KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Lina Dindienė

ATSITIKTINIO SKAIČIAUS VEKTORIŲ MAKSIMUMŲ ASIMPTOTINĖ ANALIZĖ

Magistro darbas

Vadovas

prof. dr. A. Aksomaitis

KAUNAS, 2011

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
doc. dr. N.Listopadskis
2011 06 02

ATSITIKTINIO SKAIČIAUS VEKTORIŲ MAKSIMUMŲ ASIMPTOTINĖ ANALIZĖ

Matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas

prof. dr. A. Aksomaitis

2011 06 01

Recenzentas

prof.habil.dr A. Bikelis

2011 06 02

Atliko

FMMM 9 gr. stud.

L. Dindienė

2011 06 01

KAUNAS, 2011

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, habil. dr., vyriausiasis analitikas (DnB NORD Bankas)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., vice-prezidentas projektams (UAB „Baltic Amadeus“)

SANTRAUKA

Šiame darbe analizuojama dvimačių vektorių maksimumų asimptotikos problema. Yra labai svarbu ir aktualu įvertinti maksimumų aproksimavimo ribiniu skirstiniu konvergavimo greitį, tam kad supaprastintume paklaidų skaičiavimą. Perkėlimo teorema pritaikyta vektorių maksimumų schemai. Parodėme, kad konvergavimo greičio įvertį tiesiškai normuotiems vienmačiams maksimumams galima pritaikyti ir vektorių maksimumams. Be to, tai įrodėme ir netiesiškai normuotiems vektorių maksimumams. Gautas rezultatas apibendrina A. Aksomaičio rezultatą, pateiktą vienmačiu atveju..

Ieškant ribinės vektorių maksimumų funkcijos, maksimumus normavome tiesiškai (Pareto ir logistinio skirstinių atveju) ir netiesiškai (log-Pareto skirstinio atveju). Gavome, kad ribiniai skirstiniai dvimačiu atveju nepriklauso klasikinei schemai ir yra žymiai įvairesni. Pareto ir logistio skirstinio atveju ribinis skirstinys nepriklauso nuo komponenčių priklausomumo. Pareto, log-Pareto ir logistinio skirstinių atvejais konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu yra 1/n, nepriklausomai nuo vektorių komponenčių tarpusavio (ne)priklausomumo. Tačiau ribinė skirstinio funkcija log- Pareto skirstinio atveju, gavosi skirtinga, kai komponentės priklausomos ir kai nepriklausomos. Šiuo atveju komponenčių priklausomumas turi įtakos ribinei maksimumų skirstinio funkcijai.

Dindiene L. Asymptotic analysis of maxima of random index vectors. Master‘s work in applied mathematics / supervisor prof. dr. A. Aksomaitis; Department of applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2011. – 59 p.

SUMMARY

Asymptotic analysis of maxima of two-dimensional vectors is presented in this paper. It is very important to estimate convergence rate of approximation maxima distribution with limiting distribution function. Transfer theorem for vectors is used. Limiting distribution are also obtained. We showed, that estimation of convergence rate of linearly normalized maxima can be adjusted for maxima of vectors. Besides, it is proved for nonlinearly normalized maxima. Result extends univariate results of A. Aksomaitis.

We normalized maxima linearly (Pareto and logistic distributions) and nonlinearly (log-Pareto distribution) to find limiting distribution functions. These functions are more various then three classic in scheme of univariate maxima. Estimations of convergence rate are obtained for each of functions. Queue of convergence rate is 1/n aspect n for Pareto, logistic and log-Pareto distributions and it do not depend on internecine dependence of components. Though, limiting distribution function for log-Pareto distribution is different when components are dependent, while it is the same for logistic and Pareto distributions. Estimation of convergence rate for log-Pareto distribution is more complicated.

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Analizuojant konvergavimo greičio įvertį vienmačių maksimumų struktūrai (Aksomaitis A., 2008), iškyla klausimas: o kokia gi paklaidų įverčio išraiška bus vektorių maksimumų struktūrai? Šis darbas – atsakymas į pateiktą klausimą.

Ekstremalių reikšmių analizė su laiku darosi vis aktualesnė. Stochastinių ekstremumų teorija taikoma įvairiose srityse, tiriant gamtos ir kitus reiškinius: krituliai, potvyniai, vėjo gūsiai, oro užterštumas, korozija, individų populiacijos ilgaamžiškumas, sistemų patikimumas, atsparumas trūkiams, finansų teorija (Tiago de Oliveira J., 1984) ir kt. Tačiau ekstremalių reikšmių teorija neapsiriboja šiomis sritimis. Plačiau jų taikymą analizuoja Kotz S. ir Nadarajah S.(2000), taip pat Galambos J. (1978), Resnick S.I. (1987). Ši teorija iš pradžių patraukė inžinierius, hidrologus, tikimybių žinovus ir tik vėliau visu tuo susidomėjo statistikos ekspertai. Daugelį metų ekstremalių reikšmių teorija buvo neatsiejama nuo mokslininko E.J. Gumbel.

Istoriškai ekstremalių reikšmių nagrinėjimas pradėtas apie 1709 metus, kada Nicolas Bernouilli pradėjo diskutuoti apie didžiausią atstumą tarp duotų pradinių n taškų, atsitiktinai išsidėsčiusių ant fiksuoto ilgio t tiesės (Kotz S. ir Nadarajah S., 2000). Nuo to laiko daug straipsnių buvo parašyta temomis, liečiančiomis stochastinius ekstremumus. Mokslininkas Bortkiewicz 1922 metais savo straipsnyje pirmą kartą paminėjo stochastinių maksimumų pasiskirstymo dėsnio sąvoką.

Daugiamačių ekstremalių reikšmių teorijos pradžia galima laikyti XX amžiaus šeštąjį dešimtmetį. Šiuo laikotarpiu pasirodė nemažai publikacijų daugiamačių ekstremumų tematika (Sibuya 1960). Nuo 8 – ojo dešimtmečio darbų šia tematika pagausėjo (Galambos, 1978; Tiago de Oliveira J.,1984; Resnick S.I.1987).

Šiame darbe nagrinėjami dvimačių vektorių, kurių skaičius yra atsitiktinis, maksimumai. Šio skaičiaus skirstinį pasirinkome visoms nagrinėjamoms funkcijoms vienodą – geometrinį. Teorinėje dalyje pateikiamas konvergavimo greičio įverčio išraiškos įrodymas dviem atvejais: tiesiškai ir netiesiškai normuotiems maksimumams. Praktinėje dalyje analizuojami Pareto, logistinis skirstiniai, kurių maksimumams taikome tiesinį normavimą. Log-Pareto (Falk M. ir kt., 2010) skirstiniui taikome netiesinį normavimą. Šio skirstinio problematika analizuojama įvairių autorių (Galambos J., 1978; Falk M. ir kt., 2010), kadangi ši funkcija turi sunkią „uodegą“, neegzistuoja nei vidurkis, nei dispersija. Dvimačių vektorių maksimumų netiesinio normalizavimo tematika nemažai publikacijų yra pateikusi E. Pancheva (1985, 1986, 2000). Taip pat ši autorė parodė, kad ribinė skirstinio funkcija netiesinio normavimo atveju nebetelpa į klasikinę trijų skirstinių schemą (Peng Z. ir kt., 2010). Tai atsispindi ir šio darbo praktinėje dalyje.

Darbo tikslas: įvertinti atsitiktinio skaičiaus vektorių maksimumų konvergavimo greitį.

Uždaviniai:

1) išanalizuoti vektorių maksimumų asimtotiką esant tiesiniam ir netiesiniam normavimui;
2) ištirti tiesiškai ir netiesiškai normuotų vektorių maksimumų konvergavimo greičio įvertį esant atsitiktiniam komponenčių skaičiui;
3) atlikti maksimumų skirstinio aproksimavimo ribiniu skirstiniu paklaidų analizę

Stochastinių ekstremumų tematika yra paruoštos penkios publikacijos, skaityti pranešimai mokslinėse konferencijose.

1. TEORINĖ DALIS

1.1. ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ ASIMPTOTIKA

Tarkime $X_1,...,X_n$ atsitiktiniai nepriklausomi kintamieji, turintys skirstinio funkciją

$$F(x) = P(X_j \le x),\ \ j = \overline{1,n}.$$

Statistikos $Z_n = \max(X_1,...,X_n)$ skirstinio funkcija yra (Galambos J., 1978):

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n < z) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j < x\right) = F(x,x,x,...,x).$$

Jeigu dydžiai X_i, $i = \overline{1,n}$, yra nepriklausomi su skirstinio funkcijomis

$$F_i(x), i = \overline{1,n},$$

tai

$$F_{Z_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x).$$

Jei dydžiai nepriklausomi ir vienodų skirstinių, $(F_i(x) = F(x), i = \overline{1,n}),$ tai

$$F_{Z_n}(x) = F^n(x).$$

Tarkime egzistuoja tokia normalizavimo funkcija $f_n(x)$ su kuria normuotų maksimumų skirstinio funkcija silpnai konverguotų (t.y. konverguotų visuose ribinio skirstinio tolydumo taškuose) į neišsigimusį skirstinį H(x).

$$P(Z_n < f_n(x)) \Rightarrow H(x). \tag{1.1}$$

Čia

$$f_n(x) = xb_n + a_n,$$

kai normavimas yra tiesinis (egzistuoja konstantų sekos $\{a_n,\ \ n \ge 1\}\ \ ir\ \ \{b_n > 0, n \ge 1\}$) arba

$$f_n(x) = G_n(x),$$

kai neegzistuoja tokios konstantos – ieškoma netiesinio normavimo funkcija, kuri turi būti teigiama ir didėjanti (Dindienė L., 2009).

Normuotų vienmačių maksimumų ribiniai skirstiniai gali būti tik trijų tipų (Galambos J., 1978):

$$H_{1,\alpha} = \exp\left(-x^{-\alpha}\right), x > 0,\ \alpha > 0, \text{ (Frechet)},$$

$$H_{2,\alpha} = \exp\left(-(-x)^{\alpha}\right),\ x \le 0,\ \alpha > 0, \text{ (Weibull)},$$

$$H_3 = \exp\left(-e^{-x}\right),\ x \in R \text{ (Gumbel)}.$$

Apibendrintai

$$H(x) = e^{-u(x)}.$$

Sąlyga

$$u_n(x) = n(1 - F(f_n(x))) \to u(x),$$

kai $n \to \infty$ yra būtina ir pakankama, kad būtų teisingas (1.1).

Kita problema – kokią įtaką ribiniam skirstiniui daro atsitiktinis dydžių skaičius? Į šį klausimą atsako 1 teorema (vadinamoji perkėlimo teorema).

1 teorema (Gnedenko B.,1982) *Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai N_n ir X_j , $j \geq 1$ yra tarpusavyje nepriklausomi. Jei* $\exists \quad a_n, b_n > 0$, *su kuriomis*

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < n\right) \Rightarrow H(x),$$

ir

$$P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) \to A(x), n \to \infty,$$

tai

$$P\left(\frac{Z_{N_n} - A_n}{B_n} < n\right) \to \Psi(x),$$

čia ribinė skirstinio funkcija

$$\Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x) dA(z).$$

Paklaidas esant atsitiktiniam vektorių skaičiui galima įvertinti remiantis 2 teorema.

2 teorema *(*Aksomaitis A., 2008*) Tarkime H yra atsitiktinių kintamųjų* $\frac{Z_n - a_n}{b_n}$ *ribinis skirstinys ir* $\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{N_n}{n} \leq x\right) = A(x)$, *A(+0) = 0. Tuomet visiems x, tenkinantiems sąlygą* $\frac{u_n(x)}{n} \leq \frac{1}{2}$, *teisinga nelygybė:*

$$\Delta_n(x) \leq \left(\frac{u^2{}_n(x)}{n} + |\rho_n(x)|\right) \int_0^\infty z \delta^z{}_n(x) dA_n(nz) + u(x) \int_0^\infty |A_n(nz) - A(z)| H^z(x) dz,$$

čia:

$$\rho_n(x) = u_n(x) - u(x),$$

$$\delta_n(x) = \max\left(F^n(xb_n + a_n), H(x)\right),$$

1.2. VEKTORIŲ MAKSIMUMŲ STRUKTŪRA

Pažymėsime, kas yra dvimačio vektoriaus maksimumas. Tarkime, $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n)$, - atsitiktinių, nepriklausomų vektorių seka, turinti vienodą skirstinio funkciją $F(x, y) = P(X_j \leq x, Y_j \leq y),\ j \geq 1$. Apibrėžkime statistikas:

$$Z_n^{(1)} = \max(X_1, X_2, ..., X_n), \quad Z_n^{(2)} = \max(Y_1, Y_2, ..., Y_n)\,.$$

Tuomet, vektorių maksimali reikšmė yra

$$\max((X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n)) = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)})$$

Atsitiktinio skaičiaus vektorių maksimumas yra

$$\max((X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_{N_n}, Y_{N_n})) = (Z_{N_n}^{(1)}, Z_{N_n}^{(2)}),$$

čia

$$Z_{N_n}^{(1)} = \max(X_1, X_2, ..., X_{N_n}), \quad Z_{N_n}^{(1)} = \max(Y_1, Y_2, ..., Y_{N_n})\,.$$

$N_1, N_2, ..., N_n$ yra teigiamų sveikųjų atsitiktinių dydžių seka, nepriklausanti nuo $(X_j, Y_j),\ j \geq 1$ ir

$$P(N_n \leq x) = A_n(x)\,.$$

Vienas iš darbo tikslų – ištirti maksimalių reikšmių elgesį.

$$P(Z_n^{(1)} \leq x, Z_n^{(2)} \leq y) = \sum_k F^k(x, y) P(N = k) = g_N(F(x, y)).$$

Čia $g_N(z)$ - generuojančioji funkcija.

Maksimumų skirstinys

$$P(Z_n^{(1)} \leq x, Z_n^{(2)} \leq y) = F^n(x, y) \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 0, kai & 0 \leq F(x, y) < 1 \\ 1, kai & F(x, y) = 1 \end{cases}$$

yra išsigimusi funkcija. Todėl normuodami maksimumus, siekiame gauti ribinę neišsigimusią pasiskirstymo funkciją, kuria galima būtų juos aproksimuoti.

1.3. VEKTORIŲ MAKSIMUMŲ TIESINIS IR NETIESINIS NORMAVIMAS

Nagrinėsime tiesiškai normalizuotus dvimačių vektorių maksimumus:

$$\overline{Z}_n^{(1)} = b_n^{-1}(Z_n^{(1)} - a_n), \quad \overline{Z}_n^{(2)} = d_n^{-1}(Z_n^{(2)} - c_n);$$
$$\overline{Z}_{N_n}^{(1)} = b_n^{-1}(Z_{N_n}^{(1)} - a_n), \quad \overline{Z}_{N_n}^{(2)} = d_n^{-1}(Z_{N_n}^{(2)} - c_n).$$

$-\infty < a_n < +\infty; \quad b_n > 0;\ -\infty < c_n < +\infty; \quad d_n > 0.$

Struktūros $(\overline{Z}_n^{(1)}, \overline{Z}_n^{(2)})$ ribinis skirstinys yra $H(x, y)$:

$$P\left(\overline{Z}_n^{(1)} < x, \overline{Z}_n^{(2)} < y\right) \Rightarrow H(x, y). \qquad (1.3.1)$$

$H(x, y)$ yra dvimatė ribinė pasiskirstymo funkcija su vienmatėmis marginaliosiomis pasiskirstymo funkcijomis $H_i(x)$ ir $H_i(y)$, kurios gali būti tik $H_{1,\alpha}$, $H_{2,\alpha}$ arba H_3 (Galambos J., 1978).

Pažymėkime

$$u_n(x, y) = n(1 - F(xb_n + a_n, yd_n + c_n)).$$

Būtina ir pakankama silpnojo konvergavimo sąlyga yra (Galambos J., 1978):

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, y) = u(x, y). \qquad (1.3.2)$$

Pirmoji problema yra ta, kad ribinė pasiskirstymo funkcija nėra vienareikšmiškai nusakoma vienmatėmis marginaliosiomis pasiskirstymo funkcijomis. Vienmačių maksimumų atveju, kai normavimas yra tiesinis, ribinės pasiskirstymo funkcijos gali būti tik trys (). Vektorių maksimumų struktūros atveju klasikinės ribinių skirstinių schemos nebelieka (Pancheva E. Ir kt., 2000). Ribiniai skirstiniai Nemažai autorių (Marshall A.W, Olkin I., 1983; Galambos J., 1978; Tiago de Oliveira J., 1984) yra pateikę sprendimo būdų (teoremų), kuriomis remiantis galima konstruoti daugiamatę ribinę pasiskirstymo funkciją.

Kitas uždavinys – kaip keičiasi ribinės skirstinio funkcijos pavidalas, kai vektoriaus komponentės yra asimptotiškai priklausomos arba nepriklausomos? Į šį klausimą atsakyti galima taip pat remiantis jau pateiktomis įvairių autorių teoremomis (Galambos J., 1978). Tiriamojoje dalyje pateikiami pavyzdžiai, parodo, kad ribiniai skirstiniai gali ir nepriklausyti nuo komponenčių (ne)priklausomumo.

Šiame darbe bus plačiau analizuojamos konvergavimo (1.3.1) paklaidos, bus ieškomas tokių paklaidų įvertis. Tam bus reikalingos kelios teoremos.

3 teorema *(Jokimaitis A.,1998) Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai N_n ir X_j, Y_j, $j\geq 1$ yra tarpusavyje nepriklausomi. Jei $\exists \; a_n, b_n > 0, c_n, d_n > 0$ su kuriomis*

$$P(\overline{Z}_n^{(1)} \leq x, \overline{Z}_n^{(2)} \leq y) \Rightarrow H(x, y),$$

ir

$$P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) \to A(x), n \to \infty,$$

tai

$$P(\overline{Z}_{N_n}^{(1)} \leq x, \overline{Z}_{N_n}^{(2)} \leq y) \to \Psi(x, y),$$

čia ribinė skirstinio funkcija

$$\Psi(x, y) = \int_0^\infty H^z(x, y) dA(z).$$

4 teorema (Jokimaitis A., 1998) Tarkime H(x,y) yra stochastinių maksimumų ribinis skirstinys, F(x,y) – atsitiktinių nepriklausomų vektorių $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),...,(X_n,Y_n)$ skirstinys. Tada visiems x, y tenkinantiems sąlygas H(x,y) > 0 ir $u_n(x,y)/n \le \frac{1}{2}$, teisinga nelygybė

$$\left|P\left(\overline{Z}_n^{(1)} < x, \overline{Z}_n^{(2)} < y\right) - H(x,y)\right| \le \Delta_n(x,y) = H(x,y)(R_1(x,y) + R_2(x,y) + R_1(x,y)R_2(x,y)).$$

čia

tiems x, su kuriais H(x) > 0, pažymime

$$v_n(x,y) = u_n(x,y) + \ln H(x,y).$$

$$R_1(x,y) = \frac{2u^2{}_n(x,y)}{n} \cdot \frac{1}{1-q},$$

$$R_2(x,y) = \left|v_n(x,y)\right| \cdot \frac{1}{1-s},$$

ir 0 < s < 1 ir 0 < q < 1 tokie, kad

$$\frac{u_n{}^2(x)}{n} \le q\,,\ \frac{1}{2} \cdot \left|v_n(x)\right| \le s\,.$$

3 ir 4 teoremų įrodymus galima rasti A.Jokimaičio disertacijoje (Jokimaitis A., 1998).

Analogiškai vienmačių dydžių atvejui, vektoriams taip pat yra taikytinas netiesinis normavimas. Kai vienmatės marginaliosios pasiskirstymo funkcijos negaunamos su tiesinio normavimo konstantomis $-\infty < a_n < +\infty; \quad b_n > 0$; $-\infty < c_n < +\infty; \quad d_n > 0$, tai yra, netenkinama būtina ir pakankama silpnojo konvergavimo sąlyga (1.3.1), ieškomos teigiamos, tolygios ir didėjančios netiesinio normavimo funkcijos $G_{n1}(x), G_{n2}(y)$, su kuriomis galiotų silpnasis konvergavimas į ribinius vienmačių maksimumų skirstinius:

$$P(Z_n^{(1)} \le G_{n1}(x)) \Rightarrow H_i(x),$$

$$P(Z_n^{(2)} \le G_{n2}(y)) \Rightarrow H_j(y).$$

Čia $H_i(x)$, $H_j(y)$ gali būti tik $H_{1,\alpha}$, $H_{2,\alpha}$ arba H_3.

Netiesinio normalizavimo prireikė analizuojant log-Pareto skirstinio funkciją $F(x) = 1 - \frac{1}{\ln x}$, kai x ≥ e. Ribinių teoremų maksimumams pagalba išsiaiškinus, kad neegzistuoja tiesinio normalizavimo konstantos, su kuriomis gautume neišsigimusį ribinį skirstinį, taikome netiesinį normalizavimą (Dindienė L., 2009). Nagrinėjant dvimatę pasiskirstymo funkciją, kurios vienmatės marginaliosios skirstinio funkcijos yra log-Pareto, taip pat bus taikytinas netiesinis normalizavimas.

Įvedame maksimumų netiesinio normavimo funkciją:

$$\hat{Z}_n^{(1)} = G_{n1}^{-1}(Z_n^{(1)}), \quad \hat{Z}_n^{(2)} = G_{n2}^{-1}(Z_n^{(2)});$$
$$\hat{Z}_{N_n}^{(1)} = G_{N_n 1}^{-1}(Z_{N_n}^{(1)}), \quad \hat{Z}_{N_n}^{(2)} = G_{N_n 2}^{-1}(Z_{N_n}^{(2)}),$$

Struktūros $\left(\hat{Z}_n^{(1)}, \hat{Z}_n^{(2)}\right)$ ribinis skirstinys yra $H(x, y)$:

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)} < x, \hat{Z}_n^{(2)} < y\right) \Rightarrow H(x, y). \tag{1.3.3}$$

Ribinė dvimačių vektorių maksimumų pasiskirstymo funkcija $H(x, y)$ nėra vienareikšmiškai nusakoma funkcijomis $H_i(x)$ ir $H_j(y)$, todėl čia nebegalioja klasikinė maksimumų ribinių skirstinių schema (Pancheva E. Ir kt., 2000).

Pažymime

$$u_n(x, y) = n(1 - F(G_{n1}(x), G_{n2}(y))).$$

Būtina ir pakankama silpnojo konvergavimo (1.3.3) sąlyga yra (Galambos J., 1978):

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x, y) = u(x, y). \tag{1.3.4}$$

Jei ši sąlyga tenkinama, $H(x, y) = e^{-u(x, y)}$ yra ribinis netiesiškai normuotų maksimumų skirstinys.

Kitas etapas – nagrinėti šio aproksimavimo ribiniu skirstiniu, kai vektorių skaičius atsitiktinis, paklaidas. Tam naudosimės perkėlimo teorema, kurią pritaikysime netiesiškai normuotų maksimumų vektoriams.

5 teorema (Jokimaitis A.,1998) *Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai N_n ir X_j, Y_j, $j \geq 1$ yra tarpusavyje nepriklausomi. Jei* $\exists$ $G_{n1}(x), G_{n2}(y)$ *su kuriomis*

$$P(\hat{Z}_n^{(1)} \leq x, \hat{Z}_n^{(2)} \leq y) \Rightarrow H(x, y),$$

ir

$$P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) \to A(x), n \to \infty,$$

tai

$$P(\hat{Z}_{N_n}^{(1)} \leq x, \hat{Z}_{N_n}^{(2)} \leq y) \to \Psi(x, y),$$

čia ribinė skirstinio funkcija

$$\Psi(x, y) = \int_0^\infty H^z(x, y) dA(z).$$

4 teoremą nesunkiai galime pritaikyti netiesiškai normuotiems maksimumams.

2. TIRIAMOJI DALIS

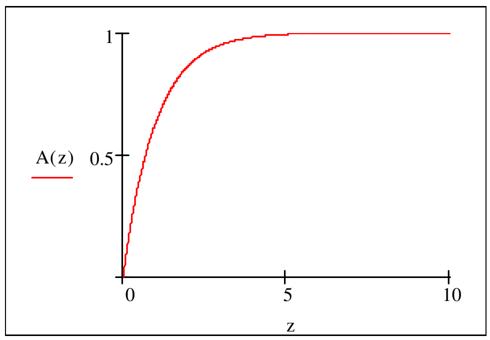
2.1. ATSITIKTINIO KOMPONENČIŲ SKAIČIAUS SKIRSTINYS

Šiame darbe nagrinėsime vektorius, kurių skaičius yra atsitiktinis, t.y., imsime atvejį, kai $\{N_n, n \geq 1\}$ turi geometrinį skirstinį su parametru $p_n = \frac{1}{n}$:

$$P(N_n = k) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}, \ k = 1,2,...$$

Randame pasiskirstymo funkciją A(z):

$$A(z) = \lim_{n\to\infty} A_n(nz) = 1 - e^{-z}, \ z > 0$$



2.1.1 pav. Atsitiktinio skaičiaus skirstinio funkcija

Žinome, kad yra teisingas toks įvertis (Leadbetter M. R. ir kt., 1983)

$$\left|A_n(nx) - A(x)\right| \leq \frac{e^{-x}x^2}{n}.$$

Tuomet tolygusis įvertis yra

$$\sup_x \left|A_n(nx) - A(x)\right| \leq \frac{4e^{-2}}{n}$$

Visų tiriamų funkcijų atveju atsitiktinio skaičiaus skirstiniu pasirinkome geometrinį skirstinį su parametru $p_n = \frac{1}{n}$.

2.2. KONVERGAVIMO ANALIZĖ TIEISINIO VEKTORIŲ MAKSIMUMŲ NORMAVIMO ATVEJU

Svarbiausias šio darbo etapas – įvertinti maksimumų aproksimavimo ribiniu skirstiniu paklaidas. Apibrėžkime paklaidas

$$\overline{\Delta}_n(x,y) = \left|(P(\overline{Z}_n^{(1)} \le x, \overline{Z}_n^{(2)} \le y) - H(x,y)\right|,$$

Tai yra paklaida, kai vektorių skaičius yra determinuotas.

Nagrinėkime atvejį, kai vektorių komponenčių skaičius yra atsitiktinis. Remdamiesi 3 teorema vertinsime konvergavimo greičio įvertį. Paklaidas žymėsime

$$\overline{\Delta}_N(x,y) = \left|(P(\overline{Z}_{N_n}^{(1)} \le x, \overline{Z}_{N_n}^{(2)} \le y) - \Psi(x,y)\right|.$$

<u>**6 Teorema**</u>. *Tarkime, H(x,y) yra atsitiktinių vektorių* $\left(\overline{Z}_{N_n}^{(1)}, \overline{Z}_{N_n}^{(2)}\right)$ *ribinis skirstinys ir* $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} \le x\right) = A(x)$, *A(+0) = 0. Tuomet, visiems x ir y, tenkinantiems sąlygą* $\frac{u_n(x,y)}{n} \le \frac{1}{2}$, *teisingas įvertis:*

$$\Delta_N(x,y) \le \left(\frac{u^2{}_n(x,y)}{n} + \left|\rho_n(x,y)\right|\right) \cdot \int_0^\infty z\delta_n{}^z(x,y)dA_n(nz) + u(x,y) \cdot \int_0^\infty \left|A_n(nz) - A(z)\right| H^z(x,y)dz,$$

čia: $\delta_n(x,y) = \max\left(F^n\left(xb_n + a_n, yd_n + c_n\right), H(x,y)\right)$, $\rho_n(x,y) = u_n(x,y) - u(x,y)$.

<u>Teoremos įrodymas</u>

$$\begin{aligned}\left|P(\overline{Z}_{N_n}^{(1)} \le x, \overline{Z}_{N_n}^{(2)} \le y) - \Psi(x,y)\right| &\le \left|P(\overline{Z}_{N_n}^{(1)} \le x, \overline{Z}_{N_n}^{(2)} \le y) - EH^{\frac{N_n}{n}}(x,y)\right| + \\ &+ \left|EH^{\frac{N_n}{n}}(x,y) - \Psi(x,y)\right| = I_n{}^{(1)}(x,y) + I_n{}^{(2)}(x,y).\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Iš pilnosios tikimybės formulės (Aksomaitis A., 2002) turime:

$$\begin{aligned}I_n{}^{(1)}(x,y) &= \left|\sum_{j\ge1} F^j(xb_n + a_n, yd_n + c_n)P(N_n = j) - \sum_{j\ge1} H^{\frac{j}{n}}(x,y)P(N_n = j)\right| = \\ &= \left|\int_0^\infty F^{nz}(xb_n + a_n, yd_n + c_n)dA_n(nz) - \int_0^\infty H^z(x,y)dA_n(nz)\right| \le \\ &\le \int_0^\infty \left|F^{nz}(xb_n + a_n, yd_n + c_n) - H^z(x,y)\right| dA_n(nz).\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Kadangi

$$\begin{aligned}\left|F^{nz}(xb_n + a_n, yd_n + c_n) - H^z(x,y)\right| &= z\left|\int_{H(x,y)}^{F^n(xb_n+a_n,yd_n+c_n)} t^{z-1}dt\right| \le \\ &\le z\left(\max\left(F^n(xb_n + a_n, yd_n + c_n), H(x,y)\right)\right)^z \left|\ln F^n(xb_n + a_n, yd_n + c_n) - \ln H(x,y)\right| \le \\ &\le z\delta_n{}^z(x,y)\left(\left|n\ln\left(1 - \frac{u_n(x,y)}{n}\right) + u_n(x,y)\right| + \left|u_n(x,y) - u(x,y)\right|\right),\end{aligned}$$

tai pasinaudojus nelygybe

$$\left|\ln(1-t)+t\right| \le t^2,\ 0 \le t \le \frac{1}{2}, \tag{2.2.3}$$

gauname

$$\left|F^{nz}(xb_n + a_n, yd_n + c_n) - H^z(x,y)\right| \le z\delta_n^{\,z}(x,y)\left(\frac{u^2{}_n(x,y)}{n} + \left|\rho_n(x,y)\right|\right), \tag{2.2.4}$$

su sąlyga, kad $\frac{u_n(x,y)}{n} \le \frac{1}{2}$.

Iš (2.2.1) ir (2.2.2) išplaukia, kad

$$I_n^{(1)}(x,y) \le \left(\frac{u^2{}_n(x,y)}{n} + \left|\rho_n(x,y)\right|\right)\int_0^\infty z\delta_n^{\,z}(x,y)dA_n(nz).$$

Taip pat,

$$I_n^{(2)}(x,y) = \left|\int_0^\infty H^z(x,y)dA_n(nz) - \int_0^\infty H^z(x,y)dA(z)\right| = \left|\int_0^\infty H^z(x,y)d(A_n(nz) - A(z))\right|.$$

Suintegravę dalimis, gauname

$$I_n^{(2)}(x,y) = \left|\int_0^\infty \left(A_n(nz) - A(z)\right)dH^z(x,y)\right| \le u(x,y)\int_0^\infty \left|A_n(nz) - A(z)\right|H^z(x,y)dz. \tag{2.2.5}$$

Teoremos įrodymas išplaukia iš (2.2.1),(2.2.2) ir (2.2.4).

1 išvada. *Įvertinkime* $\delta^z{}_n(x,y)$*:*

$$\delta_n(x,y) = \max\left(F^n\left(xb_n + a_n, yd_n + c_n\right), H(x,y)\right) \le 1.$$

Tuomet $\delta^z{}_n(x,y) \le 1$. *Įverčio išraišką gauname supaprastintą:*

$$\begin{aligned}\Delta_N(x,y) &\le \left(\frac{u^2{}_n(x,y)}{n} + \left|\rho_n(x,y)\right|\right)\cdot\int_0^\infty z\delta_n^{\,z}(x,y)dA_n(nz) + u(x,y)\cdot\int_0^\infty \left|A_n(nz) - A(z)\right|H^z(x,y)dz \le \\ &\le \left(\frac{u^2{}_n(x,y)}{n} + \left|\rho_n(x,y)\right|\right)\cdot\int_0^\infty z dA_n(nz) + u(x,y)\cdot\int_0^\infty \left|A_n(nx) - A(x)\right|H^z(x,y)dz \le \\ &\le \left(\frac{u^2{}_n(x,y)}{n} + \left|\rho_n(x,y)\right|\right)\cdot E\frac{N_n}{n} + u(x,y)\cdot\int_0^\infty \left|A_n(nx) - A(x)\right|H^z(x,y)dz.\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

2 išvada. Kai atsitiktinio skaičiaus skirstinys išsigimęs taške n, t.y. , kai $P(N_n = n) = 1$ (nebelieka atsitiktinumo) iš 3 teoremos ir 1 išvados gauname, kad

$$\Delta_n(x,y) \le \left(\frac{u^2{}_n(x,y)}{n} + \left|\rho_n(x,y)\right| \right) \cdot E\frac{N_n}{n} + u(x,y)\cdot \int_0^\infty \left|A_n(nx) - A(x)\right| H^z(x,y)dz = \frac{u^2{}_n(x,y)}{n} + \left|\rho_n(x,y)\right|,$$

kadangi $\left|A_n(nx) - A(x)\right| = 0.$

Šis rezultatas patikslina ir iš dalies pagerina 4 teoremos rezultatą, kadangi čia nėra koeficientų q ir s, kurie padidina papildomų sąlygų kiekį. Taip pat 2 išvados įverčio rezultate nėra papildomos sandaugos (4 teoremoje: $R_1(x,y)\cdot R_2(x,y)$). Taigi įvertis gaunamas geresnis. Tačiau, iš kitos pusės šios išvados rezultatas yra blogesnis tuo, kad nėra priekyje daugiklio H(x,y), kuris tam tikrais atvejais pagerintų gaunamą rezultatą.

Jei 3 teoremoje neįtraukiame sąlygos, kad $\frac{u_n(x,y)}{n} \le \frac{1}{2}$, tai gauname 1 teiginį.

1 teiginys. *Tarkime, H(x,y) yra atsitiktinių vektorių* $\left(\overline{Z}^{(1)}_{N_n}, \overline{Z}^{(2)}_{N_n}\right)$ *ribinis skirstinys ir* $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} \le x\right) = A(x)$*, A(+0) = 0. Tuomet teisingas įvertis:*

$$\Delta_n(x,y) \le u(x,y)\cdot \int_0^\infty \left|A_n(nz) - A(z)\right| H^z(x,y)dz\,.$$

Įrodymas.

$$P(\overline{Z}^{(1)}_{N_n} \le x, \overline{Z}^{(2)}_{N_n} \le y) - \Psi(x,y)) = \sum_{j\ge1} F^j(xb_n + a_n, yd_n + c_n)P(N_n = j) - \Psi(x,y) =$$

$$= \int_0^\infty H^z(x,y)dA_n(nz) - \int_0^\infty H^z(x,y)dA(z) = -\int_0^\infty \left(A_n(nz) - A(z)\right)dH^z(x,y) =$$

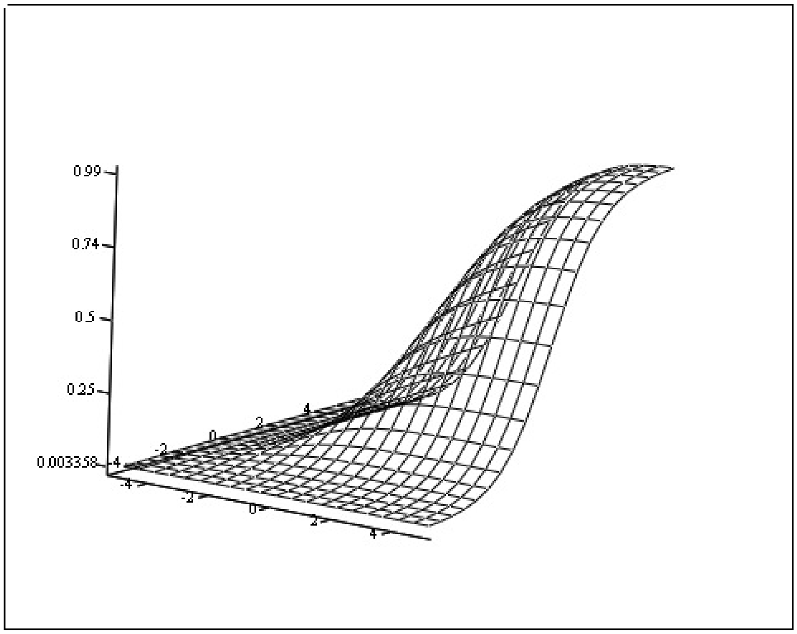
$$= u(x,y)\int_0^\infty \left(A_n(nz) - A(z)\right)H^z(x,y)dz.$$

Taigi, gauname įvertį

$$\left|P(\overline{Z}^{(1)}_{N_n} \le x, \overline{Z}^{(2)}_{N_n} \le y) - \Psi(x,y)\right| \le u(x,y)\cdot \int_0^\infty \left|A_n(nz) - A(z)\right| e^{-zu(x,y)}dz.$$

2.2.1 pavyzdys. Tarkime $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ - atsitiktinių, nepriklausomų vektorių seka, turinti logistinį skirstinį

$$F(x,y) = \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}}\,,\ x,y \in R\,.$$



2.2.1 pav. Dvimačio logistinio skirstinio grafikas, kai komponentės priklausomos

$F_1(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$; $F_2(y)=\dfrac{1}{1+e^{-y}}$ - komponenčių X ir Y pasiskirstymo funkcijos.

Su normalizavimo konstantomis $(a_n, c_n)=(\ln n, \ln n), (b_n, d_n)=(1{,}1)$ gauname, kad ribinė vektorių maksimumo skirstinio funkcija yra

$$P\left(\frac{Z_{N_n}^{(1)}-a_n}{b_n}<x, \frac{Z_{N_n}^{(2)}-c_n}{d_n}<y\right)=P\left(Z_{N_n}^{(1)}<\ln n+x,\, Z_{N_n}^{(2)}<\ln n+y\right)\Rightarrow H(x,y)=$$
$$=\exp\left(-e^{-x}-e^{-y}\right),\ x, y\in R.$$

Tikriname būtiną ir pakankamą silpnojo konvergavimo sąlygą (1.3.2):

$$u_n(x,y)=n\left(1-\frac{1}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}}\right)=\frac{n(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x,y)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(e^{-x}n^{-1}+e^{-y}n^{-1})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-x}+e^{-y}}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}}=$$
$$=e^{-x}+e^{-y}=u(x,y).$$

Matome, kad sąlyga yra tenkinama.

Nagrinėkime vektorių maksimumų konvergavimo į ribinį skirstinį paklaidas. Apskaičiuojame skirstinio funkciją $\Psi(x,y)$:

$$\Psi(x,y)=\int_0^\infty H^z(x,y)dA(z)=\int_0^\infty e^{-u(x,y)z}d(1-e^{-z})=\left.\frac{e^{-z(u(x,y)+1)}}{-(u(x,y)+1)}\right|_0^\infty=\frac{1}{u(x,y)+1}.$$

Pažymime:

$$\overline{\Delta}_N(x,y) = \left| P\left(\hat{Z}_{N_n}{}^{(1)} < x, \hat{Z}_{N_n}{}^{(2)} < y\right) - \Psi(x,y) \right| = \left| F^n\left(G_{n1}(x), G_{n2}(y)\right) - \int_0^\infty H^z(x,y)\,dA(z) \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{1}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}} \right)^n - \frac{1}{e^{-x}+e^{-y}+1} \right|.$$

Vertiname konvergavimo greitį:

$$\Delta_N(x,y) \le \left(\frac{\left(\frac{n(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}} \right)^2}{n} + \left| \frac{e^{-x}+e^{-y})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}} - (e^{-x}+e^{-y}) \right| \right) \cdot 1 +$$

$$+ (e^{-x}+e^{-y}) \int_0^{+\infty} \frac{4e^{-2}}{n} e^{-(e^{-x}+e^{-y})z} dz = \left(\frac{n(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})^2}{(1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})^2} + \left| \frac{-(e^{-x}+e^{-y})(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}} \right| \right) +$$

$$+ \frac{4e^{-2}}{n} \cdot (e^{-x}+e^{-y}) \left. \frac{e^{-(e^{-x}+e^{-y})z}}{\ln e^{-(e^{-x}+e^{-y})}} \right|_0^{+\infty} = \frac{2(e^{-x}+e^{-y})^2}{n} + \frac{4e^{-2}}{n} = \frac{2((e^{-x}+e^{-y})^2+2e^{-2})}{n}.$$

Matome, kad įverčio eilė n atžvilgiu yra 1/n.

Pastebime, kad įverčio išraiškoje gauname pastovią dedamąją:

$$u(x,y) \cdot \int_0^\infty \left| A_n(nz) - A(z) \right| H^z(x,y)\,dz \le u(x,y) \int_0^\infty \frac{4e^{-2}}{n} \cdot e^{-zu(x,y)} dz =$$

$$= \frac{4e^{-2}}{n} \cdot u(x,y) \cdot \left. \frac{e^{-u(x,y)z}}{u(x,y)} \right|_0^{+\infty} = \frac{4e^{-2}}{n}. \tag{2.2.7}$$

Įvertinę sąlygą

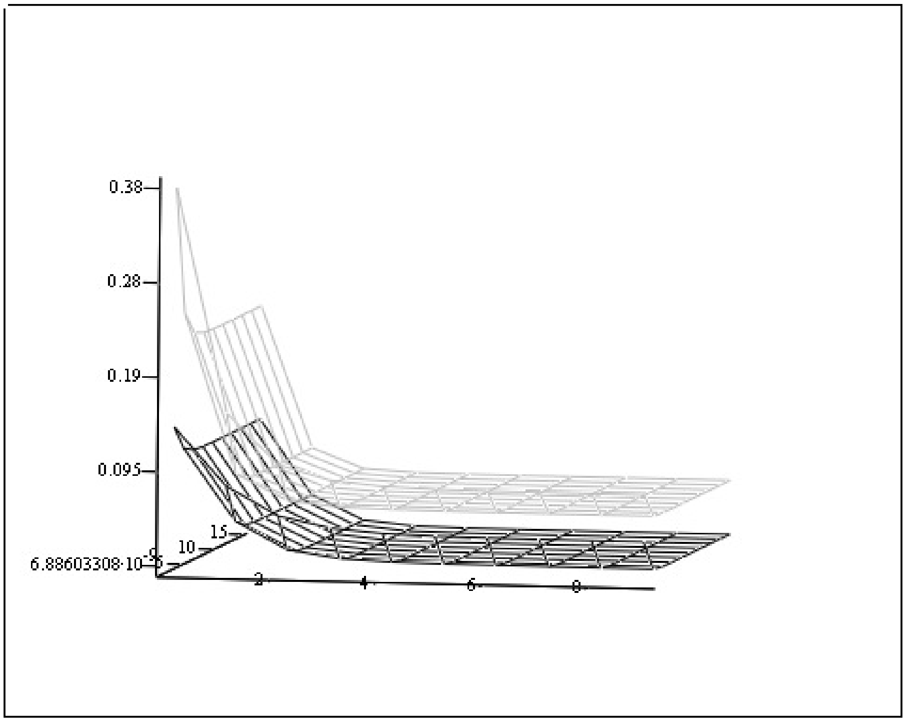
$$\frac{u_n(x,y)}{n} \le \frac{1}{2}, \tag{2.2.8}$$

gauname nelygybę

$$\frac{e^{-x}+e^{-y}}{n+e^{-x}+e^{-y}} \le \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-x}+e^{-y} \le n$$

Iš jos išplaukia, kad kai $x > 1; y > 1$ ši sąlyga visada bus patenkinama.

Išsamiau paanalizuokime paklaidas. Remiantis MathCad programa paklaidas vertiname ir analiziškai ir grafiškai. Paprastumo dėlei pasirenkame $\alpha = 1, \beta = 1$. 2.2.1. paveiksle pateiktas atvejis, kai $0 < x < 8, 0 < y < 15$, n=10. Matome, kad skirtumas tarp grafikų (įverčio grafikas – šviesusis) nusistovi, t.y. pasidaro lygus apie 0.054, kai x ir y didėja.



2.2.2 pav. Paklaidos Logistinio skirstinio atveju, kai komponentės priklausomos

Panagrinėję tą patį atvejį tik kai n=100 (1 priedas), matome, kad skirtumas tarp įverčio ir tikrosios paklaidos ženkliai sumažėja ir, priešingai 2.2.2 pav., gauname, kad įvertis tampa mažesnis už paklaidą. Skirtumas didėjant x ir y pasidaro apie 0.0054.

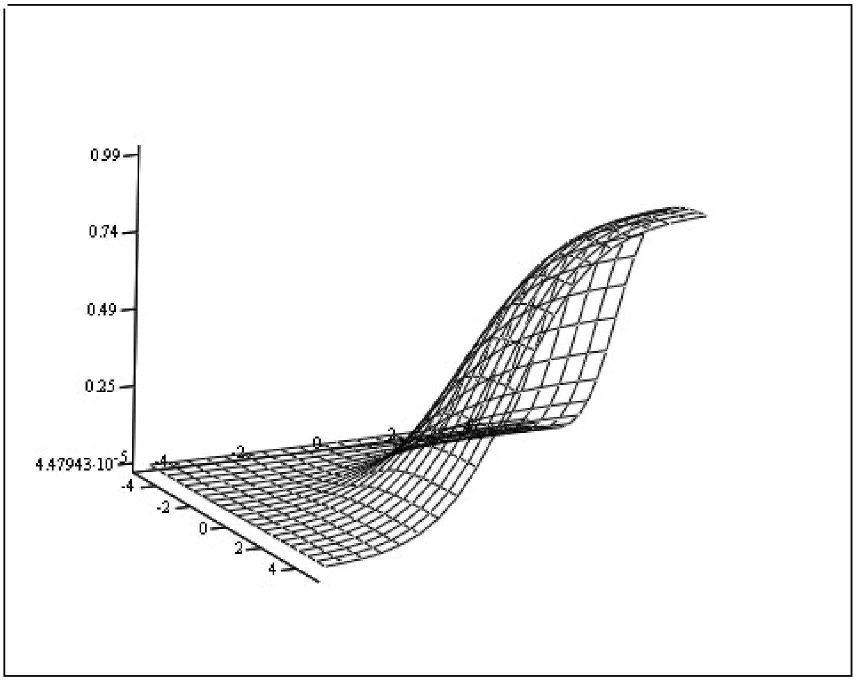
1 priede pateikti išsamesni skaičiavimai bei keletas grafikų skirtingais x, y ir n parinkimo atvejais.

Iš analizuotų atvejų, būtų galima daryti tokias išvadas:

1) Neigiamoms (< -2) reikšmėms (2.2.8) sąlyga netenkinama.
2) kuo didesnes x ir y reikšmės tuo greičiau paklaidos stabilizuojasi ties konkrečia reikšme;
3) esant didelėms x ir y reikšmėms (>10) paklaidos yra labai mažos (10^{-5}eilės ir mažesnės), grafiškai gaunami plokšti paviršiai, tačiau lyginant su mažomis paklaidomis, gaunamas ryškus ir pastovus skirtumas tarp įverčio ir tikrosios paklaidos.

2.2.2. Pavyzdys. Nagrinėkime dvimatį logistinį skirstinį, kurio komponentės tarpusavyje yra nepriklausomos, t.y., $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$:

$$F(x,y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y} + e^{-x}e^{-y}},\ x, y \in R$$



2.2.3 pav. Dvimačio logistinio skirstinio grafikas, kai komponentės nepriklausomos

Su normalizavimo konstantomis $(a_n, c_n) = (\ln n, \ln n), (b_n, d_n) = (1{,}1)$ gauname, kad

$$P\left(\frac{Z_{N_n}^{(1)} - a_n}{b_n} < x, \frac{Z_{N_n}^{(2)} - c_n}{d_n} < y\right) = P\left(Z_{N_n}^{(1)} < \ln n + x,\ Z_{N_n}^{(2)} < \ln n + y\right) \Rightarrow H(x, y) =$$

$$= \exp\left(-e^{-x} - e^{-y}\right),\ x, y \in R.$$

Ribinio skirstinio funkcijos pavidalui komponenčių priklausomumas neturi įtakos, nes skirstinio funkcijos gaunamos vienodos. Tikriname būtiną ir pakankamą silpnojo konvergavimo sąlygą (1.3.2):

$$u_n(x, y) = n\left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x-\ln n} + e^{-y-\ln n} + e^{-x-\ln n}e^{-y-\ln n}}\right) = \frac{n(e^{-x-\ln n} + e^{-y-\ln n} + e^{-x-\ln n}e^{-y-\ln n})}{1 + e^{-x-\ln n} + e^{-y-\ln n} + e^{-x-\ln n}e^{-y-\ln n}} =$$

$$= \frac{e^{-x} + e^{-y} + e^{-x}e^{-y}n^{-1}}{1 + e^{-x}n^{-1} + e^{-y}n^{-1} + e^{-x}e^{-y}n^{-2}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x} + e^{-y} + e^{-x}e^{-y}n^{-1})}{1 + e^{-x-\ln n} + e^{-y-\ln n} + e^{-x-\ln n}e^{-y-\ln n}} = e^{-x} + e^{-y} = u(x, y).$$

Sąlyga tenkinama.

Tikroji paklaida yra

$$\overline{\Delta}_N(x, y) = \left|P\left(\hat{Z}_{N_n}^{(1)} < x, \hat{Z}_{N_n}^{(2)} < y\right) - \Psi(x, y)\right| = \left|F^n\left(G_{n1}(x), G_{n2}(y)\right) - \int_0^\infty H^z(x, y)\,dA(z)\right| =$$

$$= \left| \left(\frac{1}{1+e^{-x-\ln n} + e^{-y-\ln n} + e^{-x-\ln n} e^{-y-\ln n}} \right)^n - \frac{1}{e^{-x} + e^{-y} + 1} \right| .$$

Skaičiuojame įverčio (2.2.6) dedamąsias:

$$\frac{u_n^2(x,y)}{n} = \left(\frac{n(e^{-x-\ln n} + e^{-y-\ln n} + e^{-x-\ln n} e^{-y-\ln n})}{1+e^{-x-\ln n} + e^{-y-\ln n} + e^{-x-\ln n} e^{-y-\ln n}} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{e^{-x} + e^{-y} + e^{-x} e^{-y} n^{-1}}{1+e^{-x} n^{-1} + e^{-y} n^{-1} + e^{-x} e^{-y} n^{-2}} \right)^2 .$$

$$\rho_n(x,y) = u_n(x,y) - u(x,y) =$$

$$= \frac{e^{-x} + e^{-y} + e^{-x} e^{-y} n^{-1}}{1+e^{-x} n^{-1} + e^{-y} n^{-1} + e^{-x} e^{-y} n^{-2}} - e^{-x} - e^{-y} = \frac{n^{-1}\left(e^{-x} e^{-y} - \left(e^{-x} + e^{-y}\right)^2 - \left(e^{-x} + e^{-y}\right) e^{-x} e^{-y} n^{-1}\right)}{1+e^{-x} n^{-1} + e^{-y} n^{-1} + e^{-x} e^{-y} n^{-2}}$$

Konvergavimo greičio įvertis yra

$$\Delta_N(x,y) \le \frac{1}{n} \left(\left(\frac{e^{-x} + e^{-y} + e^{-x} e^{-y} n^{-1}}{1+e^{-x} n^{-1} + e^{-y} n^{-1} + e^{-x} e^{-y} n^{-2}} \right)^2 + \frac{\left| e^{-x} e^{-y} - \left(e^{-x} + e^{-y}\right)^2 - \left(e^{-x} + e^{-y}\right) e^{-x} e^{-y} n^{-1} \right|}{1+e^{-x} n^{-1} + e^{-y} n^{-1} + e^{-x} e^{-y} n^{-2}} + \frac{4}{e^2} \right).$$

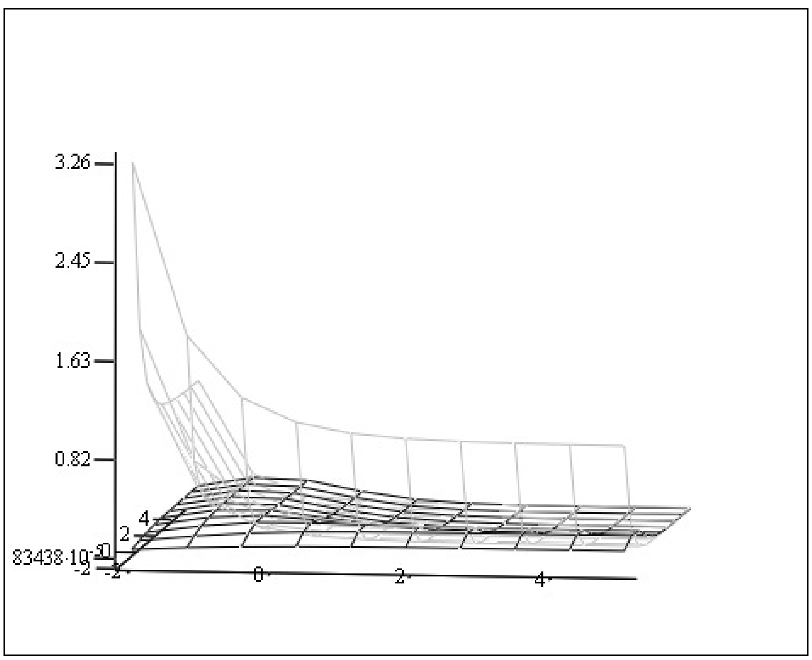
Įverčio eilė n atžvilgiu vėl gi gaunama 1/n.

Įvertinę sąlygą (2.2.8) gauname nelygybę:

$$\frac{e^{-x} + e^{-y} + \dfrac{e^{-x} e^{-y}}{n}}{n + e^{-x} + e^{-y} + \dfrac{e^{-x} e^{-y}}{n}} \le \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-x} + e^{-y} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{n} \le n$$

Vėlgi matome, kad kai $x > 1;\ y > 1$, ši sąlyga visada bus tenkinama.

Pasirenkame $\alpha = 1,\ \beta = 1$. 2.2.4. paveiksle pateiktas atvejis, kai $-2 < x < 5, -2 < y < 5$, n=100. Matome, kad skirtumas tarp grafikų (įverčio grafikas – šviesusis) nenusistovi kai x ir y didėja.



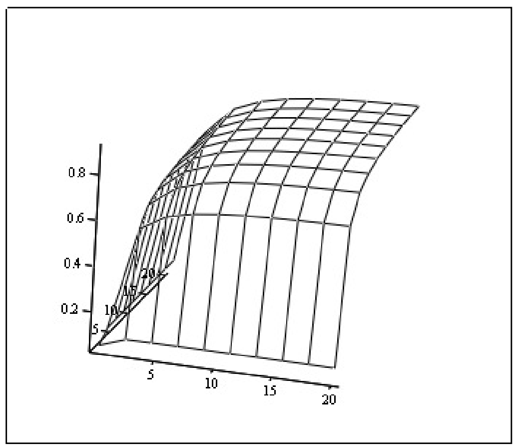
2.2.4 pav. Paklaidos Logistinio skirstinio atveju, kai komponentės nepriklausomos

Paėmus tą patį atvejį, tik kai n=10, gauname, kad netenkinama (2.2.8) sąlyga neigiamoms reikšmėms. Tuomet imame reikšmes $1 < x < 5, 1 < y < 5$ ir matome, kad skirtumas tarp grafikų nusistovi ir yra apie 0,05 (2 priedas).

2 priede pateikti keli grafikai skirtingais x, y, n parinkimo atvejais. Iš visos atliktos analizės, galima būtų padaryti analogiškas 2.2.1 pavyzdžio išvadas. Neigiamoms (< -2) reikšmėms (2.2.8) sąlyga netenkinama.

<u>2.2.3 pavyzdys.</u> Nagrinėkime dvimatį Pareto skirstinį, kurio komponentės tarpusavyje yra priklausomos:

$$F(x, y) = \frac{1}{1 + x^{-\alpha} + y^{-\beta}},\ x > 0, y > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$



2.2.5 pav. Dvimačio Pareto skirstinio grafikas, kai komponentės priklausomos

Su normalizavimo konstantomis $(a_n, c_n) = (0{,}0), \quad (b_n, d_n) = (n^{\frac{1}{\alpha}}, n^{\frac{1}{\beta}})$ gauname, kad

$$P\left(\frac{Z^{(1)}_{N_n} - a_n}{b_n} < x, \frac{Z^{(2)}_{N_n} - c_n}{d_n} < y\right) = P\left(Z^{(1)}_{N_n} < xn^{\frac{1}{\alpha}}, Z^{(2)}_{N_n} < xn^{\frac{1}{\beta}}\right) = \left(\frac{1}{1 + x^{-\alpha}n^{-1} + y^{-\beta}n^{-1}}\right)^n \Rightarrow H(x, y) =$$
$$= \exp\left(-x^{-\alpha} - y^{-\beta}\right),.$$

Tikriname būtiną ir pakankamą silpnojo konvergavimo sąlygą:

$$u_n(x, y) = n\left(1 - \frac{1}{1 + x^{-\alpha}n^{-1} + y^{-\beta}n^{-1}}\right) = \frac{x^{-\alpha} + y^{-\beta}}{1 + x^{-\alpha}n^{-1} + y^{-\beta}n^{-1}};$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{-\alpha} + y^{-\beta}}{1 + x^{-\alpha}n^{-1} + y^{-\beta}n^{-1}} = x^{-\alpha} + y^{-\beta} = u(x, y).$$

Gauname tokią paklaidą:

$$\overline{\Delta}_N(x, y) = \left|P\left(\hat{Z}_{N_n}{}^{(1)} < x, \hat{Z}_{N_n}{}^{(2)} < y\right) - \Psi(x, y)\right| = \left|\left(\frac{1}{1 + x^{-\alpha}n^{-1} + y^{-\beta}n^{-1}}\right)^n - \frac{1}{x^{-\alpha} + y^{-\beta} + 1}\right|.$$

Vertiname konvergavimo greitį. Surandame įverčio dedamąsias:

$$\frac{u_n^2(x,y)}{n} = \left(\frac{x^{-\alpha}+y^{-\beta}}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}}\right)^2 \cdot \frac{1}{n};$$

$$\rho_n(x,y) = u_n(x,y) - u(x,y) = \frac{x^{-\alpha}+y^{-\beta}}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}} - \left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right) = \frac{n^{-1}\left(-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)^2\right)}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}}.$$

$$\Delta_N(x,y) \le \frac{1}{n}\left(\left(\frac{x^{-\alpha}+y^{-\beta}}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}}\right)^2 + \frac{\left|-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)^2\right|}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}} + \frac{4}{e^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)^2\left(2+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}\right)}{\left(1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}\right)^2} + \frac{4}{e^2}\right)$$

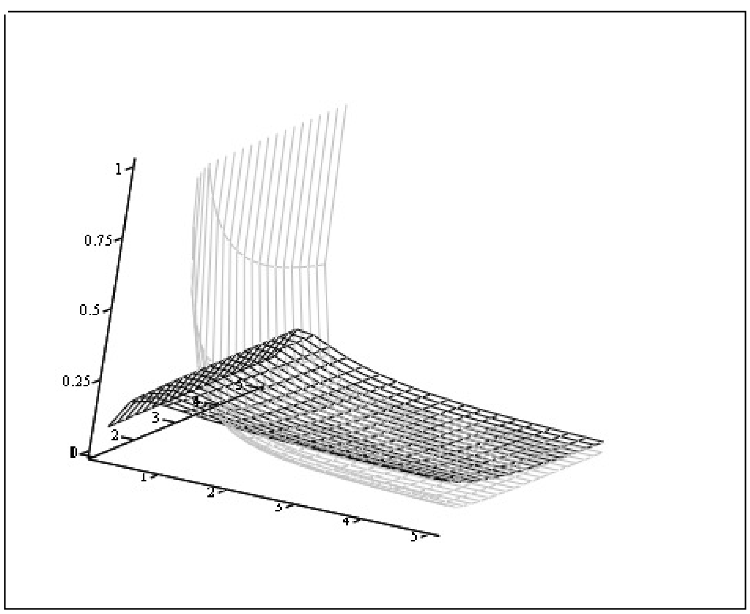
Įverčio eilė n atžvilgiu gaunama 1/n.

Įvertinę sąlygą (2.2.8), gauname nelygybę

$$\frac{x^{-\alpha}+y^{-\beta}}{n+x^{-\alpha}+y^{-\beta}} \le \frac{1}{2} \Rightarrow x^{-\alpha}+y^{-\beta} \le n$$

Vėl gi matome, kad kai $x > 1; y > 1$, ši sąlyga visada bus tenkinama.

Pateikiame vieną grafinį vaizdą, kaip skiriasi tikroji paklaida nuo įverčio. Pasirenkame $\alpha = 1,\ \beta = 1$. 2.2.6 paveiksle $1 < x < 5, 1 < y < 5$, o n = 100. Tiksliosios paklaidos grafikas yra tamsusis. Matome, kad ties kai kuriomis x ir y reikšmėmis grafikai kertasi – įvertis sutampa su paklaida. Kai x ir y yra maži (< 3) įverčio reikšmės smarkiai nutolsta nuo tikrosios paklaidos. 3 priede pateikta daugiau grafikų ir išsamesnių skaičiavimų. Kai x ir y dideli pastebime, kad grafikai pasidaro plokšti, t.y. tiek tikslioji paklaida stabilizuojasi, tiek ir įverčio reikšmės koncentruojasi tiek konkrečia reikšme tam tikru tikslumu (ir kai n=10, ir kai n= 100).



2.2.6 pav. Paklaidos Pareto skirstinio atveju, kai komponentės priklausomos

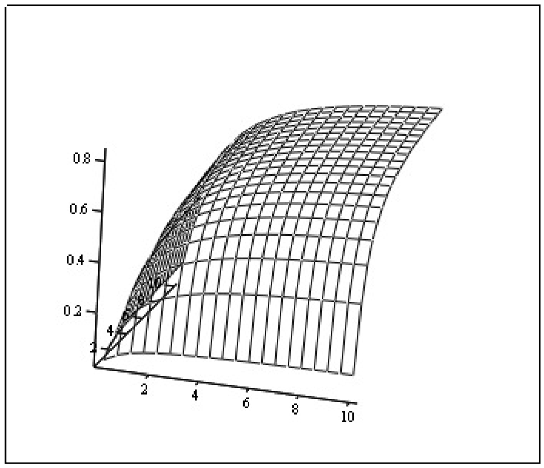
Taigi, iš atliktų visų bandymų ir skaičiavimų pastebime, kad įvertį taikyti tikslinga, kai:

1) turime didesnes n reikšmes (n> 20), o x>3 ir y > 3;
2) kai x ir y didesni (>5), o n >10.

Šiais atvejais skirtumas tarp tikrosios paklaidos ir įverčio yra pakankamai mažas (didžiausias - 0,1 eilės), ir įvertį naudoti su tokia paklaida būtų galima.

2.2.4 pavyzdys Nagrinėkime dvimatį Pareto skirstinį, kurio komponentės yra nepriklausomos:

$$F(x,y)=\frac{1}{1+x^{-\alpha}+y^{-\beta}+x^{-\alpha}y^{-\beta}},\ x>0,y>0,\alpha>0,\beta>0.$$



2.2.7 pav. Dvimačio Pareto skirstinio grafikas, kai komponentės nepriklausomos

Su normalizavimo konstantomis $(a_n,c_n)=(0,0),(b_n,d_n)=(n^{\frac{1}{\alpha}},n^{\frac{1}{\beta}})$ gauname, kad

$$P\left(\frac{Z_{N_n}^{(1)}-a_n}{b_n}<x,\frac{Z_{N_n}^{(2)}-c_n}{d_n}<y\right)=P\left(Z_{N_n}^{(1)}<xn^{\frac{1}{\alpha}},Z_{N_n}^{(2)}<xn^{\frac{1}{\beta}}\right)\Rightarrow H(x,y)=$$
$$=\exp\left(-x^{-\alpha}-y^{-\beta}\right).$$

Tuomet

$$u_n(x,y)=n\left(1-\frac{1}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-2}}\right)=\frac{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-1}}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-2}};$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x,y)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-1}}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-2}}=x^{-\alpha}+y^{-\beta}=u(x,y).$$

Sąlyga (1.3.2) tenkinama. Matome, kad komponenčių priklausomumas vektorių maksimumų ribiniam skirstiniui įtakos neturi. Paklaida gaunama tokia:

$$\overline{\Delta}_N(x,y)=\left|P\left(\hat{Z}_{N_n}^{(1)}<x,\hat{Z}_{N_n}^{(2)}<y\right)-\Psi(x,y)\right|=\left|\left(\frac{1}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-2}}\right)^n-\frac{1}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+1}\right|.$$

Toliau analizuojame konvergavimą.

$$\frac{u_n^2(x,y)}{n}=\left(\frac{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-1}}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-2}}\right)^2\frac{1}{n}$$

$$\rho_n(x,y)=u_n(x,y)-u(x,y)=$$

$$=\frac{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-1}}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-2}}-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)=\frac{n^{-1}\left(x^{-\alpha}y^{-\beta}\left(1-x^{-\alpha}-y^{-\beta}\right)-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)^2\right)}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-2}}.$$

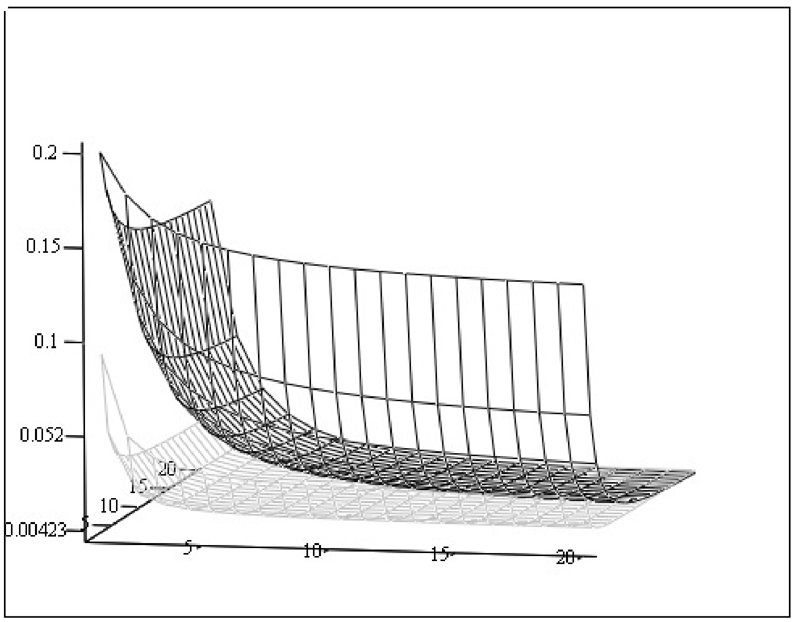
$$\Delta_N(x,y)\le\frac{1}{n}\left(\left(\frac{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-1}}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-2}}\right)^2+\frac{\left|x^{-\alpha}y^{-\beta}\left(1-x^{-\alpha}-y^{-\beta}\right)-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)^2\right|}{1+x^{-\alpha}n^{-1}+y^{-\beta}n^{-1}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-2}}+\frac{4}{e^2}\right).$$

Įvertinę sąlygą (2.2.8) gauname nelygybę

$$\frac{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-1}}{n+x^{-\alpha}+y^{-\beta}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-1}}\le\frac{1}{2}\Rightarrow x^{-\alpha}+y^{-\beta}+x^{-\alpha}y^{-\beta}n^{-1}\le n$$

Vėlgi matome, kad kai $x>1;\ y>1$, ši sąlyga visada bus tenkinama.

Išsamiau paanalizuokime skirtumą tarp įverčio ir paklaidos.



2.2.8 pav. Paklaidos Pareto skirstinio atveju, kai komponentės nepriklausomos

2.2.8 paveiksle pateiktas atvejis, kai n=100, $1<x<20, 1<y<20$, $\alpha=1, \beta=1$. Visais tyrinėtais atvejais išvadas būtų galima daryti analogiškas 2.2.3 pavyzdžio išvadoms. Tačiau šiuo atveju, įverčio grafikas (šviesusis) praktiškai visada skiriasi nuo paklaidos, nors n ir parenkame didelį, tačiau skirtumas neviršija 0,2 visai minėtais atvejais (2.2.3 pvz. išvadose).Grafikai nesistabilizuoja ties konkrečia reikšme.

Toliau paanalizuokime pavyzdį, kuris parodo, kad kai kurių funkcijų atveju galimas ir tiesinis ir netiesinis vektorių maksimumų normavimas, tačiau netiesinio normavimo atveju gaunamas geresnis rezultatas.

2.2.5. Pavyzdys. Tarkime $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ - atsitiktinių, nepriklausomų vektorių seka, turinti skirstinį

$$F(x, y) = x \cdot y.$$

Vienmatės pasiskirstymo funkcijos yra

$$F(x) = x\,;\, F(y) = y\,,$$

$0 < x < 1,\ 0 < y < 1$.

Su normalizavimo konstantomis $(a_n, c_n) = (1{,}1), \quad (b_n, d_n) = (n^{-1}, n^{-1})$ gauname, kad

$$P\left(\frac{Z_{N_n}^{(1)} - a_n}{b_n} < x, \frac{Z_{N_n}^{(2)} - c_n}{d_n} < y\right) = P\left(Z_{N_n}^{(1)} < xn^{-1} + 1,\, Z_{N_n}^{(2)} < yn^{-1} + 1\right) = F^n(xn^{-1} + 1,\, yn^{-1} + 1) =$$

$$= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \Rightarrow H(x, y) = \exp(x + y),.$$

Tačiau gauname žymiai geresnį rezultatą, kai naudojame netiesinio normalizavimo funkcijas $G_{n1}(x) = \exp(x \cdot n^{-1});\, G_{n2}(y) = \exp(y \cdot n^{-1})$:

$$P\left(Z_{N_n}^{(1)} < \exp\left(\frac{x}{n}\right), Z_{N_n}^{(2)} < \exp\left(\frac{y}{n}\right)\right) = F^n\left(\exp\left(\frac{x}{n}\right), \exp\left(\frac{y}{n}\right)\right) =$$

$$= \left(\exp\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \left(\exp\left(\frac{y}{n}\right)\right)^n = H(x, y) = \exp(x + y),.$$

$$\Delta_N(x, y) = \left| P\left(\hat{Z}_{N_n}{}^{(1)} < x, \hat{Z}_{N_n}{}^{(2)} < y\right) - \Psi(x, y) \right| = \left| F^n\left(G_{n1}(x), G_{n2}(y)\right) - \int_0^\infty H^z(x, y)\, dA(z) \right| =$$

$$= \left| e^{x+y} - \frac{1}{1 + e^{x+y}} \right|.$$

Taigi, paklaida yra fiksuota- nuo n nepriklauso. Tokiu atveju nėra prasmės ieškoti paklaidų įverčio.

2.3. KONVERGAVIMO ANALIZĖ NETIESINIO VEKTORIŲ MAKSIMUMŲ NORMAVIMO ATVEJU

Pateikiame teoremą, kuri parodo, kaip galima įvertinti konvergavimo (1.3.3) greitį. Esant tokiems atvejams, kai tiesinis normavimas netaikytinas, būtina teoremą suformuluoti ir įrodyti kai naudojame ne tiesinio normavimo konstantas, o netiesinę funkciją. Tuomet šią teoriją galime taikyti ir praktiniams uždaviniams.

7 teorema. *Tarkime, H(x,y) yra atsitiktinių vektorių* $\left(\hat{Z}_n^{(1)}, \hat{Z}_n^{(2)}\right)$ *ribinis skirstinys ir* $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} \le x\right) = A(x)$, *A(+0) = 0. Tuomet, visiems x ir y, tenkinantiems sąlygą* $\frac{u_n(x,y)}{n} \le \frac{1}{2}$, *teisingas įvertis:*

$$\Delta_N(x,y) \le \left(\frac{u^2{}_n(x,y)}{n} + \left|\rho_n(x,y)\right|\right) \cdot \int_0^\infty z\delta_n{}^z(x,y)dA_n(nz) + u(x,y) \cdot \int_0^\infty \left|A_n(nz) - A(z)\right| H^z(x,y)dz,$$

čia: $\delta_n(x,y) = \max\left(F^n\left(G_n^{(1)}(x), G_n^{(2)}(y)\right), H(x,y)\right)$, $\rho_n(x,y) = u_n(x,y) - u(x,y)$.

Teoremos įrodymas

$$\begin{aligned} &\left|P(\hat{Z}_n^{(1)} < x, \hat{Z}_n^{(2)} < y) - \Psi(x,y)\right| \le \left|P(\hat{Z}_n^{(1)} < x, \hat{Z}_n^{(2)} < y) - EH^{\frac{N_n}{n}}(x,y)\right| + \\ &+ \left|EH^{\frac{N_n}{n}}(x,y) - \Psi(x,y)\right| = I_n^{(1)}(x,y) + I_n^{(2)}(x,y). \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Įrodysime tik pirmąjį nelygybės dėmenį $I_n^{(1)}(x,y)$. Antrasis dėmuo įrodytas 3 teoremoje. Analogiškai, pritaikę pilnosios tikimybės formulę (Aksomaitis A., 2002)

$$\begin{aligned} &I_n^{(1)}(x,y) = \left|\sum_{j\ge1} F^j(G_{n1}(x), G_{n2}(y))P(N_n = j) - \sum_{j\ge1} H^{\frac{j}{n}}(x,y)P(N_n = j)\right| = \\ &= \left|\int_0^\infty F^{nz}(G_{n1}(x), G_{n2}(y))dA_n(nz) - \int_0^\infty H^z(x,y)dA_n(nz)\right| \le \\ &\le \int_0^\infty \left|F^{nz}(G_{n1}(x), G_{n2}(y)) - H^z(x,y)\right| dA_n(nz). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Kadangi

$$\begin{aligned} &\left|F^{nz}(G_{n1}(x), G_{n2}(y)) - H^z(x,y)\right| = z\left|\int_{H(x,y)}^{F^n(G_{n1}(x), G_{n2}(y))} t^{z-1}dt\right| \le \\ &\le z\left(\max\left(F^n(G_{n1}(x), G_{n2}(y)), H(x,y)\right)\right)^z \left|\ln F^n(G_{n1}(x), G_{n2}(y)) - \ln H(x,y)\right| \le \\ &\le z\delta_n{}^z(x,y)\left(\left|n\ln\left(1 - \frac{u_n(x,y)}{n}\right) + u_n(x,y)\right| + \left|u_n(x,y) - u(x,y)\right|\right), \end{aligned}$$

tai pasinaudojus nelygybe (2.2.3) gauname

$$\left|F^{nz}(G_{n1}(x), G_{n2}(y)) - H^z(x,y)\right| \le z\delta_n{}^z(x,y)\left(\frac{u^2{}_n(x,y)}{n} + \left|\rho_n(x,y)\right|\right), \tag{2.3.3}$$

su sąlyga, kad $\frac{u_n(x,y)}{n} \le \frac{1}{2}$.

Iš (2.3.2) ir (2.3.3) išplaukia, kad

$$I_n^{(1)}(x,y) \le \left(\frac{u^2{}_n(x,y)}{n} + |\rho_n(x,y)| \right) \int_0^\infty z\delta_n{}^z(x,y)dA_n(nz) .$$

Teoremos įrodymas išplaukia iš (2.3.1), (2.3.2) (2.3.3) ir (2.2.5).

Išvada. *Jei įvertinsime, kad*

$$\delta_n(x,y) = \max\left(F^n\left(G_{n1}(x), G_{n2}(y)\right), H(x,y)\right) \le 1 .$$

Tuomet ir $\delta^z{}_n(x,y) \le 1$. *Įverčio išraišką gauname paprastesnę:*

$$\Delta_N(x,y) \le \left(\frac{u^2{}_n(x,y)}{n} + |\rho_n(x,y)| \right) \cdot E\frac{N_n}{n} + u(x,y) \cdot \int_0^\infty |A_n(nx) - A(x)| H^z(x,y)dz. \tag{2.3.4}$$

6 teoremos 2 išvadą ir 1 teiginį taip pat galime nesunkiai pritaikyti netiesinio normavimo atveju.

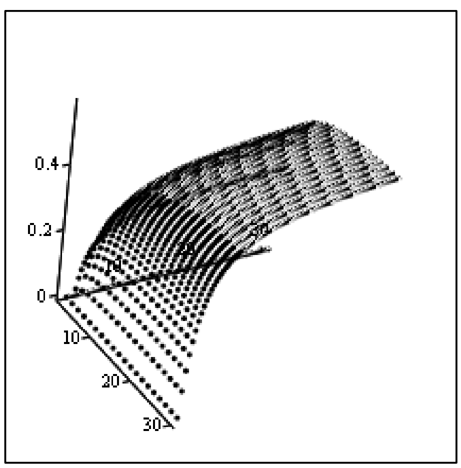
<u>2.3.1 pavyzdys</u> Nagrinėsime vektorius, kurių komponenčių vienmatės pasiskirstymo funkcijos yra log-Pareto (Falk M., 2010)

$$F_1(x) = 1 - \frac{1}{\ln x};\ F_2(y) = 1 - \frac{1}{\ln y}$$

$x \ge e; \quad y \ge e$.

Vektorių komponentės x ir y tarpusavyje yra priklausomos, vektoriai – nepriklausomi:

$$F(x,y) = 1 - \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln y} + \frac{1}{\ln x + \ln y - 1}; \quad x \ge e; \quad y \ge e.$$



2.3.1 pav. Dvimačio log-Pareto skirstinio grafikas priklausomų komponenčių atveju

1) Su normavimo funkcijomis: $G_{n1}(x) = \exp(x^\alpha n); G_{n2}(y) = \exp(y^\beta n),\ x > 0, y > 0,$ gauname, kad vienmačiai maksimumų ribiniai skirstiniai yra

$$P(Z_n^{(1)} \le G_{n1}(x)) \Rightarrow H_{1,\alpha}(x),$$

$$P(Z_n^{(2)} \le G_{n2}(y)) \Rightarrow H_{1,\beta}(y).$$

Ieškome vektorių maksimumų ribinio skirstinio.

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)} < x, \hat{Z}_n^{(2)} < y\right) = \left(1 - \frac{1}{x^\alpha n} - \frac{1}{y^\beta n} + \frac{1}{x^\alpha n + y^\beta n - 1}\right)^n \Rightarrow H(x, y).$$

Pagal (1.3.2) sąlygą:

$$u_n(x, y) = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ln\left(\exp(x^\alpha n)\right)} - \frac{1}{\ln\left(\exp(y^\beta n)\right)} + \frac{1}{\ln\left(\exp(x^\alpha n)\right) + \ln\left(\exp(y^\beta n)\right) - 1}\right)\right) =$$

$$n\left(\frac{1}{x^\alpha n} + \frac{1}{y^\beta n} - \frac{1}{x^\alpha n + y^\beta n - 1}\right) = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - n^{-1}};$$

$$u(x, y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, y) = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} = \frac{\left(x^\alpha + y^\beta\right)^2 - x^\alpha y^\beta}{x^\alpha y^\beta\left(x^\alpha + y^\beta\right)} = \frac{x^{2\alpha} + x^\alpha y^\beta + y^{2\beta}}{x^\alpha y^\alpha\left(x^\alpha + y^\beta\right)}.$$

Tuomet ribinė dvimatė pasiskirstymo funkcija yra:

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)} < x, \hat{Z}_n^{(2)} < y\right) \Rightarrow H(x, y) = \exp\left(-\frac{x^{2\alpha} + x^\alpha y^\beta + y^{2\beta}}{x^\alpha y^\beta\left(x^\alpha + y^\beta\right)}\right), x > 0; \quad y > 0.$$

Nagrinėkime paklaidas. Pažymime:

$$\overline{\Delta}_N(x, y) = \left|\left(1 - \frac{1}{x^\alpha n} - \frac{1}{y^\beta n} + \frac{1}{x^\alpha n + y^\beta n - 1}\right)^n - \frac{1}{\dfrac{x^{2\alpha} + x^\alpha y^\beta + y^{2\beta}}{x^\alpha y^\beta\left(x^\alpha + y^\beta\right)} + 1}\right|.$$

Įvertinkime konvergavimo greitį (2.3.4). Tam, pirmiausia apskaičiuojame įverčio dedamąją $\rho_n(x, y)$:

$$\rho_n(x, y) = u_n(x, y) - u(x, y) = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - n^{-1}} - \left(\frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta}\right) =$$

$$= \frac{1}{x^\alpha + y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - n^{-1}}.$$

Įvertis (2.3.4)

$$\Delta_N(x, y) \le \left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - n^{-1}}\right)^2 + \left|\frac{1}{x^\alpha + y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - n^{-1}}\right|\right) \cdot E\frac{N_n}{n} +$$

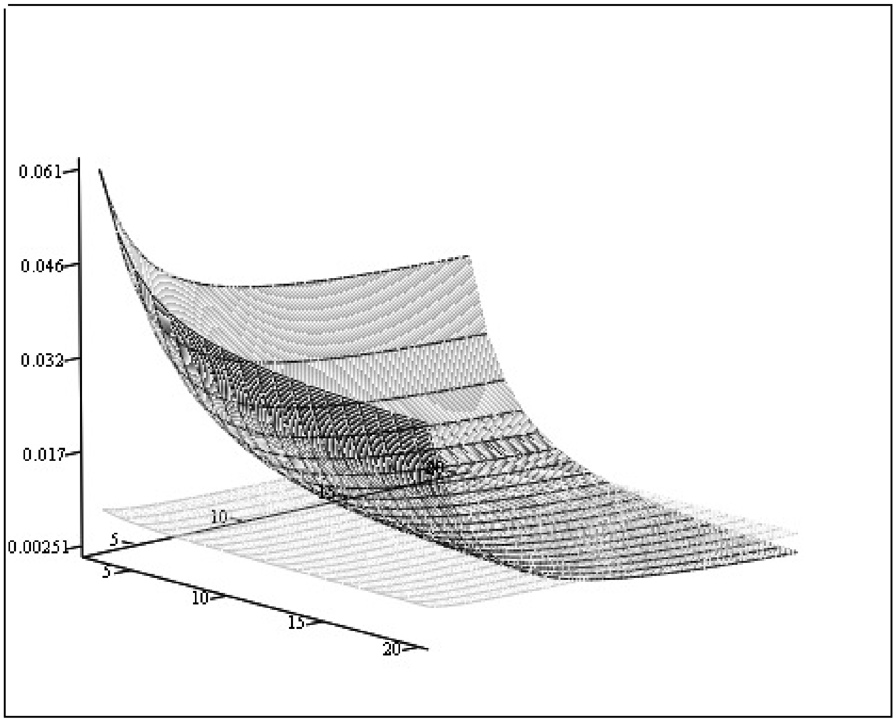
$$+\left(\frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta}\right) \cdot \frac{4e^{-2}}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{y^\beta} - \frac{1}{x^\alpha + y^\beta - n^{-1}}\right)^2 + \frac{1}{\left(x^\alpha + y^\beta - n^{-1}\right)\left(x^\alpha + y^\beta\right)} + \frac{4}{e^2}\right].$$

Įvertis teisingas tik jei tenkinama nelygybė (2.2.2):

$$\frac{1}{x^{\alpha}n}+\frac{1}{y^{\beta}n}-\frac{1}{x^{\alpha}n+y^{\beta}n-1}\leq\frac{1}{2}$$

Pasirenkame α = 1, β = 1. Analizuojant paklaidos (tamsusis grafikas) ir įverčio skirtumą, pastebime, kad įvertis gana tiksliai atspindi tikrąją paklaidą. Kai x >5, y > 5, o n > 30 skirtumas tarp grafikų yra 0,01 eilės, o kai x ir y mažesni (n > 10) bendrai galime pasakyti, kad skirtumas yra ne didesnis, nei 0,3. 2.3.2 paveiksle pateiktas atvejis, kai n = 100, 3<x<10, 3<y<10. Įverčio reikšmės labiau koncentruotos ir grafikas yra plokštesnis.



2.3.2 pav. Paklaidos log-Pareto skirstinio atveju, kai komponentės priklausomos, o ribiniai skirstiniai $H_1(x)$, $H_1(y)$

2) Su normavimo funkcijomis: $G_{n1}(x)=\exp(n\cdot\exp(x))$; $G_{n2}(y)=\exp(n\cdot\exp(y))$, $x\in R,\ y\in R$, gauname, kad:

$$P(Z_n^{(1)}\leq G_{n1}(x))\Rightarrow H_3(x),$$

$$P(Z_n^{(2)}\leq G_{n2}(y))\Rightarrow H_3(y).$$

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)}<x,\hat{Z}_n^{(2)}<y\right)=F^n\left(G_{n1}(x),G_{n2}(y)\right)=\left(1-\frac{1}{n\cdot\exp(x)}-\frac{1}{n\cdot\exp(y)}+\frac{1}{n\cdot\exp(x)+n\cdot\exp(y)-1}\right)^n\Rightarrow H(x,y)$$

$$u_n(x,y)=n\left(\frac{1}{n\cdot\exp(x)}+\frac{1}{n\cdot\exp(y)}-\frac{1}{n\cdot\exp(x)+n\cdot\exp(y)-1}\right)=\frac{1}{\exp(x)}+\frac{1}{\exp(y)}-\frac{1}{\exp(x)+\exp(y)-n^{-1}};$$

Pagal (1.3.2) sąlygą:

$$u(x,y)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,y)=\frac{1}{\exp(x)}+\frac{1}{\exp(y)}-\frac{1}{\exp(x)+\exp(y)}=$$

$$=\frac{\left(\exp(x)+\exp(y)\right)^2-\exp(x)\exp(y)}{\exp(x)\exp(y)\left(\exp(x)+\exp(y)\right)}=\frac{\exp(2x)+\exp(x)\exp(y)+\exp(2y)}{\exp(x)\exp(y)\left(\exp(x)+\exp(y)\right)};$$

Tuomet

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)}<x,\hat{Z}_n^{(2)}<y\right)\Rightarrow H(x,y)=\exp\left(-\frac{\exp(2x)+\exp(x)\exp(y)+\exp(2y)}{\exp(x)\exp(y)\left(\exp(x)+\exp(y)\right)}\right),\quad x\in R,\ y\in R.$$

Paklaida:

$$\overline{\Delta}_N(x,y)=\left|\left(1-\frac{1}{n\cdot\exp(x)}-\frac{1}{\exp(y)}+\frac{1}{n\cdot\exp(x)+n\cdot\exp(y)-1}\right)^n-\frac{1}{\dfrac{\exp(2x)+\exp(x)\exp(y)+\exp(2y)}{\exp(x)\exp(y)\left(\exp(x)+\exp(y)\right)}+1}\right|..$$

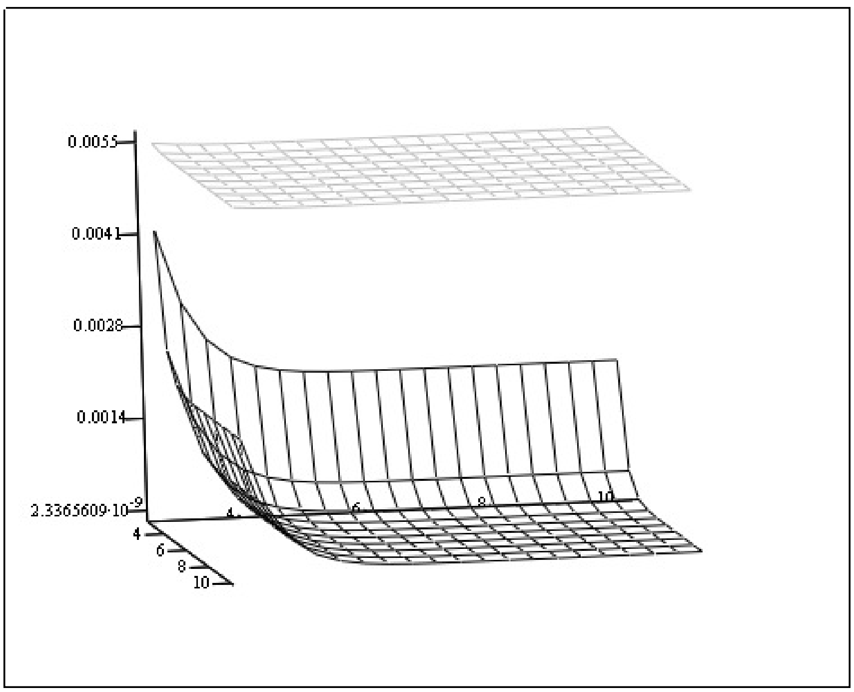
Vertiname konvergavimo greitį:

$$\Delta_N(x,y)\le\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{\exp(x)}+\frac{1}{\exp(y)}-\frac{1}{\exp(x)+\exp(y)-n^{-1}}\right)^2+\frac{1}{\exp(x)+\exp(y)-n^{-1}}\cdot\frac{1}{\exp(x)+\exp(y)}+\frac{4}{e^2}\right].$$

Įvertis teisingas tik jei tenkinama nelygybė:

$$\frac{1}{n\cdot\exp(x)}+\frac{1}{n\cdot\exp(y)}-\frac{1}{n\cdot\exp(x)+n\cdot\exp(y)-1}\le\frac{1}{2}$$

Skirtumus tarp įverčio ir paklaidos pavaizduosime grafiškai. 2.3.3 paveiksle pateiktas atvejis, kai n = 100, $e<x<10$, $e<y<10$, $\alpha=1$, $\beta=1$ Įverčio grafikas – šviesusis.



2.3.3 pav. Paklaidos log-Pareto skirstinio atveju, kai komponentės priklausomos, o ribiniai skirstiniai $H_3(x)$, $H_3(y)$

Iš atliktos palyginimo analizės galima daryti tokias išvadas: kai $x > 3,\ y > 3$, abu grafikai stabilizuojasi ties konkrečiomis reikšmėmis (su tam tikru tikslumu) ir skirtumas tarp jų yra 0,01 eilės, kai n yra mažas $10 < n < 60$ ir - 0,001 eilės, kai n yra didesnis ($n > 60$).

3) Su normavimo funkcijomis: $G_{n1}(x) = \exp(x^{\alpha} n);\ G_{n2}(y) = \exp(\exp(y)n),\ x > 0,\ y \in R$ gauname, kad:

$$P(Z_n^{(1)} \le G_{n1}(x)) \Rightarrow H_{1,\alpha}(x),$$

$$P(Z_n^{(2)} \le G_{n2}(y)) \Rightarrow H_3(y).$$

Ir

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)} < x, \hat{Z}_n^{(2)} < y\right) = F^n\left(G_{n1}(x), G_{n2}(y)\right) = \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha} n} - \frac{1}{\exp(y)n} + \frac{1}{x^{\alpha} n + \exp(y)n - 1}\right)^n \Rightarrow H(x, y)$$

Būtina ir pakankama sąlyga (1.3.2) tenkinama:

$$u_n(x, y) = n\left(\frac{1}{x^{\alpha} n} + \frac{1}{\exp(y)n} - \frac{1}{x^{\alpha} n + \exp(y)n - 1}\right) = \frac{1}{x^{\alpha}} + \frac{1}{\exp(y)} - \frac{1}{x^{\alpha} + \exp(y) - n^{-1}};$$

$$u(x, y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, y) = \frac{1}{x^{\alpha}} + \frac{1}{\exp(y)} - \frac{1}{x^{\alpha} + \exp(y)} = \frac{x^{2\alpha} + x^{\alpha}\exp(y) + \exp(2y)}{x^{\alpha}\exp(y)\left(x^{\alpha} + \exp(y)\right)};$$

Tuomet

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)} < x, \hat{Z}_n^{(2)} < y\right) \Rightarrow H(x, y) = \exp\left(-\frac{x^{2\alpha} + x^{\alpha}\exp(y) + \exp(2y)}{x^{\alpha}\exp(y)\left(x^{\alpha} + \exp(y)\right)}\right), x > 0, y \in R.$$

Paklaida

$$P_N(x, y) = \left|\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha} n} - \frac{1}{\exp(y)n} + \frac{1}{x^{\alpha} n + \exp(y)n - 1}\right)^n - \frac{1}{\dfrac{x^{2\alpha} + x^{\alpha}\exp(y) + \exp(2y)}{x^{\alpha}\exp(y)\left(x^{\alpha} + \exp(y)\right)} + 1}\right|$$

Įvertis:

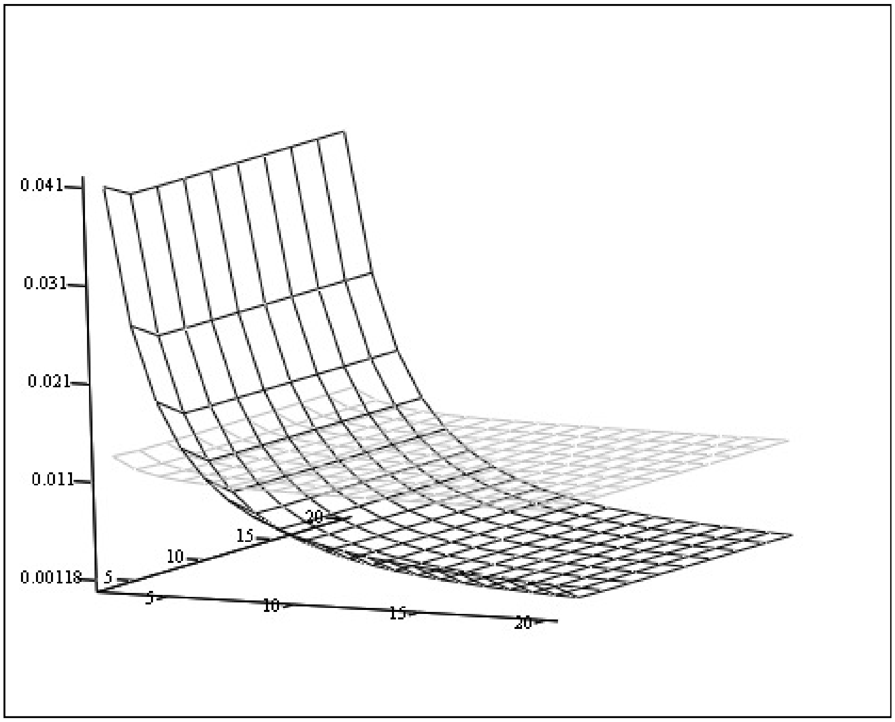
$$\Delta_n(x, y) \le \left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x^{\alpha}} + \frac{1}{\exp(y)} - \frac{1}{x^{\alpha} + \exp(y) - n^{-1}}\right)^2 + \left|\frac{1}{x^{\alpha} + \exp(y)} - \frac{1}{x^{\alpha} + \exp(y) - n^{-1}}\right|\right) \cdot E\frac{N_n}{n} +$$

$$+ \frac{4e^{-2}}{n} = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{x^{\alpha}} + \frac{1}{\exp(y)} - \frac{1}{x^{\alpha} + \exp(y) - n^{-1}}\right)^2 + \frac{4}{e^2} + \frac{1}{x^{\alpha} + \exp(y) - n^{-1}} \cdot \frac{1}{x^{\alpha} + \exp(y)}\right].$$

Įvertis teisingas tik jei tenkinama nelygybė:

$$\frac{1}{x^{\alpha} n} + \frac{1}{\exp(y)n} - \frac{1}{x^{\alpha} n + \exp(y)n - 1} \le \frac{1}{2}.$$

2.3.4 paveiksle pateiktas atvejis, kai n = 50, e<x<10, e<y<10, α = 1,β = 1. Įverčio grafikas (šviesusis) yra pastovesnis, koncentruojasi ties konkrečia reikšme. Kai x > 20, o y> 20, paklaidos grafikas stabilizuojasi ir skirtumas tarp grafikų neviršija 0,006.



2.3.4 pav. Paklaidos log-Pareto skirstinio atveju, kai komponentės priklausomos, o ribiniai skirstiniai H_1(x), H_3(y)

Matome, kad galime apibendrinti rezultatus. Su normavimo funkcijomis $G_{n1}(x)=\exp(w(x)\cdot n); G_{n2}(y)=\exp(v(y)\cdot n)$, su kuriomis

$$P(Z_n^{(1)}\le G_{n1}(x))\Rightarrow H_i(x)\,;\ P(Z_n^{(2)}\le G_{n2}(y))\Rightarrow H_j(y)\,,\ i,j=1,2,;$$

vektorių ribinė skirstinio funkcija yra

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)}<x,\hat{Z}_n^{(2)}<y\right)\Rightarrow H(x,y)=\exp\left(-\frac{w^2(x)+w(x)v(y)+v^2(y)}{w(x)v(y)\left(w(x)+v(y)\right)}\right).$$

Paklaida yra

$$\left|\left(1-\frac{1}{w(x)n}-\frac{1}{v(y)n}+\frac{1}{w(x)n+v(y)n-1}\right)^n-\frac{1}{\dfrac{w^2(x)+w(x)v(y)+v^2(y)}{w(x)v(y)\left(w(x)+v(y)\right)}+1}\right|=\overline{\Delta}_N(x,y).$$

Maksimumų skirstinio konvergavimo į ribinį skirstinį greičio įvertis užrašomas taip:

$$\Delta_N(x,y)\le\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{w(x)}+\frac{1}{v(y)}-\frac{1}{w(x)+v(y)-n^{-1}}\right)^2+\frac{4}{e^2}+\frac{1}{w(x)+v(y)-n^{-1}}\cdot\frac{1}{w(x)+v(y)}\right].$$

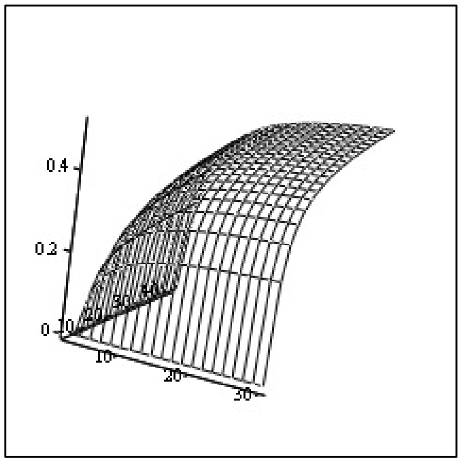
Įvertis teisingas tik jei tenkinama nelygybė:

$$\frac{1}{w(x)n}+\frac{1}{v(y)n}-\frac{1}{w(x)n+v(y)n-1}\le\frac{1}{2}.$$

Čia $w(x)=\begin{cases}x^{\alpha},\\ e^{x}.\end{cases}$ ir $v(y)=\begin{cases}y^{\alpha},\\ e^{y}.\end{cases}$ su atitinkamais kintamųjų apribojimais.

2.3.2. Pavyzdys Nagrinėsime vektorius, kurių komponenčių vienmatės pasiskirstymo funkcijos yra log-Pareto (2.3.1 pavyzdys), tačiau vektorių komponentės x ir y tarpusavyje yra nepriklausomos, vektoriai – nepriklausomi.

$$F(x,y)=1-\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln y}+\frac{1}{\ln x\cdot\ln y};\quad x\ge e;\quad y\ge e.$$



2.3.5. pav. Log-Pareto skirstinio funkcijos grafikas nepriklausomų komponenčių atveju

1) Su normavimo funkcijomis: $G_{n1}(x)=\exp(x^{\alpha}n);\,G_{n2}(y)=\exp(y^{\beta}n),\;x>0,\,y>0$:

$$P(Z_n^{(1)}\le G_{n1}(x))\Rightarrow H_{1,\alpha}(x);$$

$$P(Z_n^{(2)}\le G_{n2}(y))\Rightarrow H_{1,\beta}(y);$$

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)}<x,\hat{Z}_n^{(2)}<y\right)=\left(1-\frac{1}{\ln\left(\exp(x^{\alpha}n)\right)}-\frac{1}{\ln\left(\exp(y^{\beta}n)\right)}+\frac{1}{\ln\left(\exp(x^{\alpha}n)\right)\cdot\ln\left(\exp(y^{\beta}n)\right)}\right)^{n}\Rightarrow H(x,y)$$

Pagal sąlygą (1.4.2) gauname, kad

$$u_n(x,y)=n\left(1-\left(1-\frac{1}{\ln\left(\exp(x^{\alpha}n)\right)}-\frac{1}{\ln\left(\exp(y^{\beta}n)\right)}+\frac{1}{\ln\left(\exp(x^{\alpha}n)\right)\cdot\ln\left(\exp(y^{\beta}n)\right)}\right)\right)=$$

$$=n\left(\frac{1}{x^{\alpha}n}+\frac{1}{y^{\beta}n}-\frac{1}{x^{\alpha}y^{\beta}n^{2}}\right)=\frac{1}{x^{\alpha}}+\frac{1}{y^{\beta}}-\frac{1}{x^{\alpha}\cdot y^{\alpha}\cdot n};$$

$$u(x,y)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x^{\alpha}}+\frac{1}{y^{\alpha}}-\frac{1}{x^{\alpha}\cdot y^{\alpha}\cdot n}\right)=\frac{1}{x^{\alpha}}+\frac{1}{y^{\alpha}}=x^{-\alpha}+y^{-\alpha};$$

Tuomet

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)} < x, \hat{Z}_n^{(2)} < y\right) \Rightarrow H(x,y) = \exp\left(-x^{-\alpha} - y^{-\beta}\right) = H_{1,\alpha}(x)\cdot H_{1,\beta}(y) \quad x \ge 0; \quad y \ge 0\,.$$

Aproksimavimo paklaida:

$$P_N(x,y) = \left| \left(1 - \frac{1}{\left(x^{\alpha}n\right)} - \frac{1}{\left(y^{\beta}n\right)} + \frac{1}{\left(x^{\alpha}n\right)\cdot\left(y^{\beta}n\right)}\right)^n - \frac{1}{x^{-\alpha} + y^{-\alpha} + 1} \right|$$

Analizuojame konvergavimą.

$$\rho_n(x,y) = u_n(x,y) - u(x,y) = \frac{1}{x^{\alpha}} + \frac{1}{y^{\beta}} - \frac{1}{x^{\alpha}\cdot y^{\beta}\cdot n} - \left(\frac{1}{x^{\alpha}} + \frac{1}{y^{\beta}}\right) = -\frac{1}{x^{\alpha}\cdot y^{\beta}\cdot n}.$$

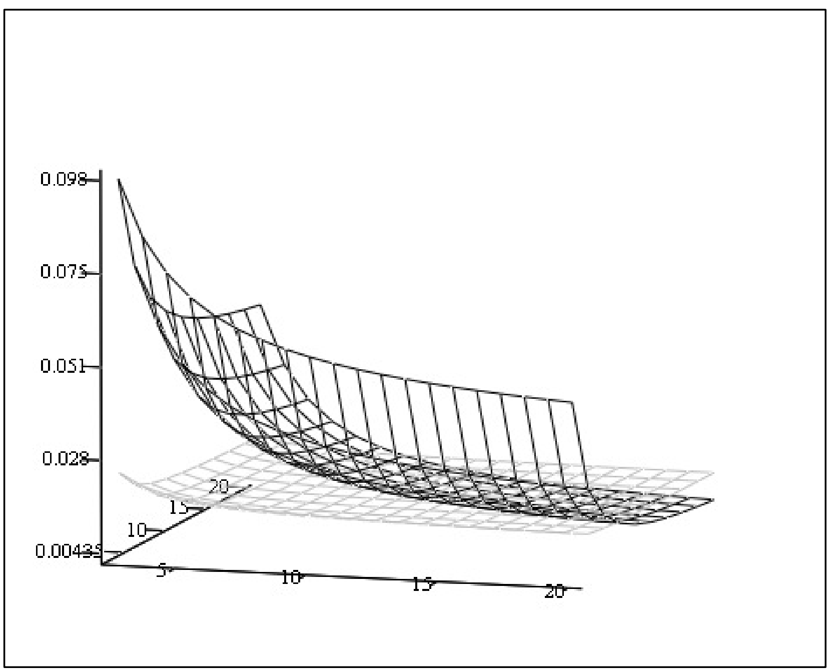
$$\Delta_n(x,y) \le \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{x^{\alpha}} + \frac{1}{y^{\alpha}} - \frac{1}{x^{\alpha}\cdot y^{\alpha}\cdot n}\right)^2 + \frac{1}{x^{\alpha}\cdot y^{\beta}} + \frac{4}{e^2}\right).$$

Konvergavimo greičio eilė n atžvilgiu yra 1/n.

Įvertis teisingas tik jei tenkinama nelygybė:

$$\frac{1}{x^{\alpha}n} + \frac{1}{y^{\beta}n} - \frac{1}{x^{\alpha}y^{\beta}n^2} \le \frac{1}{2}.$$

2.3.6 paveiksle pateiktas įverčio ir paklaidos (tamsusis grafikas) grafinis vaizdas, kai n = 100, $e < x < 20$, $e < y < 20$. Pasirenkame α = 1, β = 1. Šiuo atveju didžiausias skirtumas tarp grafikų reikšmių neviršija 0,1. Kai n < 15, šis skirtumas išauga iki 0,12. Kai parenkame reikšmes $x > 10$, $y > 10$ grafikai pasidaro plokštesni, tačiau skirtumas tarp grafikų sumažėja nežymiai iki 0,7.



2.3.6 pav. Paklaidos log-Pareto skirstinio atveju, kai komponentės nepriklausomos, o ribiniai skirstiniai H_1(x), H_1(y)

Analizuojame kitus atvejus tam, kad parodytume dėsningumą.

2) Su normavimo funkcijomis: $G_{n1}(x)=\exp(n\cdot\exp(x));\, G_{n2}(y)=\exp(n\cdot\exp(y))$, $x\in R,\ y\in R$:

$$P(Z_n^{(1)}\le G_{n1}(x))\Rightarrow H_3(x),$$

$$P(Z_n^{(2)}\le G_{n2}(y))\Rightarrow H_3(y);$$

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)}<x,\hat{Z}_n^{(2)}<y\right)=F^n\left(G_{n1}(x),G_{n2}(y)\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{\ln(\exp(n\cdot\exp(x)))}-\frac{1}{\ln(\exp(n\cdot\exp(y)))}+\frac{1}{\ln(\exp(n\cdot\exp(x)))\cdot\ln(\exp(n\cdot\exp(x)))}\right)^n\Rightarrow H(x,y)$$

Sąlyga (1.4.2) yra tenkinama:

$$u_n(x,y)=n\left(1-\left(1-\frac{1}{\ln(\exp(n\cdot\exp(x)))}-\frac{1}{\ln(\exp(n\cdot\exp(y)))}+\frac{1}{\ln(\exp(n\cdot\exp(x)))\cdot\ln(\exp(n\cdot\exp(x)))}\right)\right)=$$

$$=n\left(\frac{1}{n\cdot\exp(x)}+\frac{1}{n\cdot\exp(y)}-\frac{1}{n\cdot\exp(x)\cdot n\cdot\exp(y)}\right)=\frac{1}{\exp(x)}+\frac{1}{\exp(y)}-\frac{1}{\exp(x)\cdot\exp(y)\cdot n};$$

$$u(x,y)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,y)=\frac{1}{\exp(x)}+\frac{1}{\exp(y)}=e^{-x}+e^{-y};$$

Tuomet

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)}<x,\hat{Z}_n^{(2)}<y\right)\Rightarrow H(x,y)=\exp\left(-e^{-x}-e^{-y}\right)=H_3(x)\cdot H_3(y),\quad x\in R,\ y\in R.$$

Paklaida

$$\overline{\Delta}_N(x,y)=\left|\left(1-\frac{1}{(\exp(x))}-\frac{1}{(\exp(y))}+\frac{1}{(\exp(x)n)\cdot(\exp(y)n)}\right)^n-\frac{1}{e^{-x}+e^{-y}+1}\right|$$

$$\rho_n(x,y)=u_n(x,y)-u(x,y)=$$

$$=\frac{1}{\exp(x)}+\frac{1}{\exp(y)}-\frac{1}{\exp(x)\cdot\exp(y)\cdot n}-\frac{1}{\exp(x)}-\frac{1}{\exp(y)}=-\frac{1}{\exp(x)\cdot\exp(y)\cdot n}.$$

Ganame įvertį

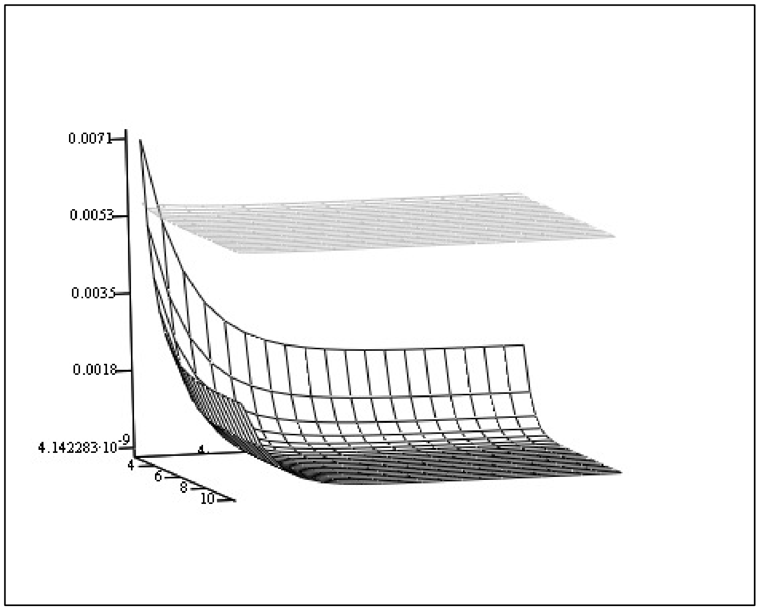
$$\Delta_n(x,y)\le\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\exp(x)}+\frac{1}{\exp(y)}-\frac{1}{\exp(x)\cdot\exp(y)\cdot n}\right)^2+\left|-\frac{1}{\exp(x)\cdot\exp(y)\cdot n}\right|\right)\cdot E\frac{N_n}{n}+\frac{4e^{-2}}{n}=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{\exp(x)}+\frac{1}{\exp(y)}-\frac{1}{\exp(x)\cdot\exp(y)\cdot n}\right)^2+\frac{1}{\exp(x)\cdot\exp(y)}+\frac{4}{e^2}\right),$$

kuris teisingas, tik jei tenkinama sąlyga

$$\frac{1}{n\cdot\exp(x)}+\frac{1}{n\cdot\exp(y)}-\frac{1}{n\cdot\exp(x)\cdot n\cdot\exp(y)}\le\frac{1}{2}$$

Skirtumus tarp įverčio ir paklaidos pavaizduosime grafiškai. 2.3.7 paveiksle pateiktas atvejis, kai n = 100, $e < x < 10, e < y < 10$. Pasirenkame α = 1, β = 1. Įverčio grafikas – šviesusis.. O palyginus su 2.3.1 pavyzdžio 2) atveju, kai turime tas pačias n, x ir y neigiamas reikšmes skirtumas tarp grafikų yra labai panašus. Kai n <15, skirtumas tarp grafikų išauga iki 0,06.



2.3.7 pav. Paklaidos log-Pareto skirstinio atveju, kai komponentės nepriklausomos, o ribiniai skirstiniai $H_3(x)$, $H_3(y)$

Iš visos atliktos analizės galima teigti, kad parametrų α, β parinkimas didelės įtakos paklaidoms ir jų įverčiui įtakos neturi. Apibendrinus, gauname, kad, jei

$$G_{n1}(x) = \exp(n \cdot v(x)); \; G_{n2}(y) = \exp(n \cdot w(y)),$$

su kuriomis

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)} < x, \hat{Z}_n^{(2)} < y\right) = \left(1 - \frac{1}{v(x) \cdot n} - \frac{1}{w(y) \cdot n} + \frac{1}{\cdot v(x) \cdot n \cdot w(y) \cdot n}\right)^n \Rightarrow H(x, y),$$

tuomet

$$u_n(x, y) = \frac{1}{v(x)} + \frac{1}{w(y)} - \frac{1}{v(x) \cdot w(y) \cdot n};$$

$u(x, y) = v(x)^{-1} + w(y)^{-1}$.

Čia $v(x) = \begin{cases} x^\alpha, \\ e^x. \end{cases}$ ir $w(y) = \begin{cases} y^\alpha, \\ e^y. \end{cases}$ su atitinkamais kintamųjų apribojimais.

Ribinė skirstinio funkcija yra

$$P\left(\hat{Z}_n^{(1)} < x, \hat{Z}_n^{(2)} < y\right) \Rightarrow H(x, y) = \exp\left(-v(x)^{-1} - w(y)^{-1}\right).$$

Konvergavimo greičio įvertis

$$\Delta_N(x, y) \le \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{v(x)} + \frac{1}{w(y)} - \frac{1}{v(x)\cdot w(y)\cdot n}\right)^2 + \frac{1}{v(x)\cdot w(y)} + \frac{4}{e^2}\right)$$

yra teisingas, jei tenkinama sąlyga

$$\frac{1}{v(x)n} + \frac{1}{w(y)n} - \frac{1}{v(x)\cdot w(y)\cdot n^2} \le \frac{1}{2}\cdot$$

Paklaidas gauname tokias:

$$\overline{\Delta}_N(x, y) = \left|\left(1 - \frac{1}{(v(x)n)} - \frac{1}{(w(y)n)} + \frac{1}{(v(x)n)\cdot(w(y)n)}\right)^n - \frac{1}{v^{-1}(x) + w^{-1}(y) + 1}\right|$$

DISKUSIJA

Šiame darbe yra patikslinami prof. dr. J.A.Aksomaičio gauti rezultatai (Aksomaitis A., 2008). Netolygusis konvergavimo greičio įvertis buvo gautas ir įrodytas atsitiktinio skaičiaus dvimačių vektorių maksimumams ir tiesinio ir netisinio normavimo atvejais.

Tyrimas buvo atliktas vektoriams, kurių komponenčių skaičius yra atsitiktinis. Šio skaičiaus skirstinį pasirinkome visiems atvejams vienodą – geometrinį skirstinį.

Nagrinėjant vektorių maksimumus įvertis tampa sudėtingesnis. Vienmačių maksimumų atveju nagrinėjamai funkcijai, kai taikome netiesinį normavimą, dėmuo $\rho_n(x) = 0$ (Dindienė L., 2009), tuo tarpu dvimačiu atveju - $\rho_n(x, y) \neq 0$ (priklausomų ir nepriklausomų komponenčių atveju). Todėl įverčio išraiška nesupaprastėja lyginant su vienmačiu atveju gautais rezultatais. Tam, kad galėtume įvertinti paklaidas praktiškai, tenka įvertį grubiau supaprastinti. Rezultate įverčio išraišką gauname tokią, kad vienas dėmuo tampa fiksuotas – nepriklausantis nuo kintamųjų x ir y.

Nagrinėjant dvimačius maksimumus, ribiniai jų skirstiniai jau nebetelpa į klasikinę schemą (Galambos J., 1984). Ribiniai skirstiniai tiesiškai normalizuotiems vienmačiams maksimumams gali būti tik trys, o netiesinio normavimo atveju tas jau nebegalioja (Pancheva E., 19). Vektorių maksimumų atveju tiek tiesiškai, tiek netiesiškai normuotiems maksimumams ribiniai skirstiniai nėra apibrėžti. Tai puikiai atsispindi šio darbo pavyzdžiuose.

Darbe nagrinėti Pareto ir logistinis skirstiniai, kuriems buvo taikomas tiesinis normavimas. Abiejų funkcijų atveju gavome, kad ribiniams skirstiniui komponenčių tarpusavio priklausomumas įtakos neturi – gauname tą patį ribinį skirstinį, kuriuo aproksimuojame maksimumų struktūrą. Tačiau tokio rezultato negavome nagrinėdami funkciją su sunkia „uodega“, kuriai yra taikytinas netiesinis maksimumų normavimas. Nepriklausomų komponenčių atveju ribinį skirstinį gavome iš klasikinės schemos, priklausomų – nežinomą. Taigi spręsti apie ribinį skirstinį iš komponenčių priklausomumo negalime. Gavę ribinę skirstinio funkciją priklausomų vektorių komponenčių atveju negalime sakyti, kad ji tokia bus, kai komponentes parinksime nepriklausomas.

Dauguma tyrimų ekstremalių reikšmių tematikoje yra atliekami atsitiktinėms sumoms. Normuotų vektorių maksimumų konvergavimas nėra plačiai analizuojamas. Tai, kad nėra publikacijų šia tema, paskatino atlikti tokią analizę.

IŠVADOS

- Logistinio ir Pareto skirstinio atveju ribinės skirstinio funkcijos išraiška nepriklauso nuo komponenčių tarpusavio (ne)priklausomumo.
- Logistinio, Pareto ir log-Pareto skirstinio atveju konvergavimo greičio eilė n atžvilgiu yra 1/n (visais atvejais).
- Log-Pareto skirstinio atveju komponenčių priklausomumas ribinei maksimumų skirstinio funkcijai įtakos turi – išraiška gaunama kitokia.
- Iš teoremos išplaukia, kad kai atsitiktinio skaičiaus skirstinys išsigimęs taške n, rezultatas pagerina ir apibendrina rezultatą, pateiktą A. Jokimaičio disertacijoje.

REKOMENDACIJOS

Šiame darbe atlikta dvimačių vektorių maksimumų konvergavimo analizė, kai jų skaičius yra atsitiktinis. Šio skaičiaus skirstiniu pasirinkome geometrinį skirstinį su parametru $p_n = \frac{1}{n}$. Platesnei maksimumų konvergavimo greičio įverčio analizei galima:

1) panagrinėti n-mačių vektorių maksimumų struktūrą;
2) įvertinti paklaidas, esant kitokiam atsitiktinio skaičiaus skirstiniui;
3) praktiškai įgyvendinant teoriją, sukurti įvairesnių vektorių skirstinio funkcijų, kurių komponentės būtų priklausomos;

Be viso to, būtų įdomu paanalizuoti minimumų struktūrą. Akivaizdu, kad tyrimas bus žymiai sudėtingesnis, kadangi vienmačių minimumų skirstinio funkcijos išraiška yra sudėtingesnė negu maksimumų struktūros.

PADĖKOS

Nuoširdžiai dėkoju magistro baigiamojo darbo vadovui prof.dr. J.A. Aksomaičiui už patarimus, paaiškinimus ir pataisymus, kurie buvo labai naudingi atliekant analizę.

Taip pat dėkoju doc. A. Jokimaičiui už pasiūlymus ir pagalbą ieškant literatūros.

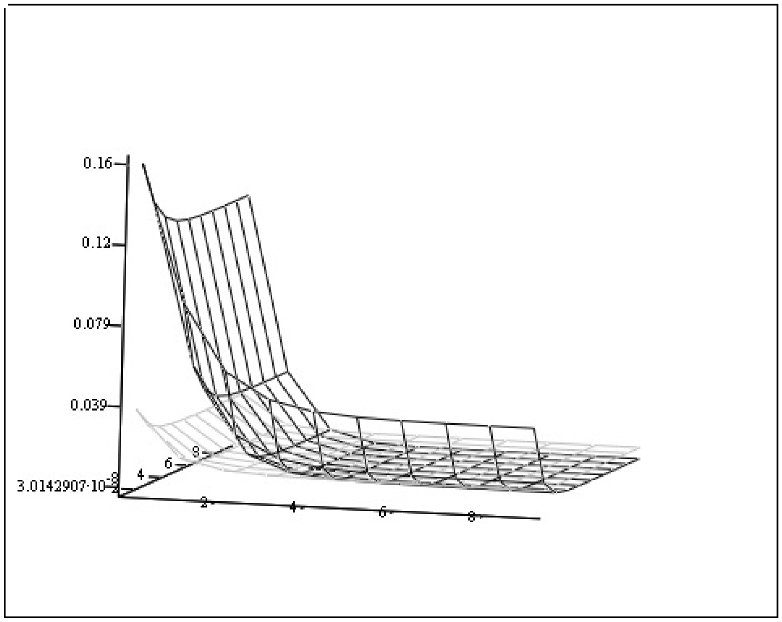
Literatūra

1. Aksomaitis A. Tikimybių teorija ir statistika;-Kaunas: Technologija, 2002;
2. Aksomaitis A. Estimation of Convergence Rate in the Transfer Theorem for Maxima. Iš Lana. 2008 kovas [žiūrėta 2011-04-20]. Prieiga per internetą: http://www.lana.lt/journal/issues.php;
3. Aksomaitis, J. A.; Pinkevičiūtė, L. The estimation of the convergence rate on the transfer theorem for max - scheme // XIIth ASMDA 2007 [elektroninis išteklius]: International Conference on Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA 2007), May 29, 30, 31 and June 1,2007, Chania, Crete, Greece: proceedings. ISSN . p. [1–5];
4. Dindienė L. Netiesiškai normuotų maksimumų analizė. Bakalauro darbas. KTU Fundamentaliųjų mokslų fakultetas, 2009;
5. Falk M., Hüsler R., Rolf D. Laws of Small Numbers: Extremes and Rare Events. 3rd ed., 2010, XVI, 135-157 psl. – [žiūrėta 2011-04-28]. Prieiga per internetą http://math.univ-lyon1.fr/~fougeres/alsemstat020627.pdf.
6. Галамбос Я.. Асимптотическая теория экстремалных порядковых статистик; - Москва : Наука, 1984, p. 9-42;
7. Гнеденко Б. В., Гнеденко Р. Б. О. Распределениях Лапласа и логистическом как предельных в теории вероятностей; - Сердика, 1982, т.8, с. 229-234;
8. Jokimaitis A. Daugiamačių atsitiktinių dydžių ekstremalių reikšmių asimptotika. Disertacija mokslų daktaro laipsniui. Vilnius, 1998;
9. Kotz S., Nadarajah S. Extreme Value Distributions: theory and applications; - London : Imperial College Press, 2000 ;
10. Leadbetter, M. R., Lindgren, G. and Rootz_en, H.Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. Springer, New York, 1983;
11. Marshall A.W., Olkin I. Domains of attractions of multivariate extreme value distributions. Ann. Probab. 1983, p. 168 – 177;
12. Pancheva E. Limit theorems for extreme order statistics under non-linear normalization. – Lecture Notes Math., 1985;
13. Pancheva E. General limit theorems for the maximum of independent random variables. Teor. Veroyatnost. i Primenen., 31:4 (1986), p. 730–744. –[žiūrėta 2011-04-26]. Prieiga per internetą http://www.mathnet.ru/links/f0cbe11f8b66d71c47454cd6a30256fb/tvp1681.pdf
14. Pancheva E., Mitov K.V., Nadarajah S. Nonlinear Normalization in Limit Theorems for Extremes. Extremes manuscript No. 11, 2000. – [žiūrėta 2011-04-28]. Prieiga per internetą

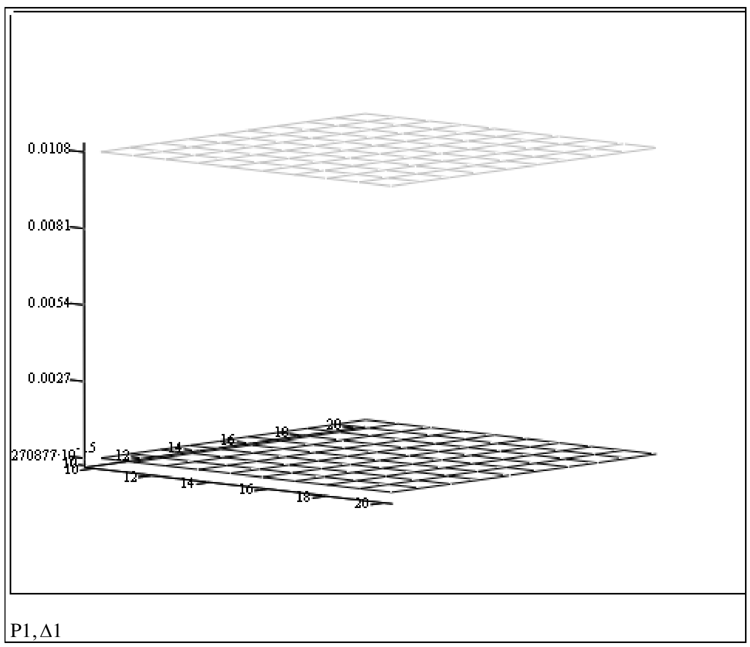
http://www.nada.kth.se/~dilian/Pancheva/paper14.pdf;

15. Resnick S.I. Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes. Springer, New York, 1987. –[žiūrėta 2011-04-29]. Prieiga per internetą http://www.google.com/books?hl=lt&lr=&id=co0pcjNEpasC&oi=fnd&pg=PR5&dq=Extreme+Values,+Regular+Variation,+and+Point+Processes&ots=u2VnU6codg&sig=z_uhLE4LRkg2mfMmFBWjyUjOUA8#v=onepage&q&f=false;
16. Peng Z., Jang Q., Nadarajah S. Limit Distributions of Extreme Order Statistics under Power Normalization and Random Index, 2010. – [žiūrėta 2011-04-28]. Prieiga per internetą http://www.mims.manchester.ac.uk/research/probability-statistics/research-reports/psrr20-2010.pdf
17. Tiago de Oliviera J. Statistical Extremes and applications. Reidel publishing company, 1984, p. 115-130;

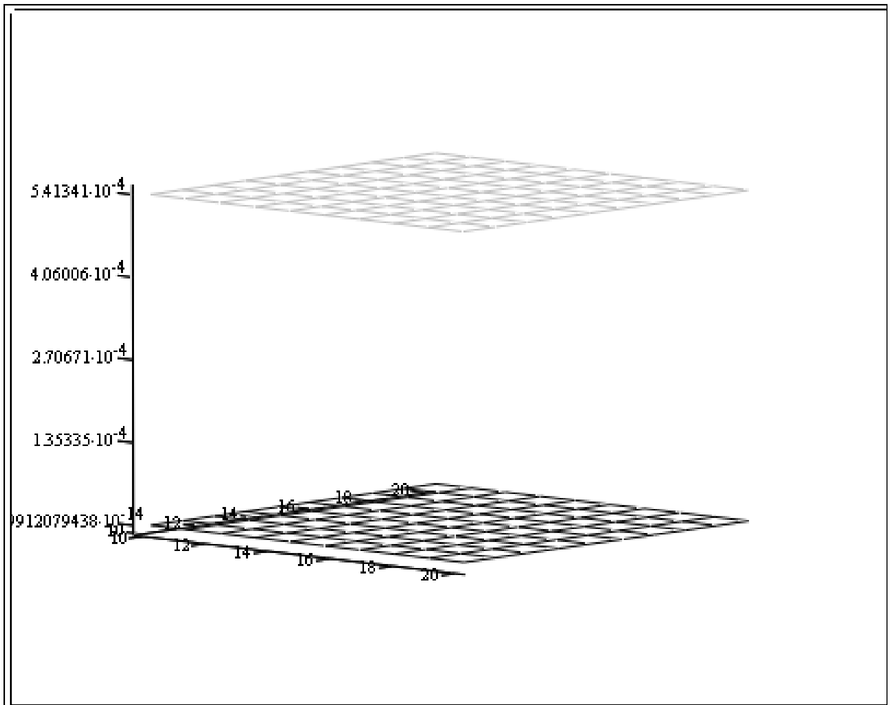
1 PRIEDAS. PAKLAIDŲ ĮVERČIO TYRIMAS LOGISTINIO SKIRSTINIO ATVEJU, KAI KOMPONENTĖS PRIKLAUSOMOS



1.1 pav. Paklaidos Logistinio skirstinio atveju, kai komponentės priklausomos, kai n=100; $0 < x < 8, 0 < y < 8$

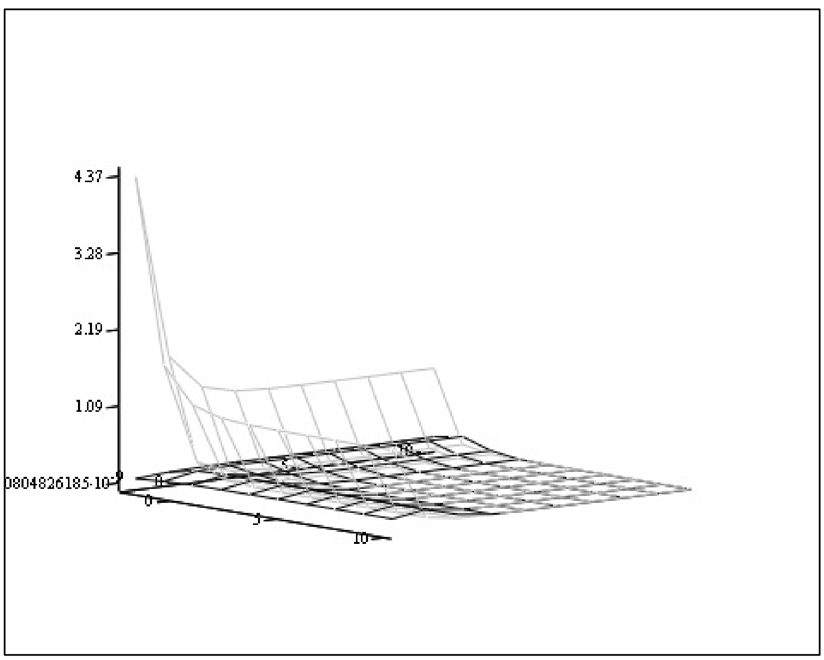


1.2 pav. Paklaidos Logistinio skirstinio atveju, kai komponentės priklausomos, kai n=50; $10 < x < 20, 10 < y < 20$



$P1, \Delta 1$

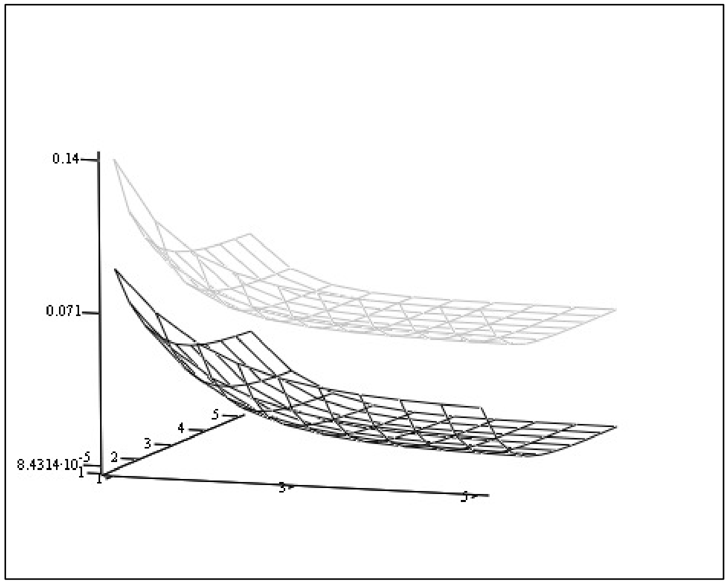
1.3 pav. Paklaidos Logistinio skirstinio atveju, kai komponentės priklausomos, kai n=1000; $10 < x < 20, 10 < y < 20$.



$P1, \Delta 1$

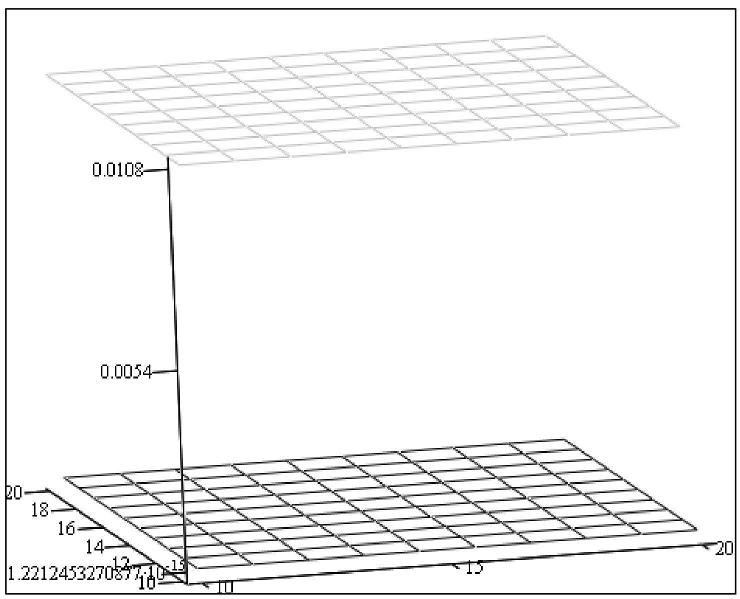
1.4 pav. Paklaidos Logistinio skirstinio atveju, kai komponentės priklausomos, kai n=1000; $-2 < x < 2, -2 < y < 2$.

2 PRIEDAS. PAKLAIDŲ ĮVERČIO TYRIMAS LOGISTINIO SKIRSTINIO ATVEJU, KAI KOMPONENTĖS NEPRIKLAUSOMOS



$P1, \Delta 1$

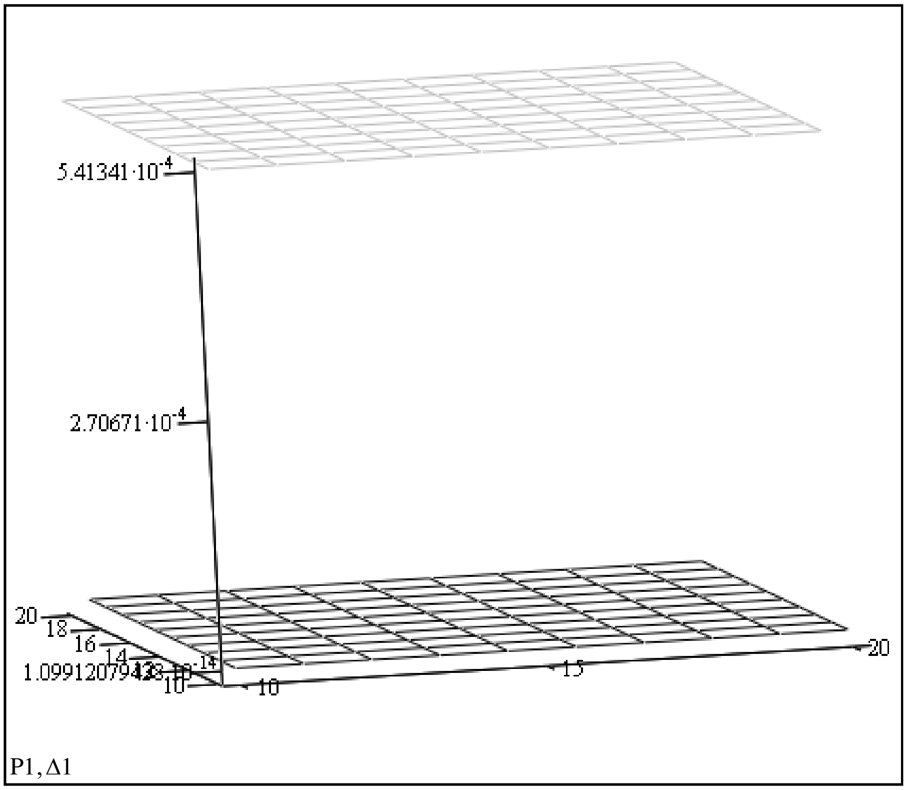
2.1 pav. Paklaidos Logistinio skirstinio atveju, kai komponentės nepriklausomos, kai n=10; $1 < x < 5, 1 < y < 5$



$P1, \Delta 1$

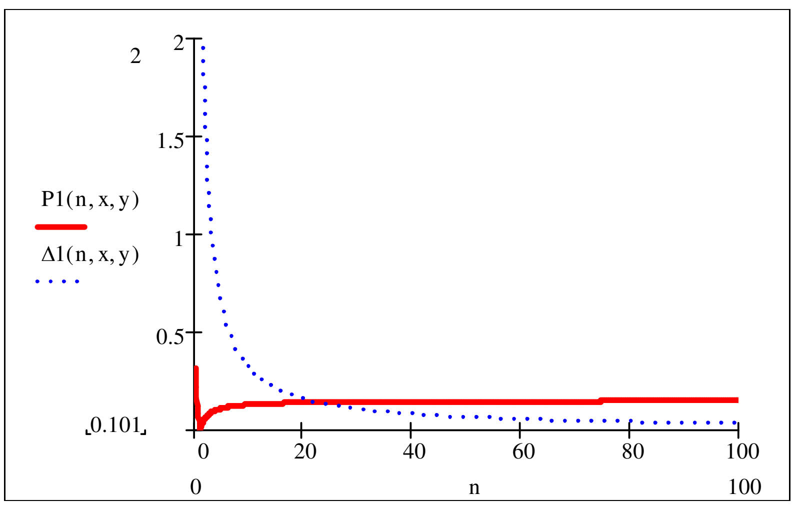
2.2 pav. Paklaidos Logistinio skirstinio atveju, kai komponentės nepriklausomos, kai n=50;

$10 < x < 20, 10 < y < 20$



2.3 pav. Paklaidos Logistinio skirstinio atveju, kai komponentės nepriklausomos, kai n=1000;

$10 < x < 20, 10 < y < 20$.



2.4 pav. Paklaidos Logistinio skirstinio atveju, kai komponentės nepriklausomos, kai n kintantis, x=0, y=2

3 PRIEDAS. PAKLAIDŲ ĮVERČIO TYRIMAS PARETO SKIRSTINIO ATVEJU

Tiksli paklaida

$$\Delta_N(x,y) = \left| P\left(\hat{Z}_{N_n}{}^{(1)} < x, \hat{Z}_{N_n}{}^{(2)} < y\right) - \Psi(x,y) \right| = \left| \left(\frac{1}{1 + x^{-\alpha} n^{-1} + y^{-\beta} n^{-1}} \right)^n - \frac{1}{x^{-\alpha} + y^{-\beta} + 1} \right| = P_N(x,y).$$

Ivertis

$$\Delta_n(x,y) \le \frac{1}{n} \left(\frac{\left(x^{-\alpha} + y^{-\beta}\right)^2 \left(2 + x^{-\alpha} n^{-1} + y^{-\beta} n^{-1}\right)}{\left(1 + x^{-\alpha} n^{-1} + y^{-\beta} n^{-1}\right)^2} + \frac{4}{e^2} \right)$$

$x := 1..5$ $\quad \alpha := 1$

$n := 100$

$y := 1..5$ $\quad \beta := 1$

$$P1(n,x,y) := \left| \left(\frac{1}{1 + \frac{x^{-\alpha}}{n} + \frac{y^{-\beta}}{n}} \right)^n - \frac{1}{x^{-\alpha} + y^{-\beta} + 1} \right|$$

$$\Delta 1(n,x,y) := \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{\left[\left(x^{-\alpha} + y^{-\beta}\right)^2 \cdot \left(2 + \frac{x^{-\alpha}}{n} + \frac{y^{-\beta}}{n}\right) \right]^2}{\left(1 + \frac{x^{-\alpha}}{n} + \frac{y^{-\beta}}{n}\right)^2} + \frac{4}{e^2} \right]$$

$P1(n,x,y) =$

0.195300366135588
0.174370555026405
0.162641564800626
0.155711186466456
0.151192136464852
0.174370555026405
0.130288787670873
0.10935305282826
0.097738241828984
0.090437526543467
0.162641564800626
0.10935305282826
0.085445742166979
0.072597241080252
0.064695717581597
0.155711186466456

$\Delta 1(n,x,y) =$

0.63292590652362
0.204931856936007
0.130175218381207
0.101867749702045
0.08737680122776
0.204931856936007
0.045018352021554
0.024544441663694
0.017975621407493
0.01495076667324
0.130175218381207
0.024544441663694
0.013262406473169
0.010018148178397
$8.63261083636352 \cdot 10^{-3}$
0.101867749702045

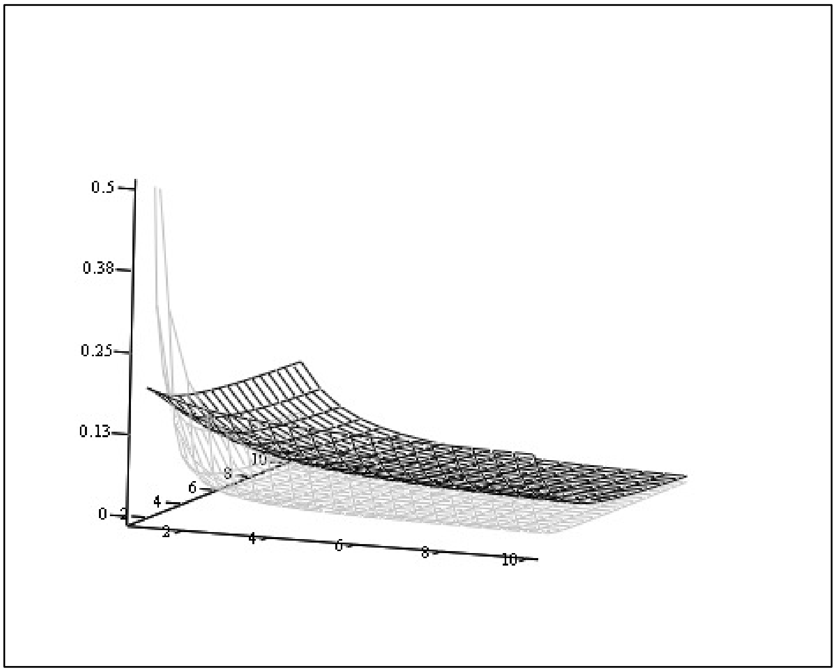
Salygos tikrinimas

$$\frac{x^{-\alpha} + y^{-\beta}}{n + x^{-\alpha} + y^{-\beta}} \le \frac{1}{2} \Rightarrow x^{-\alpha} + y^{-\beta} \le n$$

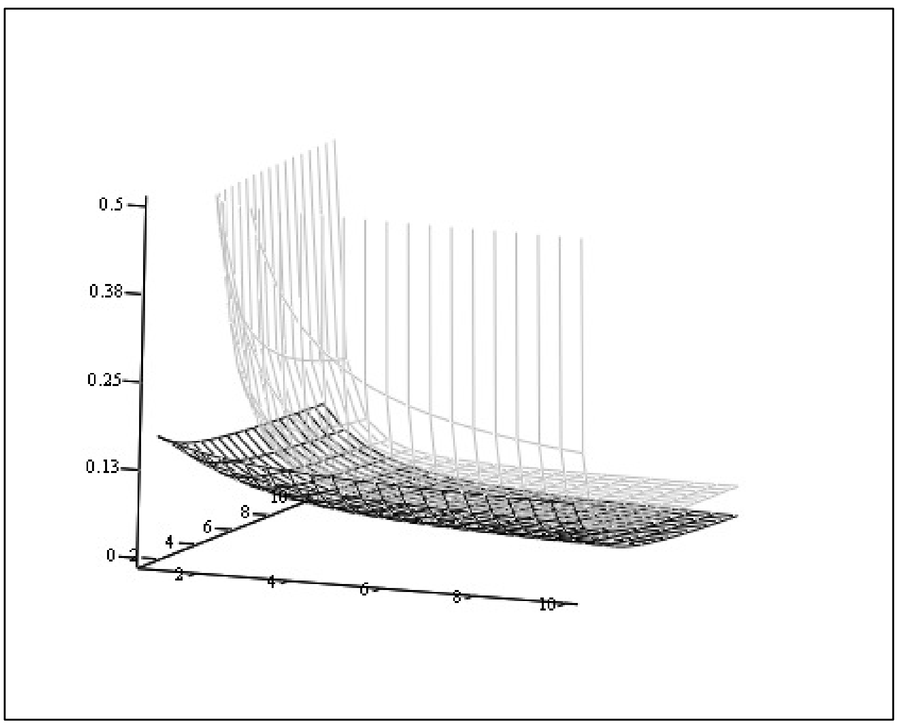
$x^{-\alpha} + y^{-\beta} =$

2
1.5
1.333
1.25
1.2
1.5
1
0.833
0.75
0.7
1.333
0.833
0.667
0.583
0.533
1.25

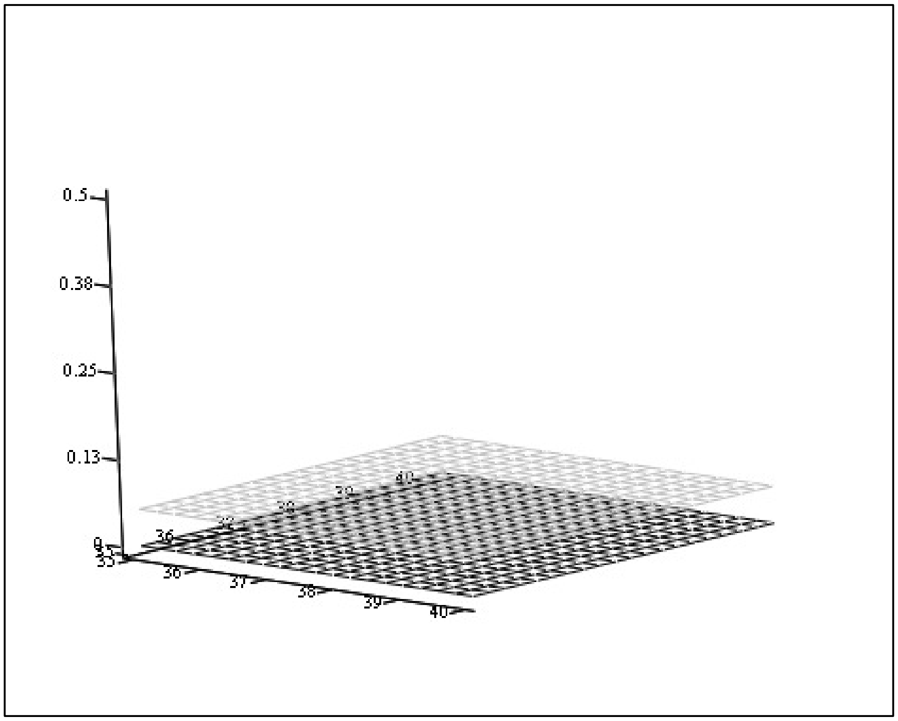
3.1 pav. Paklaidų skaičiavimas Pareto skirstinio atveju



3.2 pav. Paklaidos Pareto skirstinio atveju, kai komponentės priklausomos, n = 100, $1 < x < 10, 1 < y < 10$



3.3 pav. Paklaidos Pareto skirstinio atveju, kai komponentės priklausomos, n = 10, $1 < x < 10, 1 < y < 10$



3.4 pav. Paklaidos Pareto skirstinio atveju, kai komponentės priklausomos, n = 10, $35 < x < 40$, $35 < y < 40$

4 PRIEDAS. STRAIPSNIS

LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS. LMD DARBAI ISSN 0132-2818
51 tomas, 2010, 454–458 www.mii.lt/LMR/

Atsitiktinio skaičiaus vektorių maksimumų konvergavimo greičio įvertis

Lina Dindienė, Algimantas Aksomaitis

Kauno technologijos universitetas
Studentų g. 50, LT-51368 Kaunas
E. paštas: lina_dindiene@yahoo.com; algimantas.aksomaitis@ktu.lt

Santrauka. Šiame darbe nagrinėjame tiesiškai normalizuotų dvimačių atsitiktinio skaičiaus vektorių maksimumų struktūrą. Taikome perkėlimo teoremą, kurios pagalba gauname šios struktūros konvergavimo greičio įverčio išraišką. Pateikiame pavyzdį, iliustruojantį teorinę medžiagą. Šiame straipsnyje patikslinsime rezultatus, gautus [1] darbe.

Raktiniai žodžiai: stochastiniai maksimumai, perkėlimo teorema, konvergavimo greičio įvertis.

Įvadas

Tarkime $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n), \ldots$ – atsitiktinių, nepriklausomų vektorių seka, turinti vienodą skirstinio funkciją $F(x, y) = P(X_j \leqslant x, Y_j \leqslant y)$, $j \geqslant 1$. Apibrėžkime statistikas:

$$Z_n^{(1)} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n), \qquad Z_n^{(2)} = \max(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n),$$
$$\max\big((X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)\big) = \big(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}\big),$$
$$Z_{N_n}^{(1)} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_{N_n}), \qquad Z_{N_n}^{(2)} = \max(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_n}),$$
$$\max\big((X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_{N_n}, Y_{N_n})\big) = \big(Z_{N_n}^{(1)}, Z_{N_n}^{(2)}\big),$$

čia $N_1, N_2, \ldots, N_n$ teigiamų sveikųjų atsitiktinių dydžių seka, nepriklausanti nuo (X_j, Y_j), $j \geqslant 1$ ir

$$P(N_n \leqslant x) = A_n(x).$$

Nagrinėsime tiesiškai normalizuotus maksimumus:

$$\overline{Z}_n^{(1)} = b_n^{-1}\big(Z_n^{(1)} - a_n\big), \qquad \overline{Z}_n^{(2)} = d_n^{-1}\big(Z_n^{(2)} - c_n\big),$$
$$\overline{Z}_{N_n}^{(1)} = b_n^{-1}\big(Z_{N_n}^{(1)} - a_n\big), \qquad \overline{Z}_{N_n}^{(2)} = d_n^{-1}\big(Z_{N_n}^{(2)} - c_n\big).$$

$-\infty < a_n < +\infty$, $b_n > 0$, $-\infty < c_n < +\infty$, $d_n > 0$. Pažymėkime

$$u_n(x, y) = n\big(1 - F(xb_n + a_n, yd_n + c_n)\big). \tag{1}$$

Būtina ir pakankama silpnojo konvergavimo (visuose ribinio skirstinio tolydumo taškuose)

$$P\big(\overline{Z}_n^{(1)} < x, \overline{Z}_n^{(2)} < y\big) \quad \Rightarrow \quad H(x, y) \tag{2}$$

sąlyga yra [2]:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,y) = u(x,y).$$

Jei ši sąlyga tenkinama, $H(x,y) = e^{-u(x,y)}$ yra ribinis tiesiškai normalizuotų maksimumų skirstinys [2].

Pažymėkime:

$$\Delta_n(x,y) = \bigl|P\bigl(\overline{Z}^{(1)}_{N_n} \leqslant x, \overline{Z}^{(2)}_{N_n} \leqslant y\bigr) - \Psi(x,y)\bigr|,$$

čia $\Psi(x,y) = \int_0^\infty H^z(x,y)\,dA(z)$ ir $A(z) = \lim_{n\to\infty} P(\frac{N_n}{n} \leqslant z) = \lim_{n\to\infty} A_n(nz)$.

Rezultatai

Pateiksime teoremą, apibendrinančią rezultatą, esantį [1] publikacijoje.

1 teorema. *Tarkime $H(x,y)$ yra atsitiktinių vektorių $(\overline{Z}^{(1)}_{N_n}, \overline{Z}^{(2)}_{N_n})$ ribinis skirstinys ir $\lim_{n\to\infty} P(\frac{N_n}{n} \leqslant x) = A(x)$, $A(+0) = 0$. Tuomet, visiems x ir y, tenkinantiems sąlygą $\frac{u_n(x,y)}{n} \leqslant \frac{1}{2}$, teisingas įvertis:*

$$\begin{aligned}\Delta_n(x,y) \leqslant{}& \left(\frac{u_n^2(x,y)}{n} + \bigl|\rho_n(x,y)\bigr|\right) \cdot \int_0^\infty z\delta_n^z(x,y)\,dA_n(nz)\\ &+ u(x,y)\cdot \int_0^\infty \bigl|A_n(nz) - A(z)\bigr| H^z(x,y)\,dz,\end{aligned}$$

čia: $\delta_n(x,y) = \max(F^n(xb_n + a_n, yd_n + c_n), H(x,y))$, $\rho_n(x,y) = u_n(x,y) - u(x,y)$.

Teoremos įrodymas.

$$\begin{aligned}&\bigl|P\bigl(\overline{Z}^{(1)}_{N_n} \leqslant x, \overline{Z}^{(2)}_{N_n} \leqslant y\bigr) - \Psi(x,y)\bigr|\\ &\quad\leqslant \bigl|P\bigl(\overline{Z}^{(1)}_{N_n} \leqslant x, \overline{Z}^{(2)}_{N_n} \leqslant y\bigr) - EH^{\frac{N_n}{n}}(x,y)\bigr| + \bigl|EH^{\frac{N_n}{n}}(x,y) - \Psi(x,y)\bigr|\\ &\quad= I_n^{(1)}(x,y) + I_n^{(2)}(x,y). \end{aligned} \tag{3}$$

Iš pilnosios tikimybės formulės turime:

$$\begin{aligned}I_n^{(1)}(x,y) &= \left|\sum_{j\geqslant 1} F^j(xb_n + a_n, yd_n + c_n)P(N_n = j) - \sum_{j\geqslant 1} H^{\frac{j}{n}}(x,y)P(N_n = j)\right|\\ &= \left|\int_0^\infty F^{nz}(xb_n + a_n, yd_n + c_n)\,dA_n(nz) - \int_0^\infty H^z(x,y)\,dA_n(nz)\right|\\ &\leqslant \int_0^\infty \bigl|F^{nz}(xb_n + a_n, yd_n + c_n) - H^z(x,y)\bigr|\,dA_n(nz). \end{aligned} \tag{4}$$

Kadangi

$$\begin{aligned}
&\big|F^{nz}(xb_n + a_n, yd_n + c_n) - H^z(x,y)\big| \\
&\quad = z\bigg|\int_{H(x,y)}^{F^n(xb_n+a_n,yd_n+c_n)} t^{z-1}\,dt\bigg| \\
&\quad \leqslant z\big(\max\big(F^n(xb_n + a_n, yd_n + c_n), H(x,y)\big)\big)^z \\
&\qquad \times\big|\ln F^n(xb_n + a_n, yd_n + c_n) - \ln H(x,y)\big| \\
&\quad \leqslant z\delta_n^z(x,y)\left(\left|n\ln\left(1 - \frac{u_n(x,y)}{n}\right) + u_n(x,y)\right| + \big|u_n(x,y) - u(x,y)\big|\right),
\end{aligned}$$

tai pasinaudoję nelygybe

$$\big|\ln(1-t) + t\big| \leqslant t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2},$$

gauname

$$\big|F^{nz}(xb_n + a_n, yd_n + c_n) - H^z(x,y)\big| \leqslant z\delta_n^z(x,y)\left(\frac{u_n^2(x,y)}{n} + \big|\rho_n(x,y)\big|\right), \tag{5}$$

kai $\frac{u_n(x,y)}{n} \leqslant \frac{1}{2}$.

Iš (4) ir (5) išplaukia, kad

$$I_n^{(1)}(x,y) \leqslant \left(\frac{u_n^2(x,y)}{n} + \big|\rho_n(x,y)\big|\right)\int_0^\infty z\delta_n^z(x,y)\,dA_n(nz).$$

Toliau,

$$\begin{aligned}
I_n^{(2)}(x,y) &= \left|\int_0^\infty H^z(x,y)\,dA_n(nz) - \int_0^\infty H^z(x,y)\,dA(z)\right| \\
&= \left|\int_0^\infty H^z(x,y)\,d\big(A_n(nz) - A(z)\big)\right|.
\end{aligned}$$

Suintegravę dalimis, gauname

$$\begin{aligned}
I_n^{(2)}(x,y) &= \left|\int_0^\infty \big(A_n(nz) - A(z)\big)\,dH^z(x,y)\right| \\
&\leqslant u(x,y)\int_0^\infty \big|A_n(nz) - A(z)\big|H^z(x,y)\,dz.
\end{aligned} \tag{6}$$

Teoremos įrodymas išplaukia iš (3), (4) ir (5).

1 išvada. *Tarkime, egzistuoja EN_n. Tuomet,*

$$\begin{aligned}
\Delta_n(x,y) &\leqslant \left(\frac{u_n^2(x,y)}{n} + \big|\rho_n(x,y)\big|\right)\cdot E\frac{N_n}{n} \\
&\quad + u(x,y)\cdot\int_0^\infty \big|A_n(nx) - A(x)\big|H^z(x,y)\,dz.
\end{aligned}$$

Pavyzdys

Tarkime $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ – atsitiktinių, nepriklausomų vektorių seka, turinti logistinį skirstinį

$$F(x,y)=\frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}},\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

$\{N_n,\ n\geqslant 1\}$ turi geometrinį skirstinį su parametru $p_n=\frac{1}{n}$:

$$P(N_n=k)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1},\quad k=1,2,\ldots.$$

Su normalizavimo konstantomis $a_n=(\ln n,\ln n)$, $b_n=(1,1)$ gauname

$$P\left(\frac{Z_{N_n}^{(1)}-a_n}{b_n}<x,\frac{Z_{N_n}^{(2)}-c_n}{d_n}<y\right)=P\bigl(Z_{N_n}^{(1)}<\ln n+x,Z_{N_n}^{(2)}<\ln n+y\bigr)$$
$$\Rightarrow\quad H(x,y)=\exp\bigl(-e^{-x}-e^{-y}\bigr),\quad x,y\in\mathbb{R}.$$
$$\lim_{n\to\infty}A_n(nz)=A(z)=1-e^{-z},\quad z>0.$$

Teisingas įvertis:

$$\bigl|A_n(nx)-A(x)\bigr|\leqslant\frac{e^{-x}x^2}{n},$$
$$\sup_x\bigl|A_n(nx)-A(x)\bigr|\leqslant\frac{4e^{-2}}{n}.$$

Toliau:

$$u_n(x,y)=n\left(1-\frac{1}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}}\right)=\frac{n(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}},$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}u_n(x,y)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-x}+e^{-y}}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}}=e^{-x}+e^{-y}=u(x,y).\end{aligned}$$

Vertiname konvergavimo greitį:

$$\begin{aligned}\Delta_n(x,y)\leqslant{}&\left(\frac{(\frac{n(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}})^2}{n}+\left|\frac{e^{-x}+e^{-y}}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}}-(e^{-x}+e^{-y})\right|\right)\cdot 1\\&+\bigl(e^{-x}+e^{-y}\bigr)\int_0^{+\infty}\frac{4e^{-2}}{n}e^{-(e^{-x}+e^{-y})z}\,dz\\={}&\left(\frac{n(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})^2}{(1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})^2}+\left|\frac{-(e^{-x}+e^{-y})(e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n})}{1+e^{-x-\ln n}+e^{-y-\ln n}}\right|\right)\\&+\frac{4e^{-2}}{n}\cdot\bigl(e^{-x}+e^{-y}\bigr)\frac{e^{-(e^{-x}+e^{-y})z}}{\ln e^{-(e^{-x}+e^{-y})}}\bigg|_0^{+\infty}\\={}&\frac{2(e^{-x}+e^{-y})^2}{n}+\frac{4e^{-2}}{n}=\frac{2((e^{-x}+e^{-y})^2+2e^{-2})}{n}.\end{aligned}$$

Literatūra

[1] A. Aksomaitis. Estimation of convergence rate in the transfer theorem for maxima. *Nonlinear Analysis, Modeling and Control*, **13**(1):3–7, 2008.

[2] Ya. Galambosh. *Asimptoticheskaya teoriya ekstremalniyh poryadkoviyh statistik.* Nauka, Maskva, 1884 (rusų k.).

SUMMARY

The estimation of the convergence rate for maxima of random variables vectors

L. Dindienė, A Aksomaitis

Linearly normalized maxima of independent and identically distributed random vectors is presented in this work. We've obtained nonuniform estimate of convergence in case when normalization is linear. For clearness there is given an example is this paper. Transfer theorem was aplied.

Keywords: stochastic maxima, transfer theorem, rate of convergence.