KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

Akvilina Valaitytė

FINANSINIŲ AKTYVŲ KAINŲ STOCHASTINIO SKLAIDOS PARAMETRO MODELIŲ TYRIMAS

Magistro darbas

Vadovas

doc. dr. E. Valakevičius

KAUNAS, 2004

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. habil. dr. V. Pekarskas
2004 06 03

FINANSINIŲ AKTYVŲ KAINŲ STOCHASTINIO SKLAIDOS PARAMETRO MODELIŲ TYRIMAS

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Kalbos konsultantas
dr. J. Džežulskienė
2004 05 31

Vadovas
doc. dr. E. Valakevičius
2004 06 03

Recenzentas
doc. dr. V. Pilkauskas
2004 06 01

Atliko
FMMM 2 gr. stud.
A. Valaitytė
2004 05 27

KAUNAS, 2004

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, profesorius (MII)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Valaitytė A. Analysis of stochastic volatility models in financial markets: Master‘s work in applied mathematics / supervisor dr. assoc. prof. E. Valakevičius; Department of Mathematics Research in System, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2004. – 82p.

SUMMARY

This paper studies stochastic volatility models under the price of EUR/USD exchange rate options traded in Lithuania. Three models were considered: Hull-White, Heston and logarithmical Ornstein-Uhlenbeck stochastic volatility model. The Heston and logarithmical Ornstein-Uhlenbeck models are calibrated by two-step estimation procedure. Thus the information from asset returns and option data is incorporated. The model performance is assessed by two criteria. First, in the sample fit of each model by comparing the implied volatility pattern generated either from the market price or from stochastic volatility models prices. Common for all studied models are that the implied volatility has been calculated and plotted against moneyness. In all cases it has resulted in smile curves. Second, out of sample forecast performance is tested by comparing the one-day ahead forecasting accuracy of the Black-Scholes model with these of the stochastic volatility models. It is shown, that Black-Scholes, Hull-White, Heston and logarithmical Ornstein-Uhlenbeck model overprices the deep-out-of-the-money and in-the-money options, but under prices the out-of-the-money options, however the bias is different. The Hull-White stochastic volatility model significantly outperforms the Black-Scholes model in almost all maturity and moneyness cases. On average, Hull-White model reduce pricing errors better, than other methods. In particular, stochastic volatility models always overprice short-term options, indicating that some other factors may also be needed to explain the option price. The results shows, how much we can gain from stochastic volatility models relative to the simple Black-Scholes model, since these models are computationally demanding.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮŽANGA

Sklaidos parametras (angl. volatility) yra pagrindinė sąvoka finansų srityje, įkainojant aktyvus, renkantis vertybinių popierių portfelį ar valdant riziką [1]. Paprastai teoriniuose modeliuose stochastinis sklaidos parametras yra laikomas konstanta, pvz., Blacko ir Scholeso modelyje [9]. Pastaruoju metu yra plačiai nagrinėjami diskrečiojo ir tolydžiojo laiko stochastiniai sklaidos parametro modeliai [13], [14].

Empiriniai tyrimai parodė, kad jeigu nubrėšime numanomojo sklaidos parametro reikšmių, priklausomų nuo aktyvo realizavimo kainos, grafiką, esant fiksuotam laikui iki pasirinkimo sandorio gyvavimo pabaigos, kreivė įgaus U formos pavidalą. Iš pirmo žvilgsnio ji bus panaši į šypseną. Numanomojo sklaidos parametro šypsenos fenomenas rodo, kad Blacko-Sholeso formulė klaidingai įkainoja OTM („out-of-the-money“) ir ITM („in-the-money“) pasirinkimo sandorius, jei naudojamas sklaidos parametras numanomas iš ATM („at-the-money“) pasirinkimo sandorių. Šypsenos efektui paaiškinti, pasirinkimo sandorių įkainojimo tikslumui padidinti kuriami įvairūs stochastinio sklaidos parametro modeliai, tuo tikslu, darbe nagrinėjami – Hullo-White‘o, Hestono ir logaritminis Ornsteino-Uhlenbecko modeliai.

Šiame magistro darbe yra tiriami stochastinio sklaidos parametro modeliai pagal Lietuvoje prekiaujamus valiutų kurso EUR/USD pasirinkimo sandorius. Nagrinėjamos numanomojo sklaidos parametro šypsenos, kurioms modeliuoti naudojami stochastinių modelių parametrų įverčiai. Taip pat darbe lyginamos pasirinkimo sandorių įkainojimo paklaidos.

Apskaičiuoti opcionų kainas pagal stochastinio sklaidos parametro modelius yra sudėtinga. Kyla klausimas, ar racionalu taikyti šiuos modelius lyginant su paprastu Blacko-Scholeso modeliu.

Šia tematika skaičiau pranešimus konferencijose:

- Matematika ir matematinis modeliavimas – 2004, pranešimo tema:
  „Stochastinio proceso kintamumo parametro modeliavimas“.
- V taikomosios matematikos studentų konferencija (2004 metai), pranešimo tema:
  „Stochastinio proceso kintamumo parametro „šypsenos“ modeliavimas“.

1. BENDROJI DALIS

1.1. OPCIONŲ SĄVOKOS

Pasirinkimo sandoris (angl. option) yra teisė, bet ne įsipareigojimas, pirkti (arba parduoti) finansinį aktyvą (angl. asset) su tam tikromis sąlygomis. Paprastai tai yra iš anksto nustatyta aktyvo kaina ir apibrėžiamas periodas, kurį galioja pasirinkimo sandoris [2].

Pasirinkimo sandoris (toliau vartosime opcionas), kuris suteikia teisę ką nors pirkti, vadinamas pirkėjo (angl. call) arba pirkimo opcionu, o opcionas, kuris suteikia teisę parduoti sandorio objektą, vadinamas pardavėjo (angl. put) arba pardavimo opcionu. Jei viena iš sandorio šalių turi teisę pirkti arba parduoti prekę fiksuota kaina fiksuotu laikotarpiu, tai kita kontrakto šalis įsipareigoja įvykdyti kontrakto sąlygas. Opcionas turi kainą, kuri vadinama opciono premija. Premija paprastai sudaro mažą pasirinkto opciono aktyvo kainos dalį. Jei opciono turėtojas nuperka ar parduoda finansinį aktyvą pagal opciono sąlygas, tai sakoma, kad opciono turėtojas įvykdo (angl. exercise) opcioną. Bet kuriuo atveju sumokėta premija yra negrąžinama.

Opcionas yra išvestinis arba antrinis vertybinis popierius, kurio bazinį aktyvą galima pirkti arba parduoti. Galutinė opciono vertė priklauso nuo bazinio aktyvo kainos opciono įvykdymo metu.

Opciono kontrakte turi būti nurodyti šie punktai:

1. Kas yra perkama (pirkimo atveju) ar parduodama (pardavimo atveju). Akcijų opcionuose paprastai perkama arba parduodama 100 vienetų tam tikros rūšies akcijų.
2. Pirkėjo pasirinkta (nustatyta) kaina (angl. exercise arba strike price). Tai kaina, už kurią opciono įvykdymo metu gali būti nupirktas aktyvas.
3. Opciono gyvavimo (galiojimo) terminas, kuris nustatomas opciono pabaigos data (angl. expiration date). Opcionas gali tęstis 2 dienas, savaitę, keletą mėnesių ir pan.

Opcionai būna dviejų tipų (stilių), priklausomai nuo to, kada yra įvykdomas opcionas jo gyvavimo metu. Europietiškame opcione (angl. European option) kontraktas gali būti įvykdytas tik opciono pabaigoje. Amerikietiškame opcione (angl. American option) jis gali būti įvykdytas bet kuriuo opciono gyvavimo metu. Šiame darbe bus nagrinėjami tik europietiško tipo opcionai.

Opciono sutartis – dviejų šalių susitarimas: šalis, kuri išleidžia jį, sakoma, kad opcioną pasirašo, o šalis, kuri įsigyja opcioną, sakoma, kad perka jį. Perkantysis opcioną negali patirti jokių nuostolių, išskyrus sumokėtą opciono mokestį (premiją). O pasirašantysis opcioną gali patirti labai didelių nuostolių, kadangi jis turi parduoti arba pirkti aktyvą už nustatytą iš anksto kainą.

Jeigu opciono kontraktas pasirašomas tarp dviejų individų, tai premijos dydis yra nustatomas derybų metu ir užfiksuojamas sandoryje. Jei opcionu prekiaujama vertybinių popierių biržoje, tai premijos dydį nustato rinka, ir opcionas gali kisti, priklausomai nuo prekybos aktyvumo. Apie prekybą opcionais vertybinių popierių biržoje skelbiama finansinėje spaudoje.

Opcionams pirkti ar parduoti yra du pirminiai motyvai. Vienas iš motyvų yra spekuliavimas. Aktyvų kainos labai kinta, todėl galima gauti didelio pelno arba patirti didelių nuostolių. Kitas motyvas yra visiškai priešingas. Opcionais galima apsidrausti, sumažinant investavimo riziką (valdant užsienio valiutų riziką ir ją mažinant).

Opcionų kainos:

1. Valiutų keitimo pasirikimo sandorio premija yra vidutinio dydžio, jei sandorio metu pirkėjo pasirinkta kaina (angl. strike) yra lygi išankstinio valiutų keitimo sandorio kainai (angl. „at-the-money“, toliau vartosime trumpinį ATM).
2. Valiutų keitimo pasirikimo sandorio premija yra didesnė už vidutinę, jei sandorio metu nustatyta kaina (angl. strike) sandorio pirkėjui yra palankesnė už išankstinio valiutų keitimo sandorio kainą (angl. „in-the-money“, toliau vartosime trumpinį ITM).
3. Valiutų keitimo pasirikimo sandorio premija yra mažesnė už vidutinę, jei sandorio metu nustatyta kaina sandorio pardavėjui yra palankesnė už išankstinio valiutų keitimo sandorio kainą (angl. „out-of-the-money“, toliau vartosime trumpinį OTM).

Europietiško opciono turėtojas turimą pasirinkimo sandorį realizuos, jei jo termino pabaigoje T jis turės naudą. Pirkimo opcionas bus realizuotas tik tada, jei akcijos rinkos kaina S_T termino pabaigoje yra didesnė už pasirinktą (nustatytą) kainą K. Tokio opciono vertė lygi $S_T - K$. Todėl pirkimo opciono vertė C_T termino pabaigoje yra

$$C_T = \begin{cases} S_T - K, & jei \quad S_T > K; \\ 0, & jei \quad S_T \le K. \end{cases}.$$

Tai trumpai užrašoma taip:

$$C_T = \max\{0, \quad S_T - K\}. \tag{1.1}$$

Analogiškai pardavimo opciono vertė P_T lygi

$$P_T = \begin{cases} K - S_T, & jei \quad S_T < K \\ 0, & jei \quad S_T \geq K \end{cases}$$

arba

$$P_T = \max\{0, \quad K - S_T\}. \tag{1.2}$$

Turime įvertinti tikimybę, kad termino pabaigoje kaina bus didesnė už ceremonijos kainą (arba atvirkščiai). Kadangi opciono ceremonijos kaina yra fiksuota, atsitiktinis dydis yra tik akcijos kaina termino pabaigoje. Jeigu akcijos kainos tikimybinis pasiskirstymas termino pabaigoje yra žinomas, tai galima apskaičiuoti vidutinę opciono vertę:

$$E(C_T) = E[\max\{0, \quad S_T - K\}] \tag{1.3}$$

arba

$$E(P_T) = E[\max\{0, \quad K - S_T\}]. \tag{1.4}$$

Šiame darbe tyrinėjami europietiški paprasti valiutų keitimo pasirinkimo sandoriai (angl. Plain Vanilla European FX Option). Tai susitarimas, pagal kurį sandorio pirkėjas, sumokėjęs sandorio pardavėjui nustatytą premiją, įgyja teisę, bet neįsipareigoja pirkti sutartą valiutos sumą už kitą valiutą sutartą datą ateityje pagal sandorio metu nustatytą kainą.

1.2. BLACKO-SHOLESO IR GERMANO-KOHLHAGENO MODELIS

Nors opciono sąvoka vartojama jau seniai, tačiau jo svarba išryškėjo tik 1973 metais, balandžio mėnesį atidarius Čikagos opcionų biržos tarnybą (Chicago Board Options Exchange). Kitas svarbus įvykis taip pačiais metais buvo Fisherio Blacko ir Myrono Scholes‘o paskelbtas kovo mėnesį leidinyje „Journal of Political Economy“ straipsnis „The Pricing of Options and Corporate Liabilities“ [9]. Šiame straipsnyje autoriai paskelbė „epochos“ modelį, už kurį po tolimesnio išplėtimo ir pritaikymo 1997 metais gavo Nobelio premiją.

Tarkime, kad S_t yra aktyvo kaina momentu t ir ji yra pasiskirsčiusi pagal lognormalųjį dėsnį su sklaidos parametru σ, kuris yra konstanta. Tuomet dabartinė europietiško pirkimo opciono kaina apskaičiuojama pagal Blacko-Scholeso formulę. Valiutų keitimo pasirinkimo sandoriai įkainojami pagal Blacko ir Scholes‘o modelio modifikuotą Germano ir Kohlhageno formulę [15]:

$$C_0 = S_0 \Phi(d_1) e^{-r_{Base}T} - K\Phi(d_2) e^{-r_2 T}; \tag{1.5}$$

čia

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r_2 - r_{Base} + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T};$$

čia

$\Phi()$ – standartinio normaliojo skirstinio pasiskirstymo funkcija;

S_0 – neatidėliotino valiutų keitimo sandorio kursas;

K – pasirinktas kursas;

r_{Base} – bazinės valiutos palūkanų norma;

r_2 – antrosios valiutos palūkanų norma;

T – laikas nuo sandorio sudarymo (angl. trade) iki pasirinkimo teisės įgyvendinimo (angl. expiration date) datos, išreikštas metais.

Vienintelis parametras Blacko-Scholeso ir Gremano- Kohlhageno formulėje (toliau vadinsime tik Blacko-Scholeso vardu), kurio negalima stebėti tiesiogiai, yra sklaidos parametras σ. Numanomąjį sklaidos parametrą galima apskaičiuoti iš (1.5) lygties, kada yra žinoma opciono rinkos kaina.

1.3. NUMANOMASIS SKLAIDOS PARAMETRAS

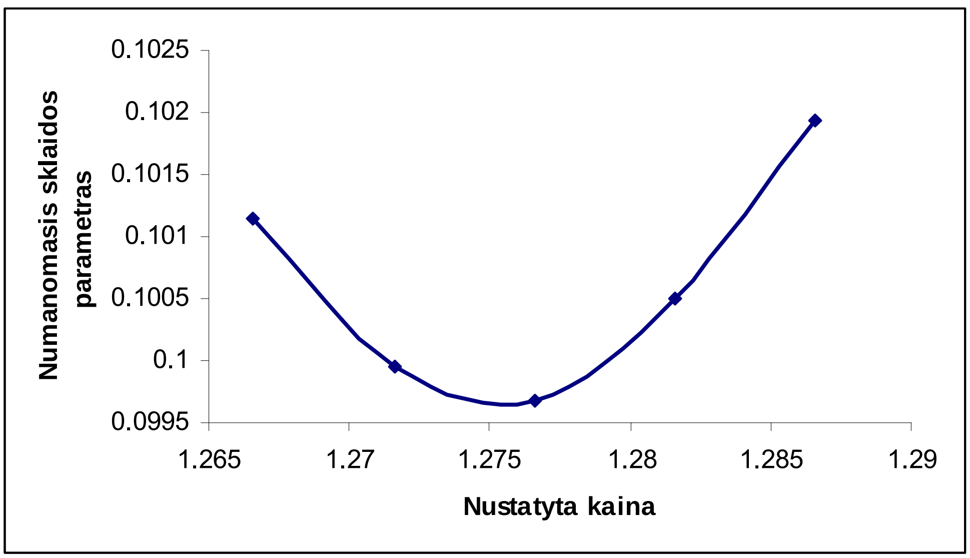
Sulyginę rinkos ir Blacko-Scholeso modelio teorinę opciono kainą, gauname netiesinę lygtį σ atžvilgiu. Išsprendę šią lygtį gausime sklaidos parametro įvertį. Deja, (1.5) lygtį bendru atveju pavyksta išspręsti tik skaitiniais metodais. Pavyzdžiui, σ gauti panaudosime Niutono-Rapsono metodą. Sklaidos parametras, numanomas iš konkrečios pirkimo opciono kainos, randamas iš lygties

$$f(\sigma) = S_0\Phi(d_1)e^{-r_{Base}T} - K\Phi(d_2)e^{-r_2T} - C_0 = 0\,. \qquad (1.6)$$

Niutono-Rapsono metodui reikia apskaičiuoti funkcijos $f(\sigma)$ išvestinę σ atžvilgiu. Naudodamiesi formule

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{f(\sigma_n)}{f'(\sigma_n)}, \qquad (1.7)$$

gausime lygties sprendinį norimu tikslumu. Pavyzdžiui, grafiškai atvaizdavus Blacko-Scholeso numanomojo sklaidos parametro reikšmes priklausomas nuo pirkėjo pasirinktos kainos, gauname numanomojo sklaidos parametro šypseną (1.1 pav.):



1.1 pav. Numanomojo sklaidos parametro šypsena pagal Blacko-Scholeso modelį

Numanomojo sklaidos parametro grafikas parodo modelio gebą įkainoti opcionus. Numanomojo sklaidos parametras, skirtingam terminui ir pelningumo reikšmėms, neturėtų skirtis. Kuo šypsena gilesnė, tuo modelis sunkiau įkainoja pasirinkimo sandorius. Empiriniai tyrimai parodė, kad pagal Blacko-Scholeso modelį gaunama U arba įstrižos formos numanomojo sklaidos parametro kreivė, ypač po 1987 spalio, kada žlugo JAV vertybinių popierių birža.

1.4. STOCHASTINIO SKLAIDOS PARAMETRO MODELIAI

Skirtumas tarp Blacko-Scholeso modeliu apskaičiuotų opcionų kainų ir jų rinkos kainų pastūmėjo mokslininkus kurti ir plėtoti stochastinio skaidos parametro modelius.

Tarkime, kad vertybinių popierių kaina S kinta pagal Brauno procesą su trendo parametru μ ir sklaidos parametru σ. Šie parametrai priklauso nuo neapibrėžtos kintamos būsenos υ. Vadinasi,

$$dS_t = \mu(S_t, \upsilon_t)dt + \sigma(S_t, \upsilon_t)dW_{St}, \tag{1.8}$$

$$\sigma\left(S_t, \upsilon_t\right) = f(\upsilon_t), \tag{1.9}$$

$$d\upsilon_t = \alpha(S_t, \upsilon_t)dt + \beta(S_t, \upsilon_t)dW_{\upsilon t}; \tag{1.10}$$

čia W_{St}, $W_{\upsilon t}$ – koreliuotieji Brauno procesai ir $\mathrm{E}_t[dW_{St}dW_{\upsilon t}] = \theta(S_t, \upsilon_t)$, t.y.

$$dW_{\upsilon t} = \rho dW_{St} + \sqrt{1-\rho^2}\, dZ_t; \tag{1.11}$$

čia W_{St} ir Z_t yra nekoreliuoti Brauno procesai [12].

(1.8) – (1.11) lygtimis aprašomame modelyje įeina vienas prekiaujamas aktyvas S ir du atsitiktiniai procesai W_t ir Z_t. Taigi, stochastiniame sklaidos parametro modelyje yra du atsitiktinumo šaltiniai, kai standartiniame Blacko-Scholeso modelyje yra tik vienas.

Šiame darbe tyrinėjami trys skirtingi stochastinio sklaidos parametro modeliai. Pirmasis – Hullo-White'o yra lognormalus ir grįžtantis prie vidurkio modelis. Kiti du modeliai, Hestono ir logaritminis Ornsteino-Uhlenbecko, yra grįžtantys prie vidurkio modeliai.

1.4.1. HULLO-WHITE‘O STOCHASTINIO SKLAIDOS PARAMETRO MODELIS

Bendras Hullo-White'o modelis [10] yra atskiras atvejis (1.8) – (1.11) lygtimis aprašomo modelio. Taigi,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_{St}, \tag{1.12}$$

$$d\upsilon_t = \gamma\upsilon_t dt + \eta\upsilon_t dW_{\upsilon t}; \tag{1.13}$$

čia sklaidos parametras $\sigma_t = \sqrt{\upsilon_t}$, $\gamma < 0$, W_{St} ir $W_{\upsilon t}$ yra nekoreliuoti. Darbe nagrinėjamas atskiras atvejis, kada sklaidos parametras gali įgyti tik dvi reikšmes, t.y. šuolį tarp aukštos ir žemos sklaidos parametro reikšmės. Šiuo atveju pirkimo opciono kaina skaičiuojama pagal formulę

$$C_t = \mathrm{E}\left[C_{BS}\left(t, S, K, T, \sqrt{\overline{\sigma^2}} \right) \middle| \upsilon_t = \upsilon \right]; \tag{1.14}$$

čia $\overline{\sigma^2} = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(\upsilon_x)^2\,dx$, υ_t – dviejų būsenų Markovo procesas [].

$\overline{\sigma^2}$ apskaičiuojamas taip:

$$\overline{\sigma^2} = \begin{cases} \sigma_1^2 & \text{su tikimybe} \quad p, \\ \sigma_2^2 & \text{su tikimybe} \quad 1-p. \end{cases} \tag{1.15}$$

1.4.2. HESTONO STOCHASTINIO SKLAIDOS PARAMETRO MODELIS

Hestono opcionų įkainojimo formulė apibrėžiama tariant, kad aktyvo kaina S_t ir jo grąžos variacija υ_t tenkina stochastinį procesą:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_{St}, \tag{1.16}$$

$$d\upsilon_t = \kappa(\theta - \upsilon_t)dt + \eta\sqrt{\upsilon_t}\,dW_{\upsilon t}; \tag{1.17}$$

čia $\sigma_t = \sqrt{\upsilon_t}$, κ – grįžimo prie vidurkio intensyvumas, θ – sklaidos parametro vidurkis, η – sklaidos parametro sklaidos parametras, o W_{St} ir $W_{\upsilon t}$ yra du Brauno procesai su koreliacijos koeficientu ρ.

Tariama, kad parametrai κ, θ, η, ρ nekinta. Sklaidos parametro rizikos rinkos kaina skaičiuojama proporcingai momentinei sklaidos reikšmei:

$$\lambda(S_t, \upsilon_t, t) = \lambda \upsilon_t; \tag{1.18}$$

čia λ yra konstanta. Tuomet, dabartinė europietiško pirkimo opciono kaina skaičiuojama pagal formulę

$$C_0 = S_0 P_1 - K e^{-rT} P_2; \tag{1.19}$$

čia P_j, $j = 1,2$ yra dvi tikimybių funkcijos [11].

1.4.3. LOGARITMINIS ORNSTEINO-UHLENBECKO STOCHASTINIO SKLAIDOS PARAMETRO MODELIS

Pateiksime paskutinį stochastinio sklaidos parametro modelį:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_{St}, \tag{1.20}$$

$$d\upsilon_t = \alpha(\overline{\upsilon} - \upsilon_t)dt + \beta dW_{\upsilon t}; \tag{1.21}$$

čia $\sigma_t = \exp(\upsilon_t)$. Empiriškai nustatyta, kad $\ln \sigma_t$ kinta pagal Ornsteino-Uhlenbecko procesą, su parametrais $\ln \overline{\sigma}$ ir $\alpha > 0$. Paprastai laikoma, kad μ, $\alpha(\ln \overline{\sigma} - \upsilon_t)$ ir β yra konstantos, o W_{St} ir $W_{\upsilon t}$ yra Brauno procesai su koreliacija ρ. Darbe nagrinėjamas atvejis, kada $\rho = 0$ [12].

1.5. STOCHASTINIŲ MODELIŲ PARAMETRŲ ĮVERTINIMAS

Struktūrinių parametrų reikšmės stochastinio sklaidos parametro modeliuose įvertinamos remiantis aktyvų ir opcionų kainomis. Hestono ir logaritminio Ornsteino-Uhlenbecko modelio parametrai nustatomi dviejų žingsnių įvertinimo procedūra [13]:

1. struktūriniai parametrai nustatomi netiesioginiu parametrų įvertinimo metodu;
2. kiti parametrai apskaičiuojami pagal netiesinį mažiausių kvadratų metodą.

Procedūrą pritaikysime Hestono modeliui, analogiški žingsniai atliekami ir logaritminio Ornsteino-Uhlenbecko modelio atveju. Hullo-White'o modelio atveju parametrai įvertinami naudojant netiesinį mažiausių kvadratų metodą.

Pirmiausia, remiantis netiesioginiu parametrų įvertinimo metodu, randamos μ, κ, θ, η reikšmės. Tarkime, kad $\mu = 0$, tuomet lygtys (1.16), (1.17) diskrečiu atveju aprašomos taip:

$$R_t = \sqrt{\upsilon_t \tau}\varepsilon_{1t},$$
$$\upsilon_t = \kappa\theta\tau + (1-\kappa\tau)\upsilon_{t-\tau} + \eta\sqrt{\upsilon_{t-\tau}\tau}\varepsilon_{2t}; \tag{1.22}$$

čia R_t yra dviejų gretimų akcijų kainų grąža, o ε_{1t} ir ε_{2t} du koreliuoti, atsitiktiniai standartiniai normalieji dydžiai. Konstruojame pagalbinį modelį, kuris yra GARCH(1,1) procesas apibrėžtas taip:

$$R_t = \varepsilon_t,$$
$$h_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}; \tag{1.23}$$

čia ε_t atsitiktinis dydis pasiskirstęs pagal normalųjį skirstinį su vidurkiu 0 ir dispersija h_t. Dėl pagalbinio modelio ribotumo, galima įvertinti tik tris parametrus (κ, θ, η) ir koreliacijos koeficientą prilyginti nuliui. Turint parametrų (κ, θ, η) rinkinį modeliuojamos grąžos tam, kad suderinti su empiriniais duomenimis. Pasirinkus τ galima lengvai generuoti šių modelių duomenis. Kuo trumpesni laiko intervalai, tuo generuojami duomenys artimesni tolydaus laiko trajektorijai.

Pagrindinė netiesioginio parametrų įvertinimo paskirtis – suderinti pagalbinio modelio ir rinkos duomenų momentus su modeliuojamais duomenimis. Taikant GARCH(1,1) modelį aktyvo kainų gražų duomenims gaunamas optimalus parametrų rinkinys $\hat{B} = (\omega, \alpha, \beta)$. Taigi, kiekvienoms modeliuojamoms eilutėms struktūrinio parametro rinkinys yra žinomas $\Theta = (\kappa, \theta, \eta)$. Reikia paskaičiuoti logaritminio skirstinio funkcijos, apskaičiuotos fiksavus GARCH(1,1) parametrus $\hat{B}$, pirmos eilės sąlygą. Momentų vektorius

$$m\left(\Theta,\hat{B}\right)_{3\times1} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left.\frac{\partial l_t\left(R_t(\Theta)\mid R_{t-1}(\Theta),B\right)}{\partial B}\right|_{B=\hat{B}},$$

$$l_t = -\ln h_t - \frac{R_t^2}{2h_t}; \qquad (1.24)$$

čia $R_t(\Theta)$ modeliuojamų aktyvų grąža, N – modeliavimo žingsnių skaičius. Jei m lygus nuliui, tai modeliuojami duomenys turės tuos pačius apskaičiuotus GARCH(1,1) parametrus kaip ir stebėti duomenys, o tai reikštų, kad tolydaus laiko procesas, kurio struktūriniai parametrai modeliuojantys duomenis yra tikrasis duomenis generuojantis procesas. Momentų vektorius paprastai nėra nulinis vektorius. Todėl, optimalus parametrų rinkinys pasirenkamas minimizuojant svorinį momentą:

$$\min_{\hat{\Theta}} m^T\left(\Theta,\hat{B}\right)I^{-1}m\left(\Theta,\hat{B}\right); \qquad (1.25)$$

čia I yra svorių matrica, aprašoma taip:

$$I_{3\times3} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left.\frac{\partial l_t\left(R_t,B\right)}{\partial B}\frac{\partial l_t\left(R_t,B\right)}{\partial B^T}\right|_{B=\hat{B}}; \qquad (1.26)$$

čia R_t yra rinkos aktyvų grąža. I matrica gaunama tiesiogiai įvertinant gradientą iš stebėtų rinkos duomenų matricos.

Logaritminio Ornsteino-Uhlenbecko modelio atveju tariama, kad $\mu = 0$, tuomet lygtys (1.20), (1.21) diskrečiu atveju aprašomos taip:

$$R_t = \exp(\upsilon_t)\sqrt{\tau}\varepsilon_{1t},$$

$$\upsilon_t = \alpha\overline{\upsilon}\tau + \left(1-\alpha\tau\right)\upsilon_{t-\tau} + \beta\sqrt{\tau}\varepsilon_{2t}; \qquad (1.27)$$

čia parametrai α, $\ln\overline{\sigma}$, β įvertinami analogiškai Hestono modelio parametrų įvertinimo procedūrai.

Kada įvertinami (κ, θ, η) parametrai (Hestono modelyje), reikia nustatyti koreliacijos koeficientą ρ. Tai atliekama naudojantis netiesiniu mažiausių kvadratų metodu. Kiekvieną dieną kotiruojama daug opcionų skirtingam laikui iki jų gyvavimo pabaigos ir skirtingoms pirkėjų pasirenkamoms kainoms. Paklaida apibrėžiama tarp rinkos kainos ir teorinės kainos apskaičiuotos pagal Hestono modelį. Ieškoma parametro reikšmė su kuria paklaidų kvadratų suma būtų minimali:

$$\min_{(\rho)} \sum_{i=1}^{n} \left(C_{rinkos_i} - C_{\mathrm{mod}\,elio}(\rho, K_i) \right)^2 ; \qquad (1.28)$$

čia n – vienos dienos opcionų skaičius. Ši procedūra atliekama kiekvienos dienos duomenims.

Hullo-White‘o modelyje yra trys nežinomi parametrai: σ_1, σ_2 ir p. Šiems parametrams įvertinti taip pat naudosime mažiausių kvadratų metodą, taigi, spręsime minimizavimo uždavinį:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \left(C_{rinkos_i} - C_{\mathrm{mod}\,elio}(\sigma_1, \sigma_2, p, K_i) \right)^2 ; \qquad (1.29)$$

čia C_{rinkos_i} – opcionų rinkos kaina skirtingam pasirinktam kursui, $C_{\mathrm{mod}\,elio}(\sigma_1, \sigma_2, p, K_i)$ – opciono kaina apskaičiuota pagal Hullo-White‘o modelį.

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1. DUOMENŲ ATRINKIMAS IR TVARKYMAS

Tyrimams ir modeliavimui naudojamas euro ir JAV dolerio valiutos kursas ir opcionų kainos vienam kurso vienetui. Šiuo metu, EUR/USD opcionai labiausiai domina prekeivius ir jais dažniausiai yra prekiaujama Lietuvoje. Darbe nagrinėjami EUR/USD europietiško tipo pirkimo opcionai. Operuojama kiekvienos prekybos dienos paskutine kaina, kiekvienai pirkėjo pasirinktai kainai ir laikui iki opciono gyvavimo pabaigos. Laikas iki opciono gyvavimo pabaigos apskaičiuojamas susumavus kalendorines dienas nuo prekybos pradžios iki penktadienio, po kurio seka tas šeštadienis, po kurio opciono gyvavimo terminas baigiasi.

Duomenų atrinkimo žingsniai yra šie:

1. Duomenys, pažeidžiantys bendrą arbitražo teoriją, pašalinami. Priešingu atveju galima gauti neigiamą sklaidos parametrą. Sandoris turi tenkinti šią lygtį:

$$C \geq \max(0, \quad S - K).$$

2. Opcionai, kurių galiojimo terminas yra didesnis nei 140 dienų (t.y. 9 ir 12 mėn.), yra nenagrinėjami, nes jais prekiaujama retai.
3. Labai gilūs OTM ir labai gilūs ITM opcionai netiriami, nes jais prekiaujama palyginus retai ir jų kainos neatspindi tikros opciono vertės. Sakoma, kad opcionas yra labai gilus ITM ir OTM, jei jo pelningumo absoliuti vertė yra didesnė už 7 proc. Opciono pelningumas apibrėžiamas kaip procentinis skirtumas tarp EUR/USD kurso ir nustatytos kainos:

$$\text{Pelningumas}\,(proc.) = \frac{S}{K} - 1.$$

Taigi, darbe tyrinėjami 64 dienų 960 stebėjimų. Vidutiniškai operuojama 15 opcionų kainų per vieną dieną.

Opcionų kainos labai jautrios pirkėjų pasirinktoms kainoms ir gyvavimo terminui. Dėl šios priežasties literatūroje opcionai yra dalinami į skirtingas pelningumo ir termino iki opciono gyvavimo pabaigos grupes tam, kad būtų galima patyrinėti jų kainų kitimą. Opcionų duomenis daliname į keletą kategorijų remiantis arba pelningumu arba gyvavimo periodu. Laikysime, kad pirkimo opcionas yra ATM, jei pelningumas priklauso intervalui (–0.5 proc., 0.5 proc.) (t.y. jei sandorio metu pirkėjo pasirinkta kaina yra lygi išankstinio valiutų keitimo sandorio kainai), ITM, jei pelningumas $\in (0.5\,\text{proc.}, 1\,\text{proc.})$ (t.y. jei sandorio metu nustatyta kaina sandorio pirkėjui yra palankesnė už išankstinio valiutų keitimo sandorio kainą), OTM, jei pelningumas $\in (-1\,\text{proc.}, -0.5\,\text{proc.})$ (t.y. jei sandorio metu nustatyta kaina sandorio pardavėjui yra palankesnė už išankstinio valiutų keitimo sandorio kainą), gilus ITM (angl. deep-in-the-money), jei pelningumas didesnis už 1 proc. ir gilus OTM (angl. deep-out-of-the-money), jei pelningumas mažesnis už –1 proc. Opcionas laikomas trumpo laikotarpio (termino) opcionu, jeigu laikas nuo sandorio pasirašymo iki pasirinkimo teisės įgyvendinimo yra tarp 7 ir 45 dienų (nagrinėjamu atveju 1 mėnesio terminas), vidutinio laikotarpio, jei laikas iki jo gyvavimo pabaigos yra tarp 45 ir 90 dienų (3 mėn. terminas) ir ilgo laikotarpio, jei terminas > 90 dienų (6 mėn.). 1 lentelėje pateikiamos EUR/USD kurso vidutinės opcionų kainos išskirstytos pagal jų pelningumą ir galiojimo terminą (žr. 1 priedas). Tyrimo periodas apima 82 dienas nuo 2004-01-05 iki 2004-04-30.

2.2. STOCHASTINIŲ MODELIŲ PARAMETRŲ ĮVERČIAI

Tam, kad paskaičiuoti Hullo-White‘o, Hestono ir logaritminio Ornsteino-Uhlenbecko modelio opcionų kainas, reikia žinoti struktūrinių parametrų reikšmes, kurios nėra pastebimos iš rinkos duomenų. Šiame darbe parametrų reikšmės įvertinamos remiantis kurso kainomis ir atitinkamomis opcionų kainomis. Hullo-White‘o modelio parametrai įvertinami kaip nurodyta 1.5 skyrelyje pagal (1.28) formulę (vidutiniai parametrų įverčiai pateikiami 2 lentelėje 2 priede). Hestono modelio parametrai kalibruojami dviejų žingsnių įvertinimo procedūra. Pirmame žingsnyje naudojamas netiesioginis įvertinimo metodas struktūrinių parametrų (μ, κ, θ, η), valdančių pagrindinio aktyvo procesą, nustatymui. Parametro μ reikšmė prilyginama nuliui, nes tiriant EUR/USD grąžas, galima pastebėti, kad jų vidurkis beveik lygus nuliui. Įvertinus (κ, θ, η) parametrus, naudojantis netiesiniu mažiausių kvadratų metodu nustatomas koreliacijos koeficientas ρ tarp aktyvo grąžos ir jos sklaidos parametro.

Stochastinio sklaidos parametro procesas Hestono modelyje yra veikiamas sklaidos parametro vidurkio θ, grįžimo prie vidurkio tendencijos κ ir sklaidos parametro variacijos η. EUR/USD kurso grąžai vidutinis sklaidos parametras 10.97 proc. (t.y. $\theta = \sqrt{0.1097} = 0.3312$). Netiesioginio parametrų įvertinimo pagalba gaunamas šiek tiek mažesnis vidutinis sklaidos parametro įvertis (10.919 proc., t.y. $\theta = \sqrt{0.10919} = 0.3304$) lyginant su stebėtais duomenimis. Grįžimo prie vidurkio intensyvumas yra apie 2.28, o sklaidos parametro variacija lygi 0.425, kada opciono galiojimo terminas yra trumpas. Koreliacijos koeficiento ρ įverčio reikšmė gaunama labai artima nuliui, taigi skaičiuojant numanomojo sklaidos parametro reikšmes ir opcionų kainas laikysime, kad $\rho = 0$.

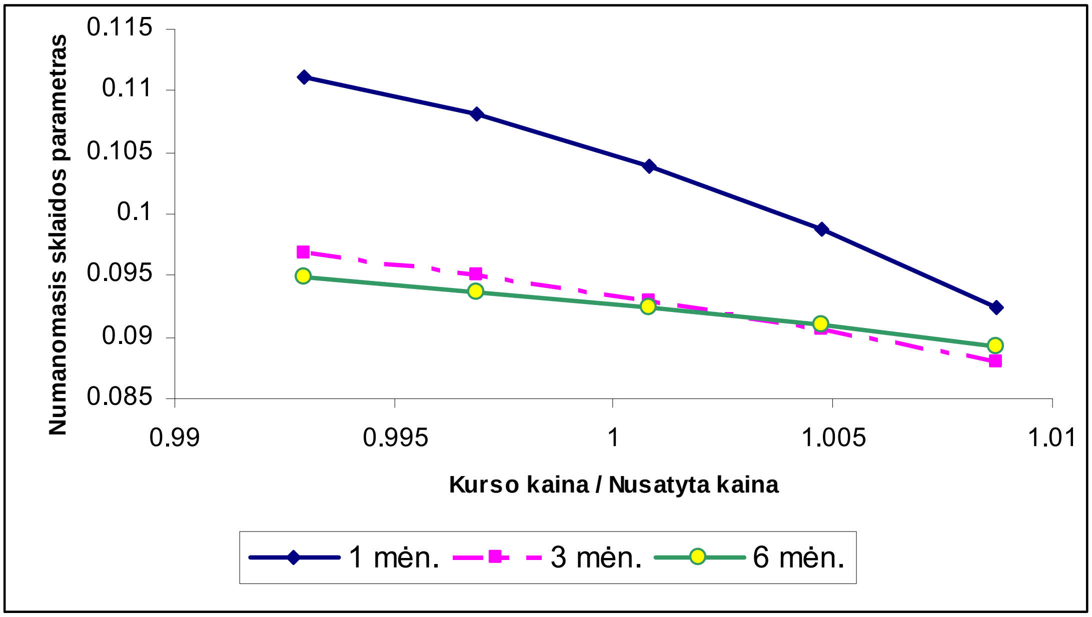
Logaritminio Ornsteino-Uhlenbecko modelio stochastinio sklaidos parametro procesą valdo sklaidos parametro vidurkis $\ln\overline{\sigma}$, grįžimo prie vidurkio tendencijos α ir sklaidos parametro variacijos β parametras. Gaunamas sklaidos parametro vidurkio įvertis lygus -3.3751, grįžimo prie vidurkio intensyvumas 26.1683, o sklaidos parametro variacija 0.5637, kada opciono terminas yra trumpas.

Stochastinių modelių parametrų įverčių vidurkiai pateikti 2 lentelėje 1 priede. Jų reikšmės apskaičiuotos programomis HullWhite_p_sigma.mcd, EMM_Heston_param.sas, Heston_rho.mcd, EMM_LogOU_param.sas MatCad ir SAS aplinkoje. Programų tekstai pateikti 3 priede.

2.3. NUMANOMOJO SKLAIDOS PARAMETRO ŠYPSENOS MODELIAVIMAS

Šiame skyriuje aprašomi numanomojo sklaidos parametro modeliavimo metodai ir analizuojami rezultatai. Numanomasis sklaidos parametras skaičiuojamas pagal Blacko-Scholeso, Hullo-White‘o, Hestono ir logaritminį Ornsteino-Uhlenbecko modelius. Vaizduojant grafiškai numanomojo sklaidos parametro reikšmes priklausomas nuo pelningumo, gautos šypsenos kreivės pagal visus metodus.

Tiriant Blacko-Scholeso modelio kainos nukrypimą nuo rinkos kainos patogu grafiškai nubrėžti Blacko-Scholeso numanomojo sklaidos parametro priklausomybę nuo kurso ir nustatytos kainos santykio. Daugelis tyrimų patvirtino sklaidos parametro šypsenos struktūrą, o tai reiškia, kad numanomasis sklaidos parametras kinta keičiantis nustatytai kainai (2.1 pav.):



2.1 pav. Numanomojo sklaidos parametro šypsenos (Blacko-Scholeso modelio)

2 paveikslėlyje (1 priede) matome nagrinėjamų EUR/USD opcionų numanomojo sklaidos parametro apskaičiuoto pagal Blacko-Scholeso modelį šypsenos paviršių. Numanomojo sklaidos parametro reikšmės apskaičiuotos programos VolatilitySmile.xls pagalba Microsoft Visual Basic aplinkoje. Programos tekstas pateiktas 2 priede. Aptarsime, kaip modeliuojamas stochastinių modelių numanomasis sklaidos parametras.

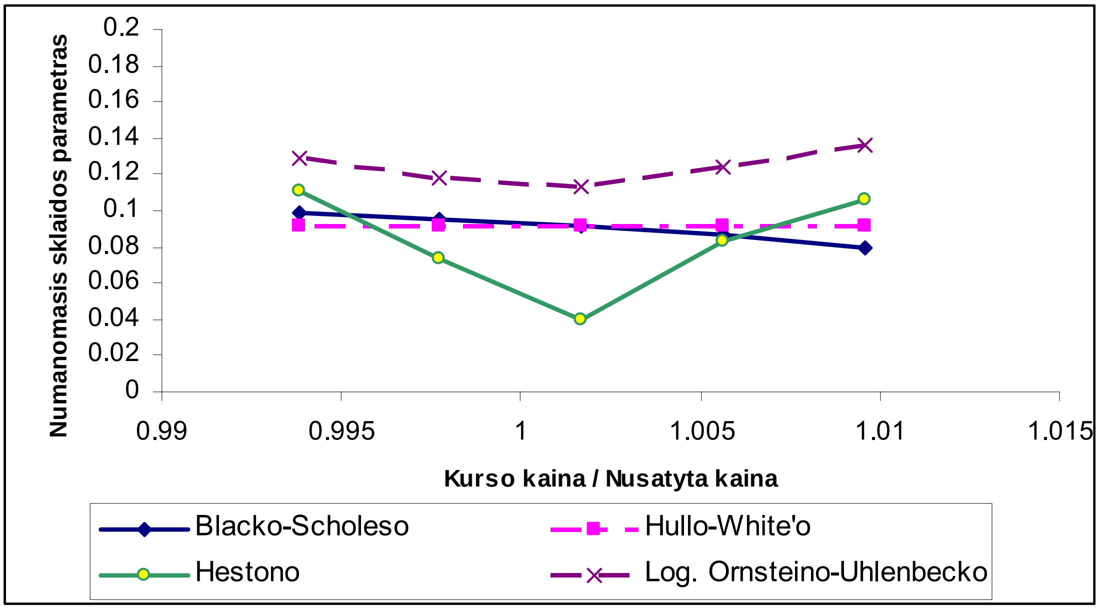
Skaičiuojant Hullo-White'o modelio numanomojo sklaidos parametro reikšmes naudojamasi (1.5), (1.6) ir (1.14) lygtimis. Remiantis (1.15), gauname lygtį:

$$C_{BS}(I) = pC_{BS}(\sigma_1) + (1-p)C_{BS}(\sigma_2) \tag{2.1}$$

čia C_{BS} žymi standartinę Blacko-Scholeso formulę su nežinomais parametrais p, σ_1, σ_2. Radus šių parametrų įverčius, kaip aprašyta 1.5 ir 2.2 skyriuje, numanomojo sklaidos parametro reikšmėms skaičiuoti naudojame formulę:

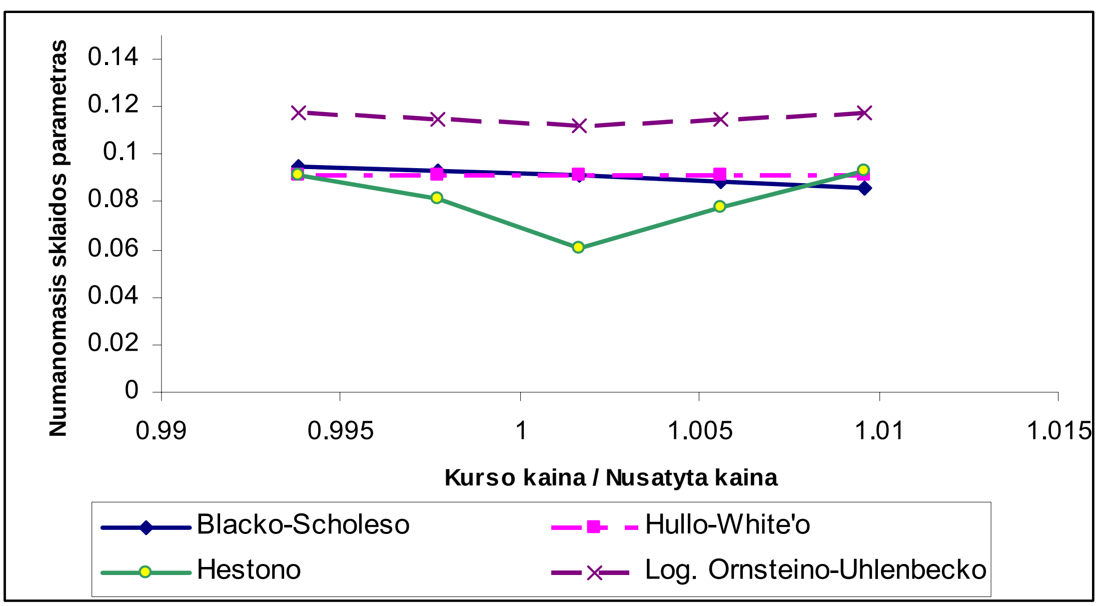
$$F(I) \equiv C_{BS}(I) - \hat{p}C_{BS}(\hat{\sigma}_1) - (1-\hat{p})C_{BS}(\hat{\sigma}_2) = 0 \tag{2.2}$$

čia I žymi sklaidos parametrą numanomą iš Blacko-Scholeso lygties. (2.2) lygtį sprendžiame I atžvilgiu, kaip aprašyta 1.3. skyriuje. 2.2 pav. palyginamos stebėtos ir pagal stochastinio sklaidos parametro modelius, su nustatytais parametrų įverčiais, apskaičiuotos numanomojo sklaidos parametro šypsenos:



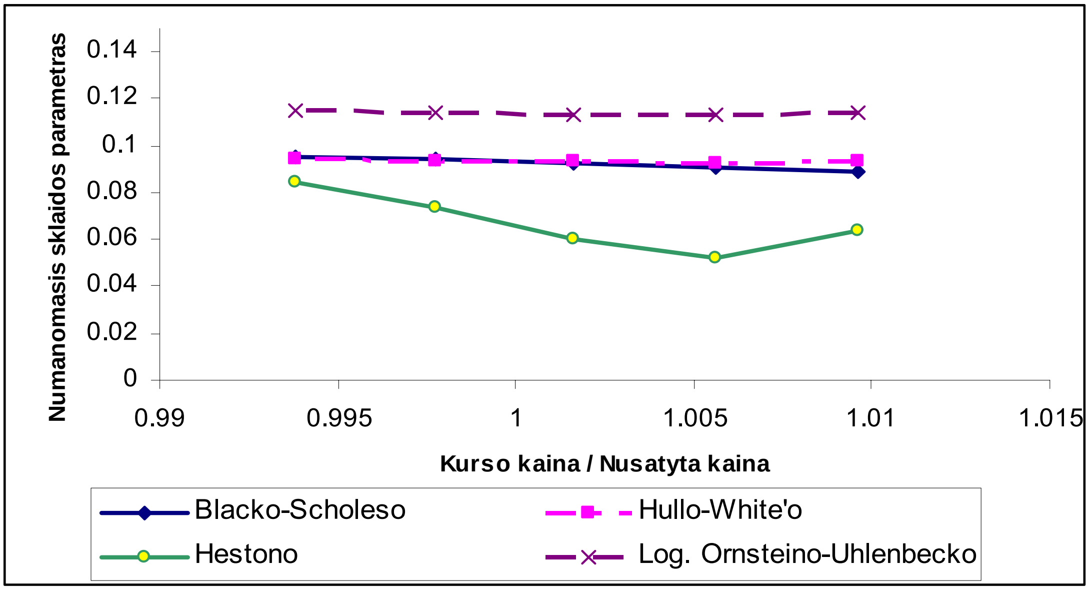
2.2 pav. Numanomojo sklaidos parametro šypsenos trumpojo termino opcionams

Matome, kad kreivės ryškiai skiriasi viena nuo kitos. Galbūt, tai priklauso nuo modelių supaprastinimo arba nepakankamo duomenų kiekio. Vidutinio termino opcionų numanomojo sklaidos parametro šypsenos ne tokios „gilios“, kaip 1 mėnesio opcionams:



2.3 pav. Numanomojo sklaidos parametro šypsenos vidutinio termino opcionams

Ilgojo termino (6 mėn.) opcionų numanomojo sklaidos parametro priklausomo nuo kurso ir nustatytos kainos santykio reikšmės labai mažai skiriasi viena nuo kitos, nagrinėjant kiekvieną modelį atskirai.



2.4 pav. Numanomojo sklaidos parametro šypsenos ilgojo termino opcionams

Numanomojo sklaidos parametro skaičiavimas pagal tolydžius stochastinius modelius yra sudėtingesnis. Hestono modelis diskrečiu atveju, pritaikius Eulerio schemą, aprašomas:

$$S_{t+\Delta t} = S_t\left(1 + \mu\Delta t + \sqrt{\upsilon_t}\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_{St}\right), \tag{2.3}$$

$$\upsilon_{t+\Delta t} = \upsilon_t + \kappa(\theta - \upsilon_t)\Delta t + \eta\sqrt{\upsilon_t}\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_{St}\left(\rho + \sqrt{1-\rho^2}\,\varepsilon_{\upsilon t}\right); \tag{2.4}$$

čia ε_{St} ir $\varepsilon_{\upsilon t}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai pasiskirstę pagal standartinį normalųjį dėsnį, $\sigma_t = \sqrt{\upsilon_t}$, o $\Delta t = T/255$. Logaritminis Ornsteino-Uhlenbecko modelis diskrečiu atveju aprašomas taip:

$$S_{t+\Delta t} = S_t\left(1 + \mu\Delta t + e^{\upsilon_t}\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_{St}\right), \tag{2.5}$$

$$\upsilon_{t+\Delta t} = \upsilon_t + \alpha(\overline{\upsilon} - \upsilon_t)\Delta t + \beta\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_{\upsilon t}; \tag{2.6}$$

čia $\sigma_t = e^{\upsilon_t}$ [24]. Modeliavimo algoritmas, paremtas Monte-Carlo metodu, atliekamas pažingsniui:

1. Modeliuojami sklaidos parametro ir aktyvo kainos procesai pagal Hestono ir logaritminį Ornsteino-Uhlenbecko modelius, t.y. atitinkamai pagal (2.3), (2.4) ir (2.5), (2.6) lygtis. Gaunamos jų kitimo trajektorijos per nagrinėjamą laikotarpį.
2. Sumodeliavus trajektoriją, skaičiuojama opciono kontrakto funkcija *h(S)*. Pirkimo opcionui, remiantis (1.1) formule:

$$h(S_t) = \max\{0, \quad S_t - K\}. \tag{2.7}$$

3. Opciono kaina, laiko momentu *T*, randama iš lygties:

$$C_{\text{modelio}} = e^{-r_{Base}T}\,\mathrm{E}\big(h(S_T)\big). \tag{2.8}$$

4. Kaip ir pirmu atveju, numanomojo sklaidos parametro reikšmės nustatomos naudojantis VolatilitySmile.xls programa, sprendžiant lygtį

$$F(I) \equiv C_{BS}(I) - C_{\text{modelio}} = 0\,. \tag{2.9}$$

Modeliavimas Monte-Carlo metodu užtrunka labai ilgai, tačiau, norint gauti tikslesnes numanomojo sklaidos parametro reikšmes, reikia padidinti imitacinių trajektorijų skaičių (darbe 1 procedūros žingsniai kartojami 10000 kartų, tai pakankamas skaičius [4], [17]). Modeliavimas atliekamas programos VolatilitySmile.xls pagalba.

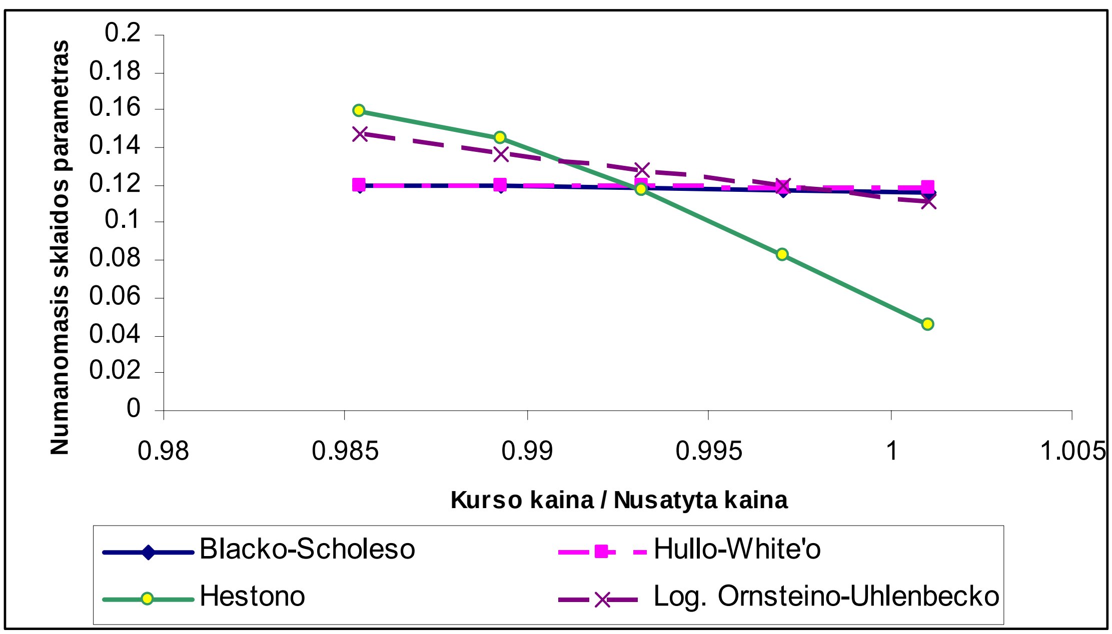
Sugretinus stebėtas ir pagal Hestono bei logaritminį Ornsteino-Uhlenbecko modelius, su nustatytais parametrų įverčiais, nubraižytas numanomojo sklaidos parametro šypsenas, matome, kad kreivės skiriasi viena nuo kitos daug ryškiau nei Hullo-White'o modelio atveju (2.2, 2.3 ir 2.4 pav.).

Paprastai numanomojo sklaidos parametro reikšmės didesnės OTM („out-of-the-money“) ir ITM („in-the-money“) opcionams, o ATM („at-the-money“) opcionų kainoms – žemesnės. Sklaidos parametro šypsenos egzistavimas rodo, kad Blacko-Scholeso modelis klaidingai įkainoja opcionus per visą pelningumo ašį. Patyrinėsime, ar stochastinio sklaidos parametro modeliai sumažina sklaidos parametro šypsenos efektą. Taigi, numanomojo sklaidos parametro šypsenos tyrimas leistų palyginti nagrinėjamus stochastinius modelius.

3 lentelėje pateikiamos vidutinės Blacko-Scholeso numanomojo sklaidos parametro reikšmės apskaičiuotos remiantis rinkos, Hullo-White'o, Hestono ir logaritminiu Ornsteino-Uhlenbecko (žymėsime

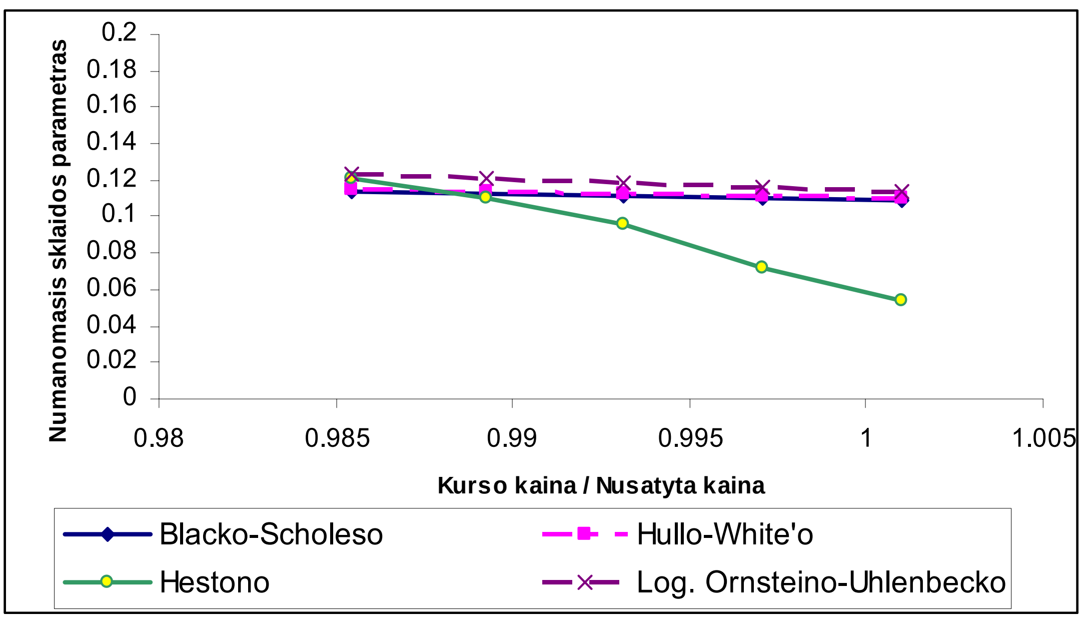
logOU) modeliu (žr. 1 priede) [25]. Pirmiausia panagrinėsime numanomąjį sklaidos parametrą apskaičiuotą iš rinkos duomenų. Kaip matome, sklaidos parametro reikšmės žymiai skiriasi kintant opcionų nustatytai kainai. Matoma aiški numanomojo sklaidos parametro tendencija mažėti, kada opcionų kainos kinta nuo OTM iki ITM. Ši įstriža kreivė reiškia, kad Blacko-Scholeso modeliu apskaičiuotos kainos yra per aukštos ITM opcionams ir per žemos OTM opcionams. Ši tendencija pastebima esant skirtingam laikui iki opciono gyvavimo pabaigos, tačiau, kada opciono gyvavimo laikotarpis yra trumpas, ji – ryškiausia. Kada pirkėjo pasirinkta kaina didėja, numanomasis sklaidos parametras trumpojo termino opcionams mažėja labiausiai, tai reiškia, kad trumpojo termino opcionus Blacko-Scholeso modelis įkainoja blogiausiai.

Dabar panagrinėkime numanomojo sklaidos parametro reikšmes apskaičiuotas pagal stochastinius sklaidos parametro modelius. Kadangi sklaidos parametras yra vienintelė nežinoma Blacko-Scholeso modelio reikšmė, jį galima naudoti aproksimuojant opcionų kainą. Kiekvienam modeliui galima parinkti tokį sklaidos parametrą, kuris prilygina Blacko-Scholeso modelio kainą teorinei opcionų kainai, apskaičiuotai pagal kurį nors opcionų įkainojimo modelį. Jei ši numanomojo sklaidos parametro reikšmė artima Blacko-Scholeso numanomai reikšmei, tai teorinė opciono kaina yra artima jo rinkos kainai. Taigi, tiriant Blacko-Scholeso numanomąjį sklaidos parametrą apskaičiuotą pagal stochastinį sklaidos parametro opcionų įkainojimo modelį, reikia remtis tuo, kaip gerai stochastinis opcionų įkainojimo modelis atitinka rinkos duomenis.

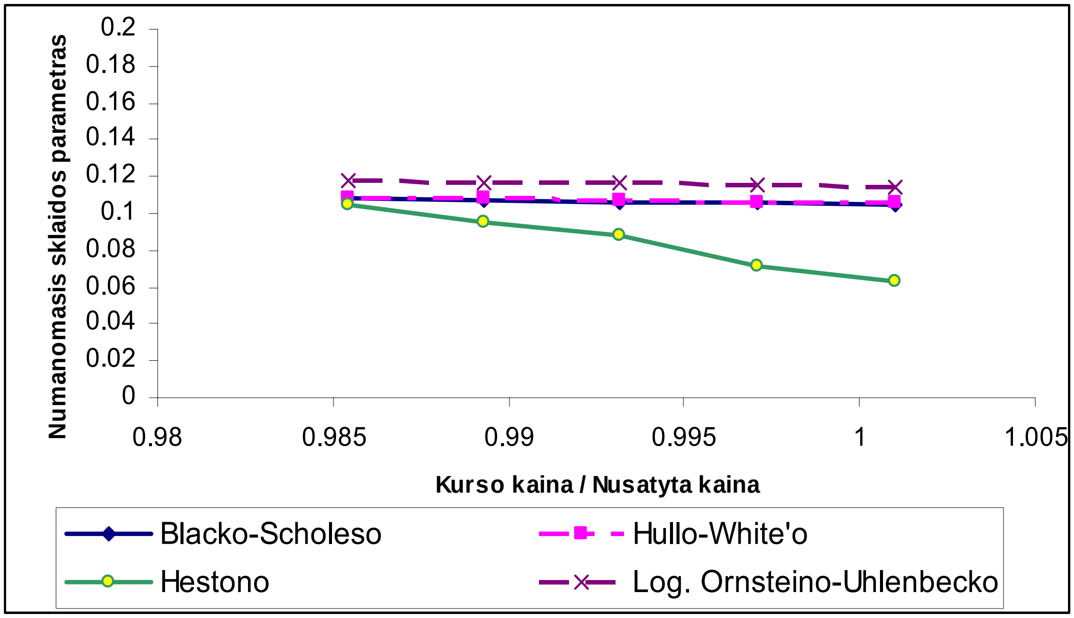


2.5 pav. Numanomojo sklaidos parametro šypsenos 1 mėn. periodui

Lyginant stochastinių modelių numanomąjį sklaidos parametrą su rinkos kainos numanomuoju sklaidos parametru, galima padaryti keletą išvadų. Pirmiausia, matome, kad bet kuriam opciono gyvavimo terminui gilių OTM Hullo-White‘o, Hestono bei logOU kainų numanomasis sklaidos parametras visada didesnis už opciono rinkos kainos numanomąjį sklaidos parametrą. ITM opcionams Hestono modelio numanomasis sklaidos parametras mažesnis už rinkos kainos numanomąjį sklaidos parametrą, o Hullo-White‘o ir logOU modelio – didesnis. OTM opcionams Hullo-White‘o, Hestono numanomasis sklaidos parametras nėra didesnis už rinkos parametrą. Šie rezultatai reiškia, kad stochastiniai sklaidos parametro modeliai vidutiniškai pervetina OTM ir Hullo-White‘o bei logOU modeliai pervertina ITM opcionus, o Hestono modelis nepakankamai įkainoja šiuos opcionus, pagal pasirinkimo sandorio terminus. Dar vienas svarbus pastebėjimas, kad Hullo-White’o modelio vidutinės numanomojo sklaidos parametro reikšmės formuoja įstrižą kreivę, o Hestono – tik esant ilgam terminui iki opciono gyvavimo pabaigos. Trumpo ir vidutinio laikotarpio opcionams ir logOU modeliui kreivė įgauna U formą. Šis aiškus sklaidos parametro reikšmių nukrypimas nuo rinkos numanomojo sklaidos parametro reikšmių patvirtina, kad vidutiniškai, trumpojo termino opcionus stochastinio sklaidos parametro modeliai įkainoja sunkiausiai. Ir galiausiai, ATM opcionams Hullo-White‘o bei logOU modelio numanomasis sklaidos parametras yra labai artimas rinkos numanomajam sklaidos parametrui, o tai rodo, kad šie modeliai vidutiniškai geriau įkainoja ATM opcionus. Sugretinus Hullo-White‘o modeliu apskaičiuotą numanomąjį sklaidos parametrą su rinkos kainos numanomuoju sklaidos parametru matome, kad jų reikšmės yra labai artimos (2.5, 2.6 ir 2.7 pav.).



2.6 pav. Numanomojo sklaidos parametro šypsenos 3 mėn. periodui



2.7 pav. Numanomojo sklaidos parametro šypsena 6 mėn. periodui

2.5, 2.6 ir 2.7 pav. sugretina skirtingų modelių vienos dienos numanomųjų sklaidos parametrų reikšmes atsižvelgiant į skirtingus opcionų gyvavimo terminus.

Taigi, stochastinio sklaidos parametro modeliai pervertina gilius OTM ir ITM opcionus ir nepakankamai įkainoja OTM opcionus, išskyrus logOU modelį, kuris pervertina visus opcionus (4 lentelė 1 priede). Ši tendencija ypač ryški trumpojo periodo pasirinkimo sandoriams.

2.4. MODELIUOJAMŲ KAINŲ TIKSLUMAS LYGINANT BLACKO-SCHOLESO, HULLO-WHITE'O, HESTONO IR LOGARITMINĮ ORNSTEINO-UHLENBECKO MODELIUS

Numanomojo sklaidos parametro šypsena rodo, kad Hullo-White'o, Hestono ir logaritminio Ornsteino-Uhlenbecko modelio kainos ypač nukrypsta nuo rinkos kainų trumpojo termino opcionams. Taigi, reikia įvertinti kaip stochastinio sklaidos parametro modelių opciono kainos modeliavimas atitinka Blacko-Scholeso modelį. Tuo tikslu naudojamasi praeitos dienos parametrų įverčiais ir skaičiuojamos šios dienos Hullo-White'o, Hestono ir logOU modelio kainos. Tam, kad paskaičiuoti Blacko-Scholeso kainą, naudojamasi praeitos dienos vidutine numanomojo sklaidos parametro reikšme. Šie skaičiavimai atliekami su visais duomenimis.

Opcionų įkainojimo paklaidos lyginamos su stebėtomis rinkoje kainomis pagrįstomis santykinės įkainojimo paklaidos vidurkiu ir vidutinės kvadratinės paklaidos vidurkiu [1]:

$$ARPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|C_i^M - C_i\right|}{C_i}, \tag{2.30}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(C_i^M - C_i\right)^2}\,; \tag{2.31}$$

čia n – opcionų skaičius, C_i ir C_i^M – rinkos ir teorinė modelio kaina, atitinkamai. *ARPE* matuoja santykinės opcionų įkainojimo paklaidos vidurkį tarp modelio ir rinkos kainos, o *RMSE* matuoja vidutinę kvadratinę įkainojimo paklaidą. Darbe *ARPE* ir *RMSE* skaičiuojamos esant skirtingam pelningumui ir laikui iki opciono gyvavimo pabaigos.

5 lentelėje 1 priede pateikiamos visų modelių vidutinės santykinės opcionų įkainojimo paklaidos. Galima daryti keletą išvadų. Pirmiausia, visi modeliai perkainoja gilius OTM bei ITM opcionus ir Hullo-White‘o modelis nepakankamai įkainoja ITM opcionus bet kuriam opcionų gyvavimo terminui. ITM ir gilūs OTM opcionai įkainojami prasčiausiai. Pavyzdžiui, vidutinė įkainojimo paklaida trumpojo termino ITM opcionams yra 6.14 proc. (Blacko-Scholeso), 6.37 proc. (Hullo-White‘o), 34.05 proc. (Hestono) ir 18.59 proc. (logOU). Įkainojimo paklaidos dydis OTM opcionams yra daug didesnis nei ITM opcionams Hestono modeliui. Pavyzdžiui, santykinės paklaidos vidurkis visų terminų giliems OTM opcionams yra 36.72 proc. (Hestono), nors tik 2.44 proc. (Blacko-Scholeso), 2.46 proc. (Hullo-White‘o), 19.4 proc. (logOU), o tuo tarpu vidutinė procentinė paklaida ITM opcionams yra 30.77 proc., 4 proc, 4 proc., 12 proc. atitinkamai. Kitas svarbus pastebėjimas, kad trumpojo termino opcionai įkainojami prasčiausiai visose pelningumo grupėse. Pavyzdžiui, OTM opcionams vidutinė procentinė įkainojimo paklaida trumpojo termino opcionams yra 4.73 proc. (Blacko-Scholeso), 4.443 proc. (Hullo-White‘o), 33.65 proc. (Hestono) ir 19.71 proc. (logOU), tačiau ilgo termino opcionų įkainojimo paklaida tik 1.75 proc., 1.5 proc., 25.07 proc., 11.92 proc. atitinkamai. Taigi, šie rezultatai patvirtina prieš tai darytas išvadas, remiantis sklaidos parametro šypsena, kad trumpojo termino ITM opcionai įkainojami prasčiausiai. Trečia, Hullo-White‘o modelis aiškiai pranašesnis prieš Blacko-Scholeso ir kitus stochastinio sklaidos parametro modelius. Vidutinė santykinė opcionų įkainojimo paklaida Hullo-White‘o modelio mažesnė už Blacko-Scholeso modelio 7 iš 12 atvejų. Tendencija ypač ryški ITM opcionams, gal būt dėl to, kad ITM opcionų įkainojimo paklaidos yra didžiausios.

Taigi, naudojant Hullo-White‘o stochastinio sklaidos parametro modelį opcionų įkainojimo tikslumas pagerėja, nors įkainojimo paklaidų visiškai pašalinti nepavyksta. Galima teigti, kad įvertinant opcionų kainą svarbų indėlį gali turėti ir tokie faktoriai kaip stochastinė palūkanų rizika ar atsitiktiniai kainų šuoliai.

6 lentelėje matome vidutines kvadratines opcionų įkainojimo paklaidas skirtingam laikui iki opciono gyvavimo pabaigos ir skirtinoms pinigingumo grupėms (žr. 1 priedas). Vėlgi, Hullo-White‘o stochastinis sklaidos parametro modelis, daugumoje atvejų, opcionus įkainoja geriau negu Blacko-Scholeso modelis. Vis dėl to, galima pastebėti, kad Blacko-Scholeso modelis geriau nei Hullo-White‘o modelis įkainoja ITM opcionus ir vidutinio termino pasirinkimo sandorius. Be to logOU modelio paklaidos daug mažesnės už Hestono modelio paklaidas. Prisiminkime, kad santykinė Hullo-White‘o modelio įkainojimo paklaida yra mažesnė nei Blacko-Scholeso modelio santykinė opcionų įkainojimo paklaida. Santykinių ir vidutinių kvadratinių įkainojimo paklaidų rezultatai sutampa.

3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

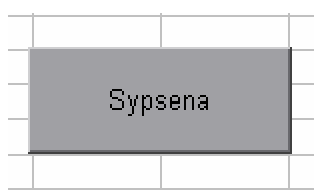
Panaudojus Microsoft Visual Basic, modeliavau numanomojo sklaidos parametro šypsenas programiškai. Darbas susideda iš keturių programų skirtų vartotojui:

- Blacko-Scholeso modelio numanomojo sklaidos parametro šypsenos nustatymas. Numanomojo sklaidos parametro reikšmėms skaičiuoti ir šypsenos grafikui brėžti skirtas “BlackScholes” puslapis.
- Hullo-White’o modelio numanomojo sklaidos parametro šypsenos modeliavimas. Jam skirtas “HullWhite” puslapis.
- Hestono modelio numanomojo sklaidos parametro šypsenos modeliavimas. Šio stochastinio modelio numanomajam sklaidos parametrui nustatyti ir šypsenos grafikui brėžti skirtas “Heston” puslapis.
- Logaritminio Ornsteino-Uhlenbecko modelio numanomojo sklaidos parametro šypsenos modeliavimas. Šiam stochastiniam sklaidos parametro modeliui skirtas “LogOU” puslapis.

Šios programos, vartotojo patogumui, apjungtos į vieną projektą VolatilitySmile.xls. Jų tekstai pateikti 2-ame priede.

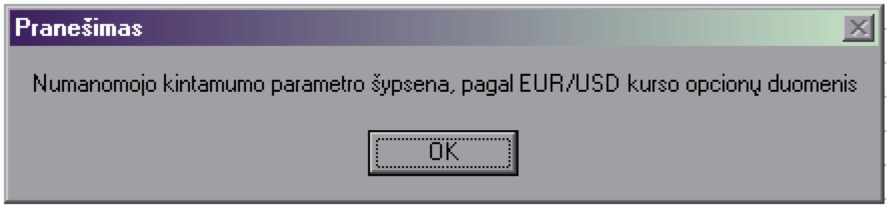
Vartotojui siūloma, prieš vykdant programas, paskaityti informaciją apie programų paskirtį, įvedimo duomenis ir gaunamus rezultatus “Info” puslapyje.

Pirmoji programa skirta Black-Scholes modelio numanomojo sklaidos parametro reikšmėms skaičiuoti iš rinkos duomenų. Pradinių duomenų pavyzdys pateikiamas tame pačiame puslapyje geltonai paryškintuose langeliuose. Pati programa vykdoma “pele” spragtelėjus mygtuką “*Sypsena*” (3.1 pav.):



3.1 pav. Programos paleidimo mygtukas

Tada atsiveria pranešimo langas, kuriame informuojama apie pradinius duomenis (3.2 pav.):

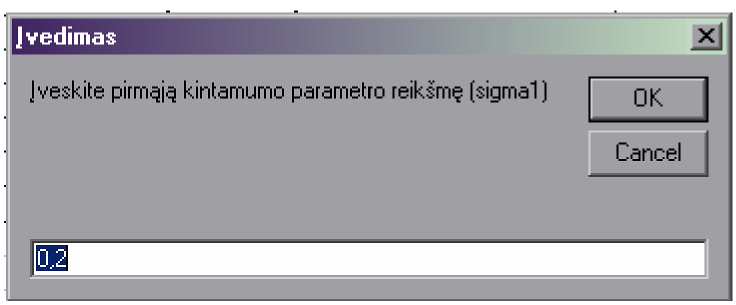


3.2 pav. Pranešimo langas

Spaudžiamas mygtukas **OK** ir, jei duomenys nebuvo keičiami, Black-Scholes modelio pagalba apskaičiuojamos numanomojo sklaidos parametro reikšmės pagal EUR/USD kurso opcionų duomenis. Norint pakeisti pradinius duomenis, reikia naują informaciją suvesti į geltonai pažymėtus langelius ir iš naujo vykdyti programą. Pastaba: programos skaičiavimo rezultatai bus tinkami, jei pradiniai duomenys bus pagrįsti ir korektiškai suvesti.

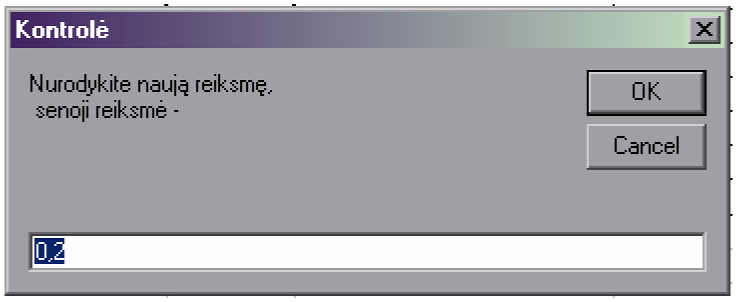
Antroji programa skirta antrajam uždaviniui vykdoma trečiajame lange "*HullWhite*". Čia taip pat yra ir įvedami pradiniai duomenys, ir atspausdinami rezultatai. Uždavinys spręsti pradedamas "pele" spragtelėjus mygtuką "*Sypsena*" (kaip ir 3.1 pav.). Atsiveria pranešimų langas (3.1 pav.), informuojantis, kad yra modeliuojama numanomojo sklaidos parametro "šypsena" naudojantis EUR/USD kurso opcionų kainomis. Spaudžiamas mygtukas **OK**.

Tada atsiveria užklausos langai, kuriuose prašoma nurodyti pradinius duomenis – σ_1, σ_2 ir p reikšmes, atitinkamai (pavyzdžiui σ_1 reikšmė įvedama kaip parodyta 3.3 pav.):



3.3 pav. Duomenų įvedimas

Įvedus prašomą reikšmę spaudžiamas mygtukas **OK**. Jei įvedant duomenis paspaudžiamas mygtukas **Cancel**, pasirodo užklausa, prašanti pakartoti įvedimą (3.4 pav.):



3.4 pav. Pakartotina užklausa

Jei ir vėl paspaudžiamas mygtukas **Cancel** arba įvedama ne skaitinė reikšmė, pasirodo pranešimų langas informuojantis, kad pradiniai duomenys liko nepakeisti.

Analogiškai įvedamos ir kitų dviejų parametrų reikšmės.

Suvedus pradinius duomenis numanomojo sklaidos reikšmės ir jo šypsena sumodeliuota pagal Hull-White modelį pateikiama tame pačiame puslapyje. Norint pakeisti kitus pradinius duomenis, pateikiamus tame pačiame puslapyje, reikia naują informaciją suvesti į geltonai pažymėtus langelius ir vykdyti programą iš naujo. Pastaba: programos skaičiavimo rezultatai bus tinkami, jei pradiniai duomenys bus pagrįsti ir korektiškai suvesti.

Analogiškas duomenų įvedimas bei programų vykdymas Heston ir logaritminio Ornstein-Uhlenbeck modelio numanomojo sklaidos parametro reikšmėms ir šypsenai modeliuoti atliekas languose "*Heston*" ir "*LogOU*", atitinkamai. Pastaba: įvedimo užklausų languose pateikiami šiam uždaviniui nustatyti parametrų įverčiai, jei pradiniai duomenys yra keičiami, tai struktūrinių parametrų reikšmes galima įvertinti programų ImpliedParamHullWhite.mc, EMM_RAND_Heston.sas, EMM_RAND_LobOU.sas ir ImpliedParamHeston.mc pagalba (programų tekstai pateikiami 2 priede).

IŠVADOS

Darbe įkainojami Lietuvoje prekiaujami valiutų EUR/USD kurso opcionai naudojantis Blacko-Scholeso, Hullo-White‘o, Hestono ir logaritminio Ornsteino-Uhlenbecko stochastinio sklaidos parametro modeliais.

1. Stochastinių modelių numanomasis sklaidos parametras geriau atspindi vidutinio ir ilgojo, negu trumpojo opcionų termino rinkos numanomąjį sklaidos parametrą.

2. Pelningumo atžvilgiu numanomasis sklaidos parametras, gautas panaudojus stochastinius modelius, yra didesnis (mažesnis) nei iš rinkos kainos numanomas sklaidos parametras giliems OTM ir ITM (OTM) opcionams.

3. Nagrinėti modeliai pervertina gilius OTM bei ITM (išskyrus Hestono), ir nepakankamai įkainoja ATM opcionus. Įkainojimo paklaidos mažesnės Hullo-White‘o nei Logaritminio Ornsteino-Uhlenbecko, kurio paklaidos mažesnės už Hestono modelio, įvairiose pelningumo ir pasirinkimo sandorių terminų grupėse.

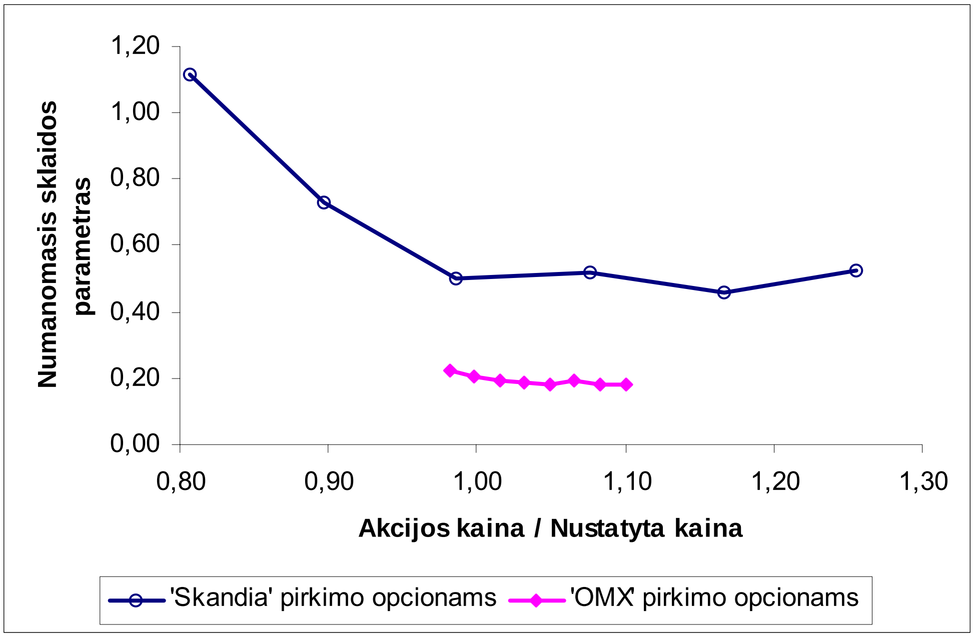
4. Logaritminį Ornsteino-Uhlenbecko modelį patartina taikyti įkainojant tik ilgo laikotarpio (6 mėn.), Hullo-White‘o – vidutinio (3 mėn.) ir trumpo (1 mėn.) laikotarpio pasirinkimo sandorius.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

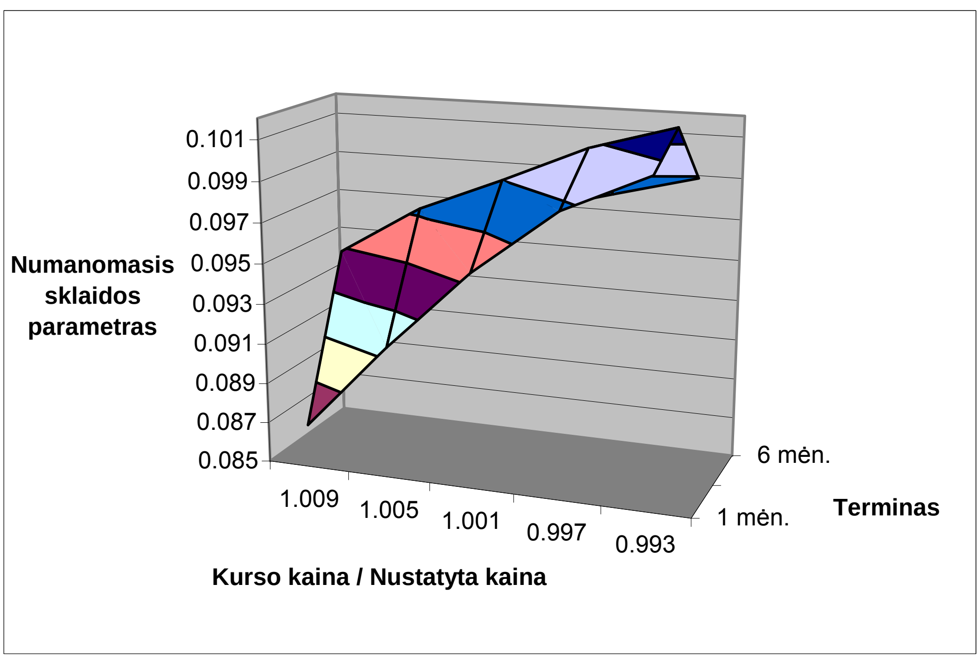
1. M. M. Dacorogna, R. Gencay, U. A. Muller, R. B. Olsen, O. V. Pictet. An Introduction to High-Frequency Finance. Academic Press, 2001.
2. E. Valakevičius. Investicijų matematika. – Kaunas: Technologija, 2002.
3. Kubilius J. Tikimybių teorija ir matematinė statistika. Vilnius, 1980. 408 p.
4. Ilya M., Sobol, A Primer For the Monte Carlo Method: CRC Press, 1994.
5. Blonskis J., Bukšnaitis V. C++ praktikumas. – Kaunas: Technologija, 2001.
6. Vidžiūnas A. C++ duomenų tipai ir struktūros. Kaunas, 1999. 240 p.
7. SAS User‘s Guide: Statistics. – Cary, NC, USA: SAS Institute Inc., 1985. 956 p.
8. SAS User‘s Procedures Guide. – Cary, NC, USA: SAS Institute Inc., 1990. 705 p.
9. Black, F., and Scholes, M. The Pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81, 1973. 637-659 p.
10. Hull, J, and White, A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. Journal of Finance, 42, 1987. 281-300 p.
11. Heston, S.L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. Review of Financial Studies, 6, 1993. 327-343 p.
12. S. Alizadeh, M. W. Brandt, F. X. Diebold. Randge-Based Estimation of Stochastic Volatility Models of Exchange Rate Dynamics are More Interesting Than You Think. 2002.
13. Shu J. Pricing S&P 500 Index Options under Stochastic Volatility with the Indirect Inference Method. University of International Business and Economics. China, 2002.
14. Andersson K. Stochastic Volatility: U.U.D.M. Project Report, 2003.
15. Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X., Labys P. The distribution of Exchange rate volatility. The Wharton Scholl. Financial Institutions Center, 1999.
16. Tabak B. M., Chang E. J. Forecasting Exchange Rate Volatility. Haas Business School, 2002.
17. Diebold F. X., Hickman A., Inoue A., Schuermann T. Converting 1-Day Voalatility to h-Day Volatility: Scaling by $\sqrt{h}$ Is Worse than You Think. The Wharton Scholl. Financial Institutions Center, 1997.
18. Fouque J-P., Papanicolaou G., Sircar K. R. Financial Modeling in a Fast Mean-Reverting Stochastic Volatility Environment. 2000.
19. Aboura S. Pricing CAC 40 Index Options with Stochastic Volatility: ESSEC Business School, 2003.

20. D. Brigo, F. Mercurio, G. Sartorelli. Alternative asset-price dynamics and volatility smile. Quantitative Finance Volume 3, 2003.
21. Duan J-C. Garch and Stochastic Volatility Optikon Pricing. Hong Kong University of Science & Technology. Hong Kong, 2000.
22. D. Brigo. Volatility Smile Modeling with Density-Mixture Stochastic Differential Equations. Credit Models, http://www.damianobrigo.it.
23. http://www.sas.com/samples
24. Valaitytė A., Valakevičius E. Stochastinio proceso kintamumo parametro modeliavimas // Matematika ir matematinis modeliavimas – 2004: konferencijos pranešimų medžiaga [Kaunas, 2004 m. balandžio 1, 2 d.]. Kaunas, 2004.
25. Valaitytė A., Valakevičius E. Stochastinio proceso kintamumo parametro „šypsenos“ modeliavimas // Taikomoji matematika: konferencijos pranešimų medžiaga [Kaunas, 2004 m. gegužės 8 d.]. Kaunas, 2004.

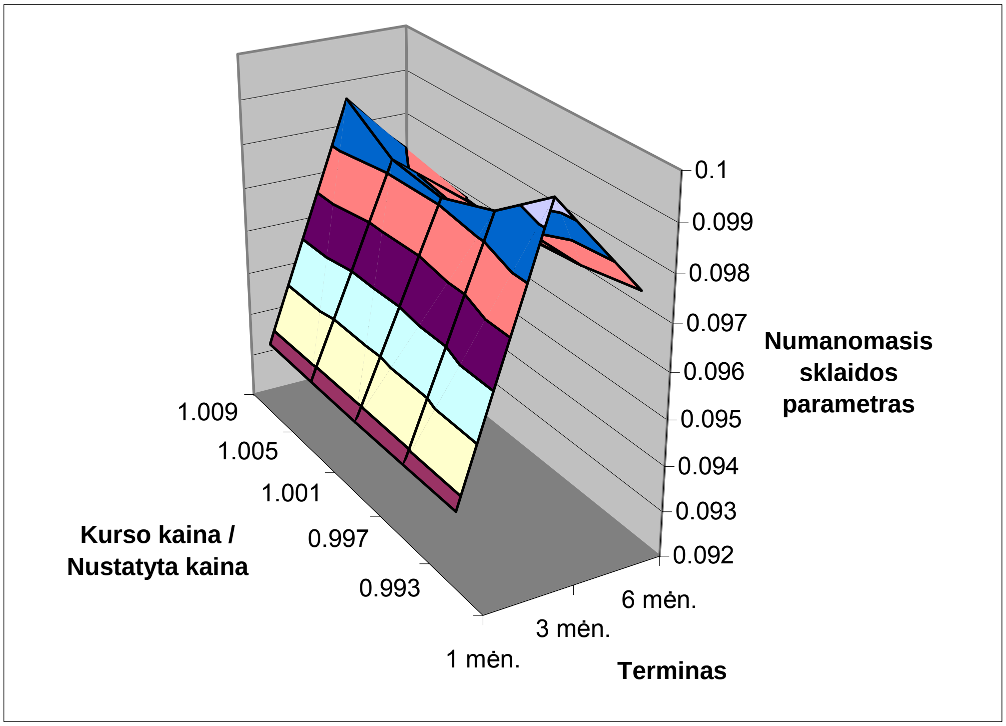
1 PRIEDAS. STOCHASTINIO SKLAIDOS PARAMETRO MODELIŲ TYRIMO REZULTATAI



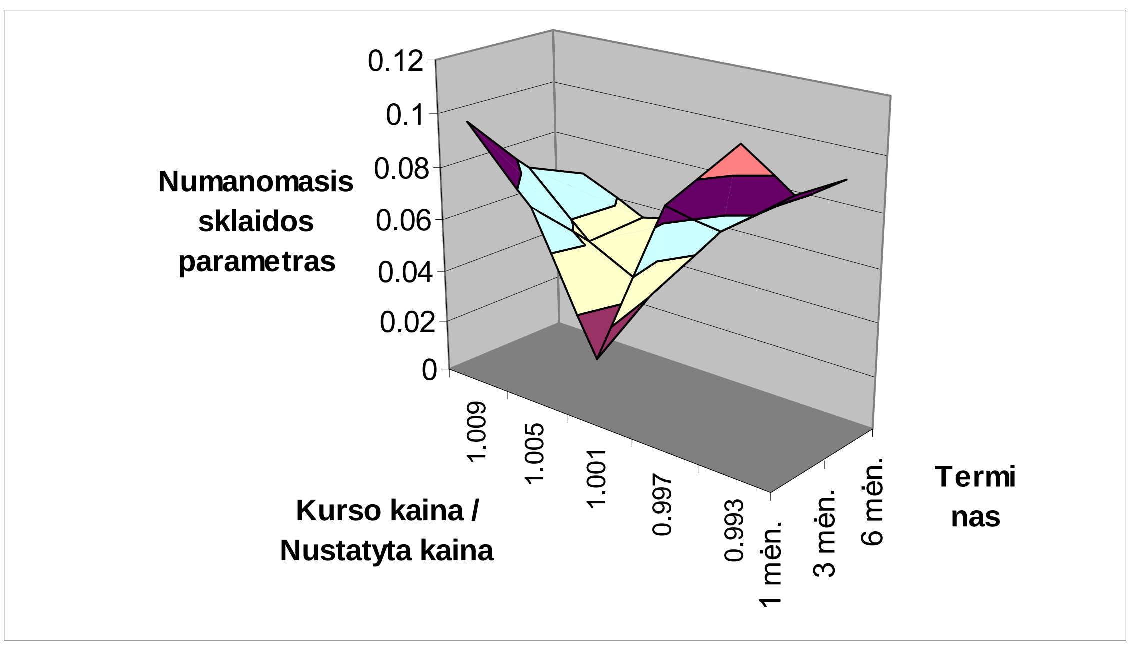
1 pav. Užsienio aktyvų numanomojo sklaidos parametro šypsenos



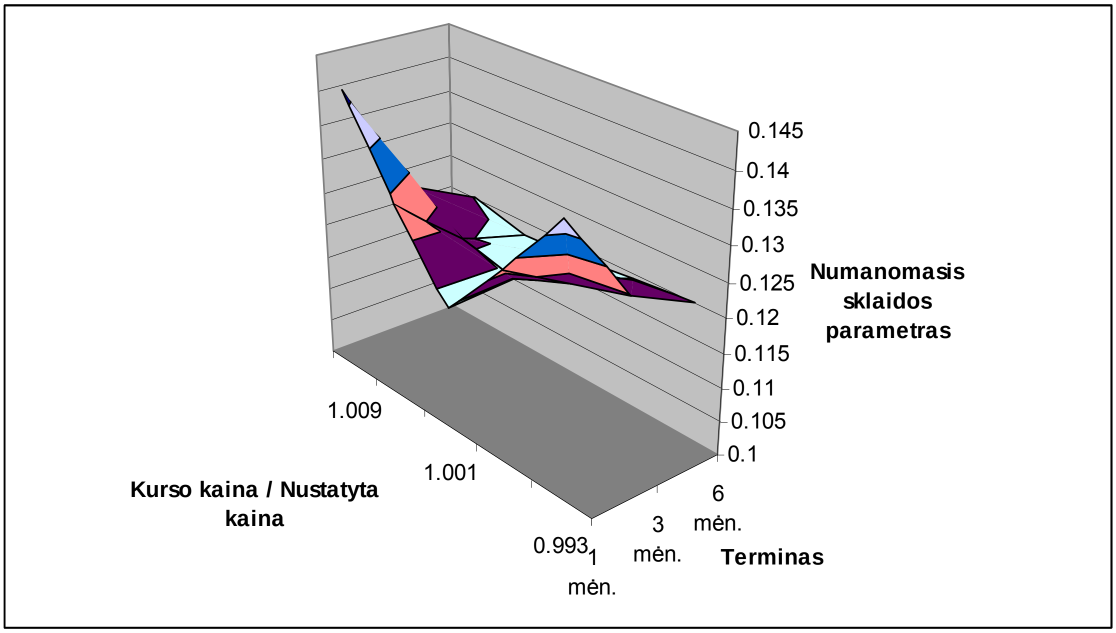
2 pav. Blacko-Scholeso modelio numanomojo sklaidos parametro paviršius (2004-04-30)



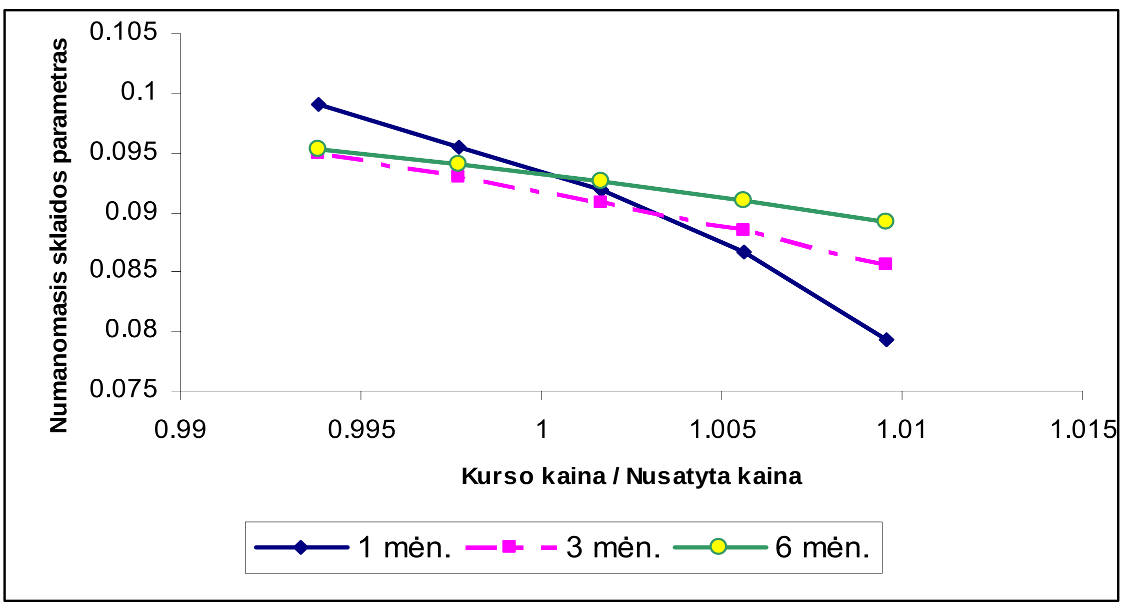
3 pav. Hullo-White'o modelio numanomojo sklaidos parametro paviršius (2004-04-30)



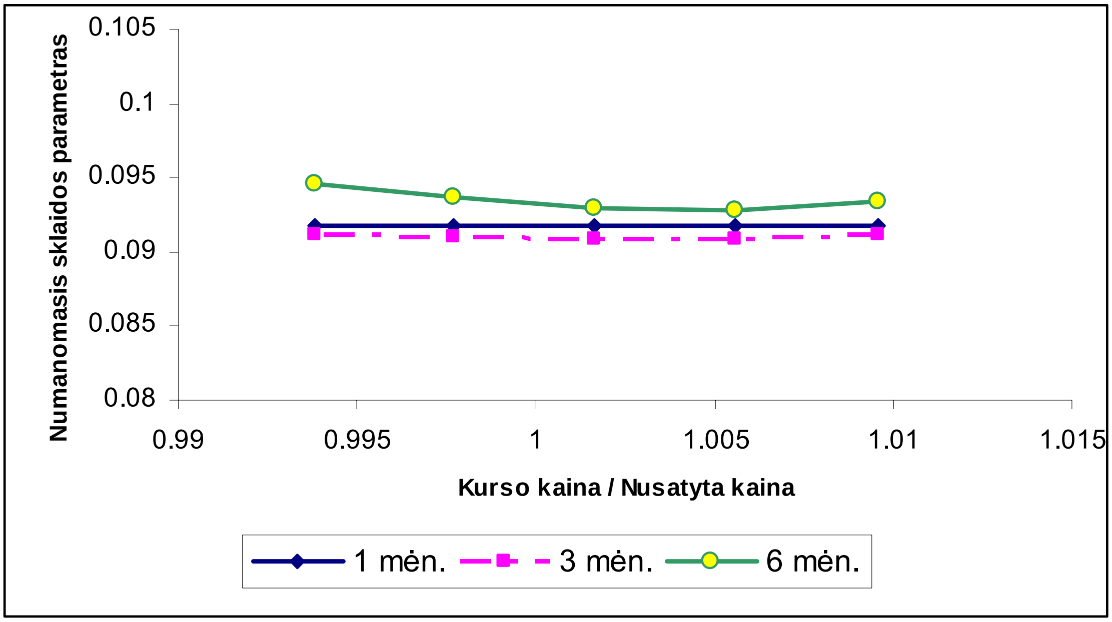
4 pav. Hestono modelio numanomojo sklaidos parametro paviršius (2004-04-30)



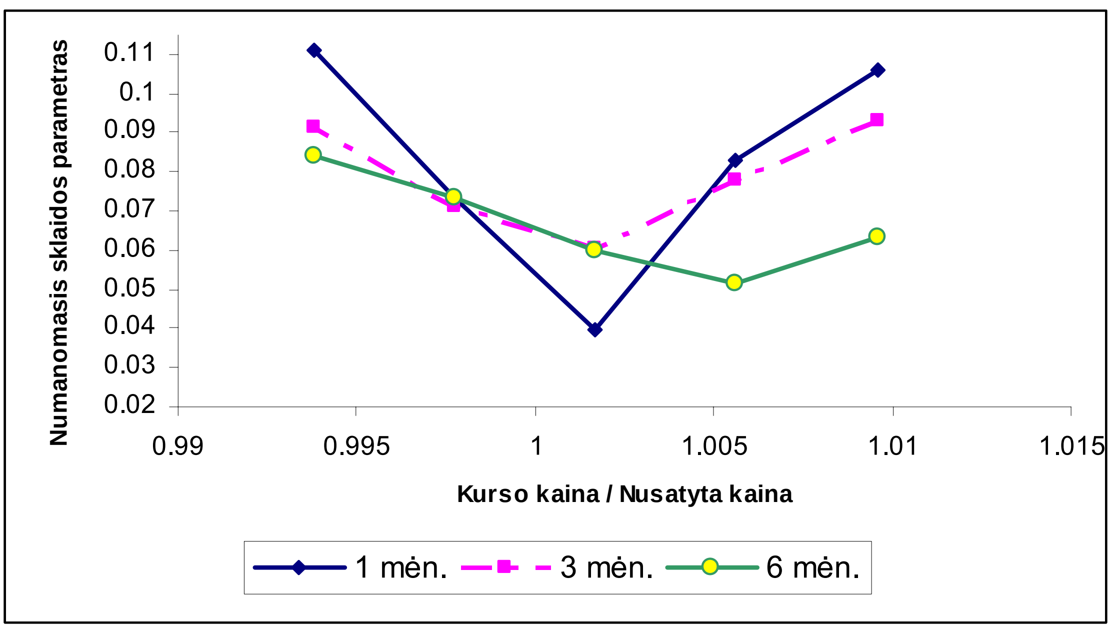
5 pav. Logaritminio Ornsteino-Uhlenbecko modelio numanomojo sklaidos parametro paviršius (2004-04-30)



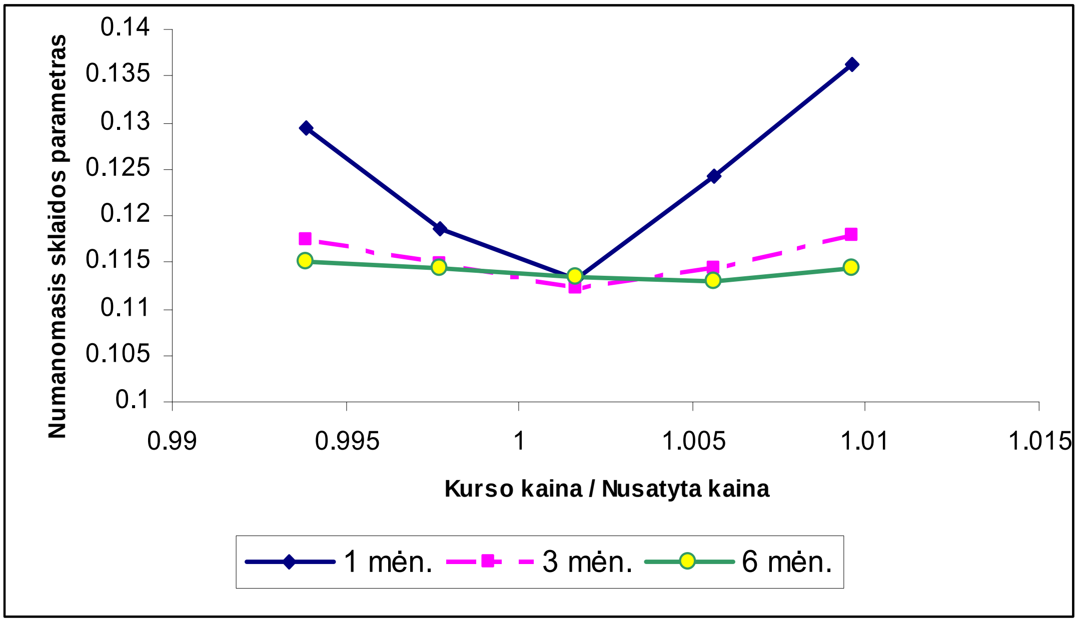
6 pav. Blacko-Scholeso modelio numanomojo sklaidos parametro šypsenos (2004-01-07)



7 pav. Hullo-White'o modelio numanomojo sklaidos parametro šypsenos (2004-01-07)



8 pav. Hestono modelio numanomojo sklaidos parametro šypsenos (2004-01-07)



9 pav. Logaritminio Ornseino-Uhlenbecko modelio numanomojo sklaidos parametro šypsenos (2004-01-07)

1 lentelė

EUR/USD kurso opcionų vidutinės kainos

Pelningumas $\left(x=\frac{S}{K}-1\right)$	**Laikas iki pasirinkimo sandorio įgyvendinimo**		
	Trumpas (1 mėn.)	**Vidutinis (3 mėn.)**	**Ilgas (6 mėn.)**
Gilūs OTM **(x < – 0.01)**	0.01148	0.01985	0.0281
OTM **(–0.01 < x < –0.005)**	0.0147	0.02351	0.03203
ATM **(–0.005 < x < –0.005)**	0.01591	0.02475	0.03324
ITM **(0.005 < x < 0.01)**	0.01855	0.02729	0.03571

2 lentelė

Parametrų įverčiai

Terminas	**Hullo-White‘o modeliui**			**Hestono modeliui**				**Log. OU modeliui**		
	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{p}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\alpha}$	$\ln\overline{\sigma}$	$\hat{\beta}$
1 mėn.	0,0727	0,1991	0,4637	2,2844	0,3304	0,5957	0	26.1683	-3.3751	0.5637
3 mėn.	0,0382	0,1654	0,3488	1,3815	0,3194	0,4947	0	34.2991	-3.898	0.502
6 mėn.	0,0292	0,1341	0,3022	1,4919	0,3274	0,538	0	19.2983	-3.4032	0.2597

3 lentelė

Numanomojo sklaidos parametro reikšmių palyginimas

Pelningumas $\left(x = \frac{S}{K} - 1\right)$	**Modelis**	**Laikas iki opciono įgyvendinimo**			**Viso**
		Trumpas	**Vidutinis**	**Ilgas**	
Gilūs OTM **($x < -0.01$)**	Blacko-Scholeso Hullo-White‘o Hestono Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.1425 0.1432 0.1661 0.1616	0.1209 0.1218 0.1269 0.126	0.1125 0.1126 0.1039 0.1197	0.1253 0.1259 0.1323 0.1358
OTM **($-0.01 < x < -0.005$)**	Blacko-Scholeso Hullo-White‘o Hestono Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.1266 0.1238 0.1194 0.137	0.1107 0.1106 0.0966 0.1219	0.1052 0.1049 0.0872 0.1186	0.1141 0.1131 0.1011 0.1258
ATM **($-0.005 < x < -0.005$)**	Blacko-Scholeso Hullo-White‘o Hestono Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.1103 0.1084 0.0636 0.1214	0.1012 0.1012 0.0636 0.1174	0.0985 0.0982 0.0661 0.1167	0.1033 0.1026 0.063 0.1185
ITM **($0.005 < x < 0.01$)**	Blacko-Scholeso Hullo-White‘o Hestono Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.0868 0.0945 0.0975 0.1374	0.0901 0.0941 0.0907 0.1208	0.0912 0.0934 0.0603 0.1175	0.0894 0.094 0.0898 0.1252
Viso	Blacko-Scholeso Hullo-White‘o Hestono Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.1176 0.1177 0.1048 0.1368	0.1061 0.1069 0.0849 0.1209	0.1021 0.1023 0.0785 0.1179	

4 lentelė

Įkainotų pasirinkimo sandorių palyginimas

Pelningumas $\left(x = \frac{S}{K} - 1\right)$	Modelis	Laikas iki opciono įgyvendinimo		
		Trumpas	**Vidutinis**	**Ilgas**
Gilūs OTM (x < – 0.01)	Blacko-Scholeso Hullo-White‘o Hestono Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.01129 0.01143 0.00364 0.01136	0.01965 0.02004 0.00853 0.01546	0.02781 0.02812 0.01471 0.0288
OTM (–0.01 < x < –0.005)	Blacko-Scholeso Hullo-White‘o Hestono Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.01233 0.01238 0.00392 0.01037	0.02084 0.02117 0.00793 0.01799	0.02917 0.02939 0.01399 0.02694
ATM (–0.005 < x < –0.005)	Blacko-Scholeso Hullo-White‘o Hestono Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.01422 0.01414 0.00383 0.01224	0.02276 0.0228 0.00606 0.02061	0.03106 0.03095 0.01212 0.0303
ITM (0.005 < x < 0.01)	Blacko-Scholeso Hullo-White‘o Hestono Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.01815 0.01817 0.01261 0.01974	0.0264 0.0265 0.01354 0.02664	0.03448 0.0345 0.01638 0.03503

5 lentelė

Santykinės opcionų įkainojimo paklaidos

Pelningumas $\left(x = \frac{S}{K} - 1\right)$	**Modelis**	**Laikas iki opciono įgyvendinimo**			**Viso**
		Trumpas	**Vidutinis**	**Ilgas**	
Gilūs OTM **(x < – 0.01)**	Blacko-Scholeso	0.0381	0.0194	0.0156	0.0244
	Hullo-White‘o	0.0352	0.0236	0.0152	0.0246
	Hestono	0.6935	0.2018	0.2064	0.3672
	Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.1828	0.2311	0.1682	0.194
OTM **(–0.01 < x < –0.005)**	Blacko-Scholeso	0.0473	0.0259	0.0175	0.0302
	Hullo-White‘o	0.0443	0.0245	0.015	0.0279
	Hestono	0.3365	0.2309	0.2507	0.2726
	Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.1971	0.1769	0.1192	0.1644
ATM **(–0.005 < x < –0.005)**	Blacko-Scholeso	0.0397	0.0199	0.0171	0.0256
	Hullo-White‘o	0.038	0.0231	0.0156	0.0255
	Hestono	0.3426	0.343	0.2795	0.3284
	Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.1884	0.1248	0.091	0.1347
ITM **(0.005 < x < 0.01)**	Blacko-Scholeso	0.0614	0.0348	0.0238	0.04
	Hullo-White‘o	0.0637	0.0394	0.0251	0.04
	Hestono	0.3405	0.2494	0.2332	0.3077
	Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.1859	0.0934	0.0918	0.1236
Viso	Blacko-Scholeso	0.0441	0.0232	0.0179	
	Hullo-White‘o	0.0425	0.026	0.0169	
	Hestono	0.4294	0.3127	0.3046	
	Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.1882	0.1564	0.1158	

6 lentelė

Vidutinės kvadratinės opcionų įkainojimo paklaidos

Pelningumas $\left(x = \frac{S}{K} - 1\right)$	**Modelis**	**Laikas iki opciono įgyvendinimo**			**Viso**
		Trumpas	**Vidutinis**	**Ilgas**	
Gilūs OTM (***x*** **< – 0.01)**	Blacko-Scholeso	0.00055	0.00048	0.00057	0.00053
	Hullo-White‘o	0.00052	0.00056	0.00055	0.00055
	Hestono	0.00812	0.01161	0.01374	0.01139
	Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.00277	0.0052	0.00541	0.00462
OTM **(–0.01 <** ***x*** **< –0.005)**	Blacko-Scholeso	0.00071	0.00065	0.00066	0.00067
	Hullo-White‘o	0.00067	0.00074	0.00059	0.00067
	Hestono	0.00924	0.01359	0.01591	0.0132
	Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.00377	0.00476	0.0043	0.0043
ATM **(–0.005 <** ***x*** **< –0.005)**	Blacko-Scholeso	0.00066	0.00056	0.00064	0.00062
	Hullo-White‘o	0.00062	0.00077	0.00063	0.00068
	Hestono	0.01086	0.01699	0.01929	0.01611
	Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.00335	0.00358	0.00346	0.00346
ITM **(0.005 <** ***x*** **< 0.01)**	Blacko-Scholeso	0.00122	0.00099	0.00092	0.00105
	Hullo-White‘o	0.00126	0.00105	0.00107	0.00116
	Hestono	0.00549	0.01244	0.01776	0.01291
	Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.00409	0.00295	0.00384	0.00366
Viso	Blacko-Scholeso	0.00076	0.00066	0.00068	
	Hullo-White‘o	0.00074	0.00073	0.00068	
	Hestono	0.00923	0.01448	0.01717	
	Log. Ornsteino-Uhlenbecko	0.00343	0.00419	0.00424	

2 PRIEDAS. PROGRAMŲ TEKSTAI

Programos VolatilitySmile.xls tekstas:

```
'Programos BS_Sypsena pagalba breziama sypsena pagal Black-Scholes modeli
'---------- 1 ----------

Sub Pradzia(ByRef n As Long)
    Dim ta
    Dim X_sk As Long

    Sheets("BlackScholes").Select
    Range("K1:N10").Select
    Selection.ClearContents
    Range("A1").Select

    Sheets("BlackScholes").Select
    Sheets("BlackScholes").Cells(1, 11).Value = " (S / K) "
    Sheets("BlackScholes").Cells(1, 12).Value = "Numanomasis kintamumo parametras (1 mðn.)"
    Sheets("BlackScholes").Cells(1, 13).Value = "Numanomasis kintamumo parametras (3 mðn.)"
    Sheets("BlackScholes").Cells(1, 14).Value = "Numanomasis kintamumo parametras (6 mðn.)"

    Set Lang = Sheets("BlackScholes").Cells(2, 6).CurrentRegion

    X_sk = Lang.Rows.Count
    n = X_sk - 2

    For i = 0 To n
        Cells((i + 2), 11).Value = Cells(2, 2).Value / Cells((i + 2), 6).Value
    Next i

    MsgBox "Numanomojo kintamumo parametro sypsena, pagal EUR/USD kurso opcionø duomenis", , "Pranesimas"


End Sub

Function NormalStand(ByVal vid As Double, ByVal disp As Double, ByVal x As Double) As Double
```

```
    Dim q, N1, gamma, pi As Double
    Dim a1, a2, a3, a4, a5 As Double
    gamma = 0.2316419
    pi = 3.1415927
    a1 = 0.31938153
    a2 = -0.356563782
    a3 = 1.781477937
    a4 = -1.821255978
    a5 = 1.330274429

    If (x >= 0) Then
        q = 1 / (1 + gamma * x)
        N1 = Exp(-(x * x) / 2) / Sqr(2 * pi)

        NormalStand = 1 - N1 * (a1 * q + a2 * (q ^ 2) + a3 * (q ^ 3) + a4 * (q ^ 4) + a5 * (q ^ 5))
    Else
        q = 1 / (1 + gamma * (-x))  'argumenta x keiciame -x
        N1 = Exp(-(x * x) / 2) / Sqr(2 * pi)
        NormalStand = N1 * (a1 * q + a2 * (q ^ 2) + a3 * (q ^ 3) + a4 * (q ^ 4) + a5 * (q ^ 5))
    End If

End Function

Sub BlackScholesCall(ByRef diff, ByRef CallTeor, ByVal K, ByVal T, ByVal So, ByVal sigma, _
                    ByVal rBase, ByVal r2)

    Dim d1, d2 As Double
    Dim e, pi As Double
    Dim pagalb1, pagalb2, pagalb3, pagalb4 As Double

    e = 2.7182818
    pi = 3.1415927

    d1 = (Log(So / K) / Log(e) + (r2 - rBase) * T + (sigma * sigma / 2) * T) / (sigma * Sqr(T))
    d2 = d1 - sigma * Sqr(T)

    'Skaiciuojama teorine Europietiskojo Call opciono kaina, naudojant BS formule
    CallTeor = (So * Exp(-rBase * T) * NormalStand(0, 1, d1) - K * Exp(-r2 * T) * NormalStand(0, 1, d2))
```

```
    'Skaiciuoja Europietiskojo Call opciono isvestine kintamumo parametro atzvilgiu
    diff = So * Sqr(T) * NormalStand(0, 1, d1)

End Sub

Function ImplVolatility(ByVal CallRinkos, ByVal K, ByVal T, ByVal So, ByVal rBase, _
                        ByVal r2) As Double

    Dim sigma As Double
    Dim acc As Double
    Dim diff, CallTeor As Double
    Dim i, MaxIt As Integer

    acc = 0.0000001
    i = 0
    MaxIt = 1000

    If ((K < 0) Or (T < 0) Or (So < 0) Or (rBase < 0) Or (r2 < 0) Or _
       (CallRinkos <= (So - K * Exp((-r2) * T))) Or (CallRinkos > (So * Exp((-rBase) * T)))) Then
       ImplVolatility = 0
       MsgBox "Pradiniai duomenys nekorektiÆki", , "PraneÆimas"
    End If

    sigma = Sqr(2 * Abs(Log(So / K) + (-r2) * T) / T)

    Do While (Abs(CallTeor - CallRinkos) > acc) And (i < MaxIt)
       BlackScholesCall diff, CallTeor, K, T, So, sigma, rBase, r2
       sigma = sigma - (CallTeor - CallRinkos) / diff
       'Kada sigma labai maza, diff gali buti lygi nuliui
       'reiketu naudoti geresni algoritma.
       i = i + 1
    Loop
    If (i = MaxIt) Then
       ImplVolatility = 0
       MsgBox "Nerasta numanomojo kintamumo parametro reikÆmð prie norimo tikslumo", , "PraneÆimas"
    End If

    ImplVolatility = sigma
```

```
End Function

Sub BS_Sypsena()
'
' BS_Sypsena Macro
' Macro recorded 2004.05.05 by Akvilina
'
Dim n As Long
Dim i, j, NM As Integer
Dim CallRinkos, K, T, So As Double
Dim rBase, r2 As Double



    Pradzia n

    So = Cells(2, 2).Value

    For j = 0 To 2
        NM = Cells(3, 2).Value
        T = Cells(3, (3 + j)).Value / NM
        rBase = Cells(4, (3 + j)).Value
        r2 = Cells(5, (3 + j)).Value
        For i = 0 To n
            CallRinkos = Cells((i + 2), (7 + j)).Value
            K = Cells((i + 2), 6).Value
            Cells((i + 2), (12 + j)).Value = ImplVolatility(CallRinkos, K, T, So, rBase, r2)
        Next i
    Next j

'
End Sub

'Programos HW_Sypsena pagalba breziama sklaidos parametro sypsena pagal Hull-White modeli
'---------- 2 ----------
Dim sigma1, sigma2, p As Double

Sub Pradzia(ByRef n As Long)
    Dim X_sk As Long
```

```
    Sheets("HullWhite").Select
    Range("K1:N10").Select
    Selection.ClearContents
    Range("A1").Select

    Sheets("HullWhite").Select
    Sheets("HullWhite").Cells(1, 11).Value = " (S / K) "
    Sheets("HullWhite").Cells(1, 12).Value = "Numanomasis sklaidos parametras (1 men.)"
    Sheets("HullWhite").Cells(1, 13).Value = "Numanomasis sklaidos parametras (3 men.)"
    Sheets("HullWhite").Cells(1, 14).Value = "Numanomasis sklaidos parametras (6 men.)"

    Set Lang = Sheets("HullWhite").Cells(2, 6).CurrentRegion

    X_sk = Lang.Rows.Count
    n = X_sk - 5
    Cells(12, 2).Value = n

    For i = 0 To n
      Cells((i + 2), 11).Value = Cells(2, 2).Value / Cells((i + 2), 6).Value
    Next i

    MsgBox "Numanomojo sklaidos parametro sypsena, pagal EUR/USD kurso opcionø duomenis", , "Pranesimas"

End Sub

Sub Kontrole(ByVal sk As Integer)
    Dim ta1, ta2, ta3

    ta3 = InputBox("Áveskite tikimybe", "Ávedimas", Cells(7, (3 + sk)).Value)
    If Not IsNumeric(ta3) Then
      ta3 = InputBox("Nurodykite naujà reiksmí," & Chr(13) & _
            " senoji reiksme - " & ta3, "Kontrolš", Cells(7, (3 + sk)).Value)
    End If
    If Not IsNumeric(ta3) Then
      MsgBox "Reiksme liko nepakeista ", , "Pranesimas"
      p = Cells(7, (3 + sk)).Value
    Else: p = ta3
    End If
```

```
    ta1 = InputBox("Áveskite pirmàjà sklaidos parametro reiksme (sigma1)", "Ávedimas", Cells(8, (3 + sk)).Value)
    If Not IsNumeric(ta1) Then
        ta1 = InputBox("Nurodykite naujà reiksmí," & Chr(13) & _
                " senoji reiksme - " & ta1, "Kontrole", Cells(8, (3 + sk)).Value)
    End If
    If Not IsNumeric(ta) Then
        MsgBox "ReikÇmš liko nepakeista ", , "PraneÇimas"
        sigma1 = Cells(8, (3 + sk)).Value
    Else: sigma1 = ta1
    End If

    ta2 = InputBox("Áveskite antràjà sklaidos parametro reikÇmí (sigma2)", "Ávedimas", Cells(9, (3 + sk)).Value)
    If Not IsNumeric(ta2) Then
        ta2 = InputBox("Nurodykite naujà reiksmí," & Chr(13) & _
                " senoji reiksme - " & ta2, "Kontrole", Cells(9, (3 + sk)).Value)
    End If
    If Not IsNumeric(ta2) Then
        MsgBox "ReikÇme liko nepakeista ", , "PraneÇimas"
        sigma2 = Cells(9, (3 + sk)).Value
    Else: sigma2 = ta2
    End If

End Sub

Function NormalStand(ByVal vid As Double, ByVal disp As Double, ByVal x As Double) As Double

    Dim q, N1, gamma, pi As Double
    Dim a1, a2, a3, a4, a5 As Double
    gamma = 0.2316419
    pi = 3.1415927
    a1 = 0.31938153
    a2 = -0.356563782
    a3 = 1.781477937
    a4 = -1.821255978
    a5 = 1.330274429

    If (x >= 0) Then
        q = 1 / (1 + gamma * x)
        N1 = Exp(-(x * x) / 2) / Sqr(2 * pi)
```

```
        NormalStand = 1 - N1 * (a1 * q + a2 * (q ^ 2) + a3 * (q ^ 3) + a4 * (q ^ 4) + a5 * (q ^ 5))
    Else
        q = 1 / (1 + gamma * (-x))  'argumenta x keiciame -x
        N1 = Exp(-(x * x) / 2) / Sqr(2 * pi)
        NormalStand = N1 * (a1 * q + a2 * (q ^ 2) + a3 * (q ^ 3) + a4 * (q ^ 4) + a5 * (q ^ 5))
    End If

End Function

Function BlackSholes_Call(ByVal K, ByVal T, ByVal So, ByVal sigma, ByVal rBase, _
                    ByVal r2) As Double

    Dim d1, d2 As Double
    Dim e, pi As Double
    e = 2.7182818
    pi = 3.1415927

    d1 = (Log(So / K) / Log(e) + (r2 - rBase) * T + (sigma * sigma / 2) * T) / (sigma * Sqr(T))
    d2 = d1 - sigma * Sqr(T)

    'Skaiciuojama teorine Europietiskojo Call opciono kaina, naudojant BS formule
    BlackSholes_Call = (So * Exp(-rBase * T) * NormalStand(0, 1, d1) - _
                    K * Exp(-r2 * T) * NormalStand(0, 1, d2))

End Function

Function BlackSholes_diff(ByVal K, ByVal T, ByVal So, ByVal sigma, ByVal rBase, _
                    ByVal r2) As Double
    Dim d1, d2 As Double
    Dim e, pi As Double
    e = 2.7182818
    pi = 3.1415927

    d1 = (Log(So / K) + (r2 - rBase) * T + (sigma * sigma / 2) * T) / (sigma * Sqr(T))
    d2 = d1 - sigma * Sqr(T)

    'Skaiciuoja Europietiskojo Call opciono isvestine sklaidos parametro atzvilgiu
    BlackSholes_diff = So * Sqr(T) * NormalStand(0, 1, d1)
```

```
End Function

Function ImplVolatility(ByVal CallRinkos, ByVal K, ByVal T, ByVal So, ByVal rBase, _
                        ByVal r2) As Double

    Dim sigma As Double
    Dim acc As Double
    Dim diff, CallTeor, CallTeorHW As Double
    Dim i, MaxIt As Integer

    acc = 0.0000001
    i = 0
    MaxIt = 100

    If ((K < 0) Or (T < 0) Or (So < 0) Or (rBase < 0) Or (r2 < 0) Or _
        (CallRinkos <= (So - K * Exp((-r2) * T))) Or (CallRinkos > (So * Exp((-rBase) * T)))) Then
        ImplVolatility = 0
        MsgBox "Pradiniai duomenys nekorektiÆki", , "PraneÆimas"
    End If

    sigma = Sqr(2 * Abs(Log(So / K) + (r2 - rBase) * T) / T)

    CallTeorHW = p * BlackSholes_Call(K, T, So, sigma1, rBase, r2) + _
                (1 - p) * BlackSholes_Call(K, T, So, sigma2, rBase, r2)
    CallRinkos = CallTeorHW

    Do While (Abs(CallTeor - CallRinkos) > acc) And (i < MaxIt)
        CallTeor = BlackSholes_Call(K, T, So, sigma, rBase, r2)
        diff = BlackSholes_diff(K, T, So, sigma, rBase, r2)
        sigma = sigma - (CallTeor - CallTeorHW) / diff
        'Kada sigma labai maza, diff gali buti lygi nuliui
        'reiketu naudoti geresni algoritma.
        i = i + 1
    Loop
    If (i = MaxIt) Then
        ImplVolatility = 0
        MsgBox "Nerasta numanomojo sklaidos parametro reikÆmð prie norimo tikslumo", , "PraneÆimas"
    End If
```

```
    ImplVolatility = sigma

End Function

Sub HW_Sypsena()
'
' HW_Sypsena Macro
' Macro recorded 2004.05.06 by Akvilina
'
Dim n As Long
Dim i, j, NM As Integer
Dim CallRinkos, K, T, So As Double
Dim rBase, r2 As Double


    Pradzia n

    So = Cells(2, 2).Value

    For j = 0 To 2
        NM = Cells(3, 2).Value
        T = Cells(3, (3 + j)).Value / NM
        rBase = Cells(4, (3 + j)).Value
        r2 = Cells(5, (3 + j)).Value
        Kontrole j
        For i = 0 To n
            CallRinkos = Cells((i + 2), (7 + j)).Value
            K = Cells((i + 2), 6).Value
            Cells((i + 2), (12 + j)).Value = ImplVolatility(CallRinkos, K, T, So, rBase, r2)
        Next i
    Next j
'
End Sub

'Programos Heston_Sypsena pagalba breziama sklaidos parametro sypsena pagal Heston modeli
'---------- 3 ----------
Dim kappa, tetta, eta, rho As Double
```

```
Sub Pradzia(ByRef n As Long)
    Dim X_sk As Long

    Sheets("Heston").Select
    Range("K1:N10").Select
    Selection.ClearContents
    Range("A1").Select

    Sheets("Heston").Select
    Sheets("Heston").Cells(1, 11).Value = " (S / K) "
    Sheets("Heston").Cells(1, 12).Value = "Numanomasis sklaidos parametras (1 mðn.)"
    Sheets("Heston").Cells(1, 13).Value = "Numanomasis sklaidos parametras (3 mðn.)"
    Sheets("Heston").Cells(1, 14).Value = "Numanomasis sklaidos parametras (6 mðn.)"

    Set Lang = Sheets("Heston").Cells(2, 6).CurrentRegion

    X_sk = Lang.Rows.Count
    n = X_sk - 5

    For i = 0 To n
        Cells((i + 2), 11).Value = Cells(2, 2).Value / Cells((i + 2), 6).Value
    Next i

    MsgBox "Numanomojo sklaidos parametro Æypsena, pagal EUR/USD kurso opcionø duomenis", , "PraneÆimas"

End Sub

Sub Kontrole(ByVal sk As Integer)
    Dim ta1, ta2, ta3, ta4

    MsgBox "Numanomojo sklaidos parametro Æypsena, pagal EUR/USD kurso opcionø duomenis", , "PraneÆimas"
    ta1 = InputBox("Áveskite gráþimo prie sigma vidurkio reikÇmí (kappa)", "Ávedimas", Cells(7, (3 + sk)).Value)
    If Not IsNumeric(ta1) Then
        ta1 = InputBox("Nurodykite naujà reiksmí," & Chr(13) & _
                " senoji reiksmš - " & ta1, "Kontrolš", Cells(7, (3 + sk)).Value)
    End If
    If Not IsNumeric(ta) Then
        MsgBox "Kappa reikÇmš liko nepakeista ", , "PraneÇimas"
```

```
        kappa = Cells(7, (3 + sk)).Value
    Else: kappa = ta1
    End If

    ta2 = InputBox("Áveskite sigma vidurkio tendencijos variacijos lygio reikÇmí (theta)", "Ávedimas", Cells(8, (3 +
sk)).Value)
    If Not IsNumeric(ta2) Then
        ta2 = InputBox("Nurodykite naujà reiksmí," & Chr(13) & _
                " senoji reiksmš - " & ta2, "Kontrolš", Cells(8, (3 + sk)).Value)
    End If
    If Not IsNumeric(ta2) Then
        MsgBox "Tetta reikÇmš liko nepakeista ", , "PraneÇimas"
        tetta = Cells(8, (3 + sk)).Value
    Else: tetta = ta2
    End If

    ta3 = InputBox("Áveskite sklaidos parametro variacijos reikÇmí (eta)", "Ávedimas", Cells(9, (3 + sk)).Value)
    If Not IsNumeric(ta3) Then
        ta3 = InputBox("Nurodykite naujà reiksmí," & Chr(13) & _
                " senoji reiksmš - " & ta3, "Kontrolš", Cells(9, (3 + sk)).Value)
    End If
    If Not IsNumeric(ta3) Then
        MsgBox "Eta reikÇmš liko nepakeista ", , "PraneÇimas"
        eta = Cells(9, (3 + sk)).Value
    Else: eta = ta3
    End If

    ta4 = InputBox("Áveskite sklaidos parametro variacijos reikÇmí (rho)", "Ávedimas", 0)
    If Not IsNumeric(ta4) Then
        ta4 = InputBox("Nurodykite naujà reiksmí," & Chr(13) & _
                " senoji reiksmš - " & ta4, "Kontrolš", 0)
    End If
    If Not IsNumeric(ta4) Then
        MsgBox "Rho reikÇmš liko nepakeista ", , "PraneÇimas"
        rho = 0
    Else: rho = ta4
    End If
```

```
End Sub

Function UniformRandom(ByVal min As Double, ByVal max As Double) As Double

    Dim IA, IM, IQ As Long
    Dim AM, NDIV, EPS, RNMX As Double
    Dim IR, NTAB As Integer

    Dim j As Integer
    Dim K As Long
    ReDim iv(0 To NTAB) As Long
    Static iy, idum As Long
    Dim temp As Double

        IA = 16807
        IM = 2147483647
        AM = 1 / IM
        IQ = 127773
        IR = 2836
        NTAB = 32
        NDIV = (1 + (IM - 1)) / NTAB
        EPS = 0.00000012   '1.2e-7
        RNMX = 1 - EPS

        If (max <= min) Then    'Atsitiktiniu skaiciu generatorius
            Randomize
            idum = Rnd
            If (idum < 1) Then
                idum = 1
            End If 'idum negali buti lygus 0
            j = NTAB + 7
            Do While (j >= 0)
                K = idum / IQ
                idum = IA * (idum - K * IQ) - IR * K
                If (idum < 0) Then
                    idum = idum + IM
                End If
                If (j < NTAB) Then
                    iv(j) = idum
```

```
            End If
            j = j - 1
         Loop
         iy = iv(0)
      End If
      K = idum / IQ
      idum = IA * (idum - K * IQ) - IR * K
      If (idum < 0) Then idum = idum + IM
      j = iy / (1 + ((IM - 1) / NTAB))
      iy = iv(j)
      iv(j) = idum
      If ((temp = AM * iy) > RNMX) Then
         UniformRandom = RNMX * (max - mn) + min
      Else
         UniformRandom = temp * (max - mn) + min
      End If

   Erase iv

End Function

Function NormalRandom(ByVal vid, ByVal disp) As Double

   Static iset As Integer
   Static gset As Double
   Dim fac, rsq, v1, v2 As Double

   If (iset = 0) Then
      Do While (rsq >= 1) Or (rsq = 0)
         Randomize
         v1 = 2 * Rnd - 1
         Randomize
         v2 = 2 * Rnd - 1
         'v1 = 2 * UniformRandom(0, 1) - 1
         'v1 = 2 * UniformRandom(0, 1) - 1
         rsq = v1 * v1 + v2 * v2
      Loop
      fac = Sqr(-2 * Log(rsq) / rsq)
      gset = v1 * fac
```

```
        iset = 1
        NormalRandom = vid + disp * v2 * fac
    Else
        iset = 0
        NormalRandom = vid + disp * gset
    End If

    'Cells(10, 1).Value = iset
    'Cells(11, 1).Value = gset

End Function

Function NormalStand(ByVal vid As Double, ByVal disp As Double, ByVal x As Double) As Double

    Dim q, N1, gamma, pi As Double
    Dim a1, a2, a3, a4, a5 As Double
    gamma = 0.2316419
    pi = 3.1415927
    a1 = 0.31938153
    a2 = -0.356563782
    a3 = 1.781477937
    a4 = -1.821255978
    a5 = 1.330274429

    If (x >= 0) Then
        q = 1 / (1 + gamma * x)
        N1 = Exp(-(x * x) / 2) / Sqr(2 * pi)

        NormalStand = 1 - N1 * (a1 * q + a2 * (q ^ 2) + a3 * (q ^ 3) + a4 * (q ^ 4) + a5 * (q ^ 5))
    Else
        q = 1 / (1 + gamma * (-x))  'argumenta x keiciame -x
        N1 = Exp(-(x * x) / 2) / Sqr(2 * pi)
        NormalStand = N1 * (a1 * q + a2 * (q ^ 2) + a3 * (q ^ 3) + a4 * (q ^ 4) + a5 * (q ^ 5))
    End If

End Function

Function SVHeston(ByVal S As Double, ByVal Vol As Double, ByVal K, ByVal T, ByVal sigma, _
            ByVal rBase, ByVal r2, ByVal NM) As Double
```

```
Dim i, j, Npath As Long
Dim verte, sk As Double
Dim St1, St2, St3 As Double
Dim Vol1, Vol2, Vol3, Vol4 As Double
Dim dt, mu As Double        'Laiko intervalas (metai)
Dim e1, e2 As Double        'Ats. neprikl. vienodai pasiskirste normalieji dydziai

dt = T / NM
St3 = T * NM
If (St3 >= 80) Then
   sk = 0.4
End If
If (30 < St3) And (St3 < 80) Then
   sk = 0.8
End If
If (10 < St3) And (St3 < 30) Then
   sk = 1.6
End If
Cells(14, 1).Value = dt
Cells(15, 1).Value = sk
Cells(16, 1).Value = T * NM
mu = 0
Npath = 10000
verte = 0
i = 0
Do While (i < Npath)  'i - trajektorijos numeris
   St1 = S
   Vol1 = sigma * sigma
   j = 0
   Do While (j < (48)) 'j - zingsnis palei trajektorija (NM)
      e1 = NormalRandom(0, 1)
      e1 = NormalRandom(0, 1)
      e2 = NormalRandom(0, 1)
      e2 = NormalRandom(0, 1)

      St1 = St1 * (1 + mu * dt + Sqr(Abs(Vol1) * dt) * e1)
      Vol1 = Vol1 + kappa * (tetta - Vol1) * dt + eta * Sqr(Abs(Vol1) * dt) * (rho * e1 + Sqr(1 - (rho ^ 2)) * e2)
```

```
        j = j + 1
      Loop
      If (St1 > K) Then
         verte = verte + (St1 - K)
      Else: verte = verte
      End If
      i = i + 1
   Loop

   SVHeston = Exp(-rBase * T) * (verte / Npath)

End Function

Function BlackSholes_Call(ByVal K, ByVal T, ByVal So, ByVal sigma, ByVal rBase, _
                    ByVal r2) As Double

   Dim d1, d2 As Double
   Dim e, pi As Double
   e = 2.7182818
   pi = 3.1415927

   d1 = (Log(So / K) / Log(e) + (r2 - rBase) * T + (sigma * sigma / 2) * T) / (sigma * Sqr(T))
   d2 = d1 - sigma * Sqr(T)

   'Skaiciuojama teorine Europietiskojo Call opciono kaina, naudojant BS formule
   BlackSholes_Call = (So * Exp(-rBase * T) * NormalStand(0, 1, d1) - _
                    K * Exp(-r2 * T) * NormalStand(0, 1, d2))

End Function

Function BlackSholes_diff(ByVal K, ByVal T, ByVal So, ByVal sigma, ByVal rBase, _
                    ByVal r2) As Double
   Dim d1, d2 As Double
   Dim e, pi As Double
   e = 2.7182818
   pi = 3.1415927

   d1 = (Log(So / K) / Log(e) + (r2 - rBase) * T + (sigma * sigma / 2) * T) / (sigma * Sqr(T))
   d2 = d1 - sigma * Sqr(T)
```

```
    'Skaiciuoja Europietiskojo Call opciono isvestine sklaidos parametro atzvilgiu
    BlackSholes_diff = So * Sqr(T) * NormalStand(0, 1, d1)

End Function

Function ImplVolatility(ByVal CallRinkos, ByVal K, ByVal T, ByVal So, ByVal rBase, _
                        ByVal r2, ByVal NM) As Double

    Dim sigma, Vol As Double
    Dim acc As Double
    Dim diff, CallTeor, CallTeorHeston As Double
    Dim i, MaxIt As Integer
    acc = 0.0000001
    i = 0
    MaxIt = 1000

    If ((K < 0) Or (T < 0) Or (So < 0) Or (rBase < 0) Or (r2 < 0) Or _
       (CallRinkos <= (So - K * Exp((-r2) * T))) Or (CallRinkos > (So * Exp((-rBase) * T)))) Then
       ImplVolatility = 0
       MsgBox "Pradiniai duomenys nekorektiÆki", , "PraneÆimas"
    End If

    sigma = Sqr(2 * Abs(Log(So / K) + (r2 - rBase) * T) / T)

    CallTeorHeston = SVHeston(So, Vol, K, T, sigma, rBase, r2, NM)
    CallRinkos = CallTeorHeston

    Do While (Abs(CallTeor - CallRinkos) > acc) And (i < MaxIt)
       CallTeor = BlackSholes_Call(K, T, So, sigma, rBase, r2)
       diff = BlackSholes_diff(K, T, So, sigma, rBase, r2)
       'Kada sigma labai maza, diff gali buti lygi nuliui
       'reiketu naudoti geresni algoritma.
       sigma = sigma - (CallTeor - CallTeorHeston) / diff
       i = i + 1
    Loop
    If (i = MaxIt) Then
       ImplVolatility = 0
       MsgBox "Nerasta numanomojo sklaidos parametro reikÆmð prie norimo tikslumo", , "PraneÆimas"
```

```
    End If

    ImplVolatility = sigma

End Function



Sub Heston_Sypsena()
'
' Heston_Sypsena Macro
' Macro recorded 2004.05.10 by Akvilina
'
Dim n As Long
Dim i, j, NM As Integer
Dim CallRinkos, K, T, So As Double
Dim rBase, r2 As Double



    Pradzia n

    So = Cells(2, 2).Value

    For j = 0 To 2
        NM = Cells(3, 2).Value
        T = Cells(3, (3 + j)).Value / NM
        rBase = Cells(4, (3 + j)).Value
        r2 = Cells(5, (3 + j)).Value
        Kontrole j
        For i = 0 To n
            CallRinkos = Cells((i + 2), (7 + j)).Value
            K = Cells((i + 2), 6).Value
            Cells((i + 2), (12 + j)).Value = ImplVolatility(CallRinkos, K, T, So, rBase, r2, NM)
        Next i
    Next j
    MsgBox "Numanomojo sklaidos parametro sypsena, pagal EUR/USD kurso opcionu duomenis", , "Pranesimas"
'
End Sub

'Programos LogOU_Sypsena pagalba breziama kintamumo parametro "sypsena" pagal LogOU modeli
```

```
'---------- 4 ----------
Dim alpha, vidut, beta, rho As Double


Sub Pradzia(ByRef n As Long)
    Dim X_sk As Long

    Sheets("LogOU").Select
    Range("K1:N10").Select
    Selection.ClearContents
    Range("A1").Select

    Sheets("LogOU").Select
    Sheets("LogOU").Cells(1, 11).Value = " (S / K) "
    Sheets("LogOU").Cells(1, 12).Value = "Numanomasis sklaidos parametras (1 mðn.)"
    Sheets("LogOU").Cells(1, 13).Value = "Numanomasis sklaidos parametras (3 mðn.)"
    Sheets("LogOU").Cells(1, 14).Value = "Numanomasis sklaidos parametras (6 mðn.)"

    Set Lang = Sheets("LogOU").Cells(2, 6).CurrentRegion

    X_sk = Lang.Rows.Count
    n = X_sk - 5
    Cells(12, 1).Value = n

    For i = 0 To n
        Cells((i + 2), 11).Value = Cells(2, 2).Value / Cells((i + 2), 6).Value
    Next i

    MsgBox "Numanomojo sklaidos parametro sypsena, pagal EUR/USD kurso opcionø duomenis", , "Pranesimas"

End Sub

Sub Kontrole()
Dim ta1, ta2, ta3, ta4

    MsgBox "Numanomojo sklaidos parametro sypsena, pagal EUR/USD kurso opcionø duomenis", , "Pranesimas"
    ta1 = InputBox("Áveskite gráþimo prie sigma vidurkio reikÇmí (alpha)", "Ávedimas", Cells(7, (3 + sk)).Value)
    If Not IsNumeric(ta1) Then
        ta1 = InputBox("Nurodykite naujà reiksme," & Chr(13) & _
```

```
                " senoji reiksmš - " & ta1, "Kontrolš", Cells(7, (3 + sk)).Value)
        End If
        If Not IsNumeric(ta) Then
           MsgBox "alpha reikÇmš liko nepakeista ", , "PraneÇimas"
           alpha = Cells(7, (3 + sk)).Value
        Else: alpha = ta1
        End If

        ta2 = InputBox("Áveskite sigma vidurkio tendencijos variacijos lygio reikÇmí (vidut)", "Ávedimas", Cells(8, (3 +
sk)).Value)
        If Not IsNumeric(ta2) Then
           ta2 = InputBox("Nurodykite naujà reiksmí," & Chr(13) & _
                " senoji reiksmš - " & ta2, "Kontrolš", Cells(8, (3 + sk)).Value)
        End If
        If Not IsNumeric(ta2) Then
           MsgBox "vidut reikÇmš liko nepakeista ", , "Pranesimas"
           vidut = Cells(8, (3 + sk)).Value
        Else: vidut = ta2
        End If

        ta3 = InputBox("Áveskite kintamumo parametro variacijos reikÇmí (beta)", "Ávedimas", Cells(9, (3 + sk)).Value)
        If Not IsNumeric(ta3) Then
           ta3 = InputBox("Nurodykite naujà reiksmí," & Chr(13) & _
                " senoji reiksmš - " & ta3, "Kontrolš", Cells(9, (3 + sk)).Value)
        End If
        If Not IsNumeric(ta3) Then
           MsgBox "Beta reiksme liko nepakeista ", , "Pranesimas"
           beta = Cells(9, (3 + sk)).Value
        Else: beta = ta3
        End If

        ta4 = InputBox("Áveskite kintamumo parametro variacijos reikÇmí (rho)", "Ávedimas", 0)
        If Not IsNumeric(ta4) Then
           ta4 = InputBox("Nurodykite naujà reiksmí," & Chr(13) & _
                " senoji reiksmš - " & ta4, "Kontrolš", 0)
        End If
        If Not IsNumeric(ta4) Then
           MsgBox "Rho reikÇmš liko nepakeista ", , "PraneÇimas"
           rho = 0
```

```
    Else: rho = ta4
    End If

End Sub

Function UniformRandom(ByVal min As Double, ByVal max As Double) As Double

    Dim IA, IM, IQ As Long
    Dim AM, NDIV, EPS, RNMX As Double
    Dim IR, NTAB As Integer

    Dim j As Integer
    Dim K As Long
    ReDim iv(0 To NTAB) As Long
    Static iy, idum As Long
    Dim temp As Double

        IA = 16807
        IM = 2147483647
        AM = 1 / IM
        IQ = 127773
        IR = 2836
        NTAB = 32
        NDIV = (1 + (IM - 1)) / NTAB
        EPS = 0.00000012   '1.2e-7
        RNMX = 1 - EPS

        If (max <= min) Then    'Atsitiktiniu skaiciu generatorius
            Randomize
            idum = Rnd
            If (idum < 1) Then
                idum = 1
            End If 'idum negali buti lygus 0
            j = NTAB + 7
            Do While (j >= 0)
                K = idum / IQ
                idum = IA * (idum - K * IQ) - IR * K
                If (idum < 0) Then
                    idum = idum + IM
```

```
            End If
            If (j < NTAB) Then
                iv(j) = idum
            End If
            j = j - 1
        Loop
        iy = iv(0)
    End If
    K = idum / IQ
    idum = IA * (idum - K * IQ) - IR * K
    If (idum < 0) Then idum = idum + IM
    j = iy / (1 + ((IM - 1) / NTAB))
    iy = iv(j)
    iv(j) = idum
    If ((temp = AM * iy) > RNMX) Then
        UniformRandom = RNMX * (max - mn) + min
    Else
        UniformRandom = temp * (max - mn) + min
    End If

  Erase iv

End Function

Function NormalRandom(ByVal vid, ByVal disp) As Double

  Static iset As Integer
  Static gset As Double
  Dim fac, rsq, v1, v2 As Double

  If (iset = 0) Then
    Do While (rsq >= 1) Or (rsq = 0)
        Randomize
        v1 = 2 * Rnd - 1
        Randomize
        v1 = 2 * Rnd - 1
        rsq = v1 * v1 + v2 * v2
    Loop
    fac = Sqr(-2 * Log(rsq) / rsq)
```

```
        gset = v1 * fac
        iset = 1
        NormalRandom = vid + disp * v2 * fac
    Else
        iset = 0
        NormalRandom = vid + disp * gset
    End If

End Function

Function NormalStand(ByVal vid As Double, ByVal disp As Double, ByVal x As Double) As Double

    Dim q, N1, gamma, pi As Double
    Dim a1, a2, a3, a4, a5 As Double
    gamma = 0.2316419
    pi = 3.1415927
    a1 = 0.31938153
    a2 = -0.356563782
    a3 = 1.781477937
    a4 = -1.821255978
    a5 = 1.330274429

    If (x >= 0) Then
        q = 1 / (1 + gamma * x)
        N1 = Exp(-(x * x) / 2) / Sqr(2 * pi)

        NormalStand = 1 - N1 * (a1 * q + a2 * (q ^ 2) + a3 * (q ^ 3) + a4 * (q ^ 4) + a5 * (q ^ 5))
    Else
        q = 1 / (1 + gamma * (-x))  'argumenta x keiciame -x
        N1 = Exp(-(x * x) / 2) / Sqr(2 * pi)
        NormalStand = N1 * (a1 * q + a2 * (q ^ 2) + a3 * (q ^ 3) + a4 * (q ^ 4) + a5 * (q ^ 5))
    End If

End Function

Function SVLogOU(ByVal S As Double, ByVal Vol As Double, ByVal K, ByVal T, ByVal sigma, _
                ByVal rBase, ByVal r2, ByVal NM) As Double

    Dim i, j As Integer
```

```
    Dim Npath As Long
    Dim verte As Double
    Dim St1, St2, St3, St4 As Double
    Dim Vol1, Vol2, Vol3, Vol4 As Double
    Dim dt, mu As Double        'Laiko intervalas (metai)
    Dim e1, e2 As Double        'Ats. neprikl. vienodai pasiskirste normalieji dydziai

    dt = T / NM
    mu = 0
    Npath = 100000
    verte = 0
    i = 0
    Do While (i < Npath)    'i - trajektorijos numeris
       St1 = S
       Vol1 = sigma * sigma
       j = 0
       Do While (j < 48) 'j - zingsnis palei trajektorija (NM)
          e1 = NormalRandom(0, 1)
          e1 = NormalRandom(0, 1)
          e2 = NormalRandom(0, 1)
          e2 = NormalRandom(0, 1)
          St1 = St1 * (1 + mu * dt + Exp(Vol1) * Sqr(dt) * e1)
          Vol1 = Vol1 + alpha * (vidut - Vol1) * dt + beta * Sqr(dt) * (rho * e1 + Sqr(1 - (rho ^ 2)) * e2)

          j = j + 1
       Loop
       If (St1 > K) Then
          verte = verte + (St1 - K)
       Else: verte = verte
       End If
       i = i + 1
    Loop

    'SVLogOU = (verte / 4) / Npath
    SVLogOU = Exp(-rBase * T) * (verte / Npath)

End Function

Function BlackSholes_Call(ByVal K, ByVal T, ByVal So, ByVal sigma, ByVal rBase, _
```

```
                  ByVal r2) As Double

  Dim d1, d2 As Double
  Dim e, pi As Double
  e = 2.7182818
  pi = 3.1415927

  d1 = (Log(So / K) / Log(e) + (r2 - rBase) * T + (sigma * sigma / 2) * T) / (sigma * Sqr(T))
  d2 = d1 - sigma * Sqr(T)

  'Skaiciuojama teorine Europietiskojo Call opciono kaina, naudojant BS formule
  BlackSholes_Call = (So * Exp(-rBase * T) * NormalStand(0, 1, d1) - _
                  K * Exp(-r2 * T) * NormalStand(0, 1, d2))

End Function

Function BlackSholes_diff(ByVal K, ByVal T, ByVal So, ByVal sigma, ByVal rBase, _
                  ByVal r2) As Double
  Dim d1, d2 As Double
  Dim e, pi As Double
  e = 2.7182818
  pi = 3.1415927

  d1 = (Log(So / K) / Log(e) + (r2 - rBase) * T + (sigma * sigma / 2) * T) / (sigma * Sqr(T))
  d2 = d1 - sigma * Sqr(T)

  'Skaiciuoja Europietiskojo Call opciono isvestine kintamumo parametro atzvilgiu
  BlackSholes_diff = So * Sqr(T) * NormalStand(0, 1, d1)

End Function

Function ImplVolatility(ByVal CallRinkos, ByVal K, ByVal T, ByVal So, ByVal rBase, _
                  ByVal r2, ByVal NM) As Double

  Dim sigma, Vol As Double
  Dim acc As Double
  Dim diff, CallTeor, CallTeorLogOU As Double
  Dim i, MaxIt As Integer
  acc = 0.0000001
```

```
    i = 0
    MaxIt = 100

    If ((K < 0) Or (T < 0) Or (So < 0) Or (rBase < 0) Or (r2 < 0) Or _
      (CallRinkos <= (So - K * Exp((-r2) * T))) Or (CallRinkos > (So * Exp((-rBase) * T)))) Then
      ImplVolatility = 0
      MsgBox "Pradiniai duomenys nekorektiÆki", , "PraneÆimas"
    End If

    sigma = Sqr(2 * Abs(Log(So / K) + (r2 - rBase) * T) / T)

    CallTeorLogOU = SVLogOU(So, Vol, K, T, sigma, rBase, r2, NM)
    CallRinkos = CallTeorLogOU

    Do While (Abs(CallTeor - CallRinkos) > acc) And (i < MaxIt)
      CallTeor = BlackSholes_Call(K, T, So, sigma, rBase, r2)
      diff = BlackSholes_diff(K, T, So, sigma, rBase, r2)
      'Kada sigma labai maza, diff gali buti lygi nuliui
      'reiketu naudoti geresni algoritma.
      sigma = sigma - (CallTeor - CallTeorLogOU) / diff
      i = i + 1
    Loop
    If (i = MaxIt) Then
      ImplVolatility = 0
      MsgBox "Nerasta numanomojo kintamumo parametro reikÆmð prie norimo tikslumo", , "PraneÆimas"
    End If

    ImplVolatility = sigma

End Function

Sub LogOU_Sypsena()
'
' LogOU_Sypsena Macro
' Macro recorded 5/10/2004 by Akvilina
'
Dim n As Long
Dim i, j, NM As Integer
Dim CallRinkos, K, T, So As Double
```

```
Dim rBase, r2 As Double


    Pradzia n

    So = Cells(2, 2).Value

    For j = 0 To 2
        NM = Cells(3, 2).Value
        T = Cells(3, (3 + j)).Value / NM
        rBase = Cells(4, (3 + j)).Value
        r2 = Cells(5, (3 + j)).Value
        Kontrole
        For i = 0 To n
            CallRinkos = Cells((i + 2), (7 + j)).Value
            K = Cells((i + 2), 6).Value
            Cells((i + 2), (12 + j)).Value = ImplVolatility(CallRinkos, K, T, So, rBase, r2, NM)
        Next i
    Next j

    MsgBox "Numanomojo sklaidos parametro sypsena, pagal EUR/USD kurso opcionø duomenis", , "Pranesimas"
'
End Sub
```

Programu EMM_Heston_param.sas ir EMM_LogOU_param.sas tekstas:

```
/*******************************************************************/
/*  Failo pavadinimas: EMM_Heston_param.SAS                        */
/*  Programos paskirtis: rasti stochastinio sklaidos parametro     */
/*               modelio (Heston) strukturiniu parametru ivercius  */
/*  Studente Akvilina Valaityte                                    */
/*  Data: 2004-05-25                                               */
/*******************************************************************/

/* ----- DUOMENYS, GARCH IVERTINIMAI IR VHAT  -------------------- */

/* ----- Apibreziamos n ir T reiksmes ---------------------------- */
      %let nobs=1000;         /* stebejimu skaicius duomenu rinkinyje */
    %let nsim=20000;    /* modeliavimo zingsniu skaicius */

/* ----- Generuojami Heston modelio duomenys --------------------- */
 data _tmpdata;
      a = 0.00063682; b = 0.9981; s = 0.00579013;
                                                 /* pradiniai param. iverciai */
      ll = 0.109; /* ll = sqrt(a /(1-b))  pradine sklaidos reiksme */
    do i=-10 to &nobs;
      u = rannor(101);
        z = rannor(98761);
            sigmasqr = a + b*(ll**2) + s*u;
            st = sqrt(sigmasqr);
        ll = st;                          /* modeliuojamas sklaid. param */
        y = st * z;                       /* modeliuojamos aktyvo grazos */
        if i > 0 then output;
      end;
 run;

 /* ----- Apytikslis skaiciavimas pagal GARCH(1,1) modeli -------- */
 proc autoreg data=_tmpdata outest=garchest;
      model y =  / noint garch=( q=1, p=1 ) ;
    output out=garchout cev=gsigmasq r=resid;
 run;

 /* ----- Skaiciuojama kovariaciju V matrica --------------------- */
 data vvalues;
      set garchout(keep=y gsigmasq resid);

      /* --- Skaiciuojami GARCH modelio rezultatai ----------*/
    score_1 = (-1 + y**2/gsigmasq) / gsigmasq;
    score_2 = (-1 + y**2/gsigmasq)*lag(gsigmasq) / gsigmasq;
    score_3 = (-1 + y**2/gsigmasq)*lag(y**2) / gsigmasq;

      array score{*} score_1-score_3;
    array v_t{*} v_t_1-v_t_6;
    array v{*} v_1-v_6;

      /* --- Skaiciuojamas vektoriu isorinis rezultatas ---- */
    do i=1 to 3;
      do j=i to 3;
```

```
            v_t{3*(i>1) + 2*(i>2)+j-i+1} = score{i}*score{j};
        end;
      end;

      /* --- Apskaiciuojamas ju vidurkis nuo t ------------- */
    do s = 1 to 6;
      v{s}+ v_t{s} / &nobs;
    end;
run;

/* ----- Sukuriamas duomenu rinkinys priimtinas PROC MODEL ------ */

/* ----- Paskutiniai stebejimai perkeliami i duomenu rinkini ---- */
proc transpose data=vvalues(firstobs=&nobs keep=v_1-v_6) out=tempv;
run;

/* ----- Pridedama lygtis ir instrumentu zymenys ---------------- */
data vhat;
      set tempv(drop=_name_);
    value = col1;
    drop col1;
    input _type_ $ eq_row $ eq_col $ inst_row $ inst_col $;
    datalines;
      gmm m1 m1 1 1  /* vienintelis instrumentas */
        gmm m1 m2 1 1
        gmm m2 m2 1 1
        gmm m1 m3 1 1
        gmm m2 m3 1 1
        gmm m3 m3 1 1
        ;
run;

/* ----- Randami EMM iverciai ----------------------------------- */

/* ----- Modeliuojamos paklaidu sekos pagal datastep ------------ */
data emm;
      set garchest(obs=1 keep = _mse_ _ah_0 _ah_1 _gh_1);
    do i=1 to &nsim;
      u = rannor(8801);
        z = rannor(9701);
        output;
      end;
    drop i;
run;

/* ----- Parametru ivertinimas pagal GMM ------------------------ */
  title 'EMM Iverciai';
proc model data=emm;
      parms a .00063682 b .9981 s .00579013;
    instrument _exog_ / intonly;

    /* --- Strukturinio modelio aprasymas ---------------- */
      lsigmasq = xlag(sigmasq, a);

      sigmasq = a + b * lsigmasq + s * u;

      sigmm = sqrt(sigmasq);

    ysim = sigmm * z;
```

```
    /* --- GARCH modelio sklaidos parametras ------------ */
    gsigmasq = _ah_0 + _gh_1*xlag(gsigmasq, _mse_) +
             _ah_1*xlag(ysim**2, _mse_);

  /* --- GARCH modelio rezultatai kaip momentu salygos - */
    eq.m1 = (-1 + ysim**2/gsigmasq) / gsigmasq;

    eq.m2 = (-1 + ysim**2/gsigmasq)*xlag(gsigmasq,_mse_)
                                                       / gsigmasq;

  eq.m3 = (-1 + ysim**2/gsigmasq)*xlag(ysim**2,_mse_)
                                                       / gsigmasq;

  /* --- GARCH rezultatai prilyginami ivertintam Vhat -- */
    /* -------------------------------- naudojantis GMM - */
    fit m1 m2 m3 / gmm vdata=vhat kernel=(bart,0,);
  bounds s > 0, -1 < b < 1; /* salygos */
run;
```

```
/****************************************************************/
/*  Failo pavadinimas: EMM_LogOU_param.SAS                      */
/*  Programos paskirtis: rasti stochastinio sklaidos parametro     */
/*               modelio (LogOU) strukturiniu parametru ivercius   */
/*  Studente Akvilina Valaityte                                  */
/*  Data: 2004-05-25                                             */
/****************************************************************/

/* ----- DUOMENYS, GARCH IVERTINIMAI IR VHAT  -------------------- */

/* ----- Apibreziamos n ir T reiksmes ---------------------------- */
      %let nobs=1000;         /* stebejimu skaicius duomenu rinkinyje */
    %let nsim=20000;    /* modeliavimo zingsniu skaicius */

/* ----- Generuojami Log. Ornstein-Uhlenbeck modelio duomenys ---- */
 data _tmpdata;
      a = -0.006371; b = 0.997116; s = 0.070014;
                                                         /* pradiniai param. iverciai
*/
      /*ll = exp(a /(1-b));         pradine sklaidos parametro reiksme */
      ll = 0.109;
    do i=-10 to &nobs;
      u = rannor(101);
        z = rannor(98761);
        lnssq = a + b*log(ll) + s*u;
        st = exp(lnssq);
        ll = st;                          /* modeliuojamas sklaid. param */
        y = st * z;                       /* modeliuojamos aktyvo grazos */
        if i > 0 then output;
      end;
 run;

 /* ----- Apytislis skaiciavimas pagal GARCH(1,1) modeli --------- */
 proc autoreg data=_tmpdata outest=garchest;
      model y =  / noint garch=( q=1, p=1 ) ;
    output out=garchout cev=gsigmasq r=resid;
 run;

 /* ----- Skaiciuojama kovariaciju V matrica --------------------- */
 data vvalues;
      set garchout(keep=y gsigmasq resid);

      /* --- Skaiciuojami GARCH modelio rezultatai ----------*/
    score_1 = (-1 + y**2/gsigmasq) / gsigmasq;
    score_2 = (-1 + y**2/gsigmasq)*lag(gsigmasq) / gsigmasq;
    score_3 = (-1 + y**2/gsigmasq)*lag(y**2) / gsigmasq;

      array score{*} score_1-score_3;
    array v_t{*} v_t_1-v_t_6;
    array v{*} v_1-v_6;

      /* --- Skaiciuojamas vektoriu isorinis rezultatas ---- */
    do i=1 to 3;
      do j=i to 3;
            v_t{3*(i>1) + 2*(i>2)+j-i+1} = score{i}*score{j};
        end;
      end;
```

```
      /* --- Apskaiciuojamas ju vidurkis nuo t ------------- */
    do s = 1 to 6;
      v{s}+ v_t{s} / &nobs;
    end;
run;

/* ----- Sukuriamas duomenu rinkinys priimtinas PROC MODEL ------ */

/* ----- Paskutiniai stebejimai perkeliami i duomenu rinkini ---- */
proc transpose data=vvalues(firstobs=&nobs keep=v_1-v_6) out=tempv;
run;

/* ----- Pridedama lygtis ir instrumentu zymenys ---------------- */
data vhat;
      set tempv(drop=_name_);
    value = col1;
    drop col1;
    input _type_ $ eq_row $ eq_col $ inst_row $ inst_col $;
    datalines;
      gmm m1 m1 1 1  /* vienintelis instrumentas */
        gmm m1 m2 1 1
        gmm m2 m2 1 1
        gmm m1 m3 1 1
        gmm m2 m3 1 1
        gmm m3 m3 1 1
        ;
run;

/* ----- Randami EMM iverciai ----------------------------------- */

/* ----- Modeliuojamos paklaidu sekos pagal datastep ------------ */
data emm;
      set garchest(obs=1 keep = _mse_ _ah_0 _ah_1 _gh_1);
    do i=1 to &nsim;
      u = rannor(8801);
        z = rannor(9701);
        output;
      end;
    drop i;
run;

/* ----- Parametru ivertinimas pagal GMM ------------------------ */
  title 'EMM Iverciai';
proc model data=emm;
      parms a -.006371 b .997116 s .070014;
      instrument _exog_ / intonly;

    /* --- Strukturinio modelio aprasymas ---------------- */
      lsigmasq = xlag(sigmasq,exp(a));

    lnsigmasq = a + b * log(lsigmasq) + s * u;

    sigmasq = exp(lnsigmasq);

    ysim = sqrt(sigmasq) * z;

      /* --- GARCH modelio sklaidos parametras ------------ */
      gsigmasq = _ah_0 + _gh_1*xlag(gsigmasq, _mse_) +
               _ah_1*xlag(ysim**2, _mse_);
```

```
   /* --- GARCH model rezultatai, kaip momentu salygos -- */
     eq.m1 = (-1 + ysim**2/gsigmasq) / gsigmasq;

     eq.m2 = (-1 + ysim**2/gsigmasq)*xlag(gsigmasq,_mse_)
                                                                    / gsigmasq;

   eq.m3 = (-1 + ysim**2/gsigmasq)*xlag(ysim**2,_mse_)
                                                                    / gsigmasq;

   /* --- GARCH rezultatai prilyginami ivertintam Vhat -- */
     /* --------------------------------- naudojantis GMM - */
     fit m1 m2 m3 / gmm vdata=vhat kernel=(bart,0,);
   bounds s > 0, -1 < b < 1; /* salygos */
run;
```

Programos HullWhite_p_sigma.mcd

$ORIGIN = 0$

$C_{darb} := submatrix(V, 14, 18, 6, 6)$

$K := submatrix(V, 14, 18, 5, 5)$

$S := submatrix(V, 14, 14, 1, 1)$

$rB := submatrix(V, 16, 16, 2, 2)$

$r2 := submatrix(V, 17, 17, 4, 4)$

$T := submatrix(V, 15, 15, 2, 2)$

$$C_{darb} = \begin{pmatrix} 0.017 \\ 0.015 \\ 0.013 \\ 0.011 \\ 9.8 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1.261 \\ 1.266 \\ 1.271 \\ 1.276 \\ 1.281 \end{pmatrix}$$

$S = (1.273)$

$rB = (0.021)$

$r2 = (0.012)$

$T = ▮$

$$T := \frac{T_0}{255} \quad S := S_0 \quad rB := rB_0 \quad r2 := r2_0$$

$d_1(S, K, rB, r2, T, \sigma_1)$

$$d_1(K, \sigma_1) := \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r2 - rB + \frac{{\sigma_1}^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma_1 \cdot \sqrt{T}}$$

$d_1(2, 0.1) = ▮$

$$d_2(K, \sigma_1) := d_1(K, \sigma_1) - \sigma_1 \cdot \sqrt{T}$$

$$C_{BS}(K,\sigma_1) := S\cdot e^{-rB\cdot T}\cdot \text{pnorm}(d_1(K,\sigma_1),0,1) - K\cdot e^{-r2\cdot T}\cdot \text{pnorm}(d_2(K,\sigma_1),0,1)$$

$n := \text{length}(C_{darb})$ $\qquad$ $n = \blacksquare$

$$f(p,\sigma_1,\sigma_2) := \sum_{i=0}^{n-1} \left[C_{darb_i} - \left[p\cdot C_{BS}(K_i,\sigma_1) + (1-p)\cdot C_{BS}(K_i,\sigma_2)\right]\right]^2$$

$p := 0.5$ $\qquad$ $\sigma_1 := 0.1$ $\qquad$ $\sigma_2 := 0.9$

Given

$p > 0$ $\qquad$ $p < 1$

$\sigma_1 > 0$

$\sigma_2 > 0$

$\text{Minimize}(f,p,\sigma_1,\sigma_2) = \blacksquare$