  ir standartinės pasirinktos pasiskirstymo funkcijos  $F(x)$ :

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \quad (2.18)$$

Čia  $F(x)$  – tolydi funkcija.

Statistika yra skaičiuojama prie nulinės hipotezės, kad imtis yra paimta iš standartinės pasiskirstymo funkcijos  $F(x)$ ,

$$\sqrt{n}D_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup_t |B(F(t))|, \quad (2.19)$$

kur  $B(t)$  yra Brauno tiltas ir supremumas yra atsitiktinio dydžio  $t$  Kolmogorovo skirstinys:

$$K = \sup_{t \in [0,1]} |B(t)|, \quad (2.20)$$

kurio pasiskirstymo funkcija yra:

$$\Pr(K \leq x) = 1 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \cdot e^{-2i^2 x^2} \quad (2.21)$$

Nulinė hipotezė yra atmetama jei su pasiklovimo lygmeniu  $\alpha$ :

$$\sqrt{n}D_n > K_\alpha, \quad (2.22)$$

kur  $K_\alpha$  randamas pagal

$$\Pr(K \leq K_\alpha) = 1 - \alpha \quad (2.23)$$

Klasikiniu atveju gražos yra tolydieji atsitiktiniai dydžiai. ir Kolmogorov-Smirnov suderinamumo testas puikiai tinka. Tačiau mišrusis modelis negali būti priskiriamas prie tolydžių. Todėl yra taikomas Koutrouvelis kriterijus, paremtas empirine charakteristine funkcija [21].

- **Koutrouvelis testas**

Koutrouvelis testu tikrinama hipotezė  $H_0: \phi(t) = \phi_0(t)$ ; čia  $\phi_0(t)$  – žinoma (mūsų atveju – normaliojo ir mišriojo-normaliojo dėsnio) charakteristinė funkcija.

Sukurta programinė įranga sekos suderinamumui su stabiliojo dėsnio tikrinti, naudojant Koutrouvelis testą [21]. Ši programa buvo pritaikyta pasirinktų akcijų gražų suderinamumui su normaliojo ir mišriojo-normaliojo dėsniais tikrinti.

*Metodo aprašymas:*

1. Skaičiuojamos tiriamo dėsnio (normaliojo arba mišriojo-normaliojo) charakteringosios funkcijos menamoji ir realioji dalys taškuose  $t_m$  ir sujungiamos į vieną vektorių  $\xi'_1 = \{C_1(t_1), \dots, C_1(t_m), S_1(t_1), \dots, S_1(t_m)\}$ , čia  $C_1(t)$  – realioji dalis,  $S_1(t)$  – menamoji dalis.
2. Skaičiuojamos empirinės charakteringosios funkcijos menamoji ir realioji dalys tuose pačiuose taškuose ir sujungiamos į vieną vektorių  $\xi'_2 = \{C_2(t_1), \dots, C_2(t_m), S_2(t_1), \dots, S_2(t_m)\}$ , čia  $C_2(t)$  – realioji dalis,  $S_2(t)$  – menamoji dalis.

Empirinė charakteristinė funkcija apibrėžiama taip:

$$\hat{\phi}(t, X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{itX_j}. \quad (2.24)$$

3. Skaičiuojamas skirtumas  $kZ = \xi'_2 - \xi'_1$  ir jis transponuojamas  $kZ^T = (\xi'_2 - \xi'_1)^T$ .
4. Sudaroma matrica  $\omega$ :

$$\omega_{jk}^l = \begin{cases} C_l(t_j + t_k) + C_l(t_j - t_k) - 2C_l(t_j)C_l(t_k), & \text{kai } 1 \leq j, k \leq m; \\ C_l(t_j - t_k) + C_l(t_j + t_k) - 2S_l(t_j)S_l(t_k), & \text{kai } m+1 \leq j, k \leq 2m; \\ S_l(t_j + t_k) + S_l(t_j - t_k) - 2C_l(t_j)S_l(t_k), & \text{kai } 1 \leq j \leq m, m+1 \leq k \leq 2m. \end{cases}$$

5. Matricai  $\omega$  randama atvirkštinė matrica  $\omega^{-1}$ .
6. Sudauginant vektorius ir atvirkštinę matricą gaunama statistikos reikšmė:

$$Q_n^0 = 2n(kZ^T \cdot \omega^{-1} \cdot kZ). \quad (2.25)$$

7. Jei  $Q_n^0 > \chi_{\alpha, 2m}^2$ , tai nulinė hipotezė atmetama.

Šiame darbe tiriamas atsitiktinių mišriųjų-normaliųjų sekų sumų suderinamumas su normaliuoju ir mišriuoju-normaliuoju dėsniais. Kadangi mišriojo-normaliojo dėsnio prie tolydžiųjų priskirti negalima, todėl sekų suderinamumui su mišriuoju-normaliuoju dėsniu tikrinti Kolmogorov-Smirnov testą taikyti netikslinga. Mišriosiose-normaliosios sekose gali būti labai daug nulinių reikšmių, todėl sudėtinga teisingai sugrupuoti jų duomenis. Dėl šios priežasties grąžų sekų suderinamumo hipotezėms tikrinti pasirinktas Koutrouvelis kriterijus. Kolmogorov-Smirnov testas įtrauktas į tiriamąjį darbą tam, kad padėtų įvertinti Koutrouvelis testo patikimumą.

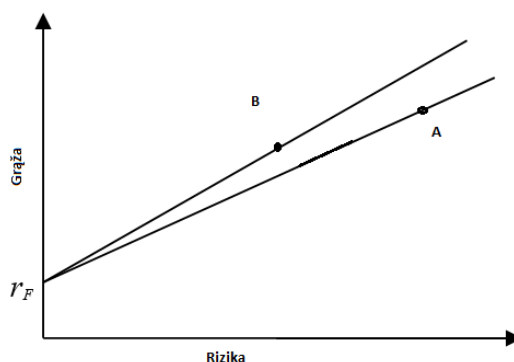
## 2.5 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO ELGESIO MATŲ ANALIZĖ

Rizikos reguliavimo ir elgesio prognozavimo matai labai naudingi portfelio valdymo procesui. Akivaizdžiausia nauda yra galimybė palyginti portfelio grąžas prie skirtingų rizikos lygių. Portfelio elgesio matas yra santykinis dydis. Jis yra metrika, kuri gali prilyginti vieną vertybinių popierių portfelį, remiantis jo rizika ir grąža, su kitu portfeliumi, kuris turi skirtingas nei pastarojo rizikos ir grąžos reikšmes, galbūt net ir abiejų portfelio kapitalas yra skirtingo dydžio.

Portfelio elgesio matų skaičiavimas, tai ne tik vienkartinio sprendimo priėmimas. Pasitelkiant šiuos matus galima kurti investicinius planus ir strategijas, nuolat stebint portfelio kapitalo ir elgesio matų kaitą laike. Tarkime, stebint du investicinius projektus A ir B matyti, kad projektas A gauna santykinai didesnę pelną nei B prie tam tikrų skirtingų rizikų, tuomet galima savo kapitalą perkelti iš B investicijos į A. Vėliau matant blogėjančias A investicijos tendencijas, kapitalą galime grąžinti.

Portfelio elgesio matų nagrinėjimas remiasi ir teikia didžiausią svarbą jame naudojamam rizikos matui. Mokslininkai daugeliu atveju sutinka, kad vertybinių popierių portfelio grąža turėtų būti matuojama kaip nuokrypis nuo tam tikros reikšmės, tačiau didžiausios diskusijos literatūroje yra apie tai, kas yra rizika ir koks dydis gali nusakyti investicijos rizikingumą.

Kai kuriuos portfelio elgesio matus galima apibūdinti grafiškai, kai vertikaloje ašyje atidedama portfelio grąža ir horizontalioje – rizikos matas.



Paveikslas 2.14. Vertybinių popierių elgesio matų palyginimo grafikas

Jei investuotojas yra vengiantis rizikos, tai jis turėtų ieškoti portfelio su didele grąža ir žemu rizikos laipsniu, kitaip tariant, viršutinėje kairėje grafiko dalyje. Portfelio elgesio matai skaičiuoja linijos, nubrėžtos nuo nerizikingos pelno normos  $r_f$  per sukombinuotus įmanomus rizikos ir grąžos portfelius, perėjimą. Kuo statesnis perėjimas, tuo didesnis portfelio elgesio rodiklis, tuo geriau yra sudarytas portfelis rizikos ir pelno atžvilgiu.

### 2.5.1 SHARPE KOEFICIENTAS

Portfelio elgesio matų pirmtakas Sharpe [6] rodiklis (2.26), kitaip pelno rizikai matas. Šis portfelio elgesio matas skaičiuojamas kaip portfelio grąžos ir nerizikingo aktyvo grąžos skirtumas, padalintas iš portfelio grąžos standartinio nuokrypio, kuris yra rizikos matas šiame koeficiente. Vidutinė portfelio grąža, vidutinė nerizikingoji grąžos norma ir portfelio grąžos standartinis nuokrypis yra procentiniai dydžiai, o Sharpe koeficientas – santykinis dydis.

$$Sharpe = \frac{E(r_i - r_f)}{\sigma_i(r_f)} \quad (2.26)$$

Sharpe koeficientas įvertina visą portfelio riziką, apimdamas vidutinės grąžos standartinį kvadratinį nuokrypį, o ne sistemine riziką.

Hayne E. Leland [5] savo darbe nurodė, kad jei investicijų grąža turi didelę asimetriją, taikyti Sharpe rodiklį yra netinkama.

Investiciniai portfeliai su didesniu Sharpe koeficientu traktuojami kaip turintys geresnę grąžos ir rizikos santykį.

Šis matas yra pagrįstas vidurkio-rizikos portfelio teorija, todėl jis yra tinkamas portfeliams su normaliai pasiskirsčiosiomis grąžomis. Kitaip tariant, Sharpe rodiklis yra reikšmingas elgesio matas, kai portfelio riziką galime išmatuoti standartiniu nuokrypiu. Sharpe rodiklis yra kritikuojamas dėl to, kad jis gali paskatinti padaryti klaidingas išvadas jei grąžų pasiskirstymas yra asimetriškas. Dėl šių priežasčių mokslininkai iki šiol, modifikuodami Sharpe rodiklį, išveda vis naujus portfelio elgesio matus, kurie tinka ne tik normaliai pasiskirsčiosiems ar simetriškiems duomenims. Dauguma naujų išvestų matų pakeičia standartinį nuokrypį kitu rizikos matu arba teikia didelį pranašumą portfeliams su teigiama asimetrija.

## 2.5.2 SORTINO KOEFICIENTAS

Sortino yra „Sharpe“ santykio variantas, kuris atskiria žalingą nepastovumą nuo bendrojo nepastovumo, panaudojant žemutinės pusės nukrypimą. Sortino santykis yra pakraštinė grąža virš nerizikingos normos, virš žemutinio pusinio svyravimo.

Frako A.Sortino (Frank A. Sortino) sukurtas rodiklis atskiria gerą ir blogą kintamumą (volatility) Sharpe rodiklyje, keičiant standartinį kvadratinį nukrypį, neigiamų grąžų standartiniu nuokrypiu (downside deviation) vardiklyje [5]. Taigi Sortino rodiklis, apibrėžiamas kaip vidutinės portfelio grąžos ir vidutinės nerizikingos grąžos (palūkanų normos) skirtumas, padalintas iš neigiamų portfelio grąžų standartinio nuokrypio:

Sortino ir van der Meer[34] pateikė kvadratinę šaknį iš antrojo pradinio momento (2.27) kaip rizikos matą vietoj Sharpe pasiūlyto standartinio nuokrypio.

$$\sigma_{r_i}(r_f) = \sqrt{E((r_f - r_i)^2)} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T (r_f - r_i)^2} \quad (2.27)$$

Šiame rizikos mate  $r_f$  yra vidutinė pelno norma, kurią pasirenka investuotojas. Populiarioje literatūroje šis matas vadinamas pusiau standartiniu nuokrypiu arba pakeltas kvadratu – pusiau dispersija. Korektiška taip vadinti tada, kai  $r_f = E(r_i)$ .

Pusiau dispersija naudoja tik teigiamus duomenis, kurie yra žemiau  $r_f$  ir ji yra jautri abipusei asimetrijai bei trūkumo tikimybei nei dispersija, kuri didelius teigiamus ir neigiamus nukrypimus vertina vienodai. Iš tikrųjų, pirmasis apie galimą pusiau dispersijos, kaip rizikos, panaudojimą užsiminė Markowitz, vėlesni kitų mokslininkų darbai tik pritaikė jį portfelio elgesio matų teorijai.

Šį rizikos matą Sortino ir Price [34] panaudojo kuriant Sortino koeficientą (2.28). Jie klasikinį Sharpe koeficientą modifikavo jo vardiklyje esantį standartinį nuokrypį pakeisdami pusiau dispersijos rizikos matu.

$$Sortino = \frac{E(r_i - r_f)}{\sigma_{r_i}(r_f)} \quad (2.28)$$

Pažymėkime, kad jei  $\sigma_{r_i}(r_f) = 0$ , tuomet vertybinių popierių portfelis nėra rizikingas ir Sortino koeficiento skaičiavimas negalimas.

Didelė Sortino rodiklio reikšmė, rodo žemą nuostolių riziką.



### 2.5.3 $VAR_{\alpha\%}$ KOEFICIENTAS

Vienas iš alternatyvių rizikos matavimo būdų, kuris taikomas portfelio teorijoje yra rizikos vertės metodas (sutr. VaR). Šis modelis parodo, koks yra didžiausias galimas nuostolis per tam tikrą laiką su pasirinktu tam tikru pasitikėjimo lygiu.

Viena svarbiausių finansinių tyrimų užduočių yra rinkos rizikos padėties nagrinėjimas. Ši užduotis yra itin sudėtinga dėl didelių permainų nuosavybės, prekių, valiutų kainose bei palūkanų normose. Visi šie faktoriai įtakoja vertybinių popierių portfelio kainą, todėl rinkos rizika gali būti vertinama pagal portfelio kainą arba pajamų ir nuostolių pokytį. Nesudėtingai ne tik rinkos riziką, bet ir portfelio riziką, galima įvertinti pasitelkus populiarų rizikos matą – vertę rizikai (Value-at-risk, VaR), kurią plačiai aprašė [6]. VaR modelio populiarumą nulėmė jo interpretacijos paprastumas (Puelz [30] darbe galima rasti plačią apžvalgą).

Šį modelį labai patogu ir efektyvu taikyti bei valdyti, kai riziką įtakojantys faktoriai yra pasiskirstę pagal normalųjį (log-normalųjį) dėsnį. Plačiau apie rizikos valdymą naudojant VaR galima rasti Jorion 1997 metų darbe [15]. Tuo tarpu ne Gauso dėsnio atveju VaR netenka kai kurių savo savybių, tokių, kaip subadityvumas. Pavyzdžiui, portfelio iš dviejų instrumentų VaR gali būti didesnis nei dviejų individualių instrumentų VaR suma, t. y. portfelio diversifikacija gali padidinti maksimalius nuostolius (VaR) [16].

Pagrindinis šio rizikos mato tikslas susisteminti galimus nuostolius prie tam tikros tikimybės iki vienos skaitinės reikšmės. Šis rizikos matas be didelių matematinių ir ekonominių žinių leidžia investuotojui apsispręsti kokio rizikos lygio investiciją jis ketina prisiimti ir daryti investicinės strategijos pakeitimus atsižvelgiant į rizikos vertinimo rezultatus.

Matematiškai aprašdami šį rizikos matą pirmiausia pasižymėkime finansinę rinkos reikšmę  $V_t$  laiko momentu  $t$ . Tuomet periodinis nuostolis per laiko intervalą  $[t, t+h]$  bus:

$$L = v_t - V_{t+h} \quad (2.29)$$

Tada galime pasižymėti vertę rizikai su pasiklovimo lygmeniu  $0 < \alpha < 1$ :

$$VaR_{\alpha} = VaR(\alpha; h) \quad (2.30)$$

reikalaujami, kad 
$$P(L > VaR_{\alpha}) = \alpha \quad (2.31)$$

Praktiškai  $VaR_{\alpha}$  galime interpretuoti kaip galimą maksimalų nuostolį su tikimybe  $100(1-\alpha)\%$ , kai  $P(L \leq VaR_{\alpha}) = 1 - \alpha$ , kitaip – su tikimybe  $100(1-\alpha)\%$  nuostolis yra mažesnis nei  $VaR_{\alpha}$ . Interpretuojant vertę rizikai, kaip svarbų kapitalo užtikrinimą, (2.31) formulė užtikrina, kad kapitalas vidutiniškai

nesibaigs  $100(1-\alpha)$  iš 100 atvejų. Akivaizdu, kad vertė rizikai yra identiškas dydis nuostolių  $L$  pasiskirstymo funkcijos  $F(1-\alpha)$  kvantiliui:

$$VaR_\alpha = F^{-1}(1-\alpha) \quad (2.32)$$

Skirtingi mokslininkai [6][1] panašiu metu pradėjo diskutuoti apie Sharpe elgesio rodiklio rizikos mato pakeitimą vertės rizikai matu. Jie pasiūlė, kad naujasis elgesio matas skaičiuotų santykį tarp aktyvo laukiamo gražos pertekliaus ir jo vertės rizikai prie  $\alpha\%$  pasiklovimo lygmens:

$$Var = \frac{E(r_i - r_f)}{VaR_{\alpha\%}(r_i - r_f)}. \quad (2.33)$$

## 2.5.4 STARR KOEFICIENTAS

Artzner [2] sukurta aksiomatinė rizikos matų skirstymo sistema buvo svarbi ir elgesio matų portfelių teorijai. Mokslininkai, vertindami rizikos matus pagal sukurta sistemą, dažniausiai pasitikėdavo koherentiškumo sąlyga, kaip rizikos mato potencialumo įvertinimu. Dauguma matų netenkino koherentiškumo sąlygos, todėl modifikavus VaR rizikos matą, prieita prie sąlyginės vertės rizikai (CVaR, conditional-value-at-risk) (2.34). Jis ne tik tenkino koherentiškumo sąlygas, bet ir padėjo mokslininkams sukurti daugiau portfelio elgesio matų, naudojant šį rizikos matą. CvaR taip pat vadinamas laukiamo trūkumo arba laukiamo uodegos nuostolio matu. Vienas CvaR privalumų, kad portfelio pasirinkimas, naudojant laukiamo trūkumo metodą gali būti sprendžiamas kaip tiesinio optimizavimo problema. Be to, jei CvaR idėja simetriškai panaudotume teigiamoms portfelio gražų reikšmėms, gautume portfelio gražos matą.

$$CVaR_\alpha = E(L | L > VaR_\alpha) \quad (2.34)$$

Šis matas aiškinamas kaip vidutinis maksimalus nuostolis blogiausiuose  $100(1-\alpha)\%$  atvejų. Rizikos matas gali būti išreikštas ir kitaip:

$$CVaR_\alpha = VaR_\alpha(L) + E(L - VaR_\alpha | L > VaR_\alpha). \quad (2.35)$$

(2.35) formule CVaR galima paaiškinti kaip sumą VaR ir vidurkio pertekliaus virš VaR atveju, kai perteklius egzistuoja. Tai reiškia, kad CVaR visada skatins rizikos laipsnį, kuris ne mažesnis nei apskaičiuotas su VaR.

Rachev S., Martin D., Siboulet F. [6] savo darbe panaudojo CVaR kaip rizikos matą, sudaryti naujiems vertybinių popierių portfelio elgesio matus. STARR koeficientas skaičiuoja santykį tarp

laukiamos grąžos ir sąlyginės vertės rizikai. Kitaip tariant, Sharpe koeficiente standartinis nuokrypis, kaip rizikos matas, pakeistas sąlygine verte rizikai prie  $\alpha$  proc. pasiklovimo lygmens:

$$STARR = \frac{E(r_i - r_f)}{CVaR_{\alpha\%}(r_i - r_f)}, \quad (2.37)$$

kur

$$CVaR_{\alpha\%}(r_i - r_f) = -\frac{1}{[0.01 \cdot n]} \sum_{(r_i - r_f)_k \leq -VaR_{\alpha\%}(r_i - r_f)} (r_i - r_f)_k. \quad (2.37)$$

### 2.5.5 RACHEV KOEFICIENTAS

Tie patys autoriai, kaip ir STARR koeficiento, taip pat, naudodami CVaR rizikos matą, sudarė Rachev portfelio elgesio matą, kuris skaičiuoja santykį tarp CVaR neigiamos grąžos (nuostolio) su viršutiniu pasiklovimo lygmeniu ir CVaR portfelio grąžos su apatiniu pasiklovimo lygmeniu:

$$Rachev = \frac{CVaR_{(1-\alpha)\%}(r_f - r_i)}{CVaR_{(1-\beta)\%}(r_i - r_f)} \quad (2.38)$$

čia  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ .

Šis rodiklis yra STARR koeficiento modifikacija, kuri parodo investicijos grąžą prie viršutinio percentilio elgesio ribos, tačiau įvertina ir žemutinę, didžiausių nuostolių, percentilio ribą. Atitinkamai, optimizuojant portfelį, kai maksimizuojama portfelio grąža,  $\alpha$  yra mažas dydis ir leidžia didelę grąžą, o  $\beta$  būdamas irgi mažu dydžiu, apsaugo investuotoją nuo didelių nuostolių.

Kai Rachev koeficientas didesnis už 1, tai portfelyje labiau tikėtini didesni teigiami nuokrypiai, o kai mažesnis už 1, tai labiau tikėtini dideli nuostoliai.

Abu, STARR ir Rachev, portfelio elgesio matai gali būti pakeisti naudojant aukštesnius sąlyginius momentus uodegose, kad pavaizduoti skirtingus investuotojo rizikos vengimo ir grąžos siekimo laipsnius.

## 2.6 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIŲ OPTIMIZAVIMAS VIDURKIO-RIZIKOS METODAIS

Vertybinių popierių portfelių formavimui verta rinktis vidurkio-rizikos modelius, kurie yra paprasti ir praktiški skaičiuojamuoju požiūriu. Diana Roman, Ken Darby-Dowman ir Gautam Mitra [32] apibrėžia vidurkio-rizikos metodą, kaip atsitiktinio dydžio  $r_A$  dominavimą prieš atsitiktinį dydį  $r_B$  tada ir tik tada, kai  $E(r_A) \geq E(r_B)$  ir  $\rho(r_A) \leq \rho(r_B)$  su bent viena griežta nelygybe.

Čia

$r_A$  - vertybinių popierių portfelio A laukiama grąža su vidurkiu  $E(r_A)$  ir rizikos matu  $\rho(r_A)$ ;

$r_B$  - vertybinių popierių portfelio B laukiama grąža su vidurkiu  $E(r_B)$  ir rizikos matu  $\rho(r_B)$ .

Apibrėžimas reiškia, kad su laukiama grąža  $r_A$ , A vertybinių popierių portfelis turi mažiausią rizikos tikėtinumą ir didžiausią tikėtiną grąžą.

## 2.6.1 MARKOWITZ KLASIKINIS MODELIS

H. M. Markowitz [7] pasiūlytas modelis minimizuoja vertybinių popierių portfelio standartinę nuokrypį. Jis mano, kad vertybinių popierių portfelis gali būti pilnai charakterizuotas pagal jo grąžų vidurkį ir dispersiją.

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \quad (2.39)$$

su sąlygomis

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot r_i = r_p \quad (2.40)$$

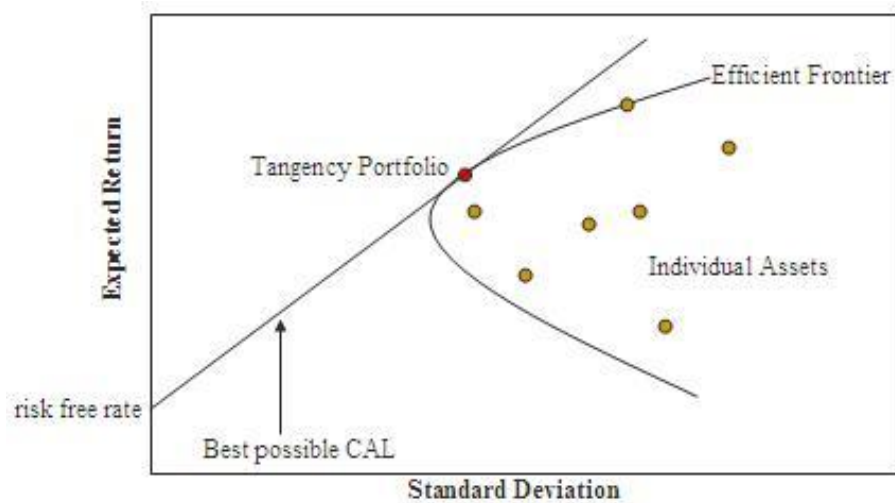
$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (2.41)$$

Naudodami šį modelį mes minimizuojame dispersiją (2.39) su sąlygomis, kad (2.40) visų akcijų grąžų suma yra lygi investuotojo priskirtai vidutinei portfelio normai  $r_p$ , bei (2.41) portfelio svorio koeficientų suma lygi vienam.

Suformuluotą konkretų Markowitz uždavinį galima spręsti skaitmeniškai, panaudojus atitinkamas optimizavimo procedūras. Šį uždavinį naudinga spręsti ir analiziškai, nes iš analizinio sprendinio galima padaryti svarbių išvadų.

Taip pat labai svarbus Markowitz [22] kartu su klasikiniu vertybinių popierių formavimo modeliu pasiūlyta optimalaus portfelio teorijos efektyvioji riba.

Visos galimos akcijų kombinacijos gali būti pažymėtos rizikos-grąžos plote ir sudaryti sritį. Linija, nubrėžta per viršutinę šios srities ribą ir yra vadinama efektyviaja riba. Akcijų kombinacijos, esančios toje linijoje, yra mažiausiai rizikingos prie tam tikros portfelio laukiamos grąžos. Matematiškai efektyvioji riba yra susikirtimas aibės portfelių su minimaliausia dispersija ir didžiausia grąža. Efektyviają ribą galite matyti Paveiksle 2.15. Portfelio grąžos  $r_i$  yra atidedamos y ašyje ir dispersija x ašyje.



**Paveikslas 2.15. Markowitz efektyvioji riba [28]**

Efektyvioji riba yra iškilą, nes portfelio rizikos-gražos charakteristikos keičiasi netiesiškai. Efektyvioji riba yra parabolė, kai laukiama graža yra brėžiama kartu su standartiniu nuokrypiu. Sritis, esanti virš efektyviosios ribos, yra nepasiekiamo. Nei vienas portfelis negali būti sudarytas iš tos srities taško. Taškai esantys žemiau efektyviosios ribos nėra optimalūs. Racionalus investuotojas visada rinksis portfelį, esantį ant efektyviosios ribos.

## 2.6.2 VIDUTINIO ABSOLIUTINIO NUOKRYPIO MODELIS MAD

MAD modelis, kurį pasiūlė Konno [20], yra ekvivalentus Markowitz modeliui su sąlyga, kad gražos yra pasiskirstę pagal daugiamačių normalųjį dėsnį. Tarkime, kad turime  $n$  vertybinių popierių. Tegul  $m_t$  aprašo absoliutinį portfelio gražų  $r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{nt}$  nuokrypį nuo vidurkio laiko momentu  $t$ , tada supaprastintas MAD modelis yra:

$$\min \quad MAD = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T m_t, \quad (2.42)$$

$$\text{kur} \quad m_t = |r_{it} - \mu_i| \cdot x_i, \quad (2.43)$$

su sąlygomis

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu_i = r_p \quad (2.44)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (2.45)$$

### 2.6.3 MINMAX MODELIS

Minmax modelio portfelis (Young [31]) iš  $n$  akcijų pasirenka tiesiogiai remiantis portfelio elgesiu praeityje per visus istorinius stebėjimus  $t=1, \dots, T$ . Minimali grąža, kuri galėjo būti praeityje šiuo atveju sutampa su rizikos matu. Modelis stengiasi maksimizuoti šią reikšmę, kol pasiekia nurodytą laukiamos grąžos lygį. Kita, alternatyvi ir dažniausiai labiau naudinga, Minmax portfelio parinkimo sąlyga yra – maksimalaus, stebėtame laike, galimo nuostolio minimizavimas. Galutinį sprendinį gali labai stipriai paveikti netgi viena išsišokanti duomenų reikšmė.

$M_p$  apibūdina minimalią portfelio grąžą gautą per visą stebėjimo periodą:

$$M_p = \min_t \sum_{i=1}^n x_i \cdot r_{it} \quad (2.46)$$

Tuomet Minmax modelis yra

$$\max \quad MM = M_p, \quad (2.47)$$

su sąlygomis

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu_i = r_p \quad (2.48)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (2.49)$$

### 2.6.4 MIXNORMAL MODELIS

Šiame darbe yra siūlomas naujas metodas, kuris paremtas mišriuojų normaliuojų skirstiniu. Tai Markowitz modelio modifikacija, pridedant akcijų grąžų vidurkius ir dispersijas be 0 ir įvertinant akcijų kainų nesikeitimo efektą, t. y. akcijų kainų pasikeitimo tikimybę  $p$ . Naujam modeliui sudaryta naudingumo funkcija:

$$\min \sum_{i=1}^n \omega_i p_i E(x_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i p_i \sqrt{(\sigma_i^2 + \mu_i^2(1-p_i))} \omega_j p_j \sqrt{(\sigma_j^2 + \mu_j^2(1-p_j))} \rho_{ij} \quad (2.50)$$

su sąlyga

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (2.51)$$

$$1 > \omega_i > 0.$$

Čia  $\omega_i$  –  $i$ -tosios akcijos svoris portfelyje,  $\mu_i$  –  $i$ -tosios akcijos gražų sekos be nulių vidurkis,  $\sigma_i$  –  $i$ -tosios akcijos gražų sekos be nulių dispersija,  $\rho_{ij}$  – kovariacija tarp  $i$ -tosios ir  $j$ -tosios akcijos gražų,  $p$  yra tikimybė, kad akcijos kaina pasikeis (t. y. graža bus nenulinė). Modelis minimizuojamas pagal  $\omega_i$ .

Tikimasi, kad naujai sudaryto modelio rezultatai bus panašūs arba geresni už Markowitz modelio rezultatus.

## **2.7 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIO ELGESIO MATŲ TYRIMO METODOLOGIJA**

Vertybinių popierių portfelio matų tyrimas atliktas penkiais etapais:

1. Akcijų atranka;
2. Akcijų gražų analizė;
3. Vertybinių popierių portfelių formavimas vidurkio-rizikos metodais;
4. Vertybinių popierių portfelių elgesio matų skaičiavimas;
5. Vertybinių popierių portfelių elgesio matų palyginimas ir analizė;

Iš visų Vilniaus vertybinių popierių biržoje kotiruojamų akcijų atsirinkta 15 akcijų. Pasirinkti tirti 2001 sausio 2 d.–2012 m. lapkričio 17 d. istoriniai akcijų gražų duomenys. Šiame darbe naudoti duomenys nepateikiami, nes juos laisvai galima pasiekti per internetinę prieigą: <http://www.nasdaqombaltic.com/market/?lang=en>.

Atrinktos akcijos, kurių duomenų failuose yra 2000 ir daugiau įrašų. Suskaičiuotos pasirinktų biržos akcijų skaitinės charakteristikos: vidurkis, standartinis nuokrypis, asimetrijos ir eksceso koeficientai. Atrinktų akcijų skaitinės charakteristikos pateiktos Lentelėje 3.1.

Kolmogorov-Smirnov suderinamumo testu, patikrinta, ar atrinktų akcijų gražos yra pasiskirstę pagal normalųjį ir mišrųjį-normalųjį dėsnį. Šio testo rezultatai tyrimo eigai neturės jokios įtakos, tačiau padės formuoti tikslesnes ir teisingesnes tyrimo išvadas.

Vertybinių popierių portfelių formavimui naudoti vidurkio-rizikos metodai. Atrinktoms akcijoms suformuoti vertybinių popierių portfeliai keturiais metodais: Markowitz, MAD, Minmax ir MixNormal.

Kiekvienam sudarytam Vertybinių popierių portfeliui skaičiuoti elgesio matai.

### 3. TIRIAMOJI DALIS

#### 3.1 VERTYBINIŲ POPIERIŲ GRAŽŲ DUOMENŲ ANALIZĖ

Prieš pradėdant formuoti vertybinių popierių portfelį labai svarbus investicinio projekto formavimo etapas yra vertybinių popierių pasirinkimas, bei akcijų gražų duomenų analizė. Šioje dalyje bus aptariamos anksčiau aprašytos vertybinių popierių portfelio elgesio matų skaičiavimo problemos, gražų normalumas ir asimetriškumas, istoriniams tyrimo duomenims bei atrenkamos akcijos, formuojamiems vertybinių popierių portfeliams. Pasirinkti tirti 2001 sausio 2 d.–2012 m. lapkričio 17 d. istoriniai akcijų gražų duomenys.

#### 3.1.1 VERTYBINIŲ POPIERIŲ GRAŽŲ SKAITINĖS CHARAKTERISTIKOS

Literatūroje itin pabrėžiama [3] [5], kad investuotojui pravartu kreipti dėmesį į akcijas, kurių asimetrijos koeficientas teigiamas, todėl iš visų Baltijos šalių vertybinių popierių biržos akcijų išsirinktos tos akcijos, kurių asimetrijos koeficientai yra aukščiausi. 15 atrinktų akcijų skaitines charakteristikas galite matyti Lentelėje 3.1. Visų atrinktų akcijų gražų diagramos pateiktos *1 Priede. Akcijų gražų skaitinės charakteristikos.*

Lentelė 3.1. Pasirinktų akcijų skaitinės charakteristikos iki 2012 11 17

Nr.	Akcijos pavadinimas	Žymėjimas	Stebėjimų skaičius	Nulinių gražų skaičius sekoje, %	Nenulinių gražų skaičius sekoje, %	Vidurkis	Dispersija	Eksceco koeficientas	Asimetrijos koeficientas
1	Anykščių vynas	ANK	2986	66.41	33.59	0.00110	0.05938	364.70	12.14
2	Apranga	APG	2962	31.33	68.67	0.00140	0.02358	7.37	0.470
3	Grigijškės	GRG	3007	35.18	64.82	0.00126	0.02659	7.25	0.330
4	Invalda	IVL	3013	26.05	73.95	0.00162	0.03014	9.18	-0.033
5	Klaipėdos nafta	KNF	2755	36.59	63.41	0.00034	0.02537	188.57	-6.298
6	Lietuvos dujos	LDJ	3002	28.61	71.39	0.00038	0.02205	9.63	0.571
7	Panevezio statybos trestas	PTR	3003	39.79	60.21	0.00095	0.02716	8.48	0.865
8	Pieno zvaigzdes	PZV	3009	41.74	58.26	0.00083	0.02142	17.31	0.947
9	Rokiskio suris	RSU	3010	38.17	61.83	0.00047	0.02018	8.82	0.513
10	Sanitas	SAN	2976	43.41	56.59	0.00151	0.03107	217.84	-2.589
11	Siaulių bankas	SAB	2982	38.80	61.20	0.00027	0.02083	10.22	0.471
12	Teo	TEO	3012	26.36	73.64	0.00017	0.01572	52.09	2.064
13	Linas	LNS	2996	52.84	47.16	0.00055	0.04231	13.75	1.011
14	Utenos trikotazas	UTR	2987	64.21	35.79	0.00024	0.03708	67.79	3.882
15	Vilniaus baldai	VBL	3010	49.47	50.53	0.00121	0.02436	12.71	0.037

Skaitinių charakteristikų lentelė rodo, kad akcijų gražų vidurkiai nėra dideli. Taip yra todėl, kad Baltijos šalių akcijų rinka yra pasyvi ir daug akcijų gražų yra lygios nuliui. Šį reiškinį plačiau



nagrinėjo A. Kabašinskas savo mokslinėje disertacijoje [16]. Nagrinėjamų akcijų gražų sekose nulinės reikšmės užima nuo 26,1 % (UAB „Invalda“) iki 66,4 % (AB „Anykščių vynas“) viso sekos ilgio.

### 3.1.2 VERTYBINIŲ POPIERIŲ GRAŽŲ SUDERINAMUMO TESTAI

Viena pagrindinių vidurkio rizikos modelių, tuo pačiu ir Sharpe rodiklio, trūkumas yra šios teorijos taikomumo sritis tik normaliai pasiskirsčiusiems duomenims. Šią problemą bandė spręsti vėliau mokslininkų sukurti portfelio formavimo modeliai ir elgesio matai. Norint išvengti neteisingų duomenų ir skaičiavimo rezultatų vertinimo, patikrintas visų atrinktų akcijų gražų normalumas, t. y. pasitelkiant Kolmogorov-Smirnov suderinamumo testą patikrinta hipotezė  $H_0 : F(x) = F_o(x)$  (su reikšmingumo lygmeniu  $\alpha = 0.05$ ), kad pasirinktų akcijų duomenys pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį. Kolmogorov-Smirnov suderinamumo testo programinė realizacija pateikta 7 Priede. *Kolmogorov-Smirnov suderinamumo testo mathcad realizacija.*

Testo rezultatai pateikti Lentelėje 3.2:

**Lentelė 3.2. Kolmogorov-Smirnov suderinamumo su normaliuoju skirstiniu testo rezultatai**

Akcija	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
Testo reikšmė	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Pateiktuose testo rezultatuose matyti, kad nei vienos iš pasirinktų akcijų gražos nėra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį.

Taip pat Kolmogorov-Smirnov suderinamumo testu patikrinta neparametrinė hipotezė  $H_0 : F(x, \mu, \sigma, p) = F_o(x, \mu, \sigma, p)$ , kad pasirinktų akcijų gražos pasiskirstę pagal mišrųjį-normalųjį skirstinį.

Testo rezultatai pateikti Lentelėje 3.3:

**Lentelė 3.3. Kolmogorov-Smirnov suderinamumo su mišr.-norm. skirstiniu testo rezultatai**

Akcija	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
Testo reikšmė	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Nepaisant to, kad Koutrouvelis testas yra itin jautrus  $t_m$  reikšmėms (žr. 2.4 skyrių) ir jo patikimumas tikrinant sekų suderinamumą su normaliuoju dėsnium yra mažesnis nei Kolmogorov-Smirnov kriterijaus, tačiau šis kriterijus turi ir labai didelį privalumą – jis gali būti naudojamas ne tik tolydžioms, bet ir sudėtingoms, trūkioms pasiskirstymo funkcijoms. Taigi, tikrinant sekų suderinamumą su mišriuoju-normaliuoju dėsnium, kurio negalime priskirti prie tolydžiųjų, Koutrouvelis testas yra daug naudingesnis nei Kolmogorov-Smirnov.



Testų rezultatai patvirtina, kad sugeneruotų priklausomų atsitiktinių dydžių sekos taip pat pasiskirstę pagal mišrųjį-normalųjį dėsnį.

## 3.2 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIŲ SUDARYMAS

Vertybinių popierių portfelių optimizavimas vidurkio-rizikos metodais yra paprastas ir praktiškas būdas sudaryti portfelį skaičiuojamuoju požiūriu. Tačiau kai kurie autoriai kritikuoja vidurkio-rizikos metodus dėl neracionalumo pasirinkimo požiūriu. Įsivaizduokime modelį su simetriniu rizikos matu, tokiu kaip dispersija ir du atsitiktinius dydžius  $X$  ir  $Y$ .  $X$  turi garantuotą išlošimą  $R_x$ .  $Y$  turi dvi galimybes – išlošimus  $R_x$  ir  $R_y$  su tikimybėmis  $\frac{1}{2}$ . Tegul  $R_y > R_x$ . Akivaizdu, kad turėtume pasirinkti  $Y$ , kadangi jo išlošimas yra didesnis nei  $X$ . Tačiau pagal vidurkio – rizikos modelio formulavimą, nei vienas negali būti pasirinktas, nes nors  $X$  ir turi mažesnę laukiamą vertę, jo rizika yra lygi nuliui [32].

Neatsižvelgdami į šią pastabą vertybinių popierių portfelių formuosime vidurkio-rizikos metodais dėl lengvo matematinio programavimo realizavimo. Visų metodų realizacijas MathCad pakete galite rasti 7 Priede.

Naudojamuose vidurkio-rizikos methoduose nereikalausime tam tikros laukiamos portfelio grąžos, o sudarysime portfelį su mažiausia įmanoma rizika. Portfelio grąžos normą nustatysime skaičiuodami portfelio elgesio matus. Taip pat sudarytuose portfeliuose neleisime nepadengtojo pardavimo.

### 3.2.1 MARKOWITZ PORTFELIS

Markowitz vidurkio-rizikos portfelio formavimo modelis akcijas renka si atsižvelgdamas į akcijų standartinę nuokrypį. Prioritetas teikiamas mažiausią standartinę nuokrypį turinčioms akcijoms.

**Lentelė 3.10. Markowitz vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2012 11 17**

Akcija	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
Svoris	0.021	0.065	0.034	0.045	0.001	0.061	0.054	0.078	0.167	0.067	0.125	0.076	0.039	0.017	0.150

**Lentelė 3.11. Markowitz vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2013 03 31**

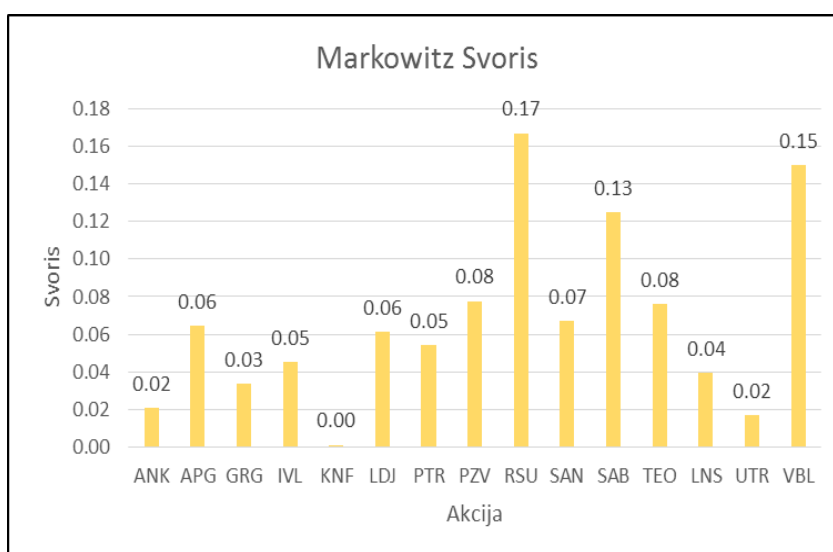
Akcija	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
Svoris	0.111	0	0.064	0	0.387	0.065	0	0	0.022	0	0.107	0.098	0.051	0.092	0.001

Lentelėje 3.10 pateikti Markowitz modeliu sudaryto vertybinių popierių portfelio svorio koeficientus  $x_i$  laikotarpiu nuo 2001 sausio 2 d. iki 2012 lapkričio 17 d. Šiame portfelyje didžiausius

svorio koeficientus turi šios akcijos: RSU (16,7 proc.), VBL (15,0 proc.) ir SAB (12,5 proc.). Lentelėje 3.11 pateikti Markowitz modeliu sudaryto vertybinių popierių portfelio svorio koeficientus  $x_i$  laikotarpiu nuo 2013 sausio 2 d. iki 2013 kovo 31 d. Šiame portfelyje didžiausius svorio koeficientus turi šios akcijos: KNF (38,7 proc.), ANK (11,1 proc.) ir SAB (10,7 proc.).

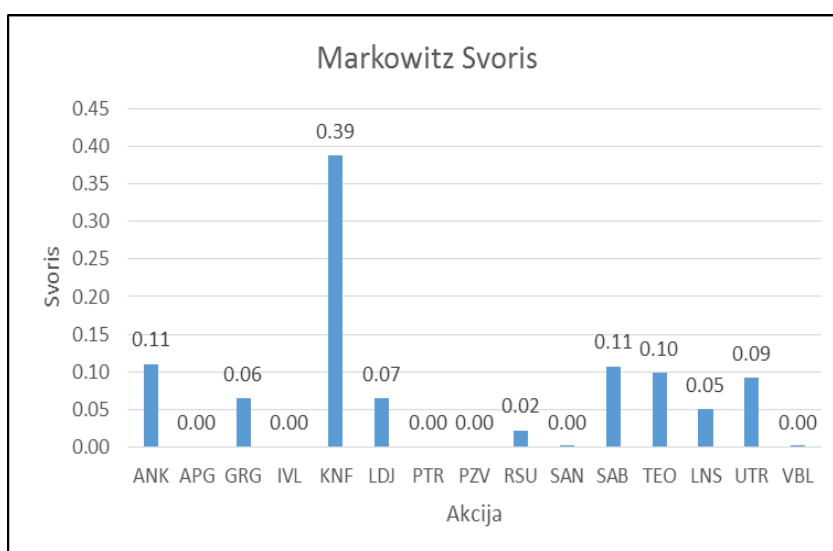
Peržvelgę šių akcijų standartinę nuokrypį (žr. Lentelė 3.1) galime matyti, kad šios akcijos turi žemiausią standartinę nuokrypį.

Paveikslas 3.1 vaizdžiai pateikia Lentelės 3.10 rezultatus. Dėl apvalinimo paklaidos iki šimtųjų, šioje diagramoje pateiktų akcijų svorių suma nėra lygi 1.



**Paveikslas 3.1. Markowitz portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2012 11 17**

Paveikslas 3.2 vaizdžiai pateikia Lentelės 3.11 rezultatus. Šioje diagramoje parašyti akcijų svoriai sudaro ne 1 dėl apvalinimo paklaidos iki šimtųjų.



**Paveikslas 3.2. Markowitz portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2013 03 31**

### 3.2.2 MAD PORTFELIS

Mean Absolute Deviation (MAD) vidurkio-rizikos portfelio formavimo modelis akcijas renkasi atsižvelgdamas į absoliutinį portfelio grąžų nuokrypį nuo vidurkio kiekvienu laiko momentu. Prioritetas teikiamas mažiausią nuokrypį turinčioms akcijoms.

**Lentelė 3.12. MAD vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2012 11 17**

Akcija	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
Svoris	0.03	0.11	0.03	0.11	0.03	0.11	0.03	0.11	0.03	0.11	0.03	0.11	0.03	0.11	0.03

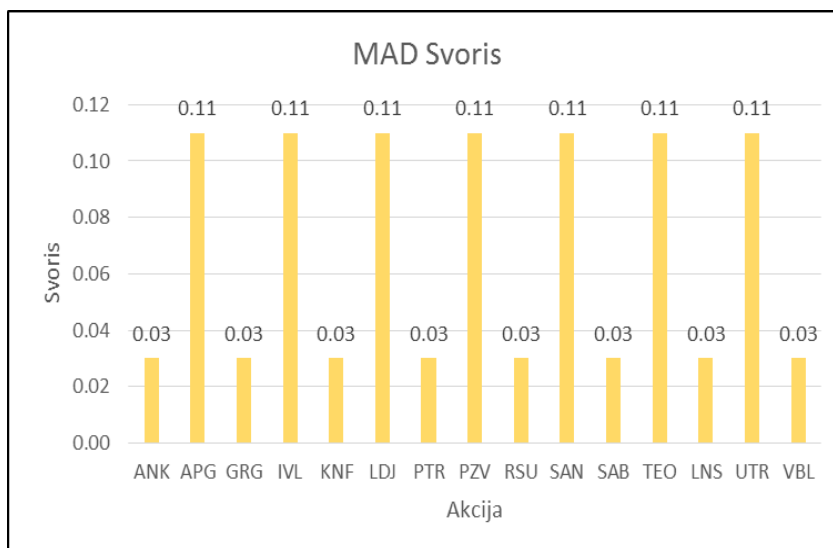
**Lentelė 3.13. MAD vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2013 03 31**

Akcija	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
Svoris	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067

Lentelė 3.12 aprašo MAD modeliu sukurto vertybinių popierių portfelio svorio koeficientus  $x_i$  laikotarpiu nuo 2001 sausio 2 d. iki 2012 lapkričio 17 d. Šiame portfelyje didžiausius svorio koeficientus turi šios akcijos: *APG* (11,0 proc.), *INV* (11,0 proc.), *LDJ* (11,0 proc.), *PZV* (11,0 proc.), *SAN* (11,0 proc.), *TEO* (11,0 proc.) ir *UTR* (78,15 proc.). Šių dviejų akcijų kainos pasižymi stabilumu, t. y. istoriniuose duomenyse tarp akcijų grąžų vyrauja grąžos lygios nuliui (žr. 3 Priede).

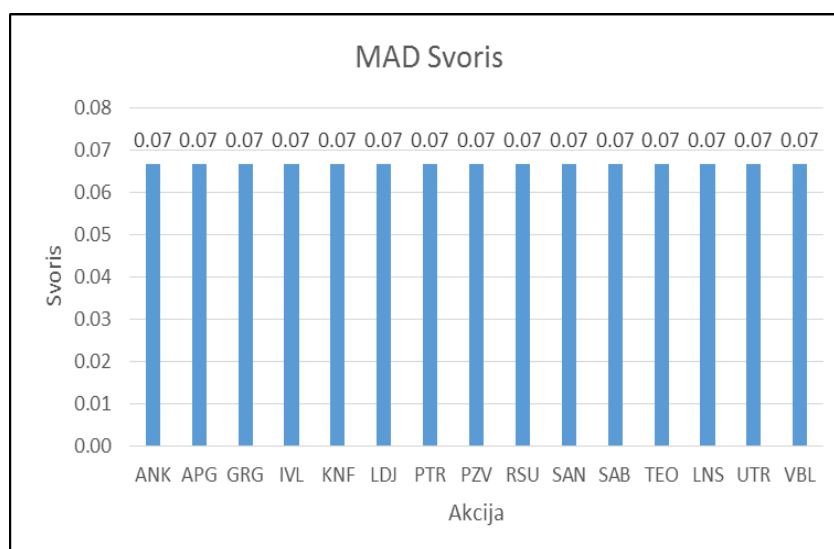
Lentelė 3.13 aprašo MAD modeliu sukurto vertybinių popierių portfelio svorio koeficientus  $x_i$  laikotarpiu nuo 2012 sausio 2 d. iki 2013 kovo 31 d. Šiame portfelyje visos akcijos turi vienodus svorius.

Paveikslas 3.3. MAD portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2012 11 17. Paveiksle 3.3 vaizdžiai pateikiami Lentelės 3.12 rezultatai:



**Paveikslas 3.3. MAD portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2012 11 17**

Paveikslas 3.4 vaizdžiai pateikia Lentelės 3.13 rezultatus:



**Paveikslas 3.4. MAD portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2013 03 31**

### 3.2.3 MINMAX PORTFELIS

MinMax vidurkio-rizikos portfelio formavimo modelis akcijas renkami atsižvelgdamas į minimalią istorinių stebėjimų gražą ir ją maksimizuoja, kitaip tariant, šio modelio pasirinkimo sąlyga – maksimalus, stebėtame laike, galimo nuostolio minimizavimas.

**Lentelė 3.14. MinMax vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2012 11 17**

Akcija	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
Svoris	0.070	0.090	0.080	0.090	0.010	0.060	0.070	0.030	0.060	0.070	0.090	0.070	0.050	0.080	0.090

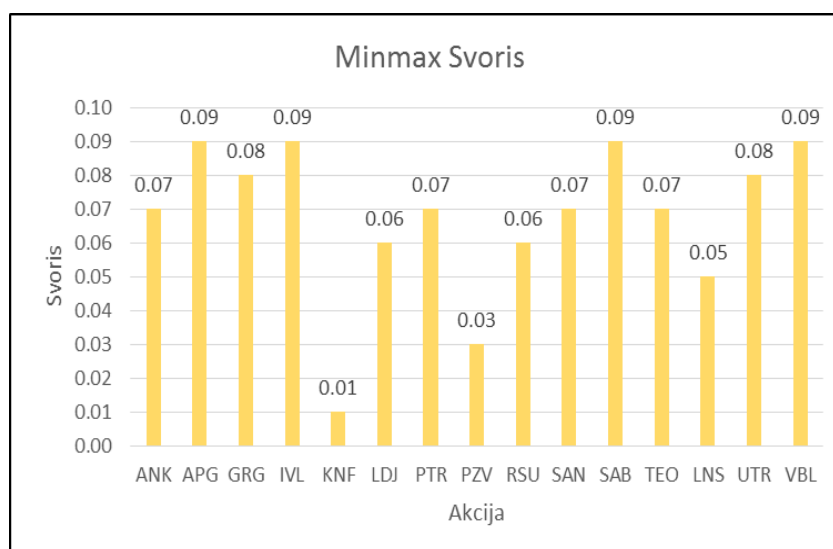
**Lentelė 3.15. MinMax vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2013 03 31**

Akcija	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
Svoris	0.306	0.021	0.073	0	0.083	0.087	0.035	0	0.063	0	0.083	0.085	0.082	0.082	0

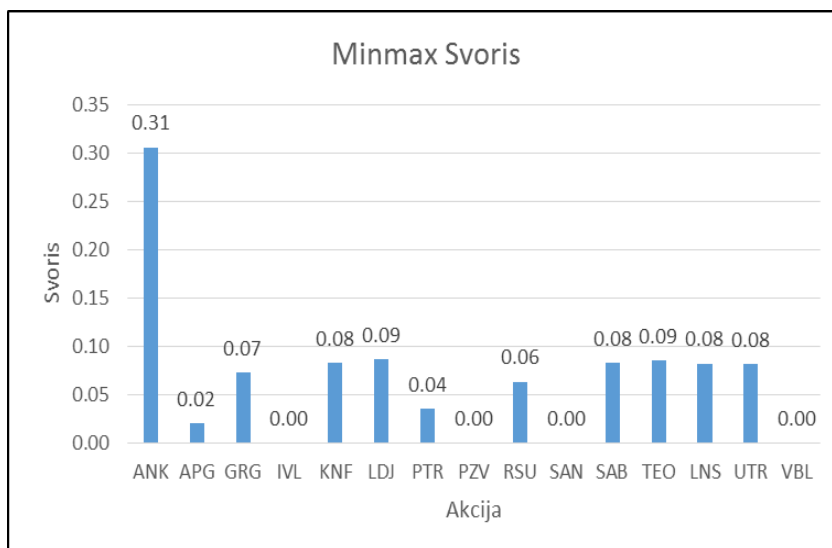
Lentelėje 3.14 pateikti MinMax modeliu sudaryto vertybinių popierių portfelio svorio koeficientai  $x_i$  laikotarpiu nuo 2001 sausio 2 d. iki 2012 lapkričio 17 d. Šiame portfelyje didžiausius svorio koeficientus turi šios akcijos: *APG* (9,0 proc.), *INV* (9,0 proc.), *SAB* (9,0 proc.) ir *VBL* (9,0 proc.). Šių akcijų gražose vyrauja nuliai (žr. 3 Priede).

Lentelėje 3.15 pateikti MinMax modeliu sudaryto vertybinių popierių portfelio svorio koeficientai  $x_i$  laikotarpiu nuo 2013 sausio 2 d. iki 2013 kovo 31 d. Šiame portfelyje didžiausius svorio koeficientus turi šios akcijos: *ANK* (30,6 proc.), *LDJ* (8,7 proc.) ir *TEO* (8,5 proc.).

Paveiksle 3.5 vaizdžiai pateikiami Lentelės 3.14 rezultatai:

**Paveikslas 3.5. MinMax portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2012 11 17**

Paveiksle 3.6 vaizdžiai pateikiami Lentelės 3.15 rezultatai:



**Paveikslas 3.6. MinMax portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2013 03 31**

### 3.2.4 MIXNORMAL PORTFELIS

Pasiūlytas MixNormal portfelio formavimo modelis akcijas renkasi įvertinant tikimybę, kad akcijos kaina pasikeis.

**Lentelė 3.16. MixNormal vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2012 11 17**

Akcija	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
Svoris	0.99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.01	0	0	0	0

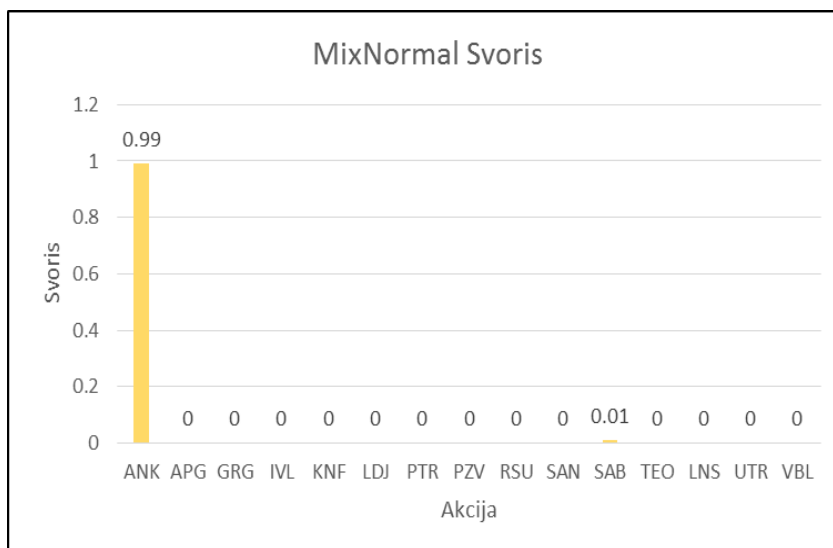
**Lentelė 3.17. MixNormal vertybinių popierių portfelio akcijų svorio koeficientai iki 2013 03 31**

Akcija	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
Svoris	0	0	0	0	0	0	0	0.01	0	0	0	0	0	0	0.99

Lentelėje 3.16 pateikti MixNormal modeliu sudaryto vertybinių popierių portfelio koeficientų  $x_i$  svoriai. Šiame portfelyje svoriai parenkami tik dviem akcijoms: ANK (99,0 proc.), SAB (1,0 proc.).

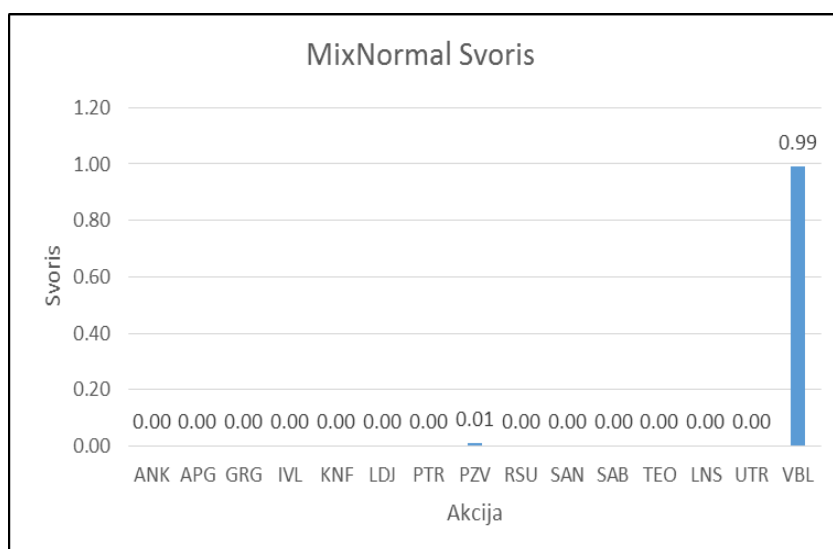
Paveiksle 3.7 vaizdžiai pateikiami Lentelės 3.16 rezultatai:





**Paveikslas 3.7. MixNormal portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2012 11 17**

Paveiksle 3.8 vaizdžiai pateikiami Lentelės 3.17 rezultatai:



**Paveikslas 3.8. MixNormal portfelio akcijų svorio koeficientų diagrama iki 2013 03 31**

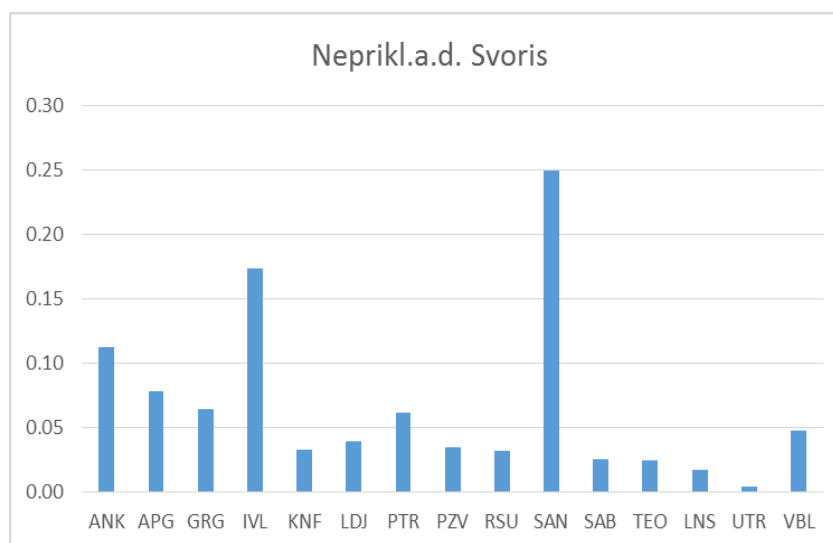
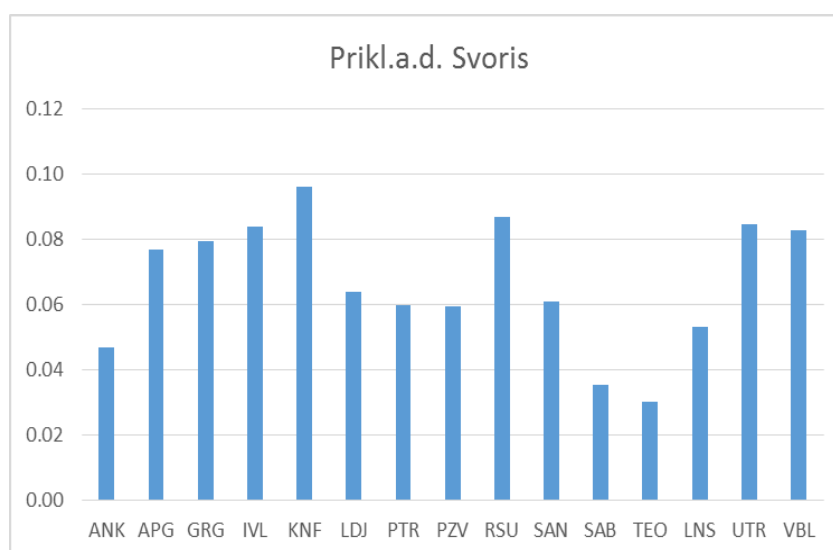
Naujai sudarytam MixNormal modeliui patikrinti sugeneruota 1000 variantų priklausomų ir 1000 nepriklausomų atsitiktinių sekų. Sugeneruotoms sekoms MixNormal modeliu suskaičiuoti svoriai. Kiekvienai akcijai suskaičiuotas vidutini svoris ir su gautais vidutiniais svoriais sudaryti portfeliai.

**Lentelė 3.18. MixNormal v. p. portfelio akcijų svorio koeficientai, kai dydžiai nepriklausomi**

Akcija	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
Svoris	0.11	0.08	0.06	0.17	0.03	0.04	0.06	0.04	0.03	0.25	0.03	0.02	0.02	0.00	0.05

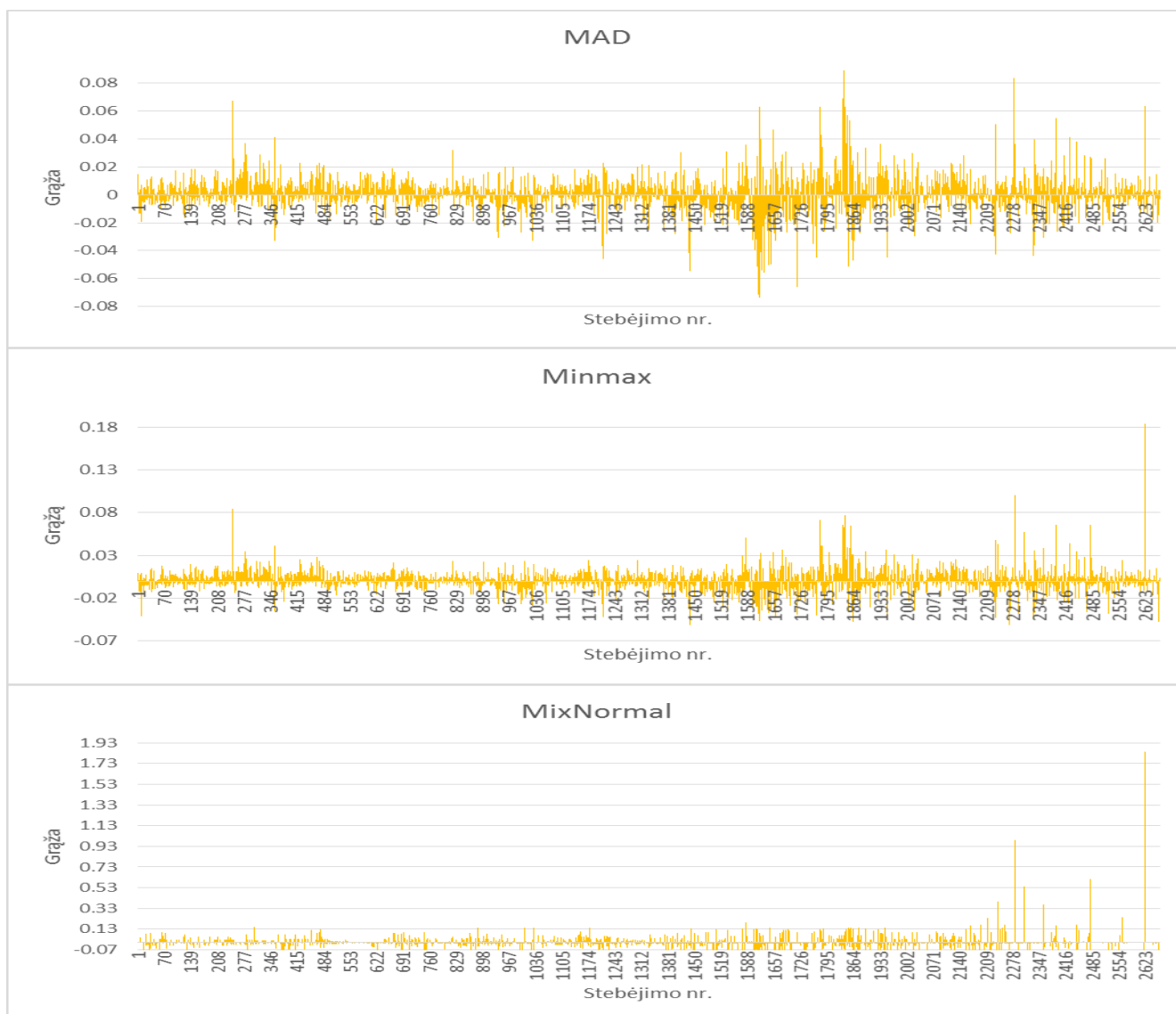
**Lentelė 3.19. MixNormal v. p. portfelio akcijų svorio koeficientai, kai dydžiai priklausomi**

Akcija	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
Svoris	0.05	0.08	0.08	0.08	0.10	0.06	0.06	0.06	0.09	0.06	0.04	0.03	0.05	0.08	0.08

**Paveikslas 3.9. MixNormal v. p. portfelio akcijų svorio koeficientai, kai dydžiai nepriklausomi****Paveikslas 3.10. MixNormal v. p. portfelio akcijų svorio koeficientai, kai dydžiai priklausomi**

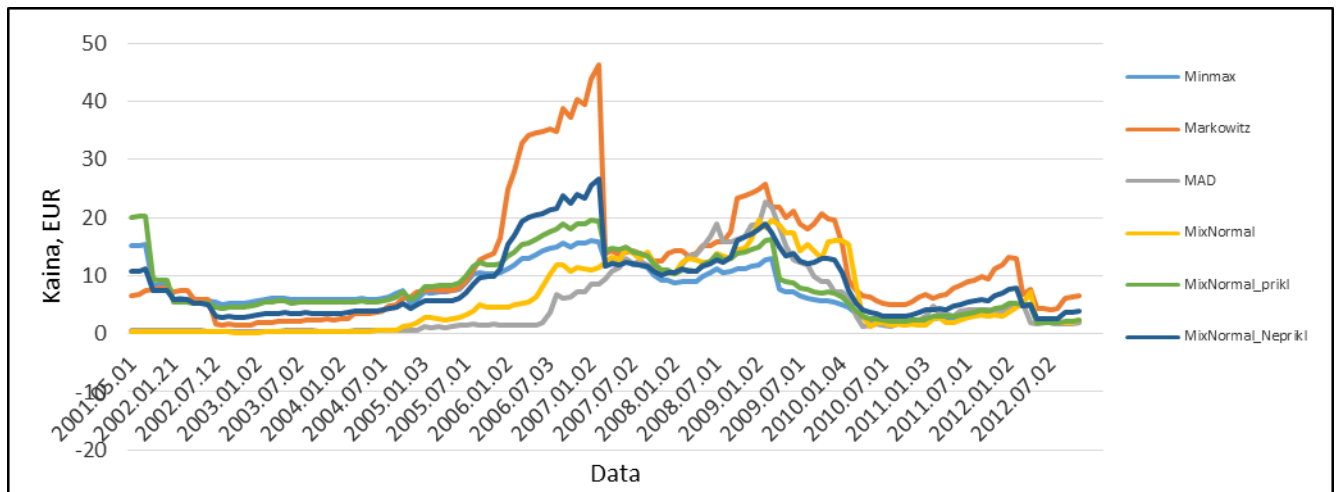
### 3.2.5 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIŲ ANALIZĖ IR PALYGINIMAS

Paveiksle 3.11 pavaizduotos kiekvieno portfelio grąžos nuo jų įsigijimo datos 2001 sausio 2 d. iki 2012 lapkričio 17 d. Iš šių diagramų galima spręsti, kad MAD modelio grąžos buvo dinamiškiausios, tačiau daugiausiai neigiamos.



**Paveikslas 3.11. Sudarytų vertybinių popierių portfelių grąžų diagramos**

Geriausiai visų portfelių pelną padės palyginti Paveikslas 3.12. Galima matyti kaip kiekvieno portfelio vertė kito nuo jų įsigijimo datos 2001 sausio 2 d. iki jų pardavimo datos 2012 lapkričio 17 d. Čia parodyta portfelio kaina investavus 1 EUR.



**Paveikslas 3.12. Vertybinių popierių portfelių kainų diagrama**

Kaip matome, visų sudarytų portfelių kaina labiausiai buvo išaugus 2007 m. sausio 5 d. Labiausiai išaugo Markowitz modeliu sudaryto portfolio kaina.

MAD modeliu sudaryto portfolio kaina kito mažiausiai

Lentelėje 3.20 pateikiami vertybinių popierių portfelių pelningumai pardavus portfelius lapkričio 17 d:

**Lentelė 3.20. Vertybinių popierių portfelių pelningumas**

V.p. portfelis	Pelningumas
Markowitz	-6.283
MAD	0.025
MinMax	0.696
MixNormal	0.855

Iš Lentelės 2.20 matyti, kad pagal istorinius 2001 m. sausio 1 d.–2012 m. lapkričio 17 d. duomenis didžiasias pelnas prognozuojamas naujai sudarytam MixNormal ir MinMax portfeliams.

### 3.3 VERTYBINIŲ POPIERIŲ PORTFELIŲ ELGESIO MATŲ ANALIZĖ

Vertybinių popierių portfelių elgesio matų analizę atliksime priimdami investicinį sprendimą ir tikrindami jo sėkmę ekonominės naudos požiūriu. Taip pat peržvelgsime kaip kito portfolio elgesio matai kasdien nuo akcijų nusipirkimo dienos iki pardavimo, ar jie keitė savo prognozes portfeliams. Portfelių elgesio matų skaičiavimo MathCad realizacija pateikta 9 Priede.

### 3.3.1 INVESTICINIO SPRENDIMO PRIĖMIMAS PASITELKIANT PORTFELIŲ ELGESIO MATUS

Lentelėje 3.21 pateikta informacija apie portfelių elgesio matų koeficientus pagal istorinius 2001–2012 m. ir 2013 m. I-III mėn. akcijų gražų duomenis.

**Lentelė 3.21. Vertybinių popierių portfelių elgesio matai**

	Iki 2012.11.17					Po 2013.01.01				
	Sharpe	Sortino	VaR <sub>α</sub>	STARR	Rachev	Sharpe	Sortino	VaR <sub>α</sub>	STARR	Rachev
<b>Markowitz</b>	-0.29	-0.21	-0.16	-0.10	0.58	-0.23	-0.23	-0.14	-0.10	0.49
<b>MAD</b>	-0.26	-0.20	-0.15	-0.10	0.55	-0.27	-0.21	-0.16	-0.10	0.56
<b>MiniMax</b>	-0.25	-0.20	-0.15	-0.09	0.55	-0.15	-0.21	-0.11	-0.07	0.35
<b>MixNormal</b>	-0.04	-0.17	-0.04	-0.02	0.17	-0.11	-0.19	-0.07	-0.04	0.20

Pagal 2001–2012 m. duomenis, portfelių elgesio matai skirtingai prognozuoja vertybinių popierių portfelių pasirinkimus. Sharpe, Sortino, VaR<sub>α</sub> ir STARR rodikliai iš visų galimų siūlo rinktis naujai sudarytą MixNormal portfelį, o Rachev koeficientas prognozuoja geriausią Markowitz portfelio rezultatą. Tačiau bendrai nei vienas rodiklis neprognozuoja gerų rezultatui nei vienam sumodeliuotam vertybinių popierių portfeliui. Neigiami Sharpe, Sortino, VaR<sub>α</sub> ir STARR koeficientai, bei Rachev koeficientas mažesnis už 1 prognozuoja nuostolį visiems sumodeliuotiems portfeliams.

Pagal 2013 m. sausio 2 d.–kovo 31 d. duomenis visi skaičiuoti elgesio matai mažiausią nuostolį prognozuoja MixNormal portfeliui. Didžiausias nuostolis prognozuojamas MAD portfeliui.

## REKOMENDACIJOS IR TOLESNI TYRIMAI

- Pratęsiant atliktą tyrimą, galima analiziškai įrodyti, kad didėjant sekų skaičiui, priklausomų mišriųjų-normaliųjų sekų sumos skirstinys konverguoja į normalųjį dėsnį. Tai nesunku įrodyti nepriklausomų atsitiktinių dydžių atveju, kai sekos pasiskirstę vienodai. Sudėtingesnis atvejis – kai atsitiktiniai dydžiai yra priklausomi ir sekų parametrai skiriasi.
- Atliekant mišriųjų-normaliųjų sekų tyrimą pastebėtas įdomus efektas: kai tikimybė, kad akcijos kaina pasikeis,  $p \in [0.3; 0.7]$  sekų suderinamumas su mišruoju normaliuoju dėsniu prastėja. Šis efektas taip pat pastebėtas tiriant mišriąsias-stabiliąsias sekas.

## IŠVADOS

1. Atliktas tyrimas priklausomų mišriųjų-normaliųjų sekų sumų pasiskirstymo dėsniai nustatyti. Gauti rezultatai parodė, kad taip pat kaip ir nepriklausomų sekų atveju, taip ir priklausomų sekų atveju, esant nedideliame (mažesniame už 5) mišriųjų-normaliųjų sekų skaičiui sekų sumos geriau nei normalusis dėsnis aprašo mišrusis-normalusis dėsnis. Didinant dėmenų skaičių sekų sumų suderinamumo su normaliuoju dėsniu rezultatai gerėja, o suderinamumo su mišriuoju-normaliuoju dėsniu tikrinimas nebetenka prasmės, nes sumų sekos parametro  $p_{max}$  įvertis  $\hat{p}_{max} \rightarrow 1$ .
2. Pirmoji išvada galioja tiek skirtingai, tiek vienodai pasiskirsčiusių mišriųjų-normaliųjų sekų sumoms, tiesiog kuo platesni mišriųjų-normaliųjų sekų parametrų įgyjamų reikšmių intervalai, tuo blogesni sumų suderinamumo su minėtaisiais dėsniais rezultatai.
3. Nustatyta, kad didelę dalį Lietuvos akcijų gražų sudaro nuliai, todėl Lietuvos akcijų gražas tiksliau aprašo mišrusis normalusis dėsnis, nei normalusis.
4. Pasiūlytas naujas metodas vertybinių popierių portfelių formavimui, paremtas Markowitz modeliu ir mišriuoju-normaliuoju skirstiniu. Gauti rezultatai parodė, kad nauju pasiūlytu modeliu sudarytas portfelis buvo pelningiausias iš visu sudarytų portfelių (0,86 graža).
5. Pagal istorinius 2001–2012 m. duomenis Sharpe, Sortino,  $Var_\alpha$  ir STARR portfelio elgesio matai iš visų galimų siūlo rinktis MixNormal portfelį, o Rachev koeficientas prognozuoja geriausią Markowitz portfelio rezultatą. Neigiami Sharpe, Sortino,  $Var_\alpha$  ir STARR koeficientai, bei Rachev koeficientas mažesnis už 1 prognozuoja nuostolį visiems sumodeliuotiems portfeliams.

## Literatūra

1. Albrecht Peter, Risk Measures contribution for encyclopedia of actuarial science, 2004.
2. Artzner P., Delbaen F., Eber j.M. Heath D. (1999) „Coherent measures of risk“, Mathematical Finance 9, 203-228.
3. Beedles W. L. (1979), „On the asymmetry of market returns“, Journal of financial and quantitative analysis, Vol.14, No.3, September, psl.653-660.
4. Belovas Igoris, Kabašinskas Audrius, Sakalauskas Leonidas, Returns modelling problem in the Baltic equity market / Simulation and optimisation in business and industry : International conference on operational research : May 17-20, 2006, Tallinn, Estonia. Kaunas : Technologija, 2006 p. 3-8.
5. Beyond Mean-Variance: Performance Measurement of Portfolios Using Options or Dynamic Strategies Hayne E. Leland, Berkley, Research Program in Finance Working Papers, 1998, [žiūrėta 2013 01 12]. Prieiga per internetą: <http://ideas.repec.org/p/ucb/calbrf/rpf-263-rev.html>
6. Biglova A., Ortobeli S., Rachev S.Z. and Stoyanov S. (2004). Diferent approaches to risk estimation in portfolio theory. Journal of Portfolio Management 31 103.112.
7. Bower B., Wentz P. Portfolio Optimization: MAD vs. Markowitz // Undergrad. Math J. 6, No. 2, 16 p. (2005).
8. Boyle, PP. 1986, Option valuation using a three-jump process, International Options Journal 3, pages 7-12
9. Derman E. , Kani I. , Chriss N. , Implied Trinomial Trees ofthe Volatility, Quantitative Strategies Research Notes Smile, 1996. [žiūrėta 2013 02 15]. Prieiga per internetą: [http://www.ederman.com/new/docs/gs-implied\\_trinomial\\_trees.pdf](http://www.ederman.com/new/docs/gs-implied_trinomial_trees.pdf)
10. Evans M.J., Rosenthal J.S. Probability and statistics: the science of uncertainty; University of Toronto. - New York : W.H. Freeman and company, 2010.- p. 68 -71.
11. Farinelli Simone a, Ferreira Manuel b, Rossello Damiano c, Markus Thoeny b, Luisa Tibiletti d,\* Beyond Sharpe ratio: Optimal asset allocation using different performance ratios, Journal of Banking & Finance 32 (2008) 2057–2063
12. Horniman M.D., Jobst N.J., Lucas C.A. and Mitra G. (2000). Constructing efcient portfolios with discrete constraints a computational study. Technical report TR/06/00, Department of Mathematical Sciences, Brunel University, UK.
13. Young M.R. A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution. 1998 Management Science, 44, p. 673-683.
14. John, C. Hull. Options, futures, and other derivative securities. University of Toronto. Prentice-Hall International, Inc., p.492.

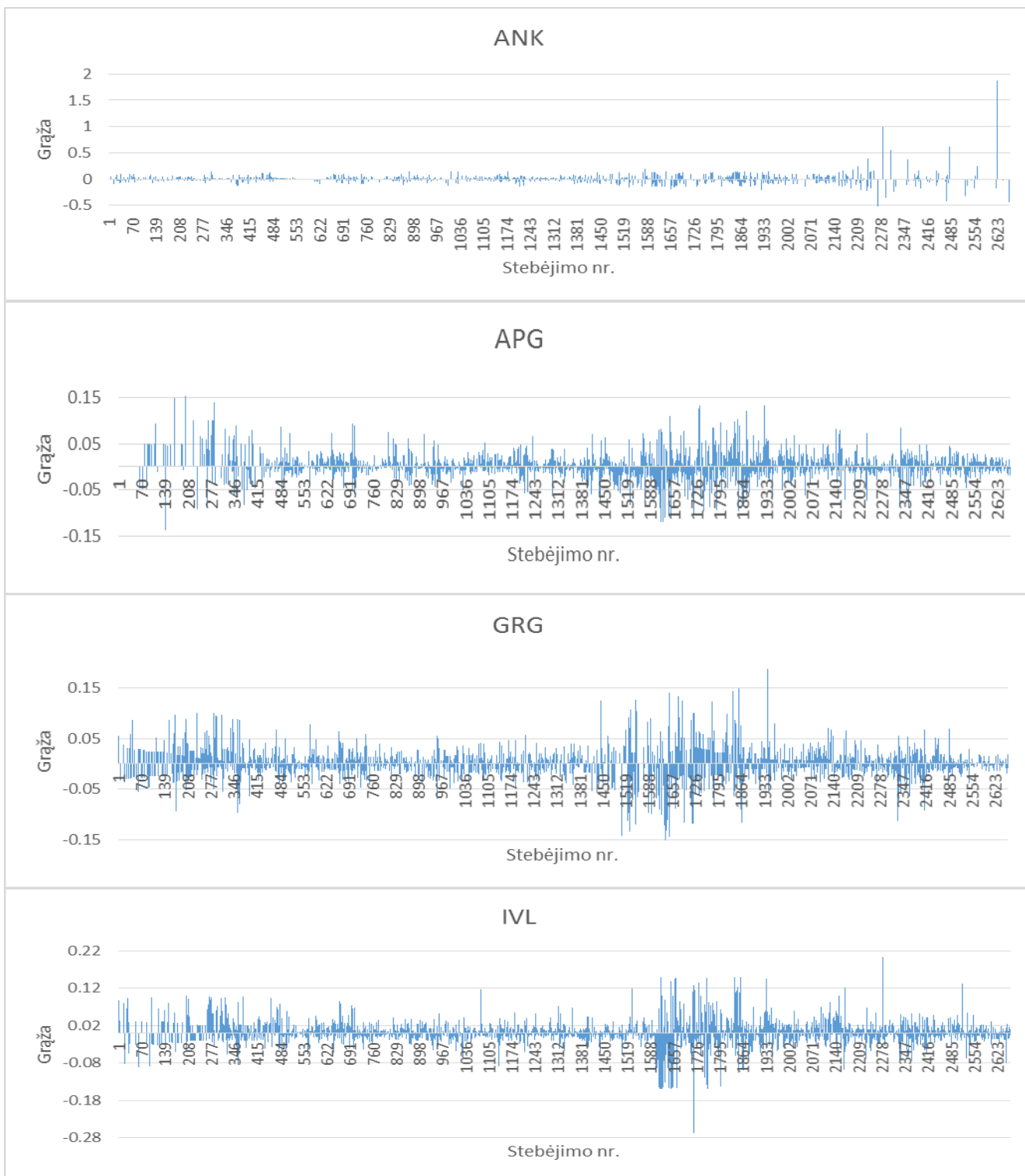


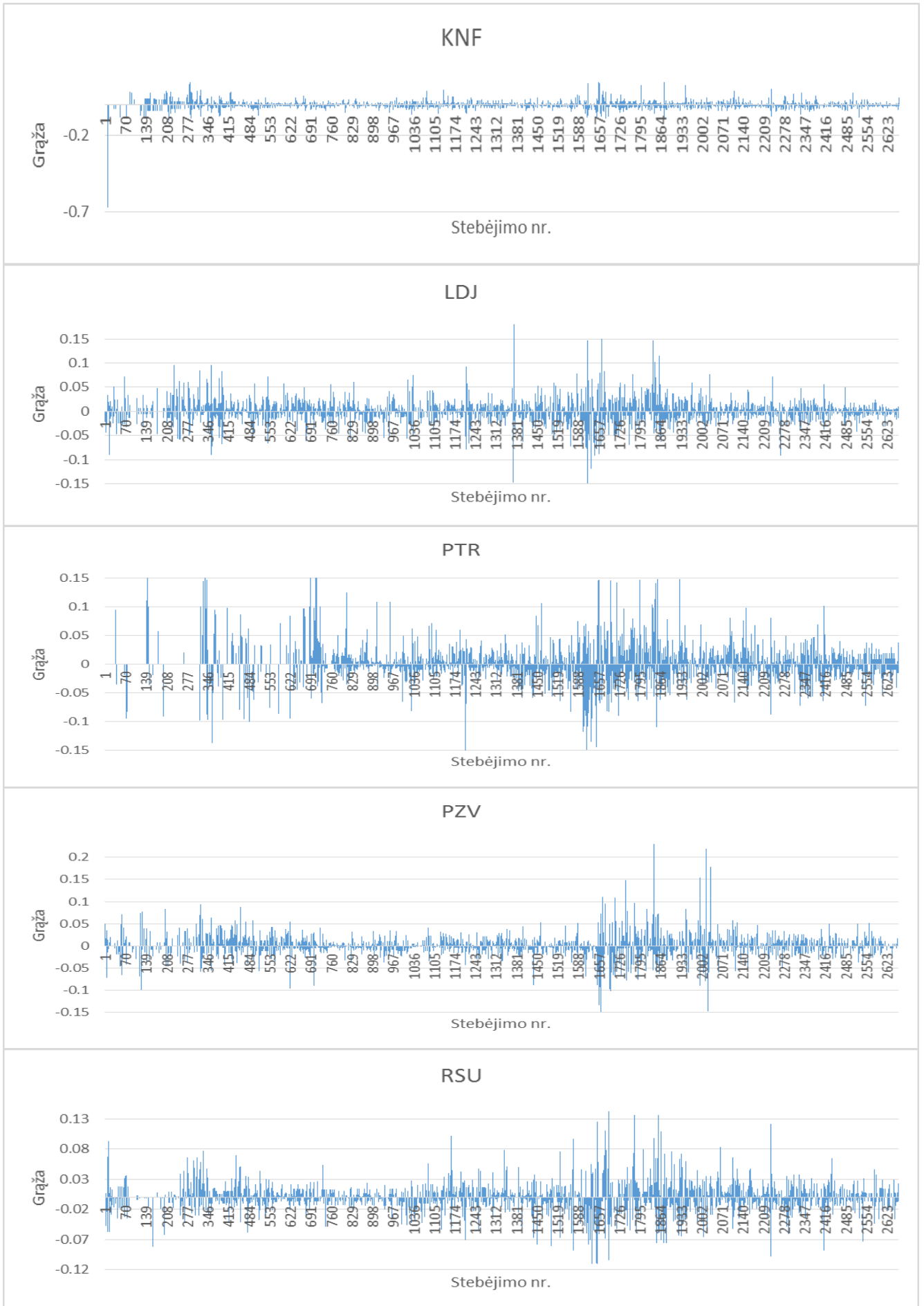
15. Jorion. Value at risk: The New Benchmark for managing financial risk. McGraw-Hill, New York, 1997.
16. Kabašinskas A. Finansinių rinkų statistinė analizė ir statistinio modeliavimo metodai: daktaro disertacija, fiziniai mokslai, informatika, sistemų teorija / VDU.- Vilnius: Matematikos ir informatikos institutas, 2007.- Aut. Darbas.
17. Kabašinskas A., Kašauskaitė D. Kolmogorovo suderinamumo testo taikomumo mišriųjų-normaliųjų sekų sumoms tyrimas // „Taikomoji matematika“, konferencija (2011; Kaunas). Matematika: studentų konferencijos pranešimų medžiaga.-Kaunas: Technologija, 2011. p. 13 - 15.
18. Kabašinskas A., Skučaitė V., Utkaitė L. Statistical analysis of Polish stock returns // Matematika ir matematinis modeliavimas .-ISSN 1822-2757.- 2009.
19. Kašauskaitė D., Vertybinių popierių portfelio modelio tyrimas, kai gražos pasiskirstę pagal mišriųjų-normalųjų dėsnį. Bakalauro baigiamasis darbas, KTU, 2011.
20. Konno H. Portfolio Optimization using 1  $L$  Risk Function. Tokyo Institute of Technology. Institute of Human and Social Sciences; 1988 IHSS Report p.88-9.
21. Koutrouvelis I. A. (1980). A goodness-of-fit test of simple hypotheses based on the empirical characteristic function. Biometrika 67(1) 238.240.
22. Markowitz H.M. (1952): „Portfolio Selection“, Journal of Finance.
23. Markowitz H.M. (1956): „The optimization of a quadratic function subject to linear constraints“, Naval Research Logistics Quarterly, 3.
24. Martin D., Rachev S. and Siboulet F. (2003). Phi-alpha optimal portfolios and extreme risk management. Wilmott Magazine of Finance November/2003 70.83.
25. Michael J. Stutzer, A Portfolio Performance Index, Financial Analysts Journal, Vol. 56, May-June 2000.
26. Prieiga per internetą: [http://lt.wikipedia.org/wiki/L%C3%A9vy\\_procesas](http://lt.wikipedia.org/wiki/L%C3%A9vy_procesas) [žiūrėta 2012 05 10].
27. Prieiga per internetą: <http://www.probabilityandfinance.com/chapters/chap9.pdf> [žiūrėta 2012 10 10].
28. Prieiga per internetą: [http://en.wikipedia.org/wiki/Modern\\_portfolio\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Modern_portfolio_theory) [žiūrėta 2012 10 10].
29. Prieiga per internetą:[http://www.math.uni-trier.de/~schu/englisch/forschung\\_en.htm](http://www.math.uni-trier.de/~schu/englisch/forschung_en.htm) [žiūrėta 2012 10 10].
30. Puelz A. (1999). Value-at-Risk Based Portfolio Optimization. Working paper, Southern Methodist University, USA.
31. Rockafeller R. T. and Uryasev S. (2000). Optimization of conditional value at risk. The Journal of Risk 2(3) 21-41.
32. Roman Diana, Darby-Dowman Ken, Gautam Mitra. Portfolio optimization models and properties of return distributions, Brunel University: 2004, technical report.

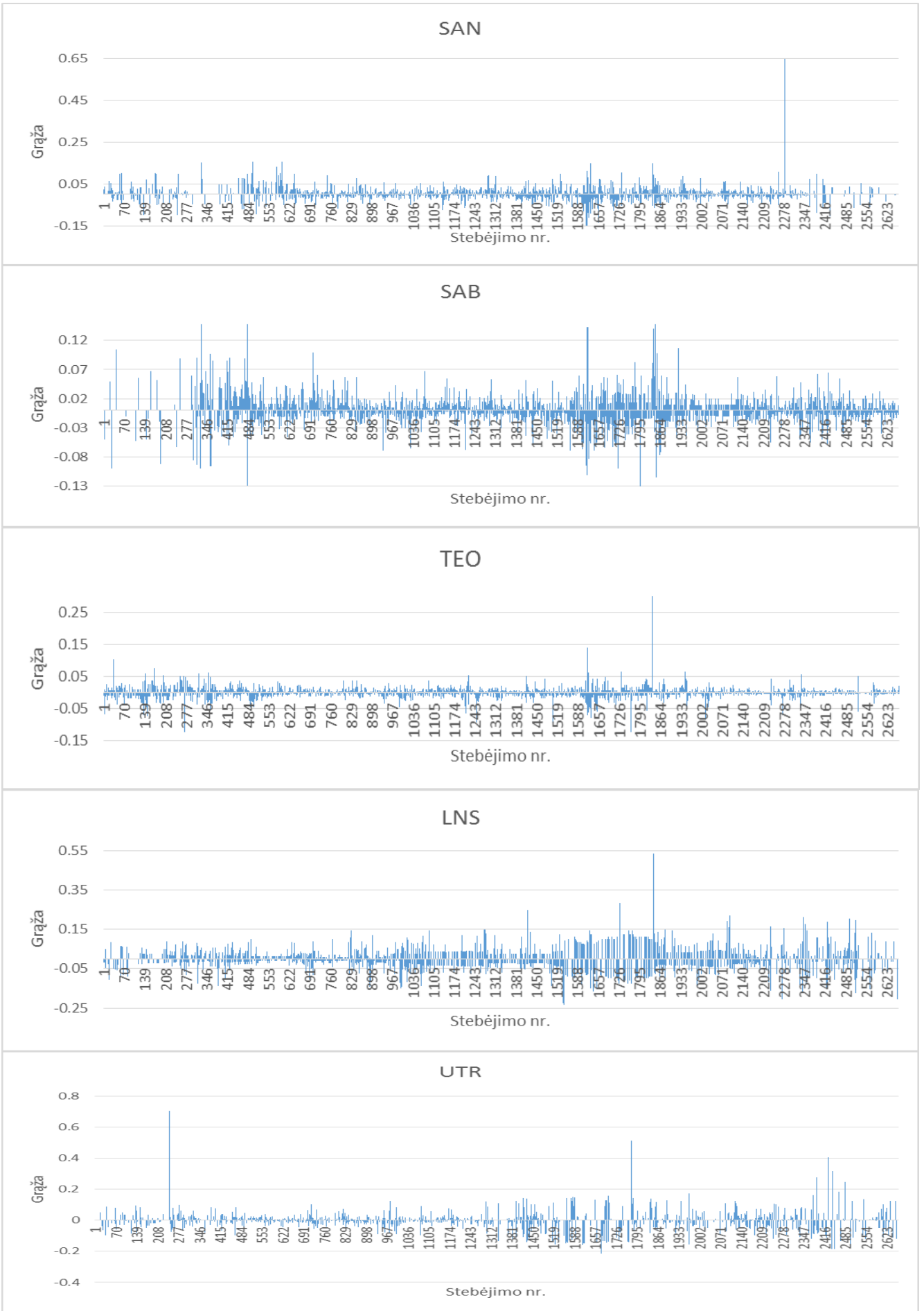
33. Sharpe, W. F. (1966). „Mutual Fund Performance“. *Journal of Business* **39** (S1): 119–138.
34. Sortino F A, Performance Measurement in a Downside Risk Framework, *Price Journal of Investing*, 1994.
35. Sortino F. and R.A.H. van der Meer. „Downside Risk“ *Journal of Portfolio Management*, Summer 1991.

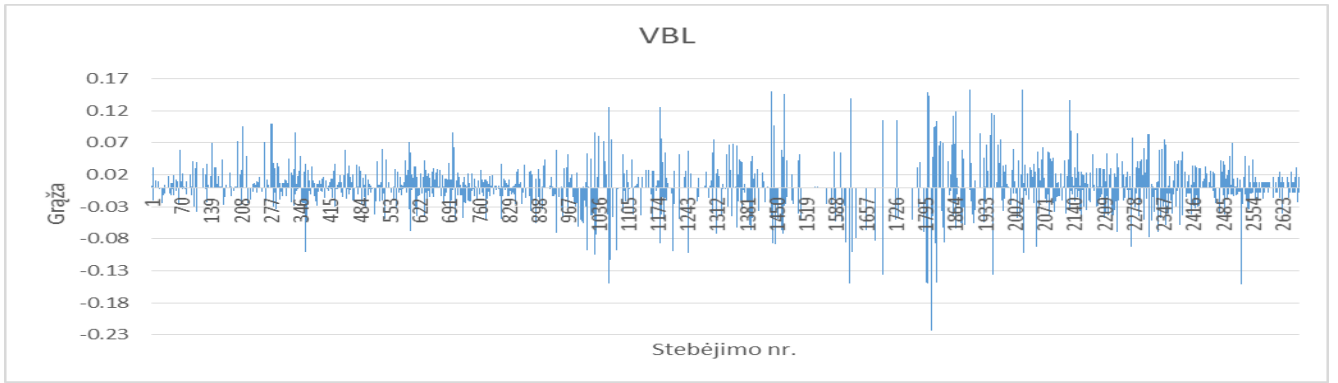
## PRIEDAI

### 1 PRIEDAS. Akcijų gražų diagramos (2001 sausio 2 d.–2012 lapkričio 17 d.)









## 2 PRIEDAS. Atrinktų akcijų kainos 2013 sausio 2 d.–2013 kovo 31 d., EUR

Data	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
2013.01.02	0.08	2.17	0.56	2	0.373	0.575	0.99	1.83	1.39	9.6	0.216	0.785	0.075	0.199	14.6
2013.01.03	0.06	2.14	0.565	1.99	0.374	0.57	1.03	1.8	1.41	9.6	0.217	0.786	0.08	0.199	14.5
2013.01.04	0.06	2.12	0.567	2.03	0.368	0.569	1.07	1.8	1.41	10	0.216	0.799	0.08	0.199	14.5
2013.01.07	0.06	2.15	0.56	2.05	0.374	0.571	1.11	1.79	1.41	10	0.218	0.817	0.08	0.199	14.5
2013.01.08	0.06	2.14	0.566	2.03	0.376	0.57	1.12	1.79	1.41	10	0.216	0.812	0.08	0.199	14.7
2013.01.09	0.06	2.13	0.571	2.03	0.372	0.574	1.1	1.81	1.42	10	0.214	0.814	0.08	0.199	14.7
2013.01.10	0.06	2.16	0.571	2.05	0.374	0.578	1.14	1.83	1.42	10	0.214	0.804	0.08	0.199	14.7
2013.01.11	0.06	2.18	0.591	2.16	0.376	0.578	1.15	1.85	1.42	9.4	0.22	0.806	0.086	0.199	14.8
2013.01.14	0.06	2.21	0.598	2.17	0.376	0.575	1.15	1.85	1.43	9.4	0.221	0.804	0.081	0.199	14.6
2013.01.15	0.06	2.21	0.579	2.19	0.375	0.575	1.11	1.85	1.42	9.4	0.216	0.795	0.084	0.199	14.8
2013.01.16	0.06	2.24	0.59	2.2	0.372	0.575	1.11	1.85	1.41	9.41	0.217	0.794	0.084	0.199	14.5
2013.01.17	0.06	2.28	0.583	2.27	0.372	0.575	1.14	1.88	1.41	9.41	0.221	0.802	0.087	0.199	14.7
2013.01.18	0.06	2.29	0.58	2.26	0.366	0.575	1.13	1.88	1.41	9.41	0.219	0.803	0.082	0.199	14.5
2013.01.21	0.06	2.27	0.58	2.24	0.366	0.576	1.11	1.85	1.43	9.41	0.216	0.802	0.08	0.199	14.5
2013.01.22	0.06	2.31	0.575	2.17	0.366	0.581	1.07	1.81	1.41	9.41	0.217	0.805	0.08	0.199	14.4
2013.01.23	0.06	2.35	0.57	2.2	0.365	0.582	1.11	1.8	1.41	9.41	0.216	0.806	0.08	0.22	14.5
2013.01.24	0.06	2.39	0.58	2.2	0.365	0.589	1.11	1.81	1.44	9.41	0.217	0.81	0.08	0.2	14.7
2013.01.25	0.06	2.45	0.58	2.22	0.369	0.592	1.1	1.81	1.44	9.41	0.216	0.808	0.08	0.2	14.5
2013.01.28	0.06	2.5	0.59	2.2	0.366	0.594	1.17	1.82	1.41	9.55	0.216	0.814	0.08	0.195	14.8
2013.01.29	0.06	2.41	0.61	2.22	0.366	0.594	1.19	1.82	1.45	9.55	0.221	0.815	0.08	0.2	14.9
2013.01.30	0.06	2.4	0.624	2.2	0.367	0.579	1.18	1.86	1.43	9.55	0.221	0.81	0.08	0.2	14.7
2013.01.31	0.06	2.43	0.625	2.19	0.37	0.575	1.24	1.86	1.42	9.55	0.221	0.804	0.08	0.2	14.7
2013.02.01	0.06	2.42	0.62	2.19	0.369	0.588	1.21	1.88	1.42	9.55	0.22	0.802	0.08	0.2	14.7
2013.02.04	0.06	2.45	0.615	2.18	0.37	0.588	1.2	1.88	1.43	9.55	0.222	0.801	0.069	0.2	14.9
2013.02.05	0.06	2.43	0.613	2.17	0.37	0.587	1.15	1.88	1.43	9.55	0.225	0.796	0.069	0.197	15
2013.02.06	0.06	2.5	0.6	2.13	0.374	0.587	1.17	1.88	1.43	9.55	0.233	0.796	0.069	0.197	15
2013.02.07	0.06	2.53	0.586	2.12	0.375	0.58	1.15	1.83	1.43	9.55	0.226	0.801	0.069	0.197	15.2
2013.02.08	0.06	2.51	0.595	2.09	0.373	0.578	1.14	1.83	1.42	9.55	0.225	0.8	0.076	0.197	15.2
2013.02.11	0.06	2.48	0.59	2.1	0.373	0.585	1.14	1.83	1.42	9.55	0.23	0.803	0.076	0.197	15.1
2013.02.12	0.06	2.51	0.585	2.06	0.373	0.581	1.11	1.83	1.42	9.55	0.227	0.8	0.076	0.197	15.1
2013.02.13	0.06	2.49	0.585	2.26	0.372	0.579	1.15	1.83	1.42	9.88	0.251	0.8	0.076	0.197	15.1
2013.02.14	0.06	2.51	0.585	2.22	0.372	0.582	1.13	1.83	1.43	9.88	0.251	0.8	0.069	0.197	14.6
2013.02.15	0.06	2.49	0.595	2.25	0.372	0.582	1.14	1.83	1.44	9.88	0.253	0.802	0.069	0.197	14.7
2013.02.18	0.06	2.51	0.591	2.24	0.37	0.587	1.13	1.83	1.44	9.88	0.253	0.802	0.069	0.197	14.8
2013.02.19	0.06	2.52	0.596	2.25	0.37	0.587	1.13	1.83	1.44	9.88	0.255	0.8	0.069	0.197	14.9
2013.02.20	0.09	2.53	0.622	2.26	0.37	0.587	1.14	1.86	1.42	9.88	0.254	0.8	0.07	0.197	14.7
2013.02.21	0.09	2.52	0.624	2.26	0.374	0.588	1.14	1.84	1.44	9.88	0.25	0.799	0.069	0.197	14.7
2013.02.22	0.09	2.5	0.622	2.26	0.374	0.586	1.15	1.84	1.44	9.88	0.251	0.8	0.069	0.2	14.7
2013.02.25	0.119	2.52	0.622	2.28	0.369	0.589	1.16	1.84	1.44	9.88	0.256	0.799	0.069	0.197	14.8
2013.02.26	0.119	2.5	0.624	2.28	0.367	0.589	1.14	1.84	1.44	9.88	0.254	0.8	0.074	0.197	14.8
2013.02.27	0.12	2.52	0.627	2.3	0.365	0.589	1.17	1.86	1.42	9.88	0.251	0.798	0.074	0.197	14.8
2013.02.28	0.12	2.51	0.627	2.31	0.365	0.578	1.2	1.86	1.46	9.88	0.252	0.797	0.082	0.18	14.7
2013.03.01	0.12	2.51	0.618	2.3	0.361	0.58	1.18	1.82	1.47	9.88	0.249	0.798	0.08	0.18	14.7
2013.03.04	0.12	2.53	0.614	2.33	0.371	0.589	1.18	1.88	1.48	9.88	0.248	0.8	0.085	0.18	14.6
2013.03.05	0.12	2.56	0.615	2.28	0.371	0.584	1.17	1.94	1.47	9.88	0.256	0.801	0.085	0.18	15
2013.03.06	0.12	2.58	0.624	2.3	0.369	0.584	1.14	1.96	1.47	9.88	0.255	0.8	0.085	0.2	15.2
2013.03.07	0.12	2.6	0.619	2.28	0.363	0.65	1.15	1.91	1.46	9.88	0.256	0.8	0.085	0.2	15.3
2013.03.08	0.12	2.63	0.617	2.31	0.365	0.651	1.18	1.96	1.46	9.88	0.268	0.806	0.088	0.2	15.3
2013.03.11	0.12	2.63	0.617	2.31	0.365	0.651	1.18	1.96	1.46	9.88	0.268	0.806	0.088	0.2	15.3
2013.03.12	0.12	2.69	0.617	2.3	0.364	0.665	1.2	2	1.48	9.88	0.271	0.802	0.092	0.181	15.4
2013.03.13	0.12	2.68	0.614	2.31	0.36	0.669	1.19	2	1.49	9.88	0.269	0.804	0.09	0.181	16.9
2013.03.14	0.12	2.68	0.61	2.31	0.365	0.663	1.18	2.07	1.5	9.88	0.27	0.82	0.09	0.181	16.5
2013.03.15	0.12	2.64	0.609	2.3	0.362	0.675	1.19	2.1	1.59	9.88	0.267	0.817	0.09	0.181	16.5
2013.03.18	0.12	2.63	0.609	2.31	0.365	0.675	1.16	2.09	1.57	9.88	0.263	0.819	0.09	0.181	16.5
2013.03.19	0.12	2.65	0.61	2.31	0.362	0.673	1.16	2.03	1.58	9.88	0.264	0.823	0.09	0.181	16.6
2013.03.20	0.12	2.67	0.606	2.3	0.362	0.671	1.16	2.03	1.57	8.66	0.261	0.822	0.09	0.181	16.6
2013.03.21	0.12	2.66	0.608	2.31	0.363	0.677	1.14	2.03	1.54	8.66	0.263	0.821	0.09	0.181	16.6
2013.03.22	0.12	2.63	0.606	2.31	0.363	0.672	1.15	2.1	1.55	9.3	0.264	0.821	0.09	0.18	16.3
2013.03.25	0.099	2.65	0.61	2.31	0.365	0.684	1.17	2.1	1.58	9.3	0.262	0.822	0.09	0.18	16.3
2013.03.26	0.099	2.64	0.61	2.31	0.368	0.7	1.16	2.1	1.57	9.3	0.26	0.818	0.08	0.195	16.6
2013.03.27	0.099	2.64	0.61	2.31	0.364	0.74	1.14	2.08	1.57	9.3	0.256	0.81	0.08	0.19	16.6
2013.03.28	0.099	2.64	0.608	2.31	0.369	0.745	1.14	2.1	1.57	9.3	0.258	0.803	0.083	0.19	16.3

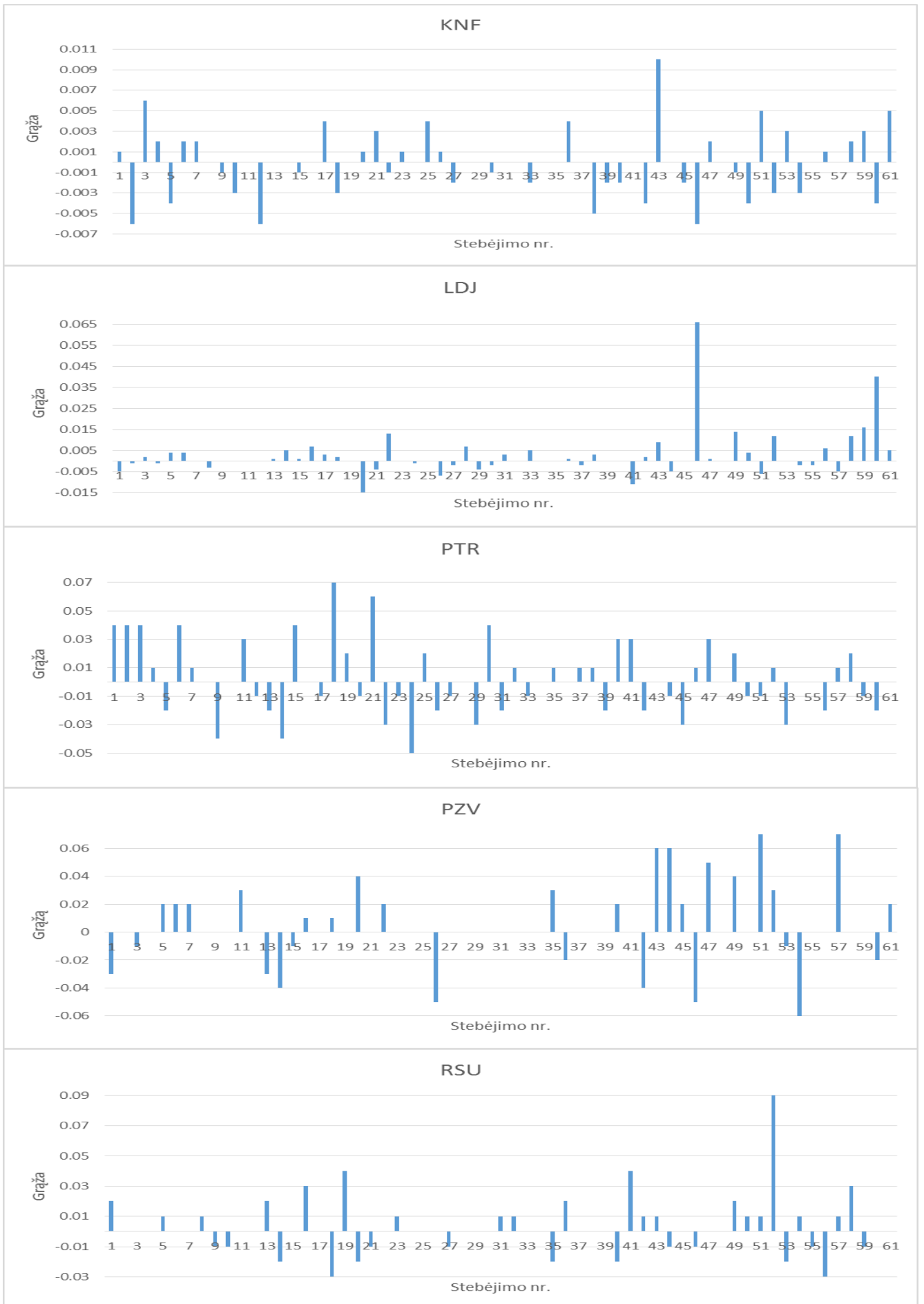
### 3 PRIEDAS. Atrinktų akcijų gražos 2013 sausio 2 d.–2013 kovo 31 d.

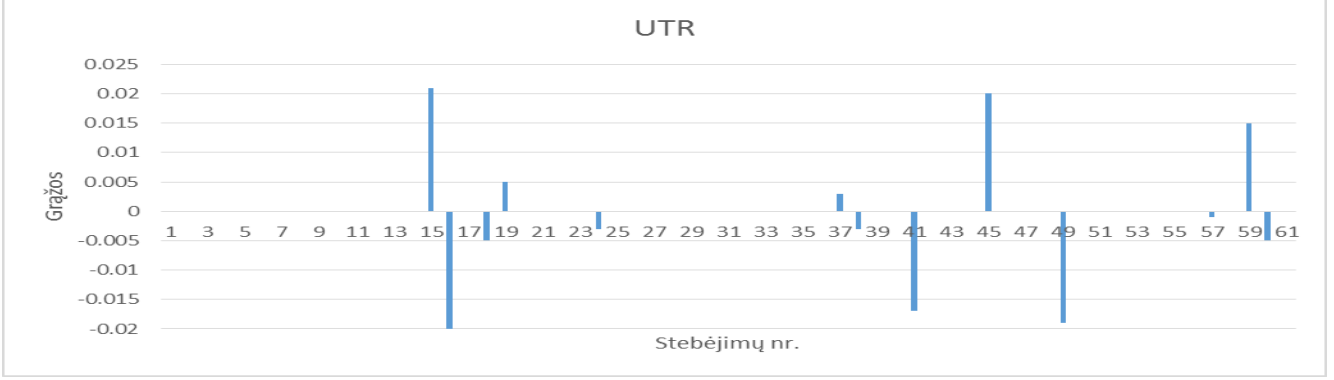
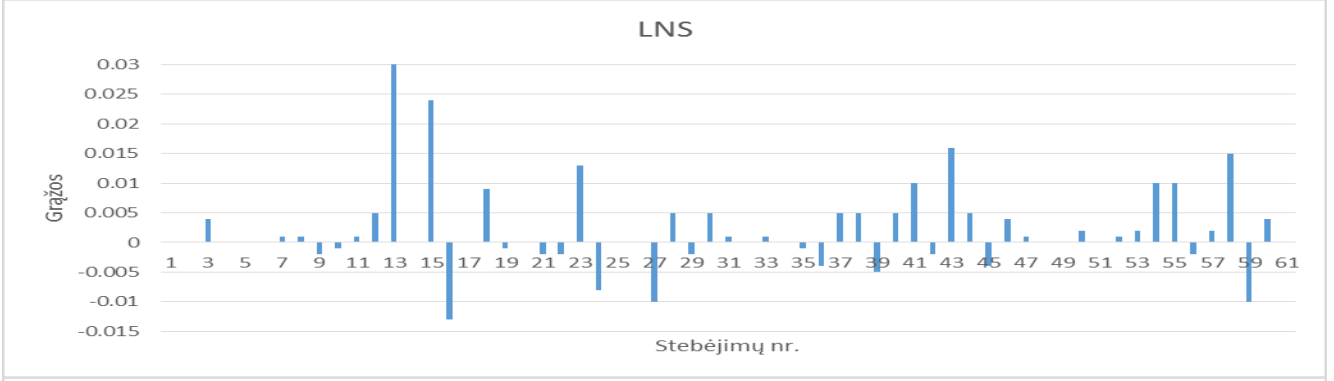
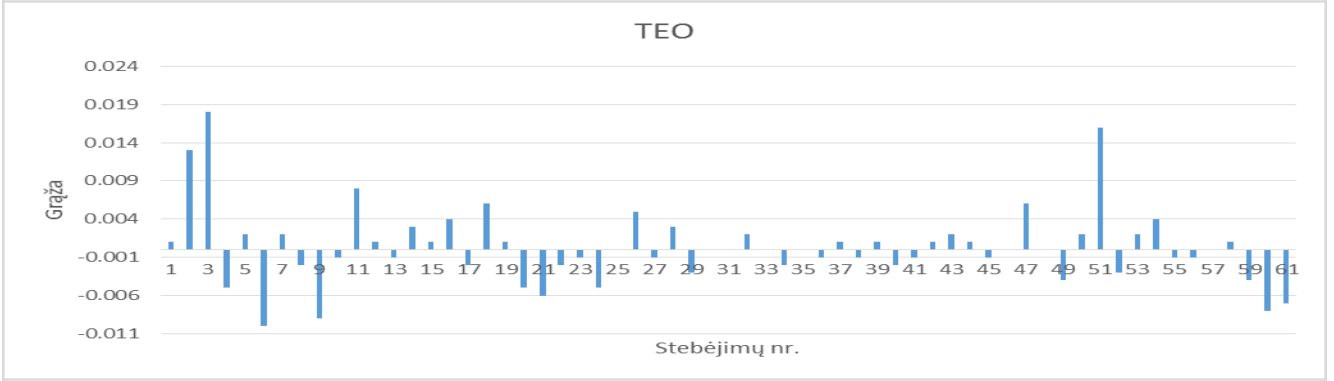
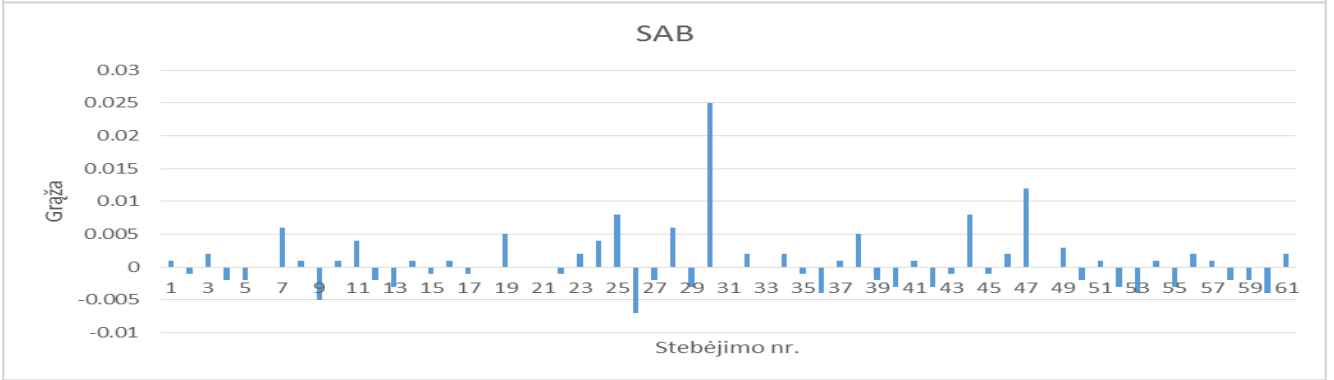
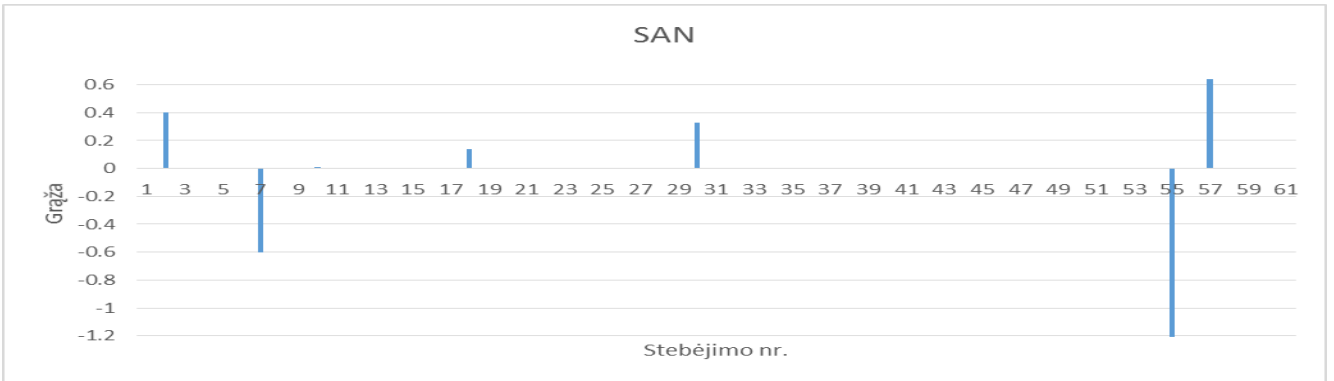
Stebėjimo Nr.	ANK	APG	GRG	IVL	KNF	LDJ	PTR	PZV	RSU	SAN	SAB	TEO	LNS	UTR	VBL
1	-0.02	0	0.005	-0.01	0.001	-0.005	0.04	-0.03	0.02	0	0.001	0.001	0	0	-0.1
2	0	0	0.002	0.04	-0.006	-0.001	0.04	0	0	0.4	-0.001	0.013	0	0	0
3	0	0	-0.007	0.02	0.006	0.002	0.04	-0.01	0	0	0.002	0.018	0.004	0	0
4	0	0	0.006	-0.02	0.002	-0.001	0.01	0	0	0	-0.002	-0.005	0	0	0.2
5	0	0	0.005	0	-0.004	0.004	-0.02	0.02	0.01	0	-0.002	0.002	0	0	0
6	0	0	0	0.02	0.002	0.004	0.04	0.02	0	0	0	-0.01	0	0	0
7	0	0	0.02	0.11	0.002	0	0.01	0.02	0	-0.6	0.006	0.002	0.001	0	0.1
8	0	0	0.007	0.01	0	-0.003	0	0	0.01	0	0.001	-0.002	0.001	0	-0.2
9	0	0.075	-0.019	0.02	-0.001	0	-0.04	0	-0.01	0	-0.005	-0.009	-0.002	0	0.2
10	0	0	0.011	0.01	-0.003	0	0	0	-0.01	0.01	0.001	-0.001	-0.001	0	-0.3
11	0	0	-0.007	0.07	0	0	0.03	0.03	0	0	0.004	0.008	0.001	0	0.2
12	0	0	-0.003	-0.01	-0.006	0	-0.01	0	0	0	-0.002	0.001	0.005	0	-0.2
13	0	0	0	-0.02	0	0.001	-0.02	-0.03	0.02	0	-0.003	-0.001	0.03	0	0
14	0	-0.05	-0.005	-0.07	0	0.005	-0.04	-0.04	-0.02	0	0.001	0.003	0	0	-0.1
15	0	0	-0.005	0.03	-0.001	0.001	0.04	-0.01	0	0	-0.001	0.001	0.024	0.021	0.1
16	0	0	0.01	0	0	0.007	0	0.01	0.03	0	0.001	0.004	-0.013	-0.02	0.2
17	0	0	0	0.02	0.004	0.003	-0.01	0	0	0	-0.001	-0.002	0	0	-0.2
18	0	0.05	0.01	-0.02	-0.003	0.002	0.07	0.01	-0.03	0.14	0	0.006	0.009	-0.005	0.3
19	0	0	0.02	0.02	0	0	0.02	0	0.04	0	0.005	0.001	-0.001	0.005	0.1
20	0	0	0.014	-0.02	0.001	-0.015	-0.01	0.04	-0.02	0	0	-0.005	0	0	-0.2
21	0	0	0.001	-0.01	0.003	-0.004	0.06	0	-0.01	0	0	-0.006	-0.002	0	0
22	0	0	-0.005	0	-0.001	0.013	-0.03	0.02	0	0	-0.001	-0.002	-0.002	0	0
23	0	0	-0.005	-0.01	0.001	0	-0.01	0	0.01	0	0.002	-0.001	0.013	0	0.2
24	0	0	-0.002	-0.01	0	-0.001	-0.05	0	0	0	0.004	-0.005	-0.008	-0.003	0.1
25	0	0	-0.013	-0.04	0.004	0	0.02	0	0	0	0.008	0	0	0	0
26	0	0	-0.014	-0.01	0.001	-0.007	-0.02	-0.05	0	0	-0.007	0.005	0	0	0.2
27	0	-0.04	0.009	-0.03	-0.002	-0.002	-0.01	0	-0.01	0	-0.002	-0.001	-0.01	0	0
28	0	0	-0.005	0.01	0	0.007	0	0	0	0	0.006	0.003	0.005	0	-0.1
29	0	0	-0.005	-0.04	0	-0.004	-0.03	0	0	0	-0.003	-0.003	-0.002	0	0
30	0	0	0	0.2	-0.001	-0.002	0.04	0	0	0.33	0.025	0	0.005	0	0
31	0	0	0	-0.04	0	0.003	-0.02	0	0.01	0	0	0	0.001	0	-0.5
32	0	0	0.01	0.03	0	0	0.01	0	0.01	0	0.002	0.002	0	0	0.1
33	0	0	-0.004	-0.01	-0.002	0.005	-0.01	0	0	0	0	0	0.001	0	0.1
34	0	0	0.005	0.01	0	0	0	0	0	0	0.002	-0.002	0	0	0.1
35	0.03	0	0.026	0.01	0	0	0.01	0.03	-0.02	0	-0.001	0	-0.001	0	-0.2
36	0	0	0.002	0	0.004	0.001	0	-0.02	0.02	0	-0.004	-0.001	-0.004	0	0
37	0	0	-0.002	0	0	-0.002	0.01	0	0	0	0.001	0.001	0.005	0.003	0
38	0.029	0	0	0.02	-0.005	0.003	0.01	0	0	0	0.005	-0.001	0.005	-0.003	0.1
39	0	0	0.002	0	-0.002	0	-0.02	0	0	0	-0.002	0.001	-0.005	0	0
40	0.001	0.01	0.003	0.02	-0.002	0	0.03	0.02	-0.02	0	-0.003	-0.002	0.005	0	0
41	0	0	0	0.01	0	-0.011	0.03	0	0.04	0	0.001	-0.001	0.01	-0.017	-0.1
42	0	0	-0.009	-0.01	-0.004	0.002	-0.02	-0.04	0.01	0	-0.003	0.001	-0.002	0	0
43	0	-0.01	-0.004	0.03	0.01	0.009	0	0.06	0.01	0	-0.001	0.002	0.016	0	-0.1
44	0	0	0.001	-0.05	0	-0.005	-0.01	0.06	-0.01	0	0.008	0.001	0.005	0	0.4
45	0	0.01	0.009	0.02	-0.002	0	-0.03	0.02	0	0	-0.001	-0.001	-0.004	0.02	0.2
46	0	0.05	-0.005	-0.02	-0.006	0.066	0.01	-0.05	-0.01	0	0.002	0	0.004	0	0.1
47	0	0	-0.002	0.03	0.002	0.001	0.03	0.05	0	0	0.012	0.006	0.001	0	0
48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49	0	0	0	-0.01	-0.001	0.014	0.02	0.04	0.02	0	0.003	-0.004	0	-0.019	0.1
50	0	0	-0.003	0.01	-0.004	0.004	-0.01	0	0.01	0	-0.002	0.002	0.002	0	1.5
51	0	0.09	-0.004	0	0.005	-0.006	-0.01	0.07	0.01	0	0.001	0.016	0	0	-0.4
52	0	0	-0.001	-0.01	-0.003	0.012	0.01	0.03	0.09	0	-0.003	-0.003	0.001	0	0
53	0	0	0	0.01	0.003	0	-0.03	-0.01	-0.02	0	-0.004	0.002	0.002	0	0
54	0	0	0.001	0	-0.003	-0.002	0	-0.06	0.01	0	0.001	0.004	0.01	0	0.1
55	0	0	-0.004	-0.01	0	-0.002	0	0	-0.01	-1.22	-0.003	-0.001	0.01	0	0
56	0	0	0.002	0.01	0.001	0.006	-0.02	0	-0.03	0	0.002	-0.001	-0.002	0	0
57	0	-0.11	-0.002	0	0	-0.005	0.01	0.07	0.01	0.64	0.001	0	0.002	-0.001	-0.3
58	-0.021	0	0.004	0	0.002	0.012	0.02	0	0.03	0	-0.002	0.001	0.015	0	0
59	0	0	0	0	0.003	0.016	-0.01	0	-0.01	0	-0.002	-0.004	-0.01	0.015	0.3
60	0	0	0	0	-0.004	0.04	-0.02	-0.02	0	0	-0.004	-0.008	0.004	-0.005	0
61	0	0	-0.002	0	0.005	0.005	0	0.02	0	0	0.002	-0.007	0	0	-0.3

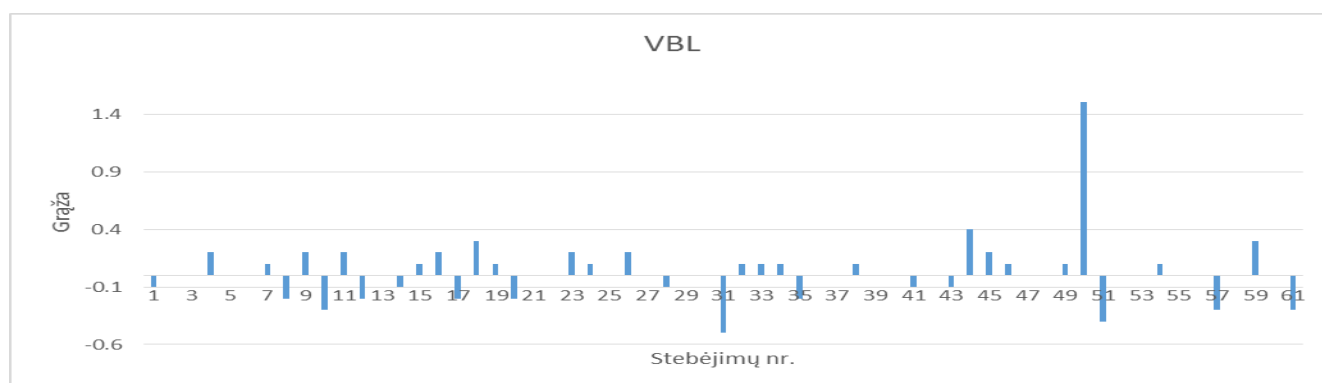


#### 4 PRIEDAS. Akcijų gražų diagramos (2013 sausio 2 d.–2013 kovo 31 d.)









### 5 PRIEDAS. Pasirinktų akcijų skaitinės charakteristikos iki 2012 11 17

Nr.	Akcijos pavadinimas	Žymėjimas	Stebėjimų skaičius	Nulinių grąžų skaičius sekoje, %	Nenulinių grąžų skaičius sekoje, %	Vidurkis	Dispersija	Eksceco koeficientas	Asimetrijos koeficientas
1	Anykščių vynas	ANK	61	56.00	8.20	0.00031	0.00655	15.12	1.94
2	Apranga	APG	61	31.33	16.39	0.00123	0.02420	11.13	-0.301
3	Grigiškės	GRG	61	35.18	80.33	0.00079	0.00775	2.03	0.747
4	Invalda	IVL	61	26.05	0.00	0.00508	0.03673	13.48	2.762
5	Klaipėdos nafta	KNF	61	36.59	0.00	-0.00007	0.00301	1.28	0.448
6	Lietuvos dujos	LDJ	61	28.61	0.00	0.00279	0.01106	19.15	3.790
7	Panevezio statybos trestas	PTR	61	39.79	0.00	0.00246	0.02494	0.04	0.423
8	Pieno zvaigzdes	PZV	61	41.74	0.00	0.00443	0.02643	1.05	0.263
9	Rokiskio suris	RSU	61	38.17	0.00	0.00295	0.01820	8.03	1.929
10	Sanitas	SAN	61	43.41	0.00	-0.00492	0.20596	22.62	-3.214
11	Siauliu bankas	SAB	61	38.80	0.00	0.00074	0.00462	12.17	2.717
12	Teo	TEO	61	26.36	0.00	0.00030	0.00495	3.67	1.236
13	Linas	LNS	61	52.84	0.00	0.00210	0.00601	4.54	1.507
14	Utenos trikotazas	UTR	61	64.21	0.00	-0.00015	0.00747	7.38	0.130
15	Vilniaus baldai	VBL	61	49.47	0.00	0.02787	0.34570	18.60	3.081

## 6 PRIEDAS. Portfelijų kainos 2013 sausio 2 d.–2013 kovo 31 d., EUR

Stebėjimo Nr.	Markovitz	MAD	Minmax	MixNormal
1	6.98	0.98	2.35	0.18
2	6.96	1.01	2.34	0.16
3	7.16	1.05	2.36	0.16
4	7.17	1.09	2.36	0.16
5	7.19	1.10	2.38	0.16
6	7.18	1.08	2.38	0.16
7	7.19	1.12	2.39	0.16
8	6.93	1.13	2.39	0.15
9	6.92	1.13	2.37	0.15
10	6.94	1.09	2.38	0.15
11	6.92	1.09	2.36	0.15
12	6.96	1.12	2.39	0.15
13	6.94	1.11	2.37	0.15
14	6.93	1.09	2.36	0.15
15	6.93	1.05	2.35	0.15
16	6.95	1.09	2.36	0.15
17	6.98	1.09	2.39	0.15
18	6.98	1.08	2.37	0.15
19	7.09	1.15	2.41	0.15
20	7.08	1.17	2.42	0.15
21	7.05	1.16	2.40	0.15
22	7.06	1.22	2.40	0.15
23	7.05	1.19	2.40	0.15
24	7.08	1.18	2.42	0.15
25	7.09	1.13	2.43	0.15
26	7.10	1.15	2.43	0.15
27	7.13	1.13	2.44	0.15
28	7.12	1.12	2.44	0.15
29	7.10	1.12	2.43	0.15
30	7.11	1.09	2.43	0.15

Stebėjimo Nr.	Markovitz	MAD	Minmax	MixNormal
31	7.28	1.13	2.45	0.16
32	7.23	1.11	2.40	0.16
33	7.24	1.12	2.42	0.16
34	7.25	1.11	2.42	0.16
35	7.27	1.11	2.43	0.16
36	7.25	1.12	2.42	0.19
37	7.25	1.12	2.42	0.19
38	7.25	1.13	2.42	0.19
39	7.26	1.14	2.44	0.22
40	7.26	1.12	2.44	0.22
41	7.27	1.15	2.44	0.22
42	7.25	1.18	2.43	0.22
43	7.25	1.16	2.43	0.22
44	7.25	1.16	2.43	0.22
45	7.30	1.15	2.47	0.22
46	7.32	1.12	2.49	0.22
47	7.34	1.13	2.50	0.22
48	7.35	1.16	2.51	0.22
49	7.35	1.16	2.51	0.22
50	7.37	1.18	2.52	0.22
51	7.53	1.17	2.66	0.22
52	7.49	1.16	2.63	0.22
53	7.48	1.17	2.64	0.22
54	7.47	1.14	2.63	0.22
55	7.49	1.14	2.64	0.22
56	6.90	1.14	2.59	0.21
57	6.90	1.12	2.59	0.21
58	7.17	1.13	2.59	0.21
59	7.17	1.15	2.59	0.19
60	7.20	1.14	2.62	0.19
61	7.20	1.12	2.62	0.19

## 7 PRIEDAS. Kolmogorov-Smirnov suderinamumo testo MathCad realizacija

### Programa:

$R :=$



2661.xls

pavad :=



pavad.xls

```

kolmogorov(R,p,j) :=
  Y ← sort(R<sup>j</sup>)
  T ← rows(R<sup>j</sup>)
  Dp ← √( (-ln(P/2)) / (2·T) - 1 / (6·T) )
  vid ← mean(Y)
  std ← max(stdev(Y), 10<sup>-15</sup>)
  for i ∈ 0..T-1
    Dp1<sub>i</sub> ← (i+1)/T - pnorm(Y<sub>i</sub>, vid, std)
    Dm1<sub>i</sub> ← pnorm(Y<sub>i</sub>, vid, std) - i/T
  Dn ← max(Dp1, Dm1)
  1 if Dn < Dp
  0 otherwise

```

```

Z(pavad, kolmogorov) :=
  Z<sup>0</sup> ← pavad<sup>T</sup>
  for j ∈ 0..14
    kolmog ← kolmogorov(R, 0.01, j)
  Z<sup>6</sup> ← kolmog
  Z

```

result := Z(pavad, kolmogorov)



result.xls

result

## 8 PRIEDAS. Vertybinių popierių portfelių optimizavimo MathCad realizacija

### MARKOWITZ:

R :=



2013m3men.xls

R :=



2661.xls

$$x := \begin{cases} \text{for } i \in 0..14 \\ x_i \leftarrow 0.05 \\ x \end{cases}$$

$$\text{Mark}(x) := \sum_{i=0}^{14} \sum_{j=0}^{14} \left( x_i \cdot x_j \cdot \text{cvar}(R^{(i)}, R^{(j)}) \right)$$

Given

$$\sum_{i=0}^{14} x_i = 1$$

$$x \geq 0$$

$$\text{Svor\_Markovic} := \text{Minimize}(\text{Mark}, x)$$



Svor\_Markovic.xls

Svor\_Markovic

### MinMax:

$$\text{MM}(x) := \begin{cases} \text{for } t \in 0.. \text{rows}(R) - 1 \\ z_t \leftarrow \sum_{i=0}^{14} (x_i \cdot R_{t,i}) \\ \min(z) \end{cases}$$

Given

$$\sum_{i=0}^{14} x_i = 1$$

$$x \geq 0$$

$$x := \text{Maximize}(\text{MM}, x)$$



MinMax\_sv.xls

x

**MAD:**

$$\mu := \begin{cases} \text{for } i \in 0..14 \\ \text{vidurkis}_i \leftarrow \text{mean}(R^{(i)}) \\ \text{vidurkis} \end{cases} \quad x := \begin{cases} \text{for } i \in 0..14 \\ x_i \leftarrow 0.05 \\ x \end{cases}$$

$$T := \text{rows}(R^{(0)})$$

$$\text{MAD}(x) := \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \left[ \sum_{i=0}^{14} [(R_{t,i} - \mu_i) \cdot x_i] \right]$$

Given

$$\sum_{i=0}^{14} x_i = 1$$

$\text{MAD}_{sv} := \text{Minimize}(\text{MAD}, x)$



MAD\_sv.xls

MAD\_sv



**MIXNORMAL:**

p :=



..\p.xls

i := 0..cols(R) - 1

j := 0..cols(R) - 1

 $\sigma_i := \text{stdev}(R^{(i)})$  $\sigma_j := \text{stdev}(R^{(j)})$  $\mu_i := \text{mean}(R^{(i)})$  $\mu_j := \text{mean}(R^{(j)})$ 

$$T(\omega) := - \sum_{i=0}^{\text{cols}(R)-1} \left( \omega_i \cdot p_i \cdot \text{mean}(R^{(i)}) \right) + \sum_{i=0}^{\text{cols}(R)-1} \sum_{j=0}^{\text{cols}(R)-1} \left[ \omega_i \cdot p_i \cdot \sqrt{(\sigma_i)^2 + (\mu_i)^2 \cdot (1 - p_i)} \cdot \omega_j \cdot p_j \cdot \sqrt{(\sigma_j)^2 + (\mu_j)^2 \cdot (1 - p_j)} \cdot \text{cvar}(R^{(i)}, R^{(j)}) \right]$$

$$\omega_i := \frac{1}{\text{cols}(R)}$$

Given

 $\omega > 0$ 

$$\sum_i \omega_i = 1$$

 $\omega < .99$ MixNorm := Minimize(T,  $\omega$ )









MixNorm\_sv.xls

MixNorm

## 9 PRIEDAS. Portfelijų elgesio matų skaičiavimo MathCad realizacija

Nerizikinga palkanu norma 0.004

$pn := 0.004$

X :=		X :=	
	D:\M...\Markovitz_sv_2012.xls		...\MAD_sv_2012.xls
X :=		X :=	
	D:\M...\Markovitz_sv_2013.xls		...\MAD_sv_2013.xls
X :=		X :=	
	D...\MinMax_sv_2012.xls		D...\MinMax_sv_2013.xls
X :=		X :=	
	D:\...\MixNormal_sv_2012.xls		D:\...\MixNormal_sv_2013.xls

$$\text{Sharpe} := \frac{\sum_{i=0}^{14} \left( x_i \cdot \text{mean}(R^{(i)}) \right) - pn}{\sqrt{\sum_{i=0}^{14} \sum_{j=0}^{14} \left( x_i \cdot x_j \cdot \text{cvar}(R^{(i)}, R^{(j)}) \right)}}$$

$$\text{Sortino} := \frac{\sum_{i=0}^{14} \left( x_i \cdot \text{mean}(R^{(i)}) \right) - pn}{\sqrt{\sum_{i=0}^{14} \left[ \left( x_i \cdot \text{mean}(R^{(i)}) \right) - pn \right]^2}}$$

$$Y(x) := \sum_{i=0}^{14} \left[ x_i \cdot (R^{(i)}) \right] - pn$$

$$kv := \text{trunc}(0.05 \cdot \text{length}(R^{(0)})) - 1 \quad kv = 132$$

$$v(x) := -\text{sort}(Y(x))_{kv} \quad v(x) = 0.038653$$

$$\text{Vertezikai} := \frac{\sum_{i=0}^{14} \left( x_i \cdot \text{mean}(R^{(i)}) \right) - pn}{v(x)}$$

$$cv(kv, x) := \frac{1}{kv} \cdot \left[ \left( \sum_{k=0}^{kv} \text{sort}(Y(x))_k \right) \right]$$

$$cv(kv, x) = 0.066$$

$$\text{STARR} := \frac{\sum_{i=0}^{14} \left( x_i \cdot \text{mean}(R^{\langle \hat{\psi} \rangle}) \right) - pn}{cv(kv, x)}$$

$$\overset{\text{Y}}{\llcorner}(x) := \sum_{i=0}^{14} \left[ x_i \cdot (R^{\langle \hat{\psi} \rangle}) \right]$$

$$cv1(kv, x) := \frac{1}{kv} \cdot \left[ \left( \sum_{k=0}^{kv} \text{sort}(0.1 - Y(x))_k \right) \right]$$

$$cv2(kv, x) := \frac{1}{kv} \cdot \left[ \left( \sum_{k=0}^{kv} \text{sort}(Y(x) - 0.1)_k \right) \right]$$

$$\text{Rachev} := \left| \frac{cv1(kv, x)}{cv2(kv, x)} \right|$$