KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

IndraMontvydaitė

APATINIŲ EKSTREMUMŲ ASIMPTOTINIAI TYRIMAI

Magistro darbas

Vadovas
prof. dr. J. A. Aksomaitis

KAUNAS, 2004

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. dr. J.Rimas

2004 06 11

APATINIŲ EKSTREMUMŲ ASIMPTOTINIAI TYRIMAI

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Kalbos konsultantas
dr. J.Džežulskienė
2004 05 30

Vadovas
prof.dr. J.A.Aksomaitis
2004 06 03

Recenzentas
prof. J.Sapagovas
2004 06 01

Atliko
FMMM 2 gr. stud.
I. Montvydaitė
2004 05 27

KAUNAS, 2004

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, profesorius (MII)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Montvydaitė I. Lower extreme asymptotical analysis: Master‘s work in applied mathematics / supervisor prof. dr. J. A. Aksomaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2004. – 43 p.

SUMMARY

The lower extreme asymptotic is analised in this master’s work. I have analysed the marginal term $X_k^{(N)}$ case, when sample size N is accidental. The ordinary accidental sample is taken from general set, what is spreaded along logistic low $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}; \quad x \in (-\infty;+\infty)$.

I have searched for logistic dimensions minimum limiting distribution function in the investigative part. Than I’ve practised transfering theorem. My task is to find such normalization, along what logistic dimensions lower extreme distribution functions are geometrically ministable or asymptotically k-stable.

I have proved in my job, that first lower extreme distribution function is geometrically ministable, and other distribution functions – asymptotically k-stable.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮŽANGA

Šiame magistro darbe yra tiriama apatinių ekstremumų asimptotika. Nagrinėjamos minimumų ribinės teoremos, kurios duoda tam tikrą normalizavimo konstantų sekų parinkimą ir nustato sąlygas, būtinas pasiskirstymo funkcijai F, tam kad gauti neišsigimusius ribinius skirstinius, kai imties tūris neaprėžtai didėja. Naudojant ribinius skirstinius, patogiau modeliuoti šias struktūras.

Tarkime, kad $(X_1, X_2, ..., X_n)$ yra paprastoji atsitiktinė imtis iš generalinės aibės su skirstinio funkcija F. Sudarome variacinę eilutę:

$$X_1^{(n)} \le X_2^{(n)} \le ... \le X_n^{(n)}.$$

Nariai $X_k^{(n)}$ ir $X_{n-k+1}^{(n)}$, kai $k \ge 1$ fiksuotas, vadinami variacinės eilutės kraštiniais nariais. Kai $k = 1$, gauname variacinės eilutės ekstremaliąsias reikšmes (minimumą ir maksimumą).

Šiame darbe tiriu kraštinį narį $X_k^{(N)}$, kai imties tūris N yra atsitiktinis. Nagrinėju atvejį, kai paprastoji atsitiktinė imtis yra iš generalinės aibės, pasiskirsčiusios pagal logistinį dėsnį $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}; \quad x \in (-\infty; +\infty)$. Straipsnyje [5] tiriami geometriškai stabilieji maksimumo skirstiniai. Taip pat įrodoma, jog logistinių dydžių skirstiniai yra stabilieji maksimumo skirstiniai. Tačiau nenagrinėjami stabilieji minimumo skirstiniai, nėra atliktas tyrimas su k-aisiais apatiniais ekstremumais. Mano tikslas – patikrinti, ar logistiniai dydžiai bus stabilieji minimumo skirstiniai, o taip pat pratęsti šios srities tyrimus apatinių ekstremumų struktūroms.

Taigi, tiriamojoje dalyje ieškau logistinių dydžių minimumų ribinių skirstinių. Apskaičiuoju normalizavimo konstantas. Naudodama gautus rezultatus, logistinių dydžių apatiniams ekstremumas taikau perkėlimo teoremą. Toliau ieškau tokių normavimo konstantų, su kuriomis logistinių dydžių skirstiniai yra geometriškai stabilūs minimumo skirstiniai arba asimptotiškai k-stabilūs. Įvertinu šio normavimo privalumus lygindama gautus rezultatus su perkėlimo teoremos rezultatais.

Šiame darbe įrodžiau, jog minimumo skirstinys (kai $k = 1$) yra geometriškai stabilus minimumo skirstinys, o kiti – asimptotiškai k-stabilūs. Galima pastebėti, jog stabiliųjų minimumo skirstinių kriterijaus išpildymas leidžia operatyviai modeliuoti apatinius ekstremumus.

Šia tematika skaičiau pranešimus konferencijose:

IV taikomosios matematikos studentų konferencija (2002 metai), pranešimo tema:

„Viršutinių ekstremumų asimptotika“;

V taikomosios matematikos studentų konferencija (2004 metai), pranešimo tema:

„Apatinių ekstremumų asimptotiniai tyrimai“.

Prieduose yra pateikta pranešimų medžiaga.

1. BENDROJI DALIS

1.1. APIBRĖŽIMAI

Tarkime, kad $(X_1, X_2, ..., X_n)$ yra dydžio X paprastoji atsitiktinė imtis su skirstinio funkcija F. Surašykime imties elementus jų didėjimo tvarka:

$$X_1^{(n)} \le X_2^{(n)} \le ... \le X_n^{(n)} \tag{1.1}$$

1. Apibrėžimas. [4] Seką (1.1) vadinsime variacine imties eilute, o jos elementus $X_k^{(n)}$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ - k-tosiomis pozicinėmis statistikomis.

Jeigu k – fiksuotas, o $n \to \infty$, tai $X_k^{(n)}$ vadiname k-tuoju apatiniu ekstremumu.

2. Apibrėžimas. [1] Skirstinį vadinsime geometriškai stabiliu minimumo skirstiniu, jei

$$P\left(a(p)X_k^{(N)} - b(p) < x\right) = F_X(x) \tag{1.2}$$

čia $a(p) > 0$, $b(p) \in R$;

N – atsitiktinis dydis, nepriklausantis nuo X_i, $i = \overline{1,N}$ ir geometriškai pasiskirstęs.

3. Apibrėžimas. [1] Skirstinį vadinsime asimptotiškai k-stabiliu, jei

$$\lim_{p \to 0} P\left(a(p)X_k^{(N)} - b(p) < x\right) = F_X^k(x) \tag{1.3}$$

čia $a(p) > 0$, $b(p) \in R$;

N – atsitiktinis dydis, nepriklausantis nuo X_i, $i = \overline{1,N}$ ir geometriškai pasiskirstęs.

1.2. MINIMUMŲ RIBIN ĖS TEOREMOS

Tarkime, kad $X_1, X_2, ..., X_n$ – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir

$$F(x) = P(X_j < x), \ \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}} \tag{1.4}$$

Pažymėkime:

$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n). \tag{1.5}$$

Tuomet

$$L_n(x) = P(W_n < x) = 1 - \left(1 - F(x)\right)^n. \tag{1.6}$$

Pateiksime sąlygas, kurios yra būtinos funkcijai $F(x)$, norint garantuoti konstantų sekų $c_n, d_n > 0$ egzistavimą, su kuriomis

$$\lim_{n\to\infty} L_n(c_n + d_n \cdot x) = L(x) \tag{1.7}$$

visuose funkcijos $L(x)$ tolydumo taškuose; čia $L(x)$ – neišsigimusi pasiskirstymo funkcija. Tokį konvergavimą vadinsime silpnuoju atsitiktinių dydžių konvergavimu. Iš (1.6) formulės matyti, kad (1.7) sąryšis yra ekvivalentus sąryšiui:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - F(c_n + d_n \cdot x)\right)^n = 1 - L(x) \tag{1.8}$$

Viršutinį ribinį skirstinio funkcijos $F(x)$ tašką pažymėkime $\omega(F)$:

$$\omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}, \tag{1.9}$$

o apatinį –

$$\alpha(F) = \inf\{x : F(x) > 0\}. \tag{1.10}$$

Akivaizdu, kad $\omega(F)$ yra arba baigtinis, arba $\omega(F) = +\infty$ ir $\alpha(F)$ yra arba baigtinis, arba $\alpha(F) = -\infty$. Pateiksime stochastinių minimumų ribines teoremas.

1.1 Teorema. Tarkime, kad $\alpha(F) = -\infty$, ir jeigu egzistuoja tokia konstanta $\gamma > 0$, kai su visais $x > 0$ galioja sąryšis:

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\gamma}, \tag{1.11}$$

tuomet egzsituoja tokios konstantos $d_n > 0$, su kuriomis:

$$\lim_{n\to\infty} P\{W_n < d_n x\} = L_{1,\gamma}(x); \tag{1.12}$$

čia
$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(-x)^{-\gamma}}, x < 0, \\ 1, x > 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Normavimo konstantos d_n gali būti parinktos tokiu būdu:

$$d_n = \sup\left\{x : F(x) \le \frac{1}{n}\right\}. \tag{1.14}$$

1.2 Teorema. Tarkime, kad $\alpha(F)$ baigtinis. Pažymėkime pasiskirstymo funkciją $F^*(x) = F\left(\alpha(F) - \frac{1}{x}\right)$, $x < 0$. Jeigu egzistuoja tokia konstanta $\gamma > 0$, kad su visais $x > 0$ galioja sąryšis:

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{F^*(tx)}{F^*(t)} = x^{-\gamma}, \tag{1.15}$$

tuomet egzsituoja tokios konstantos c_n, $d_n > 0$, su kuriomis:

$$\lim_{n\to\infty} P\{W_n < c_n + d_n x\} = L_{2,\gamma}(x); \tag{1.16}$$

čia $L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^{\gamma}}, x \geq 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$ **(1.17)**

Normavimo konstantos c_n, d_n gali būti parinktos tokiu būdu:

$$c_n = \alpha(F) \tag{1.18}$$

$$d_n = \sup\left\{x : F(x) \leq \frac{1}{n}\right\} - \alpha(F). \tag{1.19}$$

1.3 Teorema. Tarkime, kad

$$\int_{\alpha(F)}^{a} F(y)dy < \infty, \tag{1.20}$$

kai a baigtinis.

Pažymėkime funkciją

$$r(t) = \frac{1}{F(t)} \int_{\alpha(F)}^{t} F(y)dy, \text{ kai } t > \alpha(F). \tag{1.21}$$

Jeigu

$$\lim_{t\to\alpha(F)} \frac{F(t + xr(t))}{F(t)} = e^{x}, \; x \in R, \tag{1.22}$$

tuomet egzistuoja tokios konstantos c_n ir $d_n > 0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{W_n - c_n}{d_n} < x\right) \to L_3(x); \tag{1.23}$$

čia $L_3(x) = 1 - e^{-e^{x}}$, $-\infty < x < \infty$. **(1.24)**

Normavimo konstantos c_n ir $d_n > 0$ gali būti parinktos tokiu būdu:

$$c_n = \sup\left\{x : F(x) \leq \frac{1}{n}\right\}, \tag{1.25}$$

$$d_n = r(c_n). \tag{1.26}$$

Teoremų formuluotės ir įrodymai pateikti [2].

1.3. k-TŲJŲ APATINIŲ EKSTREMUMŲ RIBINĖ TEOREMA

Jei dydžiai $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi ir turi tą pačią pasiskirstymo funkciją $F(z)$, tai pasiskirstymo funkcija:

$$P\left(X_k^{(n)} < z\right) = 1 - \sum_{t=0}^{k-1} C_n^t \left(F(z)\right)^t \left(1 - F(z)\right)^{n-t} \tag{1.27}$$

Įrodymas pateiktas [2].

Kadangi k yra fiksuotas, tai tokio dydžio pasiskirstymo funkcijos egzistavimas sutapatinamas su atitinkamomis problemomis minimumams. Šį faktą iliustruoja 1.4 teorema [2].

1.4 Teorema. Tarkime c_n ir $d_n > 0$ – skaičių sekos ir $k \geq 1$ – laisvai pasirinktas sveikas skaičius. Pasiskirstymo funkcija

$$F_{k:n}(c_n + d_n x) = P\left(X_k^{(n)} < c_n + d_n x\right) \tag{1.28}$$

silpnai konverguoja, kai $n \to \infty$ į tam tikrą neišsigimusią pasiskirstymo funkciją $L^{(k)}(x)$ tada ir tik tada, kai pasiskirstymo funkcija

$$L_n(c_n + d_n x) = F_{1:n}(c_n + d_n x) \tag{1.29}$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią funkciją $L(x)$.

Tada

$$L^{(k)}(x) = 1 - (1 - L(x)) \sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} \left(-\log(1 - L(x))\right)^t, \quad \alpha(\mathrm{L}) < x < \omega(L); \tag{1.30}$$

čia funkcija $L(x)$ gali būti viena iš funkcijų $L_{1,\gamma}(x)$, $L_{2,\gamma}(x)$ arba $L_3(x)$:

$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(-x)^{-\gamma}}, x < 0, \\ 1, x > 0. \end{cases}$$

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^{\gamma}}, x \geq 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

$$L_3(x) = 1 - e^{-e^{x}}, \ -\infty < x < \infty.$$

1.4. PERKĖLIMO TEOREMA

1.5 Teorema. Tarkime, kad

$$P\left(\frac{X_k^{(n)} - c_n}{d_n} < x\right) \to \Phi(x), \tag{1.31}$$

$$P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) \to A(x),\ A(+0) = 0, \tag{1.32}$$

kai $n \to \infty$.

Čia $\Phi(x)$ ir $A(x)$ yra skirstinio funkcijos.

Tada

$$P\left(\frac{X_k^{(N_n)} - c_n}{d_n} < x\right) \to \Psi_k(x); \tag{1.33}$$

čia $\Psi_k(x) = \int_0^\infty \Gamma_k(zu(x))dA(z)$, **(1.34)**

$$\Gamma_k(z) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^z u^{k-1}e^{-u}du, \tag{1.35}$$

o funkcijos $u(x)$ galimos išraiškos yra tokios:

$$1)\ u(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x^\alpha, x > 0 \end{cases}; \tag{1.36}$$

$$2)\ u(x) = \begin{cases} (-x)^\alpha, x \le 0 \\ \infty, x > 0 \end{cases}; \tag{1.37}$$

$$3)\ u(x) = e^x,\ -\infty < x < +\infty. \tag{1.38}$$

Teoremos formuluotė pateikta [3].

Monografijoje [2] yra pateikta skirstinio funkcijos $\Phi(x)$ išraiška:

$$\Phi(x) = 1 - e^{-u(x)}\sum_{t=0}^{k-1}\frac{u^t(x)}{t!}. \tag{1.39}$$

Monografijos [2] žymenimis tai būtų funkcija $L^{(k)}(x)$ (1.30) ir

$$L(x) = 1 - e^{-u(x)}. \tag{1.40}$$

2. TIRIAMOJI DALIS

Šioje baigiamojo darbo dalyje nustatau, kuri iš bendrojoje dalyje pateiktų teoremų gali būti taikoma logistinių dydžių minimumų ribiniams skirstiniams nustatyti. Apskaičiuoju normalizavimo konstantas c_n ir $d_n > 0$. Šių rezultatų man reikia tolimesniam tyrimui. Tolimesnio tyrimo objektas – apatiniai ekstremumai. Kai imties tūris yra atsitiktinis geometrinis, taikau perkėlimo teoremą. Logistinių dydžių apatinius ekstremumus normuoju su tomis pačiomis kontantomis kaip ir minimumus. Ieškau tokio apatinių ekstremumų normavimo, su kuriuo logistinių dydžių skirstiniai būtų geometriškai stabilūs minimumo skirstiniai arba asimptotiškai k-stabilūs.

2.1. LOGISTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMŲ ASIMPTOTIKA

Tarkime, kad imtis $(X_1, X_2,..., X_n)$ yra iš logistinės generalinės aibės su skirstinio funkcija

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \quad x \in (-\infty;+\infty) \tag{2.1}$$

Pasinaudodami minimumų ribinėmis teoremomis, įrodysime 2.1 teoremą.

2.1 Teorema. Jeigu dydžiai yra logistiniai, tai

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{W_n - c_n}{d_n} < x\right) = 1 - e^{-u(x)}; \tag{2.2}$$

čia $u(x) = e^x$, $x \in (-\infty;+\infty)$, o normalizavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$c_n = -\ln n, \; d_n = 1. \tag{2.3}$$

Įrodymas.

Kadangi $\alpha(F) = -\infty$, skaičiuojame integralą:

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{dy}{1+e^{-y}} = \int_{-\infty}^{a} \frac{e^y dy}{1+e^y} = \ln\left(1+e^a\right) \tag{2.4}$$

Tokiu būdu

$\int_{\alpha(F)}^{a} F(y)dy < \infty$, kai a – baigtinis.

Dabar funkcija

$$r(t) = \frac{1}{F(t)} \int_{\alpha(F)}^{t} F(y)dy = \left(1+e^{-t}\right)\cdot \ln\left(1+e^t\right). \tag{2.5}$$

Skaičiuojame ribą:

$$\lim_{t\to\alpha(F)}\frac{F(t+xr(t))}{F(t)}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1+e^{-t}}{1+e^{-t-x(1+e^{-t})\ln(e^{t}+1)}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1+e^{t}}{e^{t}+(1+e^{t})^{-x(1+e^{-t})}}=$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\frac{1+e^{t}}{e^{t}+\left((1+e^{t})^{\frac{1}{e^{t}}}\right)^{-xe^{t}(1+e^{-t})}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1+e^{t}}{e^{t}+\left((1+e^{t})^{\frac{1}{e^{t}}}\right)^{-x(1+e^{t})}}=\frac{1}{e^{-x}}=e^{x},\ x\in R.$$

Tokiu būdu tenkinamos 1.3 teoremos sąlygos ir

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{W_n-c_n}{d_n}<x\right)=L(x); \tag{2.6}$$

čia $L(x)=1-e^{-e^{x}}$, $x\in R$.

Rasime normalizavimo konstantas:

$$\frac{1}{1+e^{-c_n}}=\frac{1}{n},$$

$$c_n=-\ln(n-1).$$

Kadangi $-\ln(n-1)\sim-\ln n$, kai $n\to\infty$, tai galime imti $c_n=-\ln n$.

$$d_n=r(c_n)=(1+e^{\ln n})\ln(1+e^{-\ln n})=(1+n)\ln\frac{n+1}{n}=(1+n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Kadangi

$(1+n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim 1$, kai $n\to\infty$, todėl galime imti $d_n=1$.

Tokiu būdu

$$P(W_n<x-\ln n)\to 1-e^{-e^{x}}. \tag{2.7}$$

Teoremos teiginys pagrįstas.

2.2. PERKĖLIMO TEOREMA LOGISTINIŲ DYDŽIŲ APATINIAMS EKSTREMUMAMS

Tarkime, kad imties $(X_1,X_2,...,X_N)$ bazėje sudaryta variacinė eilutė

$$X_1^{(N)}\le X_2^{(N)}\le...\le X_N^{(N)}. \tag{2.8}$$

Čia

$$X_1^{(N)}=\min(X_1,\ldots,X_N), \tag{2.9}$$

$$X_N^{(N)}=\max(X_1,\ldots,X_N). \tag{2.10}$$

Imkime k-ąjį apatinį ekstremumą

$X_k^{(N)}$ ($N \to \infty$ pagal tikimybę, o k – fiksuotas).

Atsitiktinis dydis $N = N_n$ yra geometrinis:

$$P(N = s) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s-1}, \; s \geq 1. \tag{2.11}$$

2.2 Teorema. Jeigu dydžiai yra logistiniai, o $N = N_n$ – geometrinis, nepriklausantis nuo X_j, $j \geq 1$, tai

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_k^{(N)} - c_n}{d_n} < x\right) = \Psi_k(x); \tag{2.12}$$

čia

$$\Psi_k(x) = \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^k, \; k = 1,2,\ldots \tag{2.13}$$

Normalizavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$c_n = -\ln n, \; d_n = 1. \tag{2.14}$$

Įrodymas.

Įrodymas grindžiamas 1.5 teorema.

Integruodami dalimis $k-1$ kartų gauname:

$$\Gamma_k(z) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^z t^{k-1}e^{-t}dt = 1 - e^{-z}\sum_{t=0}^{k-1}\frac{z^t}{t!}. \tag{2.15}$$

Kadangi

$$P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = P(N_n < nx) = \sum_{s=1}^{[nx]}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{s-1} = 1 - \frac{1}{n}\sum_{s=[nx]+1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{s-1} = 1 - \frac{1}{n}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{[nx]}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{[nx]},$$

tai

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = A(x) = 1 - e^{-x}, \; x \geq 0. \tag{2.16}$$

Skaičiuojame ribinę skirstinio funkciją:

$$\Psi_k(x) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-z\cdot u(x)}\sum_{t=0}^{k-1}\frac{(z\cdot u(x))^t}{t!}\right)d\left(1-e^{-z}\right) = 1 - \sum_{t=0}^{k-1}\frac{1}{t!}\int_0^\infty e^{-z(u(x)+1)}(zu(x))^t\,dz$$

Panaudodami keitinį

$z(u(x)+1)=y$,

gauname:

$$\Psi_k(x)=1-\sum_{t=0}^{k-1}\frac{u^t(x)}{t!(1+u(x))^{t+1}}\Gamma(t+1);$$

čia gama funkcija:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-y}y^{\alpha-1}dy\,. \qquad \textbf{(2.17)}$$

Kai $t\geq 0$ – sveikas, $\Gamma(t+1)=t!$

Tuomet:

$$\Psi_k(x)=1-\frac{1}{1+u(x)}\sum_{t=0}^{k-1}\left(\frac{u(x)}{1+u(x)}\right)^t.$$

Pasinaudojame geometrinės progresijos k narių sumos formule, gauname:

$$\Psi_k(x)=\left(\frac{u(x)}{1+u(x)}\right)^k. \qquad \textbf{(2.18)}$$

Šiuo atveju $u(x)=e^x$ ir

$$\Psi_k(x)=\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^k,\ k\geq 1 \text{ – fiksuotas.} \qquad \textbf{(2.19)}$$

Konstantas c_n ir d_n galime imti iš 2.1 teoremos:

$$c_n=-\ln n\,, \qquad \textbf{(2.20)}$$

$$d_n=1\,. \qquad \textbf{(2.21)}$$

Teorema įrodyta.

2.3. ATSITIKTINIO SKAIČIAUS LOGISTINIŲ DYDŽIŲ APATINIŲ EKSTREMUMŲ SKIRSTINIAI

Tarkime, kad $(X_1, X_2,..., X_n)$ yra paprastoji atsitiktinė imtis iš generalinės aibės su logistine skirstinio funkcija F, t.y.

$$F(x)=\frac{1}{1+e^{-x}};\quad x\in(-\infty;+\infty). \qquad \textbf{(2.22)}$$

Sudarome variacinę eilutę:

$$X_1^{(n)}\leq X_2^{(n)}\leq ...\leq X_n^{(n)}. \qquad \textbf{(2.23)}$$

Nagrinėsime atvejį, kai imties tūris $N = N(p)$ yra atsitiktinis ir nepriklausomas nuo visų $X_j, j \geq 1$.

Tarkime, kad imties tūris pasiskirtęs pagal geometrinį skirstinį, t.y.

$$P(N(p) = m) = p \cdot (1-p)^{m-1},\ m \geq 1. \quad \textbf{(2.24)}$$

Čia parametras p gali būti apibūdinamas dvejopai:

- $0 < p < 1$ – konstanta; **(2.25)**
- $p = p_n \to 0$, kai $n \to \infty$ (nebūtinai $p_n = \frac{1}{n}$). **(2.26)**

Apatinį k-ąjį ekstremumą apibrėžiame taip:

$$X_k^{(N)} = \begin{cases} X_k^{(j)}, N = j, j = k, k+1, \ldots; \\ X_j^{(j)}, N = j, j = 1,2,\ldots,k-1. \end{cases} \quad \textbf{(2.27)}$$

Pasinaudojus pilnosios tikimybės formule, buvo gauta išraiška, normuoto apatinio ekstremumo pasiskirstymo funkcijai rasti:

$$P\left(X_k^{(N)} - \ln p < x\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} P\left(X_k^{(\min(j,k))} - \ln p < x\right) \cdot P(N = j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} P\left(X_j^{(j)} - \ln p < x\right) \cdot P(N = j) + \sum_{j=k}^{+\infty} P\left(X_j^{(j)} - \ln p < x\right) \cdot P(N = j). \quad \textbf{(2.28)}$$

Yra žinoma [2], kad esant neatsitiktiniam imties tūriui,

$$P\left(X_k^{(j)} - \ln p < x\right) = \frac{j!}{(k-1)! \cdot (j-k)!} \int_0^{F(x+\ln p)} t^{k-1} \cdot (1-t)^{j-k} dt. \quad \textbf{(2.29)}$$

2.3 Teorema. Jei generalinės aibės skirstinys yra logistinis, o imties tūris yra pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį, tai normuoto apatinio ekstremumo pasiskirstymo funkcija:

$$P\left(X_1^{(N)} - \ln p < x\right) = \frac{1}{1+e^{-x}} = F(x), \quad \textbf{(2.30)}$$

$$P\left(X_2^{(N)} - \ln p < x\right) = \frac{p \cdot \left(p \cdot e^{-2x} + 1 - e^{-x} + 2p \cdot e^{-x}\right) + e^{-x}}{\left(p + e^{-x}\right) \cdot \left(1 + e^{-x}\right)^2} \to \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^2 = F^2(x), \quad \textbf{(2.31)}$$

kai $p \to 0$.

$$P\left(X_3^{(N)} - \ln p < x\right) \to \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^3 = F^3(x), \quad \textbf{(2.32)}$$

kai $p \to 0$.

Įrodymas.

Pradžioje nagrinėsime pirmojo apatinio ekstremumo (minimumo) atvejį. Ieškosime šio normuoto ekstremumo pasiskirstymo funkcijos išraiškos, pasinaudodami (2.28) formule:

$$P\left(X_1^{(N)} - \ln p < x\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} P\left(X_1^{(j)} - \ln p < x\right) \cdot P(N = j);$$

$$F(x + \ln p) = \frac{1}{1 + e^{-x - \ln p}} = \frac{p}{p + e^{-x}};$$

$$P\left(X_1^{(j)} - \ln p < x\right) = \frac{j!}{0! \cdot (j-1)!} \int_0^{F(x+\ln p)} t^0 \cdot (1-t)^{j-1} dt =$$

$$= j \int_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} (1-t)^{j-1} dt = -j \int_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} (1-t)^{j-1} d(1-t) = -(1-t)^j \Bigg|_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} =$$

$$= -\left(1 - \frac{p}{p + e^{-x}}\right)^j + 1^j = 1 - \left(\frac{p + e^{-x} - p}{p + e^{-x}}\right)^j = 1 - \left(\frac{e^{-x}}{p + e^{-x}}\right)^j.$$

$$P\left(X_1^{(N)} - \ln p < x\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{e^{-x}}{p + e^{-x}}\right)^j\right) P(N = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(N = j) - \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{p + e^{-x}}\right)^j p(1-p)^{j-1}.$$

Kadangi $\frac{e^{-x}(1-p)}{p + e^{-x}} < 1$, tai

$$P\left(X_1^{(N)} - \ln p < x\right) = 1 - \frac{p}{1-p} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}(1-p)}{p + e^{-x}}\right)^j = 1 - \frac{p}{1-p} \cdot \frac{e^{-x}(1-p)}{p + e^{-x}} \cdot \frac{p + e^{-x}}{p + e^{-x} - e^{-x} + pe^{-x}} =$$

$$= 1 - \frac{pe^{-x}}{p\left(1 + e^{-x}\right)} = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Taigi

$$P\left(X_1^{(N)} - \ln p < x\right) = \frac{1}{1 + e^{-x}} = F(x). \qquad \textbf{(2.33)}$$

Vadinasi, normuoto pirmojo apatinio ekstremumo (minimumo) skirstinys yra logistinis. Taigi logistinis skirstinys (kai $k = 1$) yra geometriškai stabilus minimumo skirstinys.

Įrodėme teoremos pirmąją dalį.

Tirsime antrąjį apatinį ekstremumą. Turime:

$$P\left(X_2^{(N)} - \ln p < x\right) = P\left(X_1^{(1)} < x + \ln p\right) \cdot P(N = 1) + \sum_{j=2}^{+\infty} P\left(X_2^{(j)} < x + \ln p\right) \cdot P(N = j).$$

Žinoma, kad

$$P\left(X_j^{(j)} < x + \ln p\right) = F^j(x + \ln p),$$

$$P(N = 1) = p.$$

Tada

$$P\left(X_1^{(1)} < x + \ln p\right) \cdot P(N=1) = \frac{p^2}{p+e^{-x}}$$

ir

$$P\left(X_2^{(j)} < x + \ln p\right) = \frac{j!}{1!(j-2)!} \int_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} t(1-t)^{j-2}\, dt .$$

Integralą $I = \int_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} t(1-t)^{j-2}\, dt$ integruosime dalimis: $u = t$, o $dv = (1-t)^{j-2}\, dt$. Tuomet $du = dt$, o

$$v = \int (1-t)^{j-2}\, dt = -\int (1-t)^{j-2}\, d(1-t) = -\frac{(1-t)^{j-2+1}}{j-2+1} = -\frac{(1-t)^{j-1}}{j-1} .$$

$$I = -\frac{t(1-t)^{j-1}}{j-1}\Bigg|_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} + \frac{1}{j-1}\int_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} (1-t)^{j-1} dt = \frac{-\frac{p}{p+e^{-x}}\left(1-\frac{p}{p+e^{-x}}\right)}{j-1} + \frac{1}{j-1}\int_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} (1-t)^{j-1} dt =$$

$$= \frac{1}{j-1}\left(-\frac{p}{p+e^{-x}}\left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^{j-1} - \frac{(1-t)^{j-1+1}}{j-1+1}\Bigg|_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} \right) =$$

$$= \frac{1}{j-1}\left(-\frac{p}{p+e^{-x}}\left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^{j-1} - \frac{1}{j}\left(1-\frac{p}{p+e^{-x}}\right)^{j} + \frac{1}{j} \right) =$$

$$= \frac{-\frac{pj}{p+e^{-x}}\left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^{j-1} - \left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^{j} + 1}{j(j-1)} = \frac{1 - \frac{pj}{p+e^{-x}}\frac{p+e^{-x}}{e^{-x}}\left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^{j} - \left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^{j}}{j(j-1)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{pj}{e^{-x}}\left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^{j} - \left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^{j}}{j(j-1)} .$$

Tokiu būdu

$$P\left(X_2^{(j)} < x + \ln p\right) = \frac{j!}{(j-2)!} \frac{1 - \left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^{j}\left(pje^{x}+1\right)}{j(j-1)} = 1 - \left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^{j}\left(pje^{x}+1\right).$$

Dabar

$$P\left(X_2^{(N)} < x + \ln p\right) = \frac{p^2}{p+e^{-x}} + \sum_{j=2}^{+\infty}\left(1-\left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^j \cdot \left(pje^x+1\right)\right)p(1-p)^{j-1}.$$

Toliau

$$\sum_{j=2}^{+\infty}\left(1-\left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^j \cdot \left(pje^x+1\right)\right)p(1-p)^{j-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{+\infty}\left((1-p)^j - \left(\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}\right)^j\left(pje^x+1\right)\right) =$$

$$= \frac{p}{1-p}\left(\sum_{j=2}^{+\infty}(1-p)^j - \sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}\right)^j\left(pje^x+1\right)\right) =$$

$$= \frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{+\infty}(1-p)^j - \frac{p^2e^x}{1-p}\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}\right)^j - \frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}\right)^j = L_1 + L_2 + L_3 .$$

Atskirai ieškodami pirmosios eilutės sumą, gauname:

$$L_1 = \frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{+\infty}(1-p)^j = p\sum_{j=1}^{+\infty}(1-p)^j = 1-p.$$

Išvesime formulę, ieškoti eilutės $\sum_{j=2}^{+\infty} jq^j$ sumai:

$$\sum_{j=2}^{+\infty} jq^j = q\sum_{j=2}^{+\infty} jq^{j-1} = q\frac{d}{dq}\left(\frac{q^2}{1-q}\right) = q\frac{2q(1-q)+q^2}{(1-q)^2} = q\frac{2q-2q^2+q^2}{(1-q)^2} = \frac{2q^2-q^3}{(1-q)^2}.$$

Naudodamiesi šia formule apskaičiuosime antrosios eilutės sumą:

$$-\frac{p}{1-p}\frac{2\frac{e^{-2x}(1-p)^2}{\left(p+e^{-x}\right)^2} - \frac{e^{-3x}(1-p)^3}{\left(p+e^{-x}\right)^3}}{\left(1-\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}\right)^2} = -\frac{p}{1-p}\frac{\frac{2e^{-2x}(1-p)^2\left(p+e^{-x}\right)-e^{-3x}(1-p)^3}{\left(p+e^{-x}\right)^3}}{\frac{\left(p+e^{-x}-e^{-x}+pe^{-x}\right)^2}{\left(p+e^{-x}\right)}} =$$

$$= -\frac{p}{1-p}\frac{2e^{-2x}(1-p)^2\left(p+e^{-x}\right)-e^{-3x}(1-p)^3}{\left(p+e^{-x}\right)\left(p+pe^{-x}\right)^2} = -\frac{p}{1-p}\frac{2e^{-2x}(1-p)^2\left(p+e^{-x}\right)-e^{-3x}(1-p)^3}{\left(p+e^{-x}\right)p^2\left(1+e^{-x}\right)^2} =$$

$$= -\frac{(1-p)\left(2e^{-x}\left(p+e^{-x}\right)-e^{-2x}(1-p)\right)}{\left(p+e^{-x}\right)\left(1+e^{-x}\right)^2}.$$

Toliau skaičiuojame trečiosios eilutės sumą:

$$L_3 = -\frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}\right)^j = -\frac{pe^{-x}}{p+e^{-x}}\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}\right)^j = -\frac{pe^{-x}}{p+e^{-x}}\frac{\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}}{1-\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}} =$$

$$= -\frac{pe^{-x}}{p+e^{-x}}\cdot\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}-e^{-x}+pe^{-x}} = \frac{pe^{-x}}{p+e^{-x}}\cdot\frac{e^{-x}(1-p)}{p+pe^{-x}} = \frac{pe^{-2x}(1-p)}{p\left(1+e^{-x}\right)\left(p+e^{-x}\right)} =$$

$$= -\frac{e^{-2x}(1-p)}{(1+e^{-x})(p+e^{x})}.$$

Toliau, atlikę elementarius, tačiau varginančius skaičiavimus, gauname:

$$P\left(X_2^{(N)} < x + \ln p\right) = \frac{p^2}{p+e^{-x}} + 1 - p - \frac{e^{-2x}(1-p)}{(1+e^{-x})(p+e^{-x})} - \frac{(1-p)\left(2e^{-x}(p+e^{-x}) - e^{-2x}(1-p)\right)}{(p+e^{-x})(1+e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{p^2(1+e^{-x})^2 + (1-p)(p+e^{-x})(1+e^{-x})^2 - e^{-2x}(1-p)(1+e^{-x}) - (1-p)\left(2e^{-x}(p+e^{-x}) - e^{-2x}(1-p)\right)}{(p+e^{-x})(1+e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{p^2(1+2e^{-x}+e^{-2x}) + (1-p)(p+e^{-x})(1+2e^{-x}+e^{-2x}) - (e^{-2x} - pe^{-2x})(1+e^{-x}) -}{(p+e^{-x})(1+e^{-x})^2}$$

$$\frac{-2e^{-x}(p+e^{-x})(1-p) + e^{-2x}(1-p)^2}{(p+e^{-x})(1+e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{p^2 + 2e^{-x}p^2 + e^{-2x}p^2 + (p + e^{-x} - p^2 - pe^{-x})(1+2e^{-x}+e^{-2x}) - (e^{-2x} + e^{-3x} - pe^{-2x} - pe^{-3x}) -}{(p+e^{-x})(1+e^{-x})^2}$$

$$\frac{-2e^{-x}(p+e^{-x}-p^2-pe^{-x}) + e^{-2x}(1-2p+p^2)}{(p+e^{-x})(1+e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{p^2 + 2e^{-x}p^2 + e^{-2x}p^2 + p + 2pe^{-x} + pe^{-2x} + e^{-x} + 2e^{-2x} + e^{-3x} - p^2 - 2p^2e^{-x} - p^2e^{-2x} -}{(p+e^{-x})(1+e^{-x})^2}$$

$$\frac{-pe^{-x} - 2pe^{-2x} - pe^{-3x} - e^{-2x} - e^{-3x} + pe^{-2x} + pe^{-3x} - 2pe^{-x} - 2e^{-2x} + 2p^2e^{-x} + 2pe^{-2x} +}{(p+e^{-x})(1+e^{-x})^2}$$

$$\frac{+e^{-2x} - 2pe^{-2x} + p^2e^{-2x}}{(p+e^{-x})(1+e^{-x})^2} = \frac{p^2e^{-2x} + p + e^{-x} - pe^{-x} - pe^{-x} + 2p^2e^{-x}}{(p+e^{-x})(1+e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{p\left(pe^{-2x} + 1 - e^{-x} + 2pe^{-x}\right) + e^{-x}}{(p+e^{-x})(1+e^{-x})^2}.$$

Taigi

$$P\left(X_2^{(N)} < x + \ln p\right) = \frac{p\left(pe^{-2x} + 1 - e^{-x} + 2pe^{-x}\right) + e^{-x}}{(p+e^{-x})(1+e^{-x})^2}.$$

Skaičiuodami ribą, kai $p = p_n \to 0$ ($n \to \infty$), gauname

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_2^{(N)} < x + \ln p\right) = \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^2 = F^2(x). \tag{2.34}$$

Vadinasi, logistinis skirstinys (kai $k = 2$) yra asimptotiškai k-stabilus.

Įrodėme antrąją teoremos dalį.

Tirsime trečiąjį apatinį ekstremumą. Turime:

$$P\left(X_3^{(N)} - \ln p < x\right) = P\left(X_1^{(1)} < x + \ln p\right) \cdot P(N=1) + P\left(X_2^{(2)} < x + \ln p\right) \cdot P(N=2) +$$
$$+ \sum_{j=3}^{+\infty} P\left(X_3^{(j)} < x + \ln p\right) \cdot P(N=j);$$

$$P\left(X_2^{(2)} < x + \ln p\right) P(N=2) = F^2(x + \ln p) p(1-p) = \frac{p^2}{\left(p + e^{-x}\right)^2} p(1-p) = \frac{p^3(1-p)}{\left(p+e^{-x}\right)^2};$$

$$P\left(X_3^{(j)} < x + \ln p\right) = \frac{j!}{2!(j-3)!} \int_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} t^2 (1-t)^{j-3} dt = \frac{j(j-1)(j-2)}{2} \int_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} t^2 (1-t)^{j-3} dt.$$

Integralą $I_2 = \int_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} t^2 (1-t)^{j-3} dt$ integruosime dalimis. Pažymime $u = t^2$, o $dv = (1-t)^{j-2} dt$. Tuomet $du = 2tdt$, o $v = \int (1-t)^{j-3} dt = -\int (1-t)^{j-3} d(1-t) = -\frac{(1-t)^{j-3+1}}{j-3+1} = -\frac{(1-t)^{j-2}}{j-2}$.

Vadinasi, integralas bus lygus:

$$I_2 = -\frac{t^2(1-t)^{j-2}}{j-2}\Bigg|_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} + \frac{2}{j-2} \int_0^{\frac{p}{p+e^{-x}}} t(1-t)^{j-2} dt = \frac{-\frac{p^2}{\left(p+e^{-x}\right)^2}\left(1 - \frac{p}{p+e^{-x}}\right)^{j-2}}{j-2} + \frac{2}{j-2} I =$$

$$= \frac{-\frac{p^2}{\left(p+e^{-x}\right)^2} \frac{\left(e^{-x}\right)^{j-2}}{\left(p+e^{-x}\right)^{j-2}}}{j-2} + \frac{2}{j-2}\left(\frac{1 - \left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^j \left(pje^x + 1\right)}{j(j-1)}\right).$$

Tokiu būdu

$$P\left(X_3^{(j)} < x + \ln p\right) = \frac{j(j-1)(j-2)}{2}\left(\frac{-\frac{p^2}{\left(p+e^{-x}\right)^2} \frac{\left(e^{-x}\right)^{j-2}}{\left(p+e^{-x}\right)^{j-2}}}{j-2} + \frac{2}{j-2}\left(\frac{1 - \left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^j \left(pje^x + 1\right)}{j(j-1)}\right)\right) =$$

$$= -\frac{j(j-1)}{2} \frac{p^2 e^{-x(j-2)}}{\left(p+e^{-x}\right)^j} + 1 - \left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^j \left(pje^x + 1\right).$$

Dabar

$$P\left(X_3^{(N)} < x + \ln p\right) = \frac{p^2}{p+e^{-x}} + \frac{p^3(1-p)}{\left(p+e^{-x}\right)^2} - \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{j(j-1)p^2 e^{-x(j-2)}}{2\left(p+e^{-x}\right)^j} p(1-p)^{j-1} + \sum_{j=3}^{+\infty} p(1-p)^{j-1} -$$
$$- \sum_{j=3}^{+\infty} pje^x \left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^j p(1-p)^{j-1} - \sum_{j=3}^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^j p(1-p)^{j-1} = \frac{p^2}{p+e^{-x}} + \frac{p^3(1-p)}{\left(p+e^{-x}\right)^2} + N_1 + N_2 + N_3 + N_4.$$

Skaičiuojame N_i, $i = 1,2,3,4$.

$$N_1 = -\frac{p^3 e^{2x} e^{-2x}(1-p)^2}{2(1-p)(p+e^{-x})^2} \sum_{j=3}^{+\infty} j(j-1)\left(\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}\right)^{j-2} = -\frac{p^3(1-p)}{2(p+e^{-x})^2} \sum_{j=3}^{+\infty} j(j-1)\left(\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}\right)^{j-2}.$$

Išvesime formulę, ieškoti eilutės $\sum_{j=3}^{+\infty} j(j-1)q^{j-2}$ sumai:

$$\sum_{j=3}^{+\infty} j(j-1)(q)^{j-2} = \left(\sum_{j=3}^{+\infty} q^j\right)'' = \left(\frac{q^3}{1-q}\right)'' = \left(\frac{3q^2(1-q)+q^3}{(1-q)^2}\right)' = \left(\frac{3q^2}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)^2}\right)' =$$

$$= \frac{6q(1-q)+3q^2}{(1-q)^2} + \frac{3q^2(1-q)^2 + 2(1-q)q^3}{(1-q)^4} = \frac{6q}{1-q} + \frac{3q^2}{(1-q)^2} + \frac{3q^2}{(1-q)^2} + \frac{2q^3}{(1-q)^3} =$$

$$= \frac{6q}{1-q} + \frac{6q^2}{(1-q)^2} + \frac{2q^3}{(1-q)^3} = \frac{6q(1-q)^2 + 6q^2(1-q) + 2q^3}{(1-q)^3} = \frac{6q - 6q^2 + 2q^3}{(1-q)^3}.$$

Pritaikę šią formulę, rasime sumą:

$$\frac{\dfrac{6e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}} - \dfrac{6e^{-2x}(1-p)^2}{(p+e^{-x})^2} + \dfrac{2e^{-3x}(1-p)^3}{(p+e^{-x})^3}}{\left(1 - \dfrac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}\right)^3} =$$

$$= \frac{\dfrac{6e^{-x}(1-p)(p+e^{-x})^2 - 6e^{-2x}(1-p)^2(p+e^{-x}) + 2e^{-3x}(1-p)^3}{(p+e^{-x})^3}}{\dfrac{(p+e^{-x}-e^{-x}+pe^{-x})^3}{(p+e^{-x})^3}} =$$

$$= \frac{6p^2e^{-x} + 12pe^{-2x} + 6e^{-3x} - 6p^3e^{-x} - 12p^2e^{-2x} - 6pe^{-3x} - 6pe^{-2x} + 12p^2e^{-2x} - 6p^3e^{-2x} - 6e^{-3x} + 12pe^{-3x} -}{p^3(1+e^{-x})^3}$$

$$\frac{-6p^2e^{-3x} + 2e^{-3x} - 4pe^{-3x} + 2p^2e^{-3x} - 2pe^{-3x} + 4p^2e^{-3x} - 2p^3e^{-3x}}{p^3(1+e^{-x})^3} =$$

$$= \frac{6p^2e^{-x} + 6pe^{-2x} - 6p^3e^{-x} - 6p^3e^{-2x} - 2p^3e^{-3x} + 2e^{-3x}}{p^3(1+e^{-x})^3}.$$

Taigi

$$N_1 = -\frac{p^3(1-p)}{2(p+e^{-x})^2} \frac{6p^2e^{-x} + 6pe^{-2x} - 6p^3e^{-x} - 6p^3e^{-2x} - 2p^3e^{-3x} + 2e^{-3x}}{p^3(1+e^{-x})^3} =$$

$$= \frac{(p-1)(3p^2e^{-x} + 3pe^{-2x} - 3p^3e^{-x} - 3p^3e^{-2x} - p^3e^{-3x} + e^{-3x})}{(p+e^{-x})^2(1+e^{-x})^3} =$$

$$=\frac{3p^3e^{-x}+3p^2e^{-2x}-3p^4e^{-x}-3p^4e^{-2x}-p^4e^{-3x}+pe^{-3x}-3p^2e^{-x}-3pe^{-2x}+3p^3e^{-x}+3p^3e^{-2x}+p^3e^{-3x}-e^{-3x}}{\left(p+e^{-x}\right)^2\left(1+e^{-x}\right)^3}=$$

$$=\frac{6p^3e^{-x}+3p^2e^{-2x}-3p^4e^{-x}-3p^4e^{-2x}-p^4e^{-3x}+pe^{-3x}-3p^2e^{-x}-3pe^{-2x}+3p^3e^{-2x}+p^3e^{-3x}-e^{-3x}}{\left(p+e^{-x}\right)^2\left(1+e^{-x}\right)^3}.$$

Toliau skaičiuojame N_2:

$$N_2=\sum_{j=3}^{+\infty}p(1-p)^{j-1}=\frac{p}{1-p}\sum_{j=3}^{+\infty}(1-p)^j=\frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^3}{1-1+p}=(1-p)^2.$$

Ieškosime N_3:

$$N_3=-\sum_{j=3}^{+\infty}pje^x\left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^j p(1-p)^{j-1}=-\frac{p^2e^x}{1-p}\sum_{j=3}^{+\infty}j\left(\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}\right)^j.$$

Išvesime formulę, ieškoti eilutės $\sum_{j=3}^{+\infty}jq^j$ sumai:

$$\sum_{j=3}^{+\infty}jq^j=q\sum_{j=3}^{+\infty}jq^{j-1}=q\frac{d}{dq}\left(\sum_{j=3}^{+\infty}q^j\right)=q\frac{d}{dq}\left(\frac{q^3}{1-q}\right)=q\frac{3q^2(1-q)+q^3}{(1-q)^2}=\frac{3q^3-2q^4}{(1-q)^2}.$$

Pritaikę šią formulę, rasime sumą:

$$\frac{\dfrac{3e^{-3x}(1-p)^3}{\left(p+e^{-x}\right)^3}-\dfrac{2e^{-4x}(1-p)^4}{\left(p+e^{-x}\right)^4}}{\left(1-\dfrac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}\right)^2}=\frac{\dfrac{3e^{-3x}(1-p)^3\left(p+e^{-x}\right)-2e^{-4x}(1-p)^4}{\left(p+e^{-x}\right)^4}}{\dfrac{\left(p+e^{-x}-e^{-x}+pe^{-x}\right)^2}{\left(p+e^{-x}\right)^2}}=$$

$$=\frac{3e^{-3x}(1-p)^3\left(p+e^{-x}\right)-2e^{-4x}(1-p)^4}{p^2\left(p+e^{-x}\right)^2\left(1+e^{-x}\right)^2}.$$

Taigi

$$N_3=-\frac{p^2e^x}{1-p}\frac{3e^{-3x}(1-p)^3\left(p+e^{-x}\right)-2e^{-4x}(1-p)^4}{p^2\left(p+e^{-x}\right)^2\left(1+e^{-x}\right)^2}=\frac{-3e^{-2x}(1-p)^2\left(p+e^{-x}\right)+2e^{-3x}(1-p)^3}{\left(p+e^{-x}\right)^2\left(1+e^{-x}\right)^2}=$$

$$=\frac{-3pe^{-2x}+6p^2e^{-2x}-3p^3e^{-2x}-3e^{-3x}+6pe^{-3x}-3p^2e^{-3x}+2e^{-3x}-4pe^{-3x}+2p^2e^{-3x}-2pe^{-3x}+}{\left(p+e^{-x}\right)^2\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$\frac{+4p^2e^{-3x}-2p^3e^{-3x}}{}=\frac{-3pe^{-2x}+6p^2e^{-2x}-3p^3e^{-2x}-e^{-3x}+3p^2e^{-3x}-2p^3e^{-3x}}{\left(p+e^{-x}\right)^2\left(1+e^{-x}\right)^2};$$

$$N_4=-\sum_{j=3}^{+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{p+e^{-x}}\right)^j p(1-p)^{j-1}=-\frac{p}{1-p}\sum_{j=3}^{+\infty}\left(\frac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}\right)^j=-\frac{p}{1-p}\frac{\dfrac{e^{-3x}(1-p)^3}{\left(p+e^{-x}\right)^3}}{1-\dfrac{e^{-x}(1-p)}{p+e^{-x}}}=$$

$$= -\frac{p}{1-p}\frac{e^{-3x}(1-p)^3}{\left(p+e^{-x}\right)^2 p\left(1+e^{-x}\right)} = -\frac{e^{-3x}(1-p)^2}{\left(p+e^{-x}\right)^2\left(1+e^{-x}\right)}.$$

Naudodami gautus rezultatus, ieškome normuoto apatinio ekstremumo pasiskirstymo funkcijos išraiškos:

$$P\left(X_3^{(N)} < x + \ln p\right) = \frac{p^2}{p+e^{-x}} + \frac{p^3(1-p)}{\left(p+e^{-x}\right)^2} + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 =$$

$$= \left(2p^3 + 6p^3e^{-x} + 6p^3e^{-2x} + 2p^3e^{-3x} + p^2e^{-x} + 3p^2e^{-2x} + 3p^2e^{-3x} + p^2e^{-4x} - p^4 - 3p^4e^{-x} - 3p^4e^{-2x} - \right.$$

$$- p^4e^{-3x} + 6p^3e^{-x} + 3p^2e^{-2x} - 3p^4e^{-x} - 3p^4e^{-2x} - p^4e^{-3x} + pe^{-3x} - 3p^2e^{-x} - 3pe^{-2x} + 3p^3e^{-2x} +$$

$$+ p^3e^{-3x} - e^{-3x} + p^2 + 3p^2e^{-x} + 3p^2e^{-2x} + p^2e^{-3x} + 2pe^{-x} + 6pe^{-2x} + 6pe^{-3x} + 2pe^{-4x} + e^{-2x} + 3e^{-3x} +$$

$$+ 3e^{-4x} + e^{-5x} - 2p^3 - 6p^3e^{-x} - 6p^3e^{-2x} - 2p^3e^{-3x} - 4p^2e^{-x} - 12p^2e^{-2x} - 12p^2e^{-3x} - 4p^2e^{-4x} -$$

$$- 2pe^{-2x} - 6pe^{-3x} - 6pe^{-4x} - 2pe^{-5x} + p^4 + 3p^4e^{-x} + 3p^4e^{-2x} + p^4e^{-3x} + 2p^3e^{-x} + 6p^3e^{-2x} +$$

$$+ 6p^3e^{-3x} + 2p^3e^{-4x} + p^2e^{-2x} + 3p^2e^{-3x} + 3p^2e^{-4x} + p^2e^{-5x} - 3pe^{-2x} + 6p^2e^{-2x} - 3p^3e^{-2x} -$$

$$- 3p^3e^{-2x} - e^{-3x} + 3p^2e^{-3x} - 2p^3e^{-3x} - 3pe^{-3x} + 6p^2e^{-3x} - 3p^3e^{-3x} - e^{-4x} + 3p^2e^{-4x} - 2p^3e^{-4x} -$$

$$\left. - e^{-3x} - 2e^{-4x} - e^{-5x} + 2pe^{-3x} + 4pe^{-4x} + 2pe^{-5x} - p^2e^{-3x} - 2p^2e^{-4x} - p^2e^{-5x}\right):$$

$$:\left(\left(p+e^{-x}\right)^2\left(1+e^{-x}\right)^3\right) = \left(e^{-2x} + 8p^3e^{-x} + 6p^3e^{-2x} + 2p^3e^{-3x} - 3p^2e^{-x} + 4p^2e^{-2x} + \right.$$

$$\left. + 3p^2e^{-3x} + p^2e^{-4x} - 3p^4e^{-x} - 3p^4e^{-2x} - p^4e^{-3x} + 2pe^{-x} - 2pe^{-2x} + p^2\right) : \left(\left(p+e^{-x}\right)^2\left(1+e^{-x}\right)^3\right).$$

Skaičiuodami ribą, kai $p = p_n \to 0$ ($n \to \infty$), gauname

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X_3^{(N)} < x + \ln p\right) = \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^3 = F^3(x). \tag{2.35}$$

Taigi logistinis skirstinys (kai $k = 3$) yra asimptotiškai k-stabilus.

Teorema įrodyta.

Pastaba. Skaičiavimus galėjome supaprastinti, pastebėję, jog diferencialo binomas, padaugintas iš $A(j,k)$ yra

$$A(j,k)\int_0^x t^{k-1}(1-t)^{j-k}\,dt = 1 - \sum_{t=0}^{k-1} C_j^t x^t (1-x)^{j-t}, \tag{2.36}$$

kai $A(j,k) = \dfrac{j!}{(k-1)!(j-k)!}$. **(2.37)**

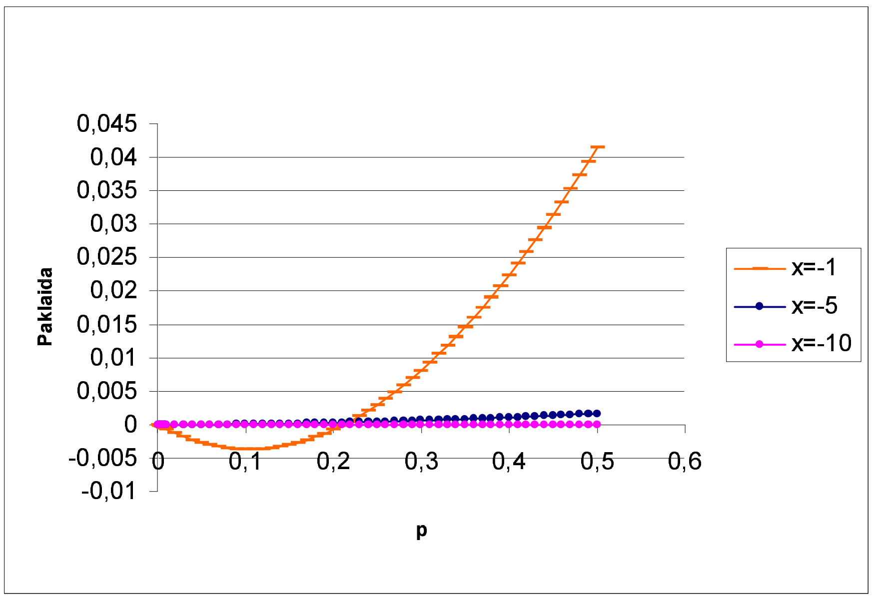
2.4. KONVERGAVIMO GREITIS

Atvejui, kai $k = 2$ skaičiuosime paklaidas (konvergavimo greitį), pasirinkę tam tikras x ir p reikšmes:

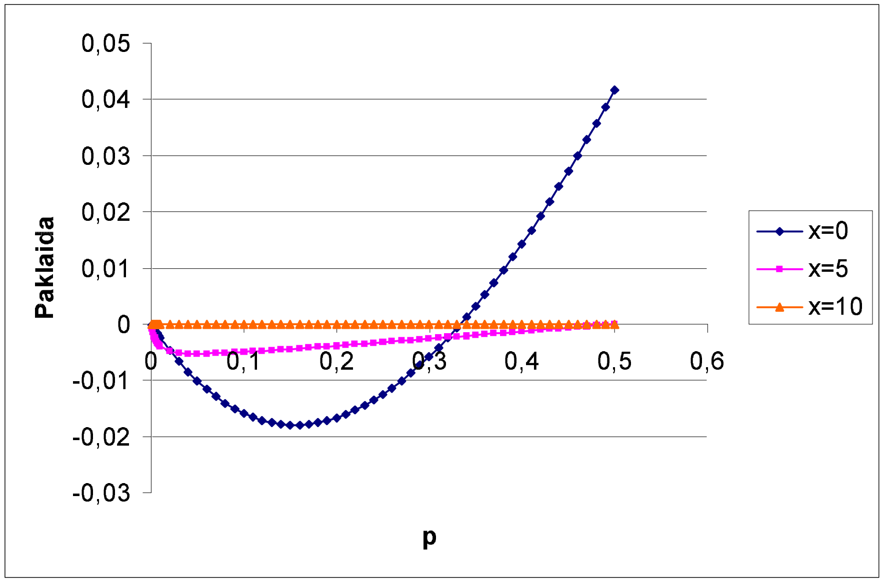
$$\Delta_2(x,p) = \frac{p\left(pe^{-2x} + 1 - e^{-x} + 2pe^{-x}\right) + e^{-x}}{\left(p + e^{-x}\right)\left(1 + e^{-x}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + e^{-x}\right)^2}.$$

Paklaidoms skaičiuoti naudojau MATLAB [7] programinę įrangą. Programos tekstas yra pateikiamas prieduose.

Gauti rezultatai pateikiami 2.1 ir 2.2 paveiksluose. Kiti gauti rezultatai pateikiami prieduose.



2.1 pav. Paklaidos $\Delta_2(x,p)$ priklausomybė nuo p, esant skirtingoms fiksuotoms neigiamoms x reikšmėms



2.2 pav. Paklaidos $\Delta_2(x,p)$ priklausomybė nuo p, esant skirtingoms fiksuotoms teigiamoms x reikšmėms

IŠVADOS

- Logistinis skirstinys (kai $k=1$) yra geometriškai stabilus minimumo skirstinys;
- Logistinis skirstinys (kai $k=2$ ir $k=3$) yra asimptotiškai k-stabilus minimumo skirstinys, be to nereikia reikalauti, kad $p=\frac{1}{n}$ (kaip perkėlimo teoremos atveju), užtenka, kad $p\to 0$;
- Hipotezė: Logistinis skirstinys yra asimptotiškai k-stabilus minimumo skirstinys, t.y.
  $P\left(X_k^{(N)}-\ln p<x\right)\to F^k(x),\ k\geq 2$,
  kai $p=p_n\to 0$ ($n\to\infty$);
- Apskaičiavus antrojo normuoto apatinio ekstremumo skirstinio ir logistinio skirstinio kvadrato skirtumą (paklaidas) galime padaryti tokias išvadas:
  fiksavus x reikšmę, paklaidos mažėja, kai p artėja prie 0;
  x reikšmėms tolstant į $+\infty$ ir $-\infty$, skirtumas greitai artėja prie 0.

LITERATŪRA

[1] Rachev S., Mittnik S. Stable Paretian Models in Finance. – John Wiley&Sons LTD, April 2000, 874 p.

[2] Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – М.: Наука, 1984, 303 с.

[3] Гнеденко Б. В., Шериф А. Предельные теоремы для крайних членов вариационного ряда. Докладная академия наук. 1983, Т. 270, Nr. 3.

[4] Aksomaitis A. Tikimybių teorija ir statistika. – K.: Technologija, 2000, 340 p.

[5] Aksomaitis A. Perkėlimo teorema ir geometriškai maks-stabilieji atsitiktiniai dydžiai. Lietuvos matematikos rinkinys. T 43, MII, 2003, 673-676 p.

[6] Kubilius J. Tikimybių teorija ir matematinė statistika. – V.: Mokslas, 1980, 400 p.

[7] Mačėnaitė L., Ragulskis M. ir kiti. Taikomosios matematikos laboratoriniai darbai. – K.: Technologija, 2001, 80 p.

1. PRIEDAS

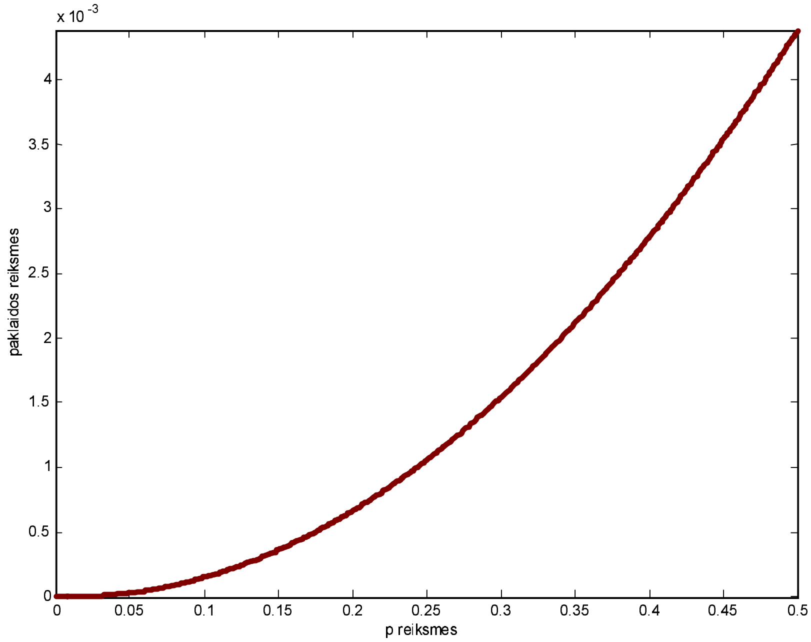
Programų tekstai

```
%-------------------------------------------------------------------------------------------
%----------Scenarijaus failas paklaidosp.m---------------------------------------------
%--Programa vaizduoja paklaidu priklausomybe nuo p esant fiksuotai x reiksmei
%-------------------------------------------------------------------------------------------
x=input('Iveskite x reiksme\n');
p=input('Iveskite p reiksme: 0<p<1\n');
eile=input('Iveskite tiksluma, iki kurio mazinsime p reiksme\n');
m=[];
rskirtumas=[];
l=[];
rp=[];
pirminis=p;
if p>eile;
   while p>=eile;
      skirtumas=(p*(p*exp(-2*x)+1-exp(-x)+2*p*exp(-x))+exp(-x))/((p+exp(-x))*(1+exp(-x))^2)-
1/((1+exp(-x))^2);
      m=[rskirtumas;[skirtumas]];
      rskirtumas=m;
      l=[rp;[p]];
      rp=l;
      p=p-eile;
   end
plot(rp,rskirtumas,'r');
axis([0 pirminis min(rskirtumas) max(rskirtumas)]);
xlabel('p reiksmes');
ylabel('paklaidos reiksmes');
      else
         skirtumas=(p*(p*exp(-2*x)+1-exp(-x)+2*p*exp(-x))+exp(-x))/((p+exp(-x))*(1+exp(- x))^2)-
1/((1+exp(-x))^2);
         m=[rskirtumas;[skirtumas]];
         rskirtumas=m;
         l=[rp;[p]];
```

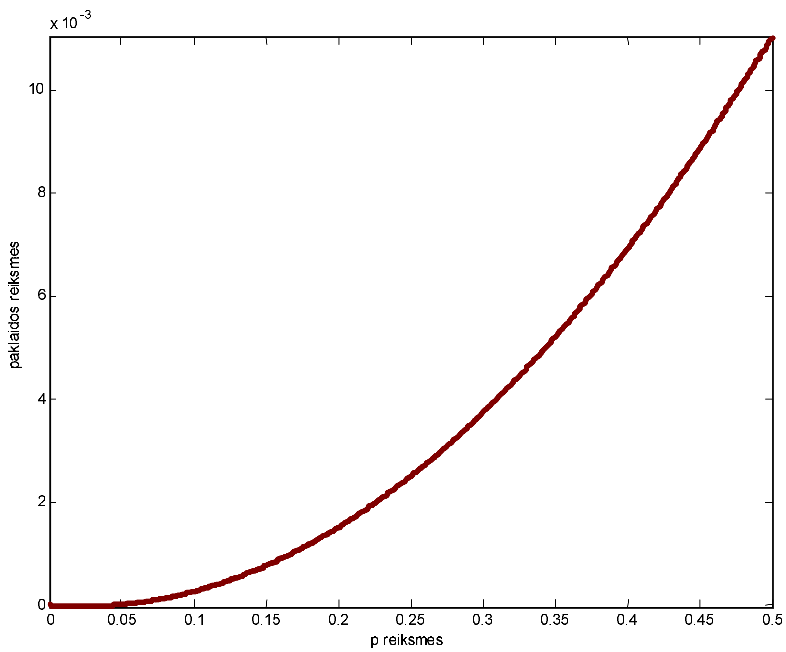
```
        rp=l;
    end
disp('paklaidos reiksmes:');
disp(rskirtumas);
disp('p reiksmes:');
disp(rp)

%--------------------------------------------------------------------------------------------------------
%---------Scenarijaus failas paklaidosx.m-----------------------------------------------------------
%--Programa vaizduoja paklaidu priklausomybe nuo x esant fiksuotai p reiksmei---------------------
%--------------------------------------------------------------------------------------------------------
p=input('Iveskite p reiksme:0<p<1\n');
xneig=input('Iveskite x reiksmiu kitimo intervalo pradzia\n');
xteig=input('Iveskite x reiksmiu kitimo intervalo gala\n');
m=[];
rskirtumas=[];
l=[];
rx=[];
for x=xneig:xteig;
  skirtumas=(p*(p*exp(-2*x)+1-exp(-x)+2*p*exp(-x))+exp(-x))/((p+exp(-x))*(1+exp(-x))^2)-
1/((1+exp(-x))^2);
  m=[rskirtumas;[skirtumas]];
  rskirtumas=m;
  l=[rx;[x]];
  rx=l;
end
plot(rx,rskirtumas,'r');
axis([xneig xteig min(rskirtumas) max(rskirtumas)]);
xlabel('x reiksmes');
ylabel('paklaidos reiksmes');
disp(rskirtumas);
disp(rx)
```

2. PRIEDAS

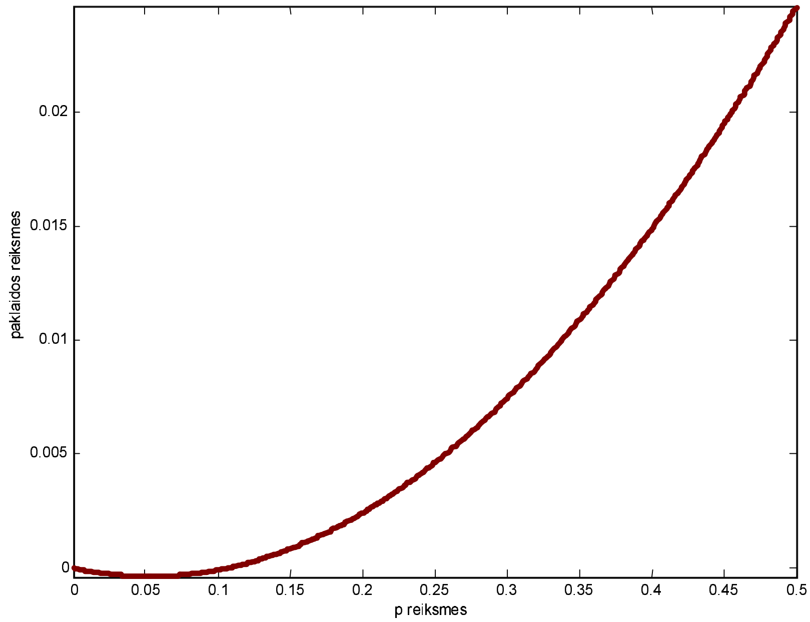
Paklaidų $\Delta_2(x, p)$ analizės rezultatai



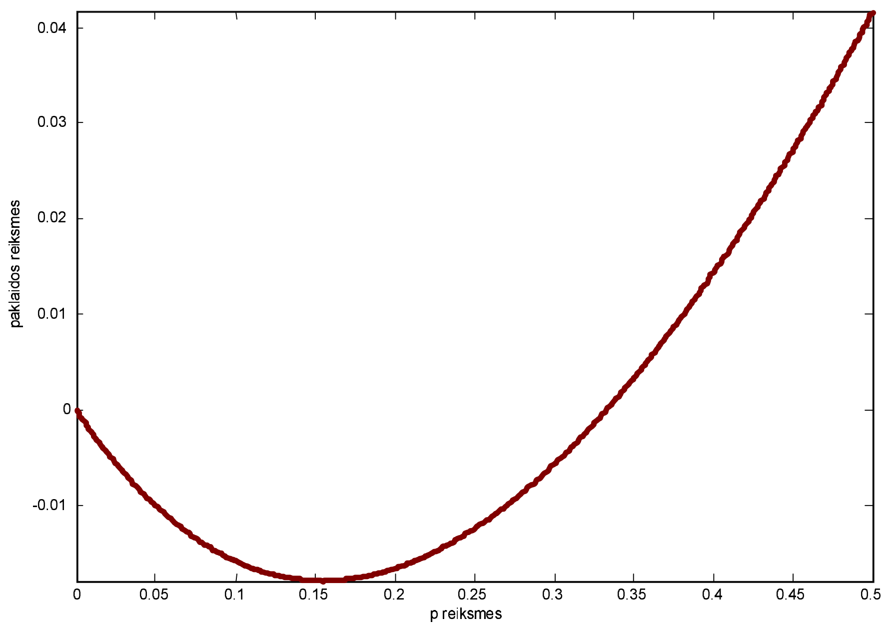
1 pav. Paklaidos $\Delta_2(x, p)$ priklausomybė nuo p, kai x=-4, tikslumas=0.0001



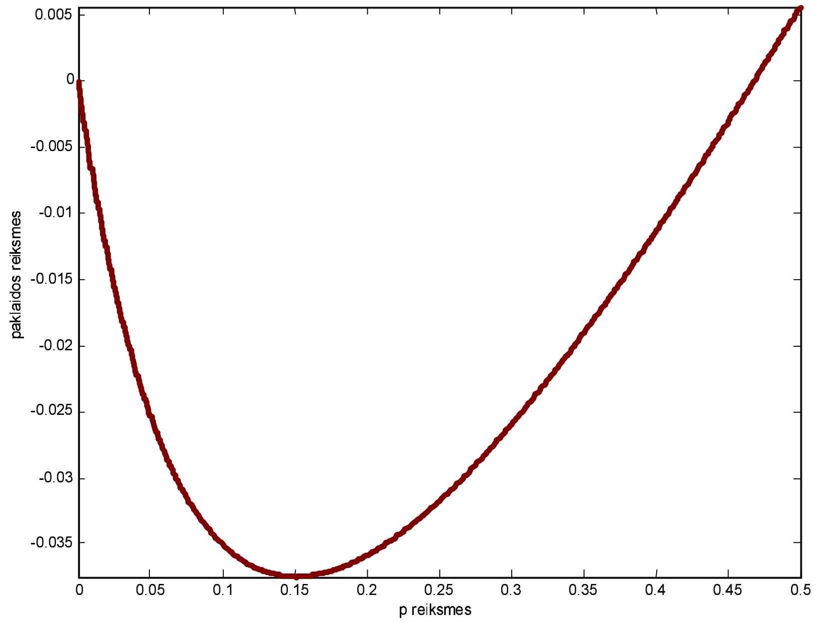
2 pav. Paklaidos $\Delta_2(x, p)$ priklausomybė nuo p, kai x=-3, tikslumas=0.0001



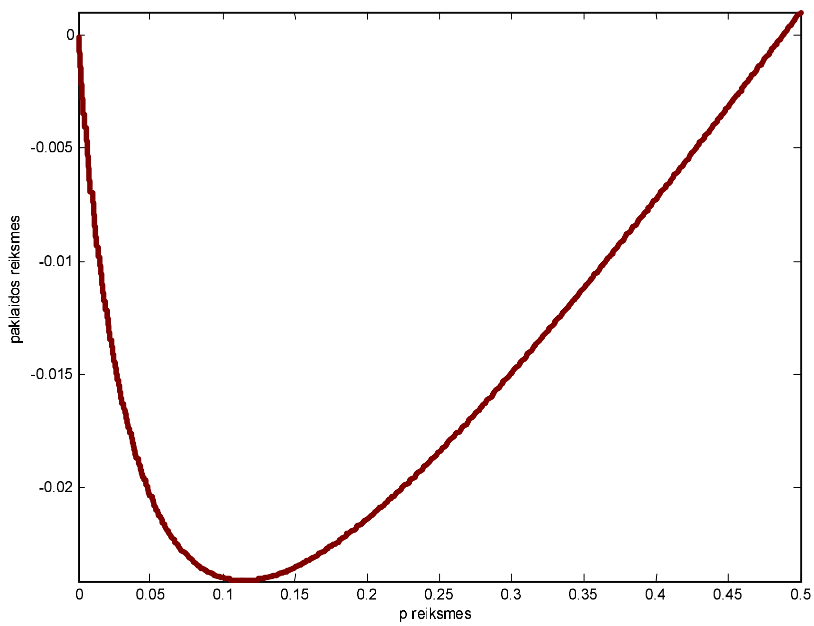
3 pav. Paklaidos $\Delta_2(x, p)$ priklausomybė nuo p, kai x=-2, tikslumas=0.0001



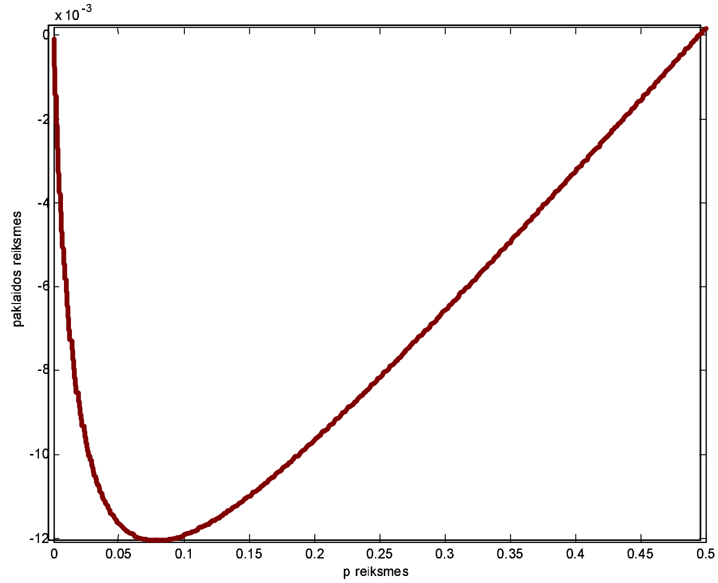
4 pav. Paklaidos $\Delta_2(x, p)$ priklausomybė nuo p, kai x=0, tikslumas=0.0001



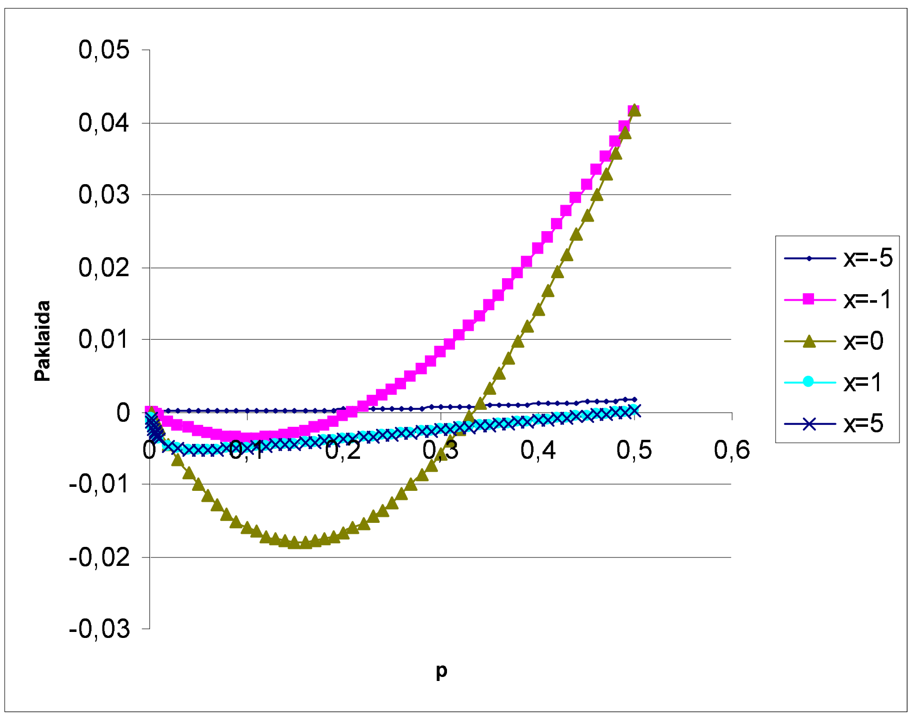
5 pav. Paklaidos $\Delta_2(x, p)$ priklausomybė nuo p, kai x=2, tikslumas=0.0001



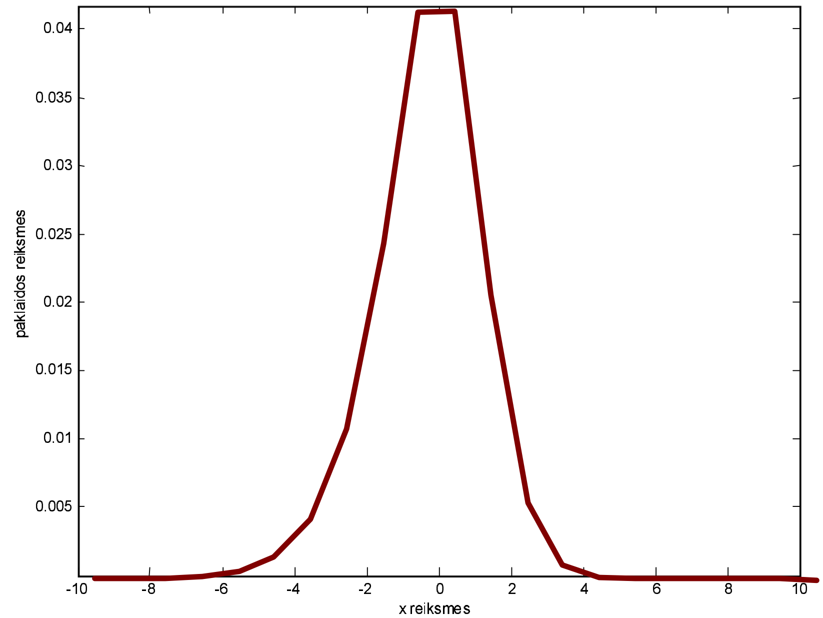
6 pav. Paklaidos $\Delta_2(x, p)$ priklausomybė nuo p, kai x=3, tikslumas=0.0001



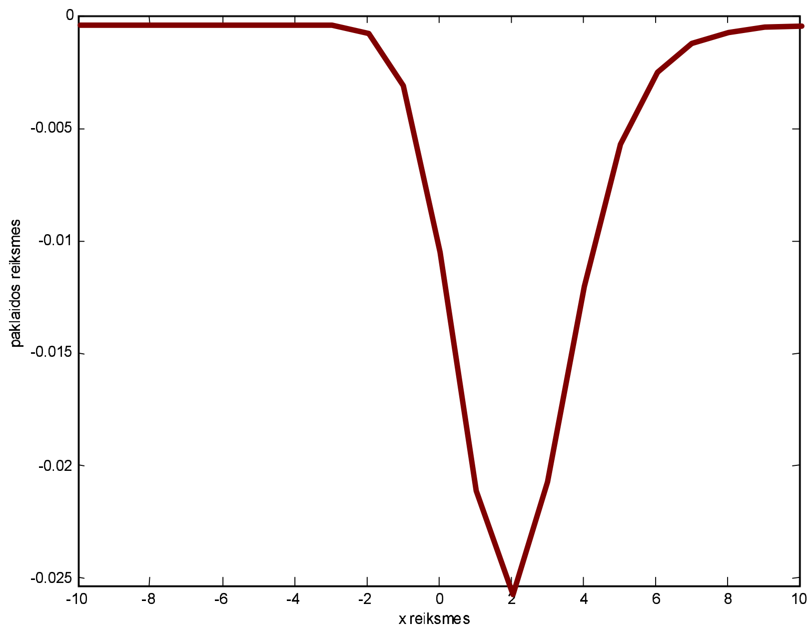
7 pav. Paklaidos $\Delta_2(x, p)$ priklausomybė nuo p, kai x=4, tikslumas=0.0001



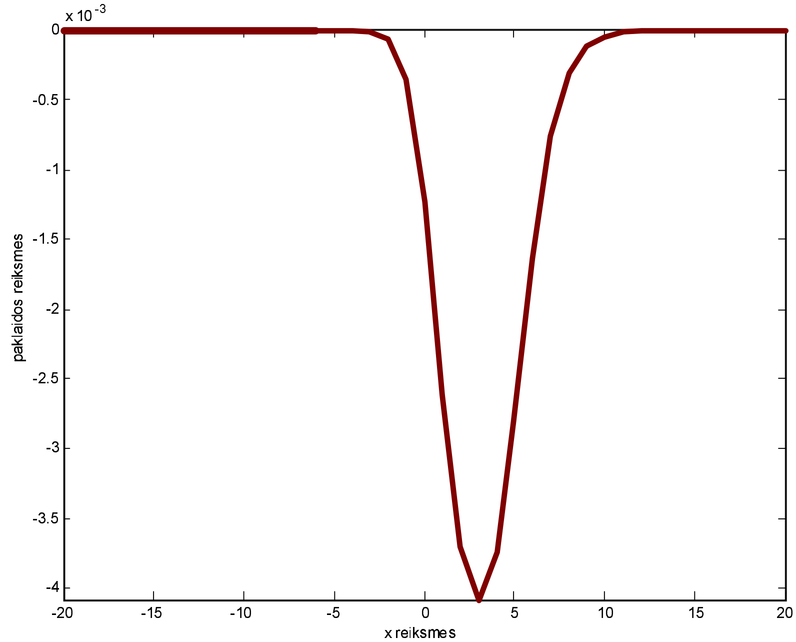
8 pav. Paklaidos $\Delta_2(x, p)$ priklausomybė nuo p, esant fiksuotoms x reikšmėms



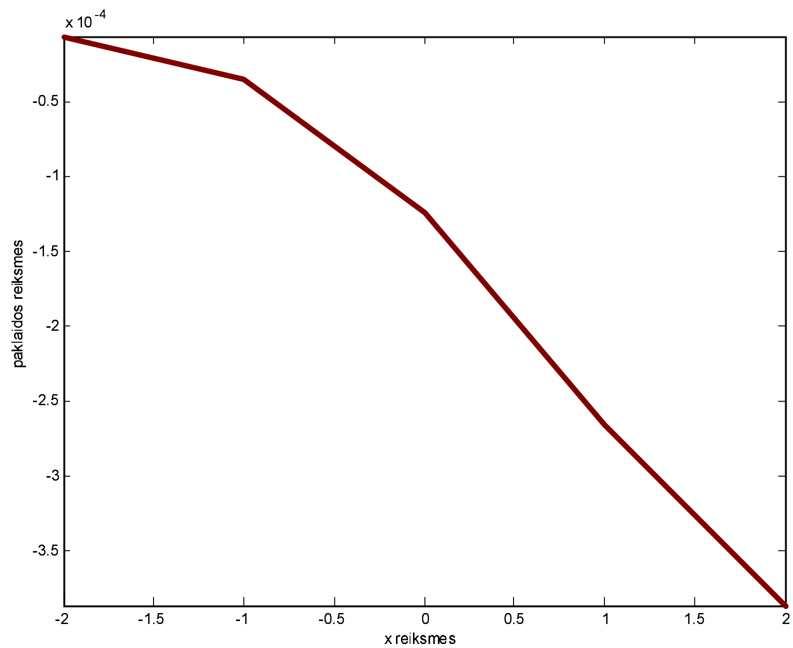
9 pav. Paklaidos $\Delta_2(x, p)$ priklausomybė nuo x, kai p=0.5



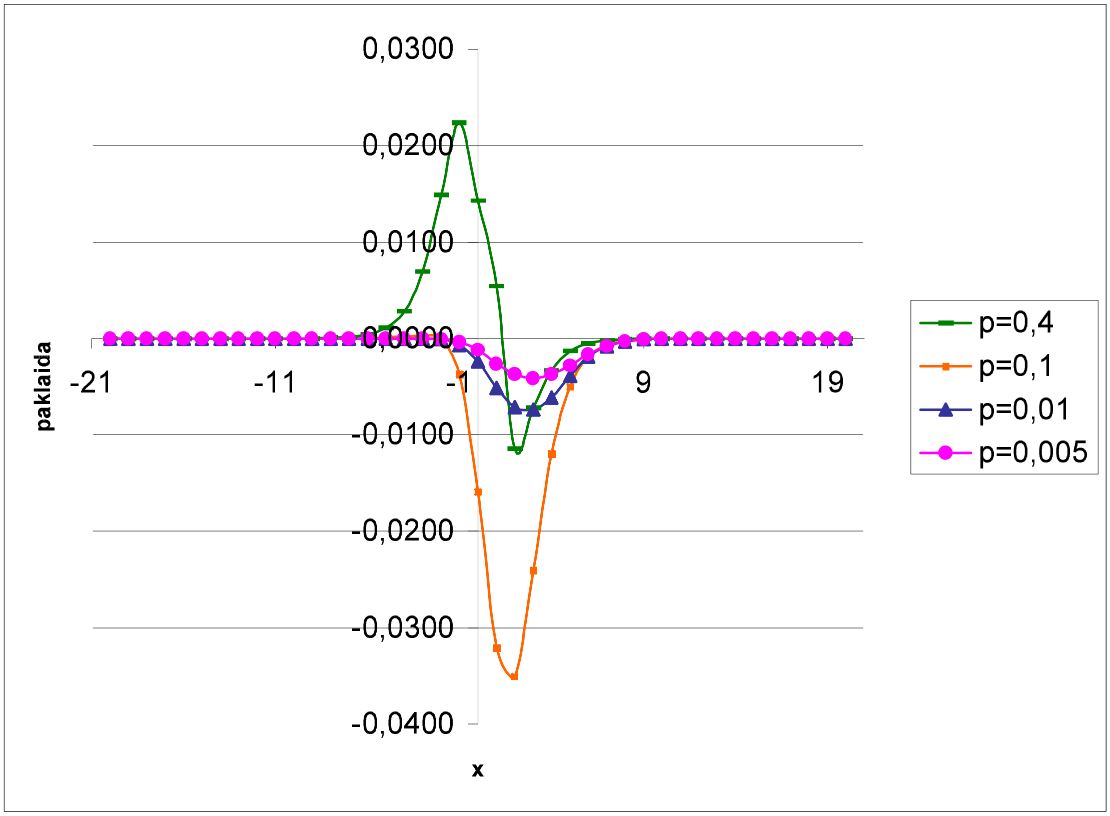
10 pav. Paklaidos $\Delta_2(x, p)$ priklausomybė nuo x, kai p=0.05



11 pav. Paklaidos $\Delta_2(x,p)$ priklausomybė nuo x, kai p=0.005



12 pav. Paklaidos $\Delta_2(x,p)$ priklausomybė nuo x, kai p=0.0005



13 pav. Paklaidos $\Delta_2(x, p)$ priklausomybė nuo x, esant fiksuotoms p reikšmėms

1 lentelė

Paklaidos $\Delta_2(x, p)$

p	Paklaidos $\Delta_2(x, p)$				
	x=-10	**x=-5**	**x=0**	**x=5**	**x=10**
0,5	1,13487E-05	0,001656434	0,0417	2,2099E-05	1,03039E-09
0,4	7,26303E-06	0,001057256	0,0143	-0,00128996	-9,07731E-06
0,3	4,08532E-06	0,000591754	-0,006	-0,00258767	-1,8155E-05
0,2	1,81557E-06	0,000260196	-0,017	-0,00385016	-2,72309E-05
0,1	4,53791E-07	6,28547E-05	-0,016	-0,00497852	-3,63E-05
0,09	3,67552E-07	5,05128E-05	-0,015	-0,00506796	-3,72056E-05
0,08	2,90394E-07	3,95161E-05	-0,014	-0,00514726	-3,81107E-05
0,07	2,22315E-07	2,98648E-05	-0,013	-0,00521246	-3,90149E-05
0,06	1,63316E-07	2,15592E-05	-0,012	-0,00525722	-3,9918E-05
0,05	1,13397E-07	1,45995E-05	-0,01	-0,00527073	-4,08191E-05
0,04	7,25573E-08	8,98604E-06	-0,008	-0,00523294	-4,17167E-05
0,03	4,07981E-08	4,7191E-06	-0,007	-0,00510194	-4,26075E-05
0,02	1,81187E-08	1,79893E-06	-0,005	-0,00477317	-4,34812E-05
0,01	4,51938E-09	2,25807E-07	-0,002	-0,00389214	-4,42868E-05
0,009	3,65884E-09	1,42592E-07	-0,002	-0,00373314	-4,43549E-05
0,008	2,88911E-09	7,28513E-08	-0,002	-0,00355074	-4,44174E-05
0,007	2,21017E-09	1,65841E-08	-0,002	-0,00333985	-4,44718E-05
0,006	1,62203E-09	-2,62092E-08	-0,001	-0,00309375	-4,45142E-05
0,005	1,12469E-09	-5,55283E-08	-0,001	-0,00280345	-4,45374E-05
0,004	7,18155E-10	-7,13728E-08	-1E-03	-0,00245659	-4,45272E-05
0,003	4,02416E-10	-7,37425E-08	-7E-04	-0,00203576	-4,44507E-05
0,002	1,77478E-10	-6,26371E-08	-5E-04	-0,00151554	-4,42106E-05
0,001	4,3339E-11	-3,80564E-08	-2E-04	-0,00085743	-4,33375E-05

3. PRIEDAS

Pranešimo“Viršutinių ekstremumų asimptotika” medžiaga

Tarkime, kad $(X_1, X_2, ..., X_n)$ yra paprastoji atsitiktinė imtis iš generalinės aibės su skirstinio funkcija F. Sudarome variacinę eilutę:

$$X_1^{(n)} \le X_2^{(n)} \le ... \le X_n^{(n)}.$$

Nagrinėsime atvejį, kai imties tūris $N = N_n$ yra atsitiktinis ir nepriklausomas nuo visų X_j, $j \ge 1$. Tirsime netiesiškai normuoto kraštinio nario $X_{n-k+1}^{(N)}$ atvejį.

Tarkime, kad yra tokia realiųjų skaičių seka $\{v_n, n \ge 1\}$, su kuria

$$\gamma_n = n(1 - F(v_n)) \to \gamma, \qquad \textbf{(3.1)}$$

kai $n \to \infty$.

Pažymėkime $P(N_n < x) = A_n(x)$.

Teorema. Tarkime, kad skirstinio funkcija $A_n(x)$ tenkina sąlygą:

$$A_n(nx) \to A(x), \text{ kai } n \to \infty.$$

Tada:

Jeigu yra (3.1), tai

$$P(X_{n-k+1}^{(N)} < v_n) \to H^{(k)}(\gamma),$$

kai $n \to \infty$.

Čia skirstinio funkcija

$$H^{(k)}(\gamma) = \sum_{t=0}^{k-1} \frac{\gamma^t}{t!} \int_0^\infty z^t e^{-z\gamma} dA(z).$$

Yra atlikta kompiuterinė analizė, kai imties tūris nėra atsitiktinis.

4. PRIEDAS

Pranešimo"Apatinių ekstremumų asimptotiniai tyrimai" medžiaga

Tarkime, kad $(X_1, X_2, ..., X_n)$ yra paprastoji atsitiktinė imtis iš generalinės aibės su logistine skirstinio funkcija F, t.y.

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}; \quad x \in (-\infty;+\infty). \tag{4.1}$$

Sudarome variacinę eilutę:

$$X_1^{(n)} \le X_2^{(n)} \le \ldots \le X_n^{(n)}. \tag{4.2}$$

Nagrinėsime atvejį, kai imties tūris $N = N_n$ yra atsitiktinis ir nepriklausomas nuo visų X_j, $j \ge 1$.

Tarkime, kad imties tūris pasiskirtęs pagal geometrinį skirstinį, t.y.

$$P(N_n = m) = p \cdot (1-p)^{m-1}, \ m \ge 1 \tag{4.3}$$

Tirsime normuoto kraštinio nario $X_k^{(N)}$ atvejį.

$$X_k^{(N)} = \begin{cases} X_k^{(j)}, N = j, \ j = k, k+1, \ldots; \\ X_j^{(j)}, N = j, \ j = 1, 2, \ldots, k-1. \end{cases} \tag{4.4}$$

Pasinaudojus pilnosios tikimybės formule, buvo gauta išraiška, normuoto apatinio ekstremumo pasiskirstymo funkcijai rasti:

$$P\left(X_k^{(N)} - \ln p < x\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} P\left(X_k^{(\min(j,k))} - \ln p < x\right) \cdot P(N=j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} P\left(X_j^{(j)} - \ln p < x\right) \cdot P(N=j) + \sum_{j=k}^{+\infty} P\left(X_j^{(j)} - \ln p < x\right) \cdot P(N=j) \tag{4.5}$$

Čia $P\left(X_k^{(j)} - \ln p < x\right) = \dfrac{j!}{(k-1)! \cdot (j-k)!} \displaystyle\int_0^{F(x+\ln p)} t^{k-1} \cdot (1-t)^{j-k} dt$

Teorema. Jei generalinės aibės skirstinys yra logistinis (4.1), o imties tūris yra pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį (4.3), tai normuoto apatinio ekstremumo pasiskirstymo funkcija:

$$P\left(X_1^{(N)} - \ln p < x\right) = \frac{1}{1+e^{-x}} = F(x),$$

$$P\left(X_2^{(N)} - \ln p < x\right) = \frac{p \cdot \left(p \cdot e^{-2x} + 1 - e^{-x} + 2p \cdot e^{-x}\right) + e^{-x}}{\left(p + e^{-x}\right) \cdot \left(1 + e^{-x}\right)^2} \to \frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)^2} = F^2(x), \text{kai } p \to 0.$$

Privalumai:

Skaičiuojant $X_1^{(N)}$ skirstinį nereikia naudoti perkėlimo teoremų.

Skaičiuojant $X_2^{(N)}$ skirstinį, nereikia reikalauti, kad $p = \frac{1}{n}$, užtenka, kad $p \to 0$.