



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA**

Eglė Kiseliauskaitė

**SAVAIME IR PRIVERSTINAI VIRPANTI
PROCESŲ TRANSFORMAVIMO SISTEMA**

Magistro darbas

**Vadovas:
prof.habil.dr. K.Ragulskis**

KAUNAS, 2004

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, profesorius (MII)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Kiseliauskaitė E. Self-acting and forced oscillation system for transformation processes: Master's work in applied mathematics / supervisor prof. habil. dr. K.Ragulskis; Department of Mathematics Research in System, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. - Kaunas, 2004.- 49 p.

SUMMARY

We can meet oscillations everywhere: in animate and inanimate nature, in the technical equipment. The methods and effects of researching oscillations are general in various fields (chemistry, physics, biology, technology) and they are important enough.

The differential equations are often used in practice for making different mathematical models of mechanical systems and they are the best help for modelling. Right now execute researches by differential equations became easier, because there are lots of computer programs, who let us modelling dynamic systems.

The flow (of water, gas of other), coming around elastic mechanical system, when there are some conditions, awakes the auto-oscillations of it. At my work I inquire the change of auto-oscillations into the electrical signal. If we want to reach it, we must give for mechanical system an extra stimulation by electric network.

The purpose of my work – inquire simplification model of this made system; area of existence synchronic processes, when we have relaxed and forced oscillations; to analyse different trajectories of different types of this differential equation; to find spectral characteristics.

The analytical and graphical results were forthcoming, let uncover some steady treatments' and their surroundings' attributes of pending system.

The results, apart the scientific value, are useful for precision mechanics, producing some robotics. This master's work is associated with graduate of Kaunas University of Technology Faculty of Mechanics Laurynas Ragaisis' practical experiment. Calculations, made at this work are important for his creating mechanical model.

TURINYS

Lentelių sąrašas.....	5
Paveikslų sąrašas.....	6
Įžanga.....	8
1. Bendroji dalis.....	9
1.1. Sistemos modelis energijos transformavimui.....	9
1.2. Autovirpesiai.....	12
1.3. Specifinės diferencialinės lygtys.....	14
1.3.1. Diufingo diferencialinė lygtis.....	14
1.3.2. Van der Polio diferencialinė lygtis.....	17
1.4. Rungės-Kuto metodo esmė ir jo taikymas skaitiniame diferencialinių lygčių integravime.....	20
1.5. Spektrinė analizė.....	22
2. Tiriamoji dalis.....	24
2.2 Sistemos stabilumo tyrimas.....	24
2.2.1. Savaimė virpanti sistema.....	24
2.2.2. Priverstinai virpanti sistema.....	25
2.3. Skirtingų lygties tipų tyrimas.....	29
2.4. Analitinis tyrimas.....	33
2.5 Stabilumo nustatymas.....	36
3. Programinė realizacija ir instrukcija vartotojui.....	38
Išvados.....	40
Literatūra.....	41
1 priedas. Mechaninių sistemų modeliai.....	42
2 priedas. Gauti eksperimentų rezultatai.....	43
3 priedas. Programų tekstai.....	49

LENTELIŲ SĄRAŠAS

Lentelės numeris	Lentelės pavadinimas	Psl. nr.
1	Pradiniai duomenys spektrinei analizei autovirpesių atveju	45

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

Paveikslų numeris	Paveikslų pavadinimas	Psl. nr.
1.1.1	Energijos transformavimo sistema	9
1.1.2	Supaprastintos sistemos modelis	11
1.2.1	Autovirpesių režimas	12
1.2.2	Autovirpesių stabilizavimasis fazinėje plokštumoje	13
1.3.1.1	Vaizdavimo M taškų realizacija trimatėje erdvėje	16
1.3.1.2	Vaizdavimo M taškų realizacija fazinėje plokštumoje	16
1.3.1.3	Pusiausvyros taško vaizdavimas trimatėje erdvėje, kai $f_0=0$, $h>0$	17
1.3.1.4	Sistemos $f_0 > 0$ periodinis judesys	17
2.2.1.1	Nusistovėję autovirpesiai be netiesinio nario: a) vaizdas fazinėje plokštumoje; b) trimatėje erdvėje	24
2.2.1.2	Nusistovėję autovirpesiai su netiesiniu nariu: a) vaizdas fazinėje plokštumoje; b) trimatėje erdvėje	25
2.2.2.1	Priverstinių režimų be netiesinio nario egzistavimo sritys	26
2.2.2.2	Nusistovėjęs režimas, kai nėra netiesinio nario	26
2.2.2.3	Uždaro tipo nusistovintis režimas, kai $q_3=3,4; v=0,5$	27
2.2.2.4	Chaotinis režimas, kai $v = 2,7; q_3 = 1,2$	27
2.2.2.5	Priverstinių režimų su netiesiniu nariu egzistavimo sritys	28
2.2.2.6	Stabilus režimas, kai $f=3,3$, $v=1,3$	28
2.2.2.7	Režimas su dviem atraktoriais	29
2.3.1	Sistemos sprendiniai autovirpesių atveju, kai $k = 10$	30
2.3.2	Sistemos sprendiniai autovirpesių atveju su mažu slopinimu $h=0,05$	30
2.3.3	Spektrinės charakteristikos autovirpesių atveju su mažu slopinimo parametru	31
2.3.4	Sistemos sprendiniai Diufingo lygties su išoriniu sužadinimu atveju, kai sistema nusistovi	31
2.3.5	Sistemos sprendiniai Van der Polio lygties be išorinio sužadinimo atveju, kai sistema nusistovi	32
2.3.6	Sistemos sprendiniai bendru atveju, kai sistema nusistovi	33
3.1	Funkcijos <i>manof.m</i> programinis langas	38
3.2	Programos <i>lygtis.m</i> langas	39
1 PRIEDAS		
1	Sistemos modelis sukimosi atveju	42
2	Sistemos modelis: a) deformuojama plokštelė; b) virpesiai pagal pirmą formą; c) virpesiai pagal antrą formą	42
2 PRIEDAS		
1	Pereinamas režimas, kai $k = 0$, $q_1 = 2,1$, $v = 2$	43
2	Nusistovintis uždaras režimas, kai $k = 0$, $q_1 = 2,5$, $v = 3,8$	43
3	Pereinamas režimas, kai $k = 10$, $q_1 = 0,9$, $f_0 = 0,3$	44

4	Uždaras nusistovintis režimas, kai $k = 10, q_1 = 0,6, f_0 = 1,5$	44
5	Sistemos sprendiniai Diufingo lygties su išoriniu sužadinimu atveju, kai vyksta chaotiniai procesai ir pradinės sąlygos $(0;0)$ bei $k=1;h=0.01;f=5;v=0.1$;	45
6	Sistemos sprendiniai Van der Polio lygties su išoriniu sužadinimu atveju, kai sistemos virpesiai nusistovi ir $f_0 = 5, v = 2$	45
7	Sistemos sprendiniai Van der Polio lygties su išoriniu sužadinimu atveju, kai sistemos virpesiai nusistovi ir $f_0 = 5, v = 2$	45
8	Spektrinės charakteristikos Diufingo lygties atveju, kai $k = 10; h = 0,5; f_0 = 5; v = 2,7$	47
9	Spektrinės charakteristikos bendru atveju, kai $q_1 = 0,25; q_3 = 3; k = 10; h=0,2; f_0=1;v=1.9$;	47
10	Diufingo lygties su išoriniu sužadinimu sprendinių realizacija	48
11	Diufingo lygties su išoriniu sužadinimu fazių skirtumų realizacija	48

IŽANGA

Diferencialinės lygtys dažnai taikomos praktikoje įvairių matematinių modelių mechaninėms sistemoms sudaryti ir yra viena iš labiausiai vykusių modeliavimo priemonių. Šiuo metu atlikti tyrimus, remiantis diferencialinėmis lygtimis, tapo lengviau, kadangi egzistuoja daug kompiuterinių paketų, leidžiančių modeliuoti dinamines sistemas.

Su virpesiais susiduriama visur: gyvojoje ir negyvojoje gamtoje, techniniuose įrengimuose. Virpesių tyrimo metodai bei efektai yra bendriausieji daugelyje sričių (chemijoje, fizikoje, biologijoje, technikoje) ir vieni iš reikšmingiausių. Tiesinių sistemų virpesiai yra ištirti globaliai, nes tose sistemose galioja superpozicijos dėsnis. Tačiau netiesinėse sistemose šis dėsnis nebegalioja, išskyla specifiniai efektai kaip sprendinių daugiareikšmiškumas, chaosas, saviorganizacijos efektai (sinchronizacija, dinaminių struktūrų susidarymas ir kt.). Netiesinėse sistemose naudojami metodai yra lokalinio tipo.

Srautas (skysčių, dujų ar kt.), aptekėdamas tamprią mechaninę sistemą, prie tam tikrų sąlygų sužadina tos mechaninės sistemos autovirpesius. Darbe nagrinėjamas tų autovirpesių keitimas į elektrinį signalą, kurio dažnis yra lygus išorinio elektros tinklo dažniui. Norint tai pasiekti, mechaninei sistemai suteikiamas papildomas sužadinimas elektros tinklo dažniu.

Darbo tikslas – ištirti sudarytos sistemos supaprastintą modelį, sinchroninių procesų egzistavimo ir pritraukimo sritis, kai svyravimai yra laisvieji ir priverstiniai, atlikti trajektorijų, esant nevienodiems lygties tipams, analizę, rasti spektrines charakteristikas.

Gautos analitinės bei grafinės priklausomybės leidžia atskleisti kai kurias nagrinėjamos sistemos nusistovėjusių režimų bei jų aplinkų savybes.

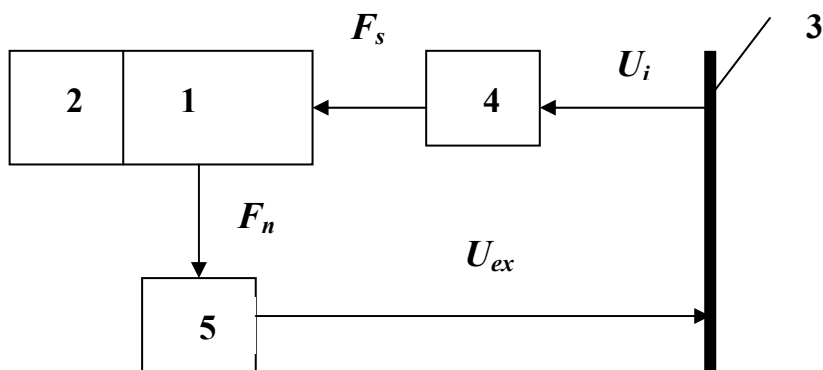
Rezultatai, jau neskaitant mokslinės reikšmės, yra naudingi precizinei mechanikai, kuriant kai kurias energijos transformavimo technologijas. Magistro darbas yra tiesiogiai susijęs su praktiniu eksperimentu, atliekamu Kauno Technologijos Universiteto Mechanikos fakulteto Gamybos sistemų katedroje doktoranto Lauryno Ragaišio. Darbe atlikti skaičiavimai itin reikšmingi sprendžiant mechaninių virpesių energijos transformavimo į elektros energiją problemą.

Šia tema skaitytas pranešimas "Mechaninės energijos transformavimo į elektros energiją tyrimas" tarptautinėj konferencijoj "Mechanika 2003". Straipsnis tokiu pačiu pavadinimu patalpintas į konferencijos medžiagą. Šiais, 2004 metais, paruoštas straipsnis "О преобразовании колебательной энергии в электрическую" dalyvauti konferencijoje "BaltTechMash 2004", vykiančioje Kaliningrado KGTU universitete.

1. BENDROJI DALIS

1.1 SISTEMOS MODELIS ENERGIJOS TRANSFORMAVIMUI

Sistemos modelio energijos transformavimui, panaudojant autovirpesius, bendroji schema yra parodyta 1.1.1 paveikslėlyje.



1.1.1.pav. Energijos transformavimo sistema

Paveiksle 1.1.1 pažymėta:

1 – mechaninė sistema,

2 – autovirpesių sužadavimo dalis,

3 – elektros tinklas,

4 – keitiklis (elektros tinklo įtampą U_i keičia į mechaninės sistemos sužadavimo jėgą F_s),

5 – keitiklis (mechaninę jėgą F_n keičia į elektros tinklo dažnio įtampą U_{ex}).

Užrašysime dinaminės sistemos pusiausvyros lygtis.

$$F_{in} + F_p + F_{aut} + F_n = F_s, \quad (1.1.1)$$

kur

$$F_{in} = F_{in}(x, \dot{x}) \quad - \quad \text{inercijos jėga,}$$

$$F_p = F(x) \quad - \quad \text{potencinė jėga,}$$

$$F_{aut} = F_{aut}(x, \dot{x}, \dot{s}) \quad - \quad \text{autovirpesius sužadinti jėga,}$$

$$F_n = F_n(x, U_{ex}), \text{ kur } \phi_n(F_n, x, U_{ex}) = 0 \quad - \quad \text{naudingos veiksmo jėga,}$$

$$F_s = F_s(U_i), \text{ kur } \phi_s(F_s, U_i) = 0 \quad - \quad \text{synchronizavimo jėga,} \quad (1.1.2)$$

\dot{s} - srauto greitis.

Paprastiausiu variantu turime:

$$F_{in} = m\ddot{x}, F_p = C_1x + C_3x^3, F_{aut} = -Q_1\dot{x} + Q_3\dot{x}^3, F_n = H\dot{x}, F_s = F_0 \cos \omega t \quad (1.1.3)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$p = \sqrt{\frac{C_1}{m}}, \quad \tau = pt, \quad \nu = \frac{\omega}{p} \quad (1.1.4)$$

iš (1.1.1), (1.1.3), (1.1.4) gauname:

$$x'' + x + kx^3 - q_1x' + q_3x'^3 + hx' = f_0 \cos \nu\tau \quad (1.1.5)$$

kur

$$k = \frac{C_3}{m}, \quad q_1 = \frac{Q_1}{m}, \quad q_3 = \frac{Q_3}{m}, \quad h = \frac{H}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m} \quad (1.1.6)$$

čia $-q_1 + h < 0$.

Energija (darbas) skaičiuojama pagal formules:

$$dA = Fdx$$

$$A = \int_t^{t+T} F \frac{dx}{dt} dt = \int_t^{t+T} F\dot{x} dt, \quad (1.1.7)$$

kur T – periodas.

Vidutinis galingumas:

$$N = \frac{A}{T} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} F\dot{x} dt \quad (1.1.8)$$

Naudingas darbas:

$$A_n = \int_t^{t+T} H\dot{x}^2 dt \quad (1.1.9)$$

Visas įdėtas darbas:

$$A_v = \int_t^{t+T} (F_{aut} + F_s) \dot{x} dt = \int_t^{t+T} (-Q_1 \dot{x} + Q_3 \dot{x}^3 + F_0 \cos wt) \dot{x} dt \quad (1.1.10)$$

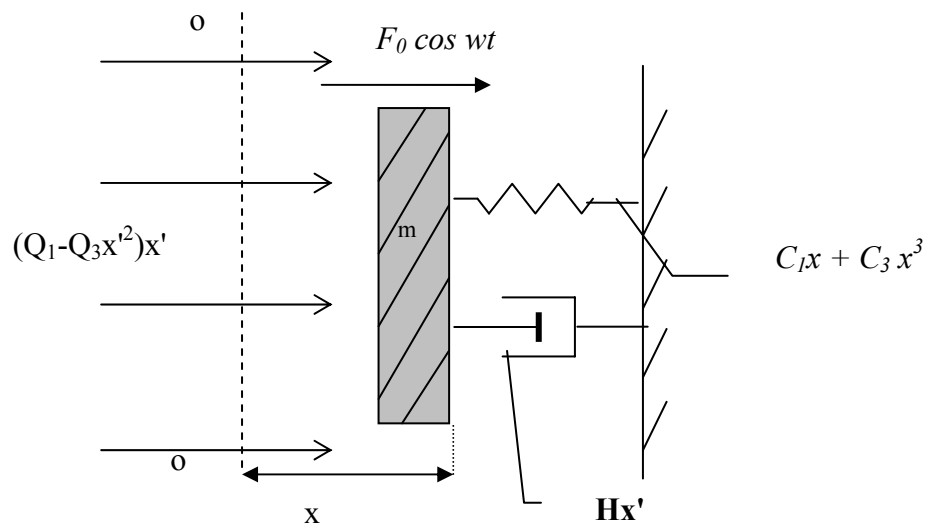
Naudingo veiksmo koeficientas:

$$\eta = \frac{A_n}{A_v} = \frac{A_n}{A_{aut} + A_s} \quad (1.1.11)$$

Nagrinėjama supaprastinta sistema, aprašome lygtimi 1.1.5, kurios schema atvaizduota 1.1.2 paveiksle. Čia:

o-o - sistemos pusiausvyros padėtis, kai neveikia išorinės jėgos.

Veikiant visoms aukščiau išvardintoms jėgoms, sistema pradeda virpėti. Tuomet įmanomas mechaninės energijos transformavimas į elektros energiją.



1.1.2 pav. Supaprastintos sistemos modelis

Dar galimi ir kiti tokios sistemos modelio variantai, aprašantys panašaus tipo virpesius. Jie pavaizduoti priede 1 – 2 paveiksluose.

1.2 AUTOVIRPESIAI

Sutrikdžius mechaninės sistemos pusiausvirą, priklausomai nuo jos tipo ir ją aprašančių parametru pobūdžio, gali atsirasti ne tik laisvieji ir priverstiniai virpesiai, bet ir kiti judėjimo režimai, kaip parametriniai virpesiai, autovirpesiai ir kiti. Daugeliu atveju virpesių didėjimo intensyvumas po truputį mažėja ir nusistovi judėjimas su pastoviomis amplitudėmis.

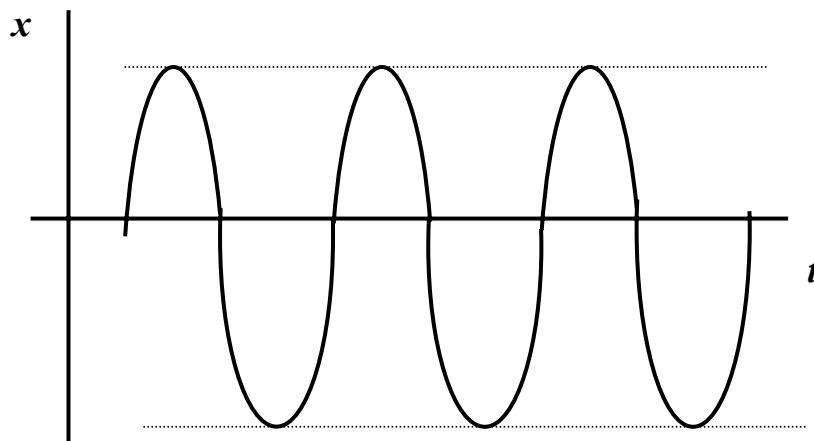
Šio reiškinių prigimtį galima paaiškinti, nagrinėjant virpančią sistemą, esant trinčiai, kurios charakteristika aprašoma, pavyzdžiui, netiesine greičio funkcija

$$R = -Q_1 x' + Q_3 x'^3,$$

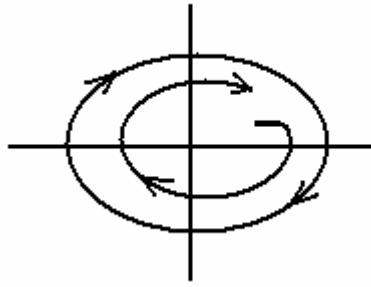
kur b_1 ir b_3 – teigiamos pastoviosios. Sistemos judėjimo lygtis būtų tokia:

$$m x'' - Q_1 x' + Q_3 x'^3 + Cx = 0. \quad (1.2.1)$$

Kai nuokrypiai maži, netiesinį narį galima atmesti. Gautasis sistemos būvis dėl išlikusios neigiamos trinties yra nestabilus, todėl mažiausias trikdys sukels tolydžiai didėjančius virpesius. Kai jie pakankamai intensyvūs, pradės didėti netiesinio nario vaidmuo, todėl virpesiai stabilizuosis ir nusistovės stacionarus virpesių, dar vadinamų autovirpesiais, režimas:



1.2.1 pav. Autovirpesių režimas



1.2.2 pav. Autovirpesių stabilizavimasis fazinėje plokštumoje

Iš 1.2.2 paveikslėlio galime pastebėti, jog spiralė pamažu artėja prie uždaros trajektorijos, atitinkančios nusistovėjusius virpesius. Ši trajektorija vadinama ribiniu ciklu.

Pats ribinis ciklas gaunamas tuo atveju, kai pradinis trikdys labai stiprus ir pradinės padėties taškas fazinėje plokštumoje yra ribinio ciklo išorėje.

(1.2.1) lygties netiesinio nario slopinamąjį poveikį ir tiesinio nario destabilizuojamąjį poveikį nusako sistemos energijos pokytis dėl darbo, atliekamo skirtingų trinties jėgų dedamųjų. Tiesinė dedamoji atlieka teigiamą darbą, t.y. didina sistemos energiją, o netiesinė dedamoji atlieka neigiamą darbą, t.y. mažina sistemos energiją. Kai autovirpesiai stacionarūs, energijos papildymas kompensuoja jos sąnaudas ir sistema veikia konservatyviai. O konservatyviųjų sistemų fazinės trajektorijos taip pat yra uždaros kreivės, geometriškai labai panašios į ribinio ciklo kreives. Tačiau šis panašumas tėra išorinis, nes ribinis ciklas išreiškia izoliuotą fazinę trajektoriją, aplink kurią nėra kitų uždarų kreivių. Tuo tarpu konservatyviųjų sistemų uždaros fazinės trajektorijos užpildo visą fazinę plokštumą.

Stacionarių autovirpesių amplitudė priklauso tik nuo sistemos vidinių savybių ir nepriklauso nuo pradinių sąlygų. Kad atsirastų autovirpesių, būtinas išorinis energijos šaltinis, tačiau jis nebūtinai turi žadinti virpesius. Energiją iš šaltinio virpėjimo metu sistema gauna tiesiogiai. Kai kuriais atvejais stacionarūs autovirpesiai yra beveik harmoniniai ir vyksta sistemos savuoju dažniu – tokios sistemos vadinamos silpnai netiesinėmis. Kitais atvejais stacionarūs autovirpesiai gerokai skiriasi nuo harmoninių, jiems būdingos pauzės ir trūkčiojimai. Tokios sistemos ir patys autovirpesiai vadinami relaksaciniais arba trūkiaisiais.

1.3. SPECIFINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

1.3.1. DUFINGO DIFERENCIALINĖ LYGTIS

Nagrinėsime diferencialinę lygtį:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x + kx^3 = 0 \quad (1.3.1.1)$$

Ji yra vadinama Diufingo svyravimus aprašančia lygtimi. Nuo nagrinėjamos (1.1.5) lygties ji skiriasi tuo, kad čia nėra priverstinės jėgos nario f_0 bei narių q_1, q_3, h . Tai yra struktūrinės sistemos modelis, kuriai priklauso netiesinės grįžtamosios jėgos, pavyzdžiui, spyruoklė. Ji gali būti naudojama ir aprašant švytuoklės judėjimą:

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Išplečiant :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + O(\theta^5), \quad (1.3.1.2)$$

kai $\theta = \sqrt{kx}$.

Pažymėjus

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{g}{L} \left(x - k \frac{x^3}{6} \right) = 0 \quad (k^2), \quad (1.3.1.3)$$

laiko tarpą apibrėšime taip:

$$\frac{d^2 x}{dz^2} + x - k \frac{x^3}{6} = 0 \quad (k^2), \quad (1.3.1.4)$$

kai $z = \sqrt{\frac{g}{L}}\tau$.

Gavom pradinę Diufingo lygtį, kai $a = -1/6$.

Lygtį (1.1.5) nagrinėjame konservatyviu atveju, t.y. kai $h = 0$ ir ją galima perrašyti kaip pirmos eilės diferencialinių lygčių sistemą:

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = -x - kx^3$$

Su pasirinktom pradinėm sąlygom $(x(0), y(0))$ šios sistemos sprendiniai grafiškai atrodytų kaip trajektorija fazinėje plokštumoje, t.y. taško judesys laike. Čia gali egzistuoti vienareikšmiai ir daugiareikšmiai sprendiniai.

Integralinė kreivė, kuria juda taškas, yra aprašoma diferencialine lygtimi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\tau}}{\frac{dx}{d\tau}} = \frac{-x - kx^3}{y} \quad (1.3.1.5)$$

Ši lygtis gali būti lengvai integruojama ir duoti rezultata:

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + k \frac{x^4}{4} = \text{const} \quad (1.3.1.6)$$

Gautas rezultatas paklūsta anksčiau minėtam fizikiniam energijos tvermės dėsnui. Tuo atveju, jis nusako uždarytą kreivių ištisinę aplinką – kontinuumą, - supantį koordinačių pradžia. Kiekviena iš šių kreivių simbolizuoja pradinės Diufingo lygties periodinį judėjimą. Visi judesiai, prasidedantys pakankamai arti koordinačių (x', x) susikirtimo taško yra periodiniai. Tačiau šiuo atveju pirmos eilės diferencialinių lygčių sistema be koordinačių susikirtimo taško turės du papildomus pusiausvyros taškus.

Integralinės kreivės, einančios per šiuos taškus, atskiria periodinius judesius nuo laisvai augančių ir yra vadinamos atskiriančiomis.

Jeigu imtume skaitmeniškai integruoti pradinę Diufingo lygtį, pastebėtume, kad periodinio judėjimo periodas priklauso nuo to, kurios uždarnosios kreivės fazinėje plokštumoje esame. Šis efektas yra tipinis netiesinei vibracijai ir yra suprantamas kaip periodo įtaka amplitudės augimui.

Nagrinėkime diferencialinę lygtį:

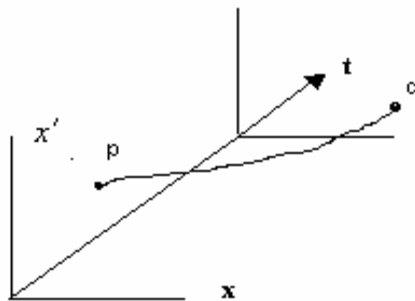
$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x + h \frac{dx}{dt} + kx^3 = f_0 \cos \nu\tau \quad (1.3.1.7)$$

Ją galėtume pavadinti priverstinius svyravimus aprašančia Diufingo lygtimi. Ši lygtis naudojama modeliuoti tamprios struktūros svyravimų amplitudės stiprumą, kada poslinkis yra pakankamai didelis ir sureikšminantis netiesinius tamprius efektus. Priešingai nei nepriverstinius svyravimus aprašanti Diufingo lygtis, ši yra nepriklausoma. Tai reiškia, kad laikas t turi didelę reikšmę lygties naryje $\cos \omega t$. Fazinėje plokštumoje jau nebegalima patogiai tyrinti šios lygties, kadangi vektoriaus sritis duotame taške keičiasi laike, sudarydama sąlygas trajektorijai grįžti į šį tašką ir persikirsti. Sistema gali būti paversta autonomine, tačiau tik didinant jos dimensiją kas vieneta.

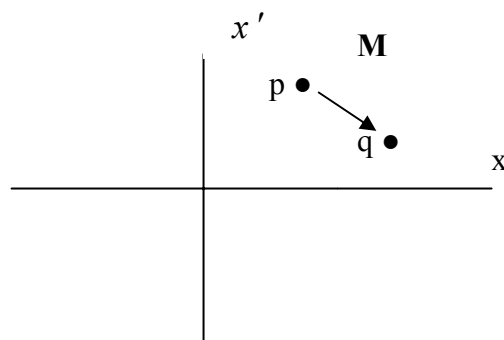
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - kx^3 - hx' + f_0 \cos z \\ \frac{dz}{dt} &= \nu \end{aligned} \tag{1.3.1.8}$$

Ši trijų pirmos eilės paprastųjų diferencialinių lygčių sistema yra apibrėžta fazinėje erdvėje $R^2 x$ S , kurioje apskritimo S egzistavimas išplaukia iš to fakto, kad sistemos vektoriaus sritis yra z ašyje su periodu 2π .

Tinkamiausia schema pamatyti šį trimatį srautą dvimačiame yra naudojant taip vadinamą “M” vaizdavimą. Šis planas yra sudarytas iš srautų susikirtimo su paviršiaus dalimi Σ , kuri gali būti paimta, pavyzdžiui $\Sigma : z = 0(\text{mod } 2\pi)$. Vaizdavimas $M : \Sigma \rightarrow \Sigma$ yra apibūdinamas taip. Tarkim, turim Σ tašką p ir paimkime jį kaip pradines sąlygas minėtos sistemos iš trijų paprastųjų diferencialinių lygčių srautui. Tarkim skaičiavimo rezultatuose gauta trajektorija plinta laike kol $z = 2\pi$. Tai bus kol trajektoriją persikirs su Σ kažkokiame tai taške q . Tuomet M atvaizduoja p į q . Galima pastebėti, kad pastovus “M” plano taškas atitinka srauto su periodu 2π judėjimą.



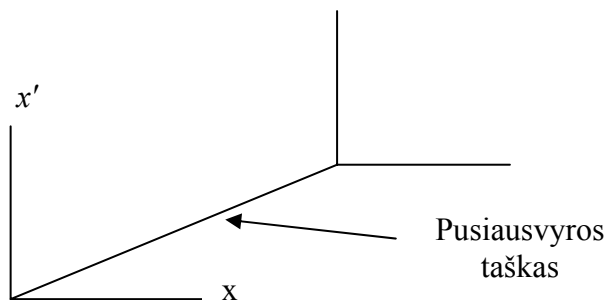
1.3.1.1 pav. Vaizdavimo M taškų realizacija trimatėje erdvėje



1.3.1.2 pav. Vaizdavimo M taškų realizacija fazinėje plokštumoje

Toliau nagrinėjant diferencialinių lygčių sistemą, kai $f_0 = 0$, sistema vis tiek bus autonominė. Galima panaudoti trimatę erdvę, norint parodyti, kaip skiriasi $f_0 > 0$ atvejis nuo atvejo, kai $f_0 = 0$. Kai $f_0 = 0$, pusiausvyros taškas, kuris paprastai būdavo x - y fazinėje plokštumoje, dabar tampa uždara kilpa $R^2 \times S$ fazinėje erdvėje.

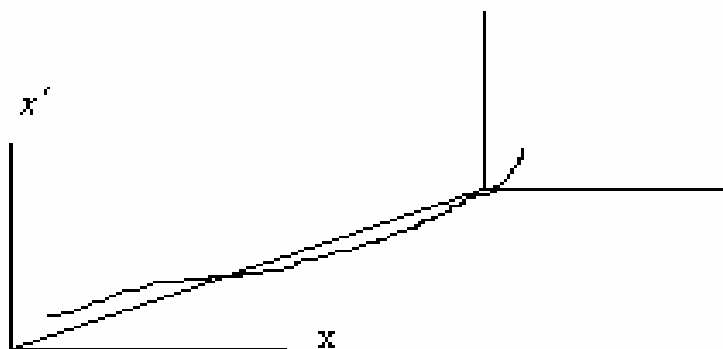
$$f_0=0, h > 0$$



1.3.1.3 pav. Pusiausvyros taško vaizdavimas trimatėje erdvėje, kai $f_0=0, h>0$

Galima padaryti išvadą, kad kiekvienam $f_0 = 0$ pusiausvyros taškui egzistuoja $f_0 > 0$ sistemos periodinis judesys su periodu 2π , bent jau pakankamai mažiems f_0 .

$$f_0 > 0, h > 0$$



1.3.1.4 pav. Sistemos $f_0 > 0$ periodinis judesys

1.3.2 VAN DER POLIO DIFERENCIALINĖ LYGTIS

Nagrinėsime diferencialinę lygtį:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x - (q_1 - q_3 x'^2) \frac{dx}{d\tau} = 0, \quad (1.3.2.1)$$

Ji yra vadinama Van der Polio virpesius aprašančia lygtimi. Tai yra tradicinės sistemos modelis, kuriame energija yra duodama ir gaunama iš sistemos autonomiškai, rezultate gaunant periodinį

judėjimą - *ribinį ciklą*. Apie ribinį ciklą jau buvau užsiminus 1.2 skyrelyje, kai kalbėjau apie autovirpesius. Galima pastebėti, jog slopinimo kintamasis $(q_1 - q_3 x'^2) dx/dt$ keičiasi, priklausomai nuo to, ar $|x|$ yra daugiau ar mažiau už vienetą. Van der Polio lygtis naudojama aero elastingų virpesių ir gausių biologinių virpesių modeliams aprašyti, tačiau tik keliuose ją galima pritaikyti praktiškai.

Skaitinis Van der Polio lygties integravimas parodo, kad prie skirtingų pradinių sąlygų (išskyrus, kai $x = dx/dt$

$= 0$) artėjama prie vienintelio periodinio judėjimo. *Ribinio ciklo* prigimtis priklauso nuo c . Mažoms jos reikšmėms judėjimas yra beveik sinusoidinis, tuo tarpu didelėms c reikšmėms jis bus relaksacinis. Tai turi tendenciją suvienodinti žingsnio funkcijos eilę, peršokant tarp teigiamų ir neigiamų dydžių dukart per apskritimą. Jeigu Van der Polio lygtį užrašytume kaip pirmos eilės tiesinių diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x + (q_1 - q_3 x'^2)y \end{aligned} \quad (1.3.2.2)$$

Pastebėtume, kad sistema neturi tikslaus uždaro sprendinio. Skaitinis integravimas parodo, kad *ribinis ciklas* yra uždara kreivė, kurios viduje yra koordinačių susikirtimo taškas x - y fazinėje plokštumoje. Iš to, kad lygčių sistema yra pastovi-invariantinė, įvedus pakeitimus $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, galima padaryti išvadą, kad kreivė, vaizduojanti *ribinį ciklą*, yra simetrijos taškas apie koordinačių susikirtimo tašką.

Nagrinėkime diferencialinę lygtį:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x - (q_1 - q_3 x'^2) \frac{dx}{d\tau} = f_0 \cos \nu\tau, \quad (1.3.2.3)$$

Ji vadinama priverstinius svyravimus aprašančiąja van der Polio diferencialine lygtimi. Tai bus tokios situacijos modelis, kai sistema, galinti savarankiškai virpėti, yra veikiamą kito virpesių šaltinio. Ši atvejį atspindi diferencialinės lygties dalis: $f_0 \cos \nu\tau$.

Kada prislopinti Diuffingo svyravimai virpa su periodine priverstine funkcija, galima pastebėti, kad rezultatas gali periodiškai priklausyti nuo to pačio dažnio kaip ir priverstinė funkcija

Kada laisvieji svyravimai nuslopsta dėl slopinimų, galima pastebėti, kad jie nedalyvauja stabiliam priverstiniame funkcionavime. Jeigu priverstinės jėgos yra pakankamai stiprios bei dažniai tarp nepriverstinių ribinio ciklo svyravimų ir priverstinės funkcijos yra pakankamai maži, gali atsitikti, kad reakcija įvyksta tik į priverstinį dažnį. Šiuo atveju sakoma, kad laisvieji svyravimai yra *slopinami*, priverstinė funkcija palaiko ribinius ciklinius svyravimus, o pati sistema yra *faziškai* ar *dažniškai konservatyvi* arba tiesiog paprasčiausiai konservatyvi.

Biologinė prigimtis yra priežastis žmogui užmigti ir atsibusti tam tikrais periodais, kuriuose žmogaus biologinis laikrodis yra modeliuojamas Van der Polio virpesiais, ir kiekvienas nakties ir dienos ciklas, priklausantis nuo žemės sukimosi, yra sumodeliuotas kaip periodinis priverstinis nustatytas laikas. Eksperimentai parodė, kad žmogaus biologinio laikrodžio uždaras ciklas paprastai turi periodą, kuris yra truputį kitoks nei 24 valandos. Normalus miegas yra atitinkamas pavyzdys žmogaus suderinto biologinio laikrodžio su 24 valandų nakties ir dienos priverstiniu ciklu. Nemiga ir kiti miego sutrikimai gali sekti iš to, kad biologinio laikrodžio ribotas ciklas yra neslopinamas. Šiuo atveju galima tikėtis tariamai periodinio rezultato susidedančio iš riboto ciklo ir priverstinių dažnių.

1.5 SPEKTRINĖ ANALIZĖ

Praktikoje plačiai taikoma signalų spektrinė analizė, kurios pagrindinis uždavinys – nustatyti signalo harmonikų dažnius (dažnių spektras), jų amplitudes (amplitudinis spektras) bei pradines fazes (fazinis spektras).

Spektrinė analizė remiasi Furje teorija, kad kiekvieną periodinę procesą su periodu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

(čia: ω – periodinio proceso kampinis dažnis, f – jo dažnis hercais (Hz)) galima išreikšti begaline atskirų harmonikų suma. Signalas laikomas funkcija, priklausančia nuo laiko t .

Kiekvieną periodinę funkciją $x(t)$, kurios periodas T , galima išreikšti Furje eilute:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X^*(m) e^{i(m\omega)t}; \quad (1.5.1)$$

$$\text{čia } X^*(m) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i(m\omega)t} dt \quad - \text{ harmonikų kompleksinės amplitudės.} \quad (1.5.2)$$

Skaičių $X^*(m)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ rinkinys vadinamas funkcijos spektru.

Skaičių $|X^*(m)|$ rinkinys vadinamas funkcijos amplitudiniu spektru.

Dydžių $\varphi_n = -\arg X^*(m)$ rinkinys vadinamas funkcijos faziniu spektru.

Kai funkcija $x(t)$ yra neperiodinė, ją galima išreikšti Furje integralu:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i(2\pi f)t} df \quad \text{tai atvirkštinė Furje transformacija;}$$

čia

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i(2\pi f)t} dt \quad - \text{ tiesioginė Furje transformacija} \quad (1.5.3)$$

$X(f)$ vadinama spektrinio tankio funkcija (spektru), $|X(f)|$ – amplitudiniu spektru, $\varphi(f) = -\arg X(f)$ – faziniu spektru.

Praktikoje atliekant tiesioginę Furje analizę, (1.5.3) integralas pakeičiamas baigtine suma:

$$X[(k-1) \cdot \Delta f] = \Delta t \sum_{m=1}^n x[(m-1)\Delta t] e^{-i \cdot 2\pi \cdot (k-1)(m-1)\Delta f \Delta t}; \quad (1.5.4)$$

čia Δt – laiko t reikšmių kitimo žingsnis; $(m-1)\Delta t$ – diskrečios laiko t reikšmės, kintančios žingsniu Δt ; m – laiko funkcijos (signalo) reikšmės eilės numeris; $(k-1)\Delta f$ – diskrečios dažnio f reikšmės; k – dažnio f reikšmės eilės numeris; $\Delta f = \frac{1}{T}$ – dažnio f reikšmių kitimo žingsnis; T – laiko intervalas, kuriame kinta laiko funkcija.

Laiko pokytį Δt pažymėję T_s , įvesime sekančius pažymėjimus:

$$n = \frac{T}{\Delta t} = \frac{T}{T_s} = \frac{1}{\Delta f \cdot \Delta t} \quad x(m) = x[(m-1) \cdot \Delta t]; \quad X(k) = x[(k-1) \cdot \Delta f];$$

- taškų, kuriuose žinomos laiko funkcijos reikšmės, skaičius.

Tuomet (1.5.4) išraiška atrodo taip:

$$X(k) = T_s \sum_{m=1}^n x(m) e^{-i(2\pi/n)(k-1)(m-1)} \quad (1.5.5)$$

Spektrinė Furje analizė darbe atliekama su mechaniniu analitiniu paketu DIAdem. Programai pateikiamas $x(t)$ funkcijos reikšmių vektorius ir laiko vektorius t . Tada suformuojamas signalas ir šio signalo spektras. Plačiau apie spektrinę analizę kalbėsime 2.3 skyrelyje.

2. TIRIAMOJI DALIS

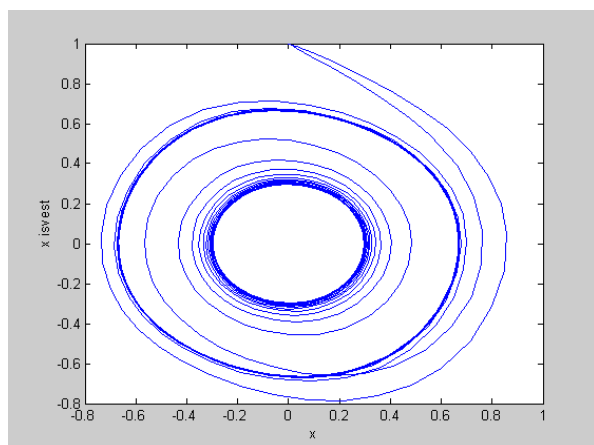
Atliekamas (1.1.5) lygties tyrimas, kai sistema virpa savaime ir priverstinai. Nagrinėjami du autovirpesių režimai: be netiesinio nario ir su juo. Atskirai išanalizuojami atskiri nagrinėjamos lygties atvejai, lygtį užrašant Dufingo ar Van der Polio diferencialine lygtimi. Atliekama ir spektrinė lygties analizė – gaunamos sprendinių spektrinės charakteristikos.

2.2 SISTEMOS STABILUMO TYRIMAS

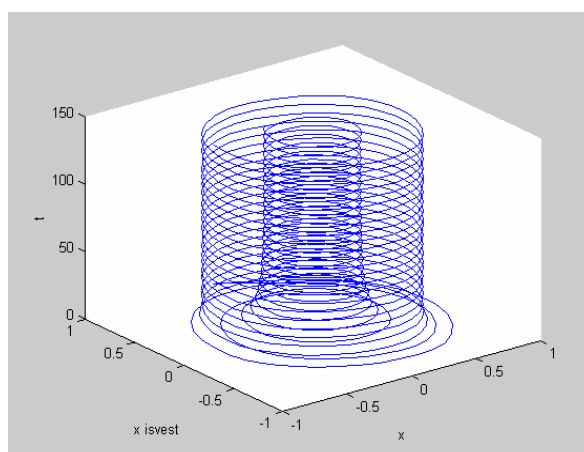
2.2.1 SAVAIME VIRPANTI SISTEMA

Pirmiausiai atliekamas tyrimas, kai sistema virpa savaime. Čia išskiriami du atvejai: kai nėra netiesinio nario ir kai jis yra. Abiem atvejais priverstinė jėga neegzistuoja, t.y. $f_0 = 0$. Svyravimai galimi tik tuo atveju, kai pradinės sąlygos nėra lygios $(0;0)$.

1) $k = 0$;



a)

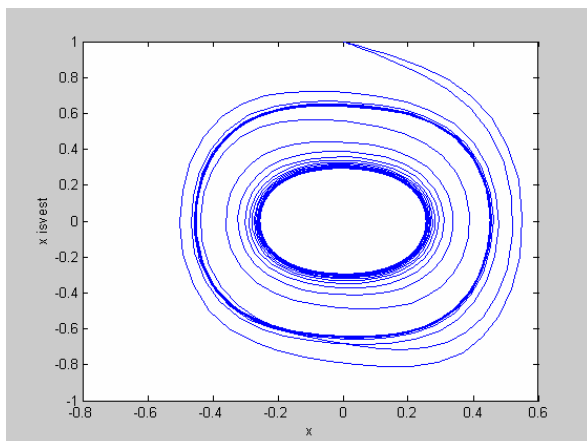


b)

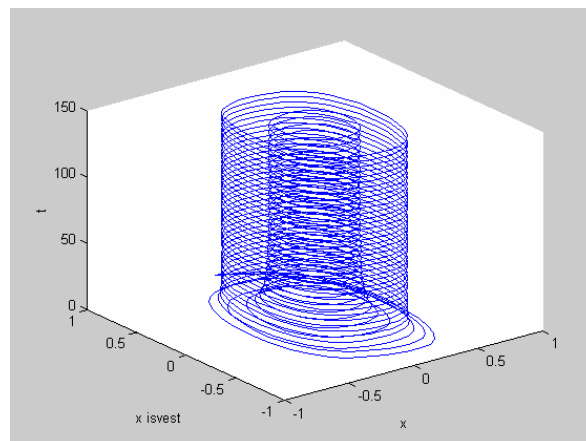
2.2.1.1. pav. Nusistovėję autovirpesiai be netiesinio nario: a) vaizdas fazinėje plokštumoje; b) trimatėje erdvėje

Vykstant svyravimams be netiesinio nario, kai nėra išorinės sužadavimo jėgos, stabilūs sprendiniai su pastoviomis didžiausiomis amplitudėmis nusistovi, slopinimui $h = 0$. 2.2.1.1 paveikslėlyje matome dvi stabilių ir vieną nestabilių sprendinių zoną, kai parametrai $q_1 = 0.25$, $q_3 = 3$; $h = 0.2$. Parametru h augant, atsiranda nestabilių sprendinių, o pasiekus ribą $h = 0,27$, sistemoje virpesiai iš viso užgesta. Tada sprendinių daugiareikšmiškumo nepastebėsime.

2) $k \neq 0$.



a)



b)

2.2.1.2. pav. Nusistovėję autovirpesiai su netiesiniu nariu: a) vaizdas fazinėje plokštumoje; b) trimatėje erdvėje

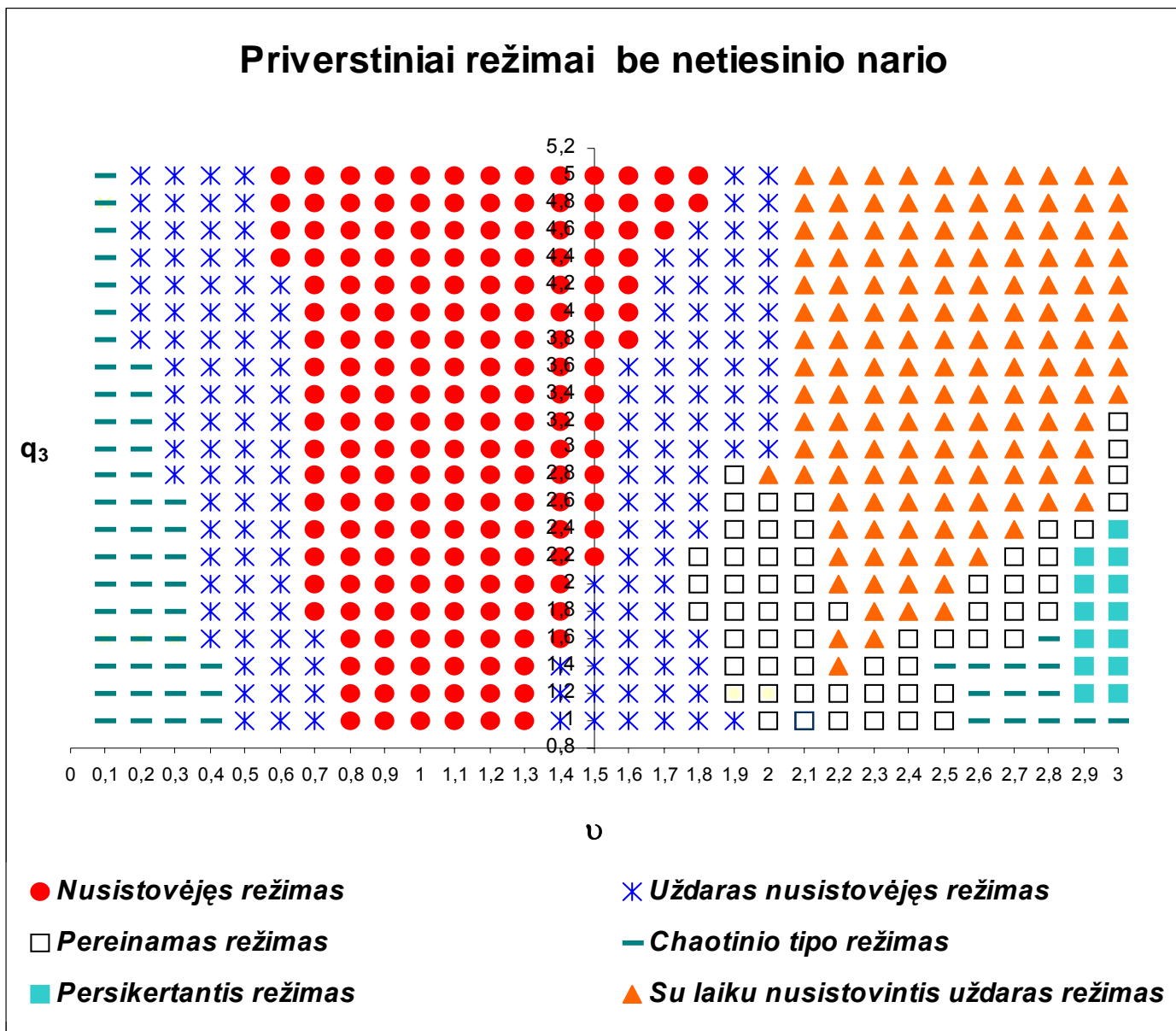
Kai turime netiesinį narį, taip pat galime stebėti sprendinių daugiareikšmiškumą. Tiesa, čia virpesiai su slopinimo parametru turi didesnes amplitudes nei virpesiai be jo. Nagrinėjami skirtingi sprendinių režimai niekada nepersikerta, kas ypač akivaizdžiai matosi iš 2.2.1.1 *b* paveikslėlio, kuriame sprendimas atliekamas su tokiais pačiais parametrais kaip ir pirmu atveju, tik čia netiesinis narys jau $k = 10$.

2.2.2 PRIVERSTINAI VIRPANTI SISTEMA

Priverstinai virpanti sistema pasižymi savybe, kad egzistuoja du dažniai – savasis ir priverstinis. Savasis dažnis gali būti pritrauktas priverstinių virpesių ir sistema nusistovi – virpa periodiškai su pastoviomis amplitudėmis. Tačiau ne visais atvejais tai įvyksta. Atliktame tyrime išryškėja daug įvairių režimų su skirtingomis savybėmis. Čia virpesiai gali būti ir nestabilūs, neperiodiniai, su skirtingomis amplitudėmis, galima daryti ir prielaidą, kad kažkur egzistuoja chaosas. Nagrinėjame sistemą, kurią veikia išorinė priverstinė jėga.

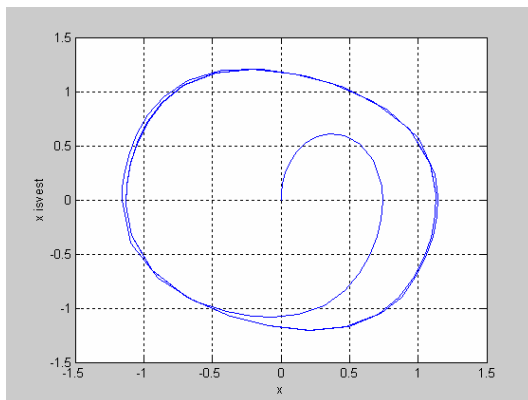
1) $k = 0$;

Kiti parametrai būtų atitinkamai lygūs: $q_1 = 0,25$; $h = 0,2$, $f = 1$. Dažnis ν ir parametras q_3 kinta grafike matomuose intervaluose $\nu = [0,1; 3]$ ir $q_3 = [1; 5]$.



2.2.2.1 pav. Priverstinių režimų be netiesinio nario egzistavimo sritys

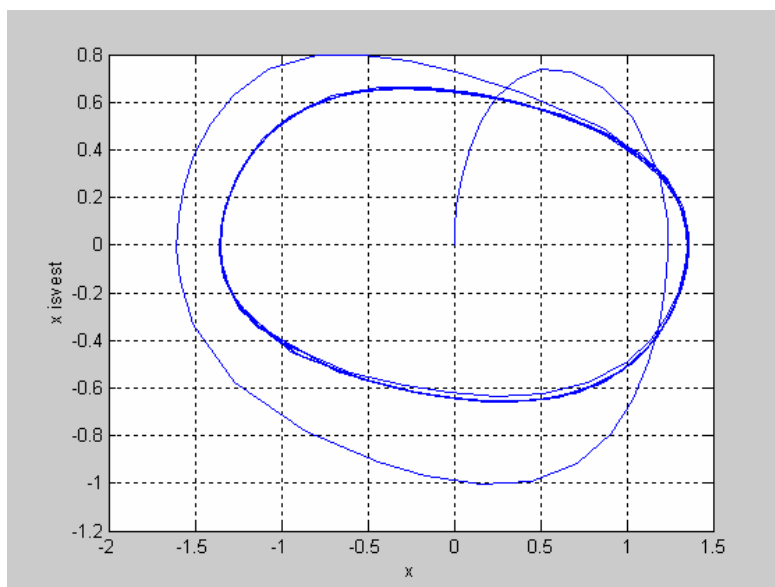
Priverstinė sistema be netiesinio nario virpa labai įvairiai. Galima išskirti daugiau nei kelis režimus. Jei pradėtume nuo stabilumo, tai ženklu ● pažymėtas nusistovėjęs režimas, kuris pavaizduotas fazinėje plokštumoje 2.2.2.2 paveikslėlyje, kai parametrus parinkome $q_3 = 3$ ir $\nu = 1$.



2.2.2.2 pav. Nusistovėjęs režimas, kai nėra netiesinio nario

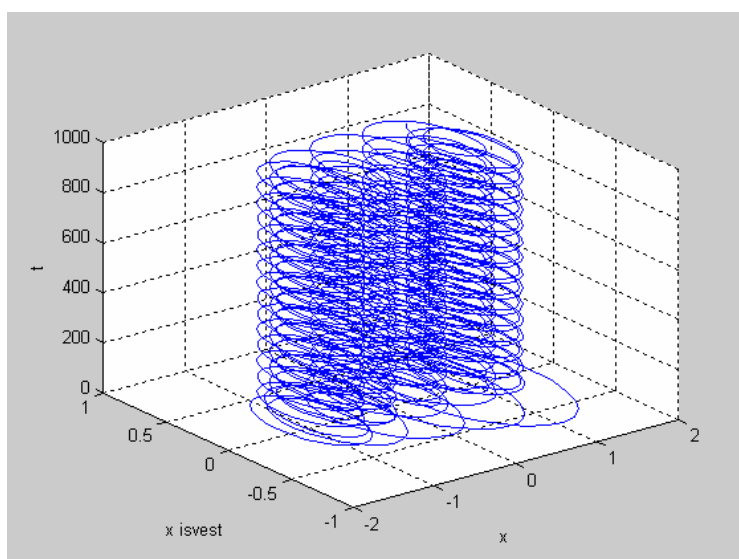
Čia aiškiai matyti, kad svyravimai vyksta apie tašką $(0;0)$.

Judėdami į kairę ir dešinę nuo stabilių nusistovėjusių sprendinių, stebėtume, kad režimas pereina į uždaro tipo nusistovėjusį režimą:



2.2.2.3 pav. Uždaro tipo nusistovintis režimas, kai $q_3=3,4;v=0,5$

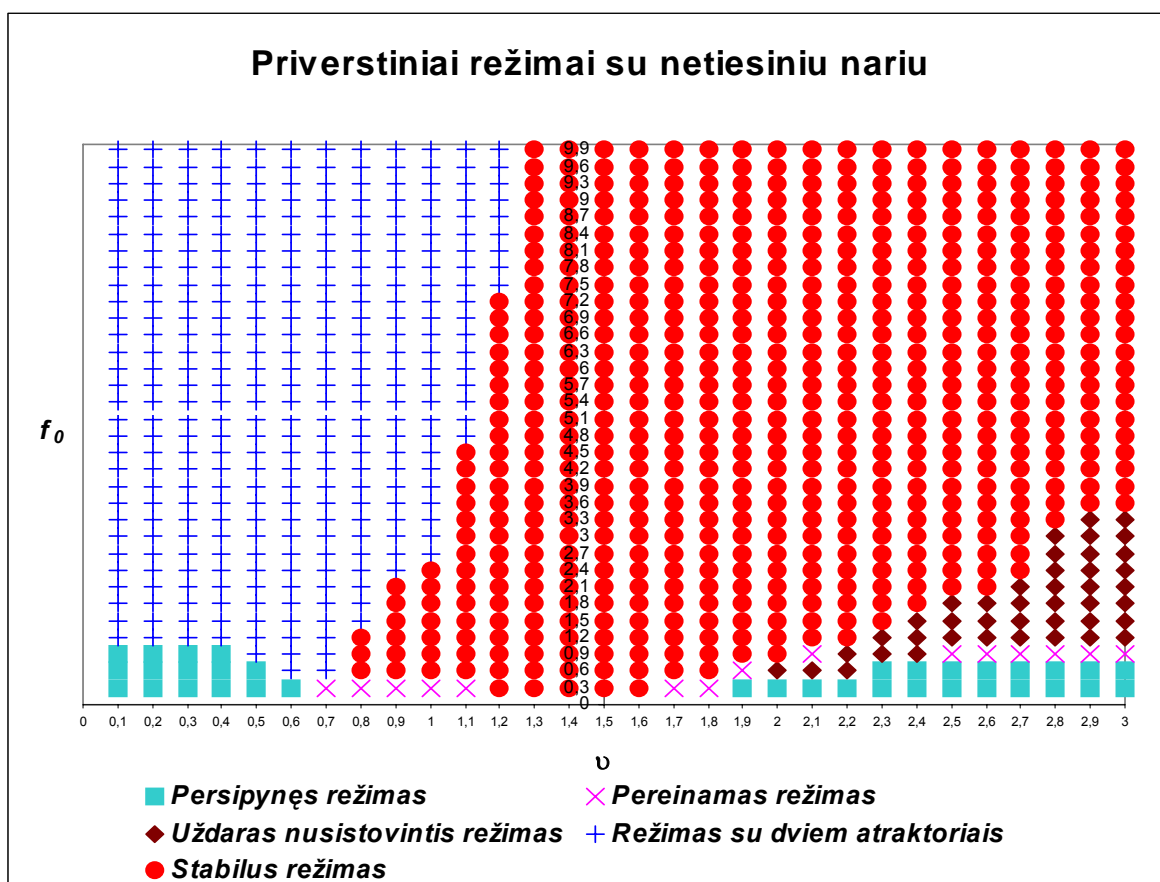
Dar toliau į kairę ir visai prie priešingos pusės pabaigos, sutinkami režimai, kurių pavadinti stabiliais ir nusistovėjusiais negalima. Judėjimas vyksta nepastoviomis amplitudėmis, jokio periodiškumo negalima įžiūrėti.



2.2.2.4 pav. Chaotinis režimas, kai $v = 2,7; q_3 = 1,2$

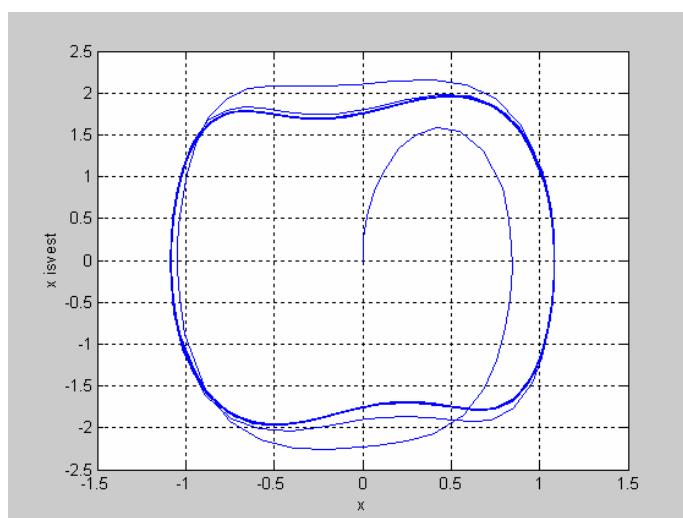
Keičiant parametrus, pastebėtume dar daugiau įvairių režimų. Visi jie patalpinti 2 priede 1-2 paveiksluose.

Tyrimas atliekamas laiko intervalą pasirenkant apie $[0;150]$. Savaiame suprantama, kad sistema virpės mažesniu periodu su didesniu dažniu, nes šie dydžiai yra atvirkščiai proporcingi vienas kitam.

2) $k \neq 0$ 

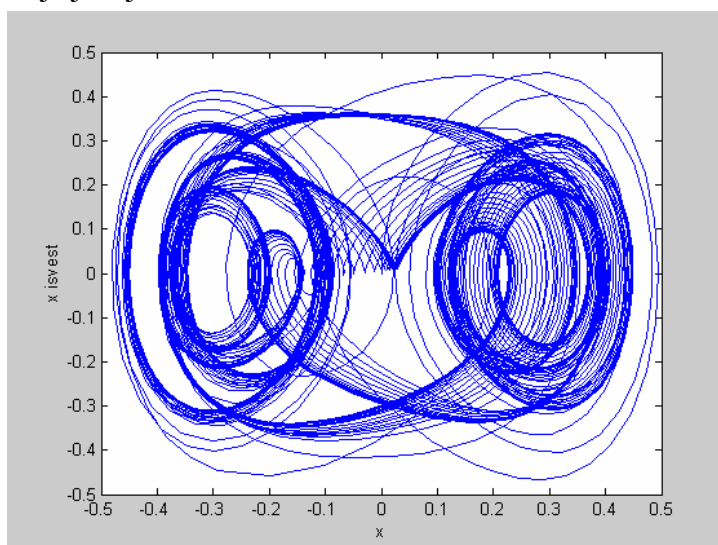
2.2.2.5 pav. Priverstinių režimų su netiesiniu nariu egzistavimo sritys

Su netiesiniu nariu sistema juda daug stabiliau. Netiesinis narys mūsų atveju pristabdo sistemos chaotinius svyravimus ir didesnę priverstinių režimų su netiesiniu nariu sritis yra stabili. Šiuo atveju nusistovėję stabilūs režimai atvaizduoti 2.2.2.6 paveikslėlyje. Dabar jau kinta priverstinės jėgos dydis $f_0 = [1; 10]$, o parametras q_3 pastovus ir $q_3 = 3$, netiesinis narys $k = 10$.



2.2.2.6 pav. Stabilus režimas, kai $f=3,3$, $v=1,3$

Sistema stabilesnė kuo priverstinė jėga ir išorinis sužadinių dažnis yra didesni. Jei dažnis ν mažas, pvz. $\nu = 0,4$, išryškėja judėjimas su dviem simetriškais atraktoriais.



2.2.2.7 pav. Režimas su dviem atraktoriais

Ypač reikia atkreipti dėmesį į pereinamąjį ir režimą su dviem atraktoriais. Gali būti, jog čia sistema virpa dviem dažniais: savuoju ir priverstiniu. Susidaro tokie režimai, kuriuos sunku apibūdinti. Taip pat iškyla klausimas, kur vyksta chaotiniai procesai, o kur egzistuoja būtent šis, dvidažnis procesas.

Kiti režimų tipai yra 2 priede 3- 4 paveikslėlyje.

2.3 SKIRTINGŲ LYGTIES TIPŲ TYRIMAS

Lygtis (1.1.5) apibendrina Dufingo ir Van der Polio lygtis be arba su išoriniu sužadiniu. Jei ją perrašytume taip:

$$x'' + x + hx' + f_1(x) + f_2(x') = f_3(\tau) \quad (2.3.1)$$

kur

$$\begin{aligned} f_1(x) &= kx^3 \\ f_2(x') &= -q_1(1 - q_3x'^2)x' \\ f_3(\tau) &= f_0 \cos \nu\tau \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Kai $f_2(x') = f_3(\tau) = 0$ turime Dufingo lygtį be sužadimo,

kai $f_2(x') = 0$ turime Dufingo lygtį su sužadimu,

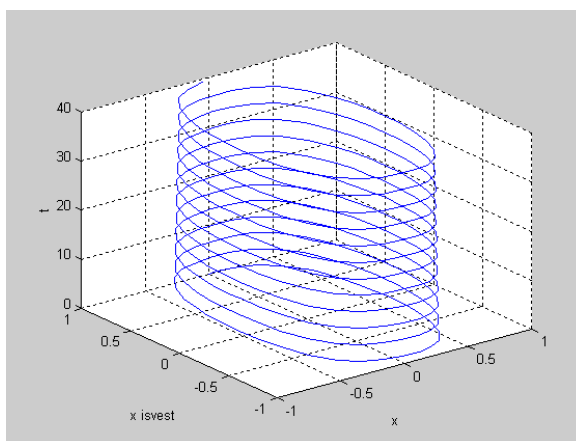
kai $f_1(x) = f_3(t) = 0$ turime Van der Polio lygtį be išorinio sužadavimo,

kai $f_1(x) = 0$ turime Van der Polio lygtį su išoriniu sužadimu.

I. Pirmiausia reiktų pradėti nuo pačios paprasčiausios sistemos – autovirpesių.

$$\ddot{x} + x + kx^3 = 0 \quad (2.3.4)$$

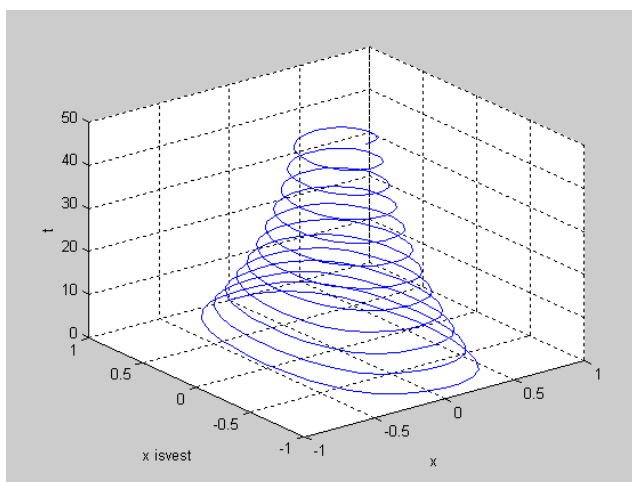
Jei pradines sąlygas paimtume $(0;0)$, virpesiai nevyktų, tik uždavus nors vieną pradinę sąlygą nelygią nuliui, turime:



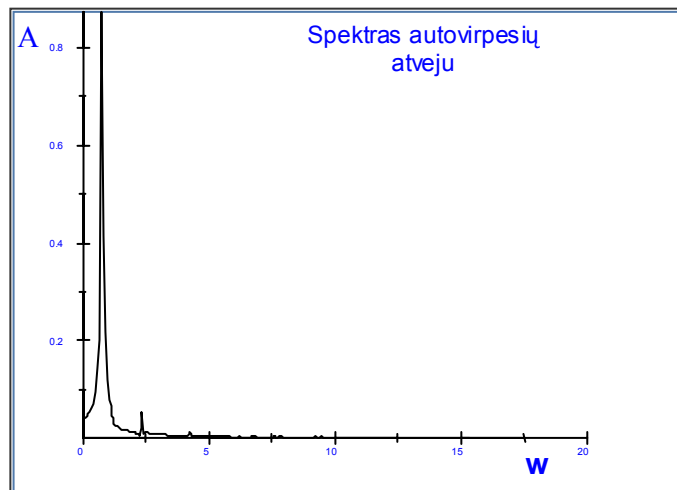
2.3.1 pav. Sistemos sprendiniai autovirpesių atveju, kai $k = 10$

II. Galima panagrinėti ir su mažu slopinimu $h \sim 0,05$. Nuo slopinimo parametro dydžio priklauso, kaip greitai slopsta svyravimai. Kuo jis didesnis, tuo greičiau gęsta virpesiai.

$$\ddot{x} + h\dot{x} + x + kx^3 = 0 \quad (2.3.5)$$



2.3.2 pav. Sistemos sprendiniai autovirpesių atveju su mažu slopinimu $h = 0,05$



2.3.3 pav. Spektrinės charakteristikos autovirpesių atveju su mažu slopinimo parametru

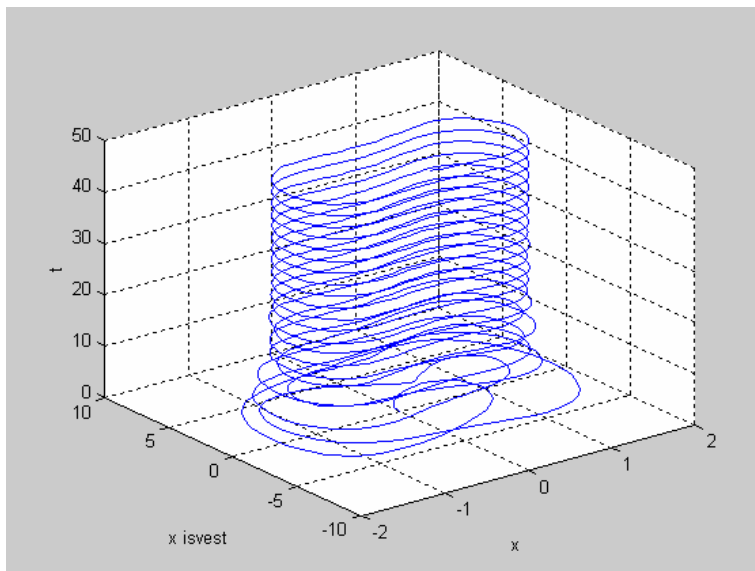
Spektrinė analizė atliekama jau anksčiau minėtam mechaniniam analitiniam programiniam paketui DIAdem pateikiant pradinis duomenis: funkcijos $x(t)$ reikšmių vektorių ir laiko vektorių t . Pradinių duomenų fragmentas pateiktas 2 priede 1 lentelėje.

III. Nagrinėkime jau Diufingo lygtį su išoriniu sužadinimu, t.y. pridėkime išorinį dažnį:

$$\ddot{x} + h\dot{x} + x + kx^3 = f_0 \cos \nu\tau \quad (2.3.6)$$

Kuo didesnis slopinimas ir išorinio sužadinimo dažnis, tuo greičiau sistema nusistovi. Jei ir tą, ir tą paimtume mažus, gautume chaotinius sprendinius. Žiūrėti 2 priede 5 paveikslėlį. Diufingo lygties atveju spektrinės charakteristikos atvaizduotos 2 priede 8 paveiksle.

Panagrinėkime sistemos svyravimus su tokiais parametrais: $k = 10$; $h = 0.3$; $f_0 = 7,5$; $\nu = 2,8$.



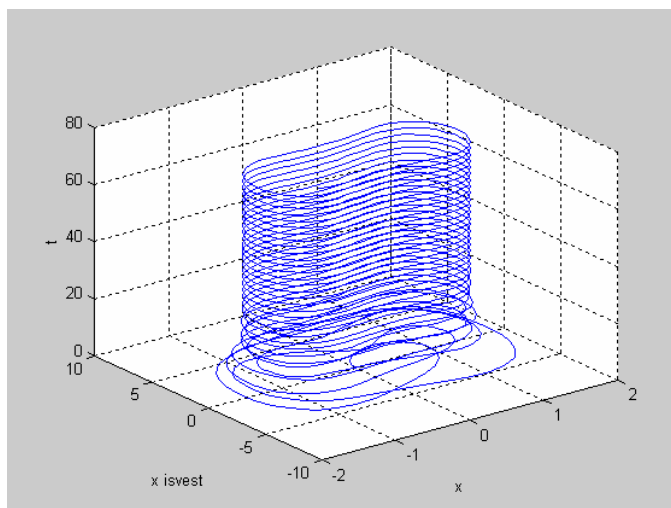
2.3.4 pav. Sistemos sprendiniai Diufingo lygties su išoriniu sužadinimu atveju, kai sistema nusistovi

IV. Jei pridėtume autovirpesius sužadinančią jėgą, bet nuimtume išorinį sužadinimą, pastebėtume, jog nagrinėjame Van der Polio lygtį:

$$\ddot{x} + h\dot{x} + x - q_1\dot{x} + q_3\dot{x}^3 = 0 \quad (2.3.7)$$

Šiuo atveju svyravimai negalimi, kai pradinės sąlygos yra $(0,0)$. Jei imtume labai didelį slopinimo koeficientą, svyravimai taip pat pradėtų slopti. Kai parametrai $q_1 = 0,25$; $q_3 = 3$; $h = 0,25$, sistemos sprendiniai pavaizduoti priede 6 paveiksle

Tačiau, jei slopinimas mažas, virpesiai nusistovi ir tampa stabilūs.



2.3.5 pav. Sistemos sprendiniai Van der Polio lygties be išorinio sužadinimo atveju, kai sistema nusistovi

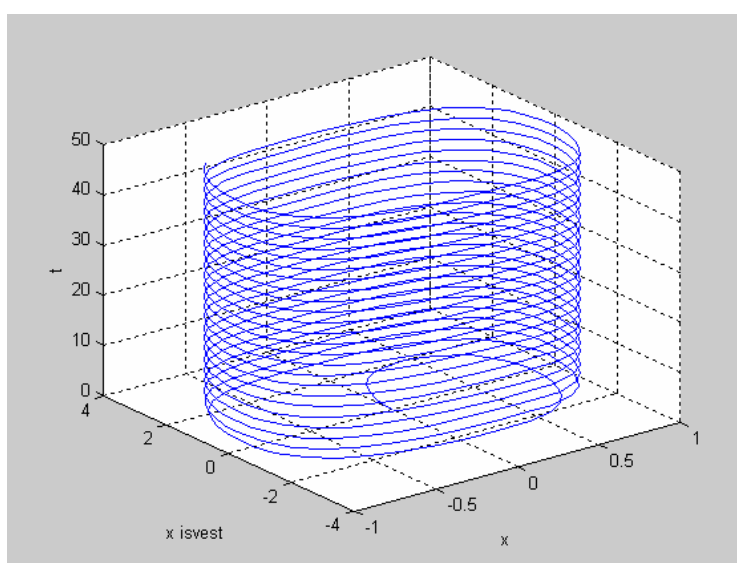
$$\ddot{x} + h\dot{x} + x - q_1\dot{x} + q_3\dot{x}^3 = f_0 \cos \nu \tau \quad (2.3.8)$$

Pridedam išorinę jėgą, kuri lygtį paverčia Van der Polio lygtimi su išoriniu sužadinimu. Šiuo atveju jau galime pradines sąlygas paimti ir $(0;0)$. Kuo didesnę w paimsime, tuo mažesnę periodą turėsime. Tai du atvirkščiai proporcingi dydžiai. Slopinimas šiuo atveju didelės įtakos neturi – sistema visais atvejais bus stabili ir virpesiai nusistovės. Parametrų keitimas sistemos elgsenai turi mažai įtakos – šiuo atveju visada stebėsime nusistovėjusius režimus – žr. 2 priedą 7 paveikslėlį :

V. Bendras atvejis.

$$\ddot{x} + h\dot{x} + kx^3 - q_1\dot{x} + q_3\dot{x}^3 = f_0 \cos v\tau \quad (2.3.8)$$

Su parametrais $q_1 = 0,25$; $q_3 = 3$; $k = 10$; $h = 0.1$; $f_0 = 10$; $v = 3$ turime:



2.3.6 pav. Sistemos sprendiniai bendru atveju, kai sistema nusistovi

Jei išorinis dažnis bus mažesnis, pastebėsime, kad sistema virpės nestabiliai. Gali atsirasti chaotinių sprendinių. Tačiau, kuo v didesnis, tuo sistema greičiau nusistovi. Galime pastebėti, jog labai daug priklauso nuo parametrų parinkimo. Jei prie vieno parametrų sistema virpa chaotiškai, tai prie kitų ji jau stabili. Spektrinės charakteristikos bendru atveju pavaizduotos 2 priede 9 paveiksle. Stabilumo tyrimas prie konkrečių parametrų jau buvo atliktas 2.2 skyrelyje.

2.4 ANALITINIS TYRIMAS

Čia galima išskirti du atvejus: kai sistema yra rezonanso zonoje ir kai ji yra toli nuo rezonanso. Svarbiausias atvejis teorijai ir praktikai yra, kai sistema yra prie rezonanso. Sprendimas atliekamas, remiantis [3] šaltinyje pateiktais metodais.

Šiuo atveju priimama, kad savasis dažnis nulinėje pusiausvyros aplinkoje yra beveik lygus išoriniam sužadinto dažniui, t.y.

$$p^2 = 1 - \varepsilon a, \quad (2.4.1)$$

kur ε – mažas parametras, o a – pastovus dydis, t.y.

$$|\varepsilon a| \ll 1 \quad (2.4.2)$$

Lygtis (1.1.5), atkreipiant dėmesį į (2.4.1) pertvarkoma:

$$x'' + x = \varepsilon F \quad (2.4.3)$$

$$F = ax - hx' - kx^3 + q_1(1 - q_3 x'^2)x' + f_0 \cos \tau \quad \text{kur} \quad (2.4.4)$$

ε prieš F nurodo, kad lygties dešinė pusė, palyginus su kaire, yra mažas dydis, t.y. periodinis sprendinys mažai nutolsta nuo harmoninio sprendinio. Lygties (2.4.3) periodinis sprendinys ieškomas laipsninės eilutės pagal ε pagalba

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 \dots, \quad (2.4.5)$$

kur $x_i (\varepsilon = 0, 1, 2, \dots)$ periodinės funkcijos nuo τ .

Iš lygčių (2.4.3, 2.4.5), prilyginus koeficientus prie vienodų ε laipsnių nuliui, gaunamos diferencialinės lygtys x_0, x_1, \dots nustatymui, t.y.

$$x_0'' + x_0 = 0 \quad (2.4.6)$$

$$x_1'' + x_1 = F_0 \quad (2.4.7)$$

$$\dots \dots \dots \quad \text{kur} \quad F_0 = F|_{x=x_0} \quad (2.4.8)$$

$$x_0 = M_0 \cos \tau + N_0 \sin \tau, \quad \text{Iš lygties (2.4.6) seka toks periodinis sprendinys} \quad (2.4.9)$$

$$\int_0^{2\pi} F_0 \cos \tau d\tau = 0 \quad \text{kur } M_0 \text{ ir } N_0 \text{ nustatomos iš } x_1 \text{ sprendinio periodiškumo sąlygos, t.y.} \quad (2.4.10)$$

$$\int_0^{2\pi} F_0 \sin \tau d\tau = 0$$

(2.4.11)

kuri rodo, kad lygties (2.4.7) dešinėje pusėje negali egzistuoti pirmos eilės harmonikos. Priešingu atveju sprendinys x_l būtų neapibrėžtas.

Jeigu paimtume (2.4.4, 2.4.7, 2.4.9), tai lygtys (2.4.10, 2.4.11) įgautų tokius pavidalus:

$$\left[a - 0,75k(M_0^2 + N_0^2) \right] M_0 + \left[(q_1 - h) - 0,75q_1q_3(M_0^2 + N_0^2) \right] N_0 + f_0 = 0, \quad (2.4.12)$$

$$-\left[(q_1 - h) - 0,75q_1q_3(M_0^2 + N_0^2) \right] M_0 + \left[a - 0,75c(M_0^2 + N_0^2) \right] N_0 = 0 \quad (2.4.13)$$

Įvedami sekantys pakeitimai:

$$\begin{aligned} M_0 &= \rho \cos \varphi \\ N_0 &= \rho \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

$$\rho = \sqrt{M_0^2 + N_0^2}$$

kur ρ - pirmos harmonikos amplitudė, o φ – fazių skirtumas.

Iš lygčių (2.4.12, 2.4.13), kai paimame (2.4.14), gauname:

$$\begin{aligned} K \cos \varphi + L \sin \varphi &= \frac{f_0}{\rho}, \\ -L \cos \varphi + K \sin \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

kur

$$\begin{aligned} K &= a - 0,75k\rho^2 \\ L &= q_1 - h - 0,75q_1q_3\rho^2 \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Iš lygčių (2.4.15, 2.4.16) gauname:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{q_1 - h - 0,75q_1q_3\rho^2}{a - 0,75k\rho^2} \\ K^2 + L^2 &= \left(\frac{f_0}{\rho} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

arba, paėmus (2.4.16), gaunama tokia lygtis ρ^2 nustatymui:

$$P_1\rho^6 + P_2\rho^4 + P_3\rho^2 = f_0^2 \quad (2.4.18)$$

kur

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (0,75)^2(k^2 + q_1^2 q_3^2), \\
 P_2 &= -1,5[ak + (q_1 - h)q_1 q_3], \\
 P_3 &= a^2 + (q_1 - h)^2
 \end{aligned}
 \tag{2.4.19}$$

Pagal lygtis (2.4.17, 2.4.18) galima sudaryti atitinkamus grafikus:

$$\begin{aligned}
 \rho^2 &= \rho^2(a) \\
 \varphi &= \varphi(a)
 \end{aligned}
 \tag{2.4.20}$$

Jeigu nagrinėtume Duffing'o lygtį su išoriniu sužadinimu, t.y. kai q_1 ir q_3 lygūs nuliui, ir paimtume tokias kintamųjų reikšmes: $h = 0,01$; $c = 5$; $f = 10$, o a reikšmių intervalą - $[-50;60]$, gautume sprendinių bei fazių skirtumų reikšmes, kurių grafinės realizacijos yra priede 11 ir 12 paveiksluose.

2.5 STABILUMO NUSTATYMAS

Lygtis (2.4.9) su atitinkamomis sekančiomis lygtimis nustato apytikslį periodinį sprendinį. Kyla klausimas, kurie iš rastų sprendinių yra stabilūs. Tam tikslui sudaroma lygčiai (2.4.6) variacinė diferencialinė lygtis. Priimama:

$$x = x_0 + \delta x \tag{2.5.1}$$

kur x – tikslus sprendinys, x_0 – apytikslis sprendinys,

δx - variacija (nukrypimas nuo tikslo sprendinio).

Iš lygties (2.4.6), paėmus duomenis (2.5.1) bei skleidžiant laipsnine eilute pagal variaciją, gaunama

$$x_0'' + \delta x'' + x_0 + \delta x = \varepsilon F(x_0 + \delta x, x_0' + \delta x'),$$

arba

$$\delta x'' + \delta x = \varepsilon \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ x'=x_0}} \delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right)_{\substack{x=x_0 \\ x'=x_0}} \delta x' + \dots \right]
 \tag{2.5.2}$$

Stabilumui tirti užtenka apsiriboti pirmu priartėjimu, t.y.

$$\delta x'' + q \delta x' + r \delta x = 0, \tag{2.5.3}$$

kur

$$\begin{aligned} q &= -\varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right)_{\substack{x=x_0 \\ x'=x'}}, \\ r &= 1 - \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ x'=x_0}}. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Iš lygties (2.4.4) gaunama

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right)_{\substack{x=x_0 \\ x'=x_0}} = -h + q_1 - 3q_1q_3x_0'^2, \quad (2.5.5)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ x'=x_0}} = a - 3kx_0^2.$$

Iš lygčių (2.5.3, 2.5.4, 2.5.5) matyti, kad variacinės lygties koeficientai q ir r yra periodiniai koeficientai nuo τ . Tačiau galima suvidurkinti pagal τ ir gauti tokias pastovias q ir r reikšmes.

$$\begin{aligned} q &= \varepsilon(h - q_1 + 1,5q_1q_3\rho^2) \\ r &= 1 - \varepsilon(a - 1,5k\rho^2) \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Gaunamos tokios stabilumo sąlygos:

$$h - q_1 - 1,5q_1q_3\rho^2 < 0, \quad (2.5.7)$$

$$\left(h - q_1 + 1,5q_1q_3\rho^2 \right)^2 - 4 + 4a - 6k\rho^2 > 0 \quad (2.5.8)$$

3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Skaitmeninis (1.1.5) lygties tyrimas atliekamas MATLAB aplinkoje, naudojant programą *lygtis.m*. Pati programa papildoma funkcijos failu *manof.m*.

Programų tekstus galima pasižiūrėti priede. Visi parametrai (h, q_1, q_3, k, f_0, w) pasirenkami funkcijos faile *manof.m*, atsižvelgiant į tai, kokio tipo lygtį nagrinėjame. Pasirenkant parametrus, reiktų atkreipti dėmesį į rekomendacijas, kokias parametru reikšmes įvesti. Jei į tai neatsižvelgsim, išeisim už nagrinėjamos sistemos ribų – praktiniame eksperimente užfiksuoti būtent šie rekomenduojami parametrai.

```

1 function xdot = manof(t, x);
2 %q1=input('iveskite koeficienta q1(rekomenduojama apie 0.25): ');
3 q1=0.25;
4 %q3=input('iveskite koeficienta q3 is intervalo (1;5): ');
5 q3=2;
6 %k=input('iveskite koeficienta k(rekomenduojama apie 10): ');
7 k=1;
8 %h=input('iveskite koeficienta h(rekomenduojama apie 0.2): ');
9 h=0.01;
10 %f=input('iveskite koeficienta f-priverstines jegos stipruma: ');
11 f=5;
12 %w=input('iveskite dazni w is intervalo(0.1;3): ');
13 w=0.1;
14 F=f*cos(w*(t));
15 xdot=[x(2);F-h*x(2)-x(1)-k*x(1)^3+q1*x(2)-q1*q3*x(2)^3];
16

```

3.1 pav. Funkcijos *manof.m* programinis langas

Kai jau pasirinktas lygties tipas, galima paleisti vykdyti programą *lygtis.m*, paspaudus mygtuką **RUN**. 3.2 paveiksle jis pažymėtas juoda rodykle.

```

C:\Documents and Settings\Egle\My Documents\matlab\lygtis.m
File Edit View Text Debug Breakpoints Web Window Help
[Icons] Stack: Base
1 - disp(' Nagrinejame diferencialine lygti: ');
2 - disp('x(2)+h*x(1)+p^2*x+k*x^3-q1(1-q3*x(1)^2)x(1)=f*cos(wt)');
3 - disp(' (skliausteliuose-tam tikros eiles isvestine) ');
4 - pr=input('iveskite intervalo pradzia: ');
5 - pb=input('iveskite intervalo pabaiga: ');
6 - intervalas = [pr pb];
7 - xsal=input('nurodykite pradine salyga x: ');
8 - ysal=input('nurodykite pradine salyga x isvest: ');
9 - pradsal = [xsal; ysal];
10 - [t,x] = ode45('manof',intervalas,pradsal);
11 - iks=x(:,1);
12 - laikas=t;
13 - isvest=x(:,2);
14 - figure(1);
15 - plot(t,iks);grid;
16 - xlabel('t'); ylabel('x(x isvest)');
17 - hold on;
18 - figure(2);
19 - plot(iks,isvest);
lygtis.m manof.m
Ready

```

3.2. pav. Programos *lygtis.m* langas

Paleidus vykdyti programą, MATLAB komandiniame lange, reikia pasirinkti intervalo, kuriame atliksim nagrinėjamos diferencialinės lygties skaitinį integravimą, pradinę ir galinę reikšmę. Taip pat reikia užsiduoti ir pradines sąlygas.

Nagrinejame diferencialine lygti:

$$x(2)+h*x(1)+x+k*x^3-q1(1-q3*x(1)^2)x(1)=f*cos(wt)$$

(skliausteliuose-tam tikros eiles isvestine)

iveskite intervalo pradzia: **0**

iveskite intervalo pabaiga: **100**

nurodykite pradine salyga x: **0**

nurodykite pradine salyga y: **1**

>>

Suvedus šiuos pradinius duomenis, rezultatus galėsime stebėti trijuose paveikslėliuose: dvimatėje ir trimatėje erdvėje bei fazinėje plokštumoje. Iš virpesių trajektorijų galima bus daryti išvadas apie režimo tipą, nusistovėjimą, daugiareikšmiškumą bei chaoso egzistavimą.

IŠVADOS

Darbe sudarytas savaime virpančios sistemos su sinchronizuojančiu išoriniu sužadiniu modelis bei rastos jo pagrindinės charakteristikos:

- egzistavimo sritys,
- spektrinės charakteristikos,
- energijų pasiskirstymas,
- nusistovėję režimai.

Detaliau nagrinėtas supaprastintas modelis – netiesinė sistema, aprašoma antros eilės paprastąja diferencialine lygtimi. Atlikti tyrimai parodė įvairių tipų nusistovėjusių režimų egzistavimų sritis kai kuriems atvejams. Išskirti ir detaliai išnagrinėti atskiri diferencialinės lygties atvejai. Tyrimai atlikti skaitiniais ir analitiniais būdais.

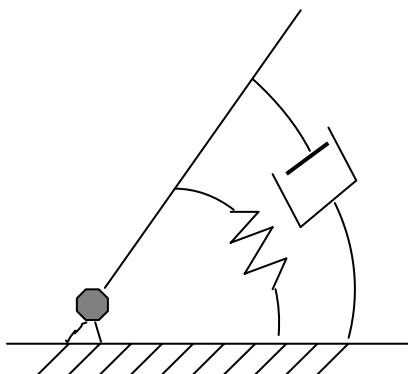
Tyrimų rezultatai leidžia siūlomą mechaninį modelį taikyti praktikoje.

LITERATŪRA

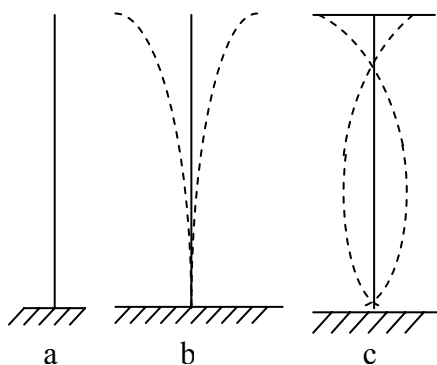
1. Penny J., Lindfield G. Numerical Methods Using MATLAB. Ellis Horwood, 1995.- 327 p.
2. Mačėnaitė L., Ragulskis M. ir kt. Taikomosios matematikos laboratoriniai darbai. K: Technologija, 2001.-80 p.
3. Rand R.H. Lecture Notes on Nonlinear Vibrations. Dept. Theoretical & Applied Mechanics, Cornell University, 2000.-76 p.
4. Plukas K. Skaitiniai metodai ir algoritmai. K.: Naujasis lankas, 2001.- 548 p.
5. Žiliukas P., Barauskas R. Mechaniniai virpesiai. K.:Technologija,1997.-309p.
6. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.-384p.
7. Неймарк Ю. И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебание. М.:Наука, 1987.- 424p.
8. Čiegis R. Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai. V.:Technika, 2003.- 448 p

1 PRIEDAS

Mechaninių sistemų modeliai.



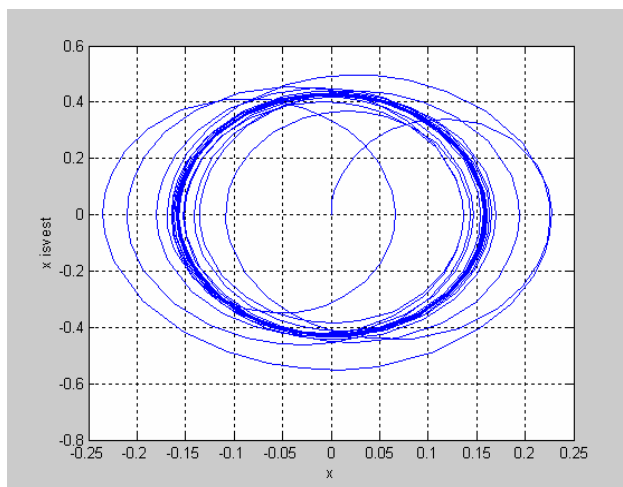
1 pav. Sistemos modelis sukimosi atveju



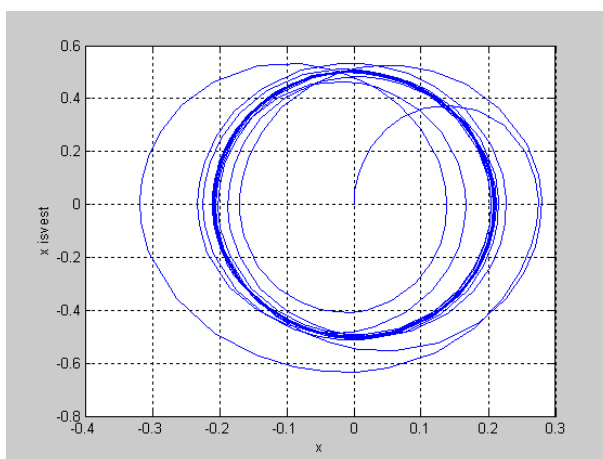
2 pav. Sistemos modelis: a) deformuojama plokštelė; b) virpesiai pagal pirmą formą; c) virpesiai pagal antrą formą

2 PRIEDAS

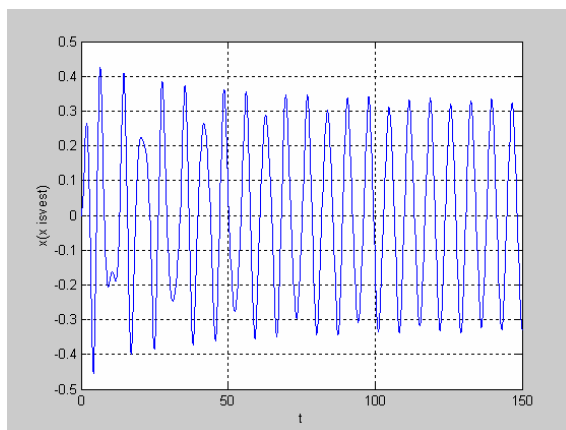
Gauti eksperimentų rezultatai.



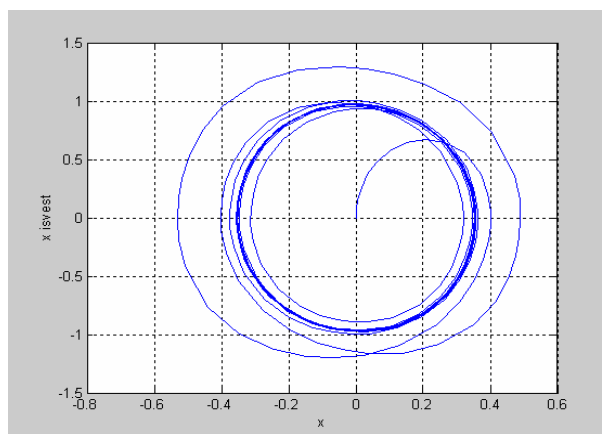
1 pav. Pereinamas režimas, kai $k = 0$, $q_1 = 2,1$, $v = 2$



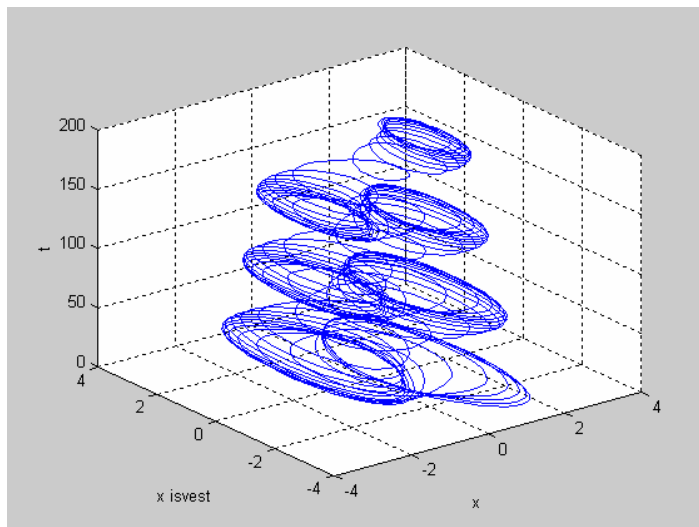
2 pav. Nusistovintis uždaras režimas, kai $k = 0$, $q_1 = 2,5$, $v = 3,8$



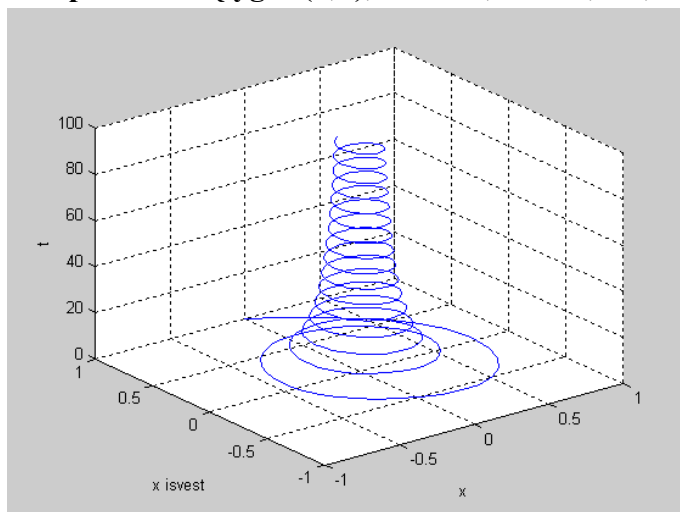
3 pav. Pereinamas režimas, kai $k = 10$, $q_1 = 0,9$, $f_0 = 0,3$



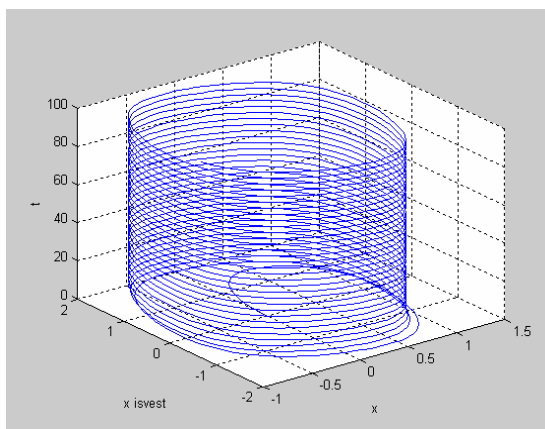
4 pav. Uždaras nusistovintis režimas, kai $k = 10$, $q_1 = 0,6$, $f_0 = 1,5$



5 pav. Sistemos sprendiniai Diufingo lygties su išoriniu sužadinimu atveju, kai vyksta chaotiniai procesai ir pradinės sąlygos (0;0), kai $k=1;h=0.01;f=5;v=0.1$;



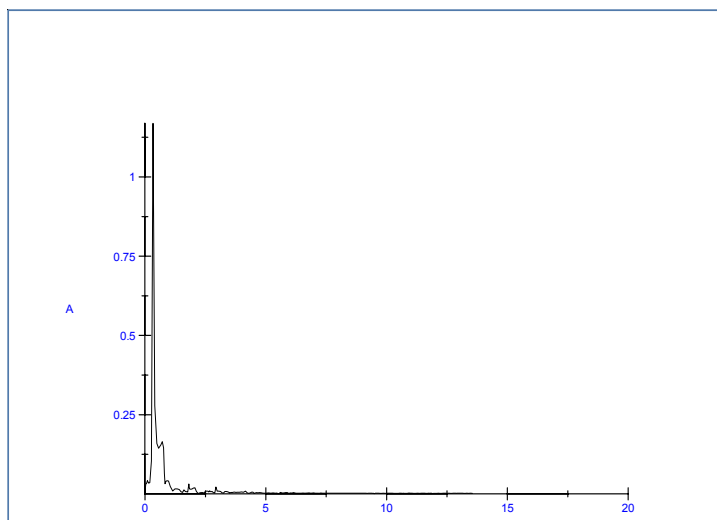
6 pav. Sistemos sprendiniai Van der Polio lygties be išorinio sužadinimo atveju, kai sistemos virpesiai slopsta ir $q_1 = 0,25; q_3 = 3; h = 0.25$



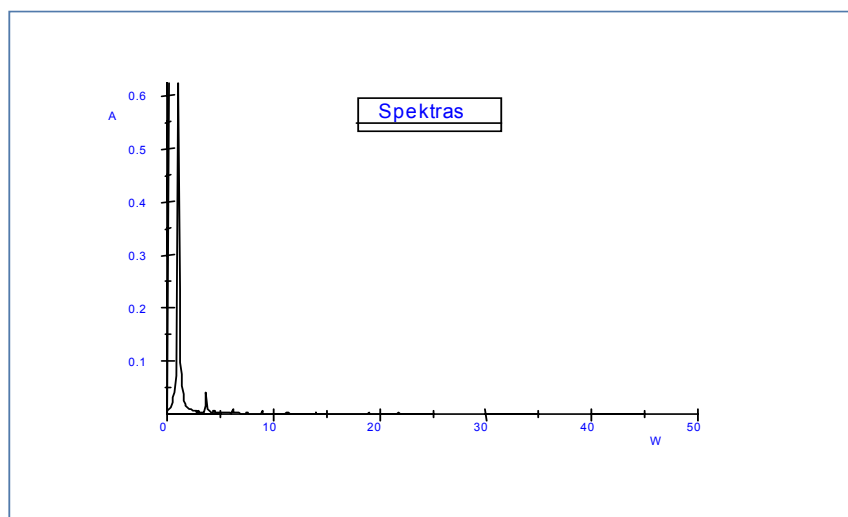
7 pav. Sistemos sprendiniai Van der Polio lygties su išoriniu sužadinimu atveju, kai sistemos virpesiai nusistovi ir $f_0 = 5, v = 2$

Pradiniai duomenys spektrinei analizei autovirpesių atveju

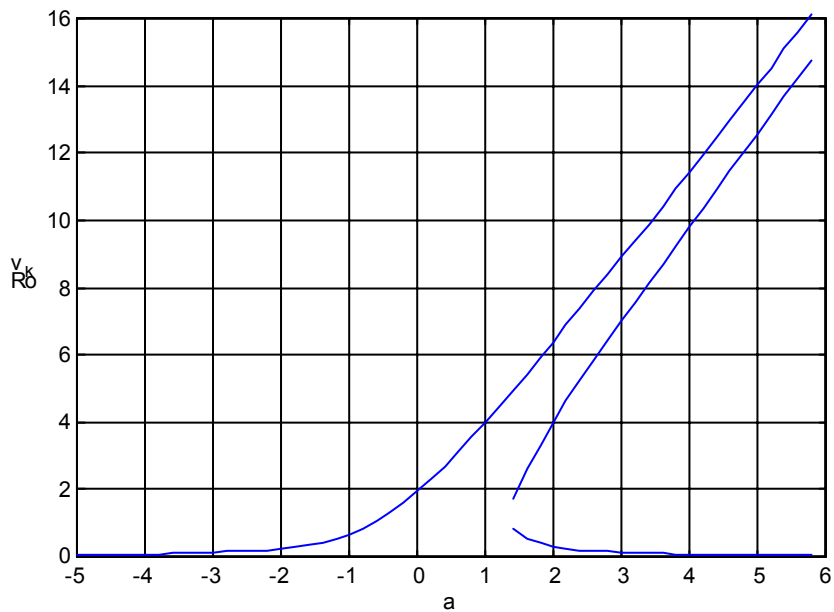
x(t)	t
0,0655	0,3712
0,1022	0,4721
0,1472	0,5805
0,1980	0,6962
0,2508	0,8191
0,2994	0,9489
0,3359	1,0863
0,3477	1,1708
0,3502	1,2313
0,3473	1,2918
0,3388	1,3523
0,3206	1,4265
0,2884	1,5132
0,2366	1,6154



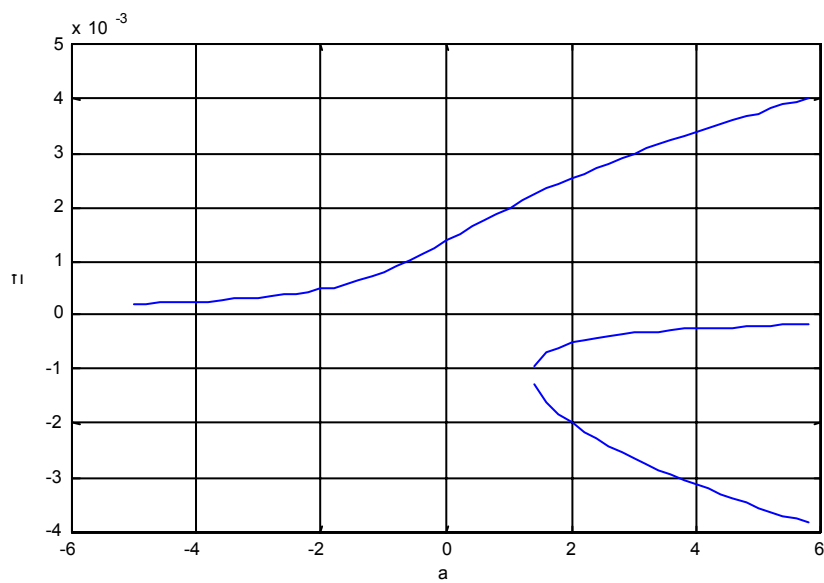
8 pav. Spektrinės charakteristikos Dufingo lygties atveju, kai $k = 10$; $h = 0,5$; $f_0 = 5$; $v = 2,7$



9 pav. Spektrinės charakteristikos bendru atveju, kai $q_1 = 0,25$; $q_3 = 3$; $k = 10$; $h = 0,2$; $f_0 = 1$; $v = 1,9$;



10 pav. Dufingo lygties su išoriniu sužadiniu sprendinių realizacija



11 pav. Dufingo lygties su išoriniu sužadiniu fazių skirtumų realizacija

3 PRIEDAS

Paprogramės *manof.m* tekstas.

```
function xdot = manof(t, x);
%q1=input('pasirinkite koeficienta q1(rekomenduojama apie 0.25): ');
q1=0.25;
%q3=input('pasirinkite koeficienta q3 is intervalo (1;5): ');
q3=3;
%k=input('pasirinkite koeficienta k(rekomenduojama apie 10): ');
k=10;
%h=input('pasirinkite koeficienta h(rekomenduojama apie 0.2): ');
h=0.2;
%f=input('pasirinkite koeficienta f-priverstines jegos stipruma: ');
f=5;
%w=input('pasirinkite dazni w is intervalo(0.1;3): ');
w=0.1;
F=f*cos(w*(t));
xdot=[x(2);F-h*x(2)-x(1)-k*x(1)^3+q1*x(2)-q1*q3*x(2)^3];
```

Programos *lygtis.m* tekstas:

```
disp(' Nagrinejame diferencialine lygti: ');
disp('x(2)+h*x(1)+p^2*x+k*x^3-q1(1-q3*x(1)^2)x(1)=f*cos(wt)');
disp(' (skliausteliuose-tam tikros eiles isvestine) ');
pr=input('iveskite intervalo pradzia: ');
pb=input('iveskite intervalo pabaiga: ');
intervalas = [pr pb];
xsal=input('nurodykite pradine salyga x: ');
ysal=input('nurodykite pradine salyga y: ');
pradsal = [xsal; ysal];
[t,x] = ode45('manof,intervalas,pradsal);
iks=x(:,1);
laikas=t;
isvest=x(:,2);
figure(1);
plot(t,iks,t,isvest);grid;
xlabel('t'); ylabel('x(x isvest)');
hold off;
figure(2);
plot(iks,isvest);
xlabel('x'); ylabel('x isvest');
hold off;
figure(3);
plot3(iks,isvest,t);grid;
xlabel('x'); ylabel('x isvest');zlabel('t');
hold off;
```