KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

Irma Mikalauskaitė

AKCIJŲ KAINŲ DINAMIKOS MODELIŲ TYRIMAS

Magistro darbas

Vadovas
doc. dr. E. Valakevičius

KAUNAS, 2006

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. habil.dr. V.Pekarskas
2006 06 06

AKCIJŲ KAINŲ DINAMIKOS MODELIŲ TYRIMAS

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Kalbos konsultantas
( ) J. Džežulskienė
2006 05 30

Vadovas
( ) doc. dr. E. Valakevičius
2006 06 06

Recenzentas
( ) dr. D. Makackas
2006 06 03

Atliko
FMMM-4 gr. stud.
( ) I. Mikalauskaitė
2006 06 06

KAUNAS, 2006

KVALIFIKCINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, profesorius (MII)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

Mikalauskaite I. Analysis of dinamic models of stock prices: Master's work in applied mathematics / supervisor dr. doc. E. Valakevicius; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2006. – 77 p.

SUMMARY

Stock prices are dynamic and changing frequently whenever the financial markets are opened. Many people aspire to know where prices are likely to be at future times. One of the basic problems, connected with stock valuation is to create an appropriate model of stock prices dynamics. This paper deals with the stock valuation models, such as binomial, additive, multiplicative, Brownian motion and etc. These models appeals to hypothesis, declaring that returns of stock follows by normal distribution and stock prices by lognormal one. The aim of this work is to test these hypothesis.

The research of this paper discloses the basic tendency, announcing that stock is not applicable for a real adaptability of methods in Lithuanian companies because the returns of stock do not follow by the normal distribution. Disputed situation is opposite in companies of the USA.

The returns of stocks are calculated by the following ways. They are numbered in the area of MS Excel. In order to review the conditions of normality, the SAS software was chosen. Finally, Delphi 10 programming language was selected for realization of the binomial tree.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Viena svarbiausių problemų įkainojant vertybinius popierius yra sukurti tinkamą akcijų kainų dinamikos modelį. Dažniausiai tariama, kad akcijų kainos kinta pagal geometrinį Brauno judesio procesą. Ši modelis remiasi prielaida, kad akcijų pelno normos yra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį, o akcijų kainos pagal lognormalųjį skirstinį. Šiame darbe aptariami akcijų įkainojimo modeliai: binominis, adityvusis, multiplikatyvusis, Brauno judesio ir kt. Prielaida, kad akcijų pelno normos būtų pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį turi būti išpildoma visų modelių atveju, todėl yra keliami tokie tikslai:

- Patikrinti dinamikos modelių prielaidą – ar Lietuvos įmonių akcijų pelno normos yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį;
- Patikrinti ar užsienio kompanijų pelno normos pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį;
- Palyginti gautus rezultatus Lietuvos įmonių ir užsienio kompanijų akcijoms.

Kadangi binominis modelis yra dažniausiai taikomas praktikoje, tai dar vienas šio darbo tikslas yra:

- Sumodeliuoti akcijų kainas pagal binominį medį, kai jų pelno normos yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį.

Atlikus tyrimą, pastebėta tendencija – Lietuvos įmonių akcijos nėra tinkamos realiam metodų pritaikymui, nes jų pelnos normos nėra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį; kitokia situacija yra su JAV kompanijomis.

Binominis modelis tinkamai realizuojamas, kai laiko intervalų skaičius neviršija 20, o didinant šių intervalų ilgį pastebima tendencija, jog tikimybės, kad po tam tikro laiko intervalų skaičiaus akcijos kaina pakils – didėja, o kad nukris – mažėja.

Pelno normos skaičiuojamos dviem būdais Microsoft Excel aplinkoje, normalumo sąlygų tikrinimui pasirinkta SAS programinė įranga, o binominio medžio realizacijai – Delphi 10 programavimo kalba.

Dalis darbo rezultatų buvo skelbta konferencijoje „Matematika ir matematikos taikymas – 2006" bei studentų konferencijoje „Taikomoji matematika".

1 BENDROJI DALIS

1.1 AKCIJŲ RINKOS DINAMIKOS ISTORIJA

Louis'as Bachelier'is savo daktaro disertacijoje, Th'eorie de la Sp'eculation, 1900m., įrodė, jog akcijų kainų pokyčiai yra atsitiktiniai. Jis teigė, kad pokyčiai yra taip vadinamas Brauno judesys, t.y. tam tikruose laiko intervaluose jie yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį.

Svarbus Bachelier'io modelio trūkumas, kurį jis pats pripažino, – kainos gali būti neigiamos. Tačiau realiame pasaulyje akcijų kainos tokios būti negali. Šis trūkumas gali būti lengvai ištaisomas: galime tarti, kad akcijų kainų logaritmai pasiskirstę pagal Brauno judesį. Tuomet kainos yra pasiskirstę pagal geometrinį Brauno judesį.

Praėjus penkeriems metams po Bachelier'io disertacijos publikacijos, kuri buvo susijusi su akcijų kainų judesiais, fizikai Albert'as Einstein'as (1879-1955) ir Marian'as von Smoluchowiski's (1872-1917) pasiūlė tą patį dalelių, judančių skystyje, modelį. [12]

Kadangi eksperimentinis dalelių judesio tyrimas buvo inicijuotas Robert'o Brown'o 1828m., o Einstein'o ir Smoluchowiski'o prognozės buvo greitai patvirtintos eksperimentiškai, stochastinis procesas, kurį išstudijavo Bachelier'is, Einstein'as ir Smoluchowiski's tapo žinomas kaip Brauno judesys. Brauno judesio procesas dar yra vadinamas Vinerio procesu.

Anglų ir amerikiečių statistikai ir ekonomistai, kurie empiriškai ir teoriškai pradėjo nagrinėti akcijų kainas 20a. viduryje, atrodo tiesioginį Vinerio proceso ryšį. Svarbus įnašas buvo padarytas 1959m. amerikiečių astrofiziko M. F. Maury Osborne'o, kuris pirmasis publikavo detalią hipotezių, kad akcijų kainos yra geometrinis Brauno judesys, analizę. Šis modelis buvo pavadintas Osborne'o lognormaliuoju modeliu, nes įrodo, jog akcijų kainų logaritmai yra pasiskirstę pagal Brauno judesį. [12]

Osborne'o lognormalusis kainų modelis yra pirmasis stochastinis akcijų įkainojimo modelis, atitinkantis apribojimą, kad kainos nėra neigiamos. Čia lygties

$$x = \frac{\ln p(t)}{p(0)} \tag{1.1}$$

sprendinys yra pasiskirstęs pagal Gauso skirstinį. Lognormalusis įkainojimo modelis buvo naudojamas Fischer'io Black'o ir Myron'o Scholes'o dar 15 metų po Osborne'o atradimo akcijų įkainojimo modelių konstravimui. Tačiau naudojant šį modelį, akcijų kainos nebuvo tiksliai nustatomos, nes dažnai pasikartojo dideli x sprendiniai. Tokių sprendinių priežastis yra Gauso skirstinys.

Benoit'as Mandelbrot'as teigė, kad finansų rinkoje gali būti taikomi Levy skirstiniai. Tačiau pastebėta, jog stebimų dydžių empiriniai skirstiniai turi „sunkias uodegas", todėl Levy skirstinys neturi įtakos. Apribotoms pelno normoms empiriniu skirstiniu laikomas eksponentinis skirstinys, be to, skirstinys nėra aproksimuojamas Gauso ar Levy skirstiniu.

1.2 DINAMIKOS MODELIŲ SAVYBIŲ APŽVALGA

Vienas iš pagrindinių finansų inžinieriaus profesijos klausimų yra kaip geriausiai sumodeliuoti kainų dinamiką finansų rinkose. Turėdamas kainų dinamikos modelį, finansų inžinierius gali:

- Apskaičiuoti akcijų kainas;
- Įvertinti rizikos kiekį;
- Peržvelgiant didelį pozicijų kiekį, įvertinti rizikos laipsnius.

Kiekvienai aktyvo kainai įvertinti turi būti apibrėžtas difuzinis procesas – tai yra, turi būti stochastinis integralas arba stochastinė diferencialinė lygtis, kur neapibrėžtumas yra įvertinamas Brauno judesiu. Akcijoms geriausia prielaida yra geometrinis Brauno judesys. Akcijų pelno normos yra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį, o akcijų kainos pagal lognormalųjį skirstinį.

Brauno judesys yra plačiai naudojamas finansinio turto kainų apibūdinimui. Naudojant Brauno judesį, akcijų ir kitų vertybinių popierių kainos yra išreiškiamos per normaliojo skirstinio funkcijas, tuomet kainos gali būti lengvai apskaičiuojamos.

Dažniausiai akcijų kainos realiame pasaulyje nėra difuziniai procesai. Šiuo metu yra daug literatūros akcijų kainų modeliavimui. Šis atradimas atskleidė daug difuzinių metodų trūkumų.

„Sunkių uodegų", didelių šuolių, ne Gauso jungčių ir parametrų nestabilumo savybių, kurias trumpai aptarsime toliau, sujungimas daro modelį sunkiai išsprendžiamu. Tačiau, daugelis iš jų gali būti sukuriamos dirbtinai.

1.2.1 „SUNKIOS UODEGOS"

Yra žinoma, kad vertybinių popierių pelno normų skirstinys yra skirstinys su dideliu ekstremumu, t.y. linkęs rodyti „sunkias uodegas", susijusias su normaliuoju skirstiniu. „Sunkios uodegos" yra ypač aiškiai išreikštos akcijų pelno normų skirstiniuose per trumpą laiką.

Viena alternatyva, kuri duoda „sunkias uodegas", yra difuziniai stochastinio kintamumo šeimos modeliai, tokie kaip Heston'o modeliai. Juose, momentinis difuzijos koeficientas akcijų procesuose savaime yra difuzinis procesas. Bet šie modeliai taip pat yra linkę nustatyti per žemą kainą trumpalaikėms akcijoms, nes skirstiniai yra artimi normaliajam. Norint sumodeliuoti aukšto laipsnio „sunkias uodegas” per trumpą laikotarpį yra būtini kai kurie šuolių tipų modeliai.

1.2.2 DIDELI KAINŲ ŠUOLIAI

Akcijų kainų šuoliai yra „sunkių uodegų” priežastis pelno normų skirstiniuose. Be to, šuoliai turi ir kitą svarbią įtaką rizikingame valdyme. Šiame fiktyviame pasaulyje rizikuojantis valdytojas gali laikytis „sustojimo nuostolių” strategijos. Pavyzdžiui, jeigu jūs nusipirkote akciją už 100, jūs galite garantuoti, kad nuostoliai šioje pozicijoje niekada neviršys 10 procentų parduodant (realizuojant) akciją momentu, kai pasiekiama 90.

Praktikoje, dėl didelių kainų šuolių gali būti neįmanoma realizuoti dinaminio atkartojimo strategijos arba sustojimo – nuostolių strategijos. Kaina rinkos uždarymo metu gali būti arčiau 90 vieną dieną, o atidarymo kaina nesiekia 90 kitą dieną, be jokios galimybės parduoti, kai kaina krenta. Arba, kaina gali nukristi, kol rinka yra atidaryta.

1.2.3 NE – NORMALIOSIOS JUNGTYS

Rizikingo valdymo esmė yra kelių rizikos šaltinių surinkimas; tai reikalauja daugialypių struktūrų mišriojo skirstinio. Priklausomybė tarp dviejų kintamųjų gali būti apibūdinama jungtine funkcija – t.y. funkcija, jungianti skirstinį su ribiniu skirstiniu. Kadangi gai būti daug skirtingų kintamųjų kombinacijų – yra sunku daryti apibendrinimus apie mišriuosius skirstinius.

1.2.4 PARAMETRŲ NESTABILUMAS

Keičiantis finansų rinkos sąlygoms, finansų inžinierius turi atkreipti dėmesį į esminį klausimą: „kaip toli į praeitį žiūrėti”, kai skaičiuojamas kintamumas, koreliacijos ir kiti parametrai laiko eilučių modeliuose.

Dažniausiai dėl mažo duomenų kiekio yra negalima tiksliai įvertinti parametrų. Esant dideliam duomenų kiekiui, metodai yra neapibrėžti, nes parametrai nėra stabilūs laiko momentais.

Jeigu būtų vienas teisingas ir nekintamas pelno normų generavimo procesas, ir jei žinotume jo formulavimą, galėtume gauti tikslesnius parametrų įvertinimus, naudodami kuo daugiau duomenų. Iš kitos pusės, gali būti neįmanoma patikimai įvertinti parametrų, ir tik naujausi duomenys duos daugiausiai informacijos.

Apibendrinant galima teigti, jog nepaisant to, koks specifinis metodas yra parenkamas, parametrai, apibūdinantys akcijų pelno normų dinamiką, yra sunkiai įvertinami ir jie yra nestabilūs laike. Todėl yra sunku nustatyti, kuris iš daugelio metodų yra labiausiai tinkamas akcijų įkainojimui. Be to, nėra sutarimo, kuris metodas tiksliausias ar apie tai, kiek duomenų turime naudoti, norėdami įvertinti parametrus.

1.3 AKCIJŲ KAINŲ ELGSENA

Bet koks kintamasis, kurio reikšmė nepastoviai kinta laike yra vadinamas *stochastiniu procesu.* Stochastiniai procesai gali būti klasifikuojami į diskretaus laiko ar tolydaus laiko procesus. *Diskretaus laiko stochastinis procesas* yra toks, kai kintamojo reikšmė gali kisti tik pastoviais fiksuotais laiko momentais, o *tolydaus laiko stochastiniai procesai* yra tokie, kur pokyčiai gali atsirasti bet kuriuo laiko momentu. Stochastiniai procesai taip pat gali būti klasifikuojami į tolydaus kintamojo ir diskretaus kintamojo procesus. *Tolydaus kintamojo procesuose* pagrindinis kintamasis gali įgyti bet kurią reikšmę tam tikrame intervale, o *diskretaus kintamojo procesuose* yra galima tik tam tikra diskreti reikšmė. [3]

Aptarsime tolydaus kintamojo ir tolydaus laiko procesus, taikomus akcijų kainoms. Tačiau turėtų būti aišku, kad praktikoje akcijų kainų nelaikome tolydaus laiko ar tolydaus kintamojo procesais. Akcijų kainos yra apribotos diskrečiomis reikšmėmis ir pokyčiai gali būti nustatyti tik tada, kai birža yra atvira.

Akcijų kainų dinamika yra aprašoma Markovo procesais.

1.3.1 AKCIJŲ KAINŲ PROCESAI

1.3.1.1 VINERIO PROCESAS

Akcijų kainų elgesio modeliai yra dažnai išreiškiami nariais, žinomais kaip *Vinerio procesai.* Vinerio procesas yra atskiras Markovo procesų atvejis.

Kintamojo *z*, kuris pasiskirstęs pagal Vinerio procesą, elgsena gali būti suprantama, atsižvelgiant į reikšmių pokyčius mažuose laiko intervaluose. Apibrėšime:

- mažą laiko intervalą, kurio ilgis yra Δt;
- Δz – z pokyčius laiko momentu Δt.

Yra dvi pagrindinės Δz savybės, kurias turi tenkinti dydis *z*, kad būtų Vinerio procesas:

1. **Savybė.** Δz yra susijęs su Δt lygtimi:

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad \textbf{(1.2)}$$

kur ϵ yra pasiskirstęs pagal standartinį normalųjį skirstinį (su vidurkiu 0 ir dispersija 1). [3]

2. Savybė. Δz reikšmės tarp dviejų trumpų skirtingų laiko intervalų Δt yra nepriklausomos. [3]

Iš pirmosios savybės turime, kad Δz yra pasiskirstęs pagal normalųjį skirstinį su vidurkiu – 0, standartiniu nuokrypiu – $\sqrt{\Delta t}$ ir dispersija – Δt.

Iš antrosios savybės turime, jog z yra Markovo procesas.

Padidinsime z reikšmes per santykinai ilgą laiko periodą, T, pažymėsime taip: $z(T) - z(0)$, tai gali būti laikoma kaip z padidėjimų suma N mažuose laiko intervaluose, kurių ilgis yra Δt, kur

$$N = \frac{T}{\Delta t}.$$

Vadinasi,

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i \sqrt{\Delta t}, \quad \textbf{(1.3)}$$

kur ϵ_i yra pasiskirstę pagal standartinį normalųjį skirstinį. Iš antrosios savybės žinome, jog ϵ_i yra tarpusavyje nepriklausomi. Iš (1.3) lygties gauname, jog $z(T) - z(0)$ yra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį su vidurkiu – 0, dispersija – $N\Delta t = T$ ir standartiniu nuokrypiu $-\sqrt{T}$. [3]

Vadinasi, bet kuriuose laiko intervaluose, kurių ilgis yra T, kintamųjų reikšmės padidėjimas, kuris yra Vinerio procesas, yra pasiskirstęs pagal normalųjį skirstinį su vidurkiu – 0 ir standartiniu nuokrypiu – $\sqrt{T}$.

Paprastesniuose skaičiavimuose, yra dažnai tęsiama nuo mažų pokyčių iki ribos, kai maži pokyčiai tampa artimi nuliui. Vadinasi, $\Delta y / \Delta x$ riboje tampa dy / dx. Kai $\Delta t \to 0$, (1.2) lygtį galime užrašyti taip:

$$dz = \epsilon \sqrt{dt} \quad \textbf{(1.4)}$$

1.3.1.2 APIBENDRINTAS VINERIO PROCESAS

Pagrindinis Vinerio procesas turi vidurkį lygų nuliui ir dispersiją lygią vienetui. Vidurkio lygybė nuliui reiškia, jog ateityje laukiama z reikšmė yra lygi pradinei reikšmei. Dispersijos lygybė 1 reiškia, kad z pokyčių dispersija laiko intervale, kurio ilgis yra T, yra $1.0 \times T$. Apibendrintas Vinerio procesas kintamajam x gali būti apibrėžtas tokiu būdu:

$$dx = adt + bdz \tag{1.5}$$

kur a ir b yra konstantos. [3]

Dydis adt reiškia, kad kintamasis x turi vidurkį a per laiko vienetą. Be dydžio bdz lygtis atrodo taip:

$$\frac{dx}{dt} = a,$$

arba

$$x = x_0 + at,$$

kur x_0 yra x reikšmė pradiniu laiko momentu. [3]

Laiko intervale, kurio ilgis yra T, x padidėja dydžiu aT. Dydis bdz gali būti laikomas pridedant triukšmą ar x trajektorijos kintamumą. Triukšmo arba kintamumo dydis yra b, laikomas Vinerio procesu. Mažame laiko intervale Δt, x reikšmės pokyčiai Δx, iš (1.2) ir (1.5) gali būti užrašyti taip:

$$\Delta x = a\Delta t + b\,э\sqrt{\Delta t}, \tag{1.6}$$

kur $э$ yra pasiskirstęs pagal standartinį normalųjį skirstinį. [3]

Vadinasi, Δx taip pat yra pasiskirstęs pagal normalųjį skirstinį su vidurkiu – $a\Delta t$, standartiniu nuokrypiu – $b\sqrt{\Delta t}$ ir dispersija – $b^2\Delta t$.

Argumentai, panašūs gautiems, rodo, jog x pokyčiai bet kokiame laiko T intervale yra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį su vidurkiu – aT, standartiniu nuokrypiu – $b\sqrt{T}$ ir dispersija – b^2T.

Vadinasi, (1.5) lygtimi aprašytas apibendrintas Vinerio procesas turi vidurkį lygų a ir dispersiją – b^2.

1.3.1.3 ITO PROCESAS

Gali būti apibrėžiamas ir papildomas stochastinių procesų tipas, žinomas kaip Ito procesas. Tai yra apibendrintas Vinerio procesas, kur parametrai α ir β yra nuo pagrindinio kintamojo X_t ir laiko t priklausančios funkcijos.

1 apibrėžimas. Stochastinis procesas $\{X(t), t \geq 0\}$ vadinamas *Ito procesu*, jeigu jis yra aprašomas tokia diferencialine lygtimi:

$$dX_t = \alpha(t, X_t)dt + \beta(t, X_t)dB_t \tag{1.7}$$

1.4 AKCIJŲ KAINŲ MODELIAI

1.4.1 GEOMETRINIO BRAUNO JUDESIO MODELIS

Tariama, jog akcijų kaina yra apibendrintas Vinerio procesas, t.y. kad ji turi pastovų vidurkį ir pastovią dispersiją. Tačiau, šis modelis netinka pagrindinio akcijų kainų aspekto užfiksavimui. Tai yra, kad laukiama procentinė akcijos pelno norma yra nepriklausoma nuo akcijos kainos.

Jeigu S yra akcijos kaina, tuomet laukiamas S nuokrypio koeficientas yra μS. Vadinasi, mažame laiko intervale, Δt, laukiamas S padidėjimas yra $\mu S \Delta t$. Parametras μ yra laukiama akcijos pelno norma, išreikšta dešimtaine forma.

Jeigu akcijos kainos dispersija yra visada lygi 0, modelis reiškia, jog

$$dS = \mu S dt, \tag{1.8}$$

arba

$$\frac{dS}{S} = \mu dt. \tag{1.9}$$

Taigi

$$S = S_0 e^{\mu t}, \tag{1.10}$$

kur S_0 yra pradinė akcijos kaina. [3]

Praktikoje akcijų kainos atskleidžia kintamumą. Apibrėšime σ^2 kaip akcijų kainos pokyčių dispersiją. Tai reiškia, kad $\sigma^2 \Delta t$ yra akcijos kainos pokyčių dispersija laiko momentu Δt ir kad $\sigma^2 S^2 \Delta t$ yra dabartinės akcijos kainos, S, pokyčio dispersija laiko momentu Δt. Momentinė S dispersija yra $\sigma^2 S^2$.

Šie argumentai reiškia, jog S gali būti išreikšta Ito procesu, kuris turi momentinį vidurkį μS ir momentinę dispersiją $\sigma^2 S^2$.

Jei rinkos kainos pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį, tai gali būti naudojamas Brauno judesio procesas. Tai yra tolydus laike stochastinis procesas, kur ekstremumai atsiranda retai, atsižvelgiant į normaliojo skirstinio uodegų tikimybes.

2 apibrėžimas. Stochastinis procesas $\{X(t), t \geq 0\}$ vadinamas *Brauno procesu*, jeigu jis tenkina tris savybes:

1. X(0)=0;
2. Procesas $\{X(t), t \geq 0\}$ turi stacionarius ir nepriklausomus pokyčius;
3. Su visomis t reikšmėmis, atsitiktinis dydis $X(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$.

Šį procesą dar vadina *Vinerio procesu.*

3 apibrėžimas. Atsitiktinis procesas $\{X(t), t \geq 0\}$ vadinamas *Brauno procesu su trendo parametru* μ *ir dispersijos parametru* σ^2 , jeigu jis tenkina tris savybes:

1. X(0)=0;
2. Procesas $\{X(t), t \geq 0\}$ turi stacionarius ir nepriklausomus pokyčius;
3. Su visomis t reikšmėmis, atsitiktinis dydis $X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$.

Tuo atveju, kai $\mu = 0$ ir $\sigma^2 = 1$, Brauno judesys vadinamas standartiniu Brauno judesiu (arba standartiniu Vinerio procesu), žinomu kaip W_t.

Tolydusis Brauno judesio procesas yra užrašomas tokia stochastine diferencialine lygtimi akcijos pelno normai:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{1.11}$$

kur S_t – pradinė akcijos kaina;

μ – trendas;

σ – pastovus metinis kitimas (dispersijos parametras);

W_t – standartinis Vinerio procesas. [14]

(1.11) formule užrašytas modelis yra dažniausiai naudojamas akcijų kainų elgesio modelis.

4 apibrėžimas. Jeigu $\{Y(t), t \geq 0\}$ yra Brauno procesas su trendo parametru μ ir dispersijos parametru σ^2, tada procesas $X(t) = e^{Y(t)}$ yra vadinamas Geometriniu Brauno procesu.

Literatūroje nurodomas ir dar vienas akcijų kainų modelis, kuomet skaičiuojamas akcijų kainų logaritmas. Tada modelis yra aprašomas tokia diferencialine lygtimi:

$$d \ln S_t = \mu dt + \sigma dW_t \tag{1.12}$$

kur $\ln S_t$ – akcijos kainos logaritmas;

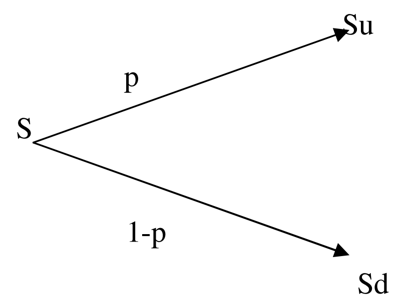
μ – trendas;

σ – pastovus metinis kitimas (dispersijos parametras);

W_t – standartinis Vinerio procesas.

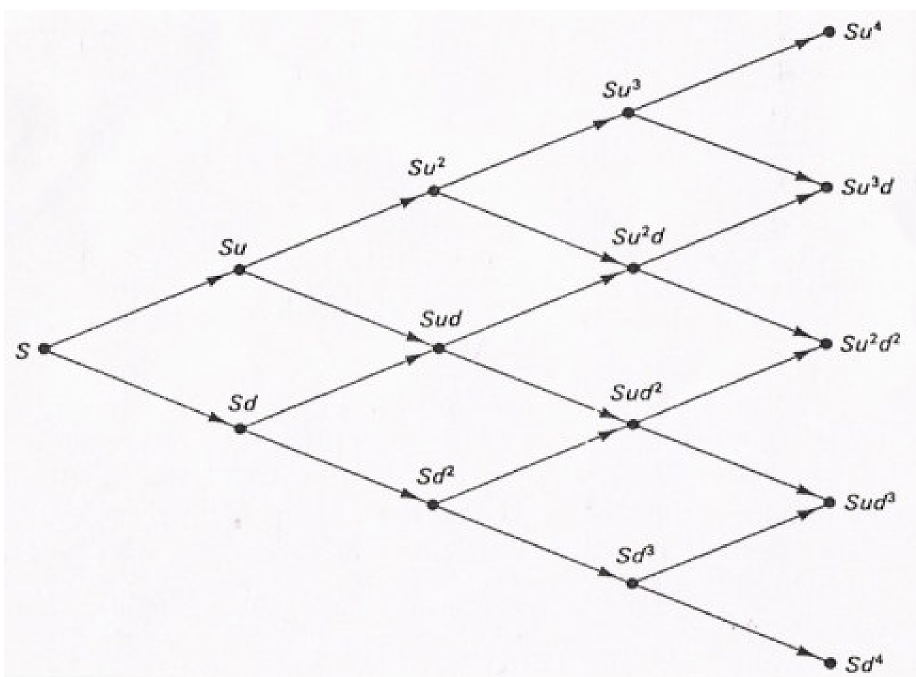
1.4.2 BINOMINIS MODELIS

Binominis modelis yra vienas iš paprasčiausių vertybinių popierių įkainojimo metodų. Tarsime, jog akcijos kaina prasideda nuo *S*. Taikant binominį modelį, akcijų kainos mažame laiko intervale kinta taip, kaip pavaizduota 1.1 pav.



1.1 pav. Binominis modelis

Ji pakyla iki *Su* su tikimybe *p* ir nukrenta iki *Sd* su tikimybe *1-p*.



1.2 pav. Akcijų kainų kitimai per keturis laiko periodus, naudojant binominį modelį

1.2 pav. matome, kaip taikant binominį modelį, po dviejų laiko intervalų turime tris alternatyvias akcijų kainas, po trijų intervalų – keturias ir t.t.

Kintamieji u, d ir p turi būti parinkti taip, kad mažame laiko intervale Δt, laukiama akcijos pelno norma būtų $\mu\Delta t$, o pelno normos dispersija – $\sigma^2\Delta t$. Taigi, parametrai apibrėžiami taip:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tag{1.13}$$

$$d = \frac{1}{u}, \tag{1.14}$$

$$p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}. \tag{1.15}$$

Galima įrodyti, jog riboje, kai $\Delta t \to 0$, binominio modelio akcijų kainų pokyčiai tampa geometriniu Brauno judesio modeliu. [3]

1.4.3 ADITYVUSIS MODELIS

Tegul S_n yra akcijos kaina n-tosios dienos pabaigoje. Tuomet galime užrašyti:

$$S_n = S_0 + X_1 + ... + X_n, \tag{1.16}$$

kur X_i yra akcijos kainos pokytis tarp *i-1*–osios ir *i*–tosios dienos, o S_0 – pradinė akcijos kaina. [8]

Sudarysime tikimybinį modelį. Tarsime, kad efektyvūs pokyčiai atsiranda iš nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių kintamųjų sekos $\{X_n : n \geq 1\}$, kurio kiekvieno vidurkis yra μ, o dispersija – σ^2. Stochastinis procesas $\{S_n : n \geq 0\}$ yra atsitiktinis klaidžiojimas su žingsniu X_n. Jeigu žingsniai yra Bernulio atsitiktiniai kintamieji, turime paprastąjį atsitiktinį klaidžiojimą. Tačiau šie žingsniai taip pat gali turėti bet kurį pasirinktą skirstinį.

Modelis reiškia, jog galime aproksimuoti *n*-tosios dienos akcijų kainas normaliuoju skirstiniu. Tuomet,

$$\begin{aligned} &P(S_n \leq x) \approx P(N(S_0 + n\mu, n\sigma^2) \leq x) = \\ &= P(N(0,1) \leq (x - S_0 - n\mu)/\sigma x) \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.4.4 MULTIPLIKATYVUSIS MODELIS

Daugeliui žmonių nepatinka adityvusis modelis, nes jie tiki, jog pokyčiai turėtų būti proporcingi kainai. Todėl yra įvedamas multiplikatyvusis akcijų kainų modelis.

Vietoj (1.16) turime:

$$S_n = S_0 \times X_1 \times ... \times X_n, \tag{1.18}$$

kur atsitiktiniai kintamieji yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę. [8]

Atsitiktinis kintamasis X_n turės skirtingus skirstinius, jei jis yra laikomas kaip multiplikatyvusis, o ne adityvusis dydis.

Išlogaritmavę šį modelį vėl galime gauti adityvųjį modelį:

$$\log(S_n) = \log(S_0) + \log(X_1) + ... + \log(X_n) . \quad \textbf{(1.19)}$$

Taigi,

$$\log(S_n) \approx N(\log(S_0) + n\mu, n\sigma^2) , \quad \textbf{(1.20)}$$

kur $\mu = E[\log(X_1)]$ ir $\sigma^2 = Var[\log(X_1)]$.

Šį rezultatą galime išreikšti per eksponentę, tuomet:

$$S_n \cong e^{N(\log(S_0)+n\mu, n\sigma^2)} \quad \textbf{(1.21)}$$

Tai reiškia, kad S_n turės lognormalųjį skirstinį. [8]

1.4.5 ŠUOLIŲ – DIFUZIJOS MODELIS

Akcijų kainos gali būti modeliuojamos kaip tolydžiųjų difuzinių procesų sumos ir Puasono šuolių procesai. Modeliuoti ir įvertinti yra naudojamas Merton'o šuolių – difuzijos metodas.

Šuolių – difuzijos modeliuose akcijos kainos pokyčiai yra susimaišę su normaliaisiais įvykiais, kurie yra sumodeliuoti kaip šuoliai, atsirandantys nereguliariai. Tolydžioji akcijos kainos kitimo komponentė yra Vinerio procesas. Šuolio komponentė yra Puasono procesai. Be to, šuolio, kuris atsiranda per h ilgio laiko intervalą, tikimybė yra:

$$\Pr ob\{\textit{įvykis} \text{ įvyks intervale} \left(t, t+h\right)\} = \lambda h,$$
$$\Pr ob\{\textit{įvykis} \text{ neįeįvy intervale} \left(t, t+h\right)\} = 1 - \lambda h,$$

kur λ yra šuolio procesų intensyvumas, t.y. šuolių kiekis per laiko vienetą, kuris nepriklauso nuo pasiekiamo informacijos kiekio laiko momentu *t*.

Šuolių procesai gali būti modeliuojami naudojant Puasono procesus, kurie turi tokias savybes:

1. kai $h \to 0$, gali atsirasti bent vienas įvykis su tikimybe, artima 1;
2. informacija per laiką *t* nepadeda numatyti įvykio atsiradimo kitame *h*;
3. įvykiai atsiranda pastoviu kursu λ.

Pažymėsime, kad laiko intervalas tarp dviejų nuoseklių šuolių yra pasiskirstęs pagal eksponentinį skirstinį su parametru λ. Yra duota, kad retas įvykis atsirandantis laiko intervale $(t, t+h)$, yra šuolio priežastis ir akcijos kaina S_{t+h} laiku $t+h$ bus atsitiktinis kintamasis

$S_{t+h} = S(t)Y$. Netolydūs akcijos kainos pokyčiai yra: $S_{t+h} - S(t) = S(t)(Y-1)$. Atsitiktinis kintamasis *Y-1*, taip pat vadinamas šuolio dydžiu, duoda procentinį akcijos kainos pokytį, jeigu atsiranda Puasono įvykis.

Bendras šuolio – difuzijos procesas, kaip tolydžios difuzijos ir netolydaus šuolio mišinys, gali būti užrašytas tokia bendra formule:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \{\alpha_t(\beta) - \lambda\mu_0\}dt + \sigma_t(\beta)dW_t + dQ_t(\lambda), \tag{1.22}$$

kur S_t – akcijos kaina laiko momentu *t*;

α_t – momentinė laukiama pelno norma;

μ_0 – santykinio šuolio dydžio tikimybė, t.y. $\mu_0 = E[Y_t - 1]$;

λ – Puasono skirstinio intensyvumo parametras;

σ_t – momentinis akcijos pelno normos kintamumas su sąlyga, kad Puasono šuolio įvykis neatsiranda;

W_t – standartinis Vinerio procesas;

$Q_t(\lambda)$ – Puasono procesas su parametru λ;

$(\beta, \mu_0, \lambda) \in \Theta$ – parametrų aibė, kuri parametrizuoja koeficientų funkcijas, šuolio didumus, taip pat Puasono proceso intensyvumą.

W_t ir $dQ_t(\lambda)$ yra nepriklausomi. μ_0 yra šuolio dydžio vidurkis. Laukiamas S_t pokytis nuo šuolio komponentės $dQ_t(\lambda)$ per laiko intervalą *dt* yra $\lambda\mu_0 dt$. Be to, jei α_t reiškia bendrą laukiamą S_t pelno normą, $\lambda\mu_0 dt$ turi būti atskiriamas nuo S_t reikšmės.

$$\begin{aligned} E\left(\frac{dS_t}{S_t}\right) &= E\{(\alpha_t - \lambda\mu_0)dt\} + E(\sigma_t dW_t) + E(dQ_t) = \\ &= (\alpha_t - \lambda\mu_0)dt + 0 + \lambda\mu_0 dt = \alpha_t dt \end{aligned} . \tag{1.23}$$

Pastebėsime, kad proceso, išreikšto (1.22) formule trajektorijos S_t modelis bus tolydus laike, bet turės baigtinius skirtingų požymių ir dydžių šuolius diskrečiaisiais laiko momentais. Tariant, kad α_t ir σ_t yra konstantos, tokios, kad S_t tolydžiosios komponentės yra pasiskirsčiusios pagal lognormalųjį skirstinį, ir kur N_t yra šuoliai laiko intervale *(0,t)*, tuomet akcijos kaina laiko momentu *t* gali būti užrašyta taip:

$$S_t = S_0 \exp\left(\alpha_t - \frac{1}{2}\sigma_t - \lambda\mu_0\right)t + \sigma W_t \tilde{Y}(N_t), \tag{1.24}$$

kur $W_t \sim N(0,t)$ ir $\{\tilde{Y}_j\}_{j=1}^n$ yra nepriklausomai ir vienodai pasiskirsčiusių šuolių grupė, tokia kad:

$$\begin{cases} \tilde{Y}(N_t) = 0, \text{kai } \mathrm{N_t} = 0 \\ \tilde{Y}(N_t) = \prod_{j=1}^{N_t} Y_j, \text{kai } N_t \geq 1 \end{cases}.$$

Geometrinis Brauno judesys su nepriklausomais ir vienodai pasiskirsčiusiais lognormaliaisiais šuoliais yra naudojamas mišrių procesų akcijų kainos modeliavimui ir įvertinimui (skaičiavimui). Šis metodas buvo pasiūlytas Merton'o (1976) ir dabar yra žinomas kaip Merton'o šuolių – difuzijos metodas. Tai reiškia, kad (1.23) lygtyje $\sigma_t(\cdot) = \sigma,\ \mu_t(\cdot) = \mu$ ir $\ln(Y_t)$ yra nepriklausomai ir vienodai pasiskirstęs pagal $N(\mu_0, \nu^2)$, kur visi μ, μ_0, σ, ν yra konstantos. Tada stochastinė diferencialinė S_t lygtis yra tokia:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t + d\sum_{j=1}^{N_t}(Y_j - 1), \tag{1.25}$$

kur: Y_j*-1* – kintamojo, pasiskirsčiusio pagal lognormalųjį skirstinį reikšmė, atspindinti šuolio dydį;

N_t – intervalo *(0, t)* šuoliai, pasiskirstę pagal Puasono procesą su parametru λt;

d – konstanta.

Šuolių – difuzijos modeliai yra retai naudojami praktikoje.

1.4.6 ATSITIKTINIO KLAIDŽIOJIMO HIPOTEZĖS

Atsitiktinio klaidžiojimo teoretikai dažniausiai pradeda nuo prielaidos, kad dideli vertybinių popierių pasikeitimai yra geri „efektyvios" rinkos pavyzdžiai. „Efektyvi" rinka apibrėžiama kaip rinka, kurioje yra daug aktyviai dėl racionalaus naudos padidinimo konkuruojančių narių, kur kiekvienas bando pranašauti rinkos individualių vertybinių popierių reikšmes; be to, svarbi pradinė informacija yra prieinama visiems jos dalyviams. Bet kuriuo laiko momentu „efektyvios" rinkos tikroji vertybinio popieriaus kaina bus patikimas jos vidutinės reikšmės įvertis. Tačiau vidutinė reikšmė gali būti niekada nenustatyta tiksliai. Jeigu skirtumai tarp tikrosios reikšmės ir vidutinės reikšmės yra didesni negu atsitiktiniai, tada šis faktas turėtų padėti rinkos dalyviams pranašauti, kaip tikroji kaina eina per vidutines reikšmes.

Be abejo, vidutinės reikšmės gali kisti laike, kai pateikiama nauja informacija (vadovavimo pokyčiai, produkcijos padidėjimas, dabartinių ar laukiamų koeficientų pokyčiai ir pan.).

„Efektyvioje" rinkoje konkurencija sukels naujos informacijos poveikį vidutinei reikšmei, „momentiškai" atsispindinčiai dabartinėse kainose. „Efektyvios" rinkos „momentinio pakeitimo" savybė reiškia, kad individualaus vertybinio popieriaus vėlesni kainų pokyčiai bus nepriklausomi. Tokia rinka, kur vėlesni kainų pokyčiai yra nepriklausomi vadinama *atsitiktinio klaidžiojimo rinka*. Pati paprasčiausia atsitiktinio klaidžiojimo teorija reiškia, kad akcijų kainų pokyčių eilutės neturi atminties – eilutės praeitis negali būti naudojama pranašaujant ateities kainas.

Atsitiktinio klaidžiojimo hipotezės pateikia tikslų akcijų kainų elgesio apibūdinimą. Dėl praktinių rezultatų modelis gali būti priimtinas netgi manant, kad jis tiksliai neatitinka faktų. Vadinasi, vėlesni akcijų kainų pokyčiai taip pat gali būti ne griežtai nepriklausomi, tikrasis priklausomumo kiekis gali būti toks mažas, kad bus nesvarbus. Jeigu vertybinio popieriaus vėlesni kainų pokyčiai yra nepriklausomi, tai nėra problematiška nustatyti vertybinio popieriaus pirkimo ar pardavimo laiką.

Per daugelį metų atsitiktinio klaidžiojimo teorija buvo tinkamai suformuluota. Pagrindinis atsitiktinio klaidžiojimo modelių tikslas yra patikrinti hipotezę, kad kainų pokyčiai yra nepriklausomi.

Norėdami gauti kelis atsitiktinio klaidžiojimo ir martingalų modelių variantus, kuriuos aptarsime toliau, apžvelgsime įvairias priklausomybes, kurios egzistuoja tarp pelno normos laikotarpiu *t*, r_t, ir pelno normos laikotarpiu *t+k*, r_{t+k}. Tam apibrėšime atsitiktinius kintamuosius $f(r_t)$ ir $g(r_{t+k})$, kur $f(\cdot)$ ir $g(\cdot)$ yra dvi pasirenkamos funkcijos, tuomet

$$Cov[f(r_t), g(r_{t+k})] = 0, \qquad \textbf{(1.26)}$$

su visais *t* ir *k≠0*.

Pavyzdžiui, jeigu (1.26) formulėje $f(\cdot)$ ir $g(\cdot)$ yra parenkamos kaip tiesinės funkcijos, tai reiškia, kad pelno normos nėra koreliuoti dydžiai, atsižvelgiant į *Atsitiktinio klaidžiojimo 3 modelį*, kurį aptarsime vėliau. Taip pat, jeigu $f(\cdot)$ gali būti bet kokia funkcija, o $g(\cdot)$ yra tiesinė funkcija, tuomet (1.26) formulė yra ekvivalenti martingalų hipotezei, kurią aptarsime šiame skyrelyje. Jeigu (1.26) formulė tinka su bet kokiomis funkcijomis $f(\cdot)$ ir $g(\cdot)$, tai reiškia, kad pelno normos yra nepriklausomos, atsižvelgiant į *Atsitiktinio klaidžiojimo 1* ir *Atsitiktinio klaidžiojimo 2* modelius, kuriuos aptarsime atitinkamai 1.4.6.1 ir 1.4.6.2 skyreliuose. Šią klasifikaciją iliustruosime lentele (1.1 lentelė).

1.1 lentelė

Atsitiktinių klaidžiojimų ir martingalų hipotezių klasifikacija

$Cov[f(r_t), g(r_{t+k})] = 0$	$g(r_{t+k})$, $\forall g(\cdot)$ tiesinė funkcija	$g(r_{t+k})$, $\forall g(\cdot)$
$f(r_t)$, $\forall f(\cdot)$ tiesinė funkcija	Nekoreliuoti padidėjimai, Atsitiktinis klaidžiojimas 3: $\Pr oj[r_{t+k} \mid r_t] = \mu$	———
$f(r_t)$, $\forall f(\cdot)$	Martingalas : $E[r_{t+k} \mid r_t] = \mu$	Nepriklausomi padidėjimai, Atsitiktiniai klaidžiojimai 1 ir 2: $pdf(r_{t+k}) = pdf(r_t)$

kur $\Pr oj[x \mid y]$ reiškia y tiesinę projekciją į x, o $pdf(\cdot)$ yra tankio funkcijos tikimybė.

Yra daug kitų būdų, charakterizuojančių skirtingus atsitiktinių klaidžiojimų ir martingalų būdus, (1.26) formulė ir 1.1 lentelė yra ypač svarbios ekonominėms hipotezėms.

Martingalų modeliai. Martingalas yra stochastinis procesas $\{P_t\}$, kuris tenkina sąlygą:

$$E[P_{t+1} \mid P_t, P_{t-1}, \ldots] = P_t\,, \qquad \textbf{(1.27)}$$

arba, ekvivalenčiai,

$$E[P_{t+1} - P_t \mid P_t, P_{t-1}, \ldots] = 0\,. \qquad \textbf{(1.28)}$$

Jeigu P_t yra kaina momentu *t*, tai martingalų hipotezė teigia, jog yra tikimąsi, kad rytojaus kaina bus ekvivalenti šiandienos kainai, kuri jau yra praeitis. Taip pat, laukiamos kainos pokytis yra 0, kai priklauso nuo praeities kainos; taigi, kaina gali taip pat augti, kaip ir kristi. Martingalų hipotezės reiškia, kad „geriausia" rytojaus kainos prognozė yra artima šiandienos kainai.

Martingalų hipotezės turi didelę reikšmę turto kainos dinamikos modeliavimui.

Martingalai ilgai buvo būtina sąlyga efektyviai turto rinkai, kur informacija susidedanti iš praeities kainų nuolat atsispindi dabartinėje turto kainoje.

1.4.6.1 ATSITIKTINIS KLAIDŽIOJIMAS 1: NEPRIKLAUSOMI IR VIENODAI PASISKIRSTĘ DYDŽIAI

Paprasčiausias atsitiktinio klaidžiojimo hipotezių variantas yra nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių dydžių atvejis, kuriame $\{P_t\}$ dinamika yra išreiškiama tokia lygtimi:

$$P_t = \mu + P_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)\,, \qquad \textbf{(1.29)}$$

kur μ yra laukiamas kainos pokytis arba trendas, o $IID(0,\sigma^2)$ reiškia, kad ε_t yra nepriklausomas ir vienodai pasiskirstęs, su vidurkiu – 0 ir dispersija – σ^2. Dydžių $\{\varepsilon_t\}$ nepriklausomumas reiškia ne tik, kad dydžiai yra nekoreliuoti, bet, kad bet kuri dydžių netiesinė funkcija taip pat yra nekoreliuota. Tai pavadinsime *Atsitiktinio klaidžiojimo 1* modeliu arba RW1. [2]

Apibrėšime RW1 sąlyginį vidurkį ir dispersiją momentu *t*, su pradine sąlyga P_0 momentu *0*:

$$E[P_t|P_0] = P_0 + \mu t\,, \tag{1.30}$$

$$Var[P_t|P_0] = \sigma^2 t\,. \tag{1.31}$$

Iš (1.30) ir (1.31) akivaizdu, kad atsitiktinis klaidžiojimas yra nestacionarus, o jo sąlyginis vidurkis ir dispersija yra tiesiniai. Šios išvados taip pat tinka kitoms atsitiktinio klaidžiojimo formoms (RW2 ir RW3), kurias aptarsime vėliau.

Labiausiai tinkamas dydžiams ε_t skirstinys yra normalusis. Jeigu $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$, tai (1.29) formulė yra ekvivalenti aritmetiniam Brauno judesiui. Tačiau iškyla problema, kuri paveikia normaliai pasiskirsčiusias pelno normas: jeigu sąlyginis P_t skirstinys yra normalusis, tai visuomet $P_t < 0$.

Norėdami išvengti šios problemos, kainoms taikome natūrinį logaritmą, t.y. $p_t \equiv \log P_t$, tuomet:

$$p_t = \mu + p_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)\,. \tag{1.32}$$

Dažnai pasitaikanti RW1 analizė yra procesų analizė, kurioje nuosekliai einančių teigiamų ir neigiamų pelno normų sekų skaičius, arba procesas, yra išdėstomas lentelių/diagramų pavidalu ir bandymų skirstinys palyginamas su atsitiktinio klaidžiojimo hipoteze. Lyginant duomenų procesų skaičių su laukiamu procesų skaičiumi pagal RW1, gali būti tikrinama IID atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė.

Sukonstruosime statistinį testą RW1. Tegul p_t reiškia kainos procesą ir $r_t \equiv p_t - p_{t-1}$ nepertraukiamas mišrias pelno normas.

Tada nulinę hipotezę suformuluojame taip:

$$H_0: \quad r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \text{ IID N}(0,\sigma^2) \quad .$$

Tegul mūsų duomenys susideda iš *2n+1* kainų $\{p_0, p_1, ..., p_{2n}\}$ stebėjimų, o μ ir σ^2 įverčiai yra:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(p_k - p_{k-1}) = \frac{1}{2n}(p_{2n} - p_0)\,, \tag{1.33}$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left(p_k - p_{k-1} - \hat{\mu}\right)^2 , \tag{1.34}$$

$$\hat{\sigma}_b^2 = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(p_{2k} - p_{2k-2} - 2\hat{\mu}\right)^2 . \tag{1.35}$$

(1.33) ir (1.34) lygtys dažniausiai yra paprasti vidurkio ir dispersijos įverčiai. Jie taip pat yra maksimalūs tikėtini μ ir σ^2 įverčiai. Antrasis σ^2 įvertis – $\hat{\sigma}_b^2$ – leidžia naudoti p_t atsitiktinio klaidžiojimo savybę: remiantis RW1 – vidurkio ir dispersijos padidėjimai yra tiesiniai padidėjimų intervale, vadinasi, σ^2 gali būti įvertintas viena puse padidėjimų variacijų iš visų $\{p_0, p_1,..., p_{2n}\}$ stebėjimų. [2]

1.4.6.2 ATSITIKTINIS KLAIDŽIOJIMAS 2: NEPRIKLAUSOMI DYDŽIAI

Nepaisant RW1 paprastumo, prielaida apie vienodai pasiskirsčiusius dydžius nėra patikima turto kainoms per ilgą laiko tarpą. Taip pat, susilpnindami RW1 prielaidą, kad dydžiai yra nepriklausomi, bet ne vienodai pasiskirstę (INID), gauname *Atsitiktinio klaidžiojimo 2* modelį, arba RW2. RW2 yra RW1 ypatingas atvejis, bet taip pat susideda iš žymiai labiau paprastesnių kainų procesų.

Taip pat, RW2 yra silpnesnis už RW1 (žiūrėti 1.1 lentelėje): bet kuri pasirinkta ateities kainų dydžių transformacija yra prognozuojama pagal pasirinktą praeities kainų dydžių transformaciją.

RW2 analizėje galima naudoti du būdus: filtro taisyklę ir specialiąją analizę. Net jei nė vienas iš šių būdų neduoda didesnės naudos apie taisyklingą statistinę išvadą, abu būdai yra svarbūs finansuose iš praktinės pusės.

Filtro taisyklė. RW2 analizei buvo pasiūlyta filtro taisyklė, kurioje turtas yra įsigyjamas, kai jo kaina yra padidinama *x%*, ir parduodamas, kai jo kaina nukrenta *x%*. Tokia taisyklė vadinama *x%* filtro taisykle.

Net ir labai maži filtrai duoda aukštesnes pelno normas.

Techninė analizė. Filtro taisyklė turi pranašumą praktiniame taikyme – ji yra tiksli ir lengvai suprantama prekybinių sandorių strategija; jos pasisekimo matas yra bendroji pelno norma. Filtro taisyklė yra tik vienas iš didelės prekybinių sandorių taisyklių klasės pavyzdžių, atsirandančių iš techninės analizės ar diagramų analizės. Techninė analizė yra priėjimas prie investicijų valdymo, pagrįsto tikėjimu, kad praeities kainų eilutės ir kitos rinkos statistikos parodo reguliarumus – dažniausiai (bet ne visada) geometrinio pavyzdžio forma. Tačiau techninė analizė niekada nepasieks tokio lygio, kaip fundamentalioji analizė. Fundamentalioji analizė yra pagrįsta daugelio finansinių dydžių žinojimu – pavyzdžiui, pajamų, dividendų ir kitų balanso žiniaraščio ar įplaukų žiniaraščio elementų.

Tačiau techninė analizė ir labiau tradicinė finansinė analizė gali turėti daug bendro.

1.4.6.3 ATSITIKTINIS KLAIDŽIOJIMAS 3: NEKORELIUOTI DYDŽIAI

Dar labiau paprastesnis atsitiktinio klaidžiojimo hipotezių variantas – vienas iš dažniausiai bandomų dabartinėje literatūroje – gali būti gaunamas susilpninant RW2 nepriklausomumo prielaidą, įtraukiant priklausomus, bet nekoreliuotus dydžius. Tai yra silpniausia atsitiktinio klaidžiojimo hipotezių forma, kurią pavadinsime *Atsitiktinio klaidžiojimo 3* modeliu arba RW3. Paprasčiausias procesas, kuris tenkina RW3 prielaidas, bet netenkina RW1 ar RW2 prielaidų, yra procesas, kuriam $Cov[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}] = 0$, su visais k≠0, bet kur $Cov[\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2] \neq 0$, su kai kuriais k≠0. Toks procesas turi nekoreliuotus dydžius, bet nėra visiškai nepriklausomas, kol jo kvadratiniai dydžiai yra koreliuoti.

2 TIRIAMOJI DALIS

Beveik visada yra pelninga investuoti į ateitį. Vis dėlto, yra labai sunku tiksliai prognozuoti, kada investuoti yra pelningiausia. Trumpalaikiai akcijų rinkos svyravimai yra beveik neprognozuojami, nes juos įtakoja netikėtos geros ir blogos naujienos. Per ilgesnį laiką akcijų rinka visuomet atspindi ilgalaikius gerus ar blogus įmonių veiklos rezultatus bei jų išmokamus dividendus. Dėl tos priežasties, kylant ekonomikai, gerėjant įmonių veiklos rezultatams ir augant dividendams kyla įmonių akcijų kaina. Šiuo metu, kai Lietuvos ekonomika auga sparčiausiai iš visų Europos Sąjungos šalių, yra labai palankus metas investuoti į Lietuvos akcijų rinką. Žinoma, akcijų rinka visada svyruos, todėl visada yra naudinga nukritus akcijų rinkai dar galėti ir papildomai investuoti, tokiu būdu pasinaudojant laikinai žemesnėmis akcijų kainomis.

Dėl šios priežasties buvo norima patikrinti, ar galima taikyti Lietuvos įmonių akcijoms įkainojimo modelius.

Tam tikrinama sąlyga, kuri turi būti tenkinama visiems teorinėje dalyje aptartiems modeliams (geometriniam Brauno judesio, binominiam, adityviajam ir kt.), kad akcijų pelno normos būtų pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį.

Iš pradžių aptarsime, kokias savybes turi tenkinti akcijų kainos:

1. Akcijos kaina yra atsitiktinė, t.y. žinant kainą šiandien, negalima numatyti jos kainos rytoj;
2. Laikysime, kad kainos kinta tolydžiai, t.y. per trumpą laiko tarpą akcijų kainos pokyčiai yra labai maži ir artėja į 0, jei laiko intervalai artėja į 0;
3. Akcijų kaina niekada nelygi 0, t.y. nenagrinėjamos bankrutavusių įmonių akcijos;
4. Laikomų akcijų vidutinė pelno norma turi tendenciją didėti laike, bet tai nereiškia, kad ilgiau turint akcijas jų vertė didėja;
5. Turimų akcijų vidutinės pelno normos nuokrypis turi tendenciją didėti laike, t.y. jeigu žinoma akcijos kaina šiandien, tai jos dispersija bus maža, bet laikui didėjant ji didėja.

Akcijų kainų dinamika atsispindi nepastoviuose jų reikšmės kitimuose bėgant laikui. Praeitis visiškai atsispindi ateities kainose ir rinkos nedelsiant atsižvelgia į naują informaciją apie akciją. Šios dvi prielaidos leidžia suprasti, kad akcijų kainos yra Markovo procesas.

Akcijų kainos modeliavimas yra susijęs su naujos informacijos, kuri paveikia kainą, gavimo modeliavimu.

2.1 DUOMENYS

Tyrimui reikalingi duomenys imami iš www.jt.lt teikiamos informacijos apie įmonių akcijas. Atsitiktinai iš NSEL 30 indekso akcijų skaičiavimams pasirenkamos šių įmonių akcijų kainos 2005 01 01 – 2005 12 31 laikotarpiu:

- „Apranga";
- „Dvarčionių keramika";
- „Ekranas";
- „Grigiškės";
- „Invalda";
- „Kauno energija";
- „Lietuvos dujos";
- „Mažeikių nafta";
- „Pieno žvaigždės";
- „VST".

Taip pat nagrinėjimui pasirenkamos kelių JAV kompanijų akcijos (duomenys imami iš www.amex.com):

- „British american tobacco";
- „Cybex international";
- „Grey wolf".

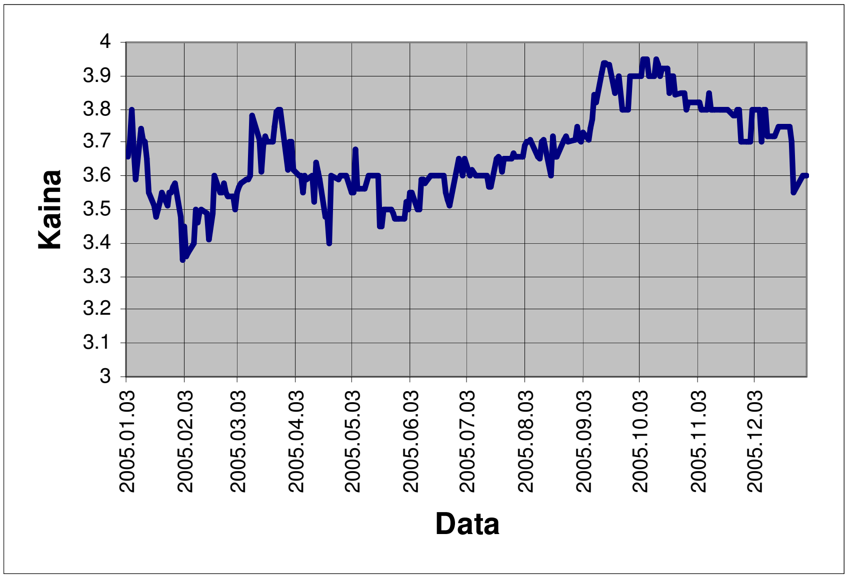
2.1 lentelėje matome, jog skaičiavimams reikalinga informacija apie akcijas yra data ir tą dieną atitinkanti akcijos kaina.

2.1 lentelė

Duomenų pavyzdys

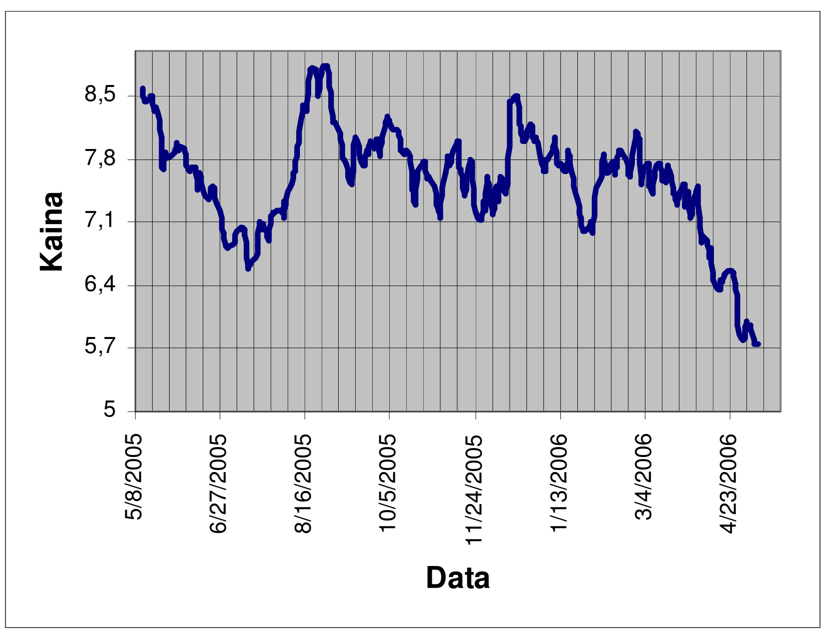
Data	Kaina
01/03/05	3.66
01/04/05	3.7
01/05/05	3.8
01/06/05	3.68
01/07/05	3.59
01/10/05	3.74
01/11/05	3.71

Bendrovių akcijų kainos visą laiką kinta. Galimi staigūs atskirų bendrovių akcijų kainos kilimai ir kritimai. 2.1 pav. matome įmonės „Grigiškės" akcijų kainų grafiką 2005 01 01 – 2005 12 31 laikotarpiu.



2.1 pav. „Grigiškės" akcijų kainos

Analogiškai pateiksime JAV kompanijos „Grey wolf" akcijų kainų grafiką 2.2 pav.



2.2 pav. „Grey wolf" akcijų kainų grafikas

Kaip matysime iš vėlesnių skaičiavimų, 2.1pav. ir 2.2 pav. skiriasi tuo, kad įmonės „Grigiškės" akcijų pelno normos nėra pasiskirsčiusios pagal normalųjį dėsnį, o kompanijos „Grey wolf" akcijų pelno normos yra pasiskirsčiusios pagal normalųjį dėsnį.

2.2 MODELIŲ TINKAMUMO PRIELAIDOS TIKRINIMAS

Daug finansinių aktyvų turi aukšto dažnio pelno normą, pasiskirsčiusią pagal ne normalųjį skirstinį: dažniausiai jos turi storesnes „uodegas" negu normalusis skirstinys.

Norėdami pradėti dinamikos modelių prielaidos tyrimą, pirmiausia pagal (2.1) ir (2.2) formules visoms įmonių akcijoms suskaičiuojame pelno normas.

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} \tag{2.1}$$

$$R_i = \ln \frac{S_{i+1}}{S_i} \tag{2.2}$$

Gautų pelno normų pavyzdys pateiktas 2.2 lentelėje.

2.2 lentelė

„Grigiškės" pelno normų pavyzdys

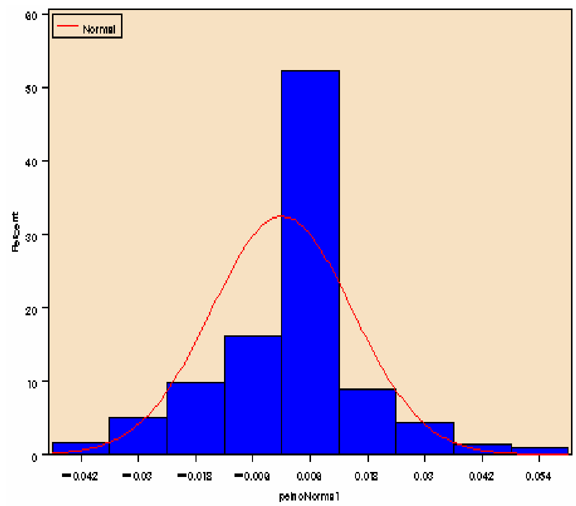
Data	Kaina	(S(i)-S(I-1))/S(i-1)	ln(S(k+1)/S(k))
01/03/05	3,66		
01/04/05	3,7	0,01093	0,01087
01/05/05	3,8	0,02703	0,02667
01/06/05	3,68	-0,03158	-0,03209
01/07/05	3,59	-0,02446	-0,02476
01/10/05	3,74	0,04178	0,04093
01/11/05	3,71	-0,00802	-0,00805
01/12/05	3,7	-0,00270	-0,00270

- **Skaičiavimai, atlikti su įmonės „Grigiškės" akcijų pelno normomis.** Suskaičiavę akcijų pelno normas pagal (2.1) formulę, tikriname ar yra tenkinama modelių tinkamumo prielaida, jog pelno normos yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį.

```
                   Tests for Normality
Test                  --Statistic---    -----p Value------
Shapiro-Wilk          W     0.924432    Pr < W     <0.0001
Kolmogorov-Smirnov    D     0.174068    Pr > D     <0.0100
Cramer-von Mises      W-Sq  1.794371    Pr > W-Sq  <0.0050
Anderson-Darling      A-Sq  8.320187    Pr > A-Sq  <0.0050
```

Kadangi tikimybė “*p Value*” visų kriterijų atveju yra mažesnė už 0,05 (tai reikšmingumo lygmens reikšmė su kuria lyginame tikimybės didumą), tai reiškia, kad tikrinama hipotezė nėra priimtina. Vadinasi, pelno normos nėra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį.

Tam, kad gautais rezultatais įsitikintume vizualiai yra braižomos histogramos, kur pelno normų histograma yra lyginama su normaliojo skirstinio kreive (žr. 2.3 pav.)



2.3 pav. „Grigiškės” pelno normų, skaičiuotų pagal (2.1) formulę, histograma ir jos palyginimas su normaliojo skirstinio kreive

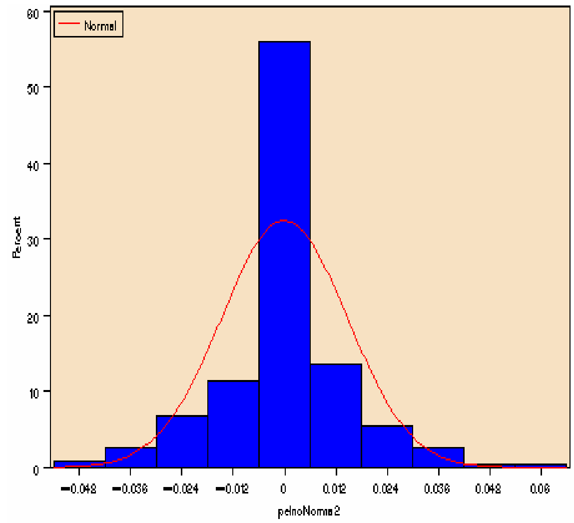
Tuos pačius skaičiavimus pakartojame ir su pelno normomis, skaičiuotomis pagal (2.2) formulę.

Tikrinama normalumo hipotezė:

```
                    Tests for Normality
Test                  --Statistic---    -----p Value------
Shapiro-Wilk          W       0.92566    Pr < W      <0.0001
Kolmogorov-Smirnov    D      0.176993    Pr > D      <0.0100
Cramer-von Mises      W-Sq   1.790427    Pr > W-Sq   <0.0050
Anderson-Darling      A-Sq   8.294925    Pr > A-Sq   <0.0050
```

Iš *univariate* procedūros gautų rezultatų galime teigti, kad įmonės „Grigiškės” akcijų pokyčių logaritmai nėra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį, nes “*p Value*”<α(0,05).

Rezultatai pateikiami grafiškai 2.4 pav.



2.4 pav. „Grigiškės" pelno normų, skaičiuotų pagal (2.2) formulę, histograma ir jos palyginimas su normaliojo skirstinio kreive

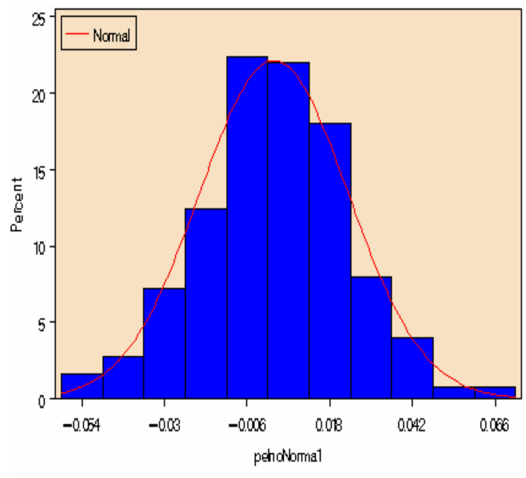
Analogiški skaičiavimai (tikrinamos hipotezės ir braižomos histogramos) atliekami su kitų Lietuvos įmonių akcijomis. Gauti rezultatai pateikiami prieduose (žr. 1 priedas – 9 priedas). Juos išanalizavę galime teigti, jog visų pasirinktų Lietuvos įmonių akcijos nėra tinkamos realiam metodų pritaikymui, nes nėra išpildoma sąlyga, kad pelno normos būtų pasiskirsčiusios pagal normalųjį dėsnį.

- **Skačiavimai, atlikti su įmonės „Grey wolf" akcijų pelno normomis.** Algoritmas analogiškas įmonės „Grigiškės" skaičiavimams. Apskaičiavę akcijų pelno normas pagal (2.1) formulę, tikriname ar jos yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį.

```
                       Tests for Normality
Test                     --Statistic---    -----p Value------
Shapiro-Wilk             W      0.996637    Pr < W       0.8750
Kolmogorov-Smirnov       D       0.02626    Pr > D      >0.1500
Cramer-von Mises         W-Sq   0.025111    Pr > W-Sq   >0.2500
Anderson-Darling         A-Sq   0.168366    Pr > A-Sq   >0.2500
```

Kadangi tikimybė "*p Value*" visų kriterijų atveju yra didesnė už 0,05, tai reiškia, kad tikrinama hipotezė yra priimtina. Vadinasi, pelno normos yra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį.

Pelno normų histogramą taip pat palyginame su normaliojo skirstinio kreive (žr. 2.5 pav.)



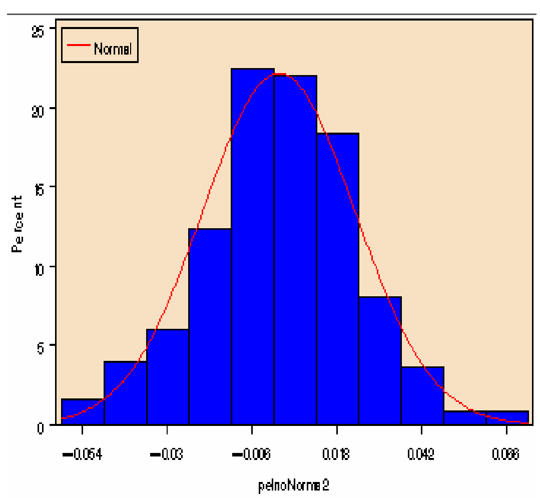
2.5 pav. „Grey wolf" pelno normų, skaičiuotų pagal (2.1) formulę, histograma ir jos palyginimas su normaliojo skirstinio kreive

Tuos pačius skaičiavimus pakartojame ir su pelno normomis, skaičiuotomis pagal (2.2) formulę.

```
                    Tests for Normality
Test                  --Statistic---    -----p Value------
Shapiro-Wilk          W       0.99653    Pr < W      0.8593
Kolmogorov-Smirnov    D      0.029387    Pr > D     >0.1500
Cramer-von Mises      W-Sq   0.030334    Pr > W-Sq  >0.2500
Anderson-Darling      A-Sq   0.202637    Pr > A-Sq  >0.2500
```

Įmonės „Grey wolf" akcijų pelno normos, suskaičiuotos pagal (2.2) formulę, yra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį, nes "*p Value*">α.

Rezultatai pateikiami grafiškai 2.6 pav.



2.6 pav. „Grey wolf" pelno normų, skaičiuotų pagal (2.2) formulę, histograma ir jos palyginimas su normaliojo skirstinio kreive

Normalumo hipotezę patikriname ir likusioms dviems JAV kompanijų akcijų pelno normoms, taip pat braižome histogramas. Rezultatai pateikti prieduose (žr. 10 priedas – 11 priedas).

Matome, jog abiejų kompanijų, t.y. „British american tobacco" ir „Cybex international", akcijų pelno normos yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį, todėl joms galėtume taikyti 1.4 skyriuje aptartus akcijų įkainojimo metodus.

2.3 AKCIJŲ KAINŲ GENERAVIMAS

Kadangi kompanijos „Grey wolf" pelno normos yra pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį, tai galime sugeneruoti akcijų kainas vienerių metų laikotarpiui pagal formulę:

$$S_{i+1} = (1 + \mu \Delta t) S_i + \sigma \cdot S_i \cdot Z \cdot \sqrt{\Delta t}, \qquad \textbf{(2.3)}$$

kur Z – standartinio normaliojo skirstinio reikšmės (jų sugeneruojame 251);

Δt=0,01, laiko intervalų žingsnis;

μ – akcijų pelno normų vidurkis;

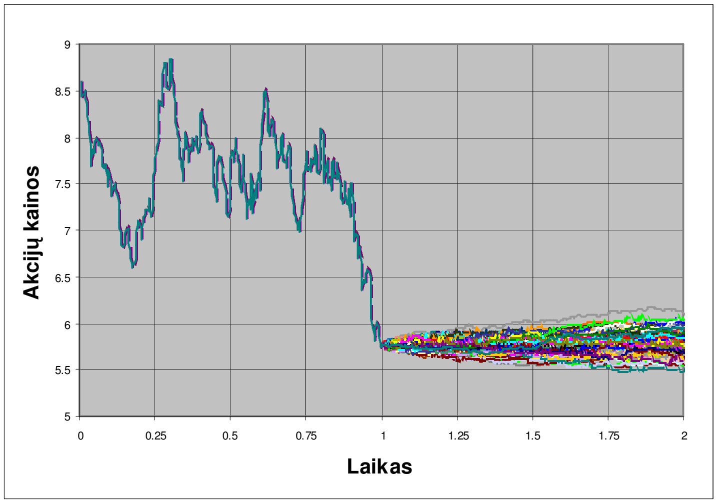
σ – akcijų pelno normų standartinis nuokrypis.

Generuosime akcijų kainas vienerių metų laikotarpiui, kai duomenys yra imami iš jau atliktų skaičiavimų rezultatų.

1 variantas. Generavimui pasirenkame pelno normų, suskaičiuotų pagal (2.1) formulę, vidurkį ir standartinį nuokrypį:

- μ =0,00183;
- σ=0,002163.

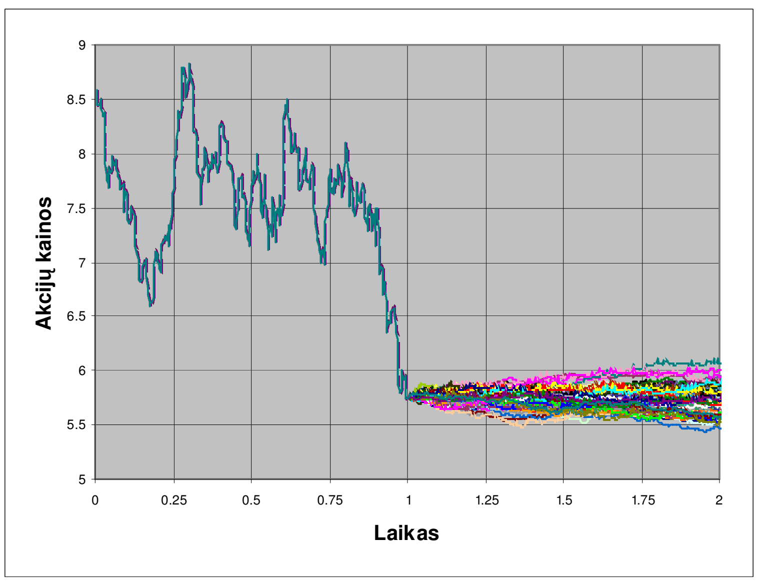
Gauti rezultatai pateikti 2.7 pav.



2.7 pav. Sugeneruotos akcijų kainos vienerių metų laikotarpiui

2 variantas. Pelno normų vidurkį ir standartinį nuokrypį paliekame tokius pačius, generavimui pasirinkdami kitas sugeneruotas Z reikšmes.

Gauti rezultatai pateikti 2.8 pav.



2.8 pav. Sugeneruotos akcijų kainos vienerių metų laikotarpiui

Kaip matome iš 2.7 pav ir 2.8 pav., akcijų kainų prognozės priklauso nuo sugeneruotų standartinio normaliojo skirstinio (Z) reikšmių.

2.4 MODELIAVIMAS TAIKANT BINOMINĮ MEDĮ

Binominis medis yra vienas paprasčiausių ir dažniausiai praktikoje taikomų vertybinių popierių įkainojimo modelių. Algoritmas realizuojamas pagal 1.2 pav. pateiktą metodą.

Kadangi kompanijos „Grey wolf" akcijų pelno normos tenkina normalumo sąlygą, galime sumodeliuoti akcijų kainas. Norėdami gauti tikslesnius modelio rezultatus, nagrinėsime kelis variantus.

1 variantas. Pasirenkame duomenis:

S=5,76, pradinė akcijos kaina (kaina nuo kurios pradėsime modeliavimą);

Δt=0,008, laiko intervalų ilgis;

μ=0,00183, akcijos pelno normų vidurkis;

σ=0,02163, akcijos pelno normų standartinis nuokrypis;

n=4, laiko intervalų skaičius, kurių ilgis yra Δt.

Jei pradinė akcijos kaina yra 5,76, tai galimi akcijų kainų pasikeitimai po keturių laiko intervalų, kurių ilgis yra Δt=0,008, pavaizduoti 2.3 lentelėje.

2.3 lentelė

1 varianto modeliavimo rezultatai

5,76				
5,74887	5,77115			
5,73776	5,76	5,78233		
5,72667	5,74887	5,77115	5,79353	
5,7156	5,73776	5,76	5,78233	5,80475

Tikimybės, kad akcijos kaina pakils yra skaičiuojamos taip:

$$p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{\mu\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{e^{0.000014} - e^{-0.0019}}{e^{0.0019} - e^{-0.0019}} = 0.5037\,.$$

Tuomet tikimybė, kad kaina nukris yra *1-0,5079=0,4963.* Akcijos kaina po keturių laiko periodų 5,78233 yra pasiekiamas per tris kainos padidėjimų ir vieną kainos sumažėjimo šakas. Tai gali būti pasiekiama pereinant keturis kelius, kurie yra tokie: AVVV, VAVV, VVAV ir VVVA, kur V reiškia kainos padidėjimą, A – sumažėjimą (žr. 1.2 pav. ir 2.3 lentelę). Tuomet, tikimybė, kad kaina po keturių laiko intervalų bus 5,78233 yra:

$$4 \times 0.5037^3 \times 0.4963 = 0.2537\,.$$

Norint apskaičiuoti kitų alternatyvių kainų po keturių laiko intervalų tikimybes, iš pradžių turime rasti visus galimus variantus per kiek kainos padidėjimų ir kiek kainos sumažėjimų šakų ji yra pasiekiama, tuomet suskaičiuoti per kelis kelių variantus galime pasiekti norimą kainą.

Su kokiomis tikimybėmis yra pasiekiamos likusios akcijų kainos pavaizduota 2.4 lentelėje.

2.4 lentelė

Tikimybės, su kuriomis pasiekiamos atitinkamos kainos

Kaina	Tikimybė
5,80475	0,0644
5,76	0,3749
5,73776	0,2463
5,7156	0,0607

2 variantas. Visus duomenis paliekame tuos pačius, pakeičiame tik laiko intervalo ilgį. Tuomet duomenys atrodo taip:

S=5,76;

Δt=0,01;

μ=0,00183;

σ=0,02163;

n=4.

Galimi akcijų kainų pasikeitimai po *n* laiko intervalų pavaizduoti 2.5 lentelėje.

2.5 lentelė

2 varianto modeliavimo rezultatai

5,76				
5,74755	5,77247			
5,73514	5,76	5,78497		
5,72274	5,74755	5,77247	5,7975	
5,71038	5,73514	5,76	5,78497	5,81005

Tikimybės, kad akcijos kaina pakils yra:

$$p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{\mu\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{e^{0.00002} - e^{-0.00216}}{e^{0.00216} - e^{-0.00216}} = 0.5092 .$$

Tuomet tikimybė, kad kaina nukris yra *1-0,5109=0,4908.*

Su kokiomis tikimybėmis yra pasiekiamos likusios akcijų kainos pavaizduota 2.6 lentelėje.

2.6 lentelė

Tikimybės, su kuriomis pasiekiamos atitinkamos kainos

Kaina	Tikimybė
5,81005	0,0672
5,78497	0,2592
5,76	0,3748
5,73514	0,2408
5,71038	0,0580

3 variantas. Visus duomenis paliekame tuos pačius, pakeičiame tik laiko intervalo ilgį. Tuomet duomenys atrodo taip:

S=5,76;

Δt=0,02;

μ=0,00183;

σ=0,02163;

n=4.

Galimi akcijų kainų pasikeitimai po keturių laiko intervalų (mažas intervalų skaičius pasirenkamas todėl, kad galėtume lengviau aptarti gautus rezultatus) yra pavaizduoti 2.7 lentelėje.

2.7 lentelė

3 varianto modeliavimo rezultatai

5,76				
5,74241	5,77765			
5,72487	5,76	5,79535		
5,70738	5,74241	5,77765	5,8131	
5,68995	5,72487	5,76	5,79535	5,83091

Tikimybės, kad akcijos kaina pakils yra:

$$p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{\mu\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{e^{0.000037} - e^{-0.0031}}{e^{0.0031} - e^{-0.0031}} = 0.5214\,.$$

Tuomet tikimybė, kad kaina nukris yra *1-0,5058=0,4786.*

Suskaičiuojame visas tikimybes, su kuriomis yra gaunamos alternatyvios kainos. Gauti rezultatai surašomi į 2.8 lentelę.

2.8 lentelė

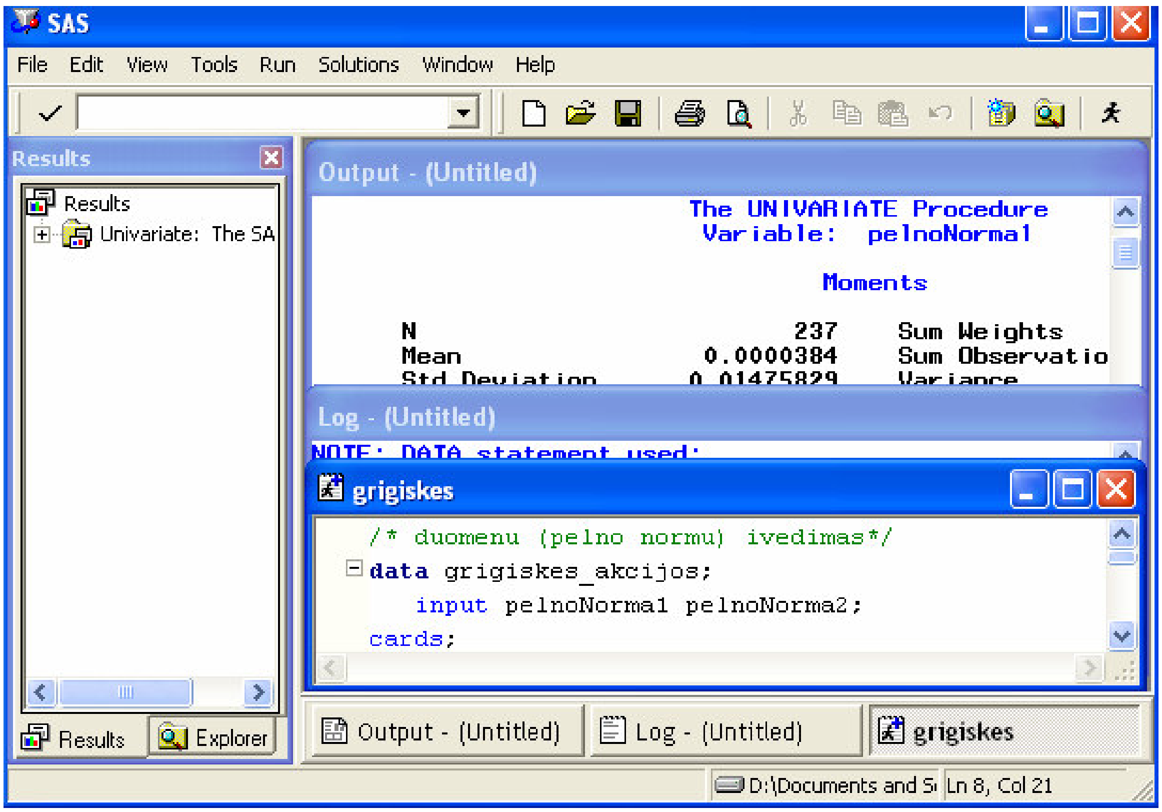
Tikimybės, su kuriomis pasiekiamos atitinkamos kainos

Kaina	Tikimybė
5,83091	0,0739
5,79535	0,2714
5,76	0,3738
5,72487	0,2286
5,68995	0,0525

3 PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Prielaidos apie pelno normų pasiskirstymą pagal normalųjį skirstinį tikrinimui įgyvendinti pasirinktas statistinis paketas SAS. Tokį pasirinkimą nulėmė daugybė paketo sprendžiamų problemų, puikios grafinių rezultatų pateikimo galimybės, patogi vartotojo aplinka ir geras paketo aprašymas.

Aptarsime statistinio paketo SAS galimybes, kuriomis naudojomės šiame darbe. Pagrindinis SAS paketo langas pavaizduotas 3.1 pav.

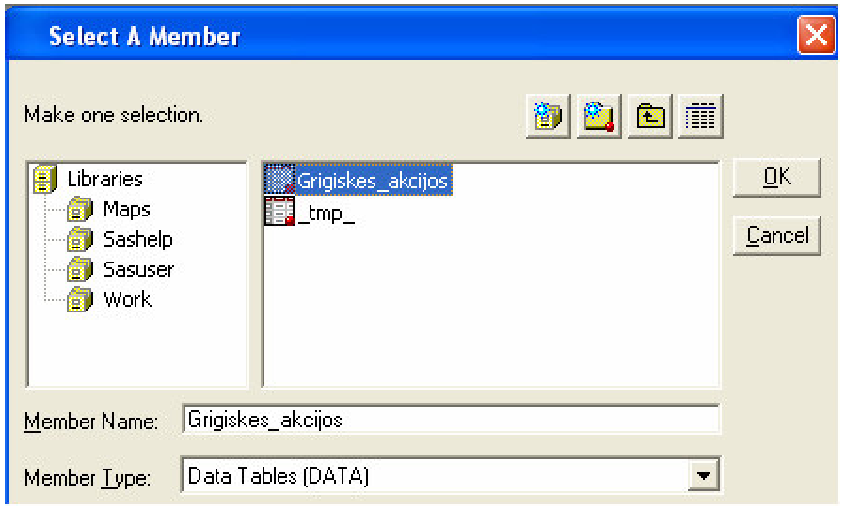


3.1 pav. Pagrindinis SAS paketo langas

Hipotezių tikrinimui *Utilited* lange yra rašomas programos tekstas, šiuo atveju 3.1 pav. pateiktame pavyzdyje šis langas pavadintas *Grigiskes*, pagal tai, su kokios įmonės akcijų pelno normomis atliekami skaičiavimai. Atskiras duomenų failas nėra reikalingas, nes duomenys pasinaudojus *Cards* rašomi tiesiogiai į programos langą. Programa paleidžiama iš *Meniu* pasirinkus *Run>Submit,* tada lange *Log* rodomos programos tekste padarytos klaidos; jei tokių nėra, tuomet į *Output* išvedami rezultatai. Visų atliktų procedūrų rezultatai matomi kairiojoje lango pusėje pasirinkus *Results*.

Atlikę hipotezių tikrinimą, braižome dviem būdais apskaičiuotų pelno normų histogramas jas lygindami su normaliojo skirstinio kreive. Tam naudojamės *Meniu: Solution>Analysis>*

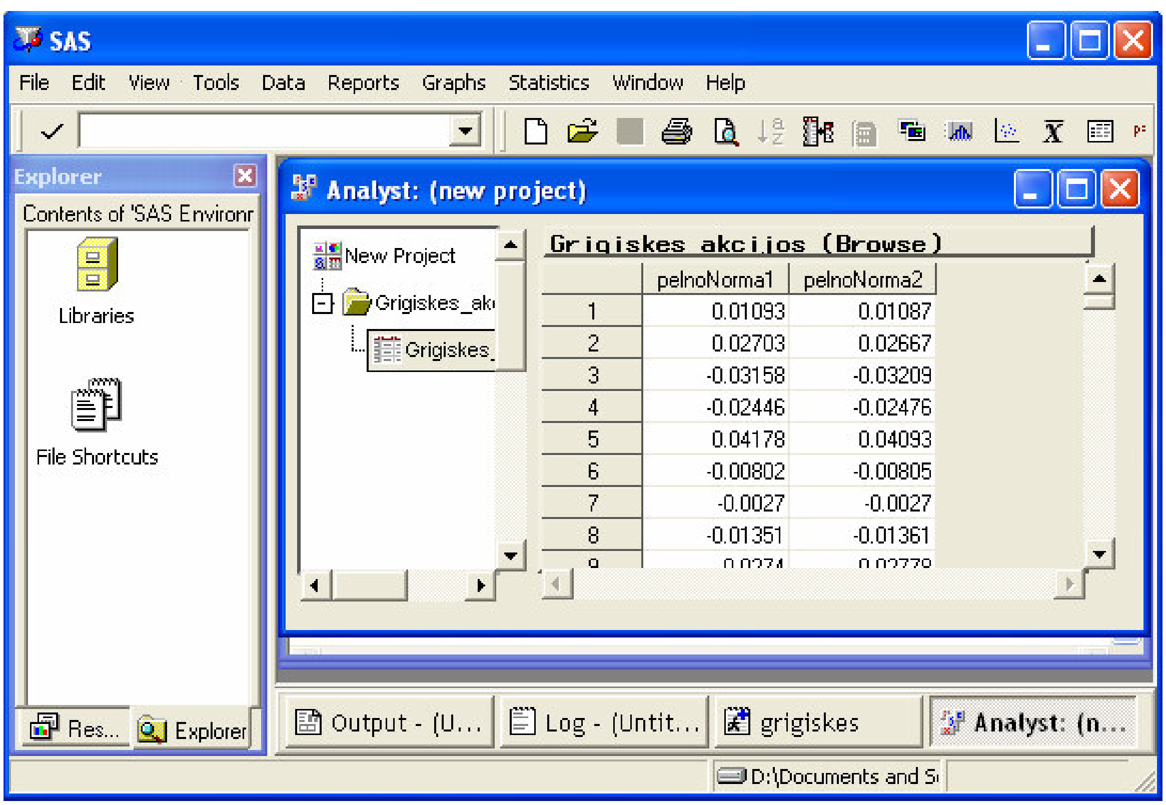
Analyst. Čia yra reikalinga duomenų lentelė, kurią įsikeliame tokiu būdu: iš *Meniu* pasirenkame *File>Open By SAS Name...* tuomet atsiveria 3.2 pav. pateiktas langas.



3.2 pav. Select A Member langas

Tuomet iš katalogo *Libraries* pasirenkame *Work* ir išsirenkame kokius duomenis norime įsikelti skaičiavimams ir spaudžiame OK mygtuką.

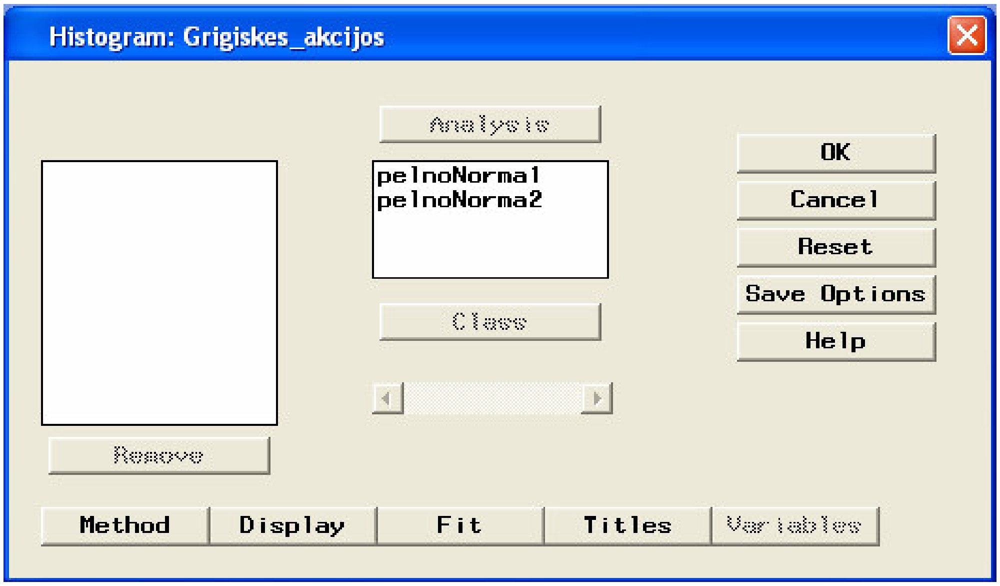
Įsikėlę duomenis matome 3.3 pav. pavaizduotą statistinio paketo langą.



3.3 pav. Analyst langas

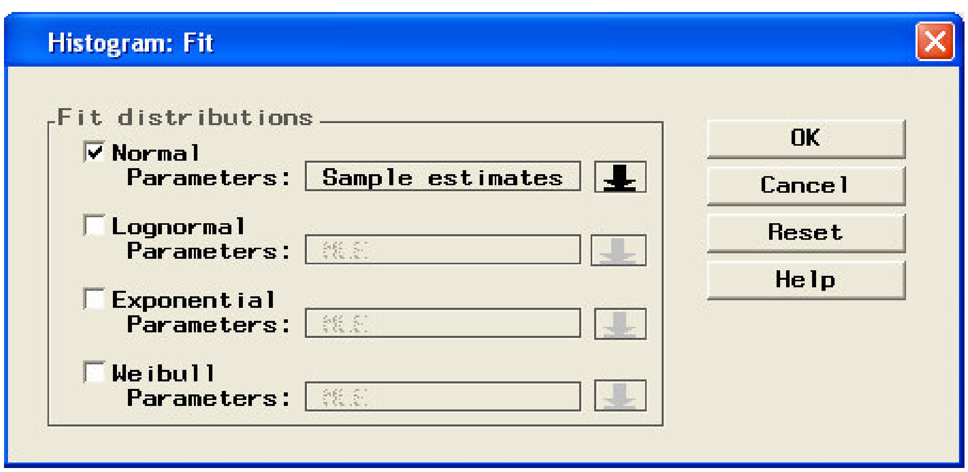
Kairiojoje *Analyst* lango pusėje (*New project* dalyje) matome kokie skaičiavimai buvo atlikti.

Taigi, turint duomenų lentelę jau galima braižyti pelno normų histogramas, tam pasirenkame *Meniu* punktą *Graphs>Histogram...* , tuomet matome 3.4 pav. pavaizduotą langą.



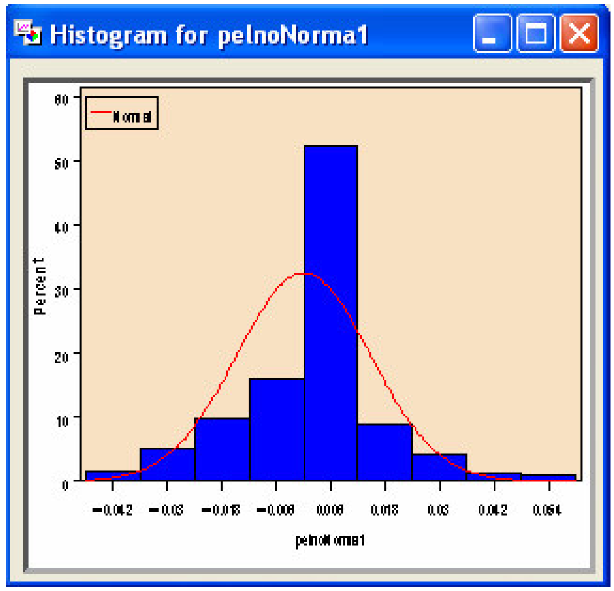
3.4 pav. Histogramos nustatymų langas

Norint nubraižyti histogramas, iš kairiosios lango pusės kintamieji *pelnoNorma1* ir *pelnoNorma2* perkeliami kaip pavaizduota 3.4 pav. Pelno normų histogramų palyginimui su normaliojo skirstinio kreive, turime paspausti mygtuką Fit (3.5 pav).



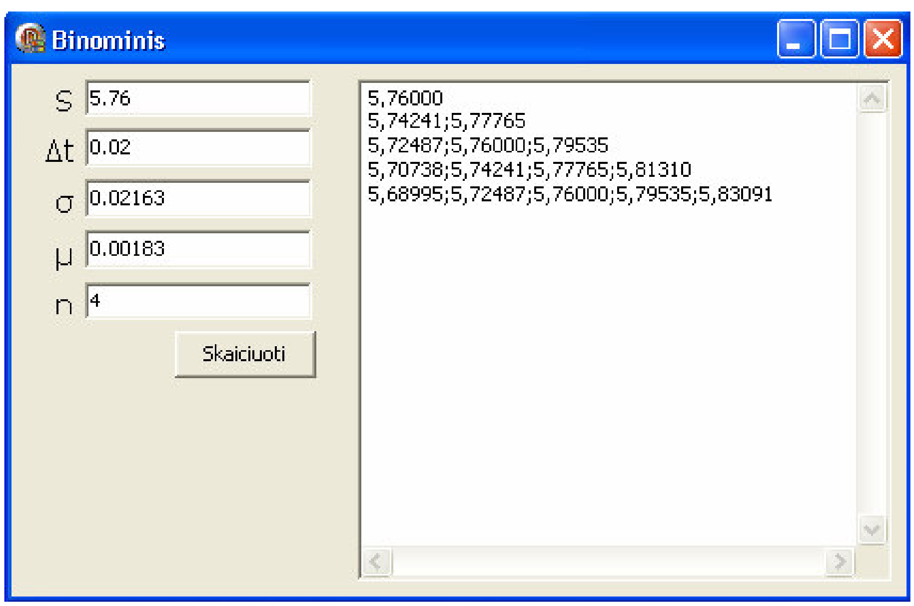
3.5 pav. Skirstinio tipo pasirinkimo langas

Pasirinkę mums tinkamą skirstinį, su kurio kreive norėsime lyginti histogramą, spaudžiame *OK* mygtuką, tuomet grįžtame į 3.4 pav. pateiktą langą ir taip pat spaudžiame *OK*. Taigi, gauname mums reikalingą histogramą, pateiktą 3.6 pav.



3.6 pav. Pelno normų histogramos pavyzdys

Akcijų kainų generavimui pagal binominį modelį sudarome programą Delphi 10 aplinkoje. Pagrindinis realizacijos langas pateiktas 3.7 pav.



3.7 pav. Akcijų įkainojimo pagal binominį medį programos langas

Kairiojoje programos lango dalyje turime įvesti tokius kintamuosius:

- S – akcijos pradinę kainą, t.y. kainą nuo kurios pradėsime modeliavimą;
- Δt – laiko intervalų ilgį;
- μ – akcijos pelno normų vidurkį;
- σ – akcijos pelno normų standartinį nuokrypį;
- n – intervalų skaičių.

Suvedus šiuos kintamuosius ir paspaudus mygtuką *Skaiciuoti* , programa įvykdo skaičiavimus. Gauti rezultatai matome programos lange bei išvedami į failą *Results.xls*.

DISKUSIJOS

Nagrinėdami 10-ties Lietuvos įmonių akcijų vienerių metų (2005 01 01 – 2005 12 31) pelno normas pastebėjome, jog mūsų tikrinama prielaida, kad pelno normos turėtų būtų pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį, nėra išpildoma nė vienai iš įmonių. Lietuvos įmonių akcijų pelno normoms reiktų rasti tinkamus skirstinius ir atitinkamus metodus akcijų įkainojimui. Šiuo metu ekonomistai siūlo tas dalis, kur kainos nekinta (pelno norma yra lygi 0) pašalinti ir tuomet atlikti skaičiavimus, tačiau pabandžius tai padaryti su Lietuvos įmonių akcijomis, iš 10 nagrinėtų įmonių tik trims minėtas siūlymas pasitvirtino. Vadinasi, tai nėra reali galimybė pritaikyti akcijų įkainojimo modelius.

Kitokie rezultatai gauti patikrinus tas pačias hipotezes JAV kompanijų atveju. Čia pasirinkus 7 kompanijas, buvo gauta, jog 3 kompanijų pelno normos yra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį. Tuomet galima būtų taikyti teorinėje dalyje aptartus akcijų įkainojimo modelius.

Kainų modeliavimui pasirinkus vieną iš paprasčiausių įkainojimo modelių – binominį modelį – pastebima tendencija, kad tikimybės sulaukti akcijų kainų padidėjimų po tam tikrų laiko intervalų, kai didinami intervalų ilgiai – didėja, o tikimybės, jog kainos sumažės – mažėja. Tikimybės, kad kainos išliks tos pačios, esant skirtingiems intervalų ilgiams, yra apytiksliai vienodos. Taip pat pastebima, jog akcijų kainų modeliavimas, kai n>20 reikalauja didelių sąnaudų ir didelės kompiuterio spartos, todėl binominis modelis gali būti realizuojamas tik imant laiko intervalų skaičių, mažesnį nei 20.

IŠVADOS

Realizavus darbe užsibrėžtus tikslus, galima daryti tokias išvadas:

• Išanalizavus 10-ties Lietuvos įmonių akcijų pelno normas, pastebėta, jog jos nėra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį, todėl negalima pritaikyti skaičiavimo metodų, pagrįstų Brauno judesio proceso panaudojimu.

• Iš 7 tirtų užsienio kompanijų, trijų kompanijų akcijų pelno normos buvo pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį, todėl galima taikyti 1.4 skyrelyje aptartus akcijų įkainojimo metodus.

• Nors rinkos sąlygos pastaruoju metu ir gerėja, tačiau Lietuvos įmonių akcijos nėra tinkamos realiam metodų pritaikymui, nes nėra išpildoma visų modelių tinkamumo sąlyga, t.y. kad akcijų pelno normos kinta pagal normalųjį dėsnį.

• Įkainojant akcijas pagal binominį medį, pastebima tendencija, jog didinant laiko intervalų ilgį Δt :

- tikimybės, kad akcijų kaina padidės – didėja;
- tikimybės, kad akcijų kaina išliks tokia pati – išlieka apytiksliai vienodos;
- tikimybės, kad akcijų kainos sumažės – mažėja.

• Taikant binominį modelį, sumodeliuota akcijos kaina priklauso nuo laiko intervalų ilgio ir akcijų pelno normų standartinio nuokrypio, o tikimybių reikšmės, su kuriomis gaunamos atitinkamos kainos dar priklauso ir nuo akcijų pelno normų vidurkių.

• Atlikus detalią binominio medžio analizę, pastebime, jog binominio metodo trūkumas yra tas, kad kai laiko intervalų skaičius n>20, algoritmas reikalauja didelės kompiuterio spartos ir didesnių sąnaudų.

LITERATŪRA

1. Brick, J. R.; Baker, H. K.; Haslenn, J. A. Financial markets instruments and concepts. Virginia, „Reston publishing company“, 1986, p. 595.

2. John, Y. Campbell; Andrew, W. Lo; A. Craig, MacKinlay. The econometrics of financial markets. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

3. John, C. Hull. Options, futures, and other derivative securities. University of Toronto. Prentice-Hall International, Inc., p.492

4. Joshi, M. The Concepts and Practice of Mathematical Finance, Cambridge University Press, 2003.

5. Stewart, Mayhew. Security price dynamics and simulation in financial engineering. Terry College of Business. University of Georgia. Athens, GA 30606–6253, U.S.A. http//www.informs-cs.org/wsc02papers/214.pdf

6. Stephen, J. Taylor. Asset price dynamics, volatility, and prediction. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2005.

7. www.chicagogsb.edu/research/selectedpapers/sp16.pdf

8. http://www.columbia.edu/~ww2040/IEOR4106S06/lect0126.pdf

9. www.e-m-h.org/LoMa88.pdf

10. http://links.jstor.org/sici?sici=0012-9682(193307)1%3A3%3C309%3ACSMFF%3E2.0.CO%3B2-S

11. http://links.jstor.org/sici?sici=0022-1082%28199007%2945%3A3%3C881%3AEOPBOS%3E2.0.CO%3B2-%23&origin=repec

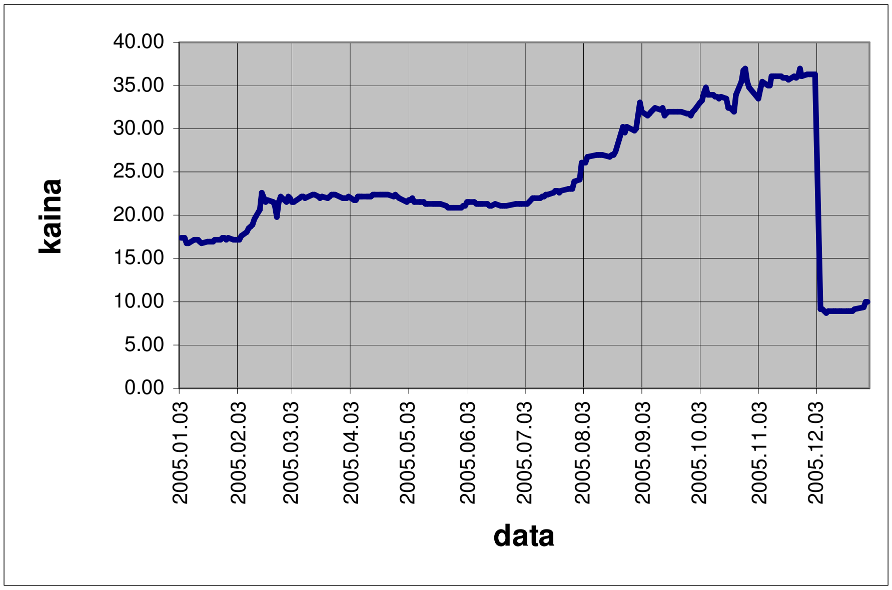
12. www.probabilityandfinance.com/chapters/chap9.pdf

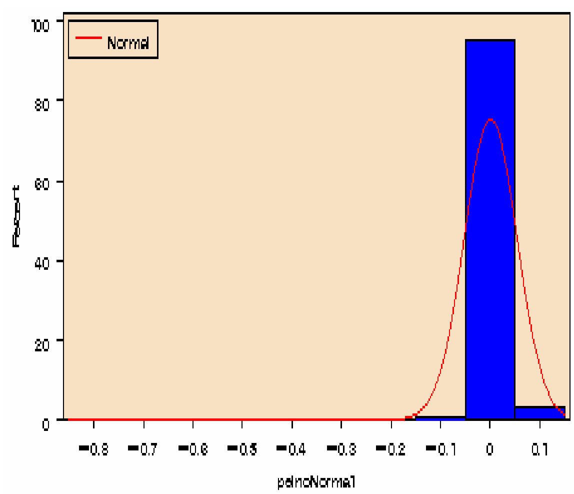
13. http://pup.princeton.edu/titles/8055.html

14. http://www.xplore-stat.de/tutorials/xlghtmlnode61.html

15. www.unav.es/econom/investigacion/working/wp0202.pdf

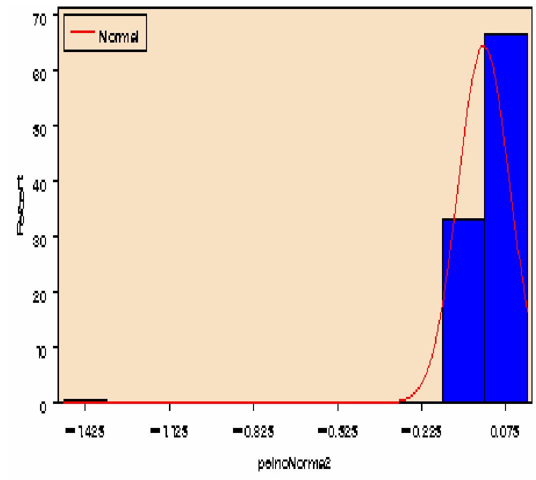
1 Priedas. „Apranga” akcijų kainų pelno normų tyrimas





Tests for Normality

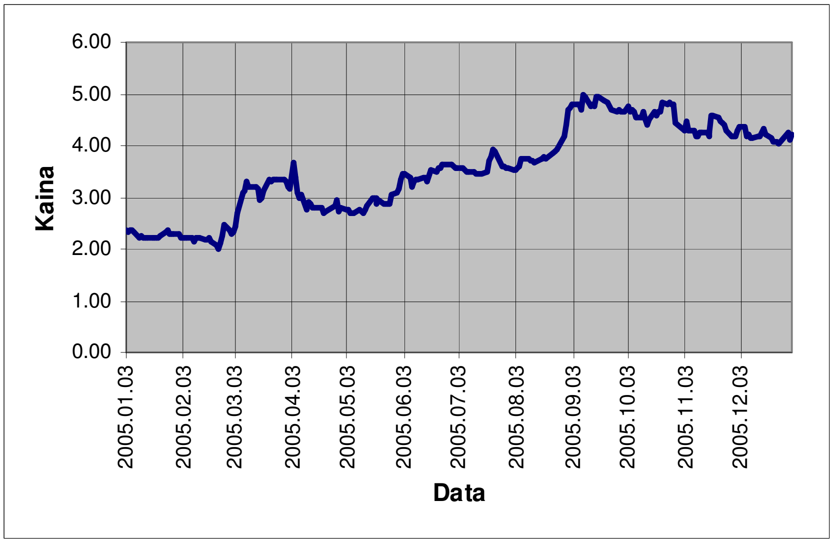
Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.261779	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.312978	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	8.621104	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	43.70804	Pr > A-Sq	<0.0050

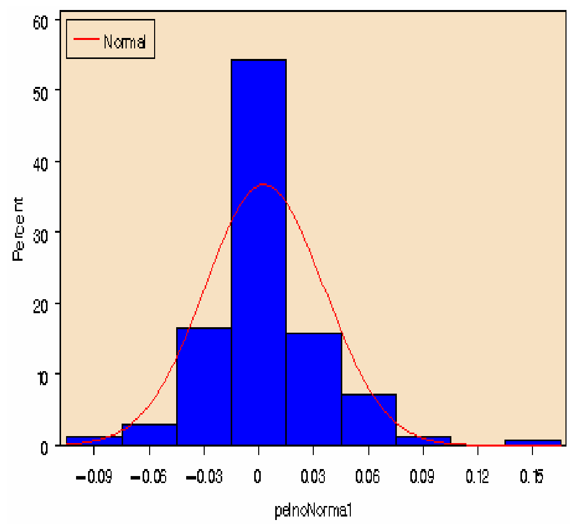


Tests for Normality

Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.142609	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.368862	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	12.21318	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	60.36027	Pr > A-Sq	<0.0050

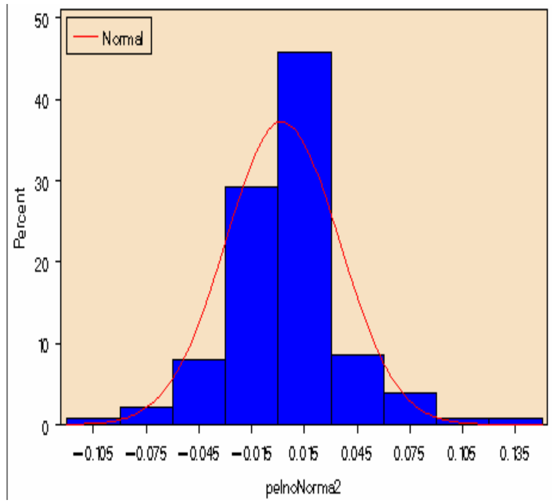
2 Priedas. „Dvarčionių keramika" akcijų kainų pelno normų tyrimas





Tests for Normality

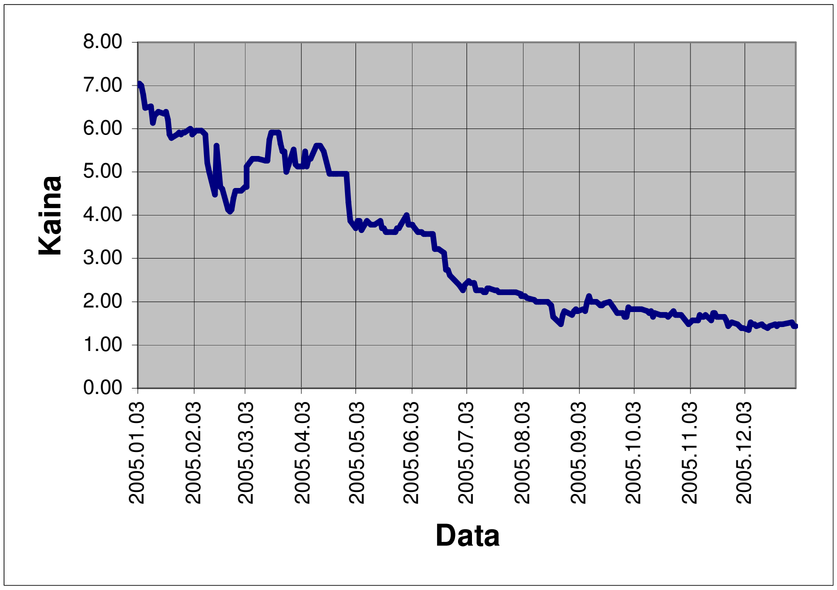
Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.914984	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.14184	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	1.302385	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	6.53354	Pr > A-Sq	<0.0050

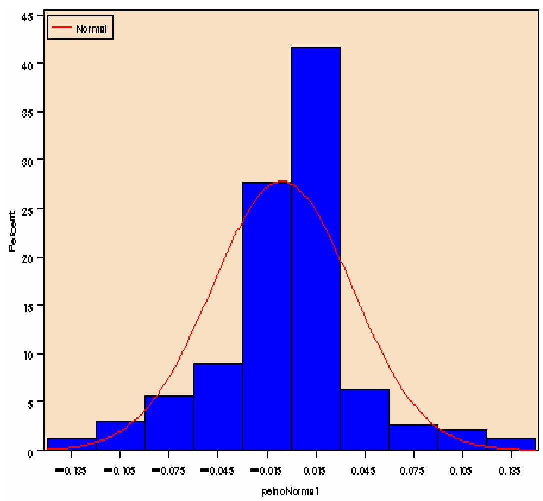


Tests for Normality

Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.924815	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.135901	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	1.210184	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	6.075402	Pr > A-Sq	<0.0050

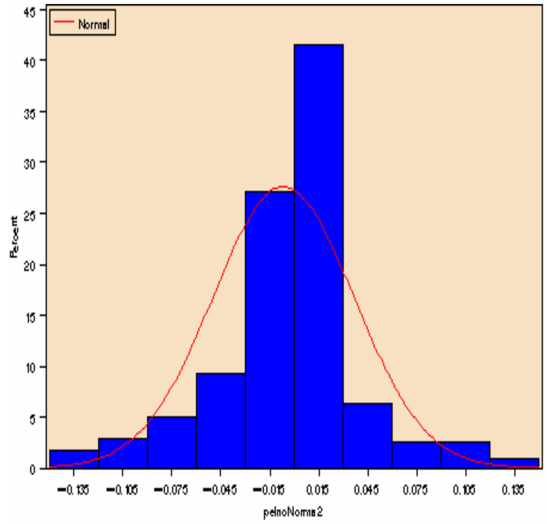
3 Priedas. „Ekranas" akcijų kainų pelno normų tyrimas





Tests for Normality

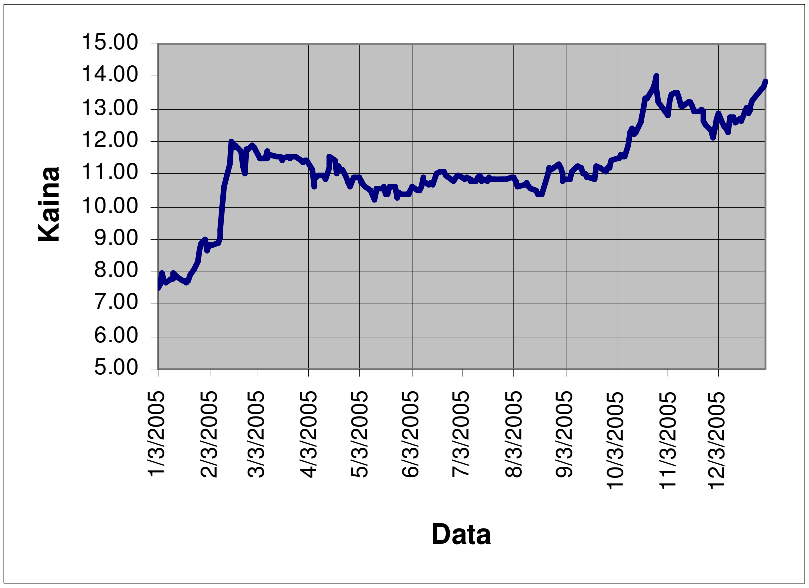
Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.921852	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.154293	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	1.617628	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	7.846373	Pr > A-Sq	<0.0050

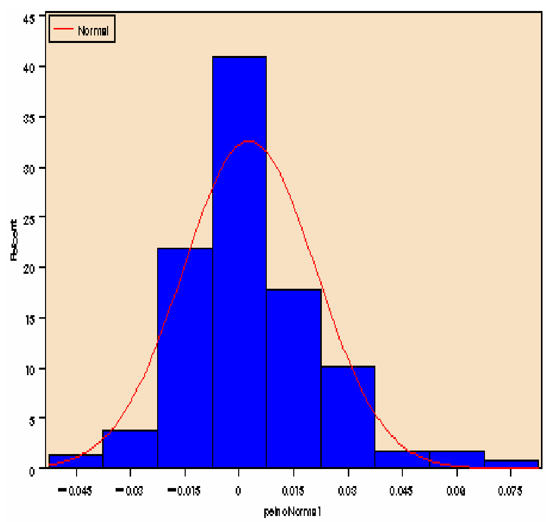


Tests for Normality

Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.92259	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.145984	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	1.640537	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	7.950015	Pr > A-Sq	<0.0050

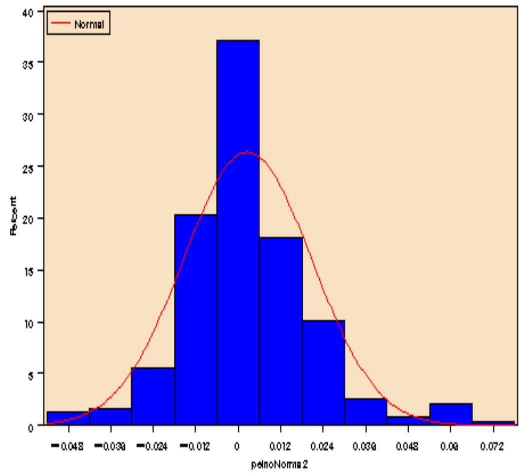
4 Priedas. „Invalda” akcijų pelno normų tyrimas





Tests for Normality

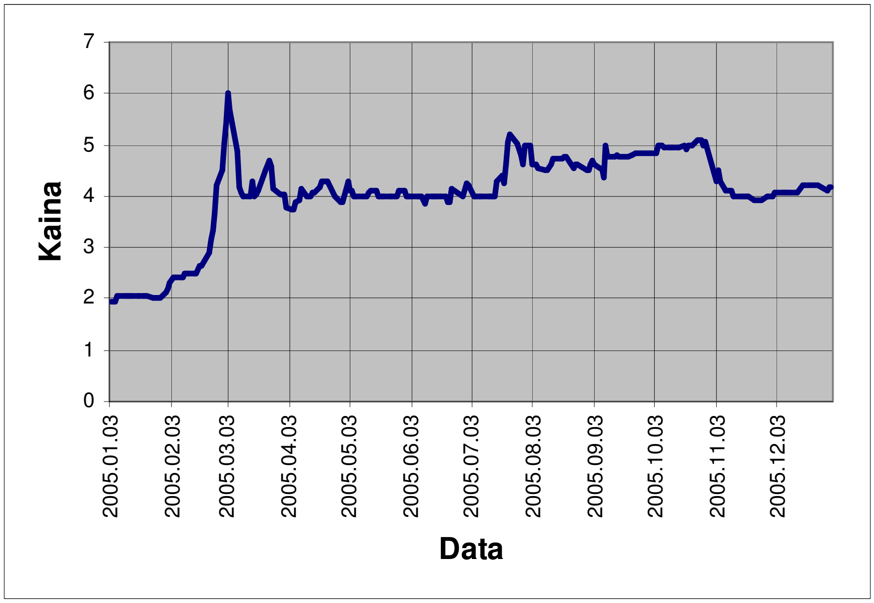
Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.941411	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.11465	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	0.706331	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	3.894418	Pr > A-Sq	<0.0050

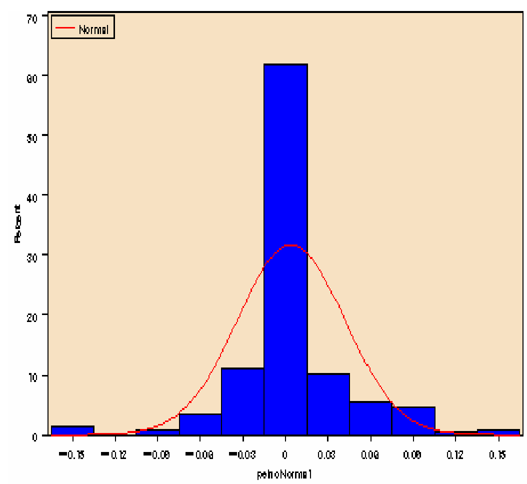


Tests for Normality

Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.9473	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.110739	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	0.652375	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	3.596099	Pr > A-Sq	<0.0050

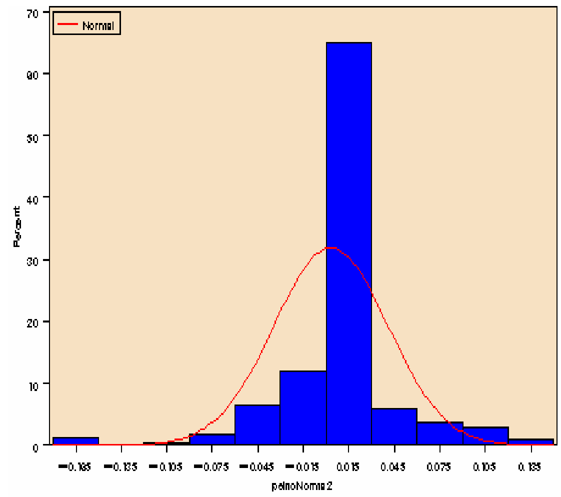
5 Priedas. „Kauno energija” akcijų kainų pelno normų tyrimas





Tests for Normality

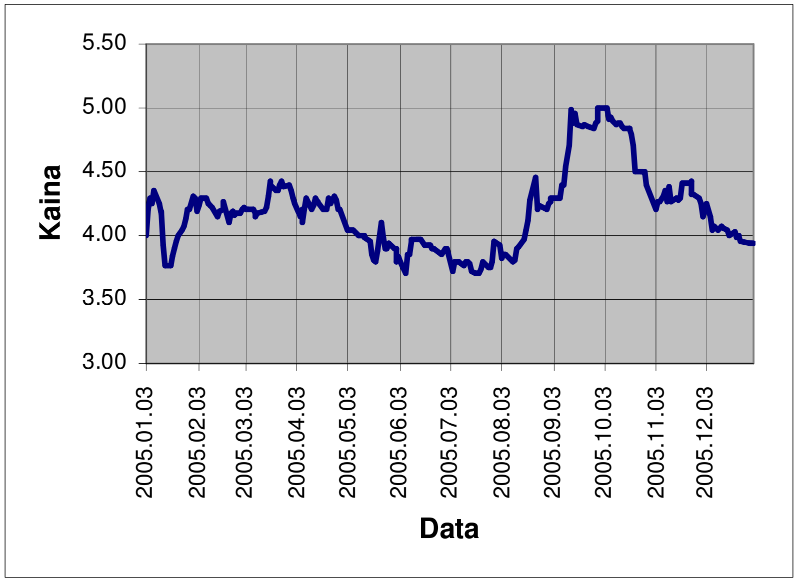
Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.813151	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.26013	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	4.296714	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	19.72945	Pr > A-Sq	<0.0050

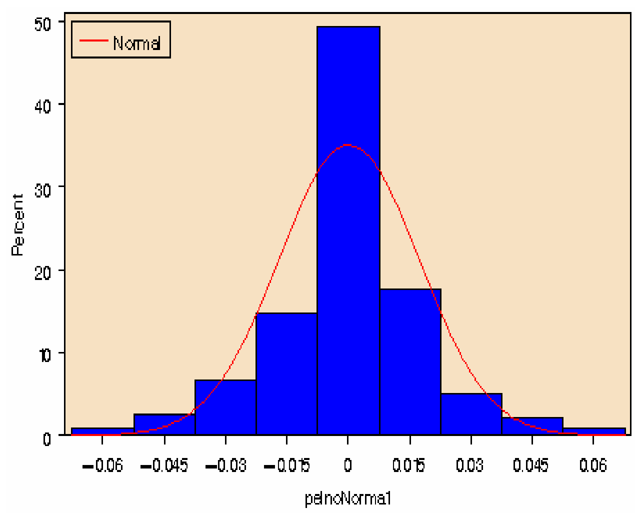


Tests for Normality

Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.811612	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.252654	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	4.246153	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	19.44069	Pr > A-Sq	<0.0050

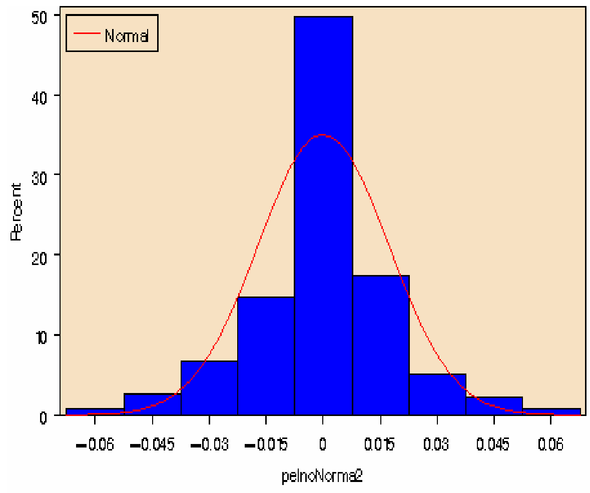
6 Priedas. „Lietuvos dujos" akcijų kainų pelno normų tyrimas





Tests for Normality

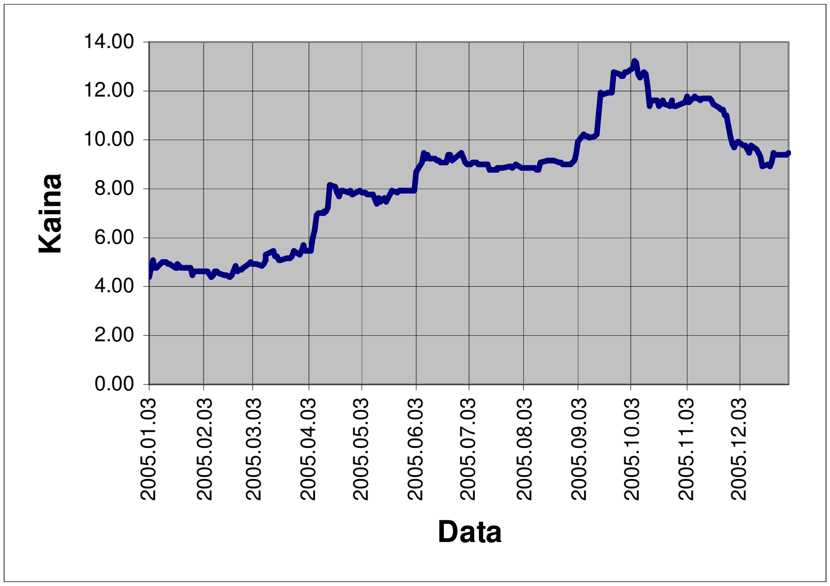
Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.952477	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.11412	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	0.889994	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	4.349933	Pr > A-Sq	<0.0050

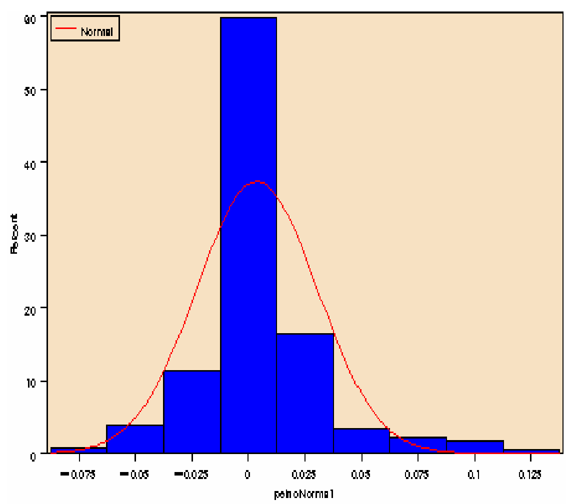


Tests for Normality

Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.951736	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.117524	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	0.897908	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	4.393721	Pr > A-Sq	<0.0050

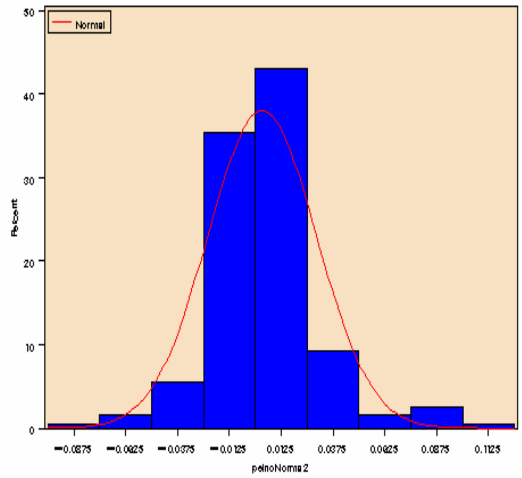
7 Priedas. „Mažeikių nafta” akcijų kainų pelno normų tyrimas





Tests for Normality

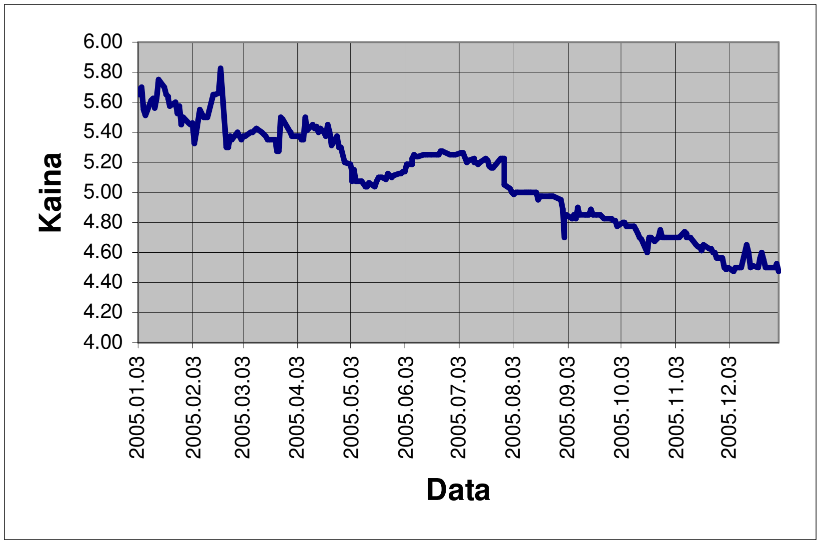
Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.876005	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.16029	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	1.860457	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	9.742875	Pr > A-Sq	<0.0050

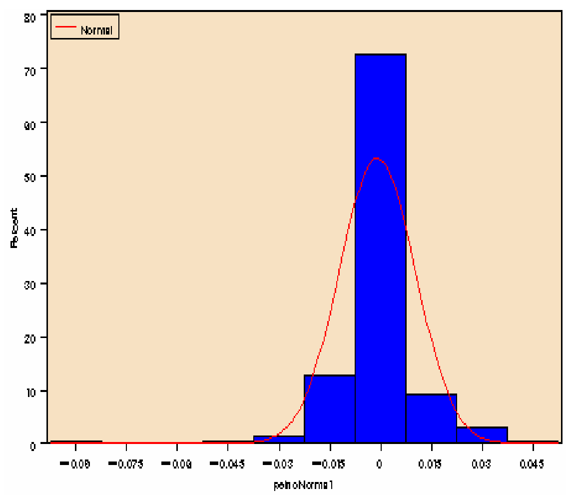


Tests for Normality

Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.887018	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.154363	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	1.749289	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	9.151088	Pr > A-Sq	<0.0050

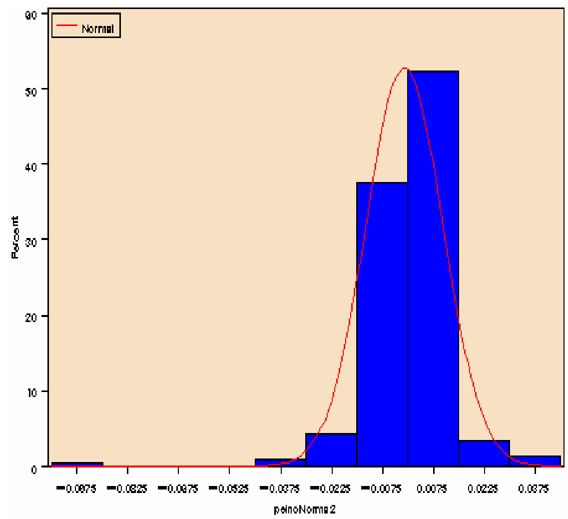
8 Priedas. „Pieno žvaigždės" akcijų kainų pelno normų tyrimas





Tests for Normality

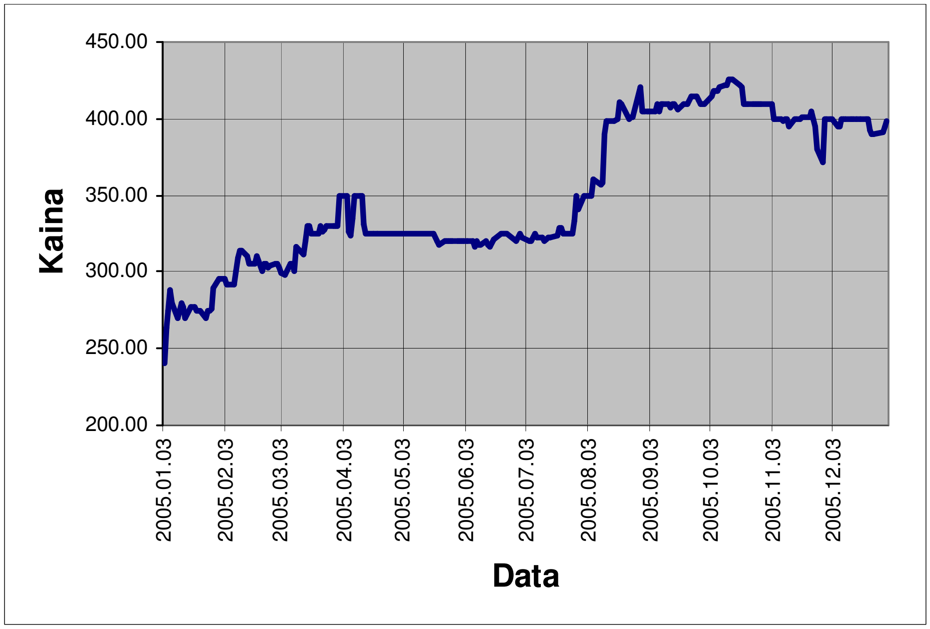
Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.781031	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.192179	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	2.603502	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	13.25067	Pr > A-Sq	<0.0050

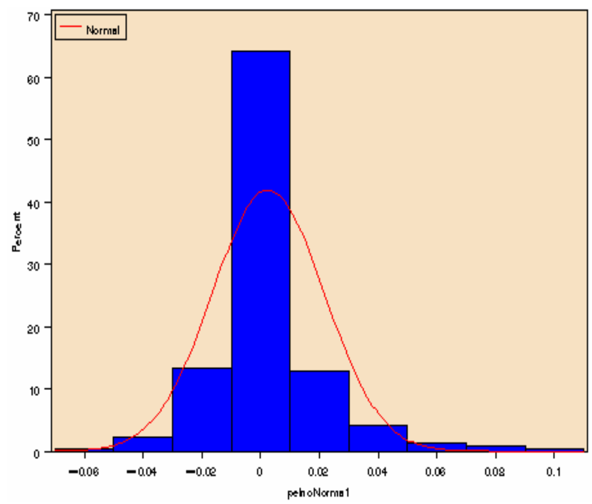


Tests for Normality

Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.769697	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.190333	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	2.656616	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	13.51759	Pr > A-Sq	<0.0050

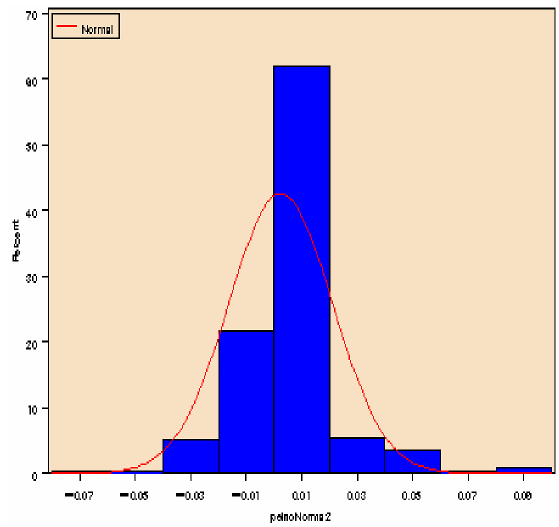
9 Priedas. „VST” akcijų kainų pelno normų tyrimas





Tests for Normality

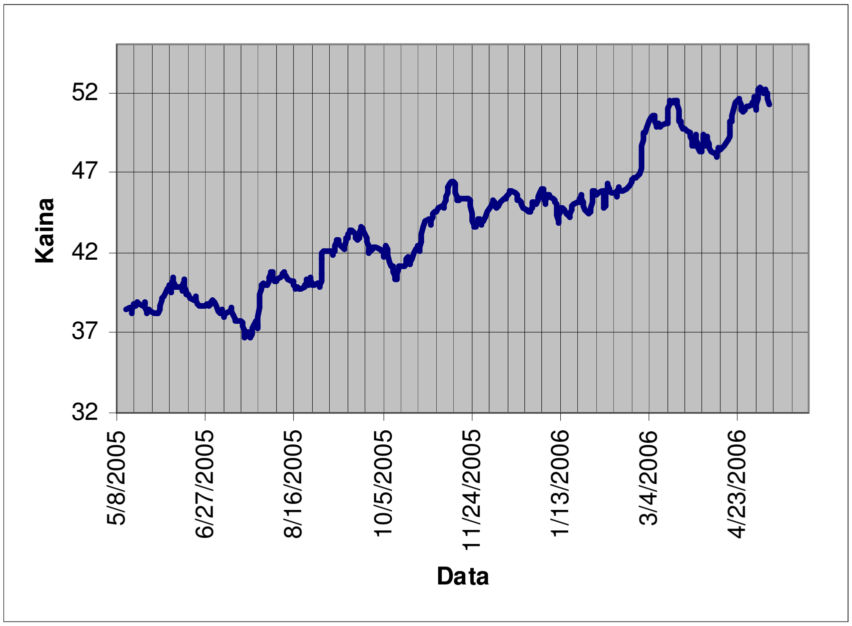
Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.819274	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.226759	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	2.993934	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	14.35538	Pr > A-Sq	<0.0050

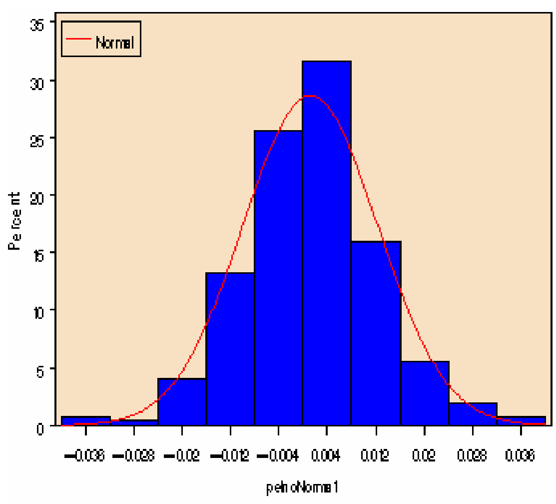


Tests for Normality

Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.828236	Pr < W	<0.0001
Kolmogorov-Smirnov	D	0.22373	Pr > D	<0.0100
Cramer-von Mises	W-Sq	2.91437	Pr > W-Sq	<0.0050
Anderson-Darling	A-Sq	13.93175	Pr > A-Sq	<0.0050

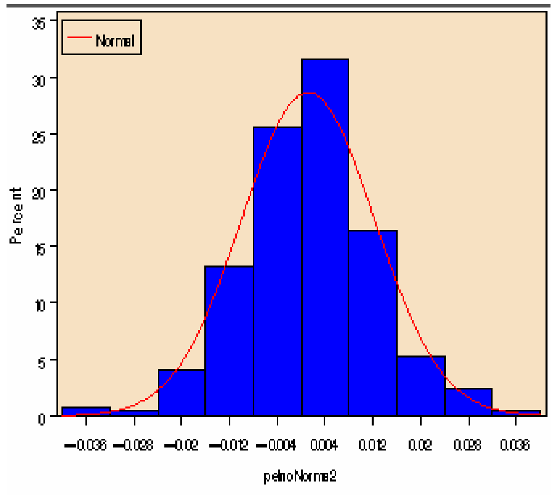
10 Priedas. „British American Tobacco” akcijų kainų pelno normų tyrimas





Tests for Normality

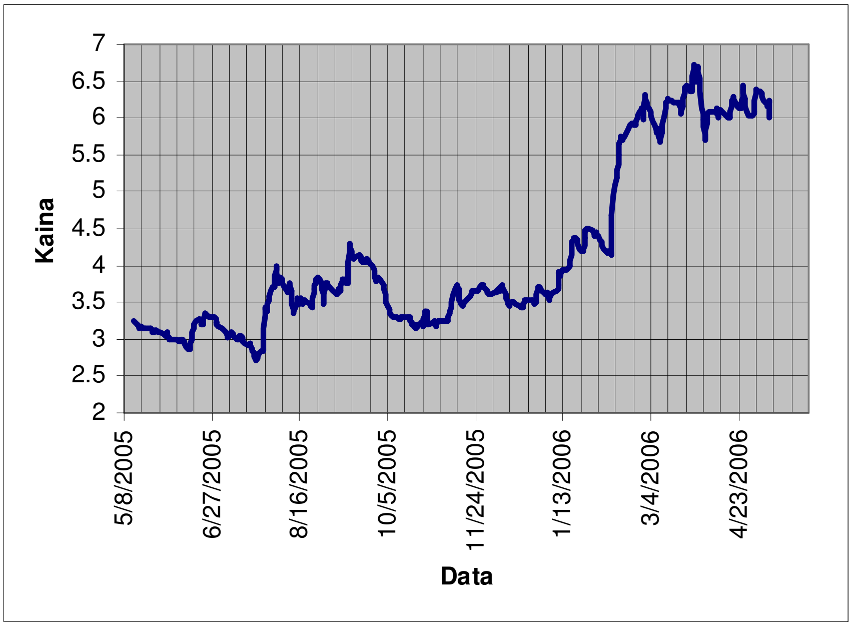
Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.99242	Pr < W	0.2295
Kolmogorov-Smirnov	D	0.039421	Pr > D	>0.1500
Cramer-von Mises	W-Sq	0.096463	Pr > W-Sq	0.1282
Anderson-Darling	A-Sq	0.570863	Pr > A-Sq	0.1417

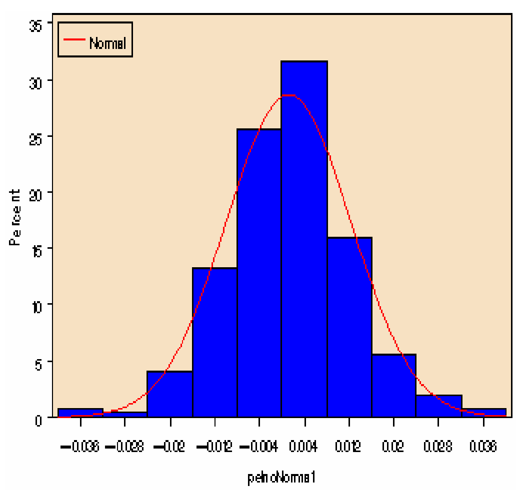


Tests for Normality

Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.992452	Pr < W	0.2325
Kolmogorov-Smirnov	D	0.038193	Pr > D	>0.1500
Cramer-von Mises	W-Sq	0.094447	Pr > W-Sq	0.1360
Anderson-Darling	A-Sq	0.556973	Pr > A-Sq	0.1526

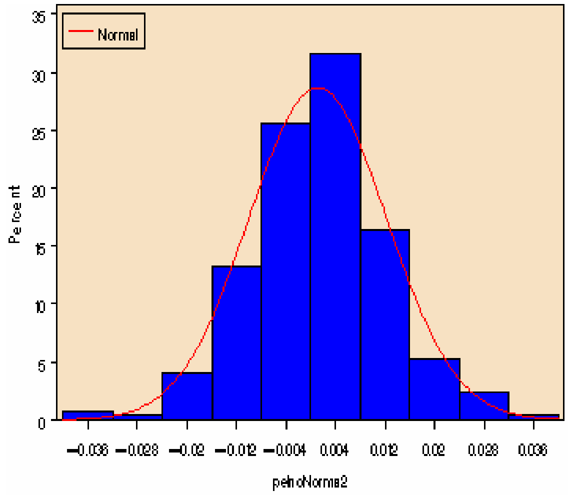
11 Priedas. „Cybex international” akcijų kainų pelno normų tyrimas





Tests for Normality

Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.99242	Pr < W	0.2295
Kolmogorov-Smirnov	D	0.039421	Pr > D	>0.1500
Cramer-von Mises	W-Sq	0.096463	Pr > W-Sq	0.1282
Anderson-Darling	A-Sq	0.570863	Pr > A-Sq	0.1417



Tests for Normality

Test	--Statistic---		-----p Value------	
Shapiro-Wilk	W	0.992452	Pr < W	0.2325
Kolmogorov-Smirnov	D	0.038193	Pr > D	>0.1500
Cramer-von Mises	W-Sq	0.094447	Pr > W-Sq	0.1360
Anderson-Darling	A-Sq	0.556973	Pr > A-Sq	0.1526

12 Priedas. Programų tekstai

```
/* duomenu (pelno normu) ivedimas*/
data apranga_akcijos;
   input pelnoNorma1 pelnoNorma2;
cards;
0.00000 0.00000
0.01156 0.01149
-0.04571        -0.04679
0.00000 0.00000
0.02994 0.02950
0.00291 0.00290
-0.00290        -0.00290
-0.01163        -0.01170
-0.01176        -0.01183
0.01190 0.01183
-0.00471        -0.00472
0.00473 0.00472
0.00000 0.00000
0.01118 0.01111
0.00349 0.00348
0.00870 0.00866
-0.00287        -0.00288
-0.01153        -0.01159
0.00816 0.00813
-0.00810        -0.00813
0.00058 0.00058
0.00291 0.00291
0.00116 0.00116
0.02612 0.02578
0.01584 0.01571
0.02951 0.02908
0.01028 0.01022
0.01767 0.01751
0.03156 0.03107
0.05048 0.04925
0.09466 0.09044
-0.05011        -0.05141
0.01541 0.01529
-0.00690        -0.00692
-0.02639        -0.02674
-0.06087        -0.06280
0.08861 0.08490
0.03256 0.03204
-0.02703        -0.02740
0.02315 0.02288
-0.00452        -0.00454
-0.02273        -0.02299
0.00465 0.00464
0.01852 0.01835
0.00455 0.00454
0.00000 0.00000
-0.00452        -0.00454
0.01364 0.01354
0.00000 0.00000
-0.00897        -0.00901
-0.00452        -0.00454
0.00455 0.00454
-0.00452        -0.00454
0.00455 0.00454
0.00905 0.00901
0.00448 0.00447
-0.00223        -0.00223
-0.01298        -0.01306
-0.00227        -0.00227
-0.00045        -0.00045
0.00318 0.00318
-0.01223        -0.01231
0.00000 0.00000
0.01376 0.01367
0.00452 0.00451
0.00000 0.00000
-0.00450        -0.00451
0.00000 0.00000
0.00679 0.00676
0.00674 0.00672
-0.00223        -0.00223
```

0.00045	0.00045	
0.00000	0.00000	
-0.00268		-0.00269
0.00000	0.00000	
0.00852	0.00848	
-0.01512		-0.01523
0.00903	0.00899	
-0.01119		-0.01125
-0.00452		-0.00454
-0.01818		-0.01835
0.00463	0.00462	
0.00230	0.00230	
0.01103	0.01097	
-0.01774		-0.01789
-0.00463		-0.00464
0.00000	0.00000	
-0.00465		-0.00466
-0.00748		-0.00750
0.00000	0.00000	
0.00047	0.00047	
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
-0.01176		-0.01183
-0.00952		-0.00957
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
0.00481	0.00480	
0.00478	0.00477	
0.00000	0.00000	
0.02381	0.02353	
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
-0.00465		-0.00466
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
-0.00935		-0.00939
0.00000	0.00000	
-0.00425		-0.00425
0.00095	0.00095	
0.00331	0.00331	
-0.00472		-0.00473
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
0.00711	0.00708	
-0.00235		-0.00236
0.00047	0.00047	
0.00000	0.00000	
0.01839	0.01822	
0.01157	0.01151	
0.00686	0.00684	
0.00000	0.00000	
0.01136	0.01130	
0.00000	0.00000	
0.00674	0.00672	
-0.00313		-0.00313
0.01657	0.01643	
0.00441	0.00440	
-0.00219		-0.00220
-0.00220		-0.00220
0.00441	0.00440	
0.00877	0.00873	
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
0.04130	0.04047	
0.01044	0.01038	
0.07438	0.07174	
0.00000	0.00000	
0.00385	0.00384	
0.02299	0.02273	
0.01124	0.01117	
-0.00185		-0.00185
0.00186	0.00185	
0.00000	0.00000	
-0.00741		-0.00743
0.00187	0.00186	
0.00559	0.00557	

0.01852	0.01835	
0.10000	0.09531	
-0.02479		-0.02511
0.02339	0.02312	
-0.01292		-0.01300
0.00671	0.00669	
0.05000	0.04879	
0.04762	0.04652	
-0.03273		-0.03327
-0.01316		-0.01325
0.01016	0.01011	
0.00566	0.00564	
0.00625	0.00623	
0.00932	0.00927	
-0.00923		-0.00927
0.00901	0.00897	
-0.02739		-0.02778
0.00158	0.00158	
0.01106	0.01100	
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
-0.00313		-0.00313
-0.00627		-0.00629
0.00000	0.00000	
-0.00315		-0.00316
0.01266	0.01258	
0.00625	0.00623	
0.02516	0.02484	
0.00879	0.00875	
0.02402	0.02374	
0.01906	0.01888	
-0.02590		-0.02624
0.00118	0.00118	
-0.00266		-0.00266
0.00000	0.00000	
-0.01183		-0.01190
0.00749	0.00746	
-0.00446		-0.00447
-0.02985		-0.03031
-0.00615		-0.00617
-0.00929		-0.00933
0.06250	0.06062	
0.04118	0.04035	
0.03955	0.03879	
0.00543	0.00542	
-0.04054		-0.04139
-0.01972		-0.01992
-0.04023		-0.04106
0.03323	0.03269	
0.02869	0.02828	
-0.01408		-0.01418
0.00000	0.00000	
0.02857	0.02817	
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
-0.00278		-0.00278
0.00000	0.00000	
-0.00251		-0.00251
-0.00168		-0.00168
0.00699	0.00697	
-0.00139		-0.00139
0.00139	0.00139	
0.02361	0.02334	
-0.02307		-0.02334
0.00944	0.00940	
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
-0.75124		-1.39126
-0.00111		-0.00111
-0.00221		-0.00222
-0.00444		-0.00445
-0.00446		-0.00447
0.00224	0.00224	
0.00000	0.00000	
0.00000	0.00000	
0.00559	0.00557	

```
-0.00222        -0.00222
-0.00111        -0.00111
0.00223 0.00223
0.00111 0.00111
0.00556 0.00554
0.03094 0.03047
0.07181 0.06935
0.00000 0.00000
;
run;
/*tikrinamas normalumas*/
proc univariate data=apranga_akcijos normal;
  var pelnoNorma1 pelnoNorma2;
    run;



/* standartinio normaliojo skirstinio reiksmiu generavimas*/
data one;
array y[100];
  do i=1 to 251;
       do j=1 to 100;
              x = rannor(0);
              y[j]=x;
       end;
       output ;
  end;
 run;
proc print data=one;
run;



unit classBinTree;
interface
uses
  SysUtils, Math;
type
  TTreeLeafSide = (lsLeft, lsRight);
  TTreeLeaf = class(TObject)
  private
    fLevel: Integer;
    fS: Double;
    fU: Double;
    fD: Double;
    fUPower: Double;
    fDPower: Double;
    fValue: Double;
    fParentLeaf: TTreeLeaf;
    fLeftLeaf: TTreeLeaf;
    fRightLeaf: TTreeLeaf;
    fProcessed: Boolean;

  public
    constructor Create(Root: TTreeLeaf);
    destructor Destroy; override;

    function AddLeaf(LeafSide: TTreeLeafSide): TTreeLeaf;

  published
    property Level: Integer read fLevel write fLevel;
    property ParentLeaf: TTreeLeaf read fParentLeaf write fParentLeaf;
    property LeftLeaf: TTreeLeaf read fLeftLeaf write fLeftLeaf;
    property RightLeaf: TTreeLeaf read fRightLeaf write fRightLeaf;
    property Value: Double read fValue write fValue;
    property S: Double read fS write fS;
    property U: Double read fU write fU;
    property UPower: Double read fUPower write fUPower;
    property D: Double read fD write fD;
    property DPower: Double read fDPower write fDPower;
    property Processed: Boolean read fProcessed write fProcessed;
  end;

  TBinTree = class(TObject)
  private
    fRoot: TTreeLeaf;
    fLeftLeaf: TTreeLeaf;
    fRightLeaf: TTreeLeaf;
```

```
    fU: Double;
    fD: Double;
    fN: Integer;
    fDeltaT: Double;
    fSigma: Double;
    fMu: Double;
    fS: Double;
    fBuilt: Boolean;
    procedure fCalculateUD;
    procedure fAddLeafs(Leaf: TTreeLeaf; MaxLevel: Integer);

  public
    constructor Create;
    destructor Destroy; override;
    procedure BuildTree;
    procedure ResetTree;

  published
    property Root: TTreeLeaf read fRoot;
    property LeftLeaf: TTreeLeaf read fLeftLeaf;
    property RightLeaf: TTreeLeaf read fRightLeaf;
    property ValueN: Integer read fN write fN;
    property ValueDeltaT: Double read fDeltaT write fDeltaT;
    property ValueSigma: Double read fSigma write fSigma;
    property ValueMu: Double read fMu write fMu;
    property ValueS: Double read fS write fS;
    property ResultU: Double read fU;
    property ResultD: Double read fD;
  end;

implementation
{ TTreeLeaf }
function TTreeLeaf.AddLeaf(LeafSide: TTreeLeafSide): TTreeLeaf;
var
  Leaf: TTreeLeaf;
  CanCreate: Boolean;
begin
  Leaf := TTreeLeaf.Create(Self);
  Leaf.ParentLeaf := Self;
  Leaf.Level := Self.fLevel + 1;
  Leaf.S := Self.fS;
  Leaf.U := Self.fU;
  Leaf.D := Self.fD;
  Leaf.DPower := Self.DPower;
  Leaf.UPower := Self.UPower;
  CanCreate := True;
  if (LeafSide = lsLeft) then
  begin
    if (Self.ParentLeaf <> nil) then
    begin
      if (Self.ParentLeaf.LeftLeaf <> nil) then
      begin
        if (Self.ParentLeaf.LeftLeaf.RightLeaf <> nil) then
        begin
          CanCreate := False;
          FreeAndNil(Leaf);
          Leaf := Self.ParentLeaf.LeftLeaf.RightLeaf;
          Self.fLeftLeaf := Leaf;
        end;
      end;
    end;
    if (CanCreate = True) then
    begin
      Leaf.DPower := Leaf.DPower + 1;
      Leaf.Value := S * Power(Leaf.U, Leaf.UPower) * Power(Leaf.D, Leaf.DPower);
      Self.fLeftLeaf := Leaf;
    end;
  end;

  if (LeafSide = lsRight) then
  begin
    Leaf.UPower := Leaf.UPower + 1;
    Leaf.Value := S * Power(Leaf.U, Leaf.UPower) * Power(Leaf.D, Leaf.DPower);
    Self.fRightLeaf := Leaf;
  end;

  Result := Leaf;
end;
```

```
constructor TTreeLeaf.Create(Root: TTreeLeaf);
begin
  inherited Create;
  fParentLeaf := Root;
  fUPower := 0;
  fDPower := 0;
  fLeftLeaf := nil;
  fRightLeaf := nil;
  fProcessed := False;
end;

destructor TTreeLeaf.Destroy;
begin
  if (fLeftLeaf <> nil) then
      FreeAndNil(fLeftLeaf);
  if (fRightLeaf <> nil) then
      FreeAndNil(fRightLeaf);
  inherited Destroy;
end;

{ TBinTree }
procedure TBinTree.BuildTree;
begin
  if (fBuilt = True) then
  begin
    if (fRoot <> nil) then FreeAndNil(fRoot);
    if (fLeftLeaf <> nil) then FreeAndNil(fLeftLeaf);
    if (fRightLeaf <> nil) then FreeAndNil(fRightLeaf);
  end;

  fCalculateUD;
  fRoot := TTreeLeaf.Create(nil);
  fRoot.fLevel := 0;
  fRoot.fS := Self.fS;
  fRoot.fU := Self.fU;
  fRoot.fD := Self.fD;
  fRoot.fUPower := 0;
  fRoot.fDPower := 0;
  fRoot.fValue := Self.fS;
  fAddLeafs(fRoot, Self.fN);
end;

constructor TBinTree.Create;
begin
  inherited Create;
  fRoot := nil;
  fLeftLeaf := nil;
  fRightLeaf := nil;
  fBuilt := False;
end;

destructor TBinTree.Destroy;
begin
  if (fLeftLeaf <> nil) then FreeAndNil(fLeftLeaf);
  if (fRightLeaf <> nil) then FreeAndNil(fRightLeaf);
  inherited Destroy;
end;

procedure TBinTree.fAddLeafs(Leaf: TTreeLeaf; MaxLevel: Integer);
begin
  if (Leaf <> nil) then
  begin
    Leaf.AddLeaf(lsLeft);
    Leaf.AddLeaf(lsRight);
    if (Leaf.Level + 1 <>  MaxLevel) then
    begin
      fAddLeafs(Leaf.LeftLeaf, MaxLevel);
      fAddLeafs(Leaf.RightLeaf, MaxLevel);
    end;
  end;
end;

procedure TBinTree.fCalculateUD;
begin
  fU := Exp(fSigma * Sqrt(fDeltaT));
  fD := 1 / fU;
end;

procedure TBinTree.ResetTree;
```

```
{ ---- }
procedure fRecursiveReset(Leaf: TTreeLeaf);
begin
  Leaf.Processed := False;
  if (Leaf.LeftLeaf <> nil) then frecursiveReset(Leaf.LeftLeaf);
  if (Leaf.RightLeaf <> nil) then frecursiveReset(Leaf.RightLeaf);
end;
{ ---- }
begin
  fRecursiveReset(Root);
end;

end.
```