KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Mindaugas Drėzas

VIENMAČIŲ SKIRSTINIŲ N STABILUMO TYRIMAS

Magistro darbas

Vadovas
prof. dr. A. Aksomaitis

KAUNAS, 2011

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
doc. dr. N. Listopadskis
2011 06 02

VIENMAČIŲ SKIRSTINIŲ N STABILUMO TYRIMAS

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
prof. dr. A. Aksomaitis
2011 06 01

Recenzentas
doc. dr. J. Venclovienė
2011 06 01

Atliko
FMMM 9 gr. stud.
M. Drėzas
2011 05 30

KAUNAS, 2011

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, habil. dr., vyriausiasis analitikas (DnB NORD Bankas)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., vice-prezidentas projektams (UAB „Baltic Amadeus“)

Drėzas M. Vienmačių skirstinių N stabilumo tyrimas: Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas / mokslinis vadovas prof. dr. A. Aksomaitis; Kauno technologijos universitetas, Fundamentaliųjų mokslų fakultetas, Taikomosios matematikos katedra. – Kaunas, 2011. – 52 p.

SANTRAUKA

Šis magistro darbas yra skirtas stochastinių ekstremumų stabilumo uždavinių sprendimui.

Tarkime, jog turime nepriklausomų atsitiktinių dydžių seką $X_1, X_2, \ldots X_N$. Čia N yra atsitiktinis dydis įgyjantis natūraliąsias reikšmes.

Pažymėkime maksimalią ir minimalią sekos reikšmes:

$$Z_N = \max(X_1, X_2, \ldots, X_N),$$

$$W_N = \min(X_1, X_2, \ldots, X_N).$$

Skirstinio funkciją *F(x)* vadiname *N* maks stabiliąja, jeigu

$$P\left(\frac{Z_N - a}{b} \le x\right) = F(x) \Leftrightarrow g_N(F(xb + a)) = F(x)$$

ir min stabiliąja, jeigu

$$P\left(\frac{Z_N - a}{b} \le x\right) = 1 - F(x) \Leftrightarrow g_N(1 - F(xb + a)) = 1 - F(x).$$

Problema yra surasti tokias normavimo konstantas a, $b > 0$, jei jos egzistuoja, kad šios lygybės būtų teisingos.

Šiame darbe yra atlikta *N* stabilumo analizė, kai *N* yra pasiskirstęs pagal geometrinį, Sibuya ir Harris dėsnius. Taip pat yra paskaičiuotas konvergavimo greitis maksimumams ir atlikta konvergavimo greičio kompiuterinė analizė.

Gautais rezultatais mes patvirtinome jau žinomą faktą, kad geometrinis *N* maks stabilumas ir *N* min stabilumas yra vienas kitą sąlygojantys. Taip pat gavome ir įrodėme naujus rezultatus, jog Sibuya ir Harris *N* maks ir *N* min stabilumai nėra vienas kitą sąlygojantys.

Drėzas M. N stability analysis of the univariate distributions: Master's work in applied mathematics / supervisor prof. dr. A. Aksomaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2011. – 52 p.

SUMMARY

This master's work is dedicated to solution of the stochastic extremums stability problems**.**

Let's say that we have a sequence of the independent random variables $X_1, X_2, \ldots X_N$. Here *N* is a random value, which is a positive integer.

Let's note maximum and minimum terms of variation series:

$$Z_N = \max(X_1, X_2, \ldots, X_N),$$

$$W_N = \min(X_1, X_2, \ldots, X_N).$$

The distribution function *F(x)* is known to be *N* max stable if

$$P\left(\frac{Z_N - a}{b} \le x\right) = F(x) \Leftrightarrow g_N(F(xb+a)) = F(x)$$

and *N* min stable if

$$P\left(\frac{Z_N - a}{b} \le x\right) = 1 - F(x) \Leftrightarrow g_N(1 - F(xb+a)) = 1 - F(x).$$

The problem is to find such constants of normalization a, $b > 0$, if its exist, that these equalities would be correct.

In this work the analysis of *N* stability is done then *N* is distributed by geometrical, Sibuya and Harris laws. The convergence rate for maximums was constructed and also computerized analysis of results was done.

In accordance with the main results, we confirmed the known fact that geometrical *N* max stability and *N* min stability are influencing each other. Also we obtained and proved new results, that Sibuya and Harris *N* max stability and *N* min stability are not influencing each other.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Ekstremaliosios reikšmės (ekstremumai) yra neįprastai didelės ar mažos kintamųjų reikšmės. Statistinės ekstremaliųjų reikšmių analizės tikslas yra išanalizuoti šių reikšmių paplitimą ir dydį, siekiant geriausiai panaudoti turimą informaciją, suprasti vykstančius procesus ir numatyti būsimas reikšmes.

Ekstremaliųjų reikšmių teorijos taikymai šiuo metu apima tokias sritis, kaip ekonomika, medicina, finansai, draudimas, inžinerija, astronomija, socialiniai mokslai ir gamtos reiškiniai.

Pateiksime keletą pavyzdžių, kuriuose ekstremalios reikšmes (maksimumai arba minimumai) vaidina svarbų vaidmenį.

Stichiniai gamtos reiškiniai – potvyniai, liūtys, ekstremalios temperatūros, uraganai – gali būti numatyti remiantis mokslo apibrėžtomis taisyklėmis, o jų padariniai sumažinti atsižvelgiant į minėtų stichinių nelaimių galimybę. Sistemų patikimumo problema sprendžiama atsižvelgiant į tai, kad sistema nustoja veikusi, jeigu sugenda bent vienas iš jos elementų. Šiuo atveju mažiausiai patikimas sistemos elementas turi lemiamos įtakos visos sistemos funkcionavimui. Atmosferos užterštumas išreiškiamas procentiniu teršalų kiekiu atmosferoje (koncentracija). Šių teršalų koncentracija nuolat matuojama. Svarbu, kad maksimali koncentracijos reikšmė neviršytų nustatytos normos. Metalas yra veikiamas korozijos, o pažeidimų dydis apibūdinamas maksimaliu korozijos gyliu.

Šie pateikti pavyzdžiai toli gražu neišsemia visų atvejų, kuomet gali būti taikoma ekstremaliųjų reikšmių teorija, tačiau ir jų pakanka parodyti, kokia plati gali būti šios teorijos taikymo sritis. Tačiau ne vien tik taikomojo pobūdžio uždaviniais turtinga ektremaliųjų reikšmių teorija, joje gausu ir idomių teorinių problemų.

Šiame darbe nagrinėjame vieną iš ekstremaliųjų reikšmių teorijos analizuojamų sričių – maksimumų ir minimumų stabilumą. Bandysime pereiti nuo geometrinio N stabilumo analizės prie kitų, mažiau iki šiol nagrinėtų Sibuya bei Harris skirstinių N stabilumo tyrimo.

Taigi, darbe atliksime geometrinio, Sibuya ir Harris skirstinių N stabilumo tyrimą: konkrečių skirstinių atveju patikrinsime geometrinį, Sibuya ir Harris N maks ir N min stabilumus bei atliksime kompiuterinę analizę.

Šia tematika skaityti pranešimai konferencijose, yra publikacijos [7], [8].

1. BENDROJI DALIS

1.1. STOCHASTINIAI EKSTREMUMAI

Tarkime, turime atsitiktinių dydžių rinkinį $X_1, X_2, \ldots X_n$. Sudarykime n pirmųjų sekos narių variacinę eilutę

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}.$$

Fiksuojame $k \in \mathrm{N}$. Kai $n \to \infty$, atsitiktinius dydžius $X_{k:n}$ ir $X_{n-k+1:n}$ vadinsime k-tosiomis ekstremaliosiomis reikšmėmis. Mažiausią ir didžiausią variacinės eilutės narius pažymime

$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Atsitiktinius dydžius W_n ir Z_n vadinsime ekstremaliosiomis reikšmėmis arba tiesiog minimumu ir maksimumu. Pateiksime keletą minimumų ir maksimumų pavyzdžių:

1. a) Lygiagrečiai jungtų elementų, kurių ilgaamžiškumas yra $X_1, X_2, \ldots X_n$, sistemos ilgaamžiškumas yra Z_n.

   b) Nuosekliai jungtų elementų sistemos ilgaamžiškumas yra W_n.

2. Individų populiacijos ilgaamžiškumas.
3. Korozijos gylis.
4. Maksimalios draudimo išmokos per tam tikrą laiką.
5. Maksimalus ir minimalus vandens lygis.
6. Minimalios įtampos, pramušančios laido (kabelio) izoliaciją.

Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcija F vadinama tikimybė, jog $X < x$:

$$F(x) = P(X < x), \ \ x \in R.$$

Pasiskirstymo funkcijos savybės:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$.

2) $F(x)$ yra nemažėjanti funkcija:

$$F(x_1) \leq F(x_2), \text{ kai } x_1 < x_2.$$

3) Galioja lygybės:

$$F(-\infty) = 0, \ \ F(+\infty) = 1.$$

4) Pasiskirstymo funkcija yra tolydi iš kairės:

$$F(x-0)=F(x)\text{, kai } x\in R\,.$$

Šios savybės yra įrodytos [2] darbe.

Tarkime, $u_n = u_n(x)$ – tokia realaus kintamojo funkcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka $H_n(u_n(x)) = P(Z_n < u_n(x))$ silpnai konverguoja į neišsigimusią pasiskirstymo funkciją $H(x)$. Taip apibrėžta struktūra Z_n kartu su prielaidomis apie atsitiktinių dydžių seką $\{X_n, n \ge 1\}$ bei jų funkcijų seka $\{u_n, n \ge 1\}$ sudaro maksimumų schemą.

Analogiškai apibrėžiame minimumų schemą. Tarkime $v_n = v_n(x)$ – tokia realaus kintamojo funkcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka $L_n(v_n(x)) = P(W_n < v_n(x))$ silpnai konverguoja į neišsigimusią pasiskirstymo funkciją $L(x)$. Struktūra W_n kartu su prielaidomis apie atsitiktinių dydžių seką $\{X_n, n \ge 1\}$ ir funkcijų seką $\{v_n, n \ge 1\}$ sudaro minimumų schemą.

Jei atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n \ge 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija $F(x)$, o normavimo funkcijos u_n ir v_n tiesinės, t.y.

$$u_n(x) = a_n + b_n x, \quad a_n \in R, \quad b_n > 0\,,$$

$$v_n(x) = c_n + d_n x, \quad c_n \in R, \quad d_n > 0\,,$$

tai tokia ekstremaliųjų reikšmių schema vadinama klasikine.

Sudarysime ekstremumų matematinį modelį. Tarkime, kad turime atsitiktinį vektorių $(X_1, X_2, \ldots X_n)$. Imame struktūras Z_n ir W_n. Sakykime, kad vektoriaus $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ skirstinio funkcija

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots X_n < x_n)$$

yra žinoma. Tada:

1. $F_{Z_n}(x) = P(Z_n < x) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j < x\right) = F(x, x, \ldots x)\,.$

2. Jeigu dydžiai X_i, $i = \overline{1,n}$ yra nepriklausomi su skirstinio funkcijomis $F_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, tai

$$F_{Z_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x)\,.$$

3. Jei dydžiai nepriklausomi ir vienodų skirstinių $F_i(x) = F(x), i = \overline{1,n}$, tai $F_{Z_n}(x) = F^n(x).$

Skaičiuodami minimumo W_n skirstinį pasinaudojame teiginiu:

$$(W_n < x) = \bigcup_{j=1}^{n} (X_j < x).$$

Tada skirstinio funkcija

$$P(W_n < x) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n}(X_j < x)\right) = 1 - P(X_1 \ge x, X_2 \ge x, \ldots, X_n \ge x).$$

Jeigu dydžiai nepriklausomi, tai

$$F_{W_n}(x) = P(W_n < x) = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - F_j(x)),$$

o jeigu dar ir vienodų skirstinių, tai

$$F_{W_n}(x) = 1 - (1 - F_j(x))^n .$$

1.2. EKSTREMUMŲ RIBINĖS TEOREMOS

Suformuluosime keletą fundamentalių vienmačių ekstremaliųjų reikšmių teorijos rezultatų, kuriuose yra gauti nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių tiesiškai normuotų ekstremaliųjų reikšmių ribiniai skirstiniai ir pateikiami normavimo konstantų parinkimo būdai.

Tarkime, kad

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots X_n) = \max(X_j, j = \overline{1,n}) = \bigvee_{j=1}^{n} X_j$$

ir dydžiai $X_j, j = \overline{1,n}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su $F_j(x) = F(x)$. Tada skirstinio funkcija

$$H_n(x) = P(Z_n < x), \text{ kai } n \to \infty$$

yra lygi

$$H_n(x) = F^n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0, kai & 0 \le F(x) < 1 \\ 1, kai & F(x) = 1 \end{cases}.$$

Gauname išsigimusį ribinį skirstinį.

Tarkime, kad egzistuoja tokios normavimo konstantų sekos $\{a_n, n \ge 1\}$ ir $\{b_n > 0, n \ge 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \qquad \textbf{(1.1)}$$

kiekviename funkcijos $H(x)$ tolydumo taške (čia $H(x)$ - neišsigimusi pasiskirstymo funkcija). Tokį konvergavimą vadinsime silpnuoju pasiskirstymo funkcijų arba atsitiktinių dydžių konvergavimu. Jeigu taip yra, tai rasime visas galimas $H(x)$ išraiškas bei normavimo konstantas a_n ir b_n. Įrodysime bendrą teoremą iš dalies išsprendžiančią šią problemą.

1.1 teorema. ([4]) Sąlyga

$$z_n(x) = n\big(1 - F(xb_n + a_n)\big) \to z(x), \text{ kai } n \to \infty$$

yra būtina ir pakankama, kad galiotų (1.1) lygybė. Be to,

$$H(x) = e^{-z(x)}.$$

Įrodymas:

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = P\big(Z_n < xb_n + a_n\big) = F^n(xb_n + a_n) = \left(1 - \frac{n\big(1 - F(xb_n + a_n)\big)}{n}\right)^n. \quad \textbf{(1.2)}$$

Pasinaudojame iš analizės žinomu sąryšiu:

$$\left(1 \pm \frac{z_n(x)}{n}\right) \to e^{\pm z(x)}, \text{ kai } n \to \infty$$

tada ir tik tada, kai $z_n(x) \to z(x)$.

Iš šio sąryšio ir (1.2) lygybės išplaukia būtinumas ir pakankamumas $\big(z_n(x) = n\big(1 - F(xb_n + a_n)\big)\big)$.

Teorema įrodyta.

Ši teorema neteikia algoritmo normavimo konstantų a_n ir $b_n > 0$ skaičiavimui. Be to, nėra $z(x)$ analizinės išraiškos. Tai šios pakankamai bendros teoremos trūkumai.

Sakysime, kad skirstinys F priklauso ribinio skirstinio H traukos sričiai (žymėsime $F \in D(H)$), jei egzistuoja tokios normavimo konstantų sekos, kad būtų tenkinama lygybė

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x).$$

Dabar pažymėkime

$$W_n = \min\big(X_1, X_2, \ldots, X_n\big).$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios normavimo konstantų sekos $\{c_n, n \ge 1\}$ ir $\{d_n > 0, n \ge 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x) \quad \textbf{(1.3)}$$

kiekviename funkcijos $L(x)$ tolydumo taške (čia $L(x)$ - neišsigimusi pasiskirstymo funkcija). Tokį konvergavimą vadinsime silpnuoju pasiskirstymo funkcijų arba atsitiktinių dydžių konvergavimu.

Sakysime, kad skirstinys F priklauso ribinio skirstinio L traukos sričiai (žymėsime $F \in D(L)$), jei egzistuoja tokios normavimo konstantų sekos, kad tenkinama lygybė (1.3).

Toliau nagrinėsime klasikinę schemą: dydžiai X_j, $j \ge 1$ nepriklausomi, vienodų skirstinių, normavimas – tiesinis. Suformuluosime ribines ekstremumų teoremas. Pažymėjimai:

$$\alpha(F) = \inf\{x : F(x) > 0\},$$
$$\omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

1.2 teorema. ([4]) Tarkime, kad $\omega(F) = +\infty$. Jeigu egzistuoja toks $\gamma > 0$, kad su visais $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\gamma} \tag{1.4}$$

tai egzistuoja tokios normavimo konstantos a_n ir $b_n > 0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) \Rightarrow H_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} e^{-x^{-\gamma}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

Tada normavimo konstantos parenkamos taip:

$a_n = 0,$ o b_n randame iš lygties: $1 - F(b_n) = \frac{1}{n}.$

1.3 teorema. ([4]) Tarkime, kad $\omega(F) < \infty$. Apibrėžiame skirstinio funkciją:

$$F^*(x) = F\left(\omega(F) - \frac{1}{x}\right), x > 0.$$

Jei egzistuoja toks $\gamma > 0$, su kuriuo $F^*(x)$ tenkina sąlygą (1.4), tai egzistuoja tokios normavimo konstantos a_n ir $b_n > 0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) \Rightarrow H_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\gamma}}, x < 0 \\ 0, x \ge 0 \end{cases}.$$

Tada normavimo konstantas parenkame taip:

$a_n = \omega(F),$ b_n: imame b'_n iš lygties $1 - F(b'_n) = \frac{1}{n},$ tada $b_n = \omega(F) - b'_n$.

1.4 teorema. ([4]) Tarkime, kad baigtiniam dydžiui a

$$\int_a^{\omega(F)} (1 - F(y))dy < \infty. \tag{1.5}$$

Apibrėžiame funkciją

$$R(t) = \int_t^{\omega(F)} \frac{(1 - F(y))dy}{1 - F(t)}, \quad \alpha(F) < t < \omega(F).$$

Jeigu

$$\lim_{t\to\omega(F)} \frac{1 - F(t + xR(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}, \quad x \in R, \tag{1.6}$$

tai

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) \Rightarrow H_3(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in R.$$

Tada normavimo konstantas parenkame taip:

a_n randame iš lygties: $1 - F(a_n) = \dfrac{1}{n}$, o $b_n = R(a_n)$.

Pastaba. 1.2 – 1.4 teoremose pateiktas normavimo konstantų a_n ir b_n parinkimo būdas nėra vienintelis, tačiau jis yra geras tuo, kad yra paprastas ir konstruktyvus, todėl savo darbe ieškodami normavimo konstantų remsimės būtent šiomis teoremomis.

1.5 teorema. ([4]) Klasikinėje maksimumų schemoje egzistuoja tik trys $(H_{1,\alpha}, H_{2,\alpha}, H_3)$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.6 teorema. ([4]) Tarkime, turime klasikinę maksimumų schemą.

1) $F \in D(H_{1,\alpha})$ tada ir tik tada, kai $\omega(F) = \infty$ ir tenkinama sąlyga (1.4);

2) $F \in D(H_{2,\alpha})$ tada ir tik tada, kai $\omega(F) < \infty$ ir funkcija

$$F^*(x) = F(\omega(F) - 1/x), \ (x > 0)$$

tenkina sąlygą (1.4);

3) $F \in D(H_3)$ tada ir tik tada, kai integralas (1.5) yra baigtinis, ir tenkinama sąlyga (1.6).

1.7 teorema. ([4]) Tarkime, $\alpha(F) = -\infty$, ir egzistuoja tokia teigiama konstanta γ, kad

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\gamma} \qquad \textbf{(1.7)}$$

visiems $x > 0$. Tuomet $F \in D(L_{1,\gamma})$. Čia

$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-(-x)^{-\gamma}), & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$d_n = \sup\{x : F(x) \leq 1/n\}, \text{ o}$$

$$c_n = 0.$$

1.8 teorema. ([4]) Tarkime $\alpha(F)$ yra baigtinis, o pasiskirstymo funkcija

$$F^*(x) = F(\alpha(F) - 1/x), \ x < 0$$

tenkina sąlygą (1.7). Tuomet $F \in D(L_{2,\gamma})$. Čia

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1-\exp(-x^{\gamma}), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$c_n = \alpha(F),$$

$$d_n = \sup\{x : F(x) \leq 1/n\} - \alpha(F).$$

1.9 teorema. ([4]) Tarkime, su bet kokia baigtine konstanta α integralas

$$\int_{\alpha(F)}^{\alpha} F(y)dy \qquad \textbf{(1.8)}$$

yra baigtinis. Apibrėžkime funkciją

$$r(t) = \frac{1}{F(t)} \int_{\alpha(F)}^{t} F(y)dy,$$

čia $t > \alpha(F)$.

Jei visiems realiems x egzistuoja riba

$$\lim_{t \to \alpha(F)} \frac{F(t + xr(t))}{F(t)} = e^x, \qquad \textbf{(1.9)}$$

tai $F \in D(L_3)$. Čia

$$L_3(x) = 1 - \exp(-e^x), \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$c_n = \sup\{x : F(x) \leq 1/n\},$$

$$d_n = r(c_n).$$

1.10 teorema. ([4]) Klasikinėje minimumų schemoje egzistuoja tik trys $(L_{1,\gamma}, L_{2,\gamma}, L_3)$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.11 teorema. ([4]) Tarkime, turime klasikinę minimumų schemą.

1) $F \in D(L_{1,\gamma})$ tada ir tik tada, kai $\alpha(F) = -\infty$ ir tenkinama sąlyga (1.6);

2) $F \in D(L_{2,\gamma})$ tada ir tik tada, kai $\alpha(F) > \infty$ ir funkcija

$$F^*(x) = F(\alpha(F) - 1/x), \ (x < 0)$$

tenkina sąlygą (1.6);

3) $F \in D(L_3)$ tada ir tik tada, kai integralas (1.8) yra baigtinis, ir tenkinama sąlyga (1.9).

1.3. MAKS IR MIN STABILIEJI SKIRSTINIAI

Skirstinio funkciją F vadiname maks stabiliąją, jeigu egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantos a_n ir $b_n > 0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = F(x) \Leftrightarrow F^n(xb_n + a_n) = F(x).$$

Yra tik trys maks stabilieji skirstiniai:

1) $H_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} e^{-x^{-\gamma}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases},$

2) $H_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\gamma}}, x < 0 \\ 0, x \ge 0 \end{cases},$

3) $H_3(x) = e^{-e^{-x}}$.

Skirstinio funkciją F vadiname min stabiliąją, jeigu egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantos c_n ir $d_n > 0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{W_n - c_n}{d_n} < x\right) = F(x) \Leftrightarrow 1 - \left(1 - F(xd_n + c_n)\right)^n = F(x).$$

Yra tik trys min stabilieji skirstiniai:

1) $L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-(-x)^{-\gamma}), & x < 0, \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$

2) $L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^{\gamma}), & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

3) $L_3(x) = 1 - \exp(-e^x), \qquad (-\infty < x < \infty).$

1.4. ATSITIKTINIS DYDŽIŲ SKAIČIUS

Dabar pereikime nuo determinuoto prie atsitiktinio dydžių skaičiaus struktūros nagrinėjimo.

Tarkime, turime atsitiktinių dydžių rinkinį $X_1, X_2, \dots X_N$, su skirstinio funkcija $F(x) = P(X_j < x)$, $j = \overline{1, N}$.

Čia N – atsitiktinis dydis, įgyjantis natūraliąsias reikšmes: $N \in \{1,2,\ldots\}$. N ir X yra tarpusavy nepriklausomi dydžiai. Pažymime:

$$Z_N = \max(X_1, X_2, \ldots, X_N),$$

$$W_N = \min(X_1, X_2, \ldots, X_N).$$

Pavyzdžiai:

1. X_j – korozijos gylis t-tajame taške, $j = \overline{1,N}$. Domina struktūra Z_N.

2. Maksimalios draudimo išmokos per metus.

3. Populiacijos ilgaamžiškumas $Z_N = \max(T_1, T_2, \ldots, T_N)$, T_j – j-tojo individo ilgaamžiškumas.

4. Stacionarios eilės maksimalus ilgis.

1.5. RIBINĖ PERKĖLIMO TEOREMA IR KONVERGAVIMO GREITIS

Problema:

Žinant centravimo ir normavimo konstantas a_n ir $b_n > 0$, su kuriomis teisinga lygybė

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) \Rightarrow H(x)$$

ir N_n ribinius skirstinius, rasti

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_{N_n} - A_n}{B_n} < x\right).$$

Mus domina kokios papildomos sąlygos dydžiui N_n sąlygoja perkėlimą žinomų ribinių dėsnių $(H_{1,\gamma}, H_{2,\gamma}, H_3)$ atveju, kai komponenčių skaičius maksimumų struktūroje yra atsitiktinis. Ši problema sprendžiama pasinaudojant perkėlimo teorema maksimumams.

1.12 teorema.([1]) Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai N_n ir X_j, $j \geq 1$ yra tarpusavyje nepriklausomi. Jei egzistuoja tokios normavimo ir centravimo konstantos a_n ir $b_n > 0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) \Rightarrow H(x),\ n \to \infty \tag{1.10}$$

ir

$$P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) \to A(x),\ n \to \infty, \tag{1.11}$$

tai

$$P\left(\frac{Z_N - a_n}{b_n} < x\right) \to \Psi(x),\ n \to \infty. \tag{1.12}$$

Čia ribinė skirstinio funkcija

$$\Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x)dA(z). \tag{1.13}$$

Taigi matome, jog perkėlimo teorema padeda mums rasti, į ką artėja maksimumų struktūros Z_N pasiskirstymo funkcija. Tačiau, kaip ir kiekvieno artėjimo atveju, atsiranda paklaidų, netikslumų. Atsiranda noras patikrinti, ar, kai kalbame apie atsitiktinį *N*, perkėlimo teorema yra vienintelis ir geriausias dalykas, skirtas Z_N įvertinimui. Paklaidoms nustatyti naudojama konvergavimo greičio įverčio teorema.

1.13 teorema.([3]) Tarkime tenkinamos (1.10 – 1.13)sąlygos. Tuomet teisingas įvertis

$$\left|P\left(Z_N < xb + a\right) - \psi(x)\right| \le \frac{u^2(x)}{n}\int_0^\infty ze^{-zu(x)}dA\left(nz\right) + u(x)\int_0^\infty \left|A_n(nz) - A(z)\right|e^{-zu(x)}dz,$$

jeigu $z_n(x) = u(x)$ ir $\dfrac{u(x)}{n} \le \dfrac{1}{2}$.

1.6. *N* STABILUMAS

Jau žinome, kad skirstinį *F(x)* vadiname maks stabiliuoju, jeigu

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = F(x) \Leftrightarrow F^n(xb_n + a_n) = F(x)$$

ir min stabiliuoju, jeigu

$$P\left(\frac{W_n - c_n}{d_n} < x\right) = F(x) \Leftrightarrow 1 - \left(1 - F(xd_n + c_n)\right)^n = F(x).$$

Dabar apibrėšime *N* maks ir *N* min stabiliuosius skirstinius.

Skirstinį *F(x)* vadiname *N* maks stabiliuoju, jeigu

$$P\left(\frac{Z_N - a}{b} \le x\right) = F(x) \Leftrightarrow g_N(F(xb + a)) = F(x)$$

ir *N* min stabiliuoju, jeigu

$$P\left(\frac{W_N - a}{b} \leq x\right) = 1 - F(x) \Leftrightarrow g_N(1 - F(xb + a)) = 1 - F(x).$$

Čia $g_N(x)$ - generuojančioji funkcija.

Sveikaskaičio atsistiktinio dydžio X generuojančiąją funkcija g vadiname atsitiktinio dydžio z^X vidurkį

$$g(z) = g_X(z) = Mz^X = \sum z^k p_k$$

1.6.1. GEOMETRINIS *N* STABILUMAS

Nagrinėkime atvejį, kai N yra pasiskirstęs pagal geometrinį dėsnį su parametru p, t.y.

$$P(N = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}, \ k = 1,2,.... \quad 0 < p < 1.$$

Geometrinio skirstinio generuojančioji funkcija

$$g_N(z) = \frac{pz}{1 - (1 - p)z}.$$

Taigi, skirstinio funkcija $F(x)$ yra geometriškai N maks stabilioji, kai

$$\frac{pF(bx + a)}{1 - (1 - p)F(xb + a)} = F(x).$$

Čia centravimo ir normavimo konstantos $a = a(p)$, $b = b(p)$. Ši lygybė yra vadinama geometrinio N maks stabilumo kriterijumi.

Atitinkamai skirstinio funkcija $F(x)$ yra geometriškai N min stabilioji, kai

$$\frac{p\overline{F}(bx + a)}{1 - (1 - p)\overline{F}(xb + a)} = \overline{F}(x).$$

Tai geometrinio N min stabilumo kriterijus. Čia $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$.

1.14 teorema. ([5]) Skirstinio funkcija $F(x)$, $x \in R$ yra geometriškai N maks stabili tada ir tik tada, jeigu ji yra geometriškai N min stabili.

Įrodymas:

Turime geometrinio N maks stabilumo kriterijų

$$\frac{pF(x)}{(1 - (1 - p)F(x))} = F(x).$$

Pažymime $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ ir atliekame paprastus pertvarkymus:

$$\frac{pF(x)}{(1-(1-p)F(x))} = F(x) \Leftrightarrow 1 - \frac{pF(x)}{(1-(1-p)F(x))} = \overline{F}(x) \Leftrightarrow \frac{\overline{F}(x)}{p+(1-p)\overline{F}(x)} = \overline{F}(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p\overline{F}(x)}{1-(1-p)\overline{F}(x)} = \overline{F}(x).$$

Čia

$$\overline{F}(x) = \frac{p\overline{F}(x)}{1-(1-p)\overline{F}(x)}$$

yra geometrinio *N* min stabilumo kriterijus.

Taigi,

$$F(x) = \frac{pF(x)}{(1-(1-p)F(x))} = \frac{p\overline{F}(x)}{1-(1-p)\overline{F}(x)} = \overline{F}(x).$$

Teorema įrodyta.

1.6.2. SIBUYA *N* STABILUMAS

Toliau nagrinėsime atvejį, kai *N* pasiskirstęs pagal Sibuya dėsnį.

Sibuya skirstinys yra diskretus skirstinys su generuojančiąją funkcija

$$g_N(z) = 1-(1-z)^{\alpha},\ 0<\alpha<1.$$

Suformuluosime Sibuya *N* maks ir *N* min stabilumo kriterijus.

Skirstinio funkciją *F(x)* vadiname Sibuya *N* maks stabiliąja, jeigu

$$1-(1-F(xb+a))^{\alpha} = F(x)$$

ir *N* min stabiliąja, jei

$$1-(1-\overline{F}(xb+a))^{\alpha} = \overline{F}(x)$$

1.6.3. HARRIS *N* STABILUMAS

Trečiasis šiame darbe nagrinėjamas atvejis yra, kai *N* pasiskirstęs pagal Harris dėsnį.

Harris skirstinio tikimybes generuojančioji funkcija yra

$$g_N(z) = \frac{z}{(m-(m-1)z^k)^{\frac{1}{k}}},\ k>0,\ m>1.$$

Ji gali būti užrašoma ir taip:

$$g_N(z) = \left(\frac{z^k}{(m-(m-1)z^k)} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Suformuluosime Harris *N* maks ir *N* min stabilumo kriterijus.

Skirstinio funkcija *F(x)* yra Harris *N* maks stabilioji, kai

$$\frac{F(xb+a)}{(m-(m-1)F^k(xb+a)^{\frac{1}{k}}} = F(x)$$

ir *N* min stabilioji, kai

$$\frac{\overline{F}(xb+a)}{(m-(m-1)\overline{F}^k(xb+a)^{\frac{1}{k}}} = \overline{F}(x).$$

1.7. DARBE SPRENDŽIAMI UŽDAVINIAI

Iki šiol įvairiose mokslo darbuose didžiausias dėmesys buvo skiriamas geometriniam min bei maks stabilumui. Būtent geometrinio skirstinio atžvilgiu buvo atlikta gilesnė analizė ir *N* stabilumo srityje. Buvo pastebėta, jog geometrinio skirstinio atveju *N* maks ir *N* min stabilumai yra vienas kitą sąlygojantys, t.y jei skirstinio funkcija *F(x)* yra geometriškai *N* maks stabili, tai ji bus ir geometriškai *N* min stabili (teisingas ir atvirkščias teiginys) . Šiame darbe mes bandysime pereiti nuo geometrinio *N* stabilumo analizės prie kitų skirstinių *N* stabilumo tyrimo. Be geometrinio, nagrinėsime iki šiol mažai nagrinėtus Sibuya ir Harris stabilumus. Pradėsime nuo to, jog atliksime geometrinio *N* stabilumo tyrimą, kuris patvirtina minėtas geometrinio skirstinio savybes. Be to, bandysime apibendrinti šiuos pastebėjimus kitiems dviems *N* skirstiniams.

Darbo tikslai:

- konkrečių skirstinių atveju patikrinti geometrinį *N* maks ir *N* min stabilumą;
- konkrečių skirstinių atveju patikrinti Sibuya *N* maks ir *N* min stabilumą;
- konkrečių skirstinių atveju patikrinti Harris *N* maks ir *N* min stabilumą;
- atlikti konvergavimo greičio kompiuterinę analizę.

Konvergavimo greitis tiriamas grafiškai, naudojantis programa *Mathcad 2001*.

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1 GEOMETRINIO N STABILUMO TYRIMAS

Nagrinėkime atvejį, kai N yra pasiskirstęs pagal geometrinį dėsnį su parametru p, t.y.

$$P(N=k)=p\cdot(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\dots \quad 0<p<1.$$

Suformuluosime ir įrodysime naują teoremą:

2.1 teorema. Atsitiktinis dydis X yra geometriškai N maks stabilus tada ir tik tada, kai jo skirstinio funkcija $F(x)$ gali būti užrašyta taip:

$$F(x)=\frac{\Psi(x)}{1+\Psi(x)};\quad \Psi(x)=\frac{\Psi(b\cdot x+a)}{p},\ b>0,\ a\in R \tag{2.1}$$

Įrodymas:

Būtinumas. Tarkime, $F(x)$ tenkina (2.1) salygą. Įrodysime, kad $F(x)$ yra geometriškai N maks stabili.

$$g(F(x))=\frac{p\cdot F(x)}{1-(1-p)\cdot F(x)}=\frac{p\cdot\dfrac{\Psi(x)}{1+\Psi(x)}}{1-(1-p)\cdot\dfrac{\Psi(x)}{1+\Psi(x)}}=\frac{p\cdot\Psi(x)}{1+\Psi(x)\text{-}\Psi(x)+p\cdot\Psi(x)}=$$

$$=\frac{p\cdot\Psi(x)}{1+p\cdot\Psi(x)}=\frac{\Psi(b\cdot x+a)}{1+\Psi(b\cdot x+a)}=F(b\cdot x+a)$$

Pakankamumas. Tarkime, kad $F(x)$ geometriškai N maks stabili. Įrodysime, kad $F(x)$ tenkina (2.1) sąlygą.

Kadangi $F(x)$ yra geometriškai N maks stabili, tai teisingas toks sąryšis:

$$\frac{p\cdot F(x)}{1-(1-p)\cdot F(x)}=F(b\cdot x+a).$$

Pažymėkime

$$\Psi(x)=\frac{F(x)}{1-F(x)}.$$

Tuomet

$$F(x)=\frac{\Psi(x)}{1+\Psi(x)}.$$

Tada

$$\frac{p\cdot F(x)}{1-(1-p)\cdot F(x)}=\frac{p\cdot\dfrac{\Psi(x)}{1+\Psi(x)}}{1-(1-p)\cdot\dfrac{\Psi(x)}{1+\Psi(x)}}=\frac{p\cdot\Psi(x)}{1+\Psi(x)-\Psi(x)+p\cdot\Psi(x)}=\frac{p\cdot\Psi(x)}{1+p\cdot\Psi(x)}.$$

Iš kitos pusės

$$\frac{p\cdot F(x)}{1-(1-p)\cdot F(x)}=F(b\cdot x+a)\Rightarrow\frac{p\cdot\Psi(x)}{1+p\cdot\Psi(x)}=\frac{\Psi(b\cdot x+a)}{1+\Psi(b\cdot x+a)}.$$

Taigi

$p\cdot\Psi(x)=\Psi(b\cdot x+a).$

Teorema įrodyta.

Toliau nagrinėkime konkrečią skirstinio funkciją $F(x)=\dfrac{1}{1+\exp(-x)}, x\in R$.

Pertvarkykime šią funkciją:

$$F(x)=\frac{1}{1+\exp(-x)}=\frac{\exp(x)}{1+\exp(x)}.$$

Matome, jog teoremos sąlyga (2.1) yra tenkinama, taigi šiuo atveju funkcija $F(x)$ yra geometriškai N maks stabili. Suraskime konstantas a ir $b>0$ bei patikrinkime stabilumą naudodami geometrinio N stabilumo kriterijus.

$$g_N(F(x))=\frac{p\cdot\dfrac{1}{1+\exp(-x)}}{1-(1-p)\cdot\dfrac{1}{1+\exp(-x)}}=\frac{p}{\exp(-x)+p}=\frac{1}{1+\dfrac{\exp(-x)}{p}}$$

$$g_N(F(xb+a))=\frac{1}{1+\dfrac{\exp(-xb-a)}{p}}=\frac{1}{1+\exp(-x)}=F(x),\ \text{kai}\ a=\ln p,\ \ b=1.$$

Gauname, kad funkcija $F(x)=\dfrac{1}{1+\exp(-x)}, x\in R$ yra geometriškai N maks stabili.

Pagal 1.14 teoremą, ji turi būti ir geometriškai N min stabili. Tikriname geometrinį N min stabilumą:

$$g_N(1-F(x))=\frac{p\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+\exp(-x)}\right)}{1-(1-p)\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+\exp(-x)}\right)}=\frac{p\cdot\exp(-x)}{1+p\cdot\exp(-x)}=1-\frac{1}{1+p\cdot\exp(-x)}$$

$$g_N(1-F(xb+a)) = \frac{1}{1+p\cdot\exp(-xb-a)} = 1-\frac{1}{1+\exp(-x)} = 1-F(x),\ \text{kai}\ a=\ln p,\ \ b=1.$$

Gauname, kad funkcija $F(x) = \dfrac{1}{1+\exp(-x)}, x \in R$ yra geometriškai *N* min stabili.

Dabar panagrinėkime kitą pavyzdį.

Skirstinio funkcija $F(x) = 1-\dfrac{1}{x^\alpha}$, $x \geq 1,\ \alpha > 0$ (Pareto).

Pagal 2.1 teoremą ji nėra geometriškai *N* maks stabili. Patikrinus iš tiesų neįmanoma rasti tokių konstantų a ir $b>0$, kad būtų tenkinamas geometrinio *N* maks stabilumo kriterijus.

Taigi, rasime ribinį skirstinį $H(x)$ ir normavimo konstantų $a_n, b_n > 0$ išraiškas maksimumų atveju, kai pasiskirstymo funkcija yra $F(x) = 1-\dfrac{1}{x^\alpha}$. Tai atliksime taikydami ribines teoremas maksimumams (1.2 – 1.4 teoremos).

Iš funkcijos išraiškos nustatome, kad $\omega(F) = +\infty,\ \alpha(F) = 0.$ Taigi, tinka 1.2 arba 1.4 teorema.

Tikriname 1.2 teoremą:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1-(1-\frac{1}{(xt)^\alpha})}{1-(1-\frac{1}{t^\alpha})} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^\alpha t^\alpha}}{\frac{1}{t^\alpha}} = \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}, t\to+\infty.$$

Šios teoremos sąlyga tenkinama, todėl galime teigti, kad

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) \Rightarrow H_1(x) = e^{-x^{-\alpha}},\ \ x>0.$$

Randame normavimo konstantas:

$$a_n = 0,$$

$$b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Taigi, galutinai

$$P\left(\frac{Z_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} < x\right) \Rightarrow e^{-x^{-\alpha}}.$$

Rasime konvergavimo greičio įvertį naudodamiesi 1.13 teorema.

$$\left|P\left(Z_N < xb+a\right)-\psi(x)\right| \le \frac{u^2(x)}{n}\int_0^\infty ze^{-zu(x)}dA\left(nz\right)+u(x)\int_0^\infty \left|A_n(nz)-A(z)\right|e^{-zu(x)}dz\,.$$

čia $\psi(x)=\int_0^\infty \left(e^{-\frac{1}{x^\alpha}}\right)^z d\left(1-e^{-z}\right)=\int_0^\infty e^{-\frac{z}{x^\alpha}}e^{-z}dx=\int_0^\infty e^{-z\left(\frac{1}{x^\alpha}+1\right)}dx=\frac{x^\alpha}{x^\alpha+1},\quad x>0\,.$

Apskaičiuosime konvergavimo greičio įverčio išraiškos dėmenis atskirai. Pimasis dėmuo:

$$\frac{u^2(x)}{n}\int_0^\infty ze^{-zu(x)}dA\left(nz\right)=\frac{u^2(x)}{n}\int_0^\infty ze^{-zu(x)}dA\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{zn}\right)=\frac{u^2(x)}{n}\cdot n\cdot\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\int_0^\infty ze^{-zu(x)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{zn}dz\le$$

$$\le u^2(x)n\cdot\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\int_0^\infty ze^{-zu(x)}e^{-z}dz=u^2(x)n\cdot\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\int_0^\infty ze^{-z(1+u(x))}dz=\frac{u^2(x)}{\left(1+u(x)\right)^2}\cdot\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

Antrasis dėmuo:

$$u(x)\int_0^\infty \left|A_n(nz)-A(z)\right|e^{-zu(x)}dz=u(x)\int_0^\infty \left|\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}-\left(1-e^{-z}\right)\right)\right|e^{-zu(x)}dz=u(x)\int_0^\infty \left|e^{-z}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right|e^{-zu(x)}dz=$$

$$=\frac{u(x)\sqrt{e}}{n}\int_0^\infty (1+z)e^{-zu(x)}e^{-z}dz=\frac{u(x)\sqrt{e}}{n}\int_0^\infty e^{-zu(x)}e^{-z}dz+\frac{u(x)\sqrt{e}}{n}\int_0^\infty ze^{-zu(x)}e^{-z}dz=$$

$$=\frac{u(x)\sqrt{e}}{n}\left(\frac{1}{1+u(x)}+\frac{1}{\left(1+u(x)\right)^2}\right)=\frac{u(x)\sqrt{e}\left(2+u(x)\right)}{n(1+u(x))^2}$$

Dėmenų suma:

$$\frac{u^2(x)}{n}\int_0^\infty ze^{-zu(x)}dA\left(nz\right)+u(x)\int_0^\infty \left|A_n(nz)-A(z)\right|e^{-zu(x)}dz=\frac{u^2(x)}{\left(1+u(x)\right)^2}\cdot\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)+\frac{u(x)\sqrt{e}\left(2+u(x)\right)}{n(1+u(x))^2}=$$

$$=\frac{u(x)}{(1+u(x))^2}\cdot\left(u(x)\ln\left(\frac{n}{n-1}+\frac{\sqrt{e}\left(2+u(x)\right)}{n}\right)\right)$$

Kadangi,

$u(x)=x^{-\alpha}$,

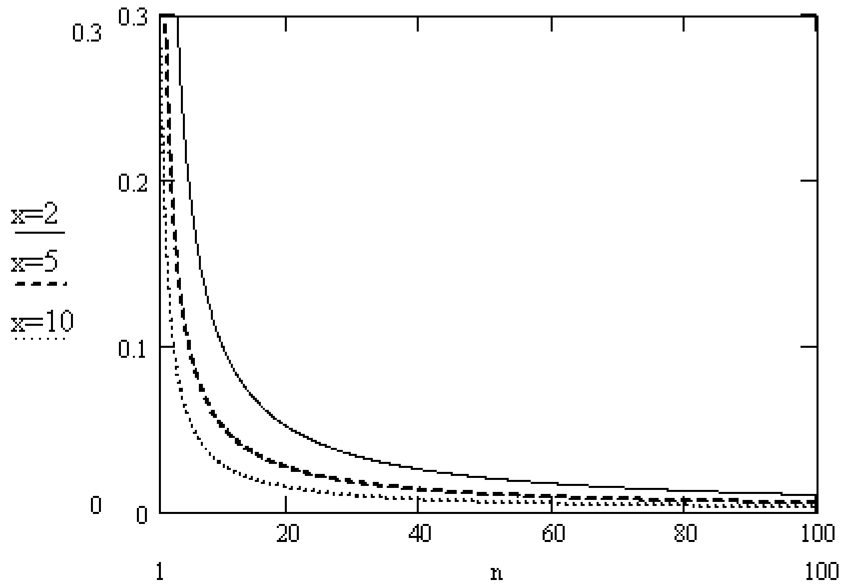
tai galutinai

$$\left|P\left(Z_N < xb+a\right)-\psi(x)\right|\le\frac{x^{-\alpha}}{(1+x^{-\alpha})^2}\cdot\left(x^{-\alpha}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\frac{\sqrt{e}\left(2+x^{-\alpha}\right)}{n}\right).$$

Toliau atliksime šio teorinio rezultato kompiuterinę analizę.

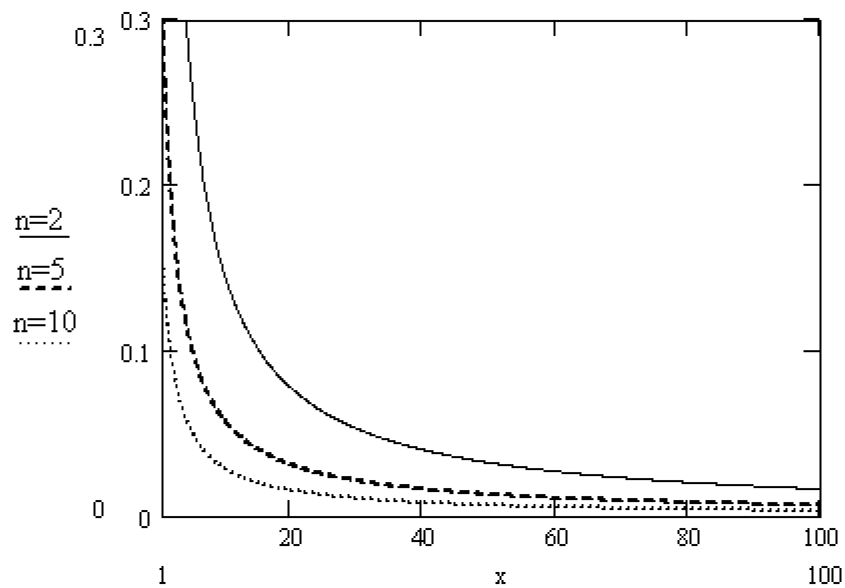
Pateiksime keletą konvergavimo greičio įverčio grafikų, iliustruojančių jo priklausomybę nuo x ir nuo n. Šią priklausomybę tiriame vieną parametrą fiksuodami, o kitą palikdami kintamu.

1 pav. pavaizduotas konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai x fiksuotas, o n kinta intervale [2;100].



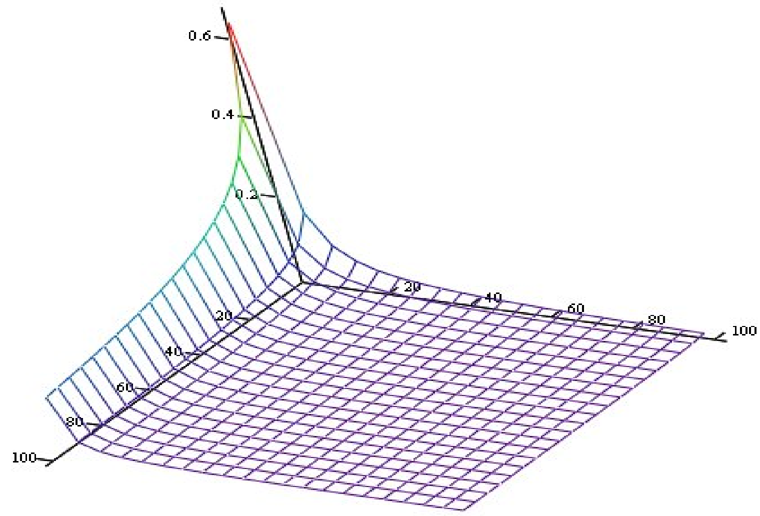
1 pav. Konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai x fiksuotas

2 pav. pavaizduotas konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai n fiksuotas, o x kinta intervale [2;100].



2 pav. Konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai n fiksuotas

3 pav. pavaizduotas konvergavimo greičio įverčio paviršius, kai x ir n kinta intervaluose [2;100].



3 pav. Konvergavimo greičio įverčio paviršius

Detalesnė konvergavimo greičio kompiuterinė analizė pateikta 1 priede.

Taigi matome, jog *N* maks stabilumo atveju mes galime tiksliai pasakyti, kam bus lygi maksimumų pasiskirstymo funkcija, tuo tarpu kai perkėlimo teorema leidžia kalbėti tik apie artėjimą. Kadangi *N* maks stabilumo atveju kalba eina apie griežtą lygybę, tai šiame lygmenyje mums nebekyla paklaidų vertinimo problemų, priešingai nei perkėlimo teoremos taikymo atveju. Taigi, galime daryti išvadą, jog perkėlimo teorema nėra nei vienintelis, nei geriausias maksimumų struktūrų vertinimo metodas, tačiau pritaikius šį metodą, paklaidos artėja į nulį, kai n neabibrėžtai didėja.

2.2 GEOMETRINIO SKIRSTINIO IŠSKIRTINUMAS N STABILUMO KONTEKSTE

Kaip jau buvo minėta, geometrinio skirstinio atveju *N* maks ir *N* min stabilumai yra vienas kitą sąlygojantys, t.y jei skirstinio funkcija *F(x)* yra geometriškai *N* maks stabili, tai ji bus ir geometriškai *N* min stabili (teisingas ir atvirkščias teiginys). Šiame skyrelyje mes bandysime pereiti nuo geometrinio *N* stabilumo analizės prie kitų skirstinių *N* stabilumo tyrimo. Pradėsime nuo to, jog pateiksime kelias geometrinio skirstinio savybes, kurias sąlygoja ankščiau minėta geometrinio *N* maks ir *N* min stabilumo ypatybė . Be to, bandysime apibendrinti šiuos pastebėjimus kitiems *N* skirstiniamas.

Taigi, jau žinome, kad geometriniai *N* maks ir *N* min stabilumai yra vienas kitą sąlygojantys. Dabar yra įdomu ištirti, ar iš to, jog *F(x)* yra *N* maks ir kartu *N* min stabili galime daryti išvadą, jog *N* pasiskirstęs pagal geometrinį dėsnį. Geometrinio skirstinio su parametru p generuojančią funkciją žymėkime $g_p(s)$.

Atidžiau pažvelgę į (1.14) teoremos įrodymą, matome, jog geometrinis skirstinys, o tiksliau jo generuojanti funkcija tenkina tam tikrą specifinę savybę

$$1 - g_P(1-s) = g_P^{-1}(s), \qquad s \in [0,1] \tag{2.2}$$

Ši lygybė išplaukia iš (1.14) teoremos įrodyme esančio ekvivalentumo

$$1 - \frac{p \cdot F(x)}{\left(1 - (1-p) \cdot F(x)\right)} = \frac{\overline{F}(x)}{\left(p - (1-p) \cdot \overline{F}(x)\right)}. \tag{2.3}$$

Be to, pasinaudota faktu, jog geometrinio skirstinio su parametru p atveju

$$g_P^{-1}(s) = \frac{s}{p + (1-p) \cdot s} \qquad .$$

Tikrai, nes

$$g_p\left(g_p^{-1}(s)\right) = \frac{p \cdot \left[\dfrac{s}{p+(1-p)\cdot s}\right]}{\left[1 - (1-p) \cdot \left[\dfrac{s}{p+(1-p)\cdot s}\right]\right]} = \frac{p}{\left[\dfrac{p+(1-p)\cdot s}{s} - (1-p)\right]} = s$$

Kairioji (2.3) lygybės pusė, charakterizuojanti maksimumų išgyvenimo funkciją, kai N skirstinys yra geometrinis, gali būti užrašyta ir tokiu pavidalu:

$$1 - P(Z_N < x) = \frac{\lambda \cdot \overline{F}(x)}{1 - (1-\lambda) \cdot \overline{F}(x)}, \quad \lambda = 1/\mathrm{p} \tag{2.4}$$

Taigi matome, jog geometriškai N maks ir geometriškai N min skirstinių išgyvenimo funkcijos turi vienodą struktūrą atžvilgiu $\overline{F}(x)$. Dabar nagrinėkime, kaip yra pasiskirstę geometrinių (su parametru p) maksimumų geometriniai(su parametru q) minimumai. Pasinaudojame (2.4) ir gauname tokią išgyvenimo funkciją:

$$\frac{q \cdot \lambda \cdot \overline{F}(x)}{1 - (1 - q \cdot \lambda) \cdot \overline{F}(x)} \quad . \tag{2.5}$$

(2.5) rezultatą gavome tik todėl, kad (2.3) lygybės kairiąją pusę buvo galima parašyti kaip (2.4) ir todėl, jog geometrinio skirstinio generuojanti funkcija yra uždara superpozicijos atžvilgiu. Taigi šiuo metu jau žinome, jog geometrinio skirstinio atveju teisingi tokie sąryšiai:

$$g_P^{-1}(\mathrm{s}) = \mathrm{g}_\lambda(\mathrm{s}), \quad \lambda = 1/\mathrm{p}$$

$$g_p\left(g_q(s)\right) = g_{pq}(\mathrm{s}) \quad \text{, visiems } |s| < 1 \text{ ir } 0 < p, q < 1$$

Pasinaudodami visais anksčiau aprašytais pastebėjimais apie geometrinio skirstinio generuojančią funkciją, galime apibendrinti tam atvejui, kai *N*, nebūtinai geometrinis, priklauso nuo parametro $u > 0$, o jo generuojanti funkcija yra $g_u(s)$.

2.2 teorema. Iš *F(x) N* maks stabilumo išplaukia ir *F(x) N* min stabilumas (ir atvirkščiai) tada ir tik tada, kai $g_u(s)$ tenkina tokią lygybę:

$$1 - g_u(1 - \mathrm{s}) = \mathrm{g_u}^{-1}(\mathrm{s}), \quad 0 < s < 1 \tag{2.6}$$

Įrodymas:

Būtinumas. Tarkime, *F(x)* yra *N* maks stabili ir $g_u(s)$ tenkina (2.6) sąlygą. Tuomet,

$$g_u\left(F(x)\right) = F(bx + a) \Leftrightarrow 1 - g_u\left(1 - \overline{F}(x)\right) = \overline{F}(bx + a) \Leftrightarrow g_u^{-1}\left(\overline{F}(x)\right) = \overline{F}(bx + a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{F}(x) = g_u\left(\overline{F}(bx + a)\right)$$

Paskutinioji lygybė reiškia *F(x) N* min stabilumą.

Pakankamumas. Tarkime, *F(x) N* maks stabilumas sąlygoja ir *F(x) N* min stabilumą. Tuomet turime, jog

$$1 - g_u\left(1 - \overline{F}(x)\right) = \overline{F}(bx + a) \Leftrightarrow \overline{F}(x) = g_u\left(\overline{F}(bx + a)\right) \Leftrightarrow g_u^{-1}\left(\overline{F}(x)\right) = \overline{F}(bx + a).$$

Taigi, $1 - g_u\left(1 - \overline{F}(x)\right) = g_u^{-1}\left(\overline{F}(x)\right)$ arba $1 - g_u\left(1 - s\right) = g_u^{-1}\left(s\right)$.

Teorema įrodyta.

2.3 teorema. Tarkime, *N* generuojanti funkcija tenkina (2.6) sąlygą. Tuomet *N* maks ir *N* min išgyvenimo funkcijos turi vienodą algebrinę išraišką $\overline{F}$ (x) atžvilgiu tada ir tik tada, kai

$$\exists \lambda > 0 \,\middle|\, \mathrm{g_u}^{-1}(\mathrm{s}) = \mathrm{g}_{\lambda}(\mathrm{s}) \tag{2.7}$$

2.4 teorema. Tarkime, *N* generuojanti funkcija tenkina (2.6) ir (2.7) sąlygas. Tuomet jei $g_u(s)$ tenkina

$$g_u(g_v(s)) = g_{uv}(s), \quad |s| < 1 \text{ ir } u, v > 0 \tag{2.8}$$

tai *N* min *N* maksimumų ir *N* maks *N* minimumų algebrinė struktūra yra tokia pat kaip ir *N* min.

Įrodymas. N min N maksimumų išgyvenimo funkcija yra $g_u(g_\lambda(\overline{F}(x)))$. Kadangi yra tenkinama (2.8) sąlyga, tai $g_u(g_\lambda(\overline{F}(x))) = g_{u\lambda}(\overline{F}(x))$, o $g_{u\lambda}(\overline{F}(x))$ struktūra sutampa su $g_u(\overline{F}(x))$ struktūra. Analogiškai įrodome ir N maks N minimumų atveju.

Teorema įrodyta.

Toliau pateiksime pavyzdį, iliustruojantį, jog egzistuoja generuojančios funkcijos (ne geometrinio skirstinio), tenkinančios (2.6) arba (2.8) sąlygą. Perrašome (2.6) sąlygą taip:

$$g_u\left(1 - g_u(1\text{-}s)\right) = s, \quad \forall\ 0 < s < 1$$

Rezultatą pateiksime teoremomis.

2.5 teorema. Jei $F(x)$ yra N maks stabili, kai N generuojanti funkcija $g(s) = 1 - \left(1 - s^m\right)^{\frac{1}{m}}$, $m > 1$ (sveikasis skaičius), tuomet $F(x)$ yra ir N min stabili.

Įrodymas. Iš N maks stabilumo išpalukia, jog $1 - \left(1 - \left(F(x)\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} = F(bx + a) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(F(x)\right)^m = \left(\overline{F}(bx + a)\right)^m \Leftrightarrow F(x) = \left(1 - \left(\overline{F}(bx + a)\right)^m\right)^{\frac{1}{m}} \Leftrightarrow \overline{F}(x) = 1 - \left(1 - \left(\overline{F}(bx + a)\right)^m\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Taigi, $F(x)$ bus N maks ir N min stabili. Atvirkštinis teiginys, jog N min stabilumas sąlygoja N maks stabilumą, taip pat bus teisingas. Taigi, šiuo atveju $g(s)$ tenkina (2.6) sąlygą.

Teorema įrodyta.

2.5 teoremoje aprašytos generuojančios funkcijos išraiška yra artima Sibuya skirstinio generuojančiajai funkcijai. Sibuya N stabilumą, konkrečių $F(x)$ atveju, panagrinėsime 2.3 skyrelyje.

2.6 teorema. Jei N pasiskirstęs pagal Harris (a,k), k > 0 (sveikasis skaičius); a > 1 skirstinį, su N generuojančia funkcija

$$g(s) = \frac{s}{(a - (a-1) \cdot s^k)^{1/k}},$$

tai $g_a\left(g_v(s)\right) = g_{av}(s)$.

Įrodymas.

$$g_a\left(g_v(s)\right) = \frac{g_v(s)}{\left(a - (a-1) \cdot g_v{}^k\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{\dfrac{s}{\left(v - (v-1) \cdot s^k\right)^{\frac{1}{k}}}}{\left(a - (a-1) \cdot \left(\dfrac{s}{\left(v - (v-1) \cdot s^k\right)^{\frac{1}{k}}}\right)^k\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{\dfrac{s}{\left(v - (v-1) \cdot s^k\right)^{\frac{1}{k}}}}{\left(a - (a-1) \cdot \left(\dfrac{s^k}{v - (v-1) \cdot s^k}\right)\right)^{\frac{1}{k}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{s}{\left(v-(v-1)\cdot s^k\right)^{\frac{1}{k}}}}{\left(\dfrac{av-a(v-1)s^k-(a-1)s^k}{v-(v-1)\cdot s^k}\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{s}{\left(av-(av-1)\cdot s^k\right)^{\frac{1}{k}}} = g_{av}(s).$$

Teorema įrodyta.

Taigi, matome, jog šiuo atveju *N* pasiskirstymo funkcija tenkina 2.8 sąlygą. Harris *N* stabilumo tyrimą konkrečių *F(x)* atveju atliksime 2.4 skyrelyje.

Atlikdami panašią ir kitų skirstinių analizę galime pastebėti, jog atrodo, kad vienintelis skirstinys, tenkinantys ir (2.6), ir (2.8) sąlygas, yra geometrinis. Šiuo metu šis teiginys dar nėra įrodytas.

2.3 SIBUYA N STABILUMO TYRIMAS

Kaip jau minėjome, Sibuya skirstinys yra diskretus skirstinys su generuojančiąja funkcija

$$g_N(z) = 1-(1-z)^{\alpha},\ 0<\alpha<1.$$

Rasime skirstinį

$$P\left(N=k\right) = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}.$$

Išvestinės:

$g'(z) = -(1-z)^{\alpha}\cdot\alpha\cdot(-1+z)^{-1}$,

$g''(z) = -(1-z)^{\alpha}\cdot\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(-1+z)^{-2}$,

$g'''(z) = -(1-z)^{\alpha}\cdot\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot(-1+z)^{-3}$,

....

$g^{(k)}(z) = -(1-z)^{\alpha}\cdot\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(k-1))(-1+z)^{-k}$.

Tada

$P\left(N=1\right) = \frac{g'(0)}{1!} = \alpha$,

$P\left(N=2\right) = \frac{g''(0)}{2!} = \frac{-\alpha(\alpha-1)}{2!}$,

$P\left(N=3\right) = \frac{g'''(0)}{3!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$,

....

$$P(N=k)=\frac{g^{(k)}(0)}{k!}=(-1)^{k-1}\cdot\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}.$$

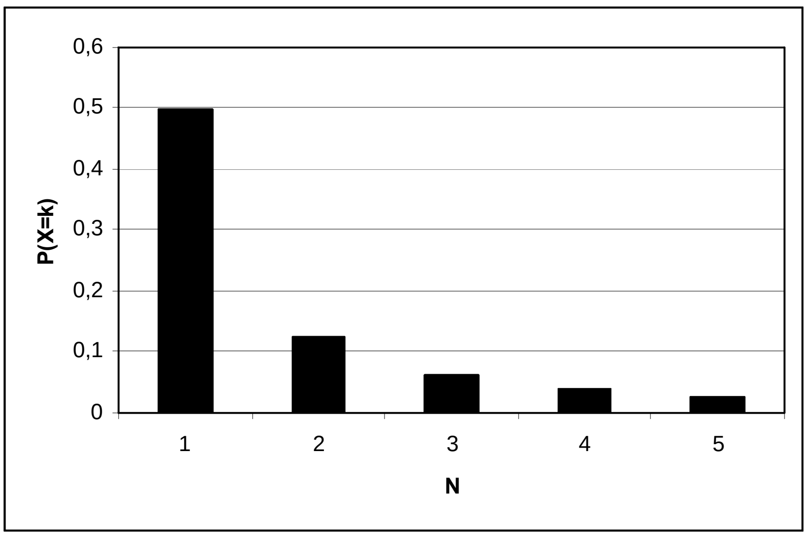
Sudarome tikimybinio skirstinio lentelę, kai $\alpha = 0{,}5$.

1 lentelė

Tikimybinio skirstinio lentelė

N	1	2	3	4	5	10	20	50	100
P	0,5	0,125	0,063	0,039	0,027	0,009	0,003	0,0008	0,0003

Sibuya skirstinio grafinis vaizdas pateiktas 4 paveiksle.



4 pav. Sibuya skirstinio grafinis vaizdas

Įdomu pastebėti, jog vidurkis EN neegzistuoja

$$EN = g'(1) = \alpha(1-z)^{\alpha-1}\,|_{z=1}.$$

Tyrimo metu ieškota skirstinių, kurie būtų Sibuya N maks stabilūs. Radus tokius, tikrinamas jų N min stabilumas. Rezultatus suformuluojame dvejomis teoremomis.

2.7 teorema. Eksponentinis skirstinys $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$ yra Sibuya N maks stabilus, bet nėra Sibuya N min stabilus.

►

$$F(x)=1-e^{-\lambda x},\ x \ge 0$$

Tikrinsime, ar egzistuoja tokios normavimo ir centravimo konstantos a ir $b > 0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_N - a}{b} \le x\right) = F(x) \Leftrightarrow g_N(F(xb+a)) = F(x),$$

kai generuojančioji funkcija yra Sibuya

$$g_N(z) = 1-(1-z)^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1.$$

Gauname

$$g_N(F(xb+a)) = 1-\left(1-\left(1-e^{-\lambda(xb+a)}\right)\right)^{\alpha} = 1-e^{-\lambda(xb+a)\cdot\alpha}.$$

Parenkame konstantas:

$$a = 0,\ b = \frac{1}{\alpha}.$$

Tada

$$g_N(F(xb+a)) = 1-e^{-\lambda\left(x\cdot\frac{1}{\alpha}+0\right)\cdot\alpha} = 1-e^{-\lambda x},\ x \ge 0.$$

Taigi,

$$g_N(F(xb+a)) = F(x),$$

todėl skirstinio funkcija $F(x) = 1-e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$ yra Sibuya *N* maks stabili.

Tikriname *N* min stabilumą

$$g_N(1-F(xb+a)) = 1-\left(1-\left(1-\left(1-e^{-\lambda(xb+a)}\right)\right)\right)^{\alpha} = 1-\left(e^{-\lambda(xb+a)}-1\right)^{\alpha}.$$

Statome konstantas $a = 0$, $b = \dfrac{1}{\alpha}$ ir gauname

$$g_N(1-F(xb+a)) = 1-\left(e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)}-1\right)^{\alpha} \ne 1-F(x).$$

Taigi,

$$g_N(1-F(xb+a)) \ne 1-F(x),$$

todėl skirstinio funkcija $F(x) = 1-e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$ nėra Sibuya *N* min stabili.

2.8 teorema. Veibulo skirstinys $F(x) = 1-e^{-\lambda x^{\gamma}}$, $x > 0$ yra Sibuya *N* maks stabilus, bet nėra Sibuya *N* min stabilus.

► $$F(x) = 1-e^{-\lambda x^{\gamma}},\ x > 0.$$

Tikrinsime, ar egzistuoja tokios normavimo ir centravimo konstantos a_n ir $b_n > 0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_N - a}{b} \le x\right) = F(x) \Leftrightarrow g_N(F(xb+a)) = F(x),$$

kai generuojančioji funkcija yra Sibuya

$$g_N(z) = 1-(1-z)^{\alpha}\,,\ 0<\alpha<1\,.$$

Gauname

$$g_N(F(xb+a)) = 1-\left(1-\left(1-e^{-\lambda(xb+a)^{\gamma}}\right)\right)^{\alpha} = 1-e^{-\lambda(xb+a)^{\gamma}\cdot\alpha}\,.$$

Parenkame konstantas:

$$a=0\,,\ b=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}}\,.$$

Tada

$$g_N(F(xb+a)) = 1-e^{-\lambda\left(x\cdot\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}}+0\right)^{\gamma}\cdot\alpha} = 1-e^{-\lambda x^{\gamma}}\,,\ x>0\,.$$

Taigi,

$$g_N(F(xb+a)) = F(x),$$

todėl skirstinio funkcija $F(x) = 1-e^{-\lambda x^{\gamma}}$, $x>0$ yra Sibuya *N* maks stabili.

Tikriname *N* min stabilumą

$$g_N(1-F(xb+a)) = 1-\left(1-\left(1-\left(1-e^{-\lambda(xb+a)^{\gamma}}\right)\right)\right)^{\alpha} = 1-\left(e^{-\lambda(xb+a)^{\gamma}}-1\right)^{\alpha}.$$

Statome konstantas $a=0$, $b=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}}$.

Gauname

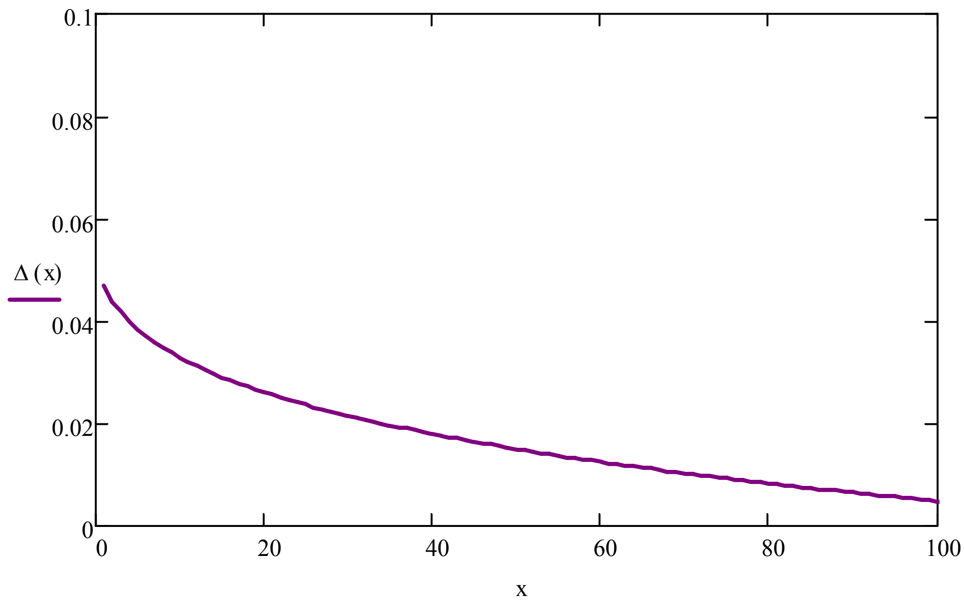
$$g_N(1-F(xb+a)) = 1-\left(e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}}-1\right)^{\alpha} \ne 1-F(x)\,.$$

Taigi,

$$g_N(1-F(xb+a)) \ne 1-F(x),$$

todėl skirstinio funkcija $F(x) = 1-e^{-\lambda x^{\gamma}}$, $x>0$ nėra Sibuya *N* min stabili.

5 paveiksle pavaizduojame paklaidas $\left|g_N(1-F(xb+a)) - (1-F(x))\right|$



5 pav. Paklaidų grafikas

2.4 HARRIS N STABILUMO TYRIMAS

Harris skirstinio tikimybes generuojančioji funkcija yra

$$g_N(z) = \frac{z}{(m-(m-1)z^k)^{\frac{1}{k}}},\ k>0,\ m>1.$$

Tyrimo metu ieškota skirstinių, kurie būtų Harris N maks stabilūs. Radus tokius, tikrinamas jų N min stabilumas. Gautą rezultatą pateikiame teorema.

2.9 teorema. Skirstinio funkcija $F(x) = \left(1+x^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}$, $x>0$, $k>0$ yra Harris N maks stabili, bet nėra Harris N min stabili.

► $F(x) = \left(1+x^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}$.

Tikrinsime, ar egzistuoja tokios normavimo ir centravimo konstantos a ir $b>0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_N - a}{b} \le x\right) = F(x) \Leftrightarrow g_N(F(xb+a)) = F(x),$$

kai generuojančioji funkcija yra Harris

$$g_N(z) = \frac{z}{(m-(m-1)z^k)^{\frac{1}{k}}},\ k>0,\ m>1.$$

Gauname

$$g_N(F(xb+a)) = \frac{F(xb+a)}{\left(m-(m-1)\left(F^k(xb+a)\right)\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{\left(1+(xb+a)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}}{\left(m-(m-1)\left(\left(1+(xb+a)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}\right)^k\right)^{\frac{1}{k}}} =$$

$$= \frac{\left(1+(xb+a)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}}{\left(m-(m-1)\left(\left(1+(xb+a)^{-\alpha}\right)^{-1}\right)\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{\left(1+(xb+a)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}}{\left(m-\dfrac{(m-1)}{1+(xb+a)^{-\alpha}}\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{\left(1+(xb+a)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}}{\left(\dfrac{m+m(xb+a)^{-\alpha}-m+1}{1+(xb+a)^{-\alpha}}\right)^{\frac{1}{k}}} =$$

$$= \frac{\left(1+(xb+a)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}}{\left(\dfrac{1+m(xb+a)^{-\alpha}}{1+(xb+a)^{-\alpha}}\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\left(1+m(xb+a)^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}}.$$

Parenkame konstantas $a=0$, $b=m^{\frac{1}{\alpha}}$.

Gauname

$$g_N(F(xb+a)) = \frac{1}{\left(1+m\left(xm^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\left(1+mx^{-\alpha}m^{-1}\right)^{\frac{1}{k}}} = \left(1+x^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}} = F(x).$$

Taigi,

$$g_N(F(xb+a)) = F(x),$$

todėl skirstinio funkcija $F(x)=\left(1+x^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}$, $x>0$, $k>0$ yra Harris *N* maks stabili.

Tikriname *N* min stabilumą

$$g_N(1-F(xb+a)) = \frac{1-F(xb+a)}{\left(m-(m-1)\left(1-F(xb+a)\right)^k\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{1-\left(1+(xb+a)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}}{\left(m-(m-1)\left(1-\left(1+(xb+a)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}\right)^k\right)^{\frac{1}{k}}}$$

Statome konstantas $a=0$, $b=m^{\frac{1}{\alpha}}$.

Gauname

$$g_N(1-F(xb+a)) = \frac{1-\left(1+(xb+a)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}}{\left(m-(m-1)\left(1-\left(1+\left(xm^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}\right)^{k}\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{1-\left(1+(xb+a)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}}{\left(m-(m-1)\left(1-\left(1+\frac{x^{-\alpha}}{m}\right)^{-\frac{1}{k}}\right)^{k}\right)^{\frac{1}{k}}} \neq$$

$$\neq 1-F(x)$$

Taigi,

$$g_N(1-F(xb+a)) \neq 1-F(x),$$

todėl skirstinio funkcija $F(x)=\left(1+x^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}$, $x>0$, $k>0$ nėra Harris *N* min stabili.

DISKUSIJA

Šis darbas buvo skirtas stochastinių ekstremumų stabilumo uždavinių sprendimui. Kai ekstremumų struktūrose komponenčių skaičius N yra pasiskirstęs pagal geometrinį dėsnį, stabilumo problema pakankamai išspręsta, tačiau kitų N skirstinių atžvilgiu buvo neišspręstų uždavinių.

Darbe, paėmus konkrečią skirstinio funkciją $F(x) = \dfrac{1}{1+\exp(-x)}$, $x \in R$ buvo įrodytas bendru atveju jau žinomas faktas, kad geometrinis N maks ir N min stabilumai yra vienas kitą sąlygojantys. Taip pat buvo parinkta skirstinio funkcija $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, $x \geq 1, \alpha > 0$, kuri nėra geometriškai N maks stabili ir rasta jos konvergavimo greičio įverčio išraiška

$$\left|P\left(Z_N < xb + a\right) - \psi(x)\right| \leq \frac{x^{-\alpha}}{(1+x^{-\alpha})^2} \cdot \left(x^{-\alpha} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \frac{\sqrt{e}\left(2 + x^{-\alpha}\right)}{n} \right)$$

bei atlikta šio teorinio rezultato kompiuterinė analizė.

Sibuya N skirstinio atveju buvo rastos dvi skirstinio funkcijos (eksponentinis skirstinys $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ ir Veibulo skirstinys $F(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\gamma}}$, $x > 0$), kurių pagalba įrodytas naujas faktas, kad Sibuya N maks N min stabilumai nėra vienas kitą sąlygojantys, t.y. iš Sibuya N maks stabilumo neišplaukia N min stabilumas.

Harris N skirstinio atveju, taip pat buvo įrodytas naujas faktas, kad Harris N maks N min stabilumai nėra vienas kitą sąlygojantys, t.y. iš Harris N maks stabilumo neišplaukia N min stabilumas. Šiam faktui įrodyti parinkome skirstinio funkciją $F(x) = \left(1 + x^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{k}}$, $x > 0$, $k > 0$.

IŠVADOS

Atlikę vienmačių skirstinių N stabilumo tyrimą galime pateikti tokias išvadas:

1. Geometrinio N skirstinio atveju N maks ir N min stabilumai yra vienas kitą sąlygojantys, t.y. iš N maks stabilumo išplaukia N min stabilumas;
2. Sibuya N skirstinio atveju N maks ir N min stabilumai nėra vienas kitą sąlygojantys, t.y. iš N maks stabilumo neišplaukia N min stabilumas;
3. Harris N skirstinio atveju N maks ir N min stabilumai nėra vienas kitą sąlygojantys, t.y. iš N maks stabilumo neišplaukia N min stabilumas.

REKOMENDACIJOS

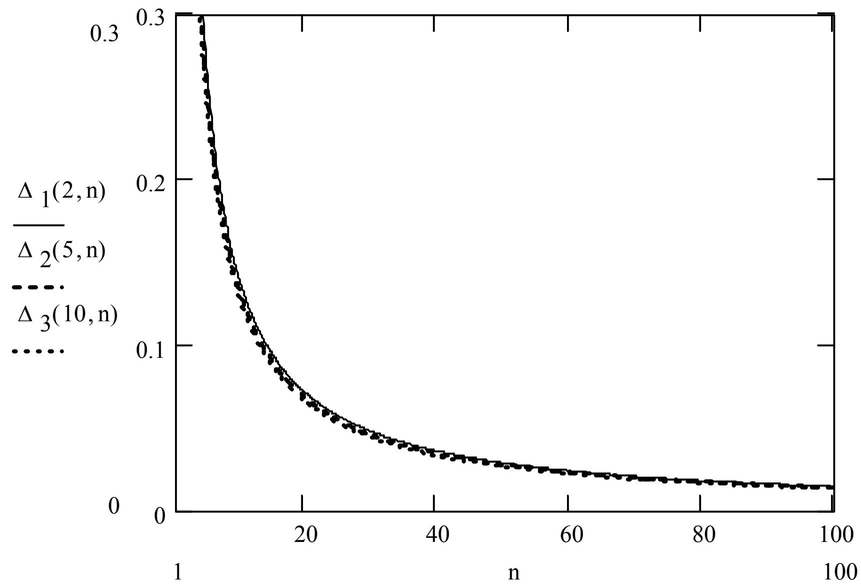
Šiame darbe buvo plačiai apibūdintas geometrinis *N* stabilumas, bei ištirtas stabilumas, kai *N* skirstinys nėra geometrinis, imant kitus du skirstinius – Sibuya ir Harris *N* skirstinius. Gauta, kad tiek Sibuya, tiek Harris *N* skirstinių atveju, konkrečios skirstinio funkcijos *F(x)* yra *N* maks stabilios, bet nėra *N* min stabilios. Kadangi nėra *N* min stabilumo, galima pabandyti surasti minimumų ribinį skirstinį *L(x)* bei atlikti konvergavimo greičio analizę.

Taip pat galima pabandyti surasti ir kitokių skirstinio funkcijų *F(x)* kurios būtų Sibuya arba Harris *N* maks ar *N* min stabilios.

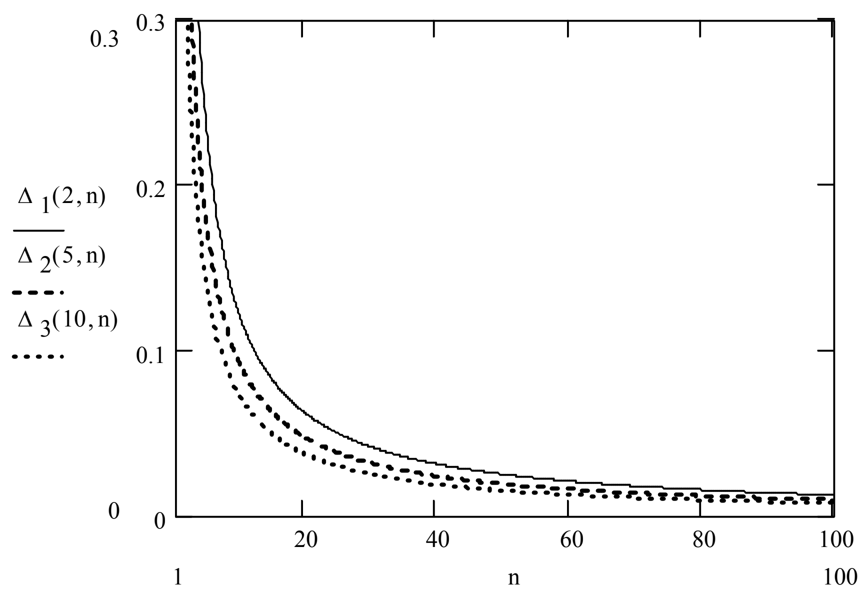
LITERATŪRA

1. Aksomaitis A. Stochastiniai ekstremumai ir sumos: paskaitų konspektas; Kaunas 2008.
2. Aksomaitis A. Tikimybių teorija ir statistika: vadovėlis; Kaunas : Technologija, 2002.
3. Aksomaitis A. Rate of Convergence in the Transferece Max – Limit Theorem. Prob. Theory and Math. Stat. Procedings. Vilnius, VSP, 1999, p. 1 – 4.
4. Galambos J. The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics. Wiley.-New York, 1978.
5. Satheesh S. and Unnikrishnan Nair N. On the stability of geometric extremes. Jounal of the Indian Statistical Association Vol.42, 2004, p. 99 – 109.
6. Satheesh S. and Unnikrishnan Nair N. A note on maximum and minimum stability of certain distributions. Calcutta Statistical Association Bulletin, 2002, p. 249 – 252.
7. Drėzas M., Aksomaitis A. Veibulo atsitiktinių dydžių maksimumų asimptotika. Taikomoji matematika: VIII studentų konferencijos pranešimų medžiaga. Kaunas, Technologija, 2010, p. 66-68.
8. Drėzas M., Aksomaitis A. Sibuya N stabilumas. Taikomoji matematika: IX studentų konferencijos pranešimų medžiaga. Kaunas, Technologija, 2011, p. 6-8.

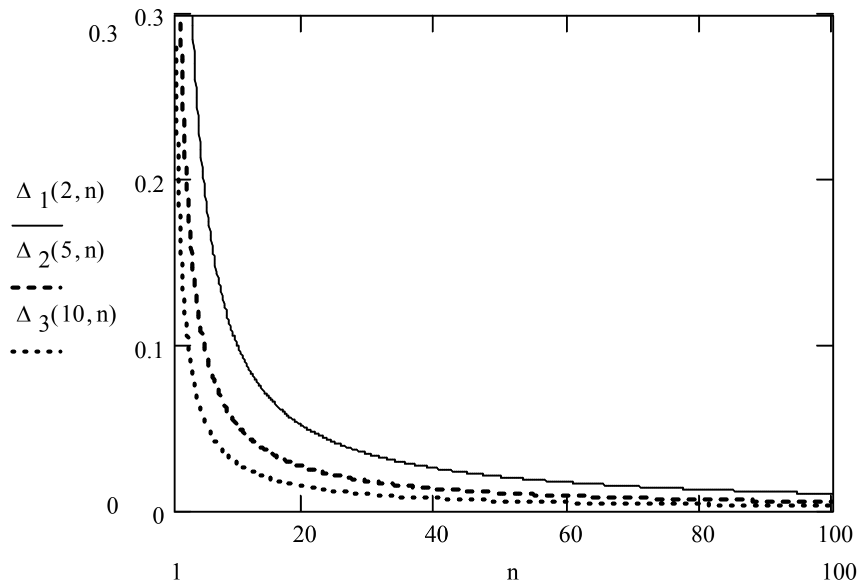
1. PRIEDAS. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIŲ GRAFINIS VAIZDAVIMAS GEOMETRINIO N SKIRSTINIO ATVEJU



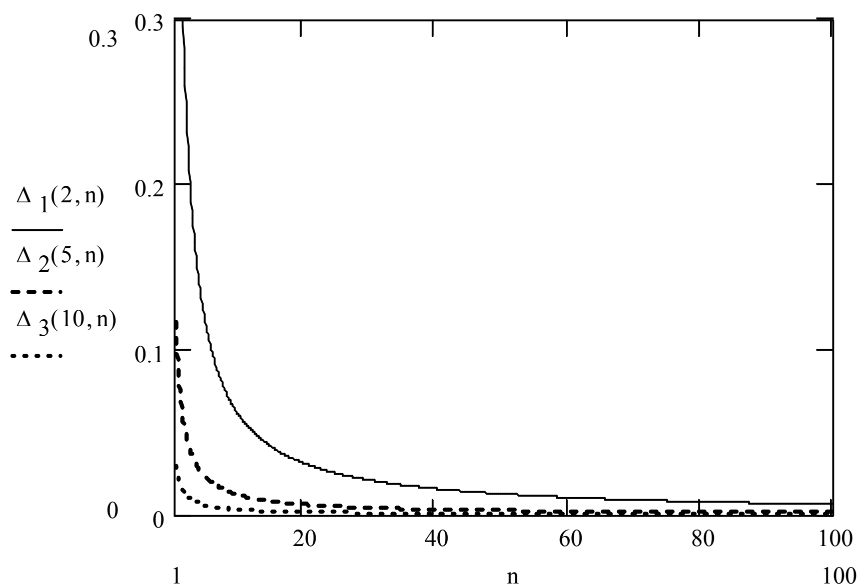
1.1 pav. Konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai α = 0.1, x = 2, 5, 10



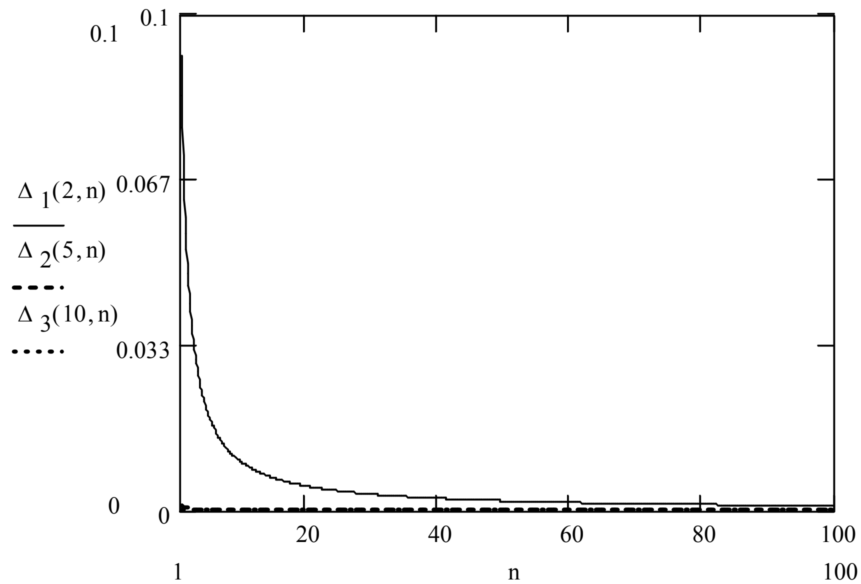
1.2 pav. Konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai α = 0.5, x = 2, 5, 10



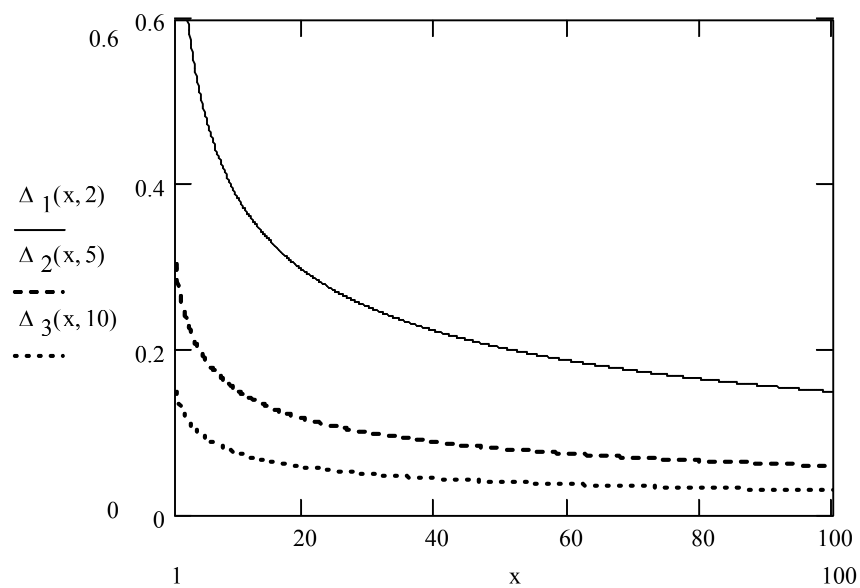
1.3 pav. Konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai α = 1, x = 2, 5, 10



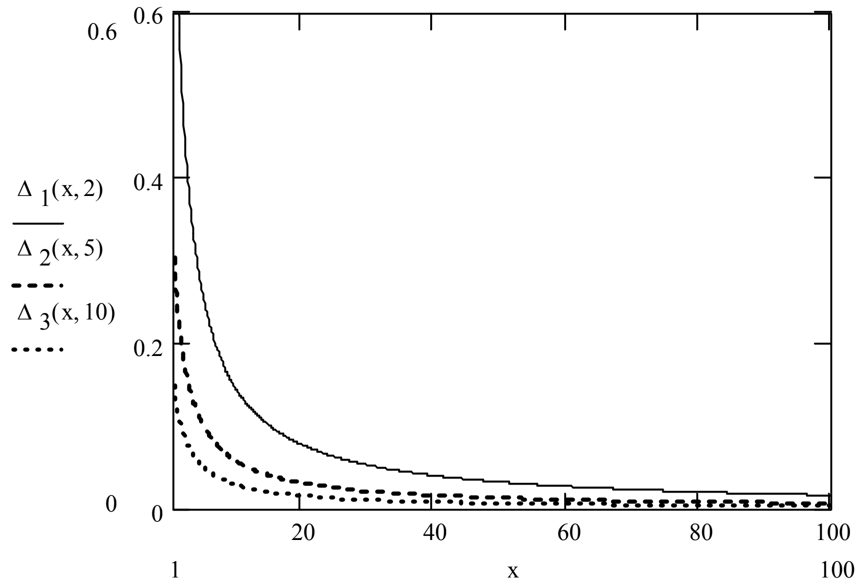
1.4 pav. Konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai α = 2, x = 2, 5, 10



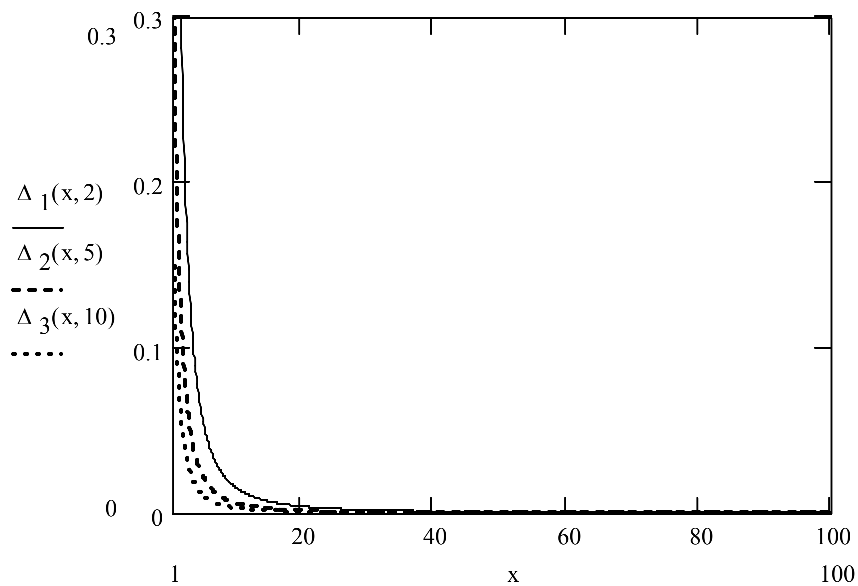
1.5 pav. Konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai α = 5, x = 2, 5, 10



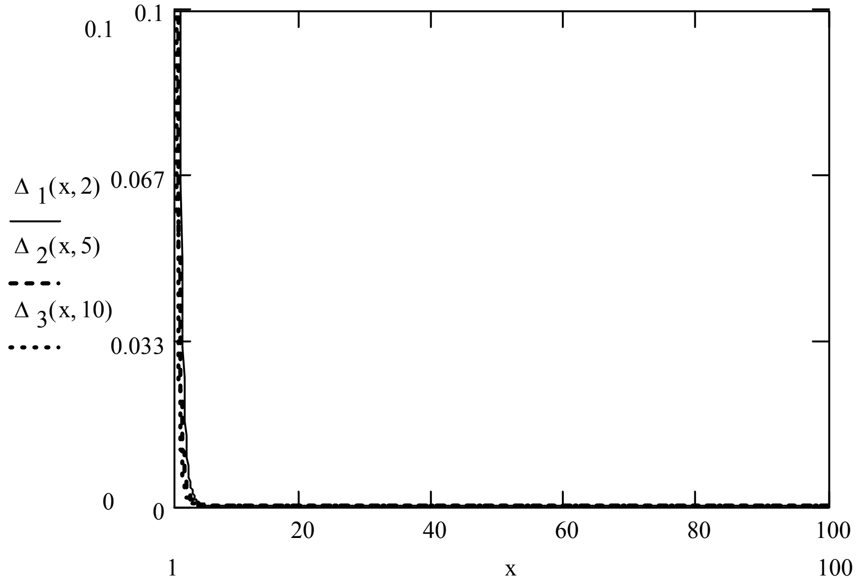
1.6 pav. Konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai α = 0.5, n = 2, 5, 10



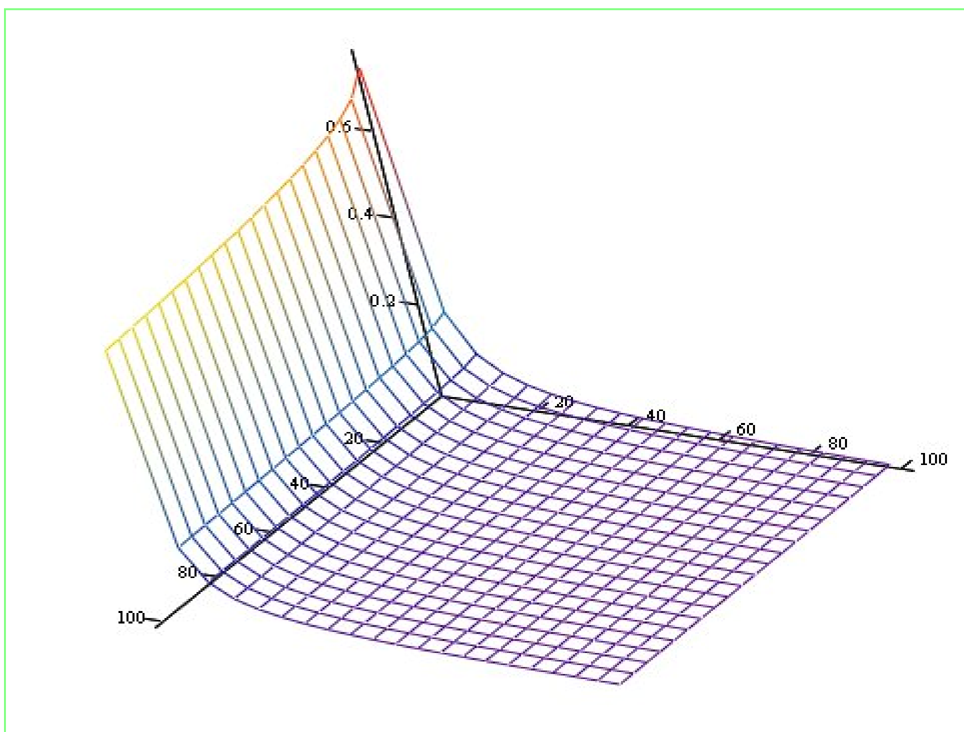
1.7 pav. Konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai α = 1, n = 2, 5, 10



1.8 pav. Konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai α = 2, n = 2, 5, 10

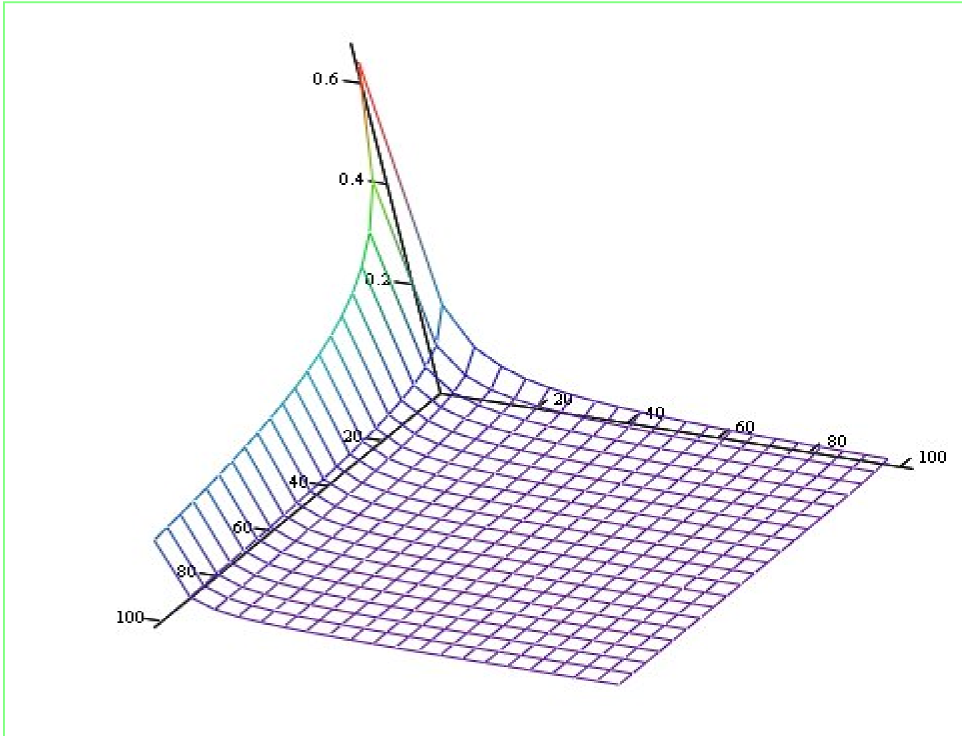


1.9 pav. Konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai α = 5, n = 2, 5, 10



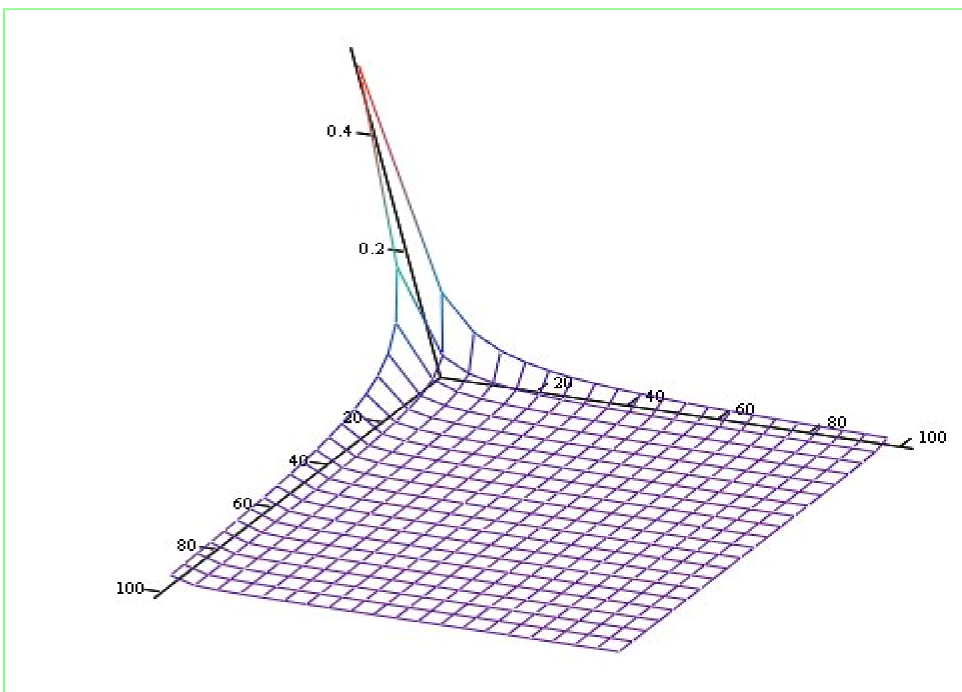
F

1.10 pav. Konvergavimo greičio įverčio paviršius kai α = 0.1



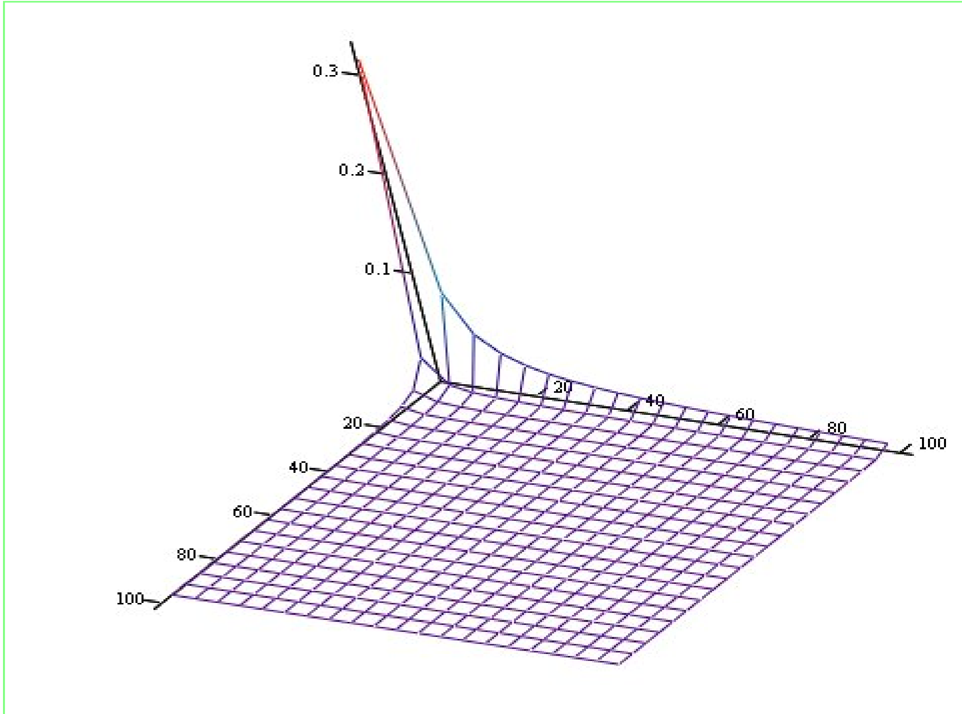
F

1.11 pav. Konvergavimo greičio įverčio paviršius kai α = 0.5



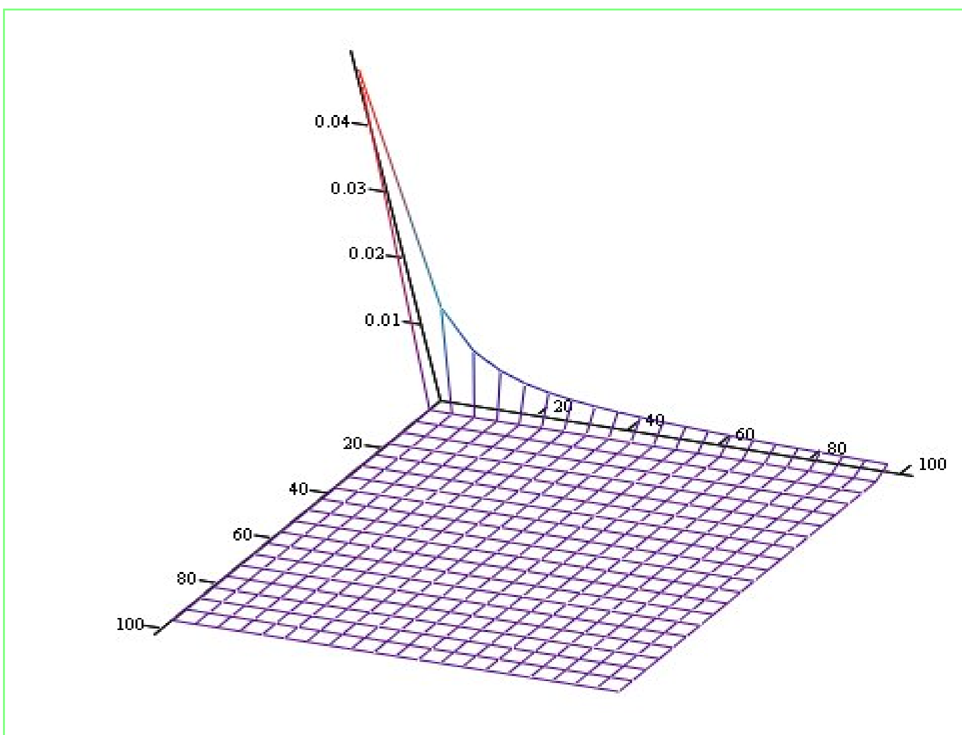
F

1.12 pav. Konvergavimo greičio įverčio paviršius kai α = 1



F

1.13 pav. Konvergavimo greičio įverčio paviršius kai α = 2



F

1.14 pav. Konvergavimo greičio įverčio paviršius kai α = 5

2. PRIEDAS. STRAIPSNIS „VEIBULO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ ASIMPTOTIKA“

VEIBULO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ ASIMPTOTIKA

M. Drėzas, prof. A. Aksomaitis

Kauno technologijos universitetas

Rasime ribinį skirstinį $H(x)$ ir normavimo konstantų $a_n, b_n > 0$ išraiškas maksimumų atveju, kai pasiskirstymo funkcija yra Veibulo $F(x) = 1 - e^{-x^{\alpha}}$, $x \geq 0$, $\alpha > 0$. Taikydami ribines teoremas maksimumams gauname, kad:

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) \Rightarrow H_3(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in R.$$

Randame normavimo konstantas:

$$a_n = (\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad b_n = \frac{1}{\alpha (\ln n)^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}}}.$$

Taigi, galutinai

$$P\left(\frac{Z_n - (\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}}{\frac{1}{\alpha (\ln n)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}} < x\right) \Rightarrow e^{-e^{-x}}.$$

Tirdami konvergavimo greitį, nagrinėjame skirtumą tarp normuoto Veibulo maksimumo skirstinio ir jo ribinio skirstinio. Randame paklaidas

$$\left|\left(1 - e^{-(xb_n + a_n)^{\alpha}}\right)^n - e^{-e^{-x}}\right|$$

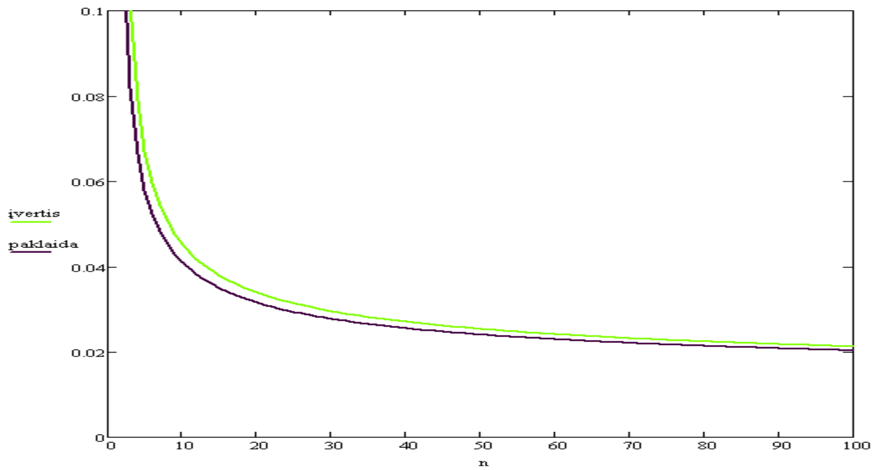
Šis skirtumas apibūdina konvergavimo greitį. Kuo paklaida greičiau nyksta, tuo konvergavimo greitis yra didesnis.

Konvergavimo greičio įvertį maksimumams, kai dydžiai yra Veibulo tipo randame taip:

$$\left|P(Z_n < b_n x + a_n) - H(x)\right| \leq H(x)\left(r_{1,n}(x) + r_{2,n}(x) + r_{1,n}(x) \cdot r_{2,n}(x)\right) = \Delta.$$

(Funkcijos $r_{1,n}(x)$ ir $r_{2,n}(x)$ yra pateiktos [1]).

1 paveiksle vienoje koordinačių sistemoje pateikiameme paklaidų bei konvergavimo greičio įverčių grafikus Veibulo skirstinio atveju, kai *x=1* (fiksuotas), o *n* kinta intervale [2;100] (Parametrai: *α = 0.5; s = 0.7; q = 0.7*).



1 pav. Paklaidų ir konvergavimo greičio įverčių grafikas

Matome, kad, kai $n \to \infty$, tai paklaidos bei konvergavimo greičio įverčiai artėja į nulį. Konvergavimo greičio įverčių reikšmės yra didesnės nei paklaidų reikšmės, tačiau, kai $n \to \infty$ šis skirtumas artėja į nulį. Taigi, galime teigti, kad pakankamai dideliems *n* konvergavimo greičio įverčiai maksimumams yra pakankamai tikslūs. Beto, konvergavimo greičio įverčio eilė *n* atžvilgiu yra lygi $\frac{1}{n}$.

Literatūra

1. Galambos J. The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics. Wiley.-New York, 1978.

2. Drėzas M. Stochastinių ekstremumų asimptotika. Matematikos bakaluro baigiamasis darbas. Kaunas, 2009.

3. PRIEDAS. STRAIPSNIS „SIBUYA N STABILUMAS“

SIBUYA N STABILUMAS

M. Drėzas, prof. A. Aksomaitis

Kauno technologijos universitetas

Tarkime, turime atsitiktinių dydžių rinkinį $X_1, X_2, \ldots X_N$, su skirstinio funkcija $F(x) = P\left(X_j < x\right)$, $j = \overline{1, N}$. Čia N – atsitiktinis dydis, įgyjantis natūraliąsias reikšmes: $N \in \{1,2,\ldots\}$.

Skirstinį vadiname N maksimaliai stabiliuoju, jeigu

$$g_N(F(xb + a)) = F(x).$$

Čia $g_N(x)$ - tikimybes generuojančioji funkcija, a ir $b > 0$ - normavimo

ir centravimo konstantos.

Tarkime, kad N yra pasiskirstęs pagal Sibuya skirstinį. Sibuya skirstinys yra diskretus skirstinys su generuojančiąją funkcija

$$g_N(z) = 1 - (1 - z)^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1$$

Įdomu pastebėti, kad šio skirstinio vidurkis EN neegzistuoja

$$EN = g'(1) = \alpha(1 - z)^{\alpha - 1} |_{z=1}$$

Skirstinio tikimybių išraiška:

$$P\left(N = k\right) = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\ldots(\alpha - (k - 1))}{k!}, k \geq 1$$

Skirstinio funkciją *F(x)* vadiname Sibuya N maksimaliai stabiliąja, jeigu:

$$1 - (1 - F(xb + a))^{\alpha} = F(x)$$

1 teorema. Eksponentinis skirstinys $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ yra Sibuya N maks stabilus

Įrodymas. Parenkame konstantas: $a = 0$, $b = \dfrac{1}{\alpha}$

$$g_N(F(xb + a)) = 1 - e^{-\lambda\left(x \cdot \frac{1}{\alpha} + 0\right) \cdot \alpha} = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0$$

Taigi, skirstinio funkcija $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ yra Sibuya N maks stabili.

2 teorema. Veibulo skirstinys $F(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\gamma}}$, $x > 0$ yra Sibuya *N* maks stabilus, bet nėra Sibuya *N* min stabilus.

Įrodymas. Parenkame konstantas: $a = 0$, $b = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}}$

$$g_N(F(xb+a)) = 1 - e^{-\lambda\left(x\cdot\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}}+0\right)^{\gamma}\cdot\alpha} = 1 - e^{-\lambda x^{\gamma}},\ x > 0$$

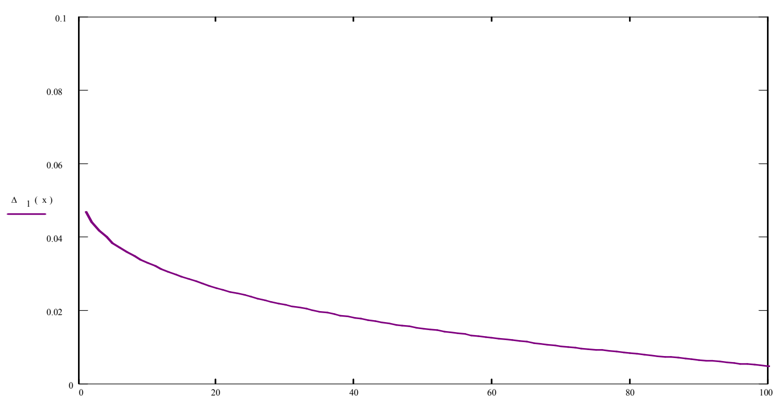
Taigi, skirstinio funkcija $F(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\gamma}}$, $x > 0$ yra Sibuya *N* maks stabili. Toliau tikriname *N* min stabilumą:

$$g_N(1-F(xd+c)) = 1 - \left(e^{-\lambda\left(x\cdot\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\gamma}}}+0\right)^{\gamma}} - 1\right)^{\alpha} = 1 - \left(e^{\frac{-\lambda x^{\gamma}}{\alpha}} - 1\right)^{\alpha} \neq 1 - \left(1 - e^{-\lambda x^{\gamma}}\right),\ x > 0$$

Skirstinio funkcija $F(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\gamma}}$, $x > 0$ nėra Sibuya *N* min stabili. Randame paklaidas

$$\Delta(x) = | g_N(1 - F(xb+a)) - (1 - F(x)) |$$

ir pavaizduojame 1 paveiksle



1 pav. Paklaidų grafikas

Literatūra

1. Aksomaitis A. Stochastiniai ekstremumai ir sumos [paskaitų konspektas]. Kaunas, 2009.
2. Aksomaitis A. Tikimybių teorija ir statistika. Kaunas, 2002.
3. S. Satheesn and N. Unnikrishnan Nair A note on maximum stability of certain distributinios. Cochin Universitety of Sciense and Technology, 2002.