KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Sigita Rancaitė

ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ MOMENTŲ KONVERGAVIMAS

Magistro darbas

Vadovas
prof. dr. J. A. Aksomaitis

KAUNAS, 2010

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
doc. dr. N. Listopadskis
2010 06 05

ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ MOMENTŲ KONVERGAVIMAS

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
prof. dr. J. A. Aksomaitis
2010 06 03

Recenzentas
doc. dr. Kazimieras Padvelskis
2010 06 01

Atliko
FMMM 8 gr. stud.
S. Rancaitė
2010 05 25

KAUNAS, 2010

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, habil. dr., vyriausiasis analitikas (DnB NORD Bankas)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., vice-prezidentas projektams (UAB „Baltic Amadeus“)

SANTRAUKA

Dažnai praktikoje tenka skaičiuoti nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ekstremumų reikšmes. Ekstremumų reikšmės yra matematiniai modeliai daugelio techninių ir ekonomikos mokslų tyrimo objektai.

Šiame magistriniame darbe tiriamas Pareto atsitiktinių dydžių maksimumų momentų konvergavimas, kai imties didumas n yra fiksuotas, ir kai N_n yra atsitiktinis su geometriniu skirstinio dėsniu. Apskaičiavome maksimumų momentus Pareto skirstiniams, kai $x \geq 0$, ir kitu atveju, kai $x \leq 0$. Pasinaudojome ribinėmis teoremomis, kad rastume maksimumų momentus, kai imties didumas $n \to \infty$, išvesti jų konvergavimo greičio įverčiai. Kai imties didumas N_n yra atsitiktinis geometrinis dydis, Pareto atsitiktiniai dydžiai yra geometriškai max-stabilūs. Iš geometrinio max-stabilumo seka, kad gauti maksimumų momentai yra tikslūs.

Atlikta kompiuterinė analizė su Matlab.

Rancaitė S. Maximums Moments Convergence of Random Variables : Master‘s work in applied mathematics / supervisor prof. dr. J. A. Aksomaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2010. – 62 p.

SUMMARY

In practice we often have to calculate extreme values of a sequence $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ of random variables. Extreme values are mathematical models of objects in many technical and economical sciences.

In this master's work, maximums moments convergence of Pareto random variables is analyzed. Results are presented in two cases, when sample size n is fixed, and when it is accidental - N_n and is distributed geometrically. We calculate maximums moments for Pareto distribution, when $x \geq 0$, and when $x \leq 0$. We use limited theorems for maximums moments when the sample size n is large and find the estimates of convergence rate for Pareto random variables. When the sample size N_n is geometric random number, Pareto random variables is geometric max-stables. From the geometric max-stable follows, that obtained maximums moments are accurate.

Computation was developed using MatLab.

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Ekstremalių reikšmių teorija tiria atsitiktinių dydžių maksimumus ir minimumus. Ši teorija yra taikoma įvairiose srityse, kuriose dideli nukrypimai yra reikšmingi. Ekstremalūs įvykiai arba reti įvykiai turi labai svarbią įtaką (blogą ar gerą) realiajame pasaulyje. Pavyzdžiui, didelę žalą sukeliantis katastrofiškas įvykis, didelės sumos laimėjimas loterijoje. Tokie reti įvykiai yra mūsų gyvenimo dalis. Mes turime pripažinti, suprasti ir ištirti šiuos fenomenalius reiškinius ir problemas, sukeltas retų įvykių. Iš tikrųjų ekstremalių įvykių analizė tapo labai svarbia ir teikiama jai vis daugiau dėmesio tikimybiniuose ir statistiniuose tyrinėjimuose.

Taikant matematinius modelius dažnai tenka skaičiuoti ekstremaliųjų reikšmių skaitines charakteristikas. Taip pat sudėtingesniais atvejais, kai neįmanoma nustatyti ekstremumų pasiskirstymo dėsnio, skaitinės charakteristikos yra vienintelis būdas reiškiniui aprašyti. Tikslios atsitiktinių dydžių maksimumų ir minimumų momentų išraiškos yra taikomos modeliavime ekonomikos, genetikos, ekologijos, meteorologijos srityse. Taip pat, kai ekstremumų pasiskirstymo funkcija turi sudėtingą išraišką, kurią nėra patogu naudoti, yra naudinga žinoti kitais metodais apskaičiuotus ekstremumų momentus.

Pareto skirstinys, pavadintas italų ekonomisto ir sociologo Vilfredo Pareto (1848-1923 m.) garbei, yra laipsninio kitimo tikimybinis skirstinys. Jis buvo pastebėtas daugelyje gyvenimo sričių. Pirmą kartą V. Paretas jį panaudojo aprašydamas pajamų pasiskirstymą tarp asmenų (didelė dalis gyventojų turi mažas pajamas, tačiau tik labai nedaug žmonių turi labai dideles pajamas). Jei turime Pareto atsitiktinių dydžių imtį, reiškia, kad imtyje bus (gal nedaug, bet) „didelių“ reikšmių. Pareto skirstinys taip pat taikomas draudime, klimatologijoje, jis naudojamas apibūdinti ekstremalias oro sąlygas.

Darbo tikslas: atsitiktinių dydžių maksimumų k-tosios eilės momentų konvergavimo analizė.

Uždaviniai:

- Rasti tikslias maksimumų k-tosios eilės momentų reikšmes, kai imties didumas yra fiksuotas arba atsitiktinis su geometriniu skirstinio dėsniu;
- Ištirti maksimumų k-tosios eilės momentų ribinį elgesį, kai $n \to \infty$;
- Suformuluoti ir įrodyti teoremas apie maksimumų k-tosios eilės momentų konvergavimo greičio įverčius;
- Atlikti maksimumų momentų kompiuterinę analizę.

Šia tematika skaityti pranešimai šiose konferencijose: Matematika ir matematikos dėstymas – 2010, VIII studentų konferencija „Taikomoji matematika“. Pranešimų medžiaga pateikta 3 ir 4 prieduose.

1. TEORINĖ DALIS

1. 1. MAKSIMUMŲ STRUKTŪROS

Tarkime, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su skirstinio funkcija $F(x) = P(X_j < x),\ \ j \geq 1$.

Šių dydžių maksimumą pažymėsime:

$$Z_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n),$$

$$Z_N = \max(X_1, X_2, ..., X_N),$$

čia N yra atsitiktinis dydis, įgyjantis sveikas teigiamas reikšmes $(N = N_n \in \mathrm{N})$ ir nepriklausantis nuo visų $X_j,\ j \geq 1$.

Asimptotinėje maksimumų teorijoje nagrinėjami tiesiškai normalizuoti maksimumų skirstiniai, t.y. $P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right)$, kai $n \to \infty$. Žinoma [1], jog egzistuoja tokia centravimo seka $\{a_n, n \geq 1\}$ ir normavimo seka $\{b_n > 0, n \geq 1\}$ su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} H(x), \tag{1.1.1}$$

čia $H(x)$ – neišsigimusi skirstinio funkcija.

Iš mūsų prielaidų išplaukia, kad

$$H_n(x) = P(Z_n < x) = F^n(x). \tag{1.1.2}$$

Ieškome tokių funkcijos $F(x)$ apribojimų, su kuriais būtų užtikrinamas egzistavimas tokių konstantų a_n ir $b_n > 0$, kad lygybė:

$$\lim_{n \to \infty} H_n(xb_n + a_n) = H(x) \tag{1.1.3}$$

egzistuotų tolydžioms funkcijoms $H(x)$. Toks konvergavimas vadinamas silpnuoju skirstinio funkcijos konvergavimu [1].

Tokiu būdu sudaroma skirstinio funkcijos $F(x)$ apribojimo sąlyga, kuriai esant dydis Z_n gali būti normalizuojamas konstantomis a_n ir $b_n > 0$ taip, kad $\frac{Z_n - a_n}{b_n}$ silpnai konverguotų į neišsigimusį skirstinį $H(x)$.

Remiantis (1.1.2) išraiška, (1.1.3) sąryšį galima perrašyti taip:

$$\lim_{n \to \infty} F^n(xb_n + a_n) = H(x). \tag{1.1.4}$$

Yra pateiktos taisyklės, kaip sukonstruoti konstantų sekas $\{a_n, n \geq 1\}$, $\{b_n > 0, n \geq 1\}$, ir randamas kriterijus funkcijai $F(x)$, kuriam esant tenkinamas (1.1.4) sąryšis [1].

1. 2. MAKSIMUMŲ RIBINIAI SKIRSTINIAI

Pažymėkime viršutinį ribinį skirstinio funkcijos $F(x)$ tašką

$$\omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

Suformuluosime teoremas [1], apibūdinančias ribinius maksimumų skirstinius, ir kokius kriterijus turi tenkinti $F(x)$, kad skirstinio funkcija tenkintų ir (1.1.3) sąryšį. Taip pat nurodysime centravimo ir normavimo konstantų galimus parinkimo algoritmus.

1. 1 Teorema. Tarkime, $\omega(F) = +\infty$, ir egzistuoja tokia konstanta $\alpha > 0$, kad su $\forall x > 0$ yra tenkinama lygybė:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha}. \tag{1.2.1}$$

Tuomet egzistuoja centravimo ir normavimo konstantos a_n ir $b_n > 0$, kad

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_n < xb_n + a_n) = H_{1,\alpha}(x), \tag{1.2.2}$$

čia $H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), x > 0 \end{cases}$ **(1.2.3)**

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = 0,\ b_n = \inf\left\{x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n}\right\}. \tag{1.2.4}$$

1. 2 Teorema. Tarkime, $\omega(F) < \infty$, ir egzistuoja tokia konstanta $\alpha > 0$, kad tenkinama lygybė:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1 - F^*(tx)}{1 - F^*(t)} = x^{-\alpha}, \tag{1.2.5}$$

čia skirstinio funkcija $F^*(x) = F\left(\omega(F) - \frac{1}{x}\right),\ x > 0$.

Tuomet egzistuoja centravimo ir normavimo konstantos a_n ir b_n, kad

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_n < xb_n + a_n) = H_{2,\alpha}(x), \tag{1.2.6}$$

čia $H_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$ **(1.2.7)**

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \omega(F)\,,\ b_n = \omega(F) - \inf\left\{x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n}\right\}. \qquad \textbf{(1.2.8)}$$

1. 3 Teorema. Tarkime, su bet kokia baigtine konstanta a integralas

$$\int_a^{\omega(F)} (1 - F(y))dy < \infty. \qquad \textbf{(1.2.9)}$$

Intervale $(a(F), \omega(F))$ apibrėžkime funkciją

$$R(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_t^{\omega(F)} (1 - F(y))dy. \qquad \textbf{(1.2.10)}$$

Jei $\forall x \in R$ egzistuoja riba

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(t + xR(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}, \qquad \textbf{(1.2.11)}$$

tuomet egzistuoja centravimo ir normavimo konstantos a_n ir b_n, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < xb_n + a_n) = H_{3,0}(x), \qquad \textbf{(1.2.12)}$$

čia $H_{3,0}(x) = \exp(-e^{-x}), x \in R$. **(1.2.13)**

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \inf\left\{x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n}\right\}, b_n = R(a_n). \qquad \textbf{(1.2.14)}$$

1. 1, 1. 2 ir 1. 3 teoremų įrodymai pateikti [1].

Pastaba. Šiose teoremose pateiktas centravimo ir normavimo konstantų a_n ir b_n parinkimo būdas nėra vienintelis. Mes net negalime teigti, kad tai yra pats paprasčiausias konstantų parinkimo būdas ir, kad taip parinktos konstantos yra geriausios, tačiau jų parinkimo algoritmai yra geri tuo, kad yra paprasti ir konstruktyvūs.

1. 3. STABILIEJI MAKSIMUMO SKIRSTINIAI

Apibrėžimas. Jei egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantos a_n, $b_n > 0$, su kuriomis skirstinio funkcijai $F(x)$ galioja lygybė

$$F^n(xb_n + a_n) = F(x), \tag{1.3.1}$$

tuomet skirstinys $F(x)$ vadinamas stabiliuoju maksimumo skirstiniu [1].

Įrodyta [2], jog stabilieji maksimumo skirstiniai yra tik šie:

$$H_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), x > 0 \end{cases}; \qquad \text{(Frechet)}$$

$$H_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), x < 0 \\ 1, x \ge 0 \end{cases}; \qquad \text{(Weibul)}$$

$$H_{3,0}(x) = \exp(-e^{-x}), x \in R; \qquad \text{(Gumbel)}$$

1. 4. GEOMETRIŠKAI STABILIEJI MAKSIMUMO SKIRSTINIAI

Tarkime, kad $\{X_1, X_2, ..., X_{N_n}\}$ yra paprastoji atsitiktinė imtis su skirstinio funkcija $F(x)$. Imties didumas N_n nepriklauso nuo visų X_j, $j = \overline{1, N_n}$ ir yra atsitiktinis su geometriniu skirstinio dėsniu

$$P(N_n = k) = p(1-p)^{k-1}, \text{ čia } p = \frac{1}{n},\ k \ge 1. \tag{1.4.1}$$

Pažymėkime

$$Z_{N_n} = \max(X_1, X_2, ..., X_{N_n}).$$

Apibrėžimas. Jei egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantos a_n, $b_n > 0$, su kuriomis skirstinio funkcijai $F(x)$ galioja lygybė:

$$P\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} < x\right) = F(x), \tag{1.4.2}$$

tuomet skirstinys $F(x)$ vadinamas geometriškai stabiliuoju maksimumo skirstiniu [3].

1. 5. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS PERKĖLIMO TEOREMOJE

Nagrinėsime struktūrą Z_N, kai N yra atsitiktinis dydis, nepriklausantis nuo X_j, $j \geq 1$.

1. 4 Teorema ***(Perkėlimo teorema maks-stabiliesiems skirstiniams).*** ([4])

Jeigu

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = H^n(xb_n + a_n) = H(x) \tag{1.5.1}$$

ir

$$P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} A(x), \tag{1.5.2}$$

tada

$$P\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} < x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Psi(x), \tag{1.5.3}$$

čia skirstinio funkcija

$$\Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x) dA(z). \tag{1.5.4}$$

Teoremos įrodymas pateiktas [4]. Mus domina netolygusis konvergavimo greičio įvertis perkėlimo teoremoje, t.y.

$$\left| P\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} < x\right) - \Psi(x) \right| \leq \Delta_n(x). \tag{1.5.5}$$

Pažymėkime:

$$\delta_n(x) = \max\left(F^n(xb_n + a_n), H(x)\right); \tag{1.5.6}$$

$$u_n(x) = n\left(1 - F(xb_n + a_n)\right); \tag{1.5.7}$$

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x); \tag{1.5.8}$$

$$\rho_n(x) = u_n(x) - u(x); \tag{1.5.9}$$

1. 5 Teorema. Tarkime, H yra atsitiktinių dydžių $\frac{Z_n - a_n}{b_n}$ ribinis skirstinys, ir $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = A(x)$, $A(+0) = 0$. Tada $\forall x$, tenkinančiam sąlygą $\frac{u_n(x)}{n} \leq \frac{1}{2}$, teisingas įvertis:

$$\Delta_n(x) < \left(\frac{u_n^{\,2}(x)}{n} + |\rho_n(x)|\right)\int_0^\infty z\delta_n^{\,z}(x)dA_n(nz) + u(x)\int_0^\infty |A_n(nz) - A(z)|H^z(x)dz. \qquad \textbf{(1.5.10)}$$

Teorema ir įrodymas pateikti [5].

1. 1 Pavyzdys. Tarkime, kad N_n skirstinys yra geometrinis (1.4.1) su parametru $p_n = \frac{1}{n}$. Tada skirstinio funkcija

$$P(N_n \le x) = \sum_{k=1}^{[x]} P(N_n = x) = p\sum_{k=1}^{[x]}(1-p)^{k-1} = [q = 1-p] = 1 - p\sum_{k=[x]+1}^{\infty} q^{k-1} = 1 - p\frac{q^{[x]}}{1-q} = 1 - q^{[x]}$$

$$P\left(\frac{N_n}{n} \le x\right) = P(N_n \le xn) = \sum_{k=1}^{[x]} P(N_n = x) = 1 - q^{[x]} = \left[p = \frac{1}{n}\right] = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nx - \{nx\}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - e^{-x};$$

taigi, $A(x) = 1 - e^{-x}$.

Dabar ribinė skirstinio funkcija

$$\Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x)dA(z) = \int_0^\infty H^z(x)dA(1-e^{-z}) = \int_0^\infty \left(\frac{H(x)}{e}\right)^z dz = \left.\frac{\left(\frac{H(x)}{e}\right)^z}{\ln\left(\frac{H(x)}{e}\right)}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{1 - \ln H(x)}.$$

Turime tris maks-stabilias skirstinio funkcijas:

$$H(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-\alpha}), x > 0, \\ \exp(-(-x)^{\alpha}), x < 0, \\ \exp(-e^{-x}), -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

ir tris ribines skirstinio funkcijas Perkėlimo teoremoje:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x^{-\alpha}} = \dfrac{x^{\alpha}}{1 + x^{\alpha}}, x > 0, \\ \dfrac{1}{1 + (-x)^{\alpha}}, x < 0, \\ \dfrac{1}{1 + e^{-x}}, -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Pirmieji du skirstiniai yra Pareto, trečiasis – logistinis.

2. TIRIAMOJI DALIS IR REZULTATAI

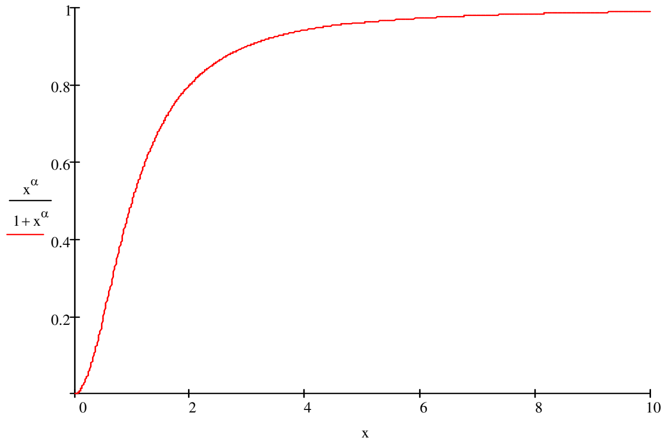
2. 1. PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ RIBINIAI SKIRSTINIAI

Tarkime, kad nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_{2,}, \ldots, X_n$ turi Pareto skirstinį, kai x – teigiamas, t.y.

$$F(x) = 1 - \frac{1}{1+x^{\alpha}} = \frac{x^{\alpha}}{1+x^{\alpha}}, \ \alpha > 0, \ x \geq 0, \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

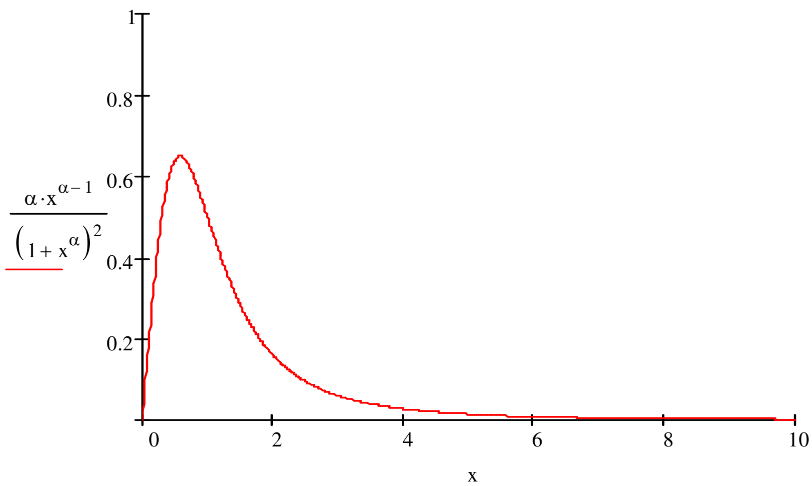
$$p(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{(1+x^{\alpha})^2}. \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

Šios funkcijos grafikas lėtai artėja į 1, kai $x \to \infty$ (sunkios uodegos).



2.1.1 pav. Pareto skirstinio funkcijos grafikas, kai $\alpha = 2$

Pareto skirstinio tankio funkcijos grafikas:



2.1.2 pav. Pareto skirstinio tankio funkcijos grafikas, kai $\alpha = 2$

Rasime šių atsitiktinių dydžių maksimumų ribinį skirstinį. Kadangi $\omega(F) = +\infty$, tai galima taikyti 1. 1 teoremos sąlygą (1.2.1):

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{1-1+\dfrac{1}{1+(tx)^{\alpha}}}{1-1+\dfrac{1}{1+t^{\alpha}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1+t^{\alpha}}{1+(tx)^{\alpha}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\alpha(tx)^{\alpha-1}x} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}} = x^{-\alpha}.$$

Kadangi ši sąlyga tenkinama, tai $\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n < xb_n + a_n) = H_{1,\alpha}(x)$.

Tiesiogiai rasime centravimo ir normavimo konstantas:

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = P(Z_n < xb_n + a_n) = F^n(xb_n + a_n) = \left(\frac{(xb_n + a_n)^{\alpha}}{1+(xb_n + a_n)^{\alpha}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{(xb_n + a_n)^{\alpha}}\right)^{-n} =$$

$$\overset{a_n=0}{=}\left(1+\frac{x^{\alpha}}{b_n^{\ \alpha}}\right)^{-n} \overset{b_n=n^{\frac{1}{\alpha}}}{=} \left(1+\frac{x^{\alpha}}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-x^{-\alpha}} = H_{1,\alpha}(x),\ x \geq 0,$$

čia centravimo ir normavimo konstantos:

$$a_n = 0, \tag{2.1.3}$$

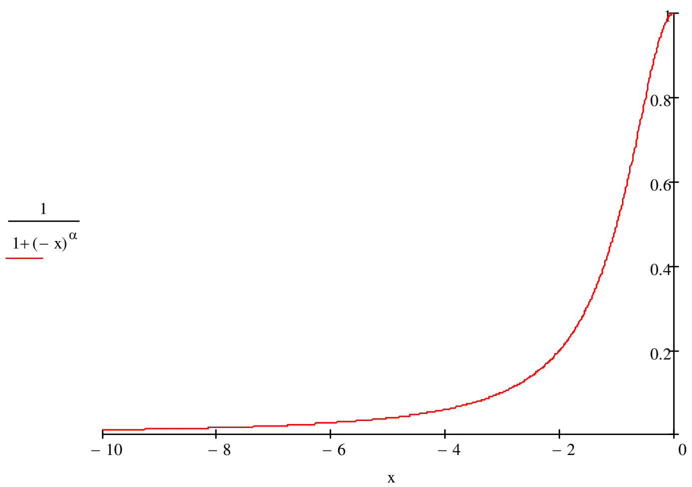
$$b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.1.4}$$

Tarkime, kad nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_{2,},..., X_n$ turi Pareto skirstinį, kai x – neigiamas, t.y.

$$F(x) = \frac{1}{1+(-x)^{\alpha}},\ \alpha > 0,\ x \leq 0, \tag{2.1.5}$$

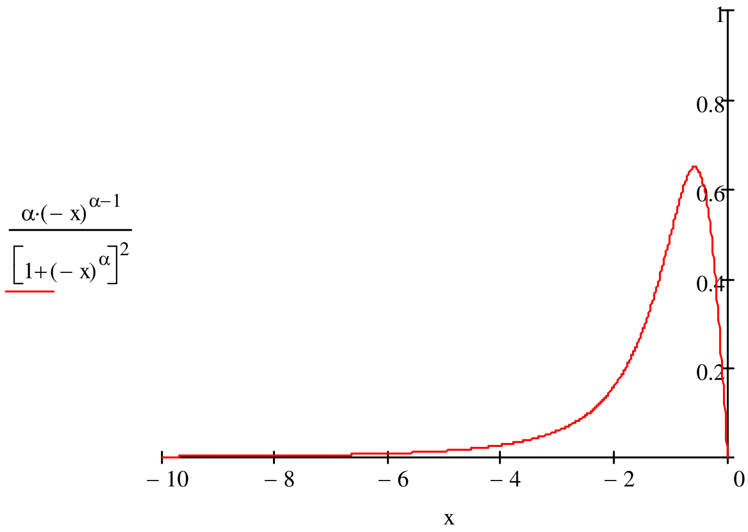
$$p(x) = \frac{\alpha(-x)^{\alpha-1}}{\left(1+(-x)^{\alpha}\right)^2}. \tag{2.1.6}$$

Šios funkcijos grafikas:



2.1.3 pav. Pareto skirstinio funkcijos grafikas, kai $\alpha = 2$

Pareto skirstinio tankio funkcijos grafikas:



2.1.4 pav. Pareto skirstinio tankio funkcijos grafikas, kai $\alpha = 2$

Rasime šių atsitiktinių dydžių maksimumų ribinį skirstinį. Kadangi $\omega(F) = 0 < \infty$, tai galima taikyti 1. 2 teoremos sąlygą (1.2.5):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F^*(tx)}{1-F^*(t)} = x^{-\alpha},$$

čia skirstinio funkcija $F^*(x) = F\left(\omega(F) - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}$, $x > 0$.

Kadangi sąlyga tenkinama, tai $\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n < xb_n + a_n) = H_{2,\alpha}(x)$.

Tiesiogiai rasime centravimo ir normavimo konstantas:

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = P(Z_n < xb_n + a_n) = F^n(xb_n + a_n) = \left(\frac{1}{1+(-xb_n - a_n)^\alpha}\right)^n = \left(1+(-xb_n - a_n)^\alpha\right)^{-n} =$$

$$\overset{a_n=0}{=} \left(1 + \frac{(-x)^\alpha}{b_n^{-\alpha}}\right)^{-n} \overset{b_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}}{=} \left(1 + \frac{(-x)^\alpha}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-(-x)^\alpha} = H_{2,\alpha}(x),\ x \le 0,$$

čia centravimo ir normavimo konstantos:

$$a_n = 0, \tag{2.1.7}$$

$$b_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.1.8}$$

2. 2. PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO MOMENTAI

Tarkime, $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ - nepriklausomų Pareto atsitiktinių dydžių imtis, $n \in N$. Iš sąlygos (1.1.2) (maksimumo skirstinio funkcija):

$$P(Z_n < x) = P(\max(X_1, X_2, ..., X_n) < x) = P(X_1 < x) \cdot ... \cdot P(X_n < x) = F^n(x)$$

ir momentų apibrėžimo turime, kad maksimumų k-tosios eilės momentas:

$$MZ_n^{\ k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dP(Z_n < x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF^n(x) . \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

Apskaičiuokime Pareto atsitiktinių dydžių, kai $x \geq 0$, (2.1.1) maksimumų k-tosios eilės momentus:

$$MZ_n^{\ k} = \int_0^{\infty} x^k dF^n(x) = \int_0^{\infty} x^k d\left(1 - \frac{1}{1+x^\alpha}\right)^n = \int_0^{\infty} x^k n \left(1 - \frac{1}{1+x^\alpha}\right)^{n-1} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{(1+x^\alpha)^2} dx = n\alpha \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha n+k-1}}{(1+x^\alpha)^{n+1}} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+x^\alpha} = t & x \to 0 \Rightarrow t \to 1, \quad x \to \infty \Rightarrow t \to 0 \\ x = \left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} & dx = -\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \dfrac{1}{t^2} dt \end{bmatrix} =$$

$$= n\int_0^1 t^{1-\frac{k}{\alpha}-1} \cdot (1-t)^{n+\frac{k}{\alpha}-1} dt = n \cdot B\left(1 - \frac{k}{\alpha}, n + \frac{k}{\alpha}\right) = \frac{\Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right) \cdot \Gamma\left(n+\frac{k}{\alpha}\right)}{\Gamma(n)}, \ \alpha > k ;$$

$$MZ_n^{\ k} = \frac{\Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right) \cdot \Gamma\left(n+\frac{k}{\alpha}\right)}{\Gamma(n)}, \alpha > k . \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

Apskaičiuokime Pareto atsitiktinių dydžių, kai $x \leq 0$, (2.1.5) maksimumų k-tosios eilės momentus:

$$MZ_n^{\ k} = \int_{-\infty}^{0} x^k dF^n(x) = \int_{-\infty}^{0} x^k d\left(\frac{1}{1+(-x)^\alpha}\right)^n = \int_{-\infty}^{0} x^k n \left(\frac{1}{1+(-x)^\alpha}\right)^{n-1} \frac{\alpha(-x)^{\alpha-1}}{\left(1+(-x)^\alpha\right)^2} dx = n\alpha \int_{-\infty}^{0} \frac{x^k \cdot (-x)^{\alpha-1}}{\left(1+(-x)^\alpha\right)^{n+1}} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+(-x)^\alpha} = t & x \to -\infty \Rightarrow t \to 0, \quad x \to 0 \Rightarrow t \to 1 \\ x = -\left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} & dx = \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \dfrac{1}{t^2} dt \end{bmatrix} =$$

$$= n\alpha\int_0^1 \left(-\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^k \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-1)} t^{n+1}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{t^2}dt = n(-1)^k\int_0^1 t^{-\frac{k}{\alpha}+n-1}(1-t)^{\frac{k}{\alpha}+1-1}dt =$$

$$= n(-1)^k B\left(n-\frac{k}{\alpha},1+\frac{k}{\alpha}\right) = (-1)^k\frac{\Gamma\left(n-\frac{k}{\alpha}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right)}{\Gamma(n)},\ k < n\alpha;$$

$$MZ_n^{\ k} = (-1)^k\frac{\Gamma\left(n-\frac{k}{\alpha}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right)}{\Gamma(n)}, k < n\alpha. \tag{2.2.3}$$

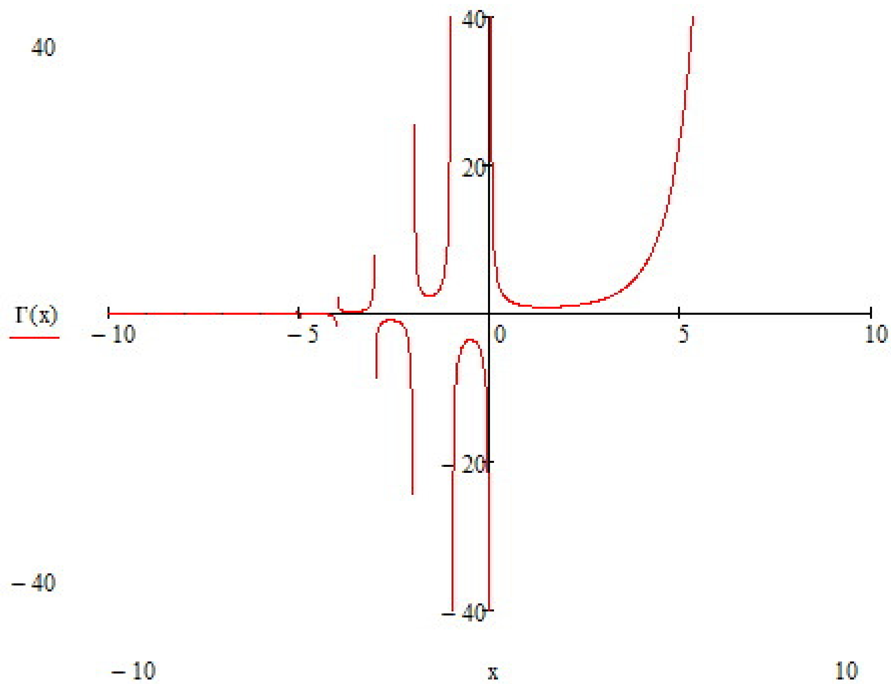
Momentų skaičiavimams naudojama Beta funkcija (arba pirmojo tipo Oilerio integralas):

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

ir Gamma funkcija (arba antrojo tipo Oilerio integralas):

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx.$$



2.2.1 pav. Gamma funkcijos grafikas

2. 3. PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ MOMENTŲ KONVERGAVIMAS

Tarkime $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 1$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su skirstinio funkcija F, maksimumų ribinis skirstinys – H. Tuomet egzistuoja centravimo ir normavimo konstantos $a_n \in R$ ir $b_n > 0$, kad $Z_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ galioja

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = F^n\left(xb_n + a_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} H(x).$$

Ieškosime, kokiai reikšmei $k > 0$ yra teisingas sąryšis:

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n}\right)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dH(x). \tag{2.3.1}$$

Yra įrodyta [6], kad iš atsitiktinių dydžių sekos konvergavimo dar neišplaukia, kad momentai konverguoja. Sąlyga, kuri kontroliuoja skirstinio „uodegos“ tikimybes ir tokiu būdu neleidžia ypač didelėms reikšmėms trikdyti momentų konvergavimą, yra būtina.

2. 1 Teorema ***(Momentų konvergavimo teorema).*** ([7]) Tarkime, kad atsitiktinių dydžių maksimumų skirstinys H yra:

1.) $H = H_{1,\alpha}$, centravimo ir normavimo konstantos: $a_n = 0$, $b_n = \inf\left\{x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n}\right\}$. Jei kiekvienam sveikajam skaičiui $0 < k < \alpha$ tenkinama sąlyga

$$\int_{-\infty}^{0} |x|^k dF(x) < \infty, \tag{2.3.2}$$

tada

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{Z_n}{b_n}\right)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dH_{1,\alpha}(x) = \Gamma\left(1 - \frac{k}{\alpha}\right). \tag{2.3.3}$$

2.) $H = H_{2,\alpha}$, centravimo ir normavimo konstantos: $a_n = \omega(F)$, $b_n = \omega(F) - \inf\left\{x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n}\right\}$.

Jei kiekvienam sveikajam skaičiui $k > 0$ tenkinama sąlyga

$$\int_{-\infty}^{\omega(F)} |x|^k dF(x) < \infty, \tag{2.3.4}$$

tada

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n}\right)^k = \int_{-\infty}^{0} x^k dH_{2,\alpha}(x) = \left(-1\right)^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right). \tag{2.3.5}$$

3.) $H = H_{3,0}$, centravimo ir normavimo konstantos: $a_n = \inf\left\{x : 1 - F(x) \le \frac{1}{n}\right\}, b_n = R(a_n)$. Jei kiekvienam sveikajam skaičiui $k > 0$ tenkinama sąlyga

$$\int_{-\infty}^{0} |x|^k \, dF(x) < \infty, \qquad \textbf{(2.3.6)}$$

tada

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n}\right)^k = \int_{-\infty}^{0} x^k \, dH_{3,0}(x) = (-1)^k \Gamma^{(k)}(1), \qquad \textbf{(2.3.7)}$$

čia $\Gamma^{(k)}(1)$ yra k-toji Gamma funkcijos išvestinė taške $x = 1$.

Patikrinkime būtinas momentų konvergavimo sąlygas Pareto skirstiniams ir raskime, su kokia reikšme k maksimumų momentai konverguoja (2.3.1). Kai x-teigiamas (2.1.1), maksimumų ribinis skirstinys yra $H_{1,\alpha}(x)$, (2.3.2) sąlyga tenkinama

$$\int_{-\infty}^{0} |x|^k \, dF(x) = \int_{-\infty}^{0} |x|^k \, d\left(\frac{x^\alpha}{1 + x^\alpha}\right) = 0, \text{ ir } \alpha > k.$$

Kai x-neigiamas (2.1.5), maksimumų ribinis skirstinys yra $H_{2,\alpha}(x)$, (2.3.4) sąlyga tenkinama

$$\int_{-\infty}^{0} |x|^k \, dF(x) = \int_{-\infty}^{0} |x|^k \, d\left(\frac{1}{1 + (-x)^\alpha}\right) = \int_{-\infty}^{0} |x|^k \frac{\alpha(-x)^{\alpha-1}}{\left(1 + (-x)^\alpha\right)^2} dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{1 + (-x)^\alpha} = t & x \to -\infty \Rightarrow t \to 0, \quad x \to 0 \Rightarrow t \to 1 \\ x = -\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} & dx = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{1}{t^2} dt \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^1 \left|-\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right|^k \alpha \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-1)} t^2 \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{1}{t^2} dt = \int_0^1 t^{-\frac{k}{\alpha}+1-1} (1-t)^{\frac{k}{\alpha}+1-1} dt = B\left(1 - \frac{k}{\alpha}, 1 + \frac{k}{\alpha}\right) =$$

$$= \Gamma\left(1 - \frac{k}{\alpha}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right) < \infty, \text{ kai } \alpha > k.$$

2. 4. ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ MOMENTŲ KONVERGAVIMO GREITIS

Tikslių maksimumų momentų skaičiavimas yra pakankamai sudėtingas, todėl dažnai, kai imties didumas n neaprėžtai didėja, tikslūs skirstiniai yra keičiami ribiniais skirstiniais. Todėl svarbu įvertinti konvergavimo greičius: maksimumų skirstinio bei jo ribinio skirstinio, ir maksimumų momentų bei jų įverčių. Suformuluosiu teoremą apie atsitiktinių dydžių maksimumų k-tosios eilės momentų konvergavimo greičio įvertį.

2. 2 Teorema. Tarkime $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, $n \geq 1$ yra nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių imtis su skirstinio funkcija F, maksimumų ribinis skirstinys – $H(x)$. Tada maksimumų k-tosios eilės momentų konvergavimo greičio įvertis:

$$\left| M\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n}\right)^k - MX^k \right| \leq \left| k \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1} \Delta_n(x) dx \right| \qquad \textbf{(2.4.1)}$$

čia $\Delta_n(x)$ – maksimumų skirstinio ir jo ribinio skirstinio netolygusis konvergavimo greitis.

Įrodymas.

Tegu X – turi ribinį maksimumų skirstinį. Pritaikę k-tosios eilės momentų apibrėžimą, turime

$$\left| M\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n}\right)^k - MX^k \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^k d\left[P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) - H(x) \right] \right| =$$

(integruojame dalimis)

$$= \left| x^k \left[P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) - H(x) \right]\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) - H(x) \right] dx^k \right| \leq$$

(kadangi $\left| P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) - H(x) \right| \leq \Delta_n(x)$)

$$\leq \left| x^k \Delta_n(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} k x^{k-1} \Delta_n(x) dx \right| \leq \left| k \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1} \Delta_n(x) dx \right|.$$

Teorema įrodyta.

Atvejis, kai $k = 1$, yra ištirtas magistro darbe [9].

2. 4. 1 PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ, KAI X – TEIGIAMAS, MAKSIMUMŲ MOMENTŲ KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS

Žinodami Pareto atsitiktinių dydžių, kai x-teigiamas (2.1.1), maksimumų skirstinio ir jo ribinio skirstinio (t.y. Frešė) netolygųjį konvergavimo greitį, galime apskaičiuoti maksimumų k-tosios eilės momentų konvergavimo greičio įvertį (2.4.1).

2. 3 Teorema. Tarkime $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots,\ n \geq 1$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su Pareto skirstinio funkcija, kai x-teigiamas (2.1.1). Tada

$$\left| M\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n}\right)^k - MX^k \right| \leq \frac{k}{2(n-1)\alpha}\Gamma\left(2 - \frac{k}{\alpha}\right). \qquad \textbf{(2.4.2)}$$

Įrodymas.

Iš 2.2 teoremos turime, kad nagrinėjamiems atsitiktiniams dydžiams galioja konvergavimo greičio įvertis (2.4.1).

Ieškosime konvergavimo greičio įverčio, kai nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai turi (2.1.1) skirstinį. Jeigu $u_n(x) = u(x)$ (t.y. sąlygos (1.5.7) ir (1.5.8) lygios), tai normuotų maksimumų skirstinio ir jo ribinio skirstinio netolygiam konvergavimo greičiui rasti galime pasinaudoti [8] rezultatu:

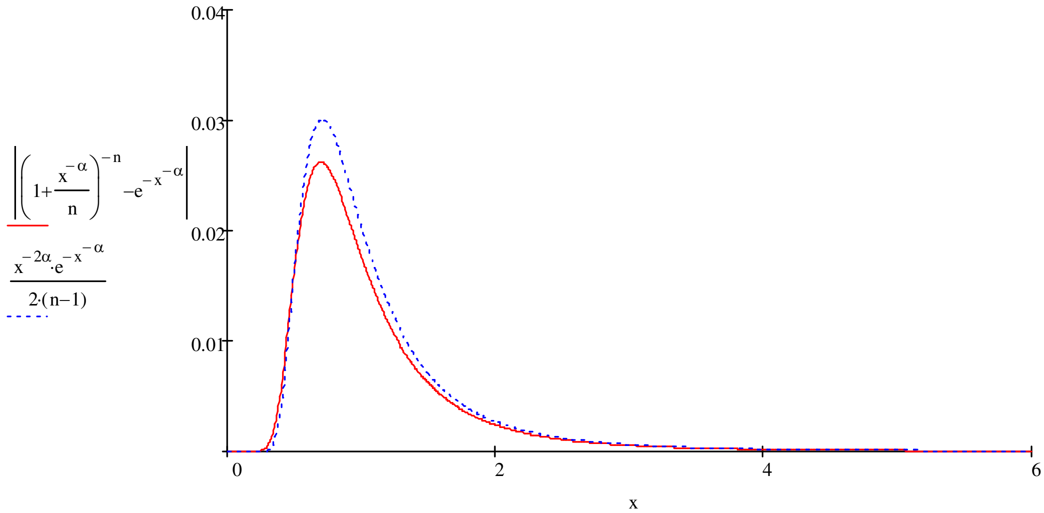
$$\left| P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) - H(x) \right| \leq \Delta_n(x) = \frac{u_n^{-2}(x) e^{-u_n(x)}}{2(n-1)}. \qquad \textbf{(2.4.3)}$$

Iš (1.5.7) ir (1.5.8):

$$u_n(x) = n\big(1 - F(xb_n + a_n)\big) = n\left(1 - 1 + \frac{1}{(xb_n + a_n)^\alpha}\right) \overset{(2.1.3),(2.1.4)}{=} \frac{n}{x^\alpha n^{\frac{1}{\alpha}\alpha}} = x^{-\alpha} = u(x).$$

Įsistatome į (2.4.3) ir gaunamas šių skirstinių netolygusis konvergavimo greičio įvertis yra:

$$\Delta_n(x) = \frac{x^{-2\alpha} e^{-x^{-\alpha}}}{2(n-1)},\ x \geq 0,\ \alpha > 0.$$



2.4.1 pav. Pareto atsitiktinių dydžių maksimumų skirstinio ir jų ribinio skirstinio netolygusis konvergavimo greitis, kai $n = 10$ ir $\alpha = 2$

Skaičiuojame integralą (2.4.1):

$$\left| M\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n}\right)^k - MX^k \right| \le \left| k\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1}\Delta_n(x)dx \right| = k\int_0^{+\infty} x^{k-1}\frac{x^{-2\alpha}e^{-x^{-\alpha}}}{2(n-1)}dx = k\int_0^{+\infty}\frac{x^{k-1-2\alpha}e^{-x^{-\alpha}}}{2(n-1)}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} x^{-\alpha} = t & x \to 0 \Rightarrow t \to +\infty, \quad x \to +\infty \Rightarrow t \to 0 \\ x = t^{-\frac{1}{\alpha}} & dx = -\dfrac{1}{\alpha}t^{-\frac{1}{\alpha}-1}dt \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{k}{2(n-1)\alpha}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{k}{\alpha}+2-1}e^{-t}dx = \frac{k}{2(n-1)\alpha}\Gamma\left(2 - \frac{k}{\alpha}\right), \ \alpha > k.$$

Teorema įrodyta.

2. 4. 2 PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ, KAI x – NEIGIAMAS, MAKSIMUMŲ MOMENTŲ KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS

Žinodami Pareto atsitiktinių dydžių, kai x-neigiamas (2.1.5), maksimumų skirstinio ir jo ribinio skirstinio (t.y. Veibulo) netolygųjį konvergavimo greitį, galime apskaičiuoti maksimumų k-tosios eilės momentų konvergavimo greičio įvertį (2.4.1).

2. 4 Teorema. Tarkime $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots,$ $n \ge 1$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su Pareto pasiskirstymo funkcija, kai x-neigiamas (2.1.5). Tada

$$\left| M\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n}\right)^k - MX^k \right| \le \frac{k}{\alpha} n^{\frac{k}{\alpha}+1} \frac{2n - \frac{k}{\alpha}}{n+1} \frac{\Gamma\left(n - \frac{k}{\alpha} - 1\right)\Gamma\left(2 + \frac{k}{\alpha}\right)}{\Gamma(n+1)}. \qquad \textbf{(2.4.4)}$$

Įrodymas.

Iš 2.2 teoremos turime, kad nagrinėjamiems atsitiktiniams dydžiams galioja konvergavimo greičio įvertis (2.4.1).

Ieškosime konvergavimo greičio įverčio, kai nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai turi (2.1.5) skirstinį. Nagrinėkime konvergavimo greičio įvertį Perkėlimo teoremoje (1. 5 teorema), kai

$$P(N_n = n) = 1. \qquad \textbf{(2.4.5)}$$

Tuomet 1. 5 teoremos sąlygos:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = \lim_{n\to\infty} P(N_n < nx) = A(nx) = \begin{cases} 0, & nx < n, \quad x < 1 \\ 1, & nx \ge n, \quad x \ge 1 \end{cases},$$

$A(+0) = 0$ ir turime, kad $A(x)$ yra išsigimęs skirstinys.

Iš 1. 4 Perkėlimo teoremos (1.5.4) sąlygos turime, kad

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} H_{2,\alpha}{}^z(x) dA(z) = H_{2,\alpha}(x).$$

Tada $\forall x$, tenkinančiam sąlygą $\frac{u_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$, (1.5.5) sąlygai

$$\left| P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) - H_{2,\alpha}(x) \right| \le \Delta_n(x) \qquad \textbf{(2.4.6)}$$

galioja (1.5.10) įvertis. Gauname, kad (2.4.6) sąlyga yra Pareto atsitiktinių dydžių, kai x-neigiamas, normuotų maksimumų skirstinio ir Veibulo skirstinio netolygusis konvergavimo greitis. Apskaičiuojame šio netolygiojo konvergavimo greičio įvertį:

$$\int_0^{+\infty} z\delta_n{}^z(x) dA_n(nz) = \delta_n(x);$$

$$|A_n(nz) - A(z)| = 0;$$

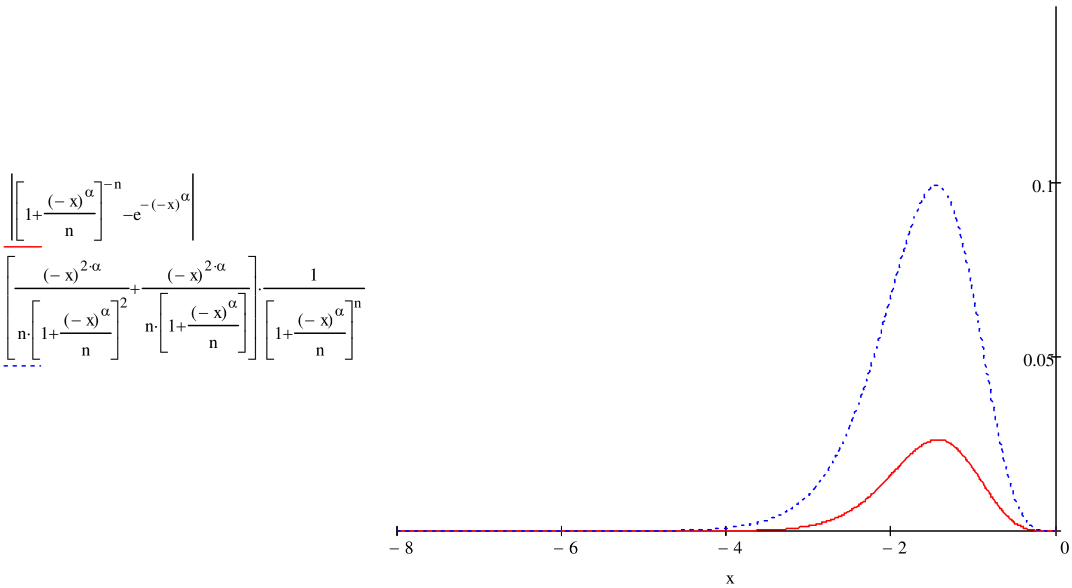
$$u_n(x) = n(1 - F(xb_n + a_n)) = n\left(1 - \frac{1}{1 + (xb_n + a_n)^\alpha}\right) = n\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{(-x)^\alpha}{n}}\right) = \frac{(-x)^\alpha}{1 + \frac{(-x)^\alpha}{n}};$$

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-x)^{\alpha}}{1+\frac{(-x)^{\alpha}}{n}}=(-x)^{\alpha};$$

įstatome į (1.5.10):

$$\Delta_n(x)<\left[\frac{(-x)^{2\alpha}}{n\left(1+\frac{(-x)^{\alpha}}{n}\right)^2}+\left|\frac{(-x)^{\alpha}}{1+\frac{(-x)^{\alpha}}{n}}-(-x)^{\alpha}\right|\right]\left(1+\frac{(-x)^{\alpha}}{n}\right)^{-n}=$$

$$=\left[\frac{(-x)^{2\alpha}}{n\left(1+\frac{(-x)^{\alpha}}{n}\right)^2}+\frac{(-x)^{2\alpha}}{n\left(1+\frac{(-x)^{\alpha}}{n}\right)}\right]\frac{1}{\left(1+\frac{(-x)^{\alpha}}{n}\right)^n}$$



2.4.2 pav. Pareto atsitiktinių dydžių maksimumų skirstinio ir jų ribinio skirstinio netolygusis konvergavimo greitis, kai $n=10$ ir $\alpha=2$

Skaičiuojame integralą (2.4.1):

$$\left|M\left(\frac{Z_n-a_n}{b_n}\right)^k-MX^k\right|\le\left|k\int_{-\infty}^{+\infty}x^{k-1}\Delta_n(x)dx\right|\le\left|k\int_{-\infty}^{0}x^{k-1}\left[\frac{(-x)^{2\alpha}}{n\left(1+\frac{(-x)^{\alpha}}{n}\right)^2}+\frac{(-x)^{2\alpha}}{n\left(1+\frac{(-x)^{\alpha}}{n}\right)}\right]\frac{1}{\left(1+\frac{(-x)^{\alpha}}{n}\right)^n}dx\right|=$$

$$= \left[\begin{array}{c} \dfrac{1}{1+\dfrac{(-x)^{\alpha}}{n}} = t, \quad (-x)^{\alpha} = n\dfrac{1-t}{t}, \quad x = -n^{\frac{1}{\alpha}}\left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ x \to -\infty \Rightarrow t \to 0, \quad x \to 0 \Rightarrow t \to 1 \\ dx = \dfrac{1}{\alpha} n^{\frac{1}{\alpha}}\left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\dfrac{1}{t^2}dt \end{array} \right] =$$

$$= \left| k\int_0^1 \left[-n^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{k-1} \left[n^2\left(\frac{1-t}{t}\right)^2 \frac{1}{n}t^2 + n^2\left(\frac{1-t}{t}\right)^2 \frac{1}{n}t \right] t^n \frac{1}{\alpha} n^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{t^2}dt \right| =$$

$$= \left| \frac{k}{\alpha}(-1)^{k-1} n^{\frac{k}{\alpha}+1}\int_0^1 t^{-\frac{k}{\alpha}+n-1}(1-t)^{\frac{k}{\alpha}+2-1}dt + \frac{k}{\alpha}(-1)^{k-1} n^{\frac{k}{\alpha}+1}\int_0^1 t^{-\frac{k}{\alpha}+n-2}(1-t)^{\frac{k}{\alpha}+2-1}dt \right| =$$

$$= \left| \frac{k}{\alpha}(-1)^{k-1} n^{\frac{k}{\alpha}+1}\left(B\left(n-\frac{k}{\alpha}, 2+\frac{k}{\alpha}\right) + B\left(n-\frac{k}{\alpha}-1, 2+\frac{k}{\alpha}\right)\right) \right| =$$

$$= \frac{k}{\alpha} n^{\frac{k}{\alpha}+1}\left(\frac{\Gamma\left(n-\frac{k}{\alpha}\right)\Gamma\left(2+\frac{k}{\alpha}\right)}{\Gamma(n+2)} + \frac{\Gamma\left(n-\frac{k}{\alpha}-1\right)\Gamma\left(2+\frac{k}{\alpha}\right)}{\Gamma(n+1)} \right) = \frac{k}{\alpha} n^{\frac{k}{\alpha}+1} \frac{2n-\frac{k}{\alpha}}{n+1} \frac{\Gamma\left(n-\frac{k}{\alpha}-1\right)\Gamma\left(2+\frac{k}{\alpha}\right)}{\Gamma(n+1)},$$

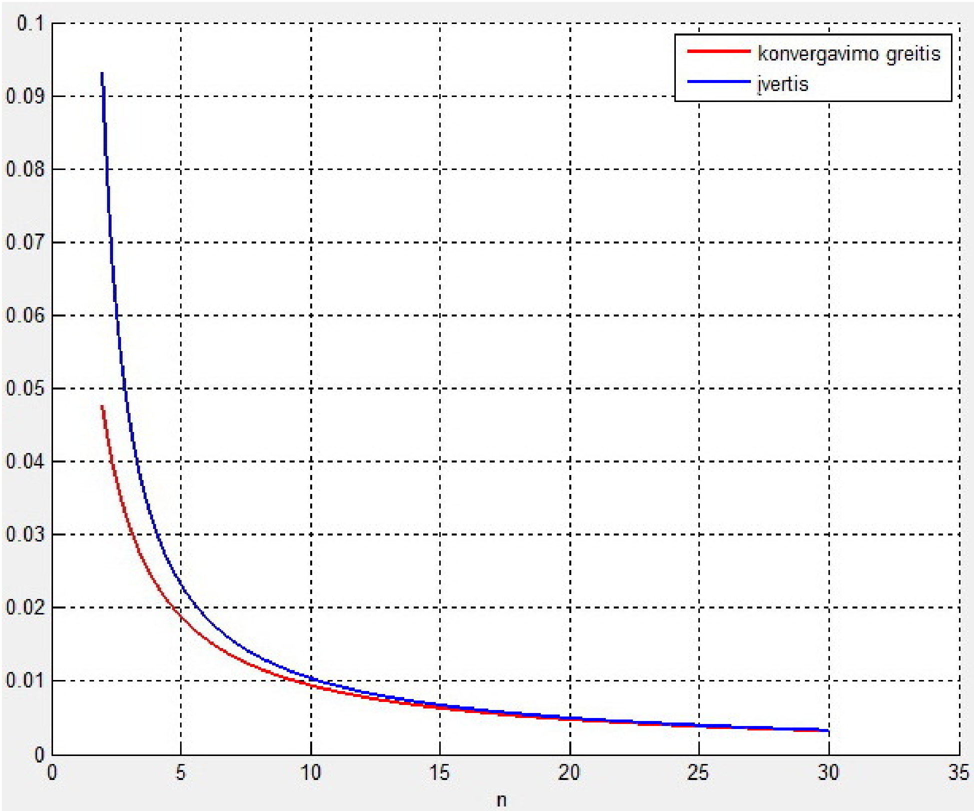
$\alpha > k$.

Teorema įrodyta.

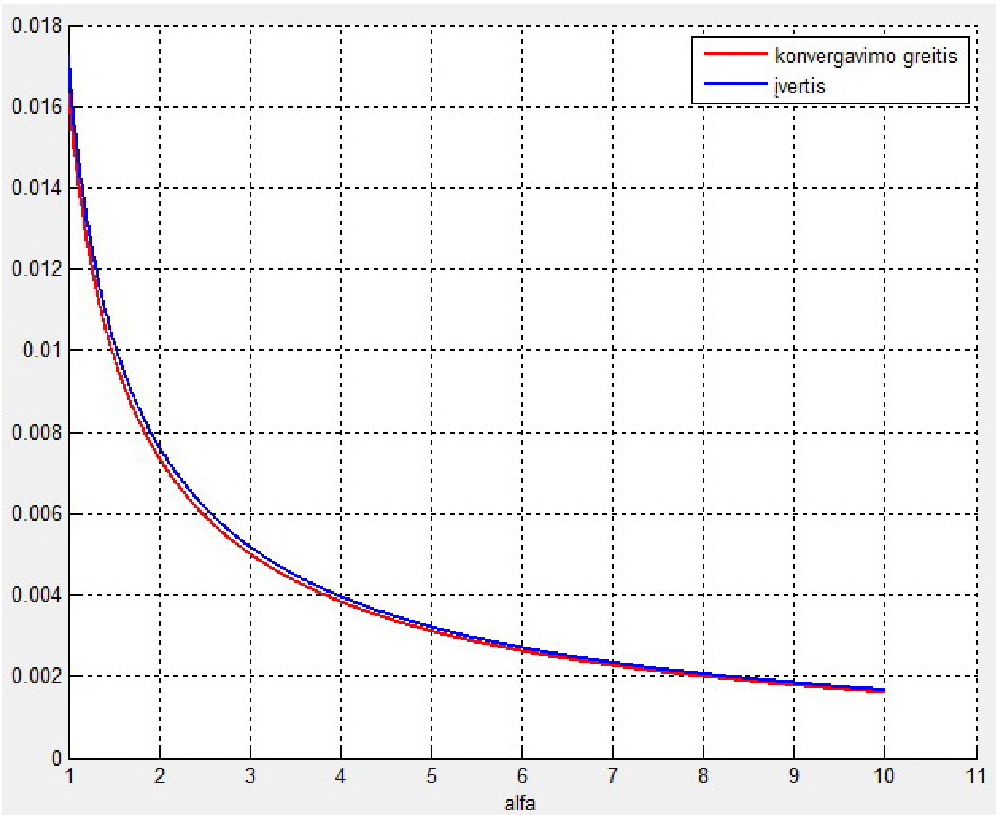
2. 6 MAKSIMUMŲ MOMENTŲ KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIO KOMPIUTERINĖ ANALIZĖ

Pareto atsitiktinių dydžių maksimumų k-tosios eilės momentų konvergavimo greičio bei jo įverčio priklausomybę nuo imties didumo n, momentų eilės k ir skirstinio parametro α tirsime naudodami kompiuterinius skaičiavimus. Bendruoju atveju, maksimumų momentų konvergavimo greitį apibūdina paklaidos $\left| M\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n}\right)^k - MX^k \right|$ kitimas, o konvergavimo greičio įvertį apibūdina šios paklaidos įvertis (2.4.1), kuriuos ir nagrinėsime bei pavaizduosime grafiškai.

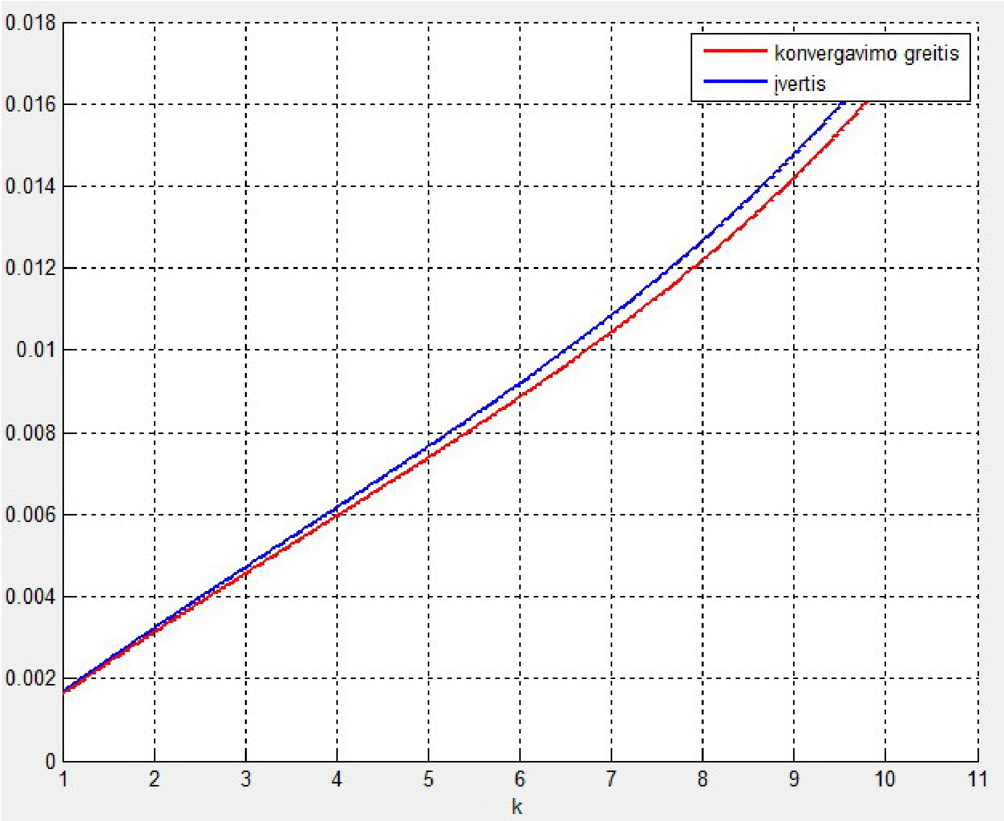
Nagrinėkime Pareto atsitiktinių dydžių, kai $x \geq 0$, (2.1.1) maksimumų k-tosios eilės momentus. Tuomet momentų konvergavimo greitį bei jo įvertį apibūdina sąryšis (2.4.2). Pateikiame keletą paveikslų, kurie atspindi konvergavimo greitį bei jo įvertį nuo minėtų parametrų.



2.6.1 pav. Maksimumų momentų konvergavimo greičio ir jo įverčio grafikai, kai kinta n, $\alpha = 5$, $k = 1$

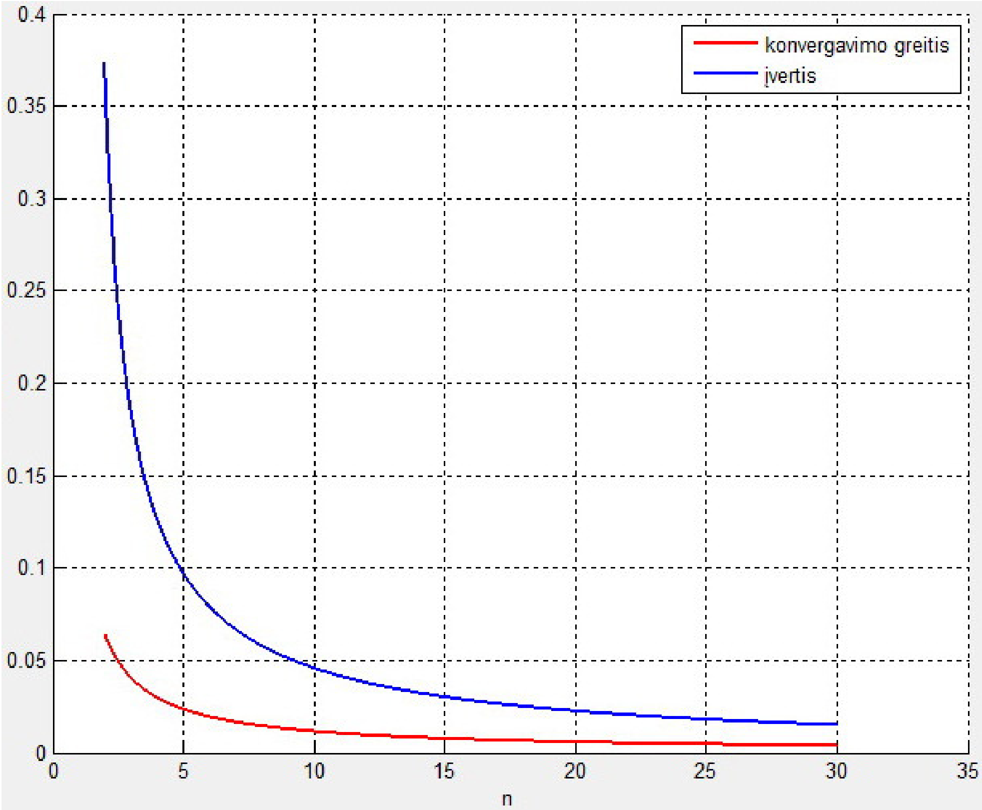


2.6.2 pav. Maksimumų momentų konvergavimo greičio ir jo įverčio grafikai, kai kinta α, $k = 1$, $n = 30$

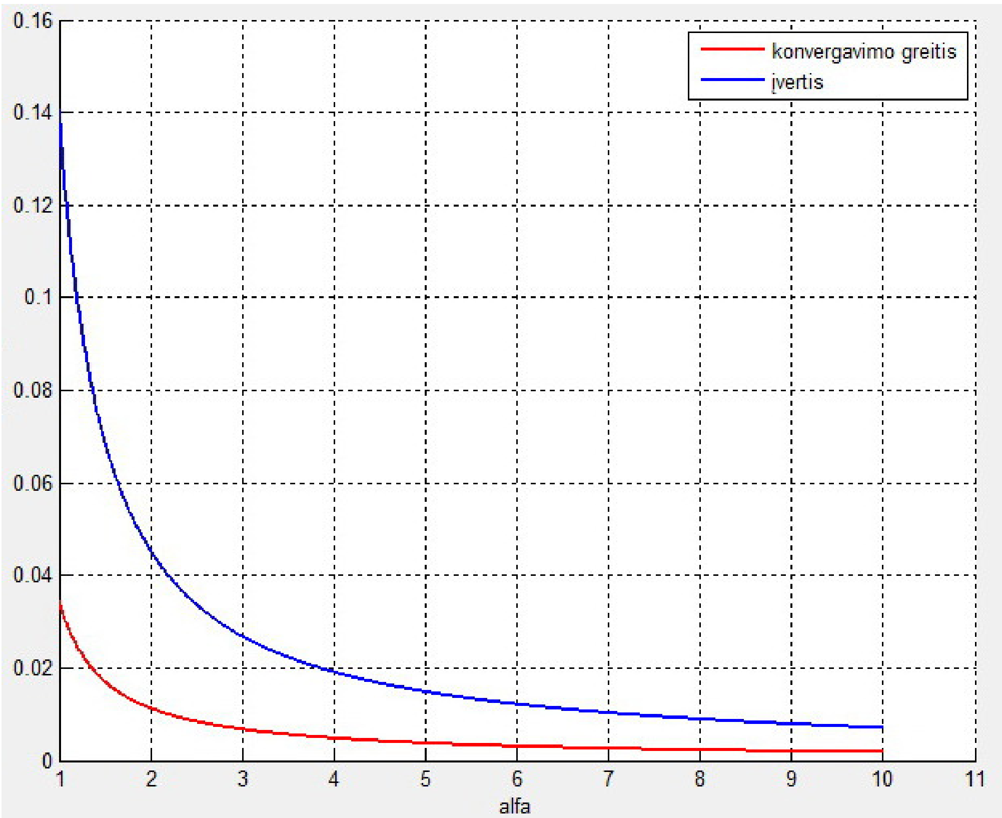


2.6.3 pav. Maksimumų momentų konvergavimo greičio ir jo įverčio grafikai, kai kinta k, $\alpha = 10$, $n = 30$

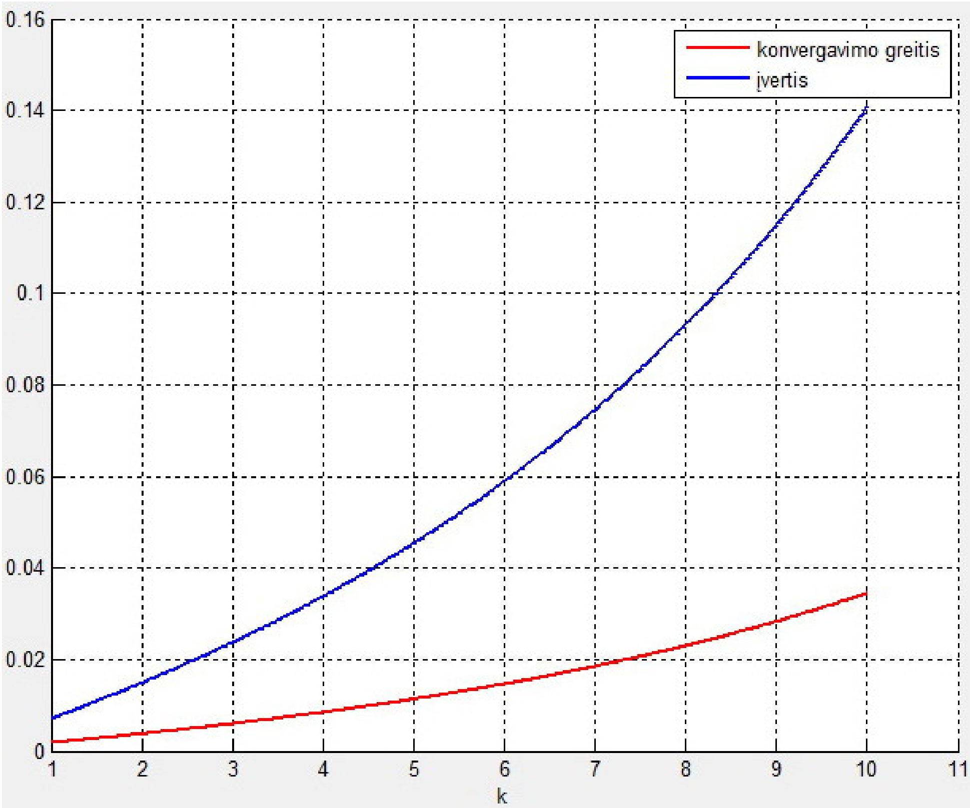
Nagrinėkime Pareto atsitiktinių dydžių, kai $x \le 0$, (2.1.5) maksimumų k-tosios eilės momentus. Tuomet momentų konvergavimo greitį bei jo įvertį apibūdina sąryšis (2.4.4). Pateikiame keletą paveikslų, kurie atspindi konvergavimo greitį bei jo įvertį nuo minėtų parametrų.



2.6.4 pav. Maksimumų momentų konvergavimo greičio ir jo įverčio grafikai, kai kinta n, $\alpha = 5$, $k = 1$



2.6.5 pav. Maksimumų momentų konvergavimo greičio ir jo įverčio grafikai, kai kinta α, $k = 1$, $n = 30$



2.6.6 pav. Maksimumų momentų konvergavimo greičio ir jo įverčio grafikai, kai kinta k, $\alpha = 10$, $n = 30$

Iš paveikslų matome, kad abiems nagrinėjamiems skirstiniams momentų paklaidų reikšmės mažėja, kai imties didumas n didėja ir skirstinių parametras α didėja. Didėjant maksimumų momentų eilei k, paklaidos didėja, tačiau nagrinėjamiems skirstiniams k yra apribotas ir negali viršyti α, priešingu atveju momentai neegzistuos.

2. 7 ATSITIKTINIO KOMPONENTŲ SKAIČIAUS MAKSIMUMŲ MOMENTAI

Tarkime, $\{X_1, X_2, \ldots, X_{N_n}\}$ - nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių imtis, su skirstinio funkcija $F(x)$. Imties dydis N_n nepriklauso nuo visų X_j, $j = \overline{1, N_n}$ ir yra atsitiktinis su geometriniu skirstinio dėsniu (1.4.1).

Nagrinėsime maksimumų struktūrą $Z_{N_n} = \max(X_1, X_2, ..., X_{N_n})$.

Pagal momentų apibrėžimą, tokios nagrinėjamos imties maksimumų k-tosios eilės momentas:

$$MZ_{N_n}{}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dP(Z_{N_n} < x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k d\left(\frac{pF(x)}{1-(1-p)F(x)}\right)$$

– sunku tiesiogiai išspręsti. Tačiau galime pasinaudoti 1.4 Perkėlimo teorema. Suformuluosiu teoremą, apie geometriškai maks-stabiliųjų skirstinių maksimumų k-tosios eilės momentus.

2. 5 Teorema. Tarkime, kad $\{X_1, X_2, \ldots, X_{N_n}\}$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių imtis su skirstinio funkcija $F(x)$ ir galioja geometriškai maks-stabilaus skirstinio sąlyga (1.4.2), tuomet nagrinėjamų atsitiktinių dydžių maksimumų k-tosios eilės momentai lygūs:

$$M\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n}\right)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x). \qquad \textbf{(2.7.1)}$$

Įrodymas.

Iš 1. 4 Perkėlimo teoremos ir geometriškai stabilaus maksimumo skirstinio sąlygos (1. 4. 2):

$$P\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} < x\right) = \Psi(x) = F(x);$$

Pagal momentų apibrėžimą:

$$M\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x),$$

tuomet k-tosios eilės momentas:

$$M\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n}\right)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x).$$

Teorema įrodyta.

2. 6 Teorema. Jei turime nepriklausomų Pareto atsitiktinių dydžių imtį $\{X_1, X_2, \ldots, X_{N_n}\}$, kai x-teigiamas (2.1.1), kurios dydis N_n nepriklauso nuo visų X_j, $j = \overline{1, N_n}$ ir yra atsitiktinis su geometriniu skirstinio dėsniu (1.4.1), tuomet maksimumo k-tosios eilės momentas yra

$$MZ_{N_n}{}^{k} = n^{\frac{k}{\alpha}}\Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right),\ \alpha > k\,. \qquad \textbf{(2.7.2)}$$

Įrodymas.

Remiantis (1.5.2) ir (1.5.4) sąlygomis:

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(N_n < xn\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{xn-1}\right) = 1-e^{-x},\ x>0\,;$$

$$\Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x)dA(z) = \int_0^\infty \left(e^{-x^{-\alpha}}\right)^z d(1-e^{-z}) = \int_0^\infty e^{-zx^{-\alpha}}e^{-z}dz = \int_0^\infty e^{-z(x^{-\alpha}+1)}dz = \frac{1}{1+\frac{1}{x^\alpha}} = \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha} = F(x)\,;$$

Gauname, kad tenkinama geometriškai stabilaus maksimumo skirstinio sąlyga (1. 4. 2). Todėl galima pritaikyti 2. 5 teoremą ir

$$M\left(\frac{Z_{N_n}-a_n}{b_n}\right)^k = \int_0^\infty x^k dF(x)\,.$$

Integruojame 2-ąją lygybės pusę:

$$\int_0^\infty x^k dF(x) = \int_0^\infty x^k \frac{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}{(1+x^\alpha)^2}dx = \int_0^\infty \frac{\alpha\cdot x^{\alpha-1+k}}{(1+x^\alpha)^2}dx = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x^\alpha}=t & x\to 0 \Rightarrow t\to 1, \quad x\to\infty \Rightarrow t\to 0 \\ x=\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} & dx = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{t^2}dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 t^{1-\frac{k}{\alpha}-1}\cdot(1-t)^{1+\frac{k}{\alpha}-1}dt = \Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right),\ \alpha>k\,.$$

Įstatome apskaičiuotas centravimo ir normavimo konstantas (2. 1. 3), (2.1.4), t.y.

$$M\left(\frac{Z_{N_n}-0}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^k = \int_0^\infty x^k dF(x) \Rightarrow$$

$$MZ_{N_n}{}^{k} = n^{\frac{k}{\alpha}}\cdot\Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right),\ \alpha>k\,.$$

Teorema įrodyta.

2. 7 Teorema. Jei turime nepriklausomų Pareto atsitiktinių dydžių imtį $\{X_1, X_2, ..., X_{N_n}\}$, kai x - neigiamas, (2.1.5), kurios dydis N_n nepriklauso nuo visų X_j, $j=\overline{1, N_n}$ ir yra atsitiktinis su geometriniu skirstinio dėsniu (1.4.1), tuomet maksimumo k -tosios eilės momentas yra

$$MZ_{N_n}{}^{k} = b_n{}^{k}\int_0^{\infty} x^k dF(x) = n^{-\frac{k}{\alpha}}(-1)^k\,\Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right),\ \alpha > k\,. \tag{2.7.3}$$

Įrodymas.

Remiantis (1.5.2) ir (1.5.4) sąlygomis:

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(N_n < xn\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{xn-1}\right) = 1-e^{-x},\ x > 0\,;$$

$$\Psi(x) = \int_0^{\infty} H^{z}(x)dA(z) = \int_0^{\infty} e^{-(-x)^{\alpha}z} d(1-e^{-z}) = \int_0^{\infty} e^{-(-x)^{\alpha}z} e^{-z} dz = \int_0^{\infty} e^{-z((-x)^{\alpha}+1)}dz = \frac{1}{1+(-x)^{\alpha}} = F(x)\,;$$

Gauname, kad tenkinama geometriškai stabilaus maksimumo skirstinio sąlyga (1. 4. 2). Todėl galima pritaikyti 2. 5 teoremą ir

$$M\left(\frac{Z_{N_n}-a_n}{b_n}\right)^k = \int_{-\infty}^{0} x^k dF(x)\,.$$

Integruojame 2-ąją lygybės pusę:

$$\int_0^{\infty} x^k dF(x) = \int_{-\infty}^{0} x^k \frac{\alpha(-x)^{\alpha-1}}{(1+(-x)^{\alpha})^2}dx = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+(-x)^{\alpha}} = t & x\to-\infty \Rightarrow t\to 0,\quad x\to 0 \Rightarrow t\to 1 \\ x = -\left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} & dx = \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\dfrac{1}{t^2}dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \left(-\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^k \alpha\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-1)} t^2\,\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{t^2}dt = (-1)^k\int_0^1 t^{-\frac{k}{\alpha}+1-1}(1-t)^{\frac{k}{\alpha}+1-1}dt =$$

$$= (-1)^k B\left(1-\frac{k}{\alpha}, 1+\frac{k}{\alpha}\right) = (-1)^k\,\Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right),\ \alpha > k\,.$$

Įstatome apskaičiuotas centravimo ir normavimo konstantas (2. 1. 7), (2.1.8), t.y.

$$M\left(\frac{Z_{N_n}-0}{n^{-\frac{1}{\alpha}}}\right)^k = \int_{-\infty}^{0} x^k dF(x) \Rightarrow$$

$$MZ_{N_n}{}^{k} = n^{-\frac{k}{\alpha}}\cdot(-1)^k\,\Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right),\ \alpha > k\,.$$

Teorema įrodyta.

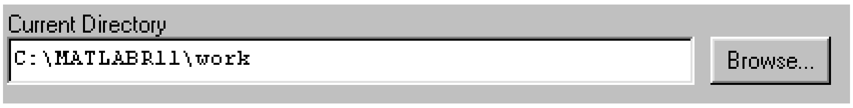
3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Darbe tiriamas atsitiktinių dydžių maksimumų momentų konvergavimas, kai imties didumas n yra fiksuotas ir atsitiktinis, pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį. Tyrimui pasirinkti du skirstiniai: Pareto skirstinys, kai $x \geq 0$, ir Pareto skirstinys, kai $x \leq 0$. Sukurta Matlab programinė įranga tiria maksimumų momentų konvergavimą, kai imties didumas yra fiksuotas. Kai imties didumas yra atsitiktinis su geometriniu skirstinio dėsniu, nagrinėjamiems skirstiniams maksimumų momentai gaunami tikslūs, o paklaidos visais atvejais lygios nuliui.

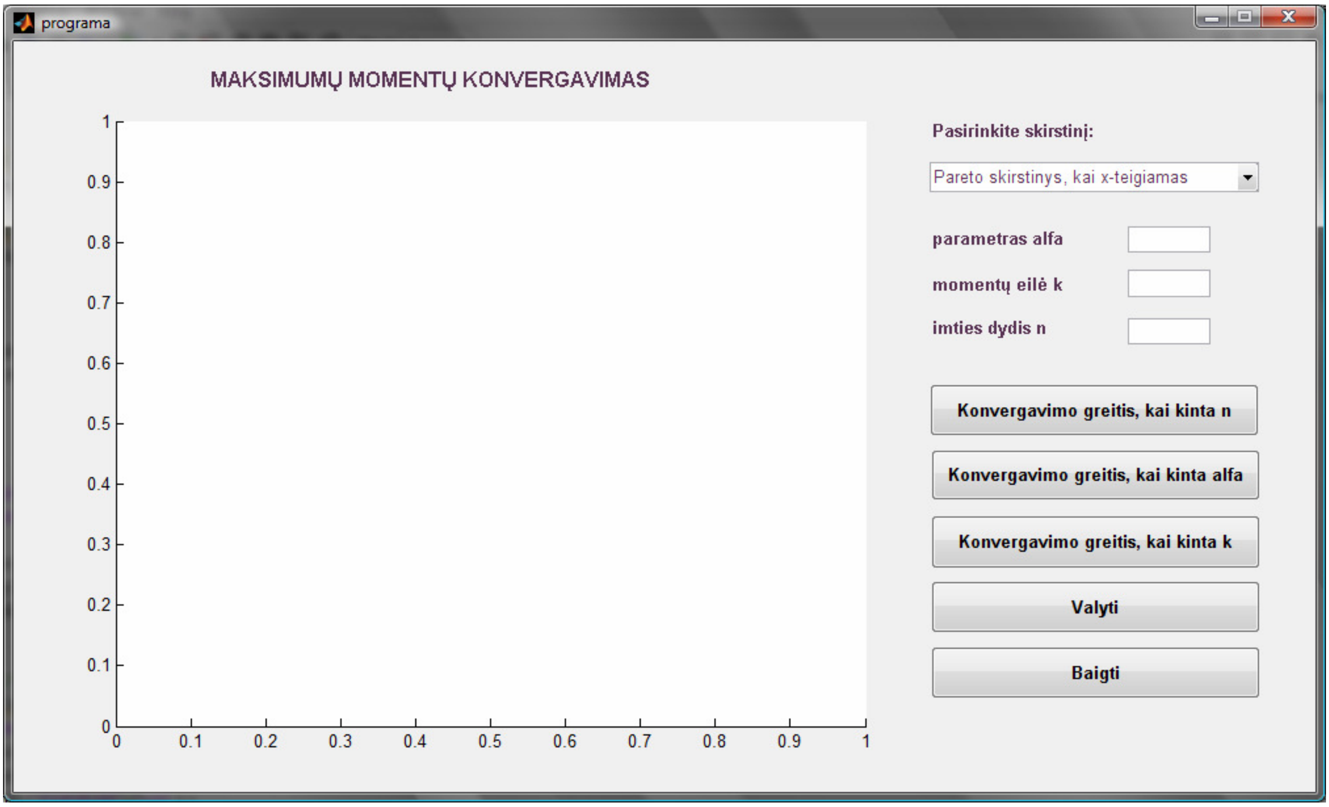
Matlab terpėje algoritmai realizuojami naudojant vidinę Matlab programavimo kalbą, kurios objektai yra visi operatoriai bei funkcijos, naudojamos komandiniu rėžimu. Matlab terpėje parašyta programa vadinama M failu.

Programos vartotojui sukurtas M failas pavadinimu *programa.m*, o programos langas failu *programa.fig*. Vartotojas norėdamas pradėti darbą su programa turi:

1. Nurodyti kelią iki programos failo, t.y. *Current directory* pasirinkti katalogą, kuriame yra programos failas.



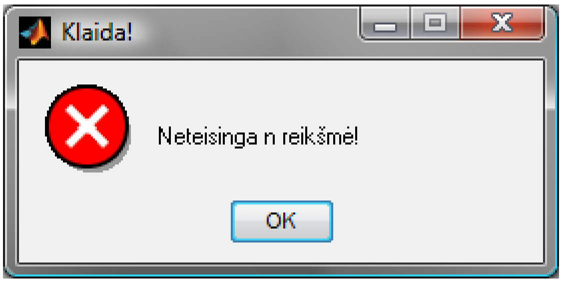
2. Matlab darbo lauko lange reikėtų parašyti žodelį „programa“ ir spausti „Enter“. Tuomet, kai jis viską įvykdys, atsidarys toks programos langas:



3.1 pav. Programos langas

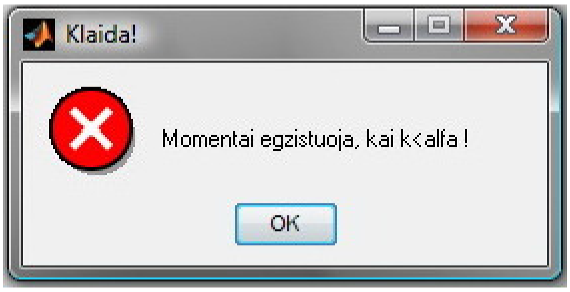
Programos lange reikia pasirinkti, kokį skirstinį norime nagrinėti, įvesti duomenis (α, k, n). Kiekvienam parametrui yra priskirta pradinė reikšmė ($n = 30$, $\alpha = 5$, $k = 1$). Vartotojas gali braižyti grafikus jų nekeisdamas arba įvedęs naujas reikšmes. Programoje yra padaryta apsauga. Jei vartotojas per klaidą įveda ne skaičių, o kokį nors simbolį, ar reikšmę, kuri nepatenka į nagrinėjamus intervalus ($n \geq 2$, $\alpha > 0$, $k \geq 1$, $\alpha > k$), programa atidaro langą, kuris informuoja vartotoją, jog buvo padaryta klaida, ir vartotojas gali įvesti nauja reikšmę.

Tarkime, kad vartotojas suklydo įvesdamas n reikšmę . Tada bus matomas toks langas:



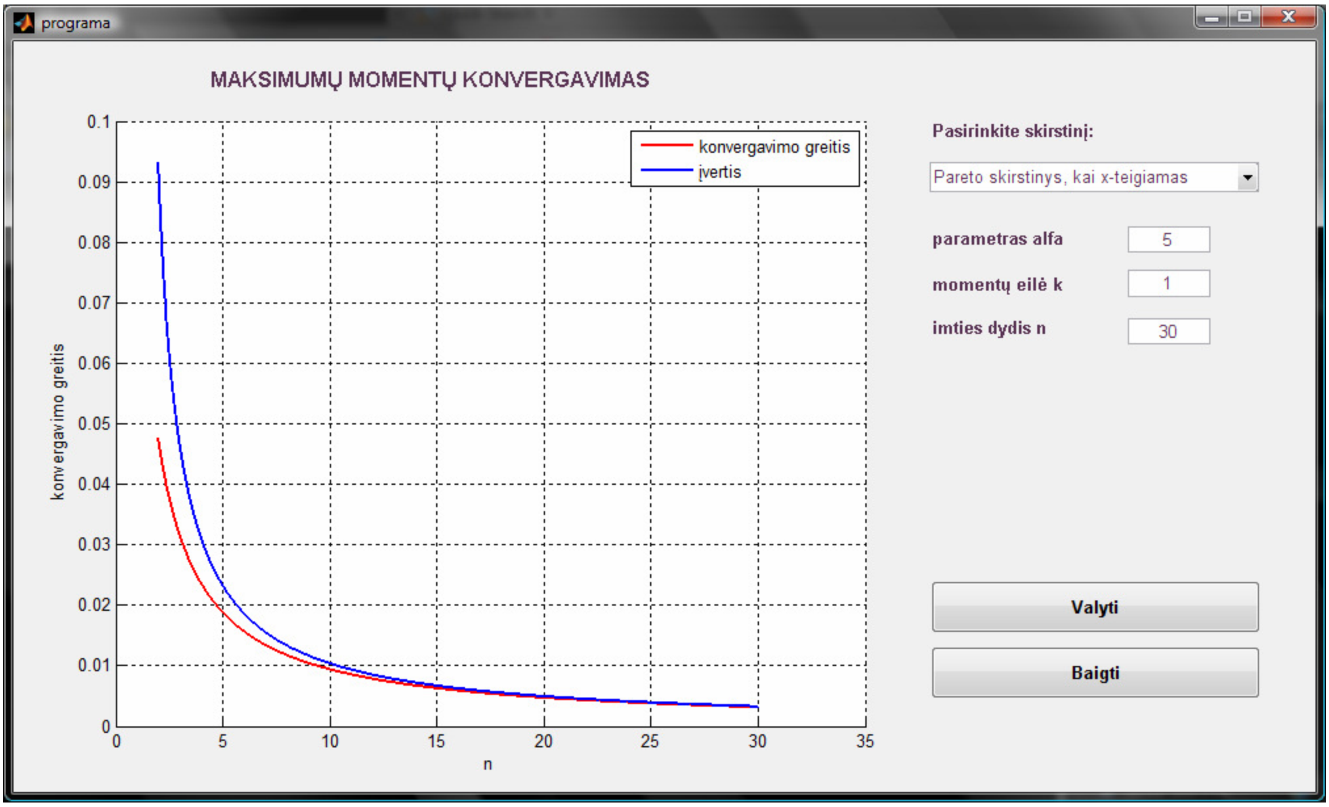
3.2 pav. Klaidos langas

Tarkime, kad vartotojas įvesdamas reikšmes nesilaikė maksimumų momentų konvergavimo sąlygos ir įvedė skirstinio parametrą α mažesnį už momentų eilę k. Tada bus matomas langas:



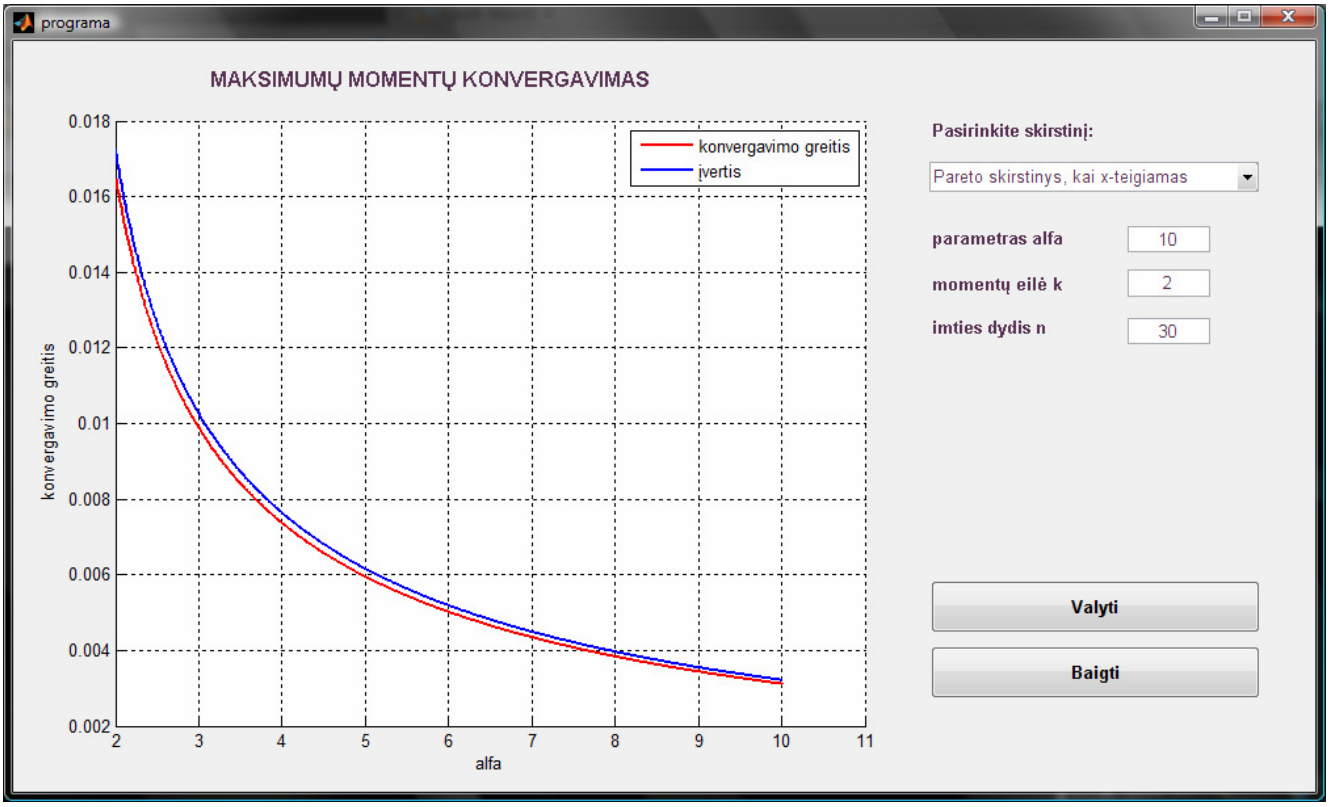
3.3 pav. Klaidos langas

Įvedus norimas parametrų reikšmes, reikia pasirinkti, kokio tipo priklausomybę braižyti. Mygtukas „*Konvergavimo greitis, kai kinta n*“ braižo pasirinkto skirstinio maksimumų momentų konvergavimo greitį bei įvertį, kai n kinta nuo 2 iki įvestos n reikšmės. Parametrai α ir k yra fiksuoti.



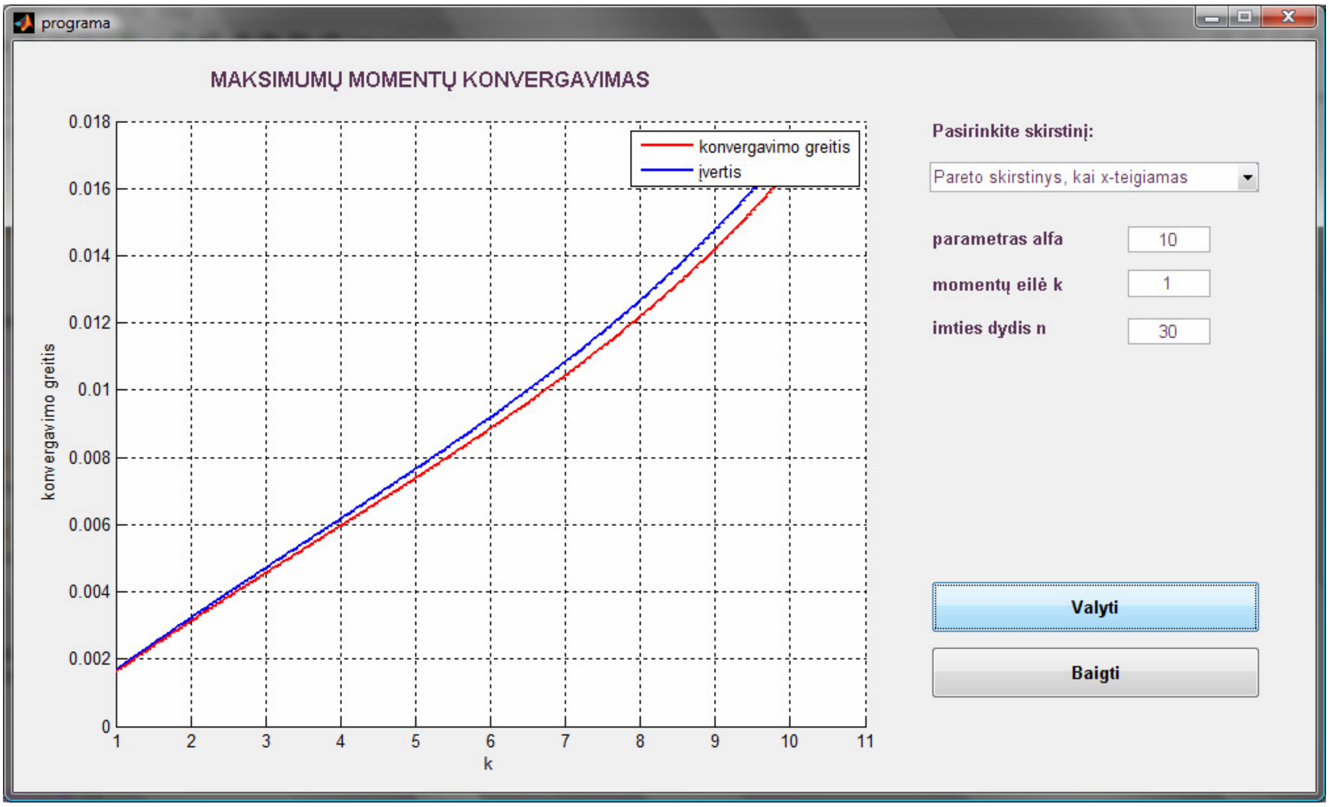
3.4 pav. Programos vykdymo langas

Mygtukas „*Konvergavimo greitis, kai kinta alfa*“ braižo pasirinkto skirstinio maksimumų momentų konvergavimo greitį bei įvertį, kai α kinta nuo įvestos k reikšmės iki įvestos α reikšmės (kadangi momentai egzistuoja, kai $\alpha > k$). Parametrai n ir k yra fiksuoti.



3.5 pav. Programos vykdymo langas

Mygtukas „*Konvergavimo greitis, kai kinta k*“ braižo pasirinkto skirstinio maksimumų momentų konvergavimo greitį bei įvertį, kai k kinta nuo 1 iki įvestos α reikšmės (kadangi momentai egzistuoja, kai $\alpha > k$, o $k \geq 1$). Parametrai n ir α yra fiksuoti.



3.6 pav. Programos vykdymo langas

Norint nagrinėti vis kitą priklausomybę, arba įvesti naujus parametrus, reikia paspausti mygtuką „*Valyti*“.

Programos tekstas pateiktas 2 priede (žr. 48 psl).

DISKUSIJA

Darbo tikslas buvo sukonstruoti nepriklausomų atsitiktinių dydžių maksimumų k-tosios eilės momentus, kai duoti Pareto skirstiniai, atlikti asimptotinę maksimumų momentų analizę bei ištirti jų konvergavimo greičio įvertį bei paklaidas, kai imties didumas yra fiksuotas ir kitu atveju, kai atsitiktinis.

Iš gautų maksimumų k-tosios eilės momentų išraiškų gauname, kad momentai egzistuoja, kai Pareto skirstinio, $x \geq 0$, parametras didesnis už momentų eilę, t.y. $\alpha > k$. Priešingu atveju momentai neegzistuos, kadangi išraiškoje gauname Gammą funkciją nuliniame taške, kuri yra lygi begalybei. Pareto skirstinio, kai $x \leq 0$ atveju, šios sąlygos reikalaujama, kad momentai konverguotų (iš 1.5 teoremos) į maksimumų ribinio skirstinio (Veibulo) momentus.

Kai imties dydis determinuotas, normuotų maksimumų ir maksimumų ribinio skirstinio netolygusis konvergavimo greitis rastas remiantis Leadbetter rezultatu (Pareto skirstiniui, kai $x \geq 0$) ir prof. A. Aksomaičio rezultatu (Pareto skirstiniui, kai $x \leq 0$). Maksimumų momentų konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu lygi $\frac{1}{n}$. Įvertintos paklaidos, kurios yra mažesnės už konvergavimo greičio įvertį. Kai $n = 100$, maksimumų momentų paklaidos apytiksliai lygios 0.0009319, o konvergavimo greičio įvertis 0.0009405 (Pareto skirstiniui, kai $x \geq 0$, $k = 1$, $\alpha = 5$). Su tokiomis pačiomis parametrų reikšmėmis kitu nagrinėtu skirstinio atveju, maksimumų momentų paklaidos apytiksliai lygios 0.001105, o konvergavimo greičio įvertis 0.004417. Tai iliustruota ir 1 priede pateiktos reikšmių lentelės.

Kai imties didumas atsitiktinis, turintis geometrinį skirstinį, gavome netikėtą rezultatą. Abu nagrinėti skirstiniai yra geometriškai maks-stabilūs, todėl pasinaudojus Perkėlimo teorema, gaunami maksimumų k-tosios eilės momentai yra tikslūs. Tai reiškia, kad paklaidos visais atvejais lygios nuliui. Pareto atsitiktinių dydžių normuotų maksimumų k-tosios eilės momentai lygūs Pareto atsitiktinių dydžių pirmojo imties nario k-tosios eilės momentui.

IŠVADOS

1. Kai imties didumas yra neatsitiktinis ir $n \to \infty$, Pareto skirstinio, kai $x \geq 0$, maksimumų k-tosios eilės momentus galima aproksimuoti Frešė skirstinio momentais ir įvertinti paklaidas. Įverčių konvergavimo greičio eilė n atžvilgiu lygi $\frac{1}{n}$.
2. Kai imties didumas yra neatsitiktinis ir $n \to \infty$, Pareto skirstinio, kai $x \leq 0$, maksimumų k-tosios eilės momentus galima aproksimuoti Veibulo skirstinio momentais ir įvertinti paklaidas. Įverčių konvergavimo greičio eilė n atžvilgiu lygi $\frac{1}{n}$.
3. Didėjant Pareto skirstinio parametrui α, maksimumų k-tosios eilės momentai (abiem atvejais) greičiau konverguoja į ribinių skirstinių momentus.
4. Didėjant momentų eilei k – paklaidos didėja, tačiau k yra apribotas ir $k < \alpha$.
5. Kai imties didumas yra atsitiktinis su geometriniu skirstinio dėsniu, Pareto atsitiktiniai dydžiai (abiem skirstiniam) yra geometriškai maks-stabilūs ir maksimumų k-tosios eilės momentai gaunami tikslūs.

REKOMENDACIJOS

Šiame darbe atliktas nepriklausomų atsitiktinių dydžių tyrimas tik maksimumų k - tosios eilės momentams. Galima atlikti analogišką analizę minimumams.

Galima pratęsti tolimesnius momentų asimptotinius tyrimus su kitomis skirstinio funkcijomis (kai ribinis skirstinys yra Gumbelio).

Gal galima pratęsti momentų asimptotinę analizę daugiamačiu atveju, kai vektorių koordinatės priklausomos arba nepriklausomos.

PADĖKOS

Nuoširdžiai dėkoju savo darbo vadovui prof. dr. J. A. Aksomaičiui už gerus patarimus, idėjas, pataisymus.

LITERATŪRA

1. Galambos, J. Asymptotic Theory of Extremes Order Statistics. Wiley, New York, 1978.

2. Zhang Z. Multivariate extremes, Max-Stable process estimation and dynamic Financial modeling. 2002.

3. Satheesh S. and Unnikrishnan Nair N., On the stability of geometric extremes, *Journal of the Indian Statistical Association*, 2004, Vol. 42.

4. Gnedenko B. V., Gnedenko D. B. About logistic and Laplace limit distributions in the probability theory. Serdika, 1984.

5. Aksomaitis A. Estimation of Convergence Rate in the Transfer Theorem for Maxima. *Nonlinear analysis: Modelling and Control*, Vol. 13, 2008.

6. Chung K. L. A Course of Probability Theory. 3rd edition. Academic Press, New York, 2001.

7. Resnick S. I. Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes. Springer, 2008.

8. Leadbetter R., Lindgren G., Rootzen H. Extremes and Related Properties of Random Sequence and Processes. Springer – Verlang, New York – Heidelberg – Berlin, 1983.

9. Kasperavičiūtė L. Maksimumų vidurkių analizė. Kaunas, 2008.

1 PRIEDAS. TYRIMO REZULTATŲ REIKŠMIŲ LENTELĖS

1) Pareto skirstinys, kai $x \geq 0$:

1 lentelė

Maksimumų momentų konvergavimo greitis, kai $k = 1$

n \ α	1,1	2	5	10
2	0.2	0.106	0.048	0.025
5	0.084	0.044	0.019	9.822e-3
10	0.043	0.022	9.366e-3	4.861e-3
20	0.022	0.011	4.67e-3	2.418e-3
50	8.655e-3	4.426e-3	1.865e-3	9.639e-4
100	4.334e-3	2.214e-3	9.319e-4	4.814e-4
150	2.891e-3	1.476e-3	6.212e-4	3.208e-4

2 lentelė

Maksimumų momentų konvergavimo greitis įvertis, kai $k = 1$

n \ α	1,1	2	5	10
2	0.434	0.222	0.093	0.048
5	0.109	0.055	0.023	0.012
10	0.048	0.025	0.01	5.343e-3
20	0.023	0.012	4.67e-3	2.531e-3
50	8.86e-3	4.522e-3	1.901e-3	9.814e-4
100	4.385e-3	2.238e-3	9.408e-4	4.857e-4
150	2.914e-3	1.487e-3	6.251e-4	3.227e-4

2) Pareto skirstinys, kai $x \leq 0$:

3 lentelė

Maksimumų momentų konvergavimo greitis, kai $k = 1$

n \ α	1,1	2	5	10
2	0.766	0.224	0.064	0.029
5	0.204	0.074	0.023	0.011
10	0.092	0.035	0.011	4.861e-3
20	0.044	0.017	5.591e-3	2.646e-3
50	0.017	6.717e-3	2.217e-3	1.051e-3
100	8.45e-3	3.341e-3	1.105e-3	5.244e-4
150	5.616e-3	2.223e-3	7.36e-4	3.494e-4

4 lentelė

Maksimumų momentų konvergavimo greitis įvertis, kai $k = 1$

n \ α	1,1	2	5	10
2	34.039	1.944	0.373	0.156
5	0.995	0.326	0.097	0.045
10	0.393	0.144	0.046	0.021
20	0.18	0.069	0.022	0.011
50	0.069	0.027	8.858e-3	4.197e-3
100	0.034	0.013	4.417e-3	2.095e-3
150	0.023	8.9e-3	2.943e-3	1.396e-3

2 PRIEDAS. PROGRAMOS TEKSTAS.

Programa.m

```
function varargout = programa(varargin)
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                   'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                   'gui_OpeningFcn', @programa_OpeningFcn, ...
                   'gui_OutputFcn',  @programa_OutputFcn, ...
                   'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                   'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end
if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% --- Executes just before programa is made visible.
function programa_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
handles.output = hObject;

a = 5;
k = 1;
n = 30;
skirstinys = 1;
imtis = 1;
handles.a = a;
handles.n = n;
handles.k = k;
handles.skirstinys = skirstinys;
set(handles.pushbutton1,'Visible','on');
set(handles.pushbutton2,'Visible','on');
set(handles.pushbutton3,'Visible','on');

guidata(hObject, handles);
% --- Pradinės reikšmės ---------------------------------------------------
function varargout = programa_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;
```

```
 % --- Įvedamas imties dydis n ---------------------------------------------
function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)
n_string = str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(n_string) | (n_string < 1))
    set(hObject,'String',30);
    errordlg('Neteisinga n reikšmė!','Klaida!');
else
    n = n_string;
    handles.n = n;
    guidata(hObject,handles);
end
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Įvedama parametro alfa reikšmė --------------------------------------
function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
a_string = str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(a_string) | (a_string <= 0))
    set(hObject,'String',5);
    errordlg('Neteisinga alfa reikšmė!','Klaida!');
else
    a = a_string;
    handles.a = a;
    guidata(hObject,handles);
end
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Įvedama momentų eilė k ----------------------------------------------
function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)
k_string = str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(k_string) | (k_string < 1))
    set(hObject,'String',1);
    errordlg('Neteisinga k reikšmė!','Klaida!');
```

```
else
    k = k_string;
    handles.k = k;
    guidata(hObject,handles);
end
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --------------------------------------------------------------------
function popupmenu1_Callback(hObject, eventdata, handles)
skirstinys = get(hObject,'Value');
handles.skirstinys = skirstinys;
guidata(hObject,handles);
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function popupmenu1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Mygtukai ------------------------------------------------------------

% --- Konvergavimo greitis, kai kinta imties dydis n ----------------------
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
n = handles.n;
a = handles.a;
k = handles.k;
skirstinys = handles.skirstinys;
if  (k >= a)
    errordlg('Momentai egzistuoja, kai k<alfa !','Klaida!');
end
switch skirstinys
    case 1
        konv_greitis = @konv_greitis1
        ivertis = @ivertis1
    case 2
        konv_greitis = @konv_greitis2
        ivertis = @ivertis2
```

```
end
hold on
for i = 2:.01:n;
line([i,i+.01],[konv_greitis(k,a,i),konv_greitis(k,a,i+.01)],'Color','r','LineWidt
h',2);
line([i,i+.01],[ivertis(k,a,i),ivertis(k,a,i+.01)],'Color','b','LineWidth',2);
end
grid
hold off
xlabel('n');
ylabel('konvergavimo greitis');
legend('konvergavimo greitis','įvertis');

set(handles.pushbutton1,'Visible','off');
set(handles.pushbutton2,'Visible','off');
set(handles.pushbutton3,'Visible','off');

% --- Konvergavimo greitis, kai kinta skirstinio parametras alfa ----------
function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
n = handles.n;
a = handles.a;
k = handles.k;
skirstinys = handles.skirstinys;
if  (k >= a)
    errordlg('Momentai egzistuoja, kai k<alfa !','Klaida!');
end
switch skirstinys
    case 1
        konv_greitis = @konv_greitis1
        ivertis = @ivertis1
    case 2
        konv_greitis = @konv_greitis2
        ivertis = @ivertis2
end
hold on
for i = k:.01:a;
line([i,i+.01],[konv_greitis(k,i,n),konv_greitis(k,i+.01,n)],'Color','r','LineWidt
h',2);
line([i,i+.01],[ivertis(k,i,n),ivertis(k,i+.01,n)],'Color','b','LineWidth',2);
end
grid
hold off
```

```
xlabel('alfa');
ylabel('konvergavimo greitis');
legend('konvergavimo greitis','įvertis');

set(handles.pushbutton1,'Visible','off');
set(handles.pushbutton2,'Visible','off');
set(handles.pushbutton3,'Visible','off');

% --- Konvergavimo greitis, kai kinta momentų eilė k ----------------------
function pushbutton3_Callback(hObject, eventdata, handles)
n = handles.n;
a = handles.a;
k = handles.k;
skirstinys = handles.skirstinys;
if  (k >= a)
    errordlg('Momentai egzistuoja, kai k<alfa !','Klaida!');
end
switch skirstinys
    case 1
        konv_greitis = @konv_greitis1
        ivertis = @ivertis1
    case 2
        konv_greitis = @konv_greitis2
        ivertis = @ivertis2
end
hold on
for i = 1:.01:a-1;
line([i,i+.01],[konv_greitis(i,a,n),konv_greitis(i+.01,a,n)],'Color','r','LineWidt
h',2);
line([i,i+.01],[ivertis(i,a,n),ivertis(i+.01,a,n)],'Color','b','LineWidth',2);
end
grid
hold off
xlabel('k');
ylabel('konvergavimo greitis');
legend('konvergavimo greitis','įvertis');

set(handles.pushbutton1,'Visible','off');
set(handles.pushbutton2,'Visible','off');
set(handles.pushbutton3,'Visible','off');
```

```
% --- Mygtukas "Valyti" ---------------------------------------------------
function pushbutton4_Callback(hObject, eventdata, handles)
cla(handles.axes1,'reset');
set(handles.pushbutton1,'Visible','on');
set(handles.pushbutton2,'Visible','on');
set(handles.pushbutton3,'Visible','on');
%set(handles.edit1,'reset');

% --- Mygtukas "Baigti" ---------------------------------------------------
function pushbutton5_Callback(hObject, eventdata, handles)
delete(handles.figure1);
```

konv_greitis1.m

```
function f=konv_greitis1(k,a,n)
f=abs(gamma(1-k/a)*gamma(n+k/a)/(gamma(n)*n^(k/a))-gamma(1-k/a));
```

konv_greitis2.m

```
function f=konv_greitis2(k,a,n)
f=abs(gamma(n-k/a)*gamma(1+k/a)/(gamma(n)*n^(-k/a))-gamma(1+k/a));
```

ivertis1.m

```
function f=ivertis1(k,a,n)
f=gamma(2-k/a)*k/(2*(n-1)*a);
```

ivertis2.m

```
function f=ivertis2(k,a,n)
f=gamma(n-1-k/a)*gamma(2+k/a)*(n^(1+k/a))*k*(2*n-k/a)/(gamma(n+1)*a*(n+1));
```

3 PRIEDAS. STRAIPSNIS. MAXIMUMS MOMENTS CONVERGENCE OF RANDOM VARIABLES

Sigita Rancaitė, Algimantas Aksomaitis

Kaunas University of Technology

1. Introduction. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with Pareto distribution function

$$F(x) = \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}, \; x \ge 0, \; \alpha > 0.$$

Let us define a structure

$$Z_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Distribution function of maximum

$$P(Z_n \le x) = F(x)^n.$$

k-th maximum moment:

$$MZ_n^{\,k} = \int_0^\infty x^k dF^n(x) = \int_0^\infty x^k d\left(1 - \frac{1}{1+x^\alpha}\right)^n = \int_0^\infty n\alpha \frac{x^{\alpha n + k - 1}}{(1+x^\alpha)^{n+1}} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+x^\alpha} = t & x \to 0 \Rightarrow t \to 1, \quad x \to \infty \Rightarrow t \to 0 \\ x = \left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} & dx = -\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \dfrac{1}{t^2} dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^1 n \cdot t^{1-\frac{k}{\alpha}-1} \cdot (1-t)^{n+\frac{k}{\alpha}-1} dt = B\left(1-\frac{k}{\alpha}, n+\frac{k}{\alpha}\right) = \frac{\Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right) \cdot \Gamma\left(n+\frac{k}{\alpha}\right)}{\Gamma(n)}, \; \alpha > k;$$

here $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$, $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$.

We get

$$MZ_n^{\,k} = \frac{\Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right) \cdot \Gamma\left(n+\frac{k}{\alpha}\right)}{\Gamma(n)}, \; \alpha > k.$$

2. Limited distribution function and moments. We get limited distribution function immediately

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} \le x\right) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n \le x b_n + a_n) = \lim_{n\to\infty} F^n(x b_n + a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x^{-\alpha}}{n}\right)^{-n} =$$

$$= H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-x^{-\alpha}}, \ x \geq 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$$

Here, normalizing constants: $a_n = 0$, $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$.

We get, that

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \leq x \right) = H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-x^{-\alpha}}, \ x \geq 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$$

The limited distribution function is called Frechet distribution function.

It is well known that convergence of a sequence of random variables does not imply that moments convergence [1]. A condition which controls tail probabilities and thus prevents improbable large values from disturbing moment convergence is needed.

Moments convergence theorem [1]**.** For an extreme value distribution $H = H_{1,\alpha}$, set $a_n = 0$, $b_n = \inf\left\{ x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n} \right\}$. If for some integer $0 < k < \alpha$

$$\int_{-\infty}^{0} |x|^k \, dF(x) < \infty,$$

then

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{Z_n}{b_n} \right)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dH_{1,\alpha}(x) = \Gamma\left(1 - \frac{k}{\alpha} \right).$$

Let us verify condition of maximum convergence theorem

$$\int_{-\infty}^{0} |x|^k \, dF(x) = \int_{-\infty}^{0} |x|^k \, d\left(\frac{x^\alpha}{1 + x^\alpha} \right) = 0, \ \forall k.$$

So we get that

$$M \frac{Z_n{}^k}{n^{\frac{k}{\alpha}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma\left(1 - \frac{k}{\alpha} \right).$$

3. The analysis of convergence rate. The asymptotical analysis result that Pareto maximum distribution can be approximated by Frechet distribution, when n is large. Having non-uniform estimates of convergence rate [2]

$$\left| P(Z_n \leq x b_n + a_n) - H_{1,\alpha}(x) \right| \leq \Delta_n.$$

We get convergence rate of k-th moment:

$$\left| M\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} \right)^k - \Gamma\left(1 - \frac{k}{\alpha} \right) \right| \leq \int_0^\infty k x^{k-1} \Delta_n(x) dx.$$

Proof:

Let us denote that X is distributed by Frechet distribution function.

$$\left| M\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n}\right)^k - MX^k \right| = \left| \int_{-\infty}^{-\infty} x^k d\left(P\left(Z_n \le xb_n + a_n\right) - H_{1,\alpha}(x)\right) \right| =$$

$$= \left| x^k \left(P\left(Z_n \le xb_n + a_n\right) - H_{1,\alpha}(x)\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(P\left(Z_n \le xb_n + a_n\right) - H_{1,\alpha}(x)\right) dx^k \right| \le \int_0^{\infty} kx^{k-1} \Delta_n(x) dx .$$

Ref. [2] result that

$$\Delta_n(x) \le \frac{z_n^2(x) e^{-z(x)}}{2(n-1)}, \ x \ge 0,$$

here

$$z_n(x) = n\left(1 - F\left(xb_n + a_n\right)\right) \text{ and } \lim_{n\to\infty} z_n(x) = z(x) .$$

When distribution function is Pareto distribution function we have

$$z_n(x) = n\left(1 - 1 + \frac{1}{\left(xb_n + a_n\right)^{\alpha}}\right) = \frac{n}{x^{\alpha} n} = x^{-\alpha} = z(x)$$

and

$$\Delta_n(x) \le \frac{x^{-2\alpha} e^{-x^{-\alpha}}}{2(n-1)} .$$

By calculating k-th maximum moment convergence rate we get:

$$\int_0^{\infty} kx^{k-1} \Delta_n(x) dx = \int_0^{\infty} kx^{k-1} \frac{x^{-2\alpha} e^{-x^{-\alpha}}}{2(n-1)} dx = \begin{bmatrix} x^{-\alpha} = t & x = 0 \Rightarrow t \to \infty \\ x = t^{-\frac{1}{\alpha}} & x \to \infty \Rightarrow t \to 0 \\ dx = -\frac{1}{\alpha} t^{-\frac{1}{\alpha}-1} dt & \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{k}{2(n-1)\alpha} \int_0^{\infty} t^{-\frac{k}{\alpha}+2-1} e^{-t} dt = \frac{k}{2(n-1)\alpha} \Gamma\left(2 - \frac{k}{\alpha}\right), \ \alpha > k .$$

So, the result is

$$\left| M \frac{Z_n^{\ k}}{n^{\frac{k}{\alpha}}} - \Gamma\left(1 - \frac{k}{\alpha}\right) \right| \le \frac{k}{2(n-1)\alpha} \Gamma\left(2 - \frac{k}{\alpha}\right), \ \alpha > k .$$

The graphical comparison of speed of convergence is given in Fig. 1.

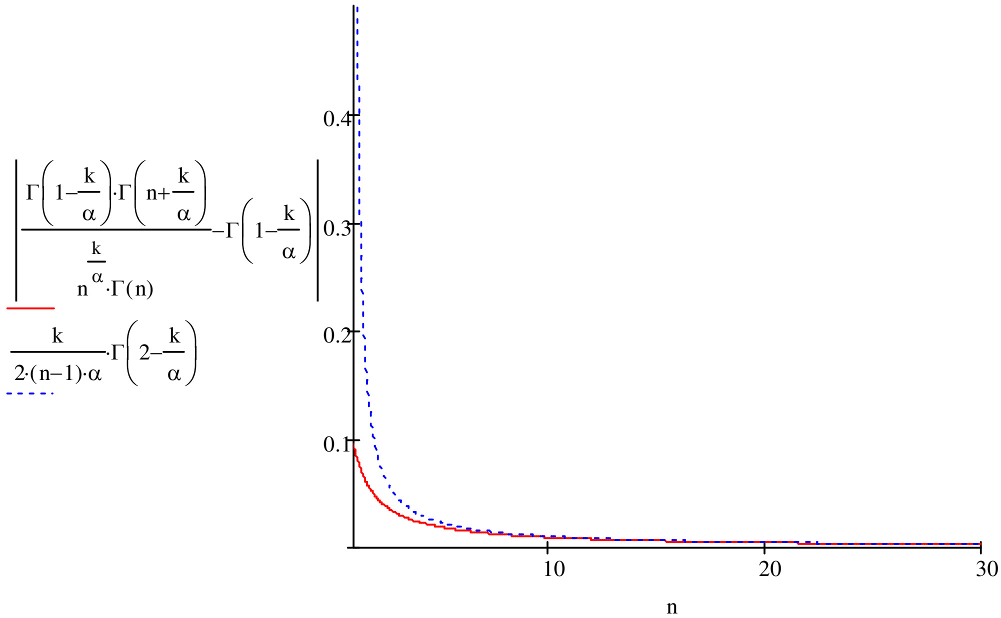


Fig. 1. *Speed of convergence, when* $k = 1$, $\alpha = 5$.

4. The estimation of maximums moments convergence rate, when sample size is accidental. Let $\{X_1, X_2, \ldots, X_{N_n}\}$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with Pareto distribution function. We form random variables

$$Z_{N_n} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_{N_n}),$$

where $\{N_n, n \geq 1\}$ is a sequence of positive integer – valued random variables and independent of X_j, $j \geq 1$. Let N_n is geometric random variables with distribution

$$P(N_n = k) = p(1-p)^{k-1}, \ p = \frac{1}{n}, \ k \geq 1.$$

Definition. Distribution F is geometric max-stable if

$$P\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} < x\right) = F^n(xb_n + a_n) = F(x),$$

where $a_n \in R$ and $b_n > 0$ are suitable normalizing constants.

Transfer theorem of maximum [3] implies that

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{N_n} < xb_n + a_n) = \Psi(x),$$

where distributions functions $\Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x)dA(z)$ and $A(x) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} < x\right)$.

We obtain

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = \lim_{n\to\infty} P(N_n < xn) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{xn-1}\right) = 1 - e^{-x}, \ x > 0,$$

and limited distribution function

$$\Psi(x)=\int_0^\infty H^z(x)dA(z)=\int_0^\infty\left(e^{-x^{-\alpha}}\right)^z d(1-e^{-z})=\int_0^\infty e^{-zx^{-\alpha}}e^{-z}dz=\int_0^\infty e^{-z(x^{-\alpha}+1)}dz=\frac{1}{1+\frac{1}{x^\alpha}}=\frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}=F(x),$$

which is geometric max-stable.

Now we will estimate k-th maximum moment

$$M\left(\frac{Z_n-a_n}{b_n}\right)^k=\int_0^\infty x^k dF(x)=\int_0^\infty \frac{\alpha\cdot x^{\alpha-1+k}}{(1+x^\alpha)^2}dx=\begin{bmatrix}\frac{1}{1+x^\alpha}=t & x\to 0\Rightarrow t\to 1,\quad x\to\infty\Rightarrow t\to 0\\ x=\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}} & dx=-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{t^2}dt\end{bmatrix}=$$

$$=\int_0^1 t^{1-\frac{k}{\alpha}-1}\cdot(1-t)^{1+\frac{k}{\alpha}-1}dt=\Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right),\ \alpha>k.$$

So we get

$$MZ_{N_n}{}^k=n^{\frac{k}{\alpha}}\cdot\Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right),\ \alpha>k;$$

From the geometric max-stable follows, that obtained maximums moments are accurate. And it‘s imply that errors are zero.

References

1. Resnick S. I. Extremes Values, Regular Variation, and Point Process. Springer (2008).

2. Leadbetter M. R. Extreme and Related Properties of Random Sequences and Processes. Springer-Verlag, New York (1983).

3. Gnedenko B. V., Gnedenko D. B. About logistic and Laplace limit distributions in the probability theory. Serdika (1984).

ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ MOMENTŲ KONVERGAVIMAS.

S. Rancaitė, A. Aksomaitis

Straipsnyje tiriamas Pareto atsitiktinių dydžių maksimumų momentų konvergavimas, kai imties dydis yra fiksuotas, ir kai atsitiktinis su geometriniu pasiskirstymo dėsniu.

MAXIMUMS MOMENTS CONVERGENCE OF RANDOM VARIABLES.

S. Rancaitė, A. Aksomaitis *(Kaunas University of Technology)*

In this paper, maximums moments convergence of Pareto random variables is analyzed. Results are presented in two cases, when sample size n is fixed, and when it is accidental - N_n and is distributed geometrically.

4 PRIEDAS. STRAIPSNIS. ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ MOMENTŲ ASIMPTOTINĖ ANALIZĖ

Sigita Rancaitė, prof. dr. Algimantas Aksomaitis

Kauno technologijos universitetas

Tarkime, kad $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su Pareto skirstinio funkcija

$$F(x) = \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha},\ x \geq 0,\ \alpha > 0.$$

Sudarome struktūrą

$$Z_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Skaičiuosime k-tosios eilės maksimumų momentus, patikrinsime būtiną maksimumų momentų konvergavimo sąlygą ir išvesime bei apskaičiuosime maksimumų momentų konvergavimo greičio įvertį.

Maksimumo skirstinio funkcija

$$P(Z_n \leq x) = F(x)^n.$$

k-tasis maksimumo momentas:

$$MZ_n^{\ k} = \int_0^\infty x^k dF^n(x) = \int_0^\infty x^k d\left(\frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\right)^n = \frac{\Gamma\left(1-\frac{k}{\alpha}\right)\cdot\Gamma\left(n+\frac{k}{\alpha}\right)}{\Gamma(n)},\ \alpha > k.$$

Tiesiogiai randame, kad maksimumų ribinis skirstinys yra Frešė skirstinio funkcija.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = \lim_{n\to\infty} F^n(xb_n + a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^{-\alpha}}{n}\right)^{-n} =$$

$$= H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} e^{-x^{-\alpha}},\ x \geq 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases},\ \text{čia konstantos: } a_n = 0,\ b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Yra ištirta, kad iš atsitiktinių dydžių sekos konvergavimo dar neišplaukia, kad momentai konverguoja [1]. Momentų konvergavimo teoremoje yra suformuluotos būtinos momentų konvergavimo sąlygos.

Momentų konvergavimo teorema [1]**.** Tarkime, kad ekstremalių reikšmių skirstinys yra $H = H_{1,\alpha}$ ir $a_n = 0$, $b_n = \inf\left\{x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n}\right\}$. Jei kiekvienam sveikajam skaičiui $0 < k < \alpha$, tenkinama sąlyga

$$\int_{-\infty}^{0} |x|^k \, dF(x) < \infty, \text{ tada } \lim_{n\to\infty} M\left(\frac{Z_n}{b_n}\right)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \, dH_{1,\alpha}(x) = \Gamma\left(1 - \frac{k}{\alpha}\right).$$

Patikrinkime būtiną momentų konvergavimo sąlygą:

$$\int_{-\infty}^{0} |x|^k \, dF(x) = \int_{-\infty}^{0} |x|^k \, d\left(\frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\right) = 0, \ \forall k.$$

Taigi turime, kad

$$M \frac{Z_n^{\,k}}{n^{\frac{k}{\alpha}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma\left(1 - \frac{k}{\alpha}\right).$$

Rasime k-tosios eilės maksimumo momentų konvergavimo greitį. Tegu X yra pasiskirstęs pagal Frešė skirstinį.

$$\left| M\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n}\right)^k - MX^k \right| = \left| \int_{-\infty}^{-\infty} x^k d\big(P(Z_n \le xb_n + a_n) - H_{1,\alpha}(x)\big) \right| =$$

$$= \left| x^k \big(P(Z_n \le xb_n + a_n) - H_{1,\alpha}(x)\big)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \big(P(Z_n \le xb_n + a_n) - H_{1,\alpha}(x)\big) dx^k \right| \le \cdot$$

$$\le \int_{0}^{\infty} kx^{k-1} \Delta_n(x) dx;$$

Čia Δ_n maksimumų skirstinio ir Frešė skirstinio netolygusis konvergavimo greitis, kuris pasinaudojant [2] monografijos rezultatu yra

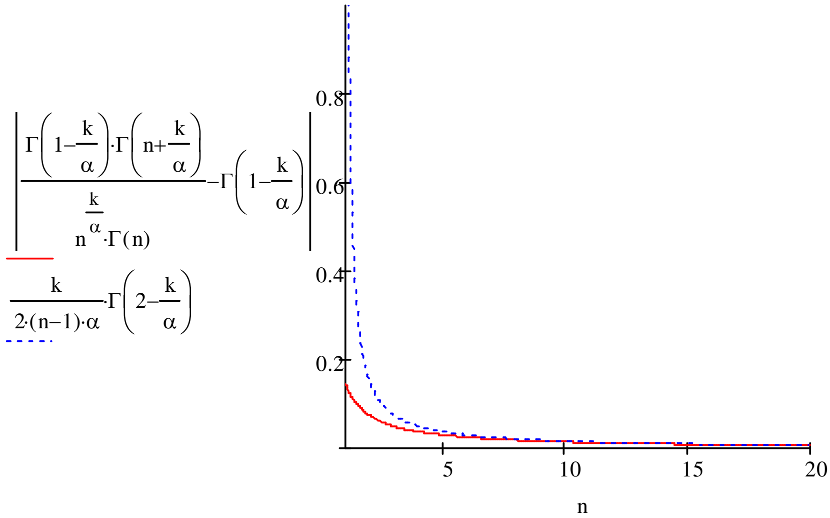
$$\Delta_n(x) \le \frac{x^{-2\alpha} e^{-x^{-\alpha}}}{2(n-1)}.$$

Apskaičiavę k-tosios eilės konvergavimo greitį, turime:

$$\left| M \frac{Z_n^{\,k}}{n^{\frac{k}{\alpha}}} - \Gamma\left(1 - \frac{k}{\alpha}\right) \right| \le \frac{k}{2(n-1)\alpha} \Gamma\left(2 - \frac{k}{\alpha}\right), \ \alpha > k.$$

Grafinis konvergavimo greičio palyginimas yra pateiktas 1 paveiksle.

Kai atsitiktiniai dydžiai turi Pareto skirstinį, jų maksimumų k-tosios eilės momentus galima aproksimuoti Frešė skirstinio momentais ir įvertinti paklaidas. Įverčių konvergavimo greičio eilė n atžvilgiu lygi $\frac{1}{n}$.



1 pav. Konvergavimo greitis, kai $k=1$, $\alpha=3$.

Literatūra

1. Resnick S. I. Extremes Values, Regular Variation, and Point Process. Springer (2008).

2. Leadbetter M. R. Extreme and Related Properties of Random Sequences and Processes. Springer-Verlag, New York (1983).