



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**Gintarė Juozulynaitė**

**PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ**  
**GEOMETRINIS MAKS STABILUMAS**

Magistro darbas

**Vadovas**  
**prof. dr. J. A. Aksomaitis**

**KAUNAS, 2010**



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**TVIRTINU**  
**Katedros vedėjas**  
**doc. dr. N. Listopadskis**  
**2010 06 05**

**PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ**  
**GEOMETRINIS MAKS STABILUMAS**

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

**Vadovas**  
**prof. dr. J. A. Aksomaitis**  
**2010 06 03**

**Recenzentas**  
**doc. dr. K. Padvelskis**  
**2010 06 01**

**Atliko**  
**FMMM-8 gr. stud.**  
**G. Juozulynaitė**  
**2010 05 25**

**KAUNAS, 2010**

## KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

**Pirmininkas:** Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

**Sekretorius:** Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

**Nariai:** Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)  
Vytautas Janilionis, docentas (KTU)  
Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)  
Rimantas Rudzkis, habil. dr., vyriausiasis analitikas (DnB NORD Bankas)  
Zenonas Navickas, profesorius (KTU)  
Arūnas Barauskas, dr., vice-prezidentas projektams (UAB „Baltic Amadeus“)

## SANTRAUKA

Šiame darbe nagrinėjau vienmačių ir dvimačių Pareto atsitiktinių dydžių geometrinį maks stabilumą. Įrodžiau, kad vienmatis Pareto skirstinys yra geometriškai maks stabilus, kai  $\alpha = 1$ . Tačiau nėra geometriškai maks stabilus, kai  $\alpha \neq 1$ . Naudodamasi geometrinio maks stabilumo kriterijumi dvimačiams Pareto atsitiktiniams dydžiams, įrodžiau, kad dvimatė Pareto skirstinio funkcija nėra geometriškai maks stabili, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos (kai  $\alpha = 1, \beta = 1$  ir  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ ). Taip pat dvimatė Pareto skirstinio funkcija nėra geometriškai maks stabili, kai vektoriaus komponentės priklausomos (kai  $\alpha = 1, \beta = 1$  ir  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ ). Dvimačių Pareto skirstinių tyrimas pateikė nelauktus rezultatus. Gauta, kad dvimatė Pareto skirstinio funkcija nėra geometriškai maks stabili, kai  $\alpha = 1, \beta = 1$ . Tačiau vienmatės marginaliosios Pareto skirstinio funkcijos yra geometriškai maks stabilios, kai  $\alpha = 1, \beta = 1$ .

**Juozulynaitė G. Geometric max stability of Pareto random variables : Master's work in applied mathematics / supervisor prof. dr. J. A. Aksomaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2010. – 67 p.**

## SUMMARY

In this work I analyzed geometric max stability of univariate and bivariate Pareto random variables. I have proved, that univariate Pareto distribution is geometrically max stable when  $\alpha = 1$ . But it is not geometrically max stable when  $\alpha \neq 1$ . Using the criterion of geometric max stability for bivariate Pareto random variables, I have proved, that bivariate Pareto distribution function is not geometrically max stable, when vectors' components are independent (when  $\alpha = 1, \beta = 1$  and  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ ). Also bivariate Pareto distribution function is not geometrically max stable, when vectors' components are dependent (when  $\alpha = 1, \beta = 1$  and  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ ). Research of bivariate Pareto distributions submitted unexpected results. Bivariate Pareto distribution function is not geometrically max stable, when  $\alpha = 1, \beta = 1$ . But marginal Pareto distribution functions are geometrically max stable, when  $\alpha = 1, \beta = 1$ .

## TURINYS

ĮVADAS .....	8
1. TEORINĖ DALIS.....	9
1.1. MAKSIMUMŲ SCHEMOS SAŲVOKA .....	9
1.2. RIBINĖS MAKSIMUMŲ TEOREMOS.....	9
1.3. MAKS STABILIEJI SKIRSTINIAI.....	11
1.4. GEOMETRIŠKAI MAKS STABILIEJI SKIRSTINIAI.....	12
1.5. MAKSIMUMO PERKĖLIMO TEOREMA.....	12
1.6. DVIMAČIO VEKTORIAUS SKIRSTINIO FUNKCIJA .....	13
1.7. NEPRIKLAUSOMIEJI IR PRIKLAUSOMIEJI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI.....	14
1.8. GEOMETRINIO MAKS STABILUMO KRITERIJUS.....	14
1.9. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS .....	15
2. TIRIAMOJI DALIS IR REZULTATAI .....	17
2.1. VIENMAČIŲ PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ ANALIZĖ.....	17
2.2. DVIMAČIO PARETO SKIRSTINIO GEOMETRINIO MAKS STABILUMO TYRIMAS, KAI VEKTORIAUS KOMPONENTĖS NEPRIKLAUSOMOS .....	20
2.3. DVIMAČIO PARETO SKIRSTINIO GEOMETRINIO MAKS STABILUMO TYRIMAS, KAI VEKTORIAUS KOMPONENTĖS PRIKLAUSOMOS .....	22
2.4. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS, KAI VEKTORIAUS KOMPONENTĖS NEPRIKLAUSOMOS .....	25
2.5. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS, KAI VEKTORIAUS KOMPONENTĖS PRIKLAUSOMOS .....	28
3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI.....	33
DISKUSIJA .....	38
IŠVADOS .....	40
REKOMENDACIJOS .....	41
PADĖKOS .....	42
LITERATŪRA.....	43
1 PRIEDAS. PAKLAIDA IR ĮVERTIS (NEPRIKLAUSOMŲ KOMPONENČIŲ ATVEJU).....	44
2 PRIEDAS. PAKLAIDA IR ĮVERTIS (PRIKLAUSOMŲ KOMPONENČIŲ ATVEJU).....	46
3 PRIEDAS. STRAIPSNIS „VIENMAČIŲ IR DVIMAČIŲ PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO ASIMPTOTINĖ ANALIZĖ“ .....	49
4 PRIEDAS. PROGRAMOS TEKSTAS .....	51

## PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

2.1 pav. Paklaidos $\Delta_n^{(1)}(x)$ grafikas, kai $p$ -fiksiuotas, o $x$ -kintantis.....	19
2.2 pav. Paklaidos $\Delta_n^{(1)}(x)$ grafikas, kai $x$ -fiksiuotas, o $p$ -kintantis.....	20
2.3 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio paviršius, kai $n = 50, \alpha = 2, \beta = 2$ .....	26
2.4 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio paviršius, kai $n = 20, \alpha = 1, \beta = 1$ .....	27
2.5 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai $n = 50, y = 4, \alpha = 2, \beta = 2$ .....	27
2.6 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai $x = 10, y = 4, \alpha = 2, \beta = 2$ .....	28
2.7 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio paviršius, kai $n = 100, \alpha = 2, \beta = 2$ .....	31
2.8 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai $n = 20, y = 10, \alpha = 2, \beta = 2$ .....	31
2.9 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai $x = 5, y = 4, \alpha = 2, \beta = 2$ .....	32
3.1 pav. Pagrindinis programos langas.....	33
3.2 pav. Paklaidos ir įverčio paviršius, kai $n$ -fiksiuotas .....	34
3.3 pav. Klaida .....	34
3.4 pav. Paklaidos ir įverčio paviršius, kai $n = 50, \alpha = 1, \beta = 1$ .....	35
3.5 pav. Paklaidos ir įverčio grafikas, kai $y = 4, n = 10, \alpha = 3, \beta = 3$ .....	36
3.6 pav. Paklaidos ir įverčio grafikas, kai $x$ ir $n$ fiksuoti .....	36
3.7 pav. Paklaidos ir įverčio grafikas, kai $x$ ir $y$ fiksuoti .....	37
1 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio paviršius, kai $n = 20, \alpha = 3, \beta = 3$ .....	44
2 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio paviršius, kai $n = 50, \alpha = 1, \beta = 1$ .....	44
3 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio paviršius, kai $n = 100, \alpha = 4, \beta = 4$ .....	45
4 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai $x = 10, n = 50, \alpha = 3, \beta = 3$ .....	45
5 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai $x = 4, y = 8, \alpha = 1, \beta = 1$ .....	46
6 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio paviršius, kai $n = 10, \alpha = 3, \beta = 3$ .....	46
7 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio paviršius, kai $n = 100, \alpha = 1, \beta = 1$ .....	47
8 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio paviršius, kai $n = 50, \alpha = 4, \beta = 4$ .....	47
9 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai $x = 5, n = 20, \alpha = 4, \beta = 4$ .....	48
10 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai $x = 10, y = 5, \alpha = 1, \beta = 1$ .....	48
11 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai $y = 5, n = 10, \alpha = 2, \beta = 2$ .....	49

## ĮVADAS

Ekstremaliųjų reikšmių teorija – tai derinys, įtraukiantis natūralius reiškinius, taip pat sudėtingus matematinius rezultatus įvairių procesų ir įvairių funkcijų.

Apskritai ekstremaliosios reikšmės yra neįprastai didelės ar mažos kintamųjų reikšmės. Pavyzdžiui, upės ar jūros vandens pakilimo lygis, kritulių kiekis, nenormaliai aukšta ar žema temperatūra, didelis vėjo greitis ir pan.

Statistinė ekstremaliųjų reikšmių analizė taikoma analizuoti jų paplitimą ir dydį, siekiant geriausiai panaudoti turimą informaciją, suprasti vykstančius procesus ir numatyti būsimas reikšmes.

Šiuo metu ekstremaliųjų reikšmių teorijos taikymai apima socialinius mokslus, mediciną, finansus, draudimą, ekonomiką, inžineriją ir netgi astronomiją.

Šiame darbe nagrinėjau vienmačių ir dvimačių Pareto skirstinių geometrinį maks stabilumą.

Pareto skirstinys pavadintas italų ekonomisto ir sociologo Vilfredo Pareto (1848-1923) garbei. Pirmą kartą Paretas jį panaudojo aprašydamas pajamų pasiskirstymą. V. Paretas paaiškino, kad didelė dalis gyventojų turi mažas pajamas, tačiau tik maža dalis gyventojų turi dideles pajamas. Ekonomikoje yra naudojami tie skirstiniai, kurių uodegos yra sunkios. Dėl šios priežasties V. Paretas pasiūlė skirstinius, kurie vadinami Pareto vardu. Pareto skirstinys taip pat taikomas draudime, finansuose, klimatologijoje, naftos ir dujų telkinių modeliavime. Pareto skirstinys naudojamas apibūdinti ekstremalias oro sąlygas.

Darbo tikslas: vienmačių ir dvimačių Pareto atsitiktinių dydžių geometrinio maks stabilumo tyrimas.

Darbo uždaviniai:

- Ištirti vienmačių Pareto atsitiktinių dydžių geometrinį maks stabilumą, kai  $\alpha = 1$  ir  $\alpha \neq 1$ . Jeigu geometrinio maks stabilumo nėra, ištirti asimptotinį maks stabilumą.
- Ištirti dvimačių Pareto atsitiktinių dydžių geometrinį maks stabilumą, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos ir, kai vektoriaus komponentės priklausomos (kai  $\alpha = 1, \beta = 1$  ir  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ ). Jeigu geometrinio maks stabilumo nėra, ištirti asimptotinį maks stabilumą.
- Dvimačių Pareto skirstinių atveju įvertinti konvergavimo greitį ribinėse teoreose.
- Atlikti konvergavimo greičio įverčių kompiuterinę analizę.

Šia tematika skaitytas pranešimas VIII studentų mokslinėje konferencijoje „Taikomoji matematika“. Pranešimo medžiaga pateikta 3 priede.



## 1. TEORINĖ DALIS

### 1.1. MAKSIMUMŲ SCHEMOS SAŲOKA

Sakykime, kad  $X_1, X_2, \dots, X_n$  - vienmačiai atsitiktiniai dydžiai. Apibrėžkime  $n$  pirmųjų sekos narių maksimumo struktūrą

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Tarkime,  $u_n = u_n(x)$ ,  $n \geq 1$  - tokia realaus kintamojo funkcijų seka, kad skirstinio funkcijų seka

$$H_n(u_n(x)) = P(Z_n < u_n(x))$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią skirstinio funkciją  $H(x)$ . Taip apibrėžta struktūra  $Z_n$  kartu su prielaidomis apie atsitiktinių dydžių seką  $\{X_n, n \geq 1\}$  bei funkcijų seką  $\{u_n, n \geq 1\}$  sudaro maksimumų schemą.

Jei atsitiktiniai dydžiai  $\{X_n, n \geq 1\}$  yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su skirstinio funkcija  $F(x)$ , o normavimo funkcija  $u_n$  tiesinė, t.y.

$$u_n(x) = a_n + b_n x, \quad a_n \in R, \quad b_n > 0.$$

tai tokia maksimumų schema vadinama klasikine.

### 1.2. RIBINĖS MAKSIMUMŲ TEOREMOS

Sakykime,  $\{X_j, j \geq 1\}$  – nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su skirstinio funkcija

$$F(x) = P(X_j < x), \quad \forall j \geq 1.$$

Pažymėkime

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos  $\{a_n, n \geq 1\}$  ir  $\{b_n > 0, n \geq 1\}$ , kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \tag{1.1}$$

kiekviename funkcijos  $H(x)$  tolydumo taške (čia  $H(x)$  – neišsigimusi skirstinio funkcija). Toks konvergavimas vadinamas silpnuoju skirstinio funkcijos konvergavimu [5].

Sakysime, kad skirstinys  $F$  priklauso ribinio skirstinio  $H$  traukos sričiai (žymėsime  $F \in D(H)$ ), jei egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos, kad tenkinama lygybė (1.1).

Pažymėkime viršutinį ribinį skirstinio funkcijos  $F(x)$  tašką

$$\omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

Suformuluosime teoremas [5], kurias turi tenkinti skirstinys  $F$ , kad jis priklausytų kurio nors neišsigimusio ribinio skirstinio traukos sričiai. Taip pat pateiksime centravimo ir normavimo konstantų parinkimo būdą.

**1.1 Teorema.** Tarkime,  $\omega(F) = +\infty$ , ir egzistuoja tokia teigiama konstanta  $\alpha$ , kad  $\forall x > 0$  yra tenkinama lygybė:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha}. \quad (1.2)$$

Tuomet  $F \in D(H_{1,\alpha})$ . Čia

$$H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = 0, \quad b_n = \inf \left\{ x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

**1.2 Teorema.** Tarkime  $\omega(F) < \infty$ , o skirstinio funkcija

$$F^*(x) = F\left(\omega(F) - \frac{1}{x}\right)$$

tenkina sąlygą (1.2). Tuomet  $F \in D(H_{2,\alpha})$ . Čia

$$H_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \omega(F), \quad b_n = \omega(F) - \inf \left\{ x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

**1.3 Teorema.** Tarkime, su bet kokia baigtine konstanta  $a$  integralas

$$\int_a^{\omega(F)} (1 - F(y)) dy \quad (1.3)$$

yra baigtinis. Intervale  $(a(F), \omega(F))$  apibrėžkime funkciją

$$R(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_t^{\omega(F)} (1 - F(y)) dy.$$

Jei  $\forall x \in R$  egzistuoja riba

$$\lim_{t \rightarrow \omega(F)} \frac{1 - F(t + xR(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}, \quad (1.4)$$

tai  $F \in D(H_{3,0})$ . Čia

$$H_{3,0}(x) = \exp(-e^{-x}), x \in R$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \inf \left\{ x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n} \right\}, \quad b_n = R(a_n).$$

**Pastaba.** Šiose teoremose pateiktas centravimo ir normavimo konstantų  $a_n$  ir  $b_n$  parinkimo būdas nėra vienintelis. Mes net negalime teigti, kad tai yra pats paprasčiausias konstantų parinkimo būdas ir, kad taip parinktos konstantos yra geriausios, tačiau jis yra geras tuo, kad yra paprastas ir konstruktyvus.

**1.4 Teorema.** Klasikinėje maksimumų schemoje egzistuoja tik trys  $(H_{1,\alpha}, H_{2,\alpha}, H_{3,0})$  neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.1, 1.2, 1.3 ir 1.4 teoremų įrodymai pateikti [5].

### 1.3. MAKS STABILIEJI SKIRSTINIAI

**1.1 Apibrėžimas.** Skirstinio funkcija  $F(x)$  vadinama maks stabiliąja, jeigu egzistuoja tokios normalizavimo konstantos  $a_n$  ir  $b_n > 0$ , su kuriomis galioja lygybė

$$F^n(xb_n + a_n) = F(x).$$

Yra tik trys maks stabilieji skirstiniai:

$$H_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \exp(-x^{-\gamma}), & x > 0. \end{cases}$$

$$H_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\gamma), & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$H_3(x) = \exp(-e^{-x}), x \in R.$$

Tai įrodyta [5].

## 1.4. GEOMETRIŠKAI MAKS STABILIEJI SKIRSTINIAI

**1.2 Apibrėžimas** [8]. Skirstinio funkcija  $F(x)$  vadinama geometriškai maks stabiliaja, jeigu egzistuoja tokios normalizavimo konstantos  $a_n$  ir  $b_n > 0$ , su kuriomis galioja lygybė

$$P\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} < x\right) = F(x),$$

čia imties dydis  $N_n$  nepriklauso nuo visų  $X_j$  ir jo skirstinys yra geometrinis:

$$P(N_n = k) = p_n(1 - p_n)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Kadangi  $N_n$  generuojančioji funkcija

$$g_{N_n}(z) = \frac{p_n z}{1 - (1 - p_n)z}$$

ir

$$P\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} < x\right) = g_{N_n}(F(xb_n + a_n)),$$

tai geometrinio maks stabilumo kriterijus yra:

$$\frac{p_n F(xb_n + a_n)}{1 - (1 - p_n)F(xb_n + a_n)} = F(x).$$

Analogiškai apibrėžiama asimptotiškai maks stabili skirstinio funkcija  $F(x)$ , kai  $p = p_n \rightarrow 0$ , ( $n \rightarrow \infty$ ).

## 1.5. MAKSIMUMO PERKĖLIMO TEOREMA

Tarkime, kad yra dvi atsitiktinių dydžių sekos:  $\{X_j, j \geq 1\}$  - nepriklausomieji atsitiktiniai dydžiai su skirstinio funkcija  $F(x) = P(X_j < x)$ ,  $j \geq 1$ ;  $\{N = N_n, n \geq 1\}$  - atsitiktiniai dydžiai, įgyjantis tik sveikas teigiamas reikšmes ir nepriklausantys nuo visų  $\{X_j, j \geq 1\}$ .

Pažymėkime

$$Z_{N_n} = \max(X_1, \dots, X_{N_n}).$$

**1.5 Teorema.** Tarkime, kad egzistuoja tokios normalizavimo konstantų sekos  $\{a_n, n \geq 1\}$  ir  $\{b_n, n \geq 1\}$ , su kuriomis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n}\right) = H(x), \quad (1.5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = A(x). \quad (1.6)$$

Tada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n}\right) = \Psi(x) = \int_0^{\infty} H^z(x) dA(z). \quad (1.7)$$

Teoremos formulavimas ir įrodymas pateiktas [1] ir [6].

## 1.6. DVIMAČIO VEKTORIAUS SKIRSTINIO FUNKCIJA

Tarkime, kad  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$  yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę vektoriai su skirstinio funkcija

$$F(x, y) = P(X_i < x, Y_i < y), \forall i = \overline{1, n}.$$

Pažymėkime vektorių maksimumą [5]:

$$Z_n = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)});$$

čia  $Z_n^{(1)}$  ir  $Z_n^{(2)}$  yra koordinačių maksimumai:

$$Z_n^{(1)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

$$Z_n^{(2)} = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n).$$

Skirstinio funkcija:

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq (x, y)) &= P(Z_n^{(1)} \leq x, Z_n^{(2)} \leq y) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x, Y_1 \leq y, \dots, Y_n \leq y) = \\ &= P((X_1, Y_1) \leq (x, y), \dots, (X_n, Y_n) \leq (x, y)) = F^n(x, y) \end{aligned}$$

Dvimačio atsitiktinio dydžio skirstinio funkcijos savybės:

1. Skirstinio funkcijos  $F(x, y)$  reikšmės:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1.$$

2.  $\lim_{y \rightarrow \infty} F(x; y) = F_1(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x; y) = F_2(x)$  arba

$$P(X_i \leq x; +\infty) = F_1(x) = P(X \leq x), \quad P(+\infty; Y_j \leq y) = F_2(x) = P(Y \leq y).$$

3.  $\lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} F(x; y) = 1$  arba  $F(+\infty; +\infty) = 1$ .

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x; y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x; y) = \lim_{\substack{y \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow -\infty}} F(x; y) = 0.$$

5. Skirstinio funkcija  $F(x, y)$  yra nemažėjanti:

$$\begin{aligned} F(x_2; y) &\geq F(x_1; y), \quad \text{kai } x_2 > x_1 \\ F(x; y_2) &\geq F(x; y_1), \quad \text{kai } y_2 > y_1. \end{aligned}$$

6. Skirstinio funkcija  $F(x, y)$  yra tolydi iš dešinės:

$$F(x+0, y+0) = F(x, y).$$

## 1.7. NEPRIKLAUSOMIEJI IR PRIKLAUSOMIEJI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

Tarkime, kad  $F(x, y)$ ,  $F_1(x)$  ir  $F_2(y)$  yra atsitiktinio vektoriaus  $(X, Y)$  ir jo koordinačių  $X$  bei  $Y$  skirstinio funkcijos.

**1.3 Apibrėžimas.** Atsitiktinius dydžius  $X$  ir  $Y$  vadiname nepriklausomais, jei su visais  $(x, y) \in R^2$

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y)$$

t.y., jei

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y). \quad (1.8)$$

Jeigu nors vienai skaičių porai  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in R^2$

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq F_1(\tilde{x}) \cdot F_2(\tilde{y}) \quad (1.9)$$

tai atsitiktiniai dydžiai  $X$  ir  $Y$  vadinami priklausomais [3].

## 1.8. GEOMETRINIO MAKS STABILUMO KRITERIJUS

**1.4 Apibrėžimas** [4]. Dvimatę skirstinio funkciją  $F(x, y)$  vadiname geometriškai maks stabiliaja, jeigu egzistuoja tokios normalizavimo konstantos  $\{a_{p1}, b_{p1}\}$  ir  $\{a_{p2}, b_{p2}\}$ , su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_N^{(1)} - a_{p1}}{b_{p2}} \leq x, \frac{Z_N^{(2)} - a_{p2}}{b_{p2}} \leq y\right) = F(x, y),$$

čia  $N$  yra geometrinis atsitiktinis dydis su parametru  $p$ :

$$P(N = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \geq 1, \quad 0 < p < 1.$$

Pasinaudoję pilnosios tikimybės formule gauname:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{Z_N^{(1)} - a_{p1}}{b_{p1}} \leq x, \frac{Z_N^{(2)} - a_{p2}}{b_{p2}} \leq y\right) &= \sum_k P\left(Z_k^{(1)} \leq xb_{p1} + a_{p1}, Z_k^{(2)} \leq yb_{p2} + a_{p2}\right) P(N = k) = \\ &= \sum_k P\left(X_1 \leq xb_{p1} + a_{p1}, \dots, X_k \leq xb_{p1k} + a_{p1k}, Y_1 \leq yb_{p21} + a_{p21}, \dots, Y_k \leq yb_{p2k} + a_{p2k}\right) P(N = k) = \\ &= \sum_k F^k\left(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2}\right) P(N = k) = g_N\left(F\left(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2}\right)\right); \end{aligned}$$

čia  $g_N(z)$  yra geometrinio atsitiktinio dydžio generuojančioji funkcija:

$$g_N(z) = Mz^N = \sum_{k=1}^{\infty} z^k P(N = k) = \frac{pz}{1 - (1-p)z}.$$

Taigi, geometrinio maks stabilumo kriterijus dvimatei skirstinio funkcijai yra:

$$\frac{pF\left(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2}\right)}{1 - (1-p)F\left(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2}\right)} = F(x, y). \quad (1.10)$$

## 1.9. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS

Tarkime, kad  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$  yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę dvimačiai atsitiktiniai dydžiai su skirstinio funkcija

$$F(x, y) = P(X_i < x, Y_i < y), \forall i = \overline{1, n}.$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios normalizavimo konstantos:

$$\{a_{n1}, a_{n2}; n1, n2 \geq 1\}, \{b_{n1}, b_{n2} > 0; n1, n2 \geq 1\},$$

su kuriomis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Z_n^{(1)} - a_{n1}}{b_{n1}} \leq x, \frac{Z_n^{(2)} - a_{n2}}{b_{n2}} \leq y\right) = H(x, y); \quad (1.11)$$

čia  $H(x, y)$  yra neišsigimusi dvimatė skirstinio funkcija.

Pažymėkime

$$u_n(x, y) = n(1 - F(xb_{n1} + a_{n1}, yb_{n2} + a_{n2})), \quad (1.12)$$

o tiems  $(x, y)$  su kuriais  $H(x, y) > 0$ , pažymėkime

$$v_n(x, y) = u_n(x, y) + \ln H(x, y). \quad (1.13)$$

Reikia pastebėti, kad lygybė (1.11) yra ekvivalenti lygybei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y) = u(x, y) > 0, \quad (1.14)$$

ir šiuo atveju  $H(x, y) = e^{-u(x, y)}$ .

**1.6 Teorema.** Tarkime, tenkinama (1.11) lygybė. Visiems  $(x, y)$  su kuriais  $\frac{u_n(x, y)}{n} \leq \frac{1}{2}$  ir

$H(x, y) > 0$ , teisingas konvergavimo greičio įvertis

$$\left| P\left(\frac{Z_n^{(1)} - a_{n1}}{b_{n1}} \leq x, \frac{Z_n^{(2)} - a_{n2}}{b_{n2}} \leq y\right) - H(x, y) \right| \leq \Delta_n(x, y) =$$

$$= H(x, y)(R_{1,n}(x, y) + R_{2,n}(x, y) + R_{1,n}(x, y) R_{2,n}(x, y)),$$
(1.15)

čia

$$R_{1,n}(x) = \frac{2u_n^2(x, y)}{n} + \frac{2u_n^4(x, y)}{n^2} \frac{1}{1-q},$$
(1.16)

$$R_{2,n}(x) = |v_n(x, y)| + \frac{v_n^2(x, y)}{2} \frac{1}{1-s},$$
(1.17)

o  $0 < q, s < 1$  parenkami taip, kad

$$\frac{2}{3} \frac{u_n^2(x, y)}{n} \leq q, \frac{1}{3} |v_n(x, y)| \leq s.$$

Teoremos įrodymas pateiktas [7].



## 2. TIRIAMOJI DALIS IR REZULTATAI

### 2.1. VIENMAČIŲ PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ ANALIZĖ

Tarkime, kad  $X_1, X_2, \dots, X_N$  yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su Pareto skirstinio funkcija

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \geq 1, \quad \alpha > 0. \quad (2.1)$$

Atsitiktinis dydis  $N$  pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį:

$$P(N = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Atsitiktiniai dydžiai  $X_j$ ,  $j \geq 1$  ir  $N$  yra tarpusavyje nepriklausomi.

Rasime Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo ribinį skirstinį, kai  $\alpha \neq 1$ , bei centravimo ir normavimo konstantas. Kadangi  $\varpi(F) = +\infty$ , tai galima taikyti 1.1 teoremą. Tikriname 1.1 teoremos sąlygą (1.2):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - 1 + \frac{1}{(tx)^\alpha}}{1 - 1 + \frac{1}{t^\alpha}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(tx)^\alpha}}{\frac{1}{t^\alpha}} = \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}.$$

Parenkame centravimo ir normavimo konstantas:

$$a_n = 0, \text{ o iš sąlygos: } b_n = \inf \left\{ x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n} \right\} \text{ gauname, kad } b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Gauname ribinį maksimumo skirstinį:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( Z_n < n^{\frac{1}{\alpha}} x \right) = H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0. \end{cases}$$

Nagrinėsime maksimumo

$$Z_N = \max(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

geometrinį stabilumą.

**2.1 Teorema.** Jeigu  $\alpha = 1$ , tai

$$P(Z_N \leq xb(p) + a(p)) = P \left( Z_N \leq x \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} \right) = 1 - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1. \quad (2.2)$$

Jeigu  $\alpha \neq 1$ , tai

$$\lim_{p \rightarrow 0} P(Z_N \leq xb(p) + a(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} P \left( Z_N \leq xp^{-\frac{1}{\alpha}} \right) = \Psi(x), \quad (2.3)$$

čia ribinė skirstinio funkcija

$$\Psi(x) = \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha} = 1 - \frac{1}{1+x^\alpha}, \quad x \geq 0. \quad (2.4)$$

Kai  $\alpha \neq 1$ , galioja tolygusis konvergavimo greičio įvertis:

$$-\frac{p}{1+p} \leq \sup_x \Delta_n^{(1)}(x) \leq 0; \quad (2.5)$$

čia  $\Delta_n^{(1)}(x) = P\left(Z_N \leq xp^{\frac{1}{\alpha}}\right) - \Psi(x)$ .

**Įrodymas.** Kai  $\alpha = 1$ , parenkame normalizavimo konstantas  $a(p) = \frac{p-1}{p}$ ,  $b(p) = \frac{1}{p}$ .

Normalizuodami maksimumą  $Z_N$  gauname:

$$P(pZ_N - p + 1 \leq x) = P\left(Z_N \leq \frac{x+p-1}{p}\right) = g_N\left(F\left(\frac{x+p-1}{p}\right)\right).$$

Kadangi geometrinio skirstinio generuojančioji funkcija

$$g_N(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}, \quad |z| \leq 1,$$

tai

$$P\left(Z_N \leq \frac{x+p-1}{p}\right) = \frac{pF\left(\frac{x+p-1}{p}\right)}{1-(1-p)F\left(\frac{x+p-1}{p}\right)} = \frac{p\left(1 - \frac{p}{x+p-1}\right)}{1-(1-p)\left(1 - \frac{p}{x+p-1}\right)} = \frac{p(x-1)}{px} = 1 - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1. \quad (2.6)$$

**Pirmoji teoremos dalis įrodyta.**

Kai  $\alpha \neq 1$ , parenkame normalizavimo konstantas  $a(p) = 0$ ,  $b(p) = p^{\frac{1}{\alpha}}$ .

Tada

$$P\left(p^{\frac{1}{\alpha}}Z_N \leq x\right) = P\left(Z_N \leq xp^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \frac{pF\left(xp^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{1-(1-p)F\left(xp^{\frac{1}{\alpha}}\right)} = \frac{p\left(1 - \frac{1}{x^\alpha p^{-1}}\right)}{1-(1-p)\left(1 - \frac{1}{x^\alpha p^{-1}}\right)} = \frac{x^\alpha - p}{x^\alpha - p + 1}, \quad x^\alpha \geq p.$$

Tuomet

$$\lim_{p \rightarrow 0} P\left(p^{\frac{1}{\alpha}}Z_N \leq x\right) = \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha} = 1 - \frac{1}{1+x^\alpha} = \Psi(x), \quad x \geq 0. \quad (2.7)$$

Pažymėkime:

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(1)}(x) &= P\left(Z_N \leq xp^{\frac{1}{\alpha}}\right) - \Psi(x) = \frac{x^\alpha - p}{x^\alpha - p + 1} - \frac{x^\alpha}{1 + x^\alpha} = \frac{x^\alpha - p + x^{2\alpha} - px^\alpha - x^{2\alpha} + px^\alpha - x^\alpha}{(x^\alpha - p + 1)(x^\alpha + 1)} = \\ &= \frac{-p}{(x^\alpha - p + 1)(x^\alpha + 1)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Gauname, kad

$$-\frac{p}{1+p} \leq \sup_x \Delta_n^{(1)}(x) \leq 0,$$

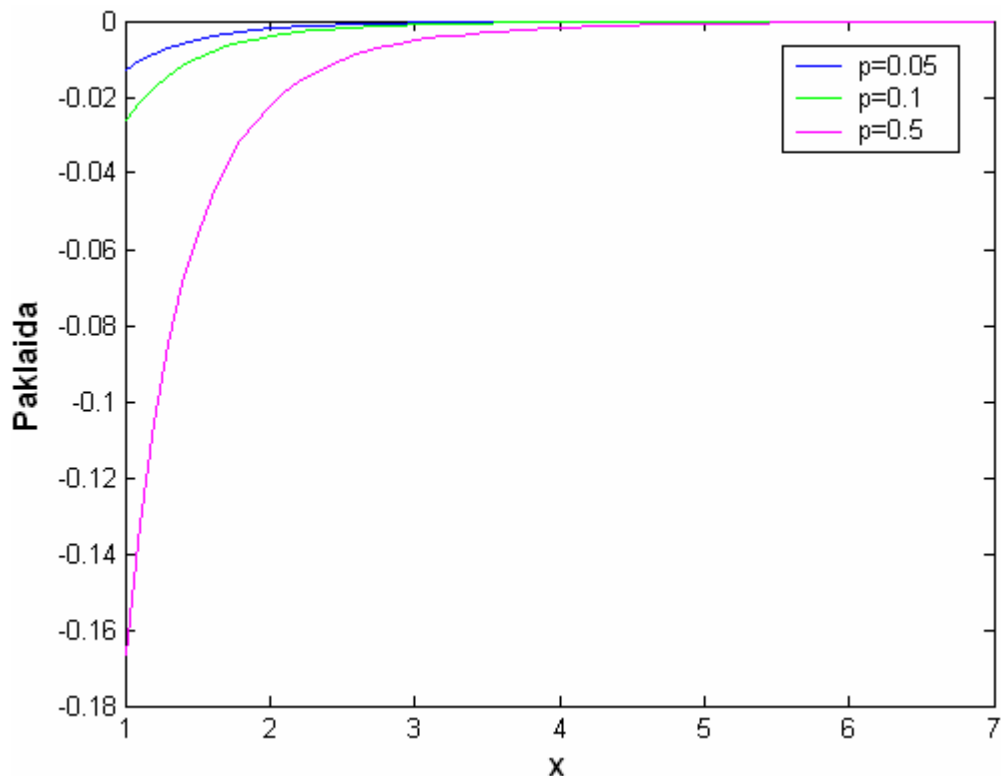
$$\text{čia } \Delta_n^{(1)}(x) = P\left(Z_N \leq xp^{\frac{1}{\alpha}}\right) - \Psi(x).$$

### Antroji teoremos dalis įrodyta.

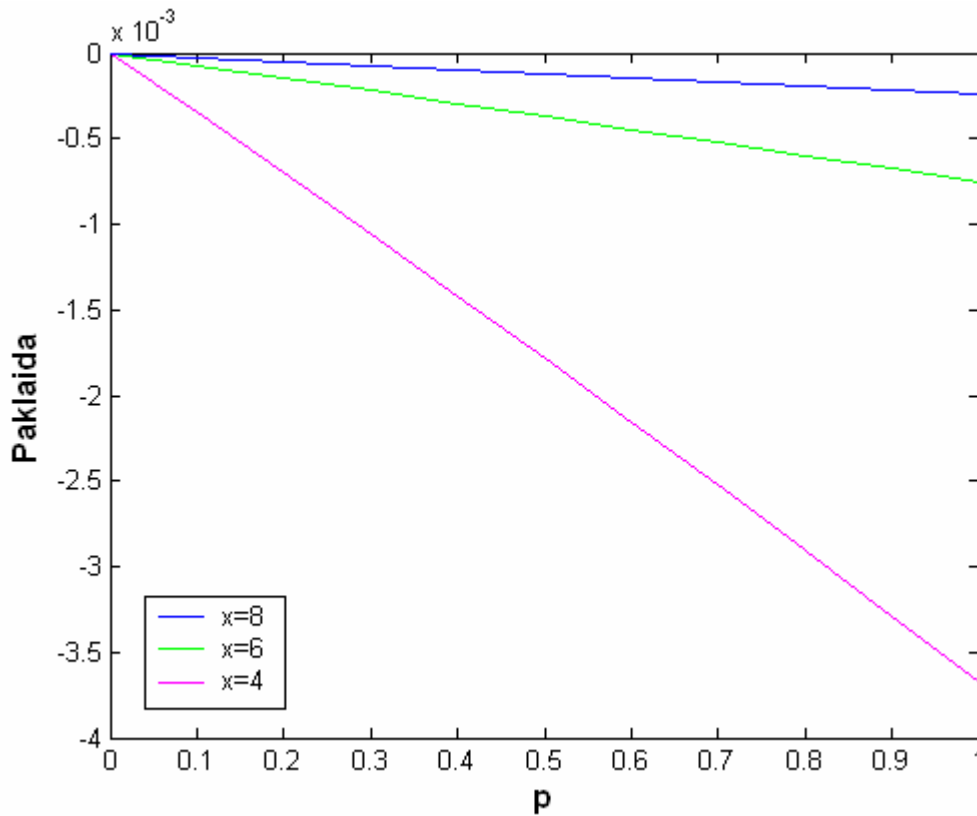
Kai  $\alpha = 1$ , Pareto skirstinio funkcija (2.1) yra geometriškai maks stabili (2.2). Tai įrodėme pirmoje teoremos dalyje (2.6). Kai  $\alpha \neq 1$ , Pareto skirstinio funkcija (2.1) yra asimptotiškai „pusiau“ maks stabili (2.3), kai  $p \rightarrow 0$ . Tai įrodėme antroje teoremos dalyje (2.7).

Žinodami Pareto skirstinį (2.1) ir ribinę skirstinio funkciją (2.4), bei normalizavimo konstantas  $a(p) = 0$  ir  $b(p) = p^{-\frac{1}{\alpha}}$ , gauname tolygųjį konvergavimo greičio įvertį (2.5).

Įvertinsime paklaidą (2.8):



2.1 pav. Paklaidos  $\Delta_n^{(1)}(x)$  grafikas, kai  $p$ -fiksotas, o  $x$ -kintantis.



2.2 pav. Paklaidos  $\Delta_n^{(1)}(x)$  grafikas, kai  $x$ -fiksotas, o  $p$ -kintantis.

Iš 2.1 pav. matome, kai  $x$  artėja į  $+\infty$ , paklaida artėja prie nulio. Iš 2.2 pav. matome, kai  $p$  artėja prie nulio, paklaida taip pat artėja prie nulio.

## 2.2. DVIMAČIO PARETO SKIRSTINIO GEOMETRINIO MAKS STABILUMO TYRIMAS, KAI VEKTORIAUS KOMPONENTĖS NEPRIKLAUSOMOS

Tarkime, turime dvimačius nepriklausomus vektorius  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ , kurių skirstinio funkcija yra dvimatė Pareto:

$$F(x, y) = \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{y^\beta}\right) = 1 - \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha y^\beta}, \quad x, y \geq 1; \quad \alpha, \beta > 0. \quad (2.9)$$

Vektorių koordinatės yra taip pat nepriklausomos.

Vienmatės marginaliosios Pareto skirstinio funkcijos yra:

$$F_1(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \geq 1, \alpha > 0; \quad (2.10)$$

$$F_2(y) = 1 - \frac{1}{y^\beta}, \quad y \geq 1, \beta > 0. \quad (2.11)$$

**2.1 Teiginys.** Dvimatė Pareto skirstinio funkcija (2.9) nėra geometriškai maks stabili, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos ir  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ .

**Įrodymas.** Dvimatės Pareto skirstinio funkcijos (2.9) geometrinį maks stabilumą tikrinsime naudodamiesi geometrinio maks stabilumo kriterijumi (1.10):

$$\begin{aligned}
& \frac{pF(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2})}{1 - (1-p)F(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2})} = \\
& = \frac{p \left( 1 - \frac{1}{(xb_{p1} + a_{p1})} - \frac{1}{(yb_{p2} + a_{p2})} + \frac{1}{(xb_{p1} + a_{p1})(yb_{p2} + a_{p2})} \right)}{1 - (1-p) \left( 1 - \frac{1}{(xb_{p1} + a_{p1})} - \frac{1}{(yb_{p2} + a_{p2})} + \frac{1}{(xb_{p1} + a_{p1})(yb_{p2} + a_{p2})} \right)} = \left[ \begin{array}{l} b_{p1} = \frac{1}{p}, a_{p1} = 0 \\ b_{p2} = \frac{1}{p}, a_{p2} = 0 \end{array} \right] = \\
& = \frac{p \left( 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p \cdot p}{x \cdot y} \right)}{1 - (1-p) \left( 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p \cdot p}{x \cdot y} \right)} = \frac{p \left( 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p \cdot p}{x \cdot y} \right)}{1 - 1 + \frac{p}{x} + \frac{p}{y} - \frac{p \cdot p}{x \cdot y} + p - \frac{p \cdot p}{x} - \frac{p \cdot p}{y} + \frac{p \cdot p \cdot p}{x \cdot y}} = \\
& = \frac{p \left( 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p \cdot p}{x \cdot y} \right)}{p \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{p}{x \cdot y} + 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p \cdot p}{x \cdot y} \right)} = \frac{\left( 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p \cdot p}{x \cdot y} \right)}{\left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{p}{x \cdot y} + 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p \cdot p}{x \cdot y} \right)} \neq F(x, y)
\end{aligned}$$

### 2.1 teiginys įrodytas.

Kadangi dvimatė Pareto skirstinio funkcija (2.9) nėra geometriškai maks stabili, tai tikriname dvimatės Pareto skirstinio funkcijos (2.9) asimptotinį maks stabilumą, kai  $p \rightarrow 0$  ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ):

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\left( 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p \cdot p}{x \cdot y} \right)}{\left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{p}{x \cdot y} + 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p \cdot p}{x \cdot y} \right)} = \frac{1}{1 + x^{-1} + y^{-1}}$$

Negauname asimptotinio maks stabilumo, kai  $p \rightarrow 0$ .

**2.2 Teiginys.** Dvimatė Pareto skirstinio funkcija (2.9) nėra geometriškai maks stabili, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos ir  $\alpha \neq 1$ ,  $\beta \neq 1$ .

**Įrodymas.** Dvimatės Pareto skirstinio funkcijos (2.9) geometrinį maks stabilumą tikrinsime naudodamiesi geometrinio maks stabilumo kriterijumi (1.10):

$$\begin{aligned}
& \frac{pF(xb_{p_1} + a_{p_1}, yb_{p_2} + a_{p_2})}{1 - (1-p)F(xb_{p_1} + a_{p_1}, yb_{p_2} + a_{p_2})} = \\
& = \frac{p \left( 1 - \frac{1}{(xb_{p_1} + a_{p_1})^\alpha} - \frac{1}{(yb_{p_2} + a_{p_2})^\beta} + \frac{1}{(xb_{p_1} + a_{p_1})^\alpha (yb_{p_2} + a_{p_2})^\beta} \right)}{1 - (1-p) \left( 1 - \frac{1}{(xb_{p_1} + a_{p_1})^\alpha} - \frac{1}{(yb_{p_2} + a_{p_2})^\beta} + \frac{1}{(xb_{p_1} + a_{p_1})^\alpha (yb_{p_2} + a_{p_2})^\beta} \right)} = \left[ \begin{array}{l} b_{p_1} = p^{-\frac{1}{\alpha}}, a_{p_1} = 0 \\ b_{p_2} = p^{-\frac{1}{\beta}}, a_{p_2} = 0 \end{array} \right] = \\
& = \frac{p \left( 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p \cdot p}{x^\alpha \cdot y^\beta} \right)}{1 - (1-p) \left( 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p \cdot p}{x^\alpha \cdot y^\beta} \right)} = \frac{p \left( 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p \cdot p}{x^\alpha \cdot y^\beta} \right)}{1 - 1 + \frac{p}{x^\alpha} + \frac{p}{y^\beta} - \frac{p \cdot p}{x^\alpha \cdot y^\beta} + p - \frac{p \cdot p}{x^\alpha} - \frac{p \cdot p}{y^\beta} + \frac{p \cdot p \cdot p}{x^\alpha \cdot y^\beta}} = \\
& = \frac{p \left( 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p \cdot p}{x^\alpha y^\beta} \right)}{p \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{p}{x^\alpha y^\beta} + 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p \cdot p}{x^\alpha y^\beta} \right)} = \frac{\left( 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p \cdot p}{x^\alpha y^\beta} \right)}{\left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{p}{x^\alpha y^\beta} + 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p \cdot p}{x^\alpha y^\beta} \right)} \neq F(x, y)
\end{aligned}$$

## 2.2 teiginys įrodytas.

Dvimatė Pareto skirstinio funkcija (2.9) nėra geometriškai maks stabili. Tikrinsime dvimatės Pareto skirstinio funkcijos (2.9) asimptotinį maks stabilumą, kai  $p \rightarrow 0$  ( $\alpha \neq 1$ ,  $\beta \neq 1$ ):

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\left( 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p \cdot p}{x^\alpha y^\beta} \right)}{\left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{p}{x^\alpha y^\beta} + 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p \cdot p}{x^\alpha y^\beta} \right)} = \frac{1}{1 + x^{-\alpha} + y^{-\beta}}$$

Negauname asimptotinio maks stabilumo, kai  $p \rightarrow 0$ .

## 2.3. DVIMAČIO PARETO SKIRSTINIO GEOMETRINIO MAKS STABILUMO TYRIMAS, KAI VEKTORIAUS KOMPONENTĖS PRIKLAUSOMOS

Tarkime, kad vektoriaus  $(X, Y)$  komponentės yra priklausomos. Tirsime atvejį, kai

$$F(x, y) = 1 - \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - 1}, \quad x, y \geq 1; \quad \alpha, \beta > 0. \quad (2.12)$$

Vienmatės marginaliosios Pareto skirstinio funkcijos yra:

$$F_1(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}, x \geq 1, \alpha > 0; \quad (2.13)$$

$$F_2(y) = 1 - \frac{1}{y^\beta}, y \geq 1, \beta > 0. \quad (2.14)$$

**2.3 Teiginys.** Dvimatė Pareto skirstinio funkcija (2.12) nėra geometriškai maks stabili, kai vektoriaus komponentės priklausomos ir  $\alpha = 1, \beta = 1$ .

**Įrodymas.** Dvimatės Pareto skirstinio funkcijos (2.12) geometrinį maks stabilumą tikrinsime naudodamiesi geometrinio maks stabilumo kriterijumi (1.10):

$$\begin{aligned} & \frac{pF(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2})}{1 - (1-p)F(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2})} = \\ & = \frac{p \left( 1 - \frac{1}{(xb_{p1} + a_{p1})} - \frac{1}{(yb_{p2} + a_{p2})} + \frac{1}{(xb_{p1} + a_{p1}) + (yb_{p2} + a_{p2}) - 1} \right)}{1 - (1-p) \left( 1 - \frac{1}{(xb_{p1} + a_{p1})} - \frac{1}{(yb_{p2} + a_{p2})} + \frac{1}{(xb_{p1} + a_{p1}) + (yb_{p2} + a_{p2}) - 1} \right)} = \left[ \begin{array}{l} b_{p1} = \frac{1}{p}, a_{p1} = 0 \\ b_{p2} = \frac{1}{p}, a_{p2} = 0 \end{array} \right] = \\ & = \frac{p \left( 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p}{x+y-p} \right)}{1 - (1-p) \left( 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p}{x+y-p} \right)} = \frac{p \left( 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p}{x+y-p} \right)}{1 - 1 + \frac{p}{x} + \frac{p}{y} - \frac{p}{x+y-p} + p - \frac{p \cdot p}{x} - \frac{p \cdot p}{y} + \frac{p \cdot p}{x+y-p}} = \\ & = \frac{p \left( 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p}{x+y-p} \right)}{p \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y-p} + 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p}{x+y-p} \right)} = \frac{\left( 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p}{x+y-p} \right)}{\left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y-p} + 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p}{x+y-p} \right)} \neq F(x, y) \end{aligned}$$

### 2.3 teiginys įrodytas.

Dvimatė Pareto skirstinio funkcija (2.12) nėra geometriškai maks stabili. Taigi tikriname asimptotinį maks stabilumą ( $\alpha = 1, \beta = 1$ ):

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\left( 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p}{x+y-p} \right)}{\left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y-p} + 1 - \frac{p}{x} - \frac{p}{y} + \frac{p}{x+y-p} \right)} = \frac{1}{1 + x^{-1} + y^{-1} - (x+y)^{-1}}$$

Negauname asimptotinio maks stabilumo, kai  $p \rightarrow 0$ .

**2.4 Teiginys.** Dvimatė Pareto skirstinio funkcija (2.12) nėra geometriškai maks stabili, kai vektoriaus komponentės priklausomos ir  $\alpha \neq 1$ ,  $\beta \neq 1$ .

**Įrodymas.** Dvimatės Pareto skirstinio funkcijos (2.12) geometrinį maks stabilumą tikrinsime naudodamiesi geometrinio maks stabilumo kriterijumi (1.10):

$$\begin{aligned}
& \frac{pF(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2})}{1 - (1-p)F(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2})} = \\
& = \frac{p \left( 1 - \frac{1}{(xb_{p1} + a_{p1})^\alpha} - \frac{1}{(yb_{p2} + a_{p2})^\beta} + \frac{1}{(xb_{p1} + a_{p1})^\alpha + (yb_{p2} + a_{p2})^\beta - 1} \right)}{1 - (1-p) \left( 1 - \frac{1}{(xb_{p1} + a_{p1})^\alpha} - \frac{1}{(yb_{p2} + a_{p2})^\beta} + \frac{1}{(xb_{p1} + a_{p1})^\alpha + (yb_{p2} + a_{p2})^\beta - 1} \right)} = \left[ \begin{array}{l} b_{p1} = p^{-\frac{1}{\alpha}}, a_{p1} = 0 \\ b_{p2} = p^{-\frac{1}{\beta}}, a_{p2} = 0 \end{array} \right] = \\
& = \frac{p \left( 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p}{x^\alpha + y^\beta - p} \right)}{1 - (1-p) \left( 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p}{x^\alpha + y^\beta - p} \right)} = \frac{p \left( 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p}{x^\alpha + y^\beta - p} \right)}{p \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - p} + 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p}{x^\alpha + y^\beta - p} \right)} = \\
& = \frac{\left( 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p}{x^\alpha + y^\beta - p} \right)}{\left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - p} + 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p}{x^\alpha + y^\beta - p} \right)} \neq F(x, y)
\end{aligned}$$

#### 2.4 teiginys įrodytas.

Tikrinsime dvimatės Pareto skirstinio funkcijos (2.12) asimptotinį maks stabilumą ( $\alpha \neq 1$ ,  $\beta \neq 1$ ):

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\left( 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p}{x^\alpha + y^\beta - p} \right)}{\left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - p} + 1 - \frac{p}{x^\alpha} - \frac{p}{y^\beta} + \frac{p}{x^\alpha + y^\beta - p} \right)} = \frac{1}{1 + x^{-\alpha} + y^{-\beta} - (x^\alpha + y^\beta)^{-1}}$$

Dvimatė Pareto skirstinio funkcija (2.12) nėra asimptotiškai maks stabili, kai  $p \rightarrow 0$ .



## 2.4. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS, KAI VEKTORIAUS KOMPONENTĖS NEPRIKLAUSOMOS

Tarkime, turime dvimačius nepriklausomus vektorius  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ , kurių skirstinio funkcija yra dvimatė Pareto:

$$F(x, y) = \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{y^\beta}\right) = 1 - \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha y^\beta}, \quad x, y \geq 1; \quad \alpha, \beta > 0. \quad (2.15)$$

Rasime dvimačių Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo ribinį skirstinį, kai  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ .

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantos:  $a_{n1} = 0, b_{n1} = n^{\frac{1}{\alpha}}$  ir  $a_{n2} = 0, b_{n2} = n^{\frac{1}{\beta}}$ , su kuriomis (1.11):

$$P\left(\frac{Z_n^{(1)} - a_{n1}}{b_{n1}} \leq x, \frac{Z_n^{(2)} - a_{n2}}{b_{n2}} \leq y\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H(x, y) = e^{-\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta}}, \quad (2.16)$$

čia  $H(x, y)$  yra neišsigimusi dvimatė skirstinio funkcija.

Gauname (1.12):

$$u_n(x, y) = n \left( \frac{1}{(xb_{n1} + a_{n1})^\alpha} + \frac{1}{(xb_{n2} + a_{n2})^\beta} - \frac{1}{(xb_{n1} + a_{n1})^\alpha (xb_{n2} + a_{n2})^\beta} \right) = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{nx^\alpha y^\beta}. \quad (2.17)$$

Maksimumo ribinį skirstinį (2.16) ir išraišką (2.17) įstatome į (1.13):

$$v_n(x, y) = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{nx^\alpha y^\beta} + \ln \left( e^{-\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta}} \right) = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{nx^\alpha y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta} = -\frac{1}{nx^\alpha y^\beta}. \quad (2.18)$$

Taikydami 1.6 teoremą, visiems  $(x, y)$  su kuriais  $\frac{u_n(x, y)}{n} \leq \frac{1}{2}$  ir  $H(x, y) > 0$ , įvertinsime konvergavimo greitį (1.15) lygybėje.

Įstatę (2.17) į (1.16), o (2.18) į (1.17) gauname:

$$R_{1,n}(x, y) = \frac{2 \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right)^2}{n} + \frac{2 \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right)^4}{n^2} \frac{1}{1-q}, \quad (2.19)$$

$$R_{2,n}(x, y) = \left| -\frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right| + \frac{\left( -\frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right)^2}{2} \frac{1}{1-s}, \quad (2.20)$$

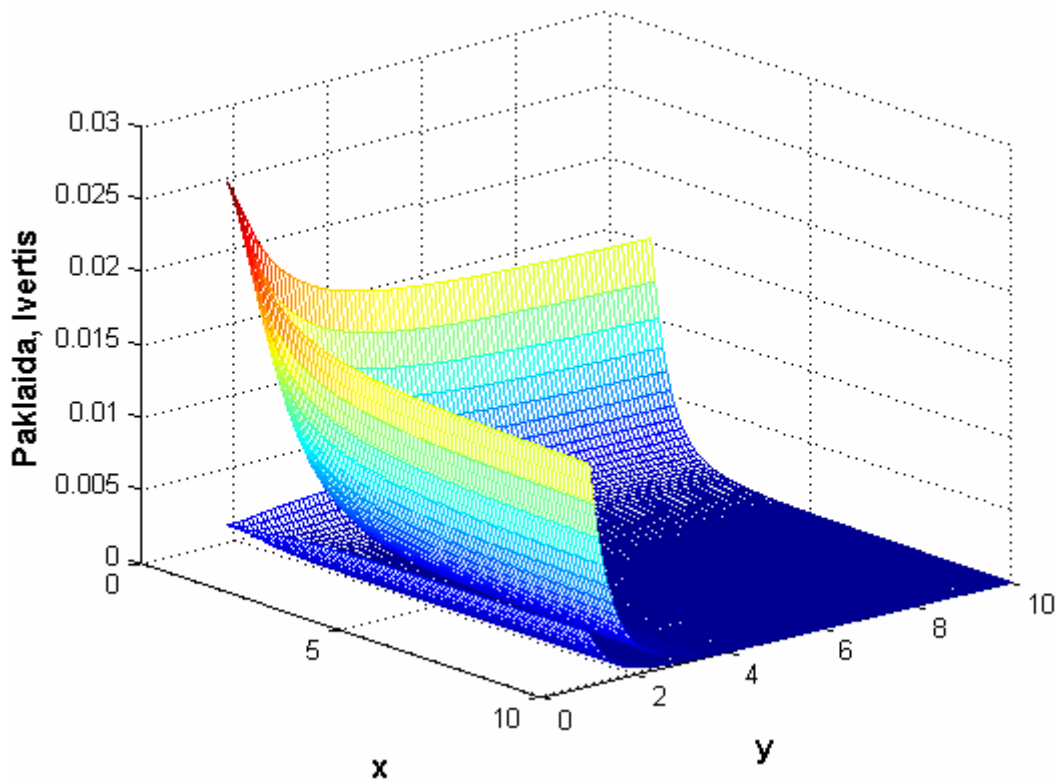
o  $0 < q, s < 1$  parenkami taip, kad

$$\frac{2 \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right)^2}{3n} \leq q, \quad \frac{1}{3} \left| -\frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right| \leq s.$$

Įstatę (2.19) ir (2.20) išraiškas gauname konvergavimo greičio įvertį (1.15) lygybėje:

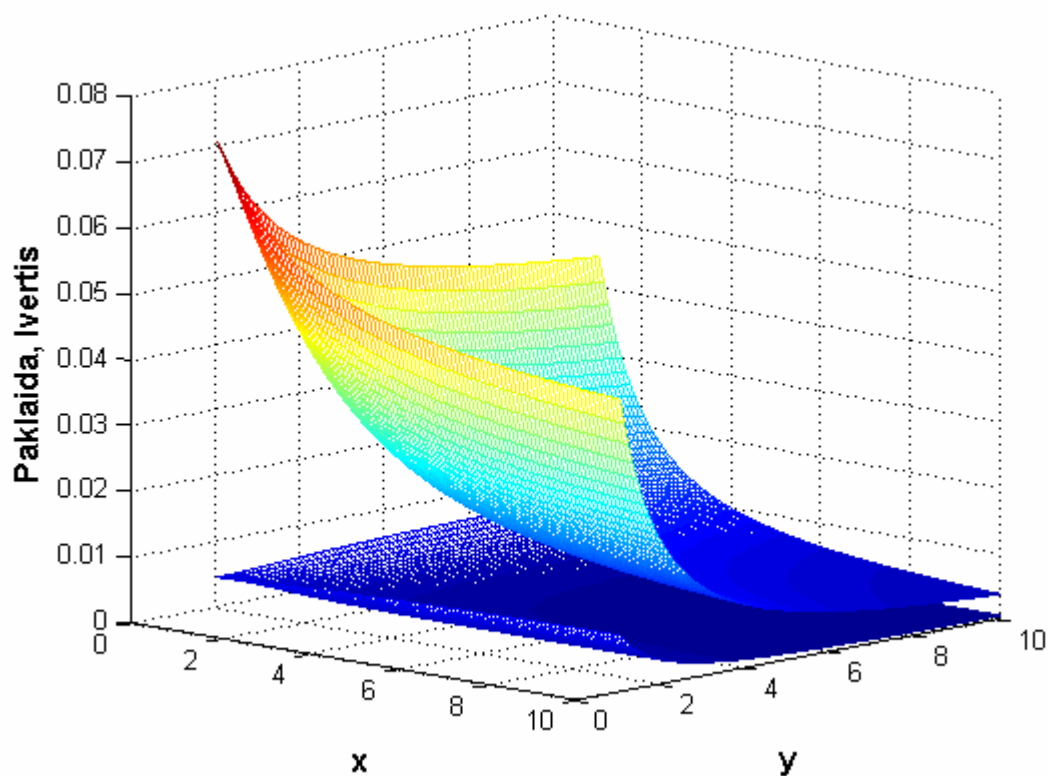
$$\begin{aligned} & \left| P \left( \frac{Z_n^{(1)} - a_{n1}}{b_{n1}} \leq x, \frac{Z_n^{(2)} - a_{n2}}{b_{n2}} \leq y \right) - H(x, y) \right| \leq \Delta_n(x, y) = \\ & = e^{-\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta}} \left( \left( \frac{2 \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right)^2}{n} + \frac{2 \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right)^4}{n^2} \frac{1}{1-q} \right) + \left( \left| -\frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right| + \frac{\left( -\frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right)^2}{2} \frac{1}{1-s} \right) \right) + \\ & + \left( \frac{2 \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right)^2}{n} + \frac{2 \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right)^4}{n^2} \frac{1}{1-q} \right) \cdot \left( \left| -\frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right| + \frac{\left( -\frac{1}{nx^\alpha y^\beta} \right)^2}{2} \frac{1}{1-s} \right). \end{aligned}$$

Braižome paklaidos ir konvergavimo greičio įvertio paviršius, kai  $n$ -fiksotas,  $n = 50$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$  (2.3 pav.).



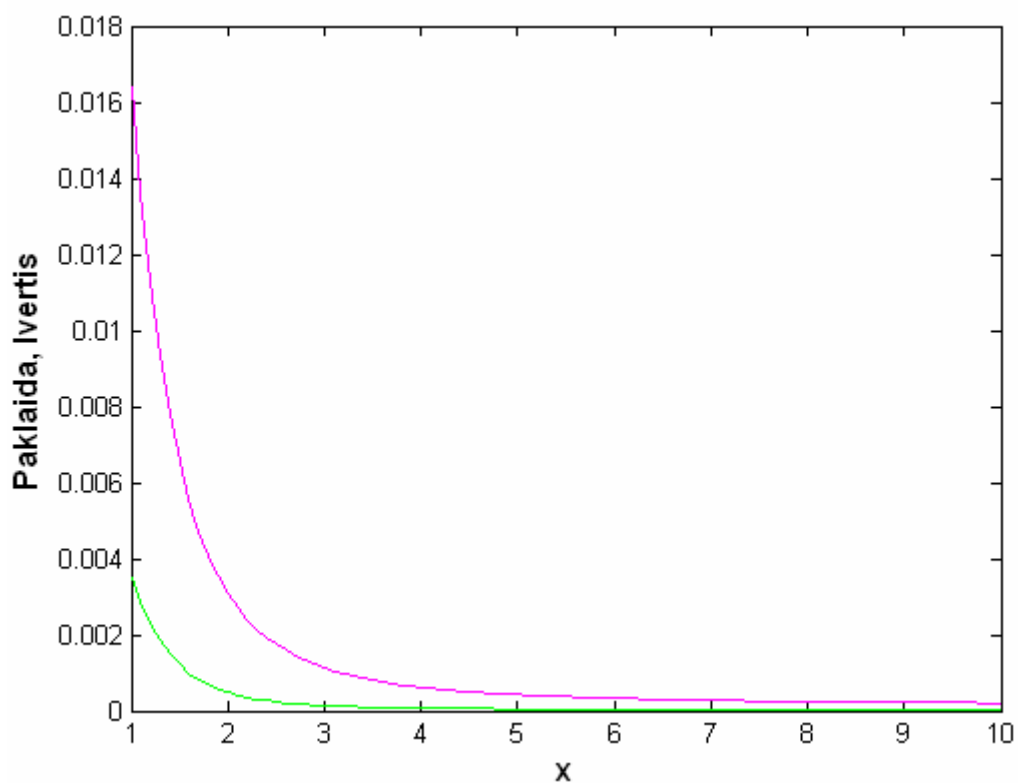
2.3 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įvertio paviršius, kai  $n = 50, \alpha = 2, \beta = 2$ .

Braižome paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio paviršius, kai  $n$ -fiksotas,  $n = 20$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$  (2.4 pav.).



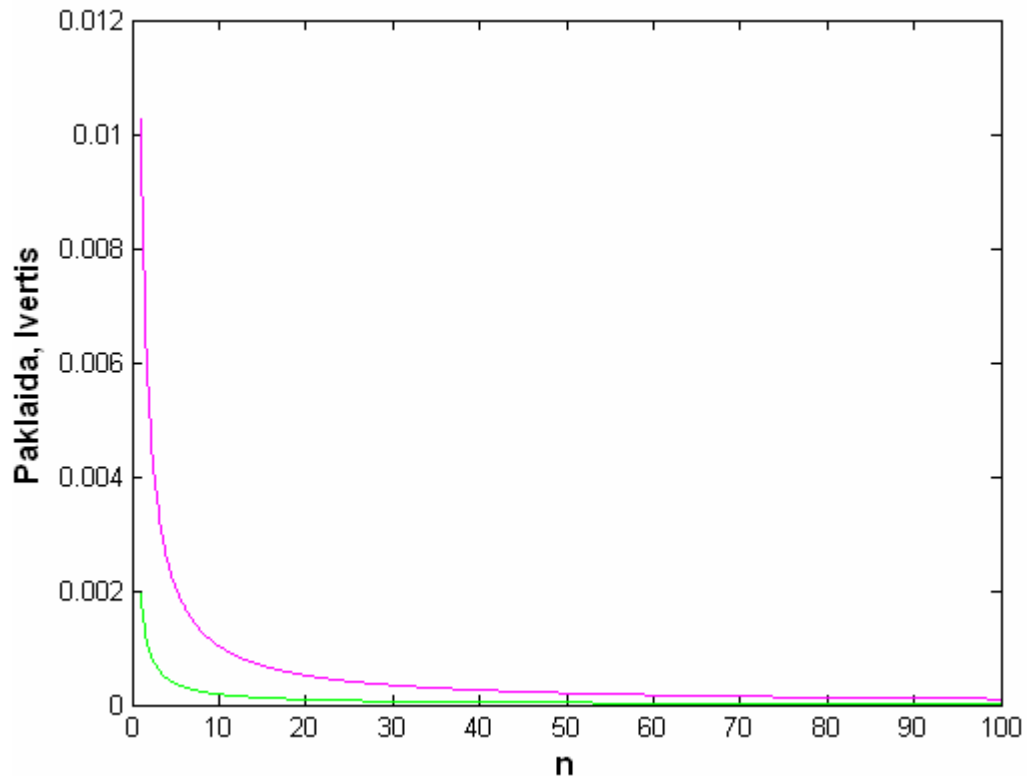
**2.4 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio paviršius, kai  $n = 20, \alpha = 1, \beta = 1$ .**

Braižome paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafiką, kai  $n = 50$ ,  $y = 4$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$ , o  $x$ -kintamas (2.5 pav.).



**2.5 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai  $n = 50, y = 4, \alpha = 2, \beta = 2$ .**

Braižome paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafiką, kai  $x = 10$ ,  $y = 4$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$ , o  $n$ -kintamas (2.6 pav.).



**2.6 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai  $x = 10$ ,  $y = 4$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$ .**

Iš 2.3 pav. ir 2.4 pav. matome, kai  $x$  ir  $y$  didėja, paklaida ir įvertis artėja prie nulio. Iš 2.5 pav. matome, kai  $x$  didėja, paklaida ir įvertis taip pat artėja prie nulio. Iš 2.6 pav. matome, kai  $n$  didėja, paklaida ir įvertis artėja prie nulio.

Daugiau paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikų pateikta 1 priede (kai vektoriaus komponentės nepriklausomos).

## 2.5. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS, KAI VEKTORIAUS KOMPONENTĖS PRIKLAUSOMOS

Tarkime, kad vektoriaus  $(X, Y)$  komponentės yra priklausomos. Tirsime atvejį, kai

$$F(x, y) = 1 - \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - 1}, \quad x, y \geq 1; \alpha, \beta > 0. \quad (2.21)$$

Rasime dvimačių Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo ribinį skirstinį, kai  $\alpha \neq 1$ ,  $\beta \neq 1$ .

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantas:  $a_{n1} = 0$ ,  $b_{n1} = n^{\frac{1}{\alpha}}$  ir  $a_{n2} = 0$ ,  $b_{n2} = n^{\frac{1}{\beta}}$ , su kuriomis (1.11):

$$P\left(\frac{Z_n^{(1)} - a_{n1}}{b_{n1}} \leq x, \frac{Z_n^{(2)} - a_{n2}}{b_{n2}} \leq y\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H(x, y) = e^{-\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta}}, \quad (2.22)$$

čia  $H(x, y)$  yra neišsigimusi dvimatė skirstinio funkcija.

Gauname (1.12):

$$u_n(x, y) = n \left( \frac{1}{(xb_{n1} + a_{n1})^\alpha} + \frac{1}{(xb_{n2} + a_{n2})^\beta} - \frac{1}{(xb_{n1} + a_{n1})^\alpha (xb_{n2} + a_{n2})^\beta} \right) = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} - \frac{1}{n} \quad (2.23)$$

Maksimumo ribinį skirstinį (2.22) ir išraišką (2.23) įstatome į (1.13):

$$v_n(x, y) = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} - \frac{1}{n} + \ln \left( e^{-\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta}} \right) = -\frac{1}{x^\alpha + y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} - \frac{1}{n}. \quad (2.24)$$

Taikydami 1.6 teoremą, visiems  $(x, y)$  su kuriais  $\frac{u_n(x, y)}{n} \leq \frac{1}{2}$  ir  $H(x, y) > 0$ , įvertinsime konvergavimo greitį (1.15) lygybėje.

Įstatę (2.23) į (1.16), o (2.24) į (1.17) gauname:

$$R_{1,n}(x, y) = \frac{2 \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} - \frac{1}{n} \right)^2}{n} + \frac{2 \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} - \frac{1}{n} \right)^4}{n^2} \frac{1}{1-q}, \quad (2.25)$$

$$R_{2,n}(x, y) = \left| -\frac{1}{x^\alpha + y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} \right| + \frac{\left( -\frac{1}{x^\alpha + y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} \right)^2}{2} \frac{1}{1-s}, \quad (2.26)$$

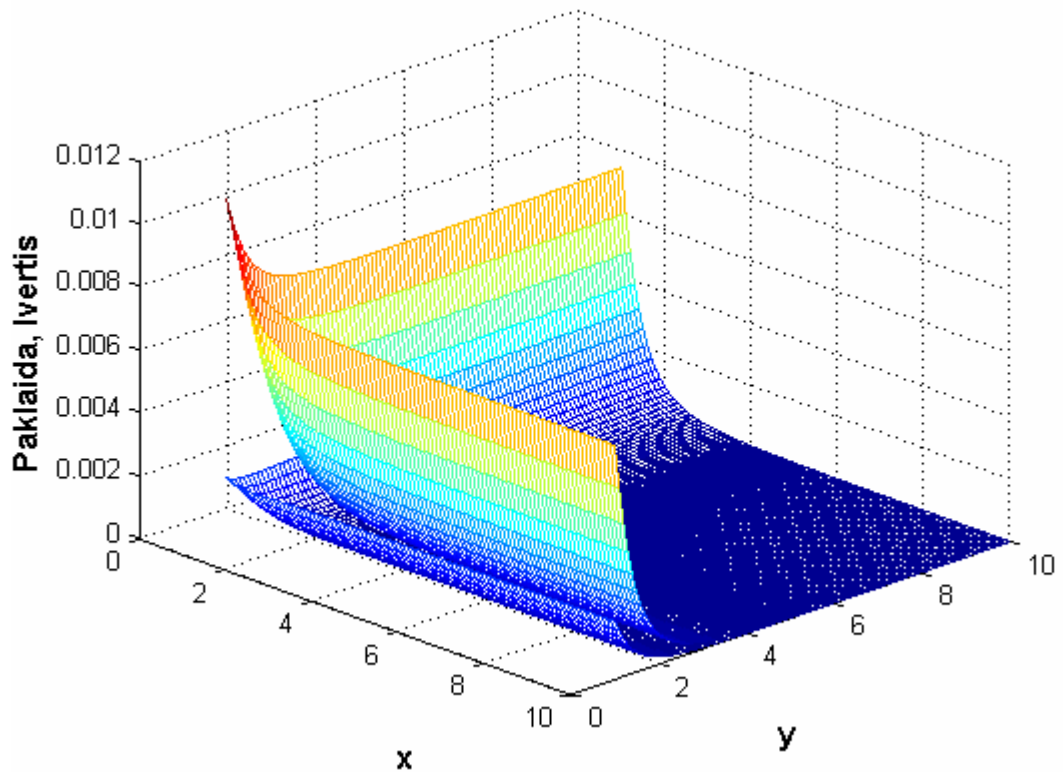
o  $0 < q, s < 1$  parenkami taip, kad

$$\frac{2}{3} \frac{\left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} - \frac{1}{n} \right)^2}{n} \leq q, \quad \frac{1}{3} \left| -\frac{1}{x^\alpha + y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} \right| \leq s.$$

Įstatę (2.25) ir (2.26) išraiškas gauname konvergavimo greičio įvertį (1.15) lygybėje:

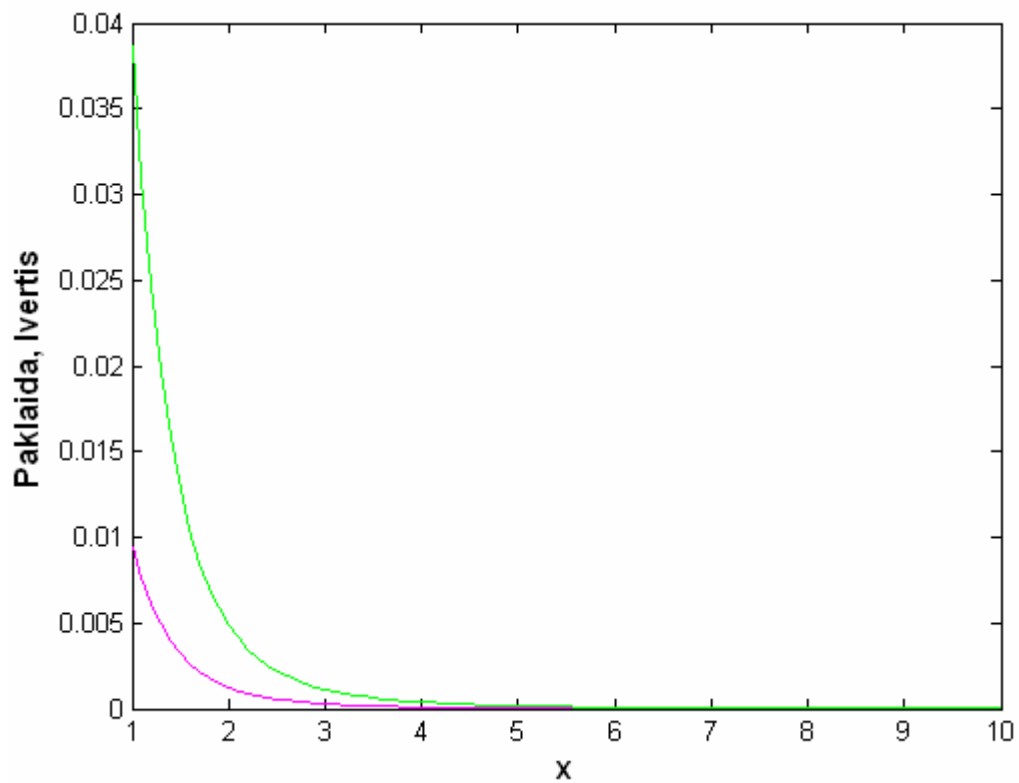
$$\begin{aligned}
& \left| P \left( \frac{Z_n^{(1)} - a_{n1}}{b_{n1}} \leq x, \frac{Z_n^{(2)} - a_{n2}}{b_{n2}} \leq y \right) - H(x, y) \right| \leq \Delta_n(x, y) = \\
& = e^{-\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta}} \left( \frac{2 \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - \frac{1}{n}} \right)^2}{n} + \frac{2 \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - \frac{1}{n}} \right)^4}{n^2} \frac{1}{1-q} + \left| -\frac{1}{x^\alpha + y^\beta - \frac{1}{n}} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} \right| + \right. \\
& \left. + \frac{\left( -\frac{1}{x^\alpha + y^\beta - \frac{1}{n}} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} \right)^2}{2} \frac{1}{1-s} + \left( \frac{2 \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - \frac{1}{n}} \right)^2}{n} + \frac{2 \left( \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - \frac{1}{n}} \right)^4}{n^2} \frac{1}{1-q} \right) \right. \\
& \left. \cdot \left( \left| -\frac{1}{x^\alpha + y^\beta - \frac{1}{n}} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} \right| + \frac{\left( -\frac{1}{x^\alpha + y^\beta - \frac{1}{n}} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} \right)^2}{2} \frac{1}{1-s} \right) \right).
\end{aligned}$$

Braižome paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio paviršius, kai  $n$ -fiksiuotas,  $n=100$ ,  $\alpha=2$ ,  $\beta=2$  (2.7 pav.).



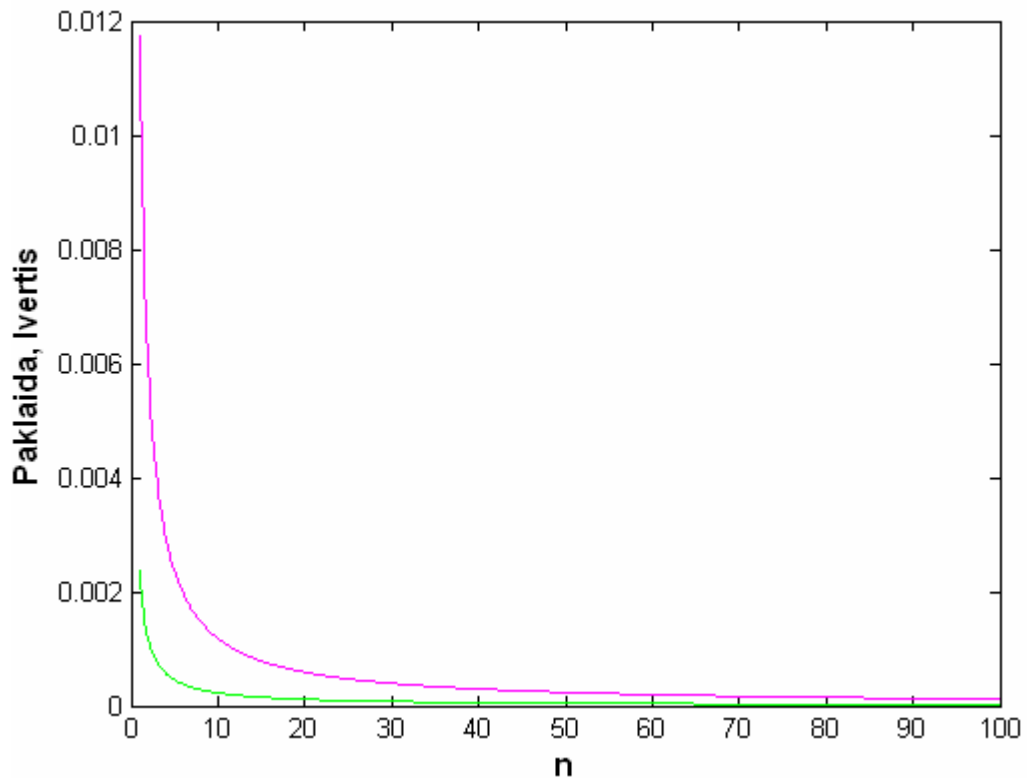
2.7 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įvertio paviršius, kai  $n = 100, \alpha = 2, \beta = 2$ .

Braižome paklaidos ir konvergavimo greičio įvertio grafiką, kai  $n = 20, y = 10, \alpha = 2, \beta = 2$ , o  $x$ -kintamas (2.8 pav.).



2.8 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įvertio grafikas, kai  $n = 20, y = 10, \alpha = 2, \beta = 2$ .

Braižome paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafiką, kai  $x = 5$ ,  $y = 4$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$ , o  $n$ -kintamas (2.9 pav.).



**2.9 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai  $x = 5$ ,  $y = 4$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$ .**

Iš 2.7 pav. matome, kai  $x$  ir  $y$  didėja, paklaida ir įvertis artėja prie nulio. Iš 2.8 pav. matome, kai  $x$  didėja, paklaida ir įvertis taip pat artėja prie nulio. Iš 2.9 pav. matome, kai  $n$  didėja, paklaida ir įvertis artėja prie nulio.

Daugiau paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikų pateikta 2 priede (kai vektorių komponentės priklausomos).

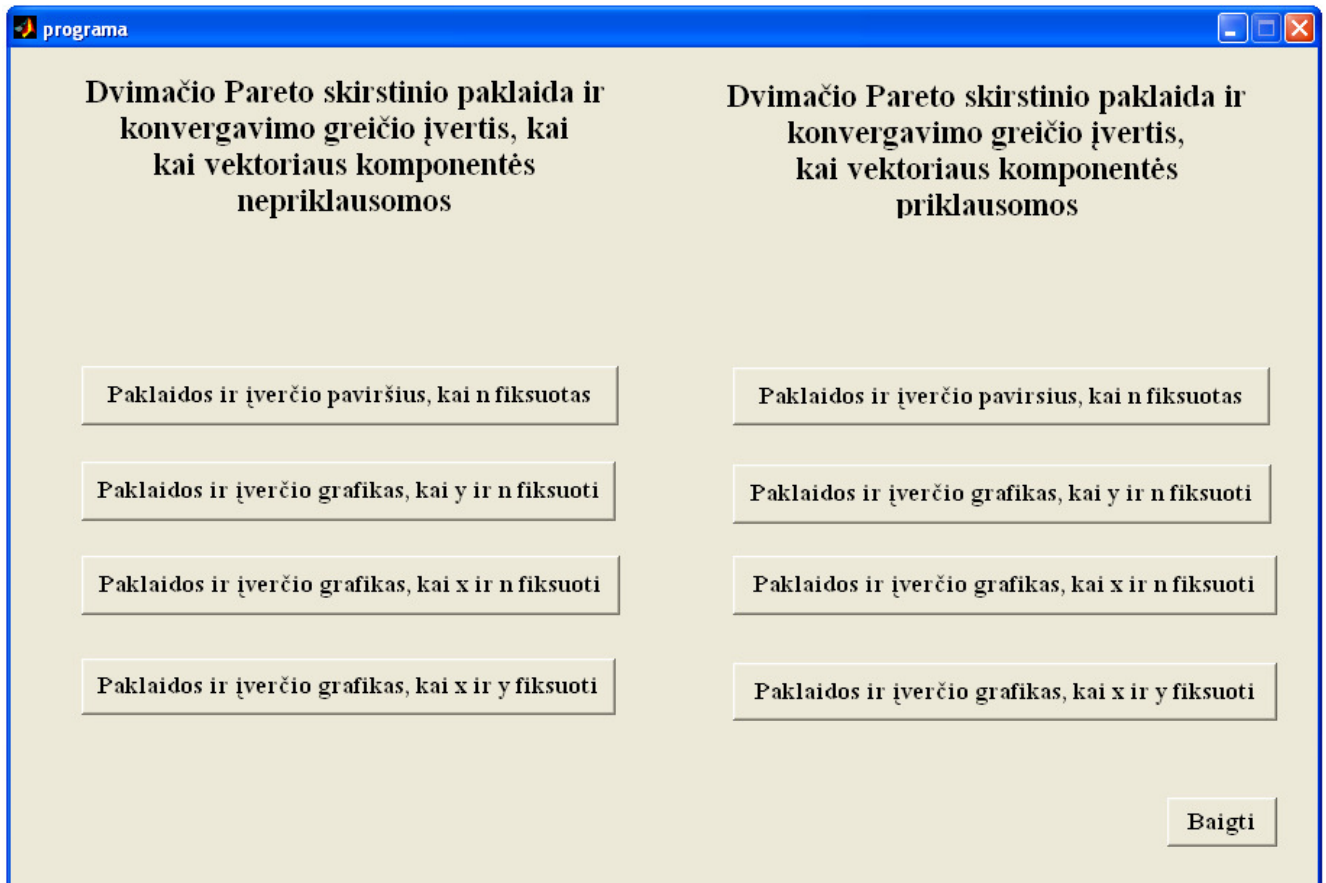


### 3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Vartotojo sąsaja yra sukurta naudojant Matlab 6.5.1 programinį paketą. Matlab 6.5.1 paketas remiasi nesudėtinga ir lanksčia programavimo kalba, kuria patogiu aprašyti sprendžiamus matematinis uždavinius ir juos pavaizduoti grafiškai. Sukurtas programos M failas pavadinimu programa.m, o programos langas pavadinimu programa.fig. Vartotojas norėdamas pradėti darbą su programa turi nurodyti katalogą, kuriame yra programos failas (Current directory). Vartotojo sąsaja sukurta naudojantis Matlab modulį „Guide“.

Current Directory: C:\MATLAB6p5p1\work

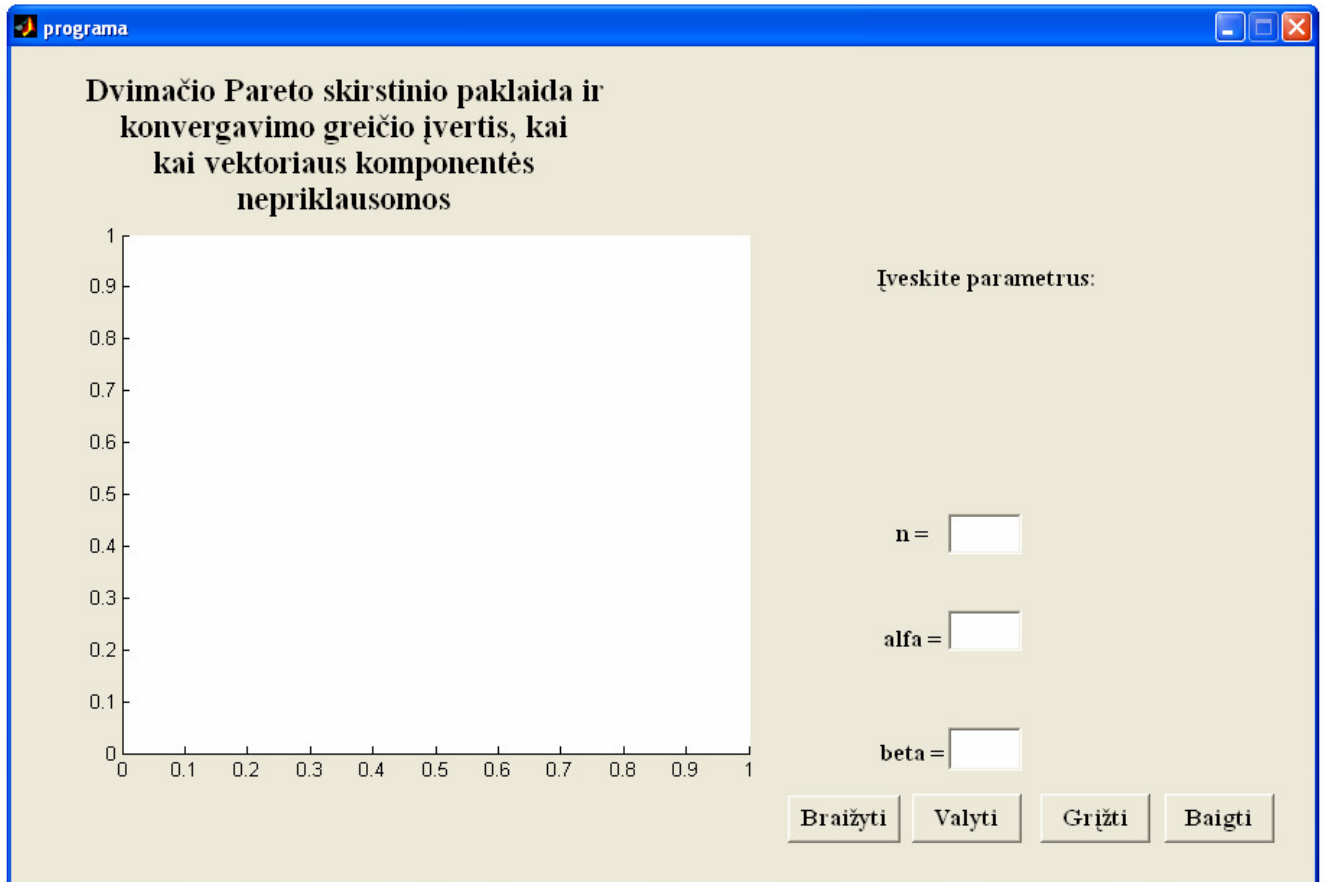
Norint atidaryti programos langą (3.1 pav.), Matlab darbo lauke reikia parašyti žodelį „programa“ ir paspausti „Enter“.



3.1 pav. Pagrindinis programos langas.

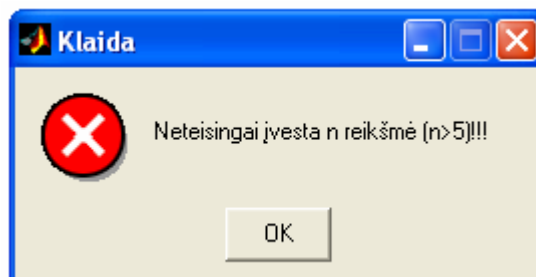
Pagrindiniame programos lange (3.1 pav.) reikia pasirinkti, kurio dvimačio Pareto skirstinio paklaidą ir konvergavimo greičio įvertį nagrinėsime (kai vektoriaus komponentės priklausomos ar, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos).

Pasirenkame dvimačio Pareto skirstinio paklaidą ir konvergavimo greičio įvertį, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos. Galimi keturi atvejai (3.1 pav.). Pasirenkame pirmą atvejį. Paspaudę mygtuką „Paklaidos ir įverčio paviršius, kai  $n$  fiksuotas“ atsidaro langas (3.2 pav.)

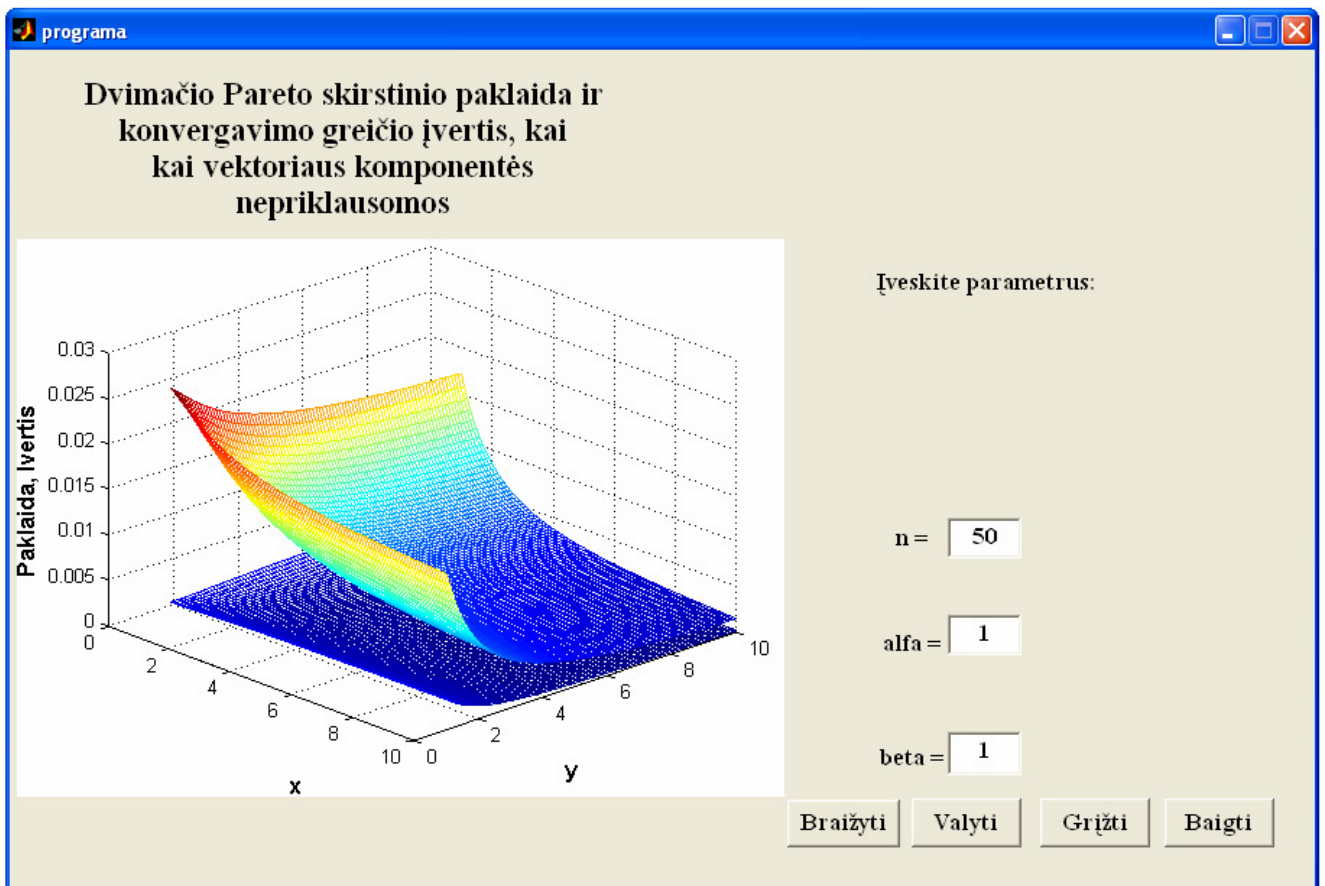


3.2 pav. Paklaidos ir įverčio paviršius, kai  $n$ -fiksuotas.

Pirmiausia įvedame pradinį parametrus. Jeigu vartotojas įveda neteisingą parametro reikšmę, jis yra informuojamas apie padarytą klaidą (3.3 pav.). Jeigu parametrai teisingai įvesti, paspaudžiame mygtuką „Braižyti“. Nubraižomi paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio paviršiai (3.4 pav.). Norėdami įvesti naujus parametrus ir nubraižyti naują grafiką, paspaudžiame mygtuką „Valyti“. Norėdami sugrįžti į pagrindinį programos langą, paspaudžiame mygtuką „Grįžti“. Norėdami baigti programos darbą, paspaudžiame mygtuką „Baigti“.

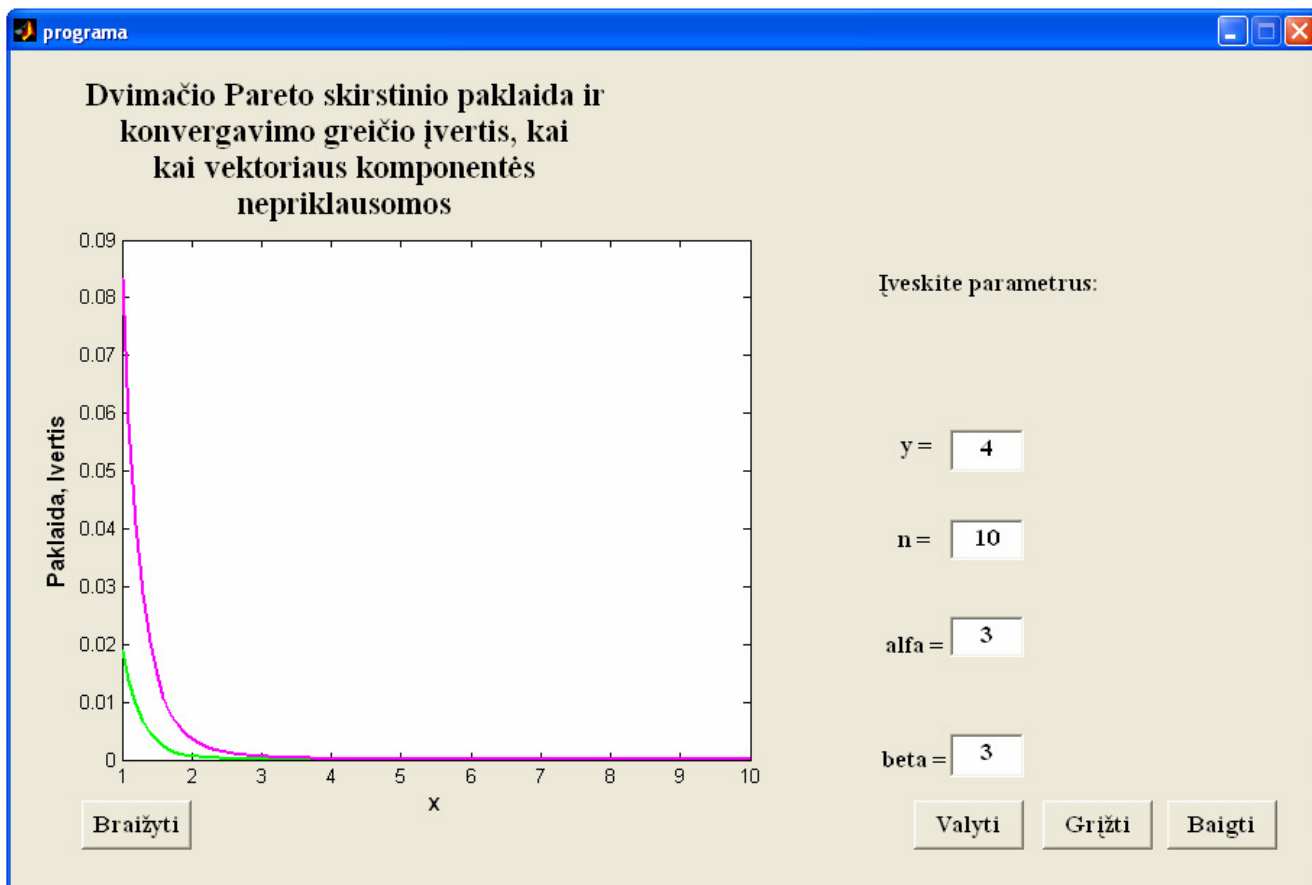


3.3 pav. Klaida.

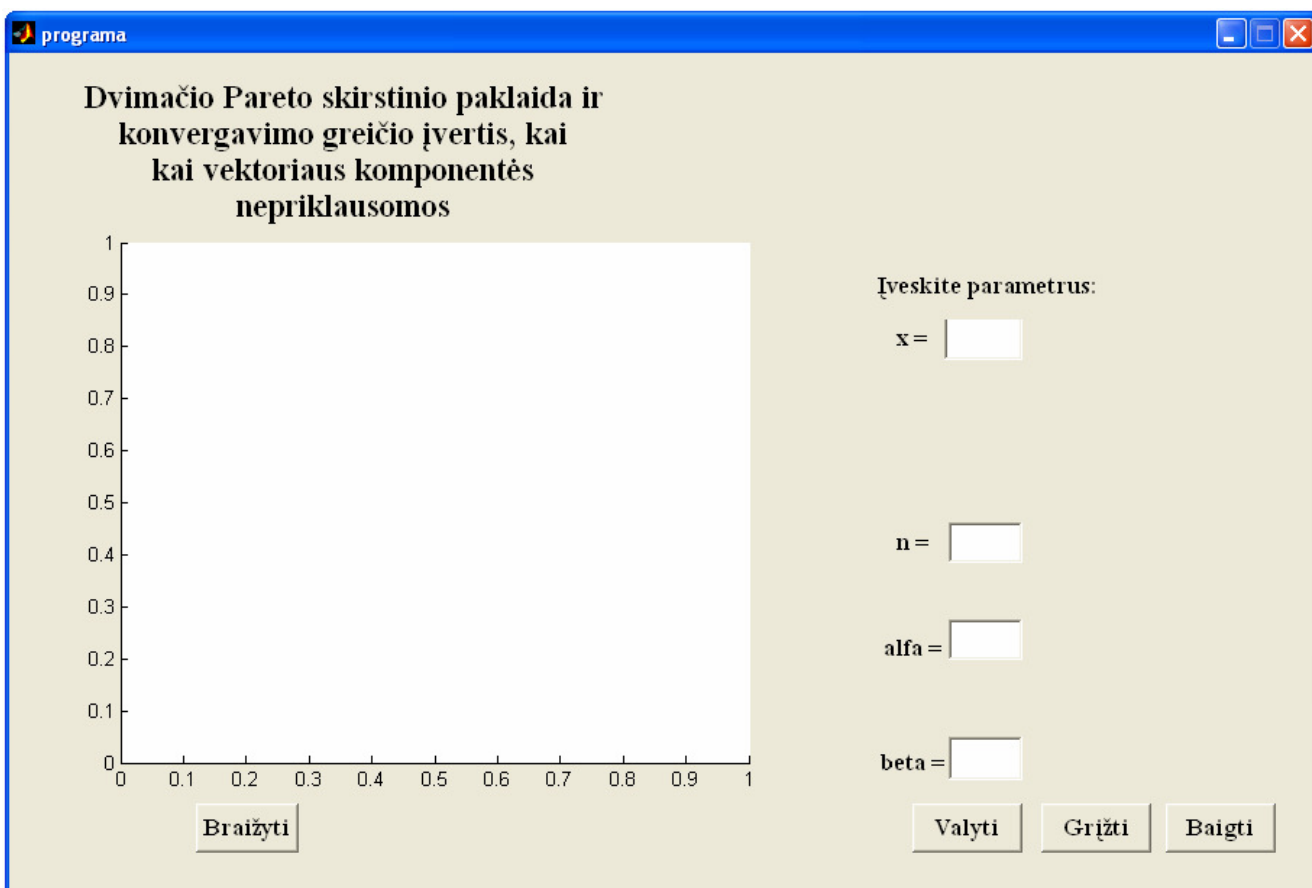


**3.4 pav. Paklaidos ir įverčio paviršius, kai  $n = 50, \alpha = 1, \beta = 1$ .**

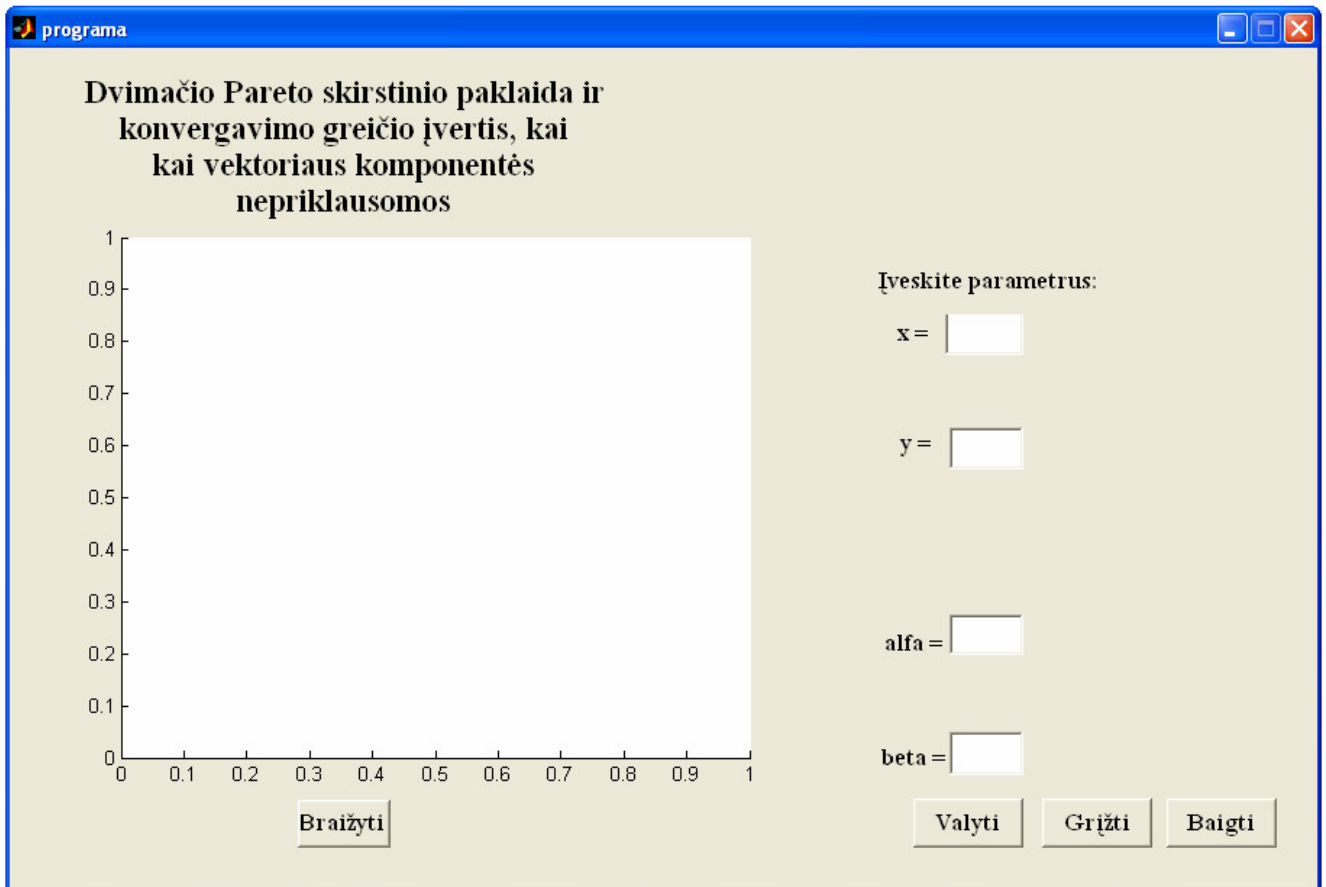
Kiti galimi dvimačio Pareto skirstinio paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio atvejai, kai vektorių komponentės nepriklausomos. Paspaudus mygtuką „Paklaidos ir įverčio grafikas, kai y ir n fiksuoti“ atsidaro langas, kuriame įvedus pradinis parametrus nubraižomas grafikas (3.5 pav.). Paspaudus mygtuką „Paklaidos ir įverčio grafikas, kai x ir n fiksuoti“ atsidaro langas (3.6 pav.). Paspaudus mygtuką „Paklaidos ir įverčio grafikas, kai x ir y fiksuoti“ atsidaro langas (3.7 pav.).



3.5 pav. Paklaidos ir įverčio grafikas, kai  $y = 4, n = 10, \alpha = 3, \beta = 3$ .



3.6 pav. Paklaidos ir įverčio grafikas, kai  $x$  ir  $n$  fiksuoti.



**3.7 pav. Paklaidos ir įverčio grafikas, kai  $x$  ir  $y$  fiksuoti.**

Analogiškai pasirenkame dvimačio Pareto skirstinio paklaidą ir konvergavimo greičio įvertį, kai vektoriaus komponentės priklausomos. Taip pat galimi keturi atvejai (3.1 pav.).

## DISKUSIJA

Atlikdami vienmačio Pareto skirstinio

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \geq 1, \quad \alpha > 0,$$

geometrinio maks stabilumo tyrimą, kai  $\alpha = 1$ , gavome, kad vienmatis Pareto skirstinys yra geometriškai maks stabilus. Tačiau, kai  $\alpha \neq 1$ , vienmatis Pareto skirstinys nėra geometriškai maks stabilus. Gavome, kad vienmatė Pareto skirstinio funkcija yra asimptotiškai „pusiau“ maks stabili, kai  $p \rightarrow 0$ . Atlikdama geometrinio maks stabilumo tyrimą vienmačiui Pareto skirstiniui, rėmiausi prof. A. Aksomaičio straipsniu „Perkėlimo teorema ir geometriškai maks-stabilieji atsitiktiniai dydžiai“.

Atlikome geometrinio maks stabilumo tyrimą dvimačiams Pareto skirstiniams, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos ir, kai vektoriaus komponentės priklausomos.

Gavome, kad dvimatis Pareto skirstinys, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos

$$F(x, y) = 1 - \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - 1}, \quad x, y \geq 1; \quad \alpha, \beta > 0,$$

nėra geometriškai maks stabilus (kai  $\alpha = 1, \beta = 1$  ir  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ ). Taip pat nėra asimptotiškai maks stabilus, kai  $p \rightarrow 0$ .

Vienmatės marginaliosios Pareto skirstinio funkcijos yra:

$$F_1(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \geq 1, \quad \alpha > 0;$$

$$F_2(y) = 1 - \frac{1}{y^\beta}, \quad y \geq 1, \quad \beta > 0.$$

Įrodėmė, kad vienmatė Pareto skirstinio funkcija  $F_1(x)$  yra geometriškai maks stabili, kai  $\alpha = 1$ . Tai skirstinio funkcija  $F_2(y)$  taip pat bus geometriškai maks stabili, kai  $\beta = 1$ . Tačiau gaunamas nelauktas rezultatas. Vienmatės marginaliosios Pareto skirstinio funkcijos  $F_1(x)$  ir  $F_2(y)$  yra geometriškai maks stabilios, o dvimatė Pareto skirstinio funkcija, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos, nėra geometriškai maks stabili (kai  $\alpha = 1, \beta = 1$ ).

Kai  $\alpha \neq 1$ , vienmatė Pareto skirstinio funkcija  $F_1(x)$  nėra geometriškai maks stabili. Gaunamas asimptotinis „pusiau“ maks stabilumas, kai  $p \rightarrow 0$ . Tai skirstinio funkcija  $F_2(y)$  taip pat nėra geometriškai maks stabili, ir asimptotinis „pusiau“ maks stabilumas gaunamas, kai  $p \rightarrow 0$  (kai  $\beta \neq 1$ ). Taigi vienmatės marginaliosios Pareto skirstinio funkcijos  $F_1(x)$  ir  $F_2(y)$  nėra geometriškai maks stabilios. Dvimatė Pareto skirstinio funkcija, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos, taip pat nėra geometriškai maks stabili (kai  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ ). Vienmatės marginaliosios Pareto skirstinio funkcijos

$F_1(x)$  ir  $F_2(y)$  yra asimptotiškai „pusiau“ maks stabilios. Tačiau dvimatė Pareto skirstinio funkcija, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos, nėra asimptotiškai maks stabili, kai  $p \rightarrow 0$  (kai  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ ).

Kai vektoriaus komponentės yra priklausomos, tyrėme atvejį, kai

$$F(x, y) = 1 - \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - 1}, \quad x, y \geq 1; \quad \alpha, \beta > 0,$$

nėra geometriškai maks stabili (kai  $\alpha = 1, \beta = 1$  ir  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ ). Taip pat nėra asimptotiškai maks stabili, kai  $p \rightarrow 0$ .

Vienmatės marginaliosios Pareto skirstinio funkcijos, kai vektoriaus komponentės priklausomos sutampa su vienmatėmis marginaliosiomis Pareto skirstinio funkcijomis, kai vektoriaus komponentės nepriklausomis. Taigi priklausomų komponentių atveju gauname analogiškus rezultatus, kaip ir nepriklausomų komponentių atveju.

Literatūroje neradau dvimatės Pareto skirstinio funkcijos, kuri būtų geometriškai maks stabili, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos. Tačiau yra atvejų, kai dvimatė Pareto skirstinio funkcija yra geometriškai maks stabili, kai vektoriaus komponentės priklausomos. Prof. A. Aksomaičio ir I. Ivanovienės straipsnyje „Atsitiktinių vektorių geometrinis maks (min) stabilumas“ yra pateikta dvimatė Pareto skirstinio funkcija, kuri yra geometriškai maks stabili, kai vektoriaus komponentės priklausomos:

$$F(x, y) = \frac{1}{1 + x^{-\alpha} + y^{-\beta}}, \quad x > 0, y > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Vienmatės marginaliosios Pareto skirstinio funkcijos

$$F_1(x) = \frac{1}{1 + x^{-\alpha}}, \quad x > 0, \alpha > 0;$$

$$F_2(y) = \frac{1}{1 + y^{-\beta}}, \quad y > 0, \beta > 0;$$

taip pat yra geometriškai maks stabilios.

## IŠVADOS

1. Kai  $\alpha = 1$ , vienmatė Pareto skirstinio funkcija yra geometriškai maks stabili.
2. Kai  $\alpha \neq 1$ , vienmatė Pareto skirstinio funkcija nėra geometriškai maks stabili. Ribinė skirstinio funkcija (kai  $p \rightarrow 0$ ) yra taip pat Pareto. Gaunamas asimptotinis maks stabilumas.
3. Konvergavimo greitis  $p$  atžvilgiu yra  $p$  eilės, kai  $p \rightarrow 0$ .
4. Dvimatės Pareto skirstinio funkcijos nėra geometriškai maks stabilios, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos ir, kai vektoriaus komponentės priklausomos. Taip pat dvimatės Pareto skirstinio funkcijos nėra asimptotiškai maks stabilios, kai  $p \rightarrow 0$ .
5. Dvimačio Pareto skirstinio atveju, kai komponentių skaičius yra neatsitiktinis, konvergavimo greičio eilė  $n$  atžvilgiu yra  $\frac{1}{n}$ .



## REKOMENDACIJOS

Gairės tolesniems šios temos tyrimams:

- Atlikti geometrinio min stabilumo tyrimą vienmačiams Pareto skirstiniams.
- Atlikti geometrinio min stabilumo tyrimą dvimačiams Pareto skirstiniams, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos ir, kai vektoriaus komponentės priklausomos.
- Įvertinti konvergavimo greičio įvertį minimumo ribinėje teoremoje. Atlikti kompiuterinę įverčio analizę.

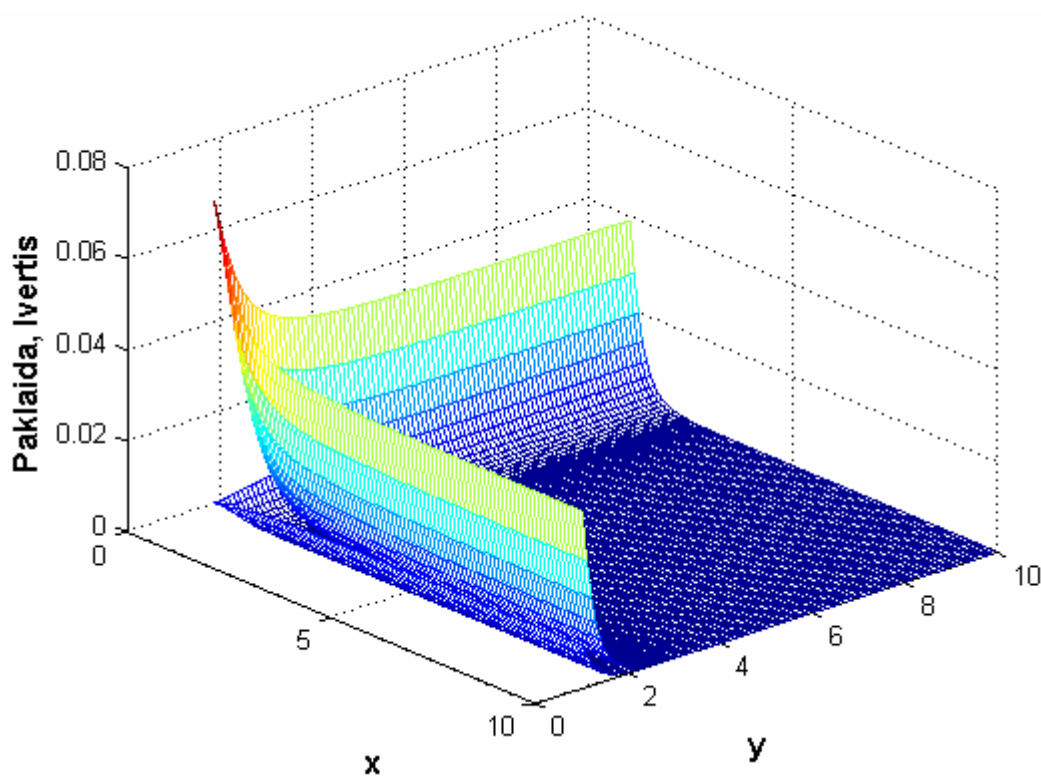
## **PADĖKOS**

Nuoširdžiai dėkoju savo darbo vadovui prof. dr. J. A. Aksomaičiui, už gerus patarimus, puikias idėjas, pataisymus.

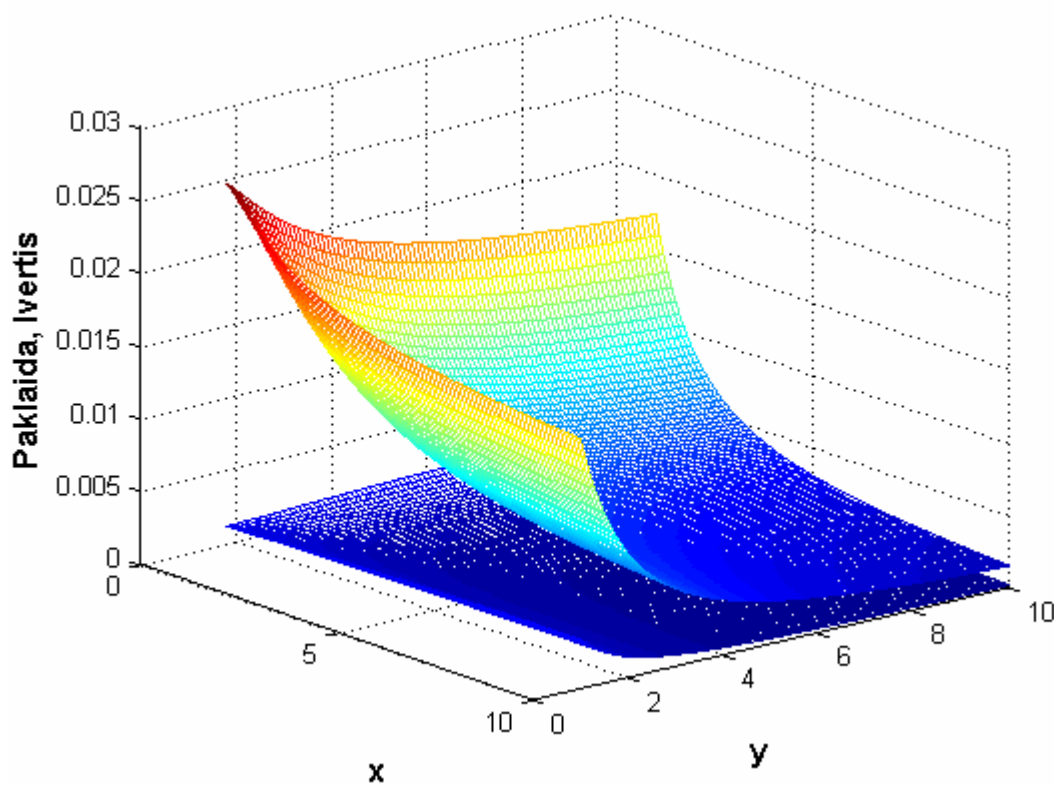
## LITERATŪRA

1. Aksomaitis A., Perkėlimo teorema ir geometriškai maks-stabilieji atsitiktiniai dydžiai. Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 2003, 673-676 psl.
2. Аксомайтис А., Неравномерная скорость сходимости в предельной теореме макс-схемы, Liet. Mat. Rink., 1988. T. 28, 211-215 c.
3. Aksomaitis A., Tikimybių teorija ir statistika. Kaunas: Technologija, 2000, 344 psl.
4. Aksomaitis A., Ivanovienė I., Atsitiktinių vektorių geometrinis maks (min) stabilumas. Liet. matem. rink., LMD darbai, 50, 2009, 402-206 psl.
5. Галамбош Я., Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик–М. Наука, 1984, 303 c.
6. Гнеденко Б. В., Гнеденко Д. Б., О распределении Лапласа и логистическом как предельных в теории вероятностей. Сердика, 1982, . Т. 8, с. 229-234.
7. Jokimaitis, A., Daugiamačių atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių asimptotika, Disertacija mokslų daktaro laipsniui, Vilnius, 1998.
8. Satheesh S., Unnikrishnan Nair N., On the stability of geometric extremes, Journal of the Indian Statistical Association, Vol. 42, 2004, p. 99-109.
9. [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)

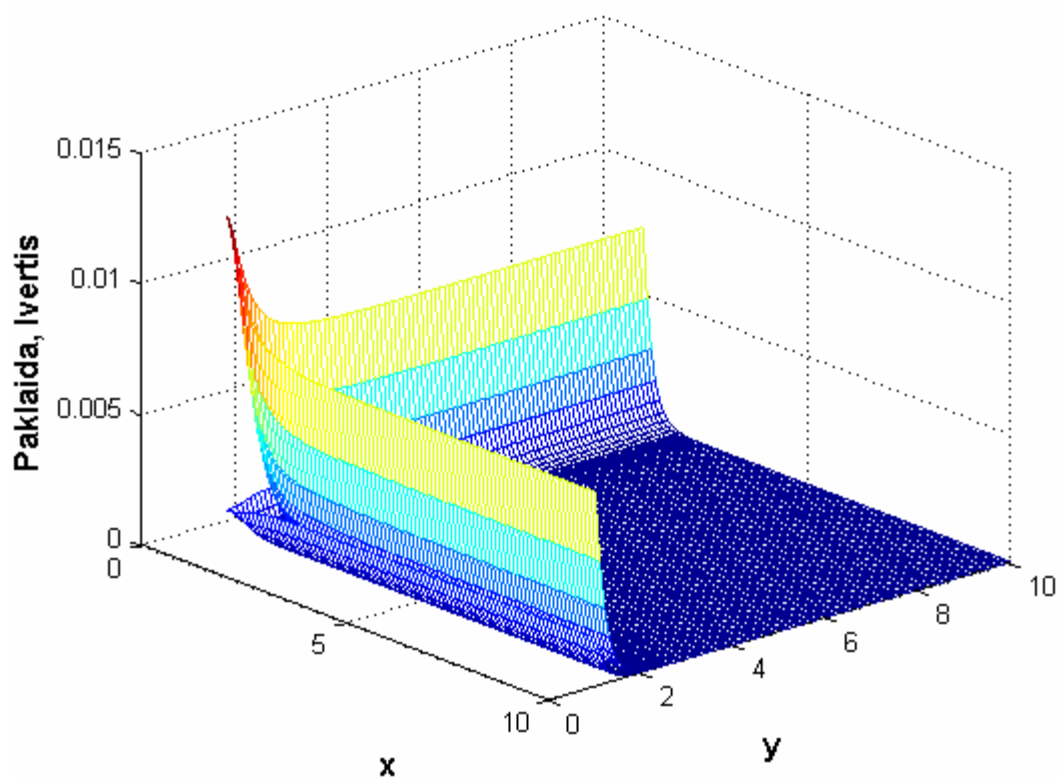
# 1 PRIEDAS. PAKLAIDA IR ĮVERTIS (NEPRIKLAUSOMŲ KOMPONENČIŲ ATVEJU)



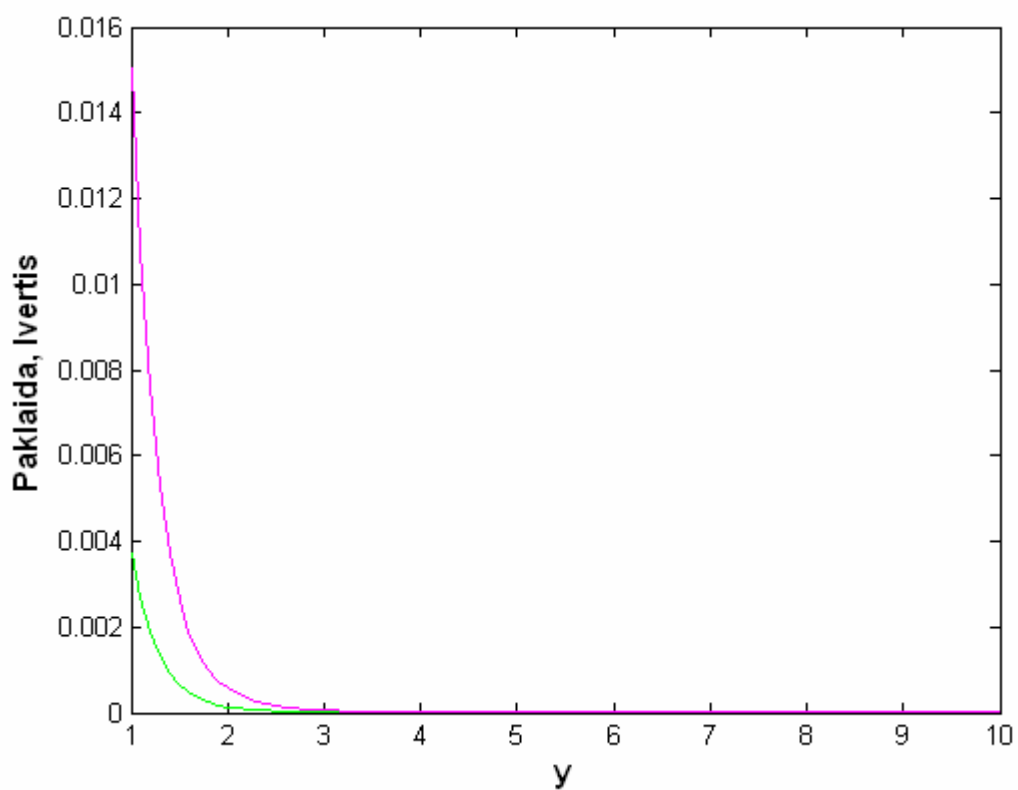
1 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įvertio paviršius, kai  $n = 20, \alpha = 3, \beta = 3$ .



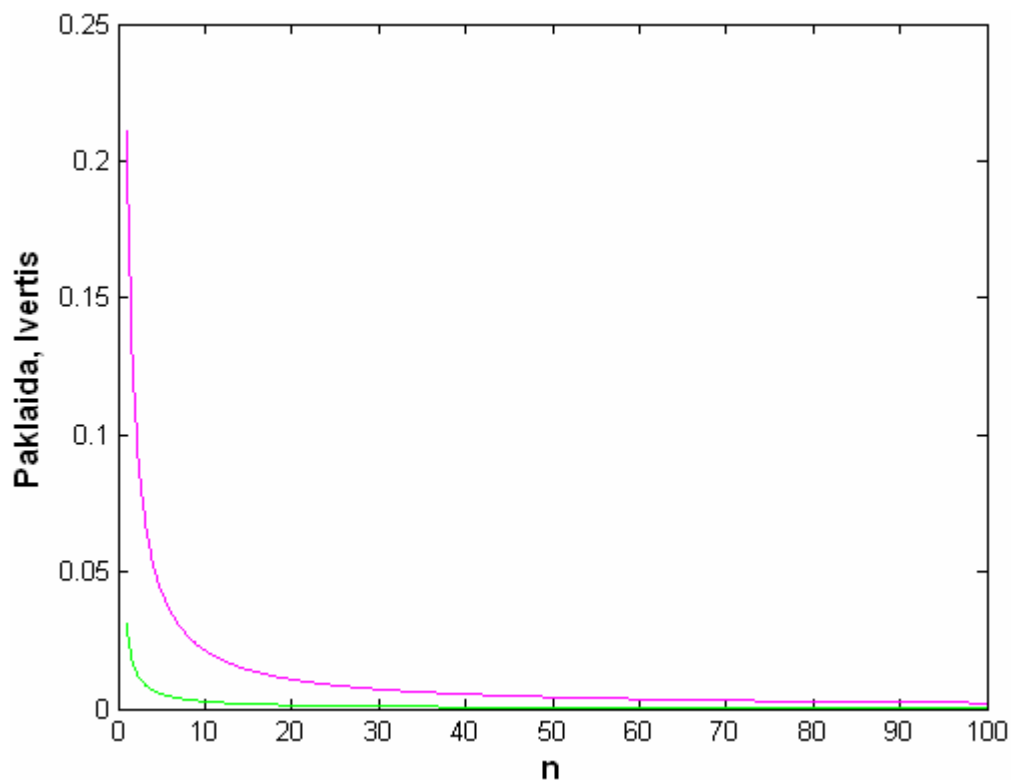
2 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įvertio paviršius, kai  $n = 50, \alpha = 1, \beta = 1$ .



3 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įvertis paviršius, kai  $n=100, \alpha=4, \beta=4$ .

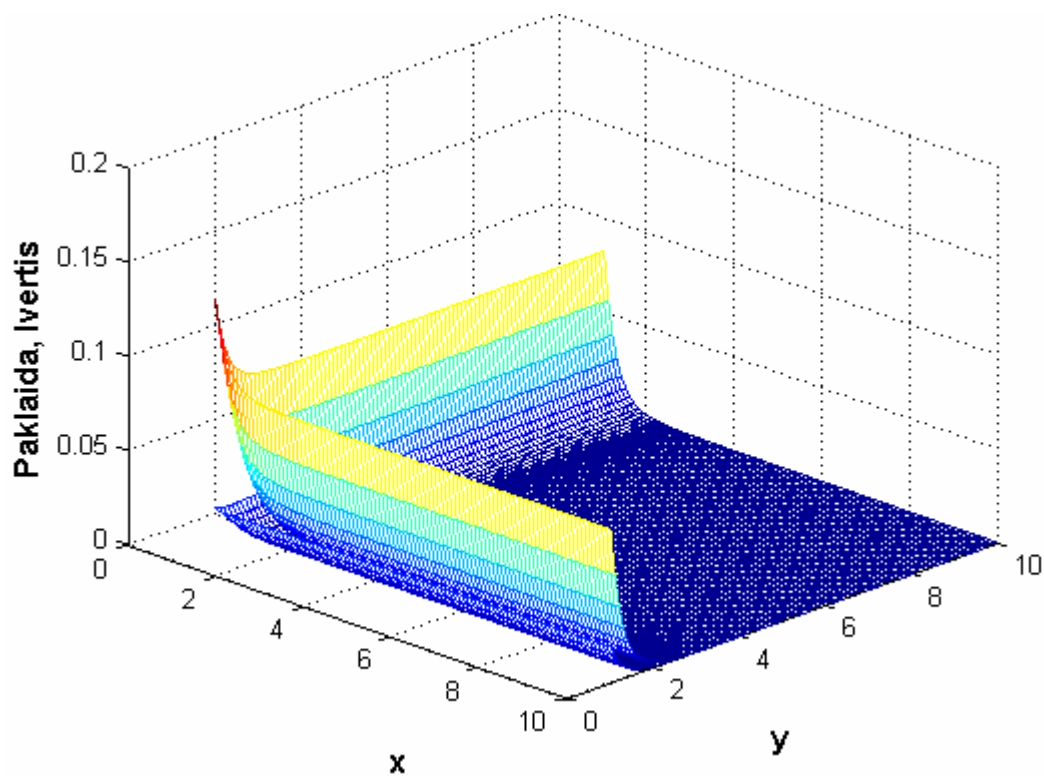


4 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įvertis grafikas, kai  $x=10, n=50, \alpha=3, \beta=3$ .

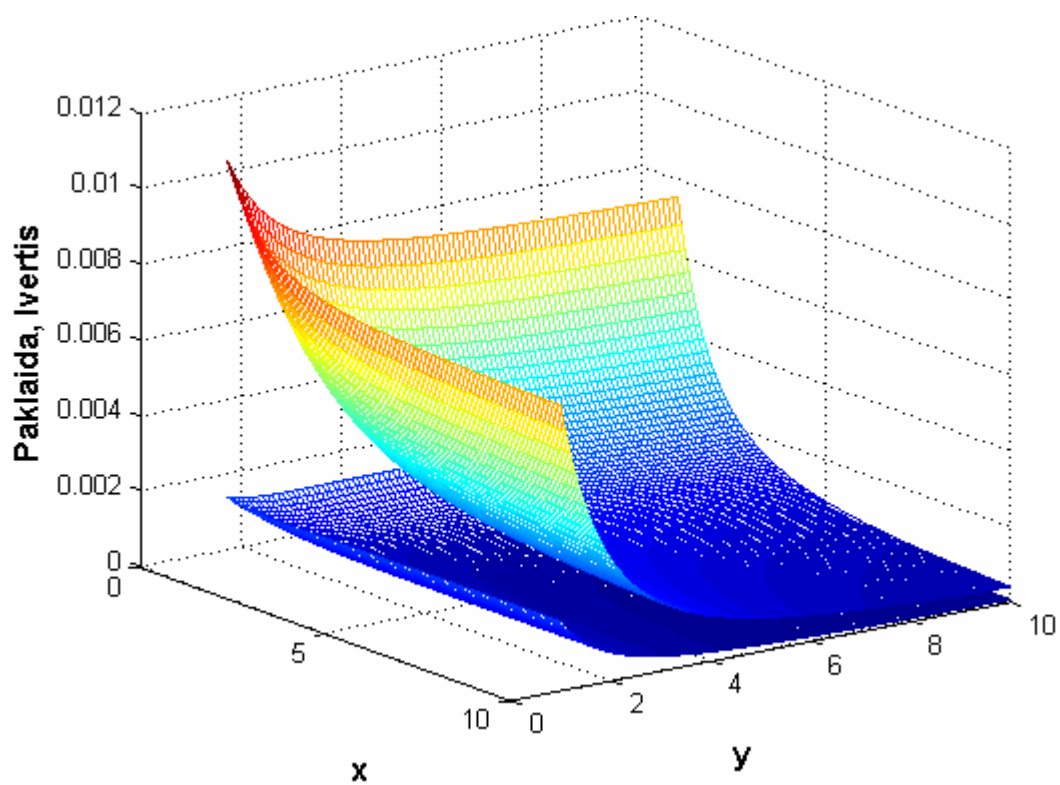


5 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įvertio grafikas, kai  $x = 4, y = 8, \alpha = 1, \beta = 1$ .

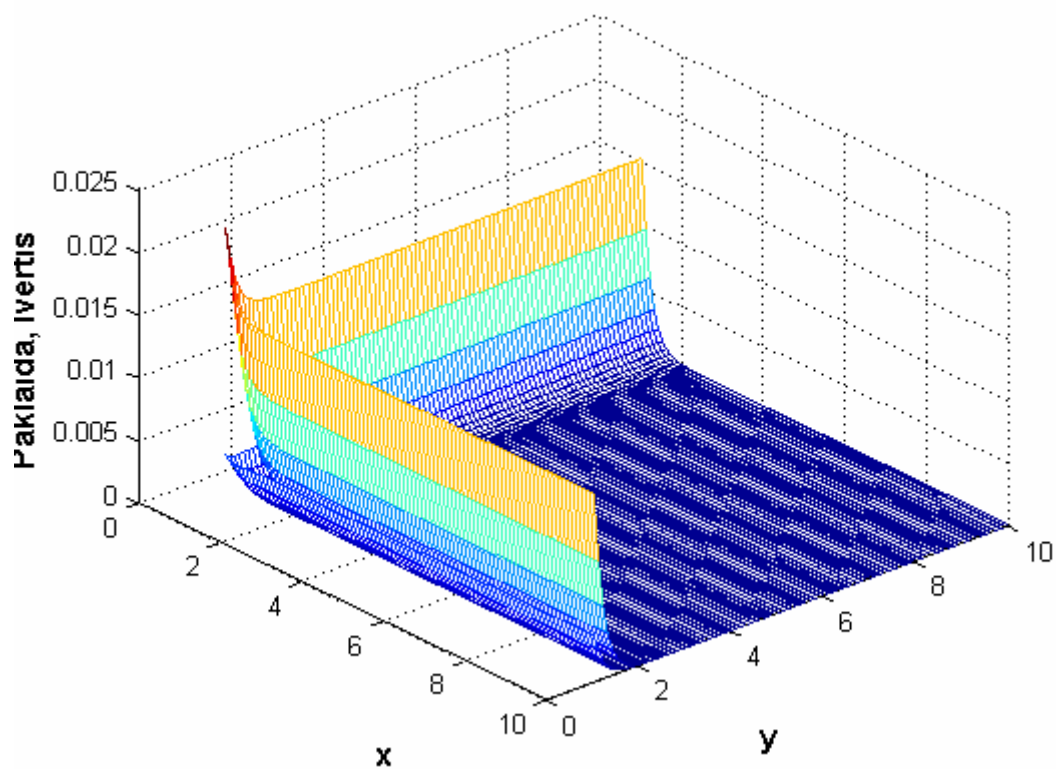
## 2 PRIEDAS. PAKLAIDA IR ĮVERTIS (PRIKLAUSOMŲ KOMPONENČIŲ ATVEJU)



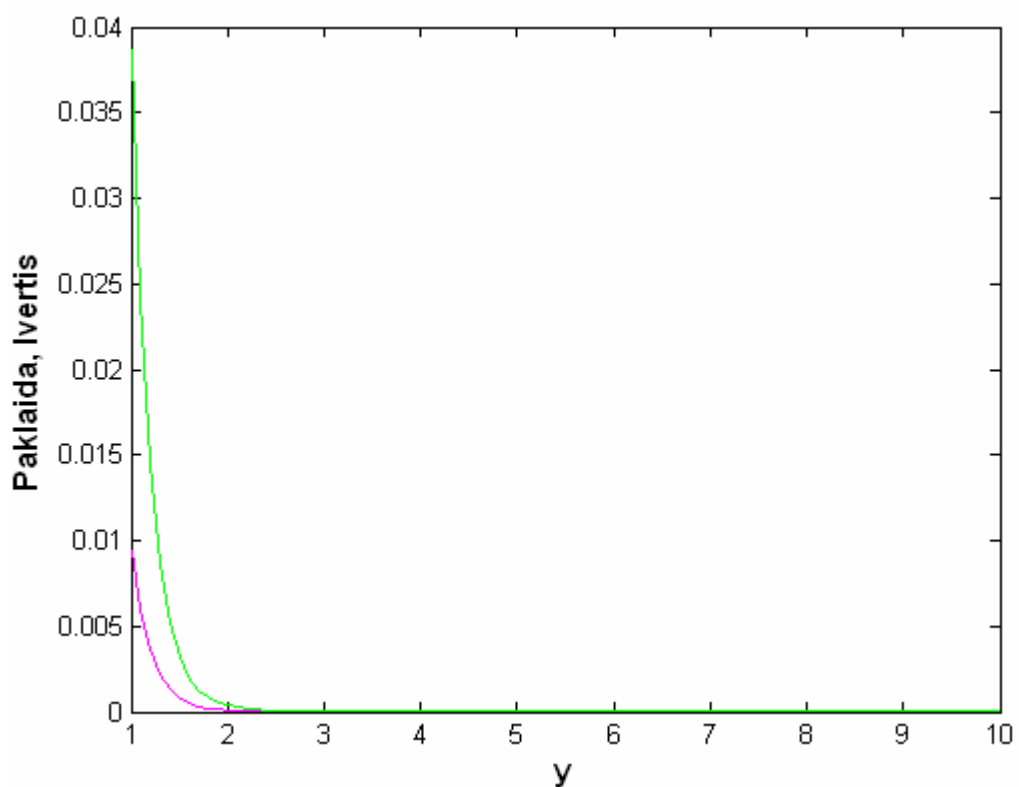
6 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įvertio paviršius, kai  $n = 10, \alpha = 3, \beta = 3$ .



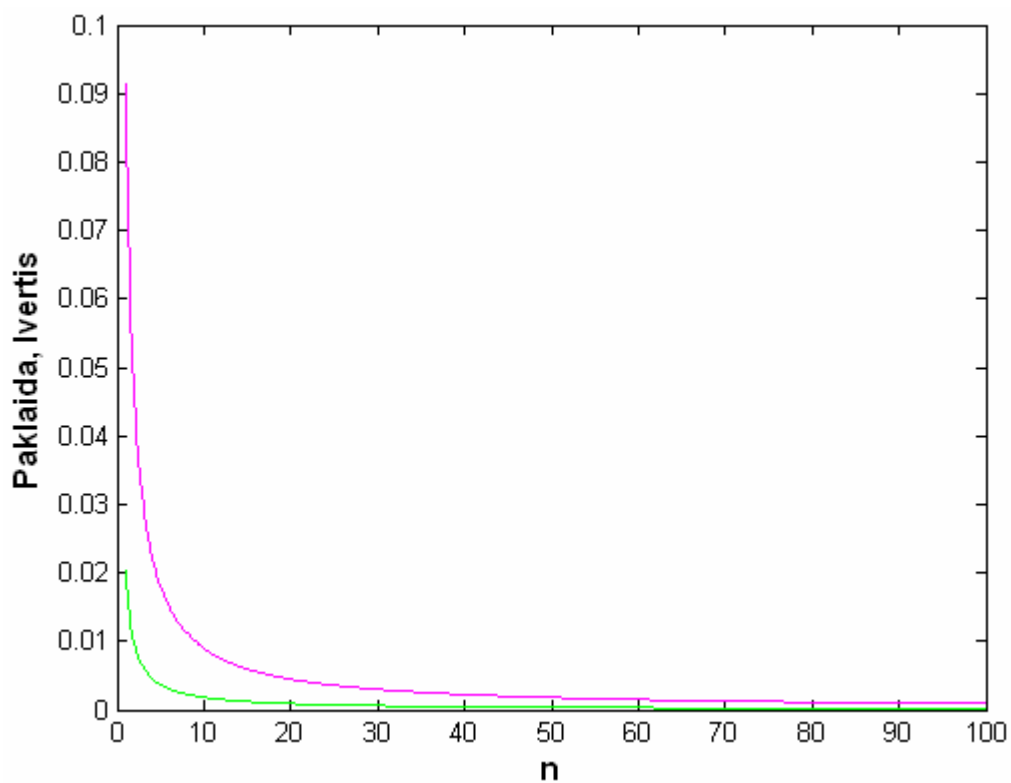
7 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įvertis paviršius, kai  $n = 100, \alpha = 1, \beta = 1$ .



8 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įvertis paviršius, kai  $n = 50, \alpha = 4, \beta = 4$ .

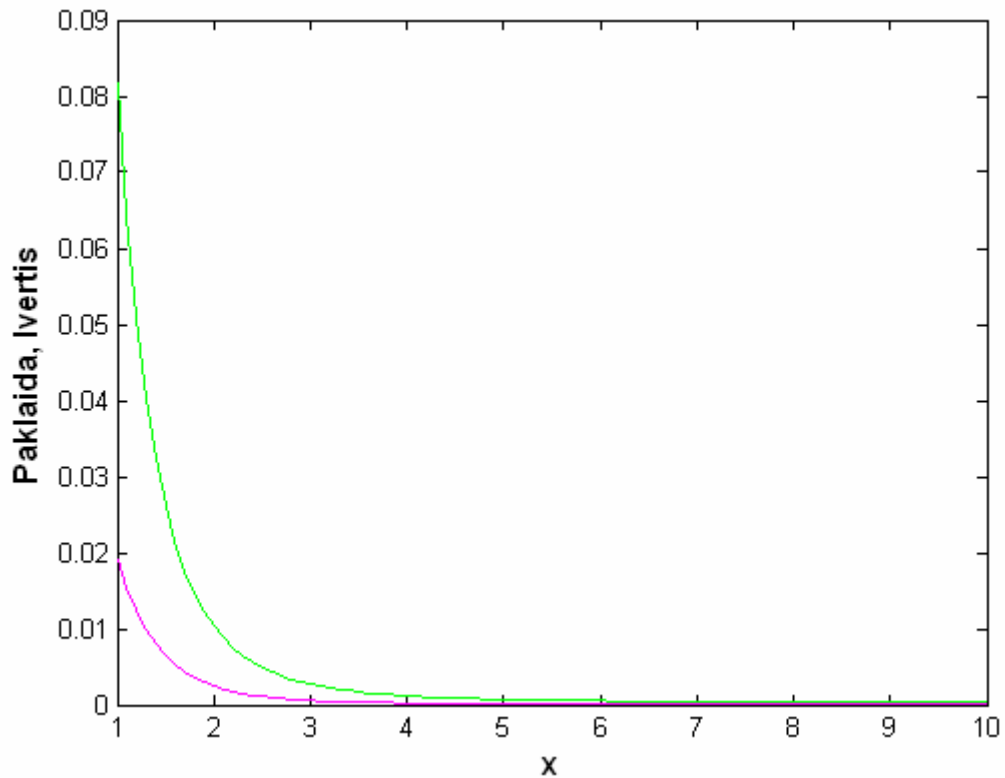


9 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai  $x=5, n=20, \alpha=4, \beta=4$ .



10 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai  $x=10, y=5, \alpha=1, \beta=1$ .





11 pav. Paklaidos ir konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai  $y = 5, n = 10, \alpha = 2, \beta = 2$ .

### 3 PRIEDAS. STRAIPSNIS “VIENMAČIŲ IR DVIMAČIŲ PARETO ATSTITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO ASIMPTOTINĖ ANALIZĖ”

#### 8-OJI STUDENTŲ TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KONFERENCIJA VIENMAČIŲ IR DVIMAČIŲ PARETO ATSTITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ ASIMPTOTINĖ ANALIZĖ

**Gintarė Juozulynaitė, Algimantas Aksomaitis**

*Kauno technologijos universitetas*

Sakykime, kad  $X_1, X_2, \dots, X_N$  yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su Pareto skirstinio funkcija

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \geq 1, \quad \alpha > 0.$$

Atsitiktinis dydis  $N$  pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį:

$$P(N = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Atsitiktiniai dydžiai  $X_j$ ,  $j \geq 1$  ir  $N$  yra tarpusavyje nepriklausomi.

Nagrinėsime maksimumų

$$Z_N = \max(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

geometrinį stabilumą.

**Teorema.** Jeigu  $\alpha = 1$ , tai

$$P\left(Z_N \leq xb(p) + a(p)\right) = 1 - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1.$$

Jeigu  $\alpha \neq 1$ , tai

$$\lim_{p \rightarrow 0} P\left(Z_N \leq xb(p)\right) = \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha} = 1 - \frac{1}{1+x^\alpha} = \Psi(x), \quad x \geq 0.$$

Kai  $\alpha \neq 1$ , galioja tolygusis konvergavimo greičio įvertis:

$$-\frac{P}{1+p} \leq \sup_x \Delta_n^{(1)}(x) \leq 0;$$

$$\text{čia } \Delta_n^{(1)}(x) = P\left(Z_N \leq xp^{\frac{1}{\alpha}}\right) - \Psi(x).$$

**Įrodymas.** Kai  $\alpha = 1$ , parenkame  $a(p) = \frac{p-1}{p}$ ,  $b(p) = \frac{1}{p}$ .

Normalizuodami maksimumą  $Z_N$  gauname:

$$P(pZ_N - p + 1 \leq x) = P\left(Z_N \leq \frac{x+p-1}{p}\right) = g_N\left(F\left(\frac{x+p-1}{p}\right)\right).$$

Kadangi geometrinio skirstinio generuojančioji funkcija yra

$$g_N(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}, \quad |z| \leq 1,$$

tai

$$P\left(Z_N \leq \frac{x+p-1}{p}\right) = \frac{pF\left(\frac{x+p-1}{p}\right)}{1-(1-p)F\left(\frac{x+p-1}{p}\right)} = \frac{p(x-1)}{px} = 1 - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1.$$

Pirmoji teoremos dalis įrodyta.

Kai  $\alpha \neq 1$ , parenkame normavimo konstantas  $a(p) = 0$ ,  $b(p) = p^{-\frac{1}{\alpha}}$ .

Tada

$$P\left(p^{\frac{1}{\alpha}}Z_N \leq x\right) = P\left(Z_N \leq xp^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = \frac{pF\left(xp^{-\frac{1}{\alpha}}\right)}{1-(1-p)F\left(xp^{-\frac{1}{\alpha}}\right)} = \frac{x^\alpha - p}{x^\alpha - p + 1}, \quad x^\alpha \geq p.$$

Tuomet

$$\lim_{p \rightarrow 0} P\left(p^{\frac{1}{\alpha}}Z_N \leq x\right) = \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha} = 1 - \frac{1}{1+x^\alpha} = \Psi(x) \quad x \geq 0.$$

Pažymėkime:

$$\Delta_n^{(1)}(x) = P\left(Z_N \leq xp^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \Psi(x) = \frac{x^\alpha - p}{x^\alpha - p + 1} - \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha} = \frac{-p}{(x^\alpha - p + 1)(1+x^\alpha)}$$

Gauname, kad

$$-\frac{P}{1+p} \leq \sup_x \Delta_n^{(1)}(x) \leq 0.$$

Antroji teoremos dalis įrodyta.

### Literatūra

1. Aksomaitis A. Perkėlimo teorema ir geometriškai maks-stabilieji atsitiktiniai dydžiai. Liet. matem. rink. .4 (spec. nr.), 2003.
2. Aksomaitis A. Tikimybių teorija ir statistika. - Kaunas: Technologija, 2001. 347 p.
3. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. - Москва: Наука, 1984, 304 с.

## 4 PRIEDAS. PROGRAMOS TEKSTAS.

```

function varargout = programa(varargin)
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                  'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @programa_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn',  @programa_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                  'gui_Callback',    []);
if nargin & isstr(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end
if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

% ----Atidaro programas langa.
function programa_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
handles.output = hObject;
axes(handles.axes1);
cla
set(handles.axes1, 'Visible', 'off');
set(handles.edit1, 'Visible', 'off');
set(handles.edit2, 'Visible', 'off');
set(handles.edit3, 'Visible', 'off');
set(handles.edit4, 'Visible', 'off');
set(handles.edit5, 'Visible', 'off');
set(handles.text1, 'Visible', 'off');
set(handles.text2, 'Visible', 'off');
set(handles.text3, 'Visible', 'off');
set(handles.text4, 'Visible', 'off');
set(handles.text5, 'Visible', 'off');
set(handles.text6, 'Visible', 'on');
set(handles.text7, 'Visible', 'on');
set(handles.text8, 'Visible', 'off');
set(handles.pushbutton2, 'Visible', 'off');
set(handles.pushbutton4, 'Visible', 'off');
set(handles.pushbutton3, 'Visible', 'on');
set(handles.pushbutton2, 'Visible', 'off');
set(handles.pushbutton1, 'Visible', 'on');
set(handles.pushbutton6, 'Visible', 'off');
set(handles.pushbutton7, 'Visible', 'on');
set(handles.pushbutton8, 'Visible', 'off');

```

```

set(handles.pushbutton9,'Visible','on');
set(handles.pushbutton10,'Visible','off');
set(handles.pushbutton11,'Visible','on');
set(handles.pushbutton12,'Visible','off');
set(handles.pushbutton13,'Visible','on');
set(handles.pushbutton14,'Visible','off');
set(handles.pushbutton15,'Visible','on');
set(handles.pushbutton16,'Visible','off');
set(handles.pushbutton17,'Visible','on');
set(handles.pushbutton18,'Visible','off');
set(handles.pushbutton19,'Visible','off');
guidata(hObject, handles);

% -----
function varargout = programa_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;

% -----
function popupmenu1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
else
    set(hObject,'BackgroundColor',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
end

% --- Baigia programos darba.
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
delete(handles.figure1);

% --- Braizo paklaidos ir ivercio pavirsiu, kai n fiksuotas(nepriklausomos)
function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
n=handles.n;
alfa=handles.alfa;
beta=handles.beta;
[x,y]=meshgrid(1:0.1:10, 1:0.1:10);
    for i=1:length(x);
        for j=1:length(y);
            f=(1-x(i,j)^(-alfa)/n-y(i,j)^(-beta)/n+(x(i,j)^(-alfa)*y(i,j)^(-beta))/(n^2))^n;
            H=exp(-x(i,j)^(-alfa)-y(i,j)^(-beta));
            paklaida(i,j)=abs(f-H);
            u=n*(1-(1-x(i,j)^(-alfa)/n-y(i,j)^(-beta)/n+(x(i,j)^(-alfa)*y(i,j)^(-beta))/(n^2)));
            v=u+log(H);
            q=2*u^2/(3*n);
            s=abs(v)/3;
            if (u/n<1/2) & q>=0 & q<1 & s>=0 & q<1

```

```

        R1=2*u^2/n+2*u^4/(n^2)*1/(1-q);
        R2=abs(v)+v^2/2*1/(1-s);
        delta(i,j)=H*(R1+R2+R1*R2);
    end
end
end
surf(x,y,paklaida);
    xlabel('x','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
    ylabel('y','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
    zlabel('Paklaida, Ivertis','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
    hold on
surf(x,y,delta);

% -----
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
else
    set(hObject,'BackgroundColor',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
end

% ---Ivedama x reikšme.
function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
x_string=str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(x_string) | (x_string < 1))
    set(hObject,'String',1);
    errordlg('Neteisingai įvesta x reikšmė (x>=1)!!!','Klaida');
else
    x=x_string;
    handles.x=x;
    guidata(hObject,handles);
end

% -----
function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
else
    set(hObject,'BackgroundColor',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
end

% ---Ivedama y reikšme.
function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)
y_string=str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(y_string) | (y_string < 1))
    set(hObject,'String',1);
    errordlg('Neteisingai įvesta y reikšmė (y>=1)!!!','Klaida');

```

```

else
    y=y_string;
    handles.y=y;
    guidata(hObject,handles);
end

% -----
function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
else
    set(hObject,'BackgroundColor',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
end

% ---Ivedama n reikšme.
function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)
n_string=str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(n_string) | (n_string < 5))
    set(hObject,'String',1);
    errordlg('Neteisingai įvesta n reikšmė (n>5)!!!','Klaida');
else
    n=n_string;
    handles.n=n;
    guidata(hObject,handles);
end

% -----
function edit4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
else
    set(hObject,'BackgroundColor',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
end

% ---Ivedama alfa reikšme.
function edit4_Callback(hObject, eventdata, handles)
alfa_string=str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(alfa_string) | (alfa_string < 0))
    set(hObject,'String',1);
    errordlg('Neteisingai įvesta alfa reikšmė (alfa>0)!!!','Klaida');
else
    alfa=alfa_string;
    handles.alfa=alfa;
    guidata(hObject,handles);
end

```

```

% -----
function edit5_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
else
    set(hObject,'BackgroundColor',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
end

% ---Ivedama beta reiksme.
function edit5_Callback(hObject, eventdata, handles)
beta_string=str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(beta_string) | (beta_string < 0))
    set(hObject,'String',1);
    errordlg('Neteisingai įvesta beta reikšmė (beta>0)!!!','Klaida');
else
    beta=beta_string;
    handles.beta=beta;
    guidata(hObject,handles);
end

% --- Paklaidos ir ivercio paviršius, kai n fiksuotas(nepriklausomos).
function pushbutton3_Callback(hObject, eventdata, handles)
set(handles.edit1,'Visible','off');
set(handles.edit2,'Visible','off');
set(handles.edit3,'Visible','on');
set(handles.edit4,'Visible','on');
set(handles.edit5,'Visible','on');
set(handles.text1,'Visible','off');
set(handles.text2,'Visible','off');
set(handles.text3,'Visible','on');
set(handles.text4,'Visible','on');
set(handles.text5,'Visible','on');
set(handles.axes1,'Visible','on');
set(handles.text6,'Visible','on');
set(handles.text7,'Visible','off');
set(handles.text8,'Visible','on');
set(handles.pushbutton3,'Visible','off');
set(handles.pushbutton4,'Visible','on');
set(handles.pushbutton2,'Visible','on');
set(handles.pushbutton1,'Visible','on');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton6,'Visible','off');
set(handles.pushbutton7,'Visible','off');
set(handles.pushbutton8,'Visible','off');
set(handles.pushbutton9,'Visible','off');
set(handles.pushbutton10,'Visible','off');
set(handles.pushbutton11,'Visible','off');

```

```

set(handles.pushbutton12,'Visible','off');
set(handles.pushbutton13,'Visible','off');
set(handles.pushbutton14,'Visible','off');
set(handles.pushbutton15,'Visible','off');
set(handles.pushbutton16,'Visible','off');
set(handles.pushbutton17,'Visible','off');
set(handles.pushbutton18,'Visible','off');
set(handles.pushbutton19,'Visible','on');

% --- Grazina i pradinini langa.
function pushbutton4_Callback(hObject, eventdata, handles)
axes(handles.axes1);
cla
set(handles.axes1,'Visible','off');
set(handles.edit1,'Visible','off');
set(handles.edit2,'Visible','off');
set(handles.edit3,'Visible','off');
set(handles.edit4,'Visible','off');
set(handles.edit5,'Visible','off');
set(handles.text1,'Visible','off');
set(handles.text2,'Visible','off');
set(handles.text3,'Visible','off');
set(handles.text4,'Visible','off');
set(handles.text5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton2,'Visible','off');
set(handles.pushbutton4,'Visible','off');
set(handles.pushbutton3,'Visible','on');
set(handles.pushbutton2,'Visible','off');
set(handles.pushbutton1,'Visible','on');
set(handles.pushbutton5,'Visible','on');
set(handles.pushbutton6,'Visible','on');
set(handles.pushbutton7,'Visible','on');
set(handles.pushbutton8,'Visible','off');
set(handles.pushbutton9,'Visible','on');
set(handles.pushbutton10,'Visible','off');
set(handles.pushbutton11,'Visible','on');
set(handles.pushbutton12,'Visible','off');
set(handles.pushbutton13,'Visible','on');
set(handles.pushbutton14,'Visible','off');
set(handles.pushbutton15,'Visible','on');
set(handles.pushbutton16,'Visible','off');
set(handles.pushbutton17,'Visible','on');
set(handles.pushbutton18,'Visible','off');
set(handles.text6,'Visible','on');
set(handles.text7,'Visible','on');
set(handles.text8,'Visible','off');
set(handles.pushbutton19,'Visible','off');

```



```

% --- Paklaidos ir ivercio grafikas, kai y ir n fiksuoti(nepriklausomos).
function pushbutton5_Callback(hObject, eventdata, handles)
set(handles.edit1,'Visible','off');
set(handles.edit2,'Visible','on');
set(handles.edit3,'Visible','on');
set(handles.edit4,'Visible','on');
set(handles.edit5,'Visible','on');
set(handles.text1,'Visible','off');
set(handles.text2,'Visible','on');
set(handles.text3,'Visible','on');
set(handles.text4,'Visible','on');
set(handles.text5,'Visible','on');
set(handles.axes1,'Visible','on');
set(handles.text6,'Visible','on');
set(handles.text7,'Visible','off');
set(handles.text8,'Visible','on');
set(handles.pushbutton3,'Visible','off');
set(handles.pushbutton4,'Visible','on');
set(handles.pushbutton2,'Visible','off');
set(handles.pushbutton1,'Visible','on');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton6,'Visible','on');
set(handles.pushbutton7,'Visible','off');
set(handles.pushbutton8,'Visible','off');
set(handles.pushbutton9,'Visible','off');
set(handles.pushbutton10,'Visible','off');
set(handles.pushbutton11,'Visible','off');
set(handles.pushbutton12,'Visible','off');
set(handles.pushbutton13,'Visible','off');
set(handles.pushbutton14,'Visible','off');
set(handles.pushbutton15,'Visible','off');
set(handles.pushbutton16,'Visible','off');
set(handles.pushbutton17,'Visible','off');
set(handles.pushbutton18,'Visible','off');
set(handles.pushbutton19,'Visible','on');

% --- Braizo paklaidos ir ivercio grafika, kai y ir n fiksuoti(nepriklausomos).
function pushbutton6_Callback(hObject, eventdata, handles)
y=handles.y;
n=handles.n;
alfa=handles.alfa;
beta=handles.beta;
x=1:0.1:10;
for i=1:length(x)
    f=(1-x(i)^(-alfa)/n-y^(-beta)/n+(x(i)^(-alfa)*y^(-beta))/(n^2))^n;

```

```

H=exp(-x(i)^(-alfa)-y^(-beta));
paklaida(i)=abs(f-H);
u=n*(1-(1-x(i)^(-alfa)/n-y^(-beta)/n+(x(i)^(-alfa)*y^(-beta))/(n^2)));
v=u+log(H);
q=2*u^2/(3*n);
s=abs(v)/3;
    if (u/n<1/2) & q>=0 & q<1 & s>=0 & q<1
        R1=2*u^2/n+2*u^4/(n^2)*1/(1-q);
        R2=abs(v)+v^2/2*1/(1-s);
        delta(i)=H*(R1+R2+R1*R2);
    end
end
plot(x(1:length(x)),paklaida,'g','Linewidth',2)
    xlabel('x','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
    ylabel('Paklaida, Ivertis','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
    hold on
plot(x(1:length(x)),delta,'m','Linewidth',2)

% --- Paklaidos ir ivercio grafikas, kai x ir n fiksuoti(nepriklausomos).
function pushbutton7_Callback(hObject, eventdata, handles)
set(handles.edit1,'Visible','on');
set(handles.edit2,'Visible','off');
set(handles.edit3,'Visible','on');
set(handles.edit4,'Visible','on');
set(handles.edit5,'Visible','on');
set(handles.text1,'Visible','on');
set(handles.text2,'Visible','off');
set(handles.text3,'Visible','on');
set(handles.text4,'Visible','on');
set(handles.text5,'Visible','on');
set(handles.axes1,'Visible','on');
set(handles.text6,'Visible','on');
set(handles.text7,'Visible','off');
set(handles.text8,'Visible','on');
set(handles.pushbutton3,'Visible','off');
set(handles.pushbutton4,'Visible','on');
set(handles.pushbutton2,'Visible','off');
set(handles.pushbutton1,'Visible','on');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton6,'Visible','off');
set(handles.pushbutton7,'Visible','off');
set(handles.pushbutton8,'Visible','on');
set(handles.pushbutton9,'Visible','off');
set(handles.pushbutton10,'Visible','off');
set(handles.pushbutton11,'Visible','off');
set(handles.pushbutton12,'Visible','off');

```

```

set(handles.pushbutton13,'Visible','off');
set(handles.pushbutton14,'Visible','off');
set(handles.pushbutton15,'Visible','off');
set(handles.pushbutton16,'Visible','off');
set(handles.pushbutton17,'Visible','off');
set(handles.pushbutton18,'Visible','off');
set(handles.pushbutton19,'Visible','on');

% --- Braizo paklaidos ir ivercio grafika, kai x ir n fiksuoti(nepriklausomos).
function pushbutton8_Callback(hObject, eventdata, handles)
x=handles.x;
n=handles.n;
alfa=handles.alfa;
beta=handles.beta;
y=1:0.1:10;
for i=1:length(y)
    f=(1-x^(-alfa)/n-y(i)^(-beta)/n+(x^(-alfa)*y(i)^(-beta))/(n^2))^n;
    H=exp(-x^(-alfa)-y(i)^(-beta));
    paklaida(i)=abs(f-H);
    u=n*(1-(1-x^(-alfa)/n-y(i)^(-beta)/n+(x^(-alfa)*y(i)^(-beta))/(n^2)));
    v=u+log(H);
    q=2*u^2/(3*n);
    s=abs(v)/3;
    if (u/n<1/2) & q>=0 & q<1 & s>=0 & q<1
        R1=2*u^2/n+2*u^4/(n^2)*1/(1-q);
        R2=abs(v)+v^2/2*1/(1-s);
        delta(i)=H*(R1+R2+R1*R2);
    end
end
plot(y(1:length(y)),paklaida,'g','Linewidth',2)
Xlabel('y','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
Ylabel('Paklaida, Ivertis','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
hold on
plot(y(1:length(y)),delta,'m','Linewidth',2)

% --- Paklaidos ir ivercio grafikas, kai x ir y fiksuoti(nepriklausomos).
function pushbutton9_Callback(hObject, eventdata, handles)
set(handles.edit1,'Visible','on');
set(handles.edit2,'Visible','on');
set(handles.edit3,'Visible','off');
set(handles.edit4,'Visible','on');
set(handles.edit5,'Visible','on');
set(handles.text1,'Visible','on');
set(handles.text2,'Visible','on');
set(handles.text3,'Visible','off');
set(handles.text4,'Visible','on');
set(handles.text5,'Visible','on');

```

```

set(handles.axes1,'Visible','on');
set(handles.text6,'Visible','on');
set(handles.text7,'Visible','off');
set(handles.text8,'Visible','on');
set(handles.pushbutton3,'Visible','off');
set(handles.pushbutton4,'Visible','on');
set(handles.pushbutton2,'Visible','off');
set(handles.pushbutton1,'Visible','on');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton6,'Visible','off');
set(handles.pushbutton7,'Visible','off');
set(handles.pushbutton8,'Visible','off');
set(handles.pushbutton9,'Visible','off');
set(handles.pushbutton10,'Visible','on');
set(handles.pushbutton11,'Visible','off');
set(handles.pushbutton12,'Visible','off');
set(handles.pushbutton13,'Visible','off');
set(handles.pushbutton14,'Visible','off');
set(handles.pushbutton15,'Visible','off');
set(handles.pushbutton16,'Visible','off');
set(handles.pushbutton17,'Visible','off');
set(handles.pushbutton18,'Visible','off');
set(handles.pushbutton19,'Visible','on');

% --- Braizo paklaidos ir ivercio grafika, kai x ir y fiksuoti(nepriklausomos).
function pushbutton10_Callback(hObject, eventdata, handles)
x=handles.x;
y=handles.y;
alfa=handles.alfa;
beta=handles.beta;
n=1:0.1:100;
for i=1:length(n)
    f=(1-x^(-alfa)/n(i)-y^(-beta)/n(i)+(x^(-alfa)*y^(-beta))/(n(i)^2))^n(i);
    H=exp(-x^(-alfa)-y^(-beta));
    paklaida(i)=abs(f-H);
    u=n(i)*(1-(1-x^(-alfa)/n(i)-y^(-beta)/n(i)+(x^(-alfa)*y^(-beta))/(n(i)^2)));
    v=u+log(H);
    q=2*u^2/(3*n(i));
    s=abs(v)/3;
    if (u/n(i)<1/2) & q>=0 & q<1 & s>=0 & q<1
        R1=2*u^2/n(i)+2*u^4/(n(i)^2)*1/(1-q);
        R2=abs(v)+v^2/2*1/(1-s);
        delta(i)=H*(R1+R2+R1*R2);
    end
end
plot(n(1:length(n)),paklaida,'g','Linewidth',2)

```

```

Xlabel('n','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
Ylabel('Paklaida, Ivertis','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
hold on
plot(n(1:length(n)),delta,'m','Linewidth',2)

```

```

% --- Paklaidos ir ivercio pavirsius, kai n fiksuotas(priklausomos).

```

```

function pushbutton11_Callback(hObject, eventdata, handles)

```

```

set(handles.edit1,'Visible','off');
set(handles.edit2,'Visible','off');
set(handles.edit3,'Visible','on');
set(handles.edit4,'Visible','on');
set(handles.edit5,'Visible','on');
set(handles.text1,'Visible','off');
set(handles.text2,'Visible','off');
set(handles.text3,'Visible','on');
set(handles.text4,'Visible','on');
set(handles.text5,'Visible','on');
set(handles.axes1,'Visible','on');
set(handles.text6,'Visible','off');
set(handles.text7,'Visible','on');
set(handles.text8,'Visible','on');
set(handles.pushbutton3,'Visible','off');
set(handles.pushbutton4,'Visible','on');
set(handles.pushbutton2,'Visible','off');
set(handles.pushbutton1,'Visible','on');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton6,'Visible','off');
set(handles.pushbutton7,'Visible','off');
set(handles.pushbutton8,'Visible','off');
set(handles.pushbutton9,'Visible','off');
set(handles.pushbutton10,'Visible','off');
set(handles.pushbutton11,'Visible','off');
set(handles.pushbutton12,'Visible','on');
set(handles.pushbutton13,'Visible','off');
set(handles.pushbutton14,'Visible','off');
set(handles.pushbutton15,'Visible','off');
set(handles.pushbutton16,'Visible','off');
set(handles.pushbutton17,'Visible','off');
set(handles.pushbutton18,'Visible','off');
set(handles.pushbutton19,'Visible','on');

```

```

% --- Braizo paklaidos ir ivercio pavirsiu, kai n fiksuotas(priklausomos).

```

```

function pushbutton12_Callback(hObject, eventdata, handles)

```

```

n=handles.n;
alfa=handles.alfa;
beta=handles.beta;

```

```

[x,y]=meshgrid(1:0.1:10,1:0.1:10);
    for i=1:length(x);
        for j=1:length(y);
            f=(1-x(i,j)^(-alfa)/n-y(i,j)^(-beta)/n+1/(x(i,j)^alfa*n+y(i,j)^beta*n-1))^n;
            H=exp(-x(i,j)^(-alfa)-y(i,j)^(-beta)+(1/(x(i,j)^alfa+y(i,j)^beta)));
            paklaida(i,j)=abs(f-H);
            u=n*(1-(1-x(i,j)^(-alfa)/n-y(i,j)^(-beta)/n+1/(x(i,j)^alfa*n+y(i,j)^beta*n-1)));
            v=u+log(H);
            q=2*u^2/(3*n);
            s=abs(v)/3;
            if (u/n<1/2) & q>=0 & q<1 & s>=0 & q<1
                R1=2*u^2/n+2*u^4/(n^2)*1/(1-q);
                R2=abs(v)+v^2/2*1/(1-s);
                delta(i,j)=H*(R1+R2+R1*R2);
            end
        end
    end
    surf(x,y,paklaida);
    xlabel('x','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
    ylabel('y','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
    zlabel('Paklaida, Ivertis','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
    hold on
    surf(x,y,delta)

% --- Paklaidos ir ivercio grafikas, kai y ir n fiksuoti(priklausomos).
function pushbutton13_Callback(hObject, eventdata, handles)
set(handles.edit1,'Visible','off');
set(handles.edit2,'Visible','on');
set(handles.edit3,'Visible','on');
set(handles.edit4,'Visible','on');
set(handles.edit5,'Visible','on');
set(handles.text1,'Visible','off');
set(handles.text2,'Visible','on');
set(handles.text3,'Visible','on');
set(handles.text4,'Visible','on');
set(handles.text5,'Visible','on');
set(handles.axes1,'Visible','on');
set(handles.text6,'Visible','off');
set(handles.text7,'Visible','on');
set(handles.text8,'Visible','on');
set(handles.pushbutton3,'Visible','off');
set(handles.pushbutton4,'Visible','on');
set(handles.pushbutton2,'Visible','off');
set(handles.pushbutton1,'Visible','on');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');

```

```

set(handles.pushbutton6,'Visible','off');
set(handles.pushbutton7,'Visible','off');
set(handles.pushbutton8,'Visible','off');
set(handles.pushbutton9,'Visible','off');
set(handles.pushbutton10,'Visible','off');
set(handles.pushbutton11,'Visible','off');
set(handles.pushbutton12,'Visible','off');
set(handles.pushbutton13,'Visible','off');
set(handles.pushbutton14,'Visible','on');
set(handles.pushbutton15,'Visible','off');
set(handles.pushbutton16,'Visible','off');
set(handles.pushbutton17,'Visible','off');
set(handles.pushbutton18,'Visible','off');
set(handles.pushbutton19,'Visible','on');

% --- Braizo paklaidos ir ivercio grafika, kai y ir n fiksuoti(priklausomos).
function pushbutton14_Callback(hObject, eventdata, handles)
y=handles.y;
n=handles.n;
alfa=handles.alfa;
beta=handles.beta;
x=1:0.1:10;
for i=1:length(x)
    f=(1-x(i)^(-alfa)/n-y^(-beta)/n+1/(x(i)^alfa*n+y^beta*n-1))^n;
    H=exp(-x(i)^(-alfa)-y^(-beta)+(x(i)^alfa+y^beta)^(-1));
    paklaida(i)=abs(f-H);
    u=n*(1-(1-x(i)^(-alfa)/n-y^(-beta)/n+1/(x(i)^alfa*n+y^beta*n-1)));
    v=u+log(H);
    q=2*u^2/(3*n);
    s=abs(v)/3;
    if (u/n<1/2) & q>=0 & q<1 & s>=0 & q<1
        R1=2*u^2/n+2*u^4/(n^2)*1/(1-q);
        R2=abs(v)+v^2/2*1/(1-s);
        delta(i)=H*(R1+R2+R1*R2);
    end
end
plot(x,paklaida,'m','Linewidth',2)
Xlabel('x','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
Ylabel('Paklaida, Ivertis','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
hold on
plot(x,delta,'g','Linewidth',2)

% --- Paklaidos ir ivercio grafikas, kai x ir n fiksuoti(priklausomos).
function pushbutton15_Callback(hObject, eventdata, handles)
set(handles.edit1,'Visible','on');
set(handles.edit2,'Visible','off');
set(handles.edit3,'Visible','on');

```

```

set(handles.edit4,'Visible','on');
set(handles.edit5,'Visible','on');
set(handles.text1,'Visible','on');
set(handles.text2,'Visible','off');
set(handles.text3,'Visible','on');
set(handles.text4,'Visible','on');
set(handles.text5,'Visible','on');
set(handles.axes1,'Visible','on');
set(handles.text6,'Visible','off');
set(handles.text7,'Visible','on');
set(handles.text8,'Visible','on');
set(handles.pushbutton3,'Visible','off');
set(handles.pushbutton4,'Visible','on');
set(handles.pushbutton2,'Visible','off');
set(handles.pushbutton1,'Visible','on');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton6,'Visible','off');
set(handles.pushbutton7,'Visible','off');
set(handles.pushbutton8,'Visible','off');
set(handles.pushbutton9,'Visible','off');
set(handles.pushbutton10,'Visible','off');
set(handles.pushbutton11,'Visible','off');
set(handles.pushbutton12,'Visible','off');
set(handles.pushbutton13,'Visible','off');
set(handles.pushbutton14,'Visible','off');
set(handles.pushbutton15,'Visible','off');
set(handles.pushbutton16,'Visible','on');
set(handles.pushbutton17,'Visible','off');
set(handles.pushbutton18,'Visible','off');
set(handles.pushbutton19,'Visible','on');

% --- Braizo paklaidos ir ivercio grafika, kai x ir n fiksuoti(priklausomos).
function pushbutton16_Callback(hObject, eventdata, handles)
x=handles.x;
n=handles.n;
alfa=handles.alfa;
beta=handles.beta;
y=1:0.1:10;
for i=1:length(y)
    f=(1-x^(-alfa)/n-y(i)^(-beta)/n+1/(x^alfa*n+y(i)^beta*n-1))^n;
    H=exp(-x^(-alfa)-y(i)^(-beta)+(x^alfa+y(i)^beta)^(-1));
    paklaida(i)=abs(f-H);
    u=n*(1-(1-x^(-alfa)/n-y(i)^(-beta)/n+1/(x^alfa*n+y(i)^beta*n-1)));
    v=u+log(H);
    q=2*u^2/(3*n);
    s=abs(v)/3;

```



```

        if (u/n<1/2) & q>=0 & q<1 & s>=0 & q<1
            R1=2*u^2/n+2*u^4/(n^2)*1/(1-q);
            R2=abs(v)+v^2/2*1/(1-s);
            delta(i)=H*(R1+R2+R1*R2);
        end
    end
end
plot(y,paklaida,'m','Linewidth',2)
Xlabel('y','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
Ylabel('Paklaida, Ivertis','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
hold on
plot(y,delta,'g','Linewidth',2)

% --- Paklaidos ir ivercio grafikas, kai x ir y fiksuoti(priklausomos).
function pushbutton17_Callback(hObject, eventdata, handles)
set(handles.edit1,'Visible','on');
set(handles.edit2,'Visible','on');
set(handles.edit3,'Visible','off');
set(handles.edit4,'Visible','on');
set(handles.edit5,'Visible','on');
set(handles.text1,'Visible','on');
set(handles.text2,'Visible','on');
set(handles.text3,'Visible','off');
set(handles.text4,'Visible','on');
set(handles.text5,'Visible','on');
set(handles.axes1,'Visible','on');
set(handles.text6,'Visible','off');
set(handles.text7,'Visible','on');
set(handles.text8,'Visible','on');
set(handles.pushbutton3,'Visible','off');
set(handles.pushbutton4,'Visible','on');
set(handles.pushbutton2,'Visible','off');
set(handles.pushbutton1,'Visible','on');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton5,'Visible','off');
set(handles.pushbutton6,'Visible','off');
set(handles.pushbutton7,'Visible','off');
set(handles.pushbutton8,'Visible','off');
set(handles.pushbutton9,'Visible','off');
set(handles.pushbutton10,'Visible','off');
set(handles.pushbutton11,'Visible','off');
set(handles.pushbutton12,'Visible','off');
set(handles.pushbutton13,'Visible','off');
set(handles.pushbutton14,'Visible','off');
set(handles.pushbutton15,'Visible','off');
set(handles.pushbutton16,'Visible','off');
set(handles.pushbutton17,'Visible','off');
set(handles.pushbutton18,'Visible','on');

```

```

set(handles.pushbutton19,'Visible','on');

% --- Braizo paklaidos ir ivercio grafika, kai x ir y fiksuoti(priklausomos).
function pushbutton18_Callback(hObject, eventdata, handles)
x=handles.x;
y=handles.y;
alfa=handles.alfa;
beta=handles.beta;
n=1:0.1:100;
for i=1:length(n)
    f=(1-x^(-alfa)/n(i)-y^(-beta)/n(i)+1/(x^alfa*n(i)+y^beta*n(i)-1))^n(i);
    H=exp(-x^(-alfa)-y^(-beta)+(x^alfa+y^beta)^(-1));
    paklaida(i)=abs(f-H);
    u=n(i)*(1-(1-x^(-alfa)/n(i)-y^(-beta)/n(i)+1/(x^alfa*n(i)+y^beta*n(i)-1)));
    v=u+log(H);
    q=2*u^2/(3*n(i));
    s=abs(v)/3;
    if (u/n(i)<1/2) & q>=0 & q<1 & s>=0 & q<1
        R1=2*u^2/n(i)+2*u^4/(n(i)^2)*1/(1-q);
        R2=abs(v)+v^2/2*1/(1-s);
        delta(i)=H*(R1+R2+R1*R2);
    end
end
plot(n,paklaida,'g','Linewidth',2)
Xlabel('n','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
Ylabel('Paklaida, Ivertis','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
hold on
plot(n,delta,'m','Linewidth',2)

% --- Isvalo grafika.

function pushbutton19_Callback(hObject, eventdata, handles)
cla(handles.axes1)

```

### fiksuotasp.m

```

% --- Braizo vienmacio Pareto skirstinio paklaida, kai p fiksuotas.
p=0.05;
pr=1;
pb=7;
zingsnis=0.1;
alfa=2;
[x]=(pr:zingsnis:pb);
for i=1:length(x)
    if p>0 & p<1
        Psi=1./(1+x.^(-alfa));
        F=((x.^alfa)-p)./(x.^alfa-p+1);
    end
end

```

```

    Paklaida=(F-Psi);
    plot(x,Paklaida,'b')
    Xlabel('x','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
    Ylabel('Paklaida','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
    hold on
end
end
end

```

### **fiksuotasx.m**

```

% --- Braizo vienmacio Pareto skirstinio paklaida, kai x fiksuotas.
x=8;
pr=0;
pb=1;
zingsnis=0.02;
alfa=2;
[p]=(pr:zingsnis:pb);
for i=1:length(p)
    if x>=1
        Psi=1./(1+x.^(-alfa));
        F=(x.^alfa-p)./(x.^alfa-p+1);
        Paklaida=(F-Psi);
        plot(p,Paklaida,'g')
        Xlabel('p','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
        Ylabel('Paklaida','FontSize',12,'Fontweight','Bold');
        hold on
    end
end
end
end

```