



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

Aistė Vaigauskaitė

ĮVAIRIŲ TIPŲ DINAMINIŲ
SLOPINTUVŲ TAIKYMAS NETIESINĖMS
SISTEMOMS

Magistro darbas

Vadovas
doc. dr. G. Zaksienė

KAUNAS, 2006



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. habil.dr. V.Pekarskas
2006-06-06

ĮVAIRIŲ TIPŲ DINAMINIŲ
SLOPINTUVŲ TAIKYMAS NETIESINĖMS
SISTEMOMS

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Kalbos konsultantas
dr. J. Džežulskienė
2006-05-30

Recenzentas
doc.dr.
2006-06-01

Vadovas
doc. dr. G. Zaksienė
2006-06-03

Atliko
FMMM-4 gr. stud.
A. Vaigauskaitė
2006-05-25

KAUNAS, 2006

KVALIFIKCINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, profesorius, AB“ DnB NORD banko ” vyriausiasis analitikas

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

Vaigauskaitė A. The use of various type dynamic baffles for non-linear systems: Master's work in applied mathematics / supervisor doc. dr. G. Zaksienė; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. - Kaunas, 2006. - 48 p.

SUMMARY

The application of the dynamical baffles in the mechanical systems, when the sources of stimulation are impossible to abolish, is one of the ways to fight against the harmful vibrations.

The dynamical baffle of nonlinear systems can compensate the force of stimulation in wide diapason of frequency. The parameters of dynamical system where dynamical baffle exist effectively are determined.

Applying dynamic baffles to nonlinear systems it is very important to determine the values of system parameters which let the baffles operate most effectively. Investigating the nonlinear system it has been determined that a dynamic baffle frequency diapason in the nonlinear system is not always wider than that in the liner case. The ranges of nonlinear system parameters variation where the dynamic baffle is more effective than in the linear system have been defined.

The model of a dynamic baffle was applied for suppression of oscillations of the nonlinear mechanical systems. With the help of the baffle the system parameters were determined with the smallest possible amplitudes. The dynamic baffle own frequency is approximate to the frequency of system excitation in all cases.

TURINYS

KVALIFIKCINĖ KOMISIJA	3
PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS.....	6
ĮŽANGA.....	7
1.1 DINAMINIŲ SLOPINTUVŲ TAIKYMO APŽVALGA.....	8
1.2 KOKYBINIS NETIESINIŲ SISTEMŲ TYRIMAS	11
1.3 FRIKCINIS DINAMINIS SLOPINTUVAS	16
2. TIRIAMOJI DALIS	22
2.1 NETIESINIŲ SISTEMŲ PRIVERSTINIAI VIRPESIAI.....	22
2.1.1 DINAMINIŲ SLOPINTUVŲ TAIKYMAS NETIESINEI SISTEMAI SU ĮVERŽIMU	22
2.2 FRIKCINIO DINAMINIO SLOPINTUVO TAIKYMAS NETIESINEI SISTEMAI SU ĮVERŽIMU.....	28
2.3 DINAMINIO SLOPINTUVO TAIKYMAS SISTEMAI, KAI TAMPRUMO JĖGA LYGI $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$	33
IŠVADOS.....	40
LITERATŪRA	41
1. PRIEDAS. NETIESINĖS SISTEMOS SU ĮVERŽIMU AMPLITUDINĖS DAŽNINĖS CHARAKTERISTIKOS	42
2. PRIEDAS. FRIKCINIO DINAMINIO SLOPINTUVO TAIKYMAS NETIESINEI SISTEMAI SU ĮVERŽIMU.AMPLITUDINĖS DAŽNINĖS CHARAKTERISTIKOS	44
3. PRIEDAS. DINAMINIO SLOPINTUVO TAIKYMAS SISTEMAI, KAI TAMPRUMO JĖGA LYGI $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$.AMPLITUDINĖS DAŽNINĖS CHARAKTERISTIKOS ...	46

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1.1.pav. Netiesinės sistemos su įveržimu amplitudinės dažninės charakteristikos be dinaminio slopintuvo, kai parametrai parinkti tokie : $A=0,1$, $\mu=0,5$, $c=0,8$, $x_y=0,5$, $c_1=0,5$	42
1.2.pav. Netiesinės sistemos su įveržimu amplitudinės dažninės charakteristikos su dinaminio slopintuvu, kai parametrai parinkti tokie : $A=1$, $\mu=0,1$, $c=0,5$, $x_y=0,4$, $c_1=0,3$	42
1.3 pav. Netiesinės sistemos su įveržimu amplitudinės dažninės charakteristikos su dinaminio slopintuvu, kai parametrai parinkti tokie : $A=1$, $\mu=0,2$, $c=0,5$, $x_y=0,4$, $c_1=0,3$	43
1.4 pav. Netiesinės sistemos su įveržimu amplitudinės dažninės charakteristikos su dinaminio slopintuvu, kai parametrai parinkti tokie : $A=1$, $\mu=0,3$, $c=0,5$, $x_y=0,4$, $c_1=0,3$	43
2.1 pav. Netiesinės sistemos su frikciniu dinaminio slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai parametrai parinkti tokie : $\mu=0,8$, $a=0,8$, $x_y=0,4$, $\xi=0,1$	44
2.2 pav. Netiesinės sistemos su frikciniu dinaminio slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai parametrai parinkti tokie : $\mu=0,8$, $a=0,8$, $x_y=0,4$, $\xi=0,3$	44
2.3 pav. Netiesinės sistemos su frikciniu dinaminio slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai parametrai parinkti tokie : $\mu=0,8$, $a=0,6$, $x_y=0,4$, $\xi=0,5$	45
2.4 pav. Netiesinės sistemos su frikciniu dinaminio slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai parametrai parinkti tokie : $\mu=0,4$, $a=1$, $x_y=0,4$, $\xi=0,6$	45
3.1 pav. Netiesinės sistemos su slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai tamprumo jėga lygi $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$ ir parametrai parinkti tokie : $A=0,2$, $c=0,1$, $x_y=0,5$	46
3.2 pav. Netiesinės sistemos su slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai tamprumo jėga lygi $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$ ir parametrai parinkti tokie : $A=0,1$, $c=0,4$, $c_1=0,04$, $\mu=0,2$	46
3.3 pav. Netiesinės sistemos su slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai tamprumo jėga lygi $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$ ir parametrai parinkti tokie : $A=0,1$, $c=0,4$, $c_1=0,04$, $\mu=0,3$	47
3.4 pav. Netiesinės sistemos su slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai tamprumo jėga lygi $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$ ir parametrai parinkti tokie : $A=0,1$, $c=0,5$, $c_1=0,04$, $\mu=0,4$	47
3.5 pav. Netiesinės sistemos su slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai tamprumo jėga lygi $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$ ir parametrai parinkti tokie : $A=0,1$, $c=0,5$, $c_1=0,04$, $\mu=0,5$	48
3.6 pav. Netiesinės sistemos su slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai tamprumo jėga lygi $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$ ir parametrai parinkti tokie : $A=0,1$, $c=0,5$, $c_1=0,04$, $\mu=0,7$	48

IŽANGA

Tyrimo objektas.

Nagrinėjamos įvairios netiesinės sistemos, kurių tamprumo jėgos dalimis tiesinės. Harmoninės linearizacijos metodu surandami apytiksliai sprendiniai. Nepageidaujamų nusistovėjusių virpesių amplitudžių reguliavimui taikomi dinaminiai slopintuvai su trintim ir be jos.

Darbo tikslas.

– Surandami sprendiniai įvairioms dalimis tiesinėms sistemoms harmoninės linearizacijos metodu.

– Taikomas spyruoklinis dinaminis slopintuvas minėtoms sistemoms.

– Taikomas frikcinis dinaminis slopintuvas.

– Palyginamas abiejų tipų slopintuvų efektyvumas.

Praktinė svarba.

Nagrinėjami efektai, sutinkami precizinių prietaisų gamyboje, rotaciniuose mechanizmuose su tarpeliais kinematinėse porose, jungikliuose, krumpliniuose mechanizmuose.

Darbo struktūra.

Bendrojoje dalyje atlikta įvairių dinaminių slopintuvų taikymo netiesinėms sistemoms apžvalga. Nurodyti jų veikimo privalumai ir ribotumas. Pateikti esminiai netiesinių sistemų kokybiniai skirtumai nuo tiesinių sistemų. Pateiktas harmoninės linearizacijos metodas. Išanalizuotas frikcinio slopintuvo veikimo principas tiesinei sistemai.

Tiriamojame dalyje nagrinėjama netiesinė sistema, kurios tamprumo jėga dalimis tiesinė. Siekiant sumažinti arba panaikinti žalingus virpesius, taikomas spyruoklinis slopintuvas. Gaunamos amplitudinės dažninės charakteristikos. Nustatyti sistemos parametrai, su kuriais slopintuvas veikia efektyviausiai. Siekiant padidinti slopintuvo dažnio diapazoną, tai pačiai sistemai pritaikomas frikcinis dinaminis slopintuvas. Nustatyta optimali frikcinio dinaminio slopintuvo veikimo zona. Palyginami rezultatai. Nagrinėjama netiesinė sistema, kai tamprumo jėgos yra netiesinės diferencijuojamos funkcijos. Tokiai sistemai taikomas spyruoklinis ir frikcinis slopintuvas. Prieduose pateikiamos išnagrinėtų netiesinių sistemų amplitudinės dažninės charakteristikos.

1. BENDROJI DALIS

1.1 DINAMINIŲ SLOPINTUVŲ TAIKYMO APŽVALGA

Efektyvus būdas kovojant su žalingais virpesiais yra dinaminių slopintuvų taikymas mechaninėse sistemose. Dinaminiai slopintuvai turi tokį privalumą, kad jų naudojimas nereikalauja esminių konstrukcinių pakeitimų mašinos. Dinaminį virpesių slopintuvą sukūrė Framas 1909 metais. Slopintuvai yra dviejų tipų – be trinties ir su trintimi.

Virpesiai labai svarbūs mechanikoje, mašinų gamyboje, technologiniuose procesuose, statyboje ir kitose srityse. Reikia žinoti, kaip išvengti virpesių žalos rezonanso efekto kuriamose įrenginiuose, pastatuose ir statiniuose, kaip panaudoti virpesius įvairiems technologiniams procesams atlikti, naujoms vibracinėms sistemoms kurti ir eksploatuoti.

Žalingi virpesiai dažnai kelia tiesioginį pavojų svarbiems įrengimams, mašinoms ir jų dalims, pavyzdžiui, įvairioms mechaninėms pavaroms, turbinoms, lėktuvams, laivams, tiltams ir kitiems statiniams bei mechanizmams, gali sukelti net tų įrenginių ar statinių avarijas. Daug kam yra žinoma blogai sukonstruoto didžiulio Takomos tilto (JAV) griūtis nuo virpesių, sukeltų pastovaus vėjo greičio. Jūros bangų virpinami nuvargsta ir sulūžta metaliniai laivų korpusai, nuo flaterio subyra ore lėktuvai, lūžta ir gali sukelti sunkių padarinių virpesių nuvarginto metalo detalės, pavyzdžiui, sraigtasparnio sraigto rotatorius, vidaus degimo variklio alkūninis velenas ir kt.

Kitu atveju mechaniniai virpesiai trukdo normaliai eksploatuoti mašinas ir įrenginius, neleidžia technikai progresuoti vienoje ar kitoje srityje.

Matavimo prietaisų ir matavimo mašinų virpesiai mažina matavimo tikslumą ir našumą; rotatorinių mašinų sukimosi greičio didinimą riboja rotorų ir jų guolių atsparumas vibracijai. Lėktuvų, raketų, automobilių virpesiai trukdo juose sumontuotų prietaisų darbui; automobilio valdymo sistemose ir atskirų jo dalių virpesiai trukdo patikimai eksploatuoti visą sistemą. Nuo virpesių greičiau išdyla judamųjų sujungimų detalės. Be to virpesiai gali kenkti žmogaus sveikatai - sukelti vibracinę ligą, virpesių žadinimas - triukšmas išsukia akustinį nuovargį.

Technologinių procesų sparta, sudėtingos aparatūros taikymas padidina nepageidaujamų mechaninių poveikių įtaką mechanizmams. Įrenginių vibroaktyvumo sumažinimas pasiekiamas keičiant fizikinių – mechaninių, kartais ir cheminių procesų parametrus, mažinant tarpelius kinematinėse porose, atliekant mašinų rotorų dinaminį balansavimą ir inercijos jėgų išsvėrimą. Vienas iš būdų kvoti su žalingais virpesiais yra dinaminių slopintuvų taikymas, kai nekeičiama sistemos konstrukcija ir žadinimo šaltinio panaikinti negalima.

Pats paprasčiausias yra dinaminis neklampusis slopintuvas prijungtas spyruokle prie pagrindinės masės. Kai slopintuvo savasis dažnis sutampa su žadinimo dažniu, slopintuvas pagrindinę masę veikia

jėga, lygia žadinimo jėgai, bet priešingo ženklo. Slopintuvo masės virpesių amplitudė yra atvirkščiai proporcinga pačios masės dydžiui. Šiuo atveju slopintuvas sukelia antrojo dažnio rezonansą ir yra efektyvus tik siauroje dažnių juostoje. Dinaminis neklampusis slopintuvas yra naudojamas tik esant nusistovėjusiems žadinimo dažniams. Tokio tipo slopintuvai taikomi kintamos srovės generatoriuose, sinchroninių elektros variklių darbui sugeneruoti ir kt. Toks virpesių slopinimo būdas labai jautrus žadinimo dažnio pokyčiams. Smarkiai pasikeitus dažniui, galima sulaukti ir priešingo efekto – papildomo rezonanso aukštesniųjų dažnių srityje, todėl praktikoje virpesių slopinimo masės su objektu jungiamos dar ir per trinties elementus, kad būtų apribotos pereinamųjų procesų amplitudės, taip pat todėl, kad sistema nebūtų tokia jautri žadinimo dažnio pokyčiams. Esant trinčiai (slopinimui), pagrindinės masės virpesių jau nebeįmanoma visiškai pašalinti, tačiau jie išlieka maži pačioje dažnių juostoje. Naudojant mažas slopintuvo mases, galima nejungti spyruoklės, kaip jungiamąjį elementą paliekant tik trinties elementą. Vis dėlto pagrindinės masės virpesiai, kai dinaminio virpesių gesinimo sistemoje papildoma masė prijungiama per slopinimą ir spyruoklę, sumažinami labiau negu be spyruoklės.

Dinaminiai slopintuvai konstruojami panaudojant pasyviuosius elementus (masę, spyruoklę, dempferius) ir aktyviuosius, turinčius energijos šaltinius. Čia kalbama apie automatinį reguliavimą panaudojant efektyvius hidraulinius arba pneumatinius valdymo elementus. Labai sėkmingas abiejų atvejų panaudojimas. Naudojant aktyvius valdymo elementus, galima keisti slopintuvo parametrus, priklausomai nuo kintamo arba poliharmoninio žadinimo. Analogišką rezultatą galima pasiekti taikant netiesinį dinaminį slopintuvą. Šiuo atveju labai svarbus netiesiškumo pobūdis. Dinaminio slopintuvo reakciją į periodinį žadinimą sukelia subharmoninius ir superharmoninius virpesius ir tam tikro dažnio virpesių slopinimas bus tik dalinis, tai ypatingai liečia netiesinius slopintuvus. Spyruoklinių netiesinių slopintuvų superharmoniniai virpesiai nežymūs. Netiesinių slopintuvų standumo charakteristikos priklauso nuo žadinimo parametrų ir taip galima parinkti netiesiškumą, kad slopinimas vyktų plačiame dažnių diapazone.

Taikant netiesinius slopintuvus, reikia žinoti, kad parinkti optimalūs parametrai pasiteisins tik tuo atveju, kai bus išpildytos sprendinio egzistavimo, stabilumo sąlygos. Šiuo požiūriu efektyviausi smūginiai slopintuvai, kurie įgalina realizuoti plačiame dažnio diapazone vieno dažnio virpesius. Smūginį slopintuvą sudaro masė, smūgiuojanti pagrindinę masę, kurios virpesius reikia stabilizuoti. Dinaminiai slopintuvai su netiesinėmis standumo charakteristikomis pradėti taikyti praėjusiame amžiuje apie penkiasdešimtuosius metus [10, 8, 4, 1]. Standumo charakteristika priimta hiperbolinio sinuso pavidalu, naudojamas kubinis netiesiškumas. Netiesiškumas parinktas taip, kad geriau išryškėtų netiesinių virpesių savybės amplitudei sumažinti pavojingose sistemos zonose. Monografijose [2, 11]. Parodyta, kad netiesinis slopintuvas be trinties veikia platesniame dažnio diapazone negu tiesinis. Sprendžiant šį uždavinį taikyti tiek tikslūs, tiek artutiniai metodai.

Robersonas [10] taikė Diufingo metodą, kai slopintuvo charakteristika yra kubinė arba aprašoma hiperboliniu sinusu. Arnoldas [1] taikė Ritco vidurkinimo metodą. Bayer [3] taikė netiesinį slopintuvą, kai standumo charakteristika antro laipsnio ir veikia dvi žadinimo jėgos, turinčios skirtingus dažnius ir nustatė kombinacinių virpesių amplitudes.

Potiochinas [9] priėmė optimalią standumo charakteristiką konstantos pavidale, kuri leido nuslopinti pagrindinės harmonikos amplitudę visame dažnio diapazone.

Slopintuvai su dalimis tiesinėmis charakteristikomis bei apribojimais nagrinėti monografijoje [2]. Slopintuvai, kuriuose taikyta sausoji trintis, nagrinėti I.M. Feigino [13] darbuose.

Paskutiniaisiais metais didelis dėmesys skiriamas dinaminių slopintuvų taikymo sistemoms su išskirstytais parametrais. Naudojamas dinaminių slopintuvų sluoksnis, esant poliharmoniniam žadinimui. Strypo virpesius su dinaminių slopintuvų sluoksniu nagrinėjo V. L. Karamiškinas [5].

Slopintuvai turi užtikrinti virpesių slopinimą plačiame dažnių diapazone, būti valdomi, net kai dinaminės slopinamo objekto savybės nevisiškai žinomos. Tam tikslui skiriami reguliuojami slopintuvai: aktyvūs, kai parcialinis dažnis keičiasi priklausomai nuo žadinimo dažnio, taip pat save reguliuojantys slopintuvai, veikiantys plačiame dažnių diapazone. Aktyvūs slopintuvai taikomi laivų konstrukcijose [2], kai slopintuvo parametrai keičiasi, pakeičiant slopintuvo masės pritvirtinimo vietą, tokiu būdu, kad fazių skirtumas tarp pagrindinės masės ir slopintuvo sudarytų 90 laipsnių kampą.

Babickio ir V. I. Kobrinskio darbuose išnagrinėtas elektrodinaminis dempferis, kurio parametrai reguliuojami elektromagnetinio lauko pagalba. Patys paprasčiausi save reguliuojantys slopintuvai yra švytuokliniai, taikomi valu sukamų virpesių amplitudžių mažinimui. Jie išnagrinėti Ostapovo darbuose.

Nors netiesinis slopintuvas veikia platesnėje dažnio juostoje, negu tiesinis, vis dėlto netiesinėms sistemoms paprasčiau taikyti tiesinius slopintuvus su trintimi arba be jos ir palyginti abiejų tipų slopintuvų efektyvumą skirtingų tipų netiesinėms sistemoms.

1.2 KOKYBINIS NETIESINIŲ SISTEMŲ TYRIMAS

Panagrinėkime esminius skirtumus tarp tiesinių ir netiesinių sistemų. Tiesinės lygties $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ energijos integralas lygus:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = C, \quad (1.2.1)$$

kur C – konstanta. Fazinės trajektorijos plokštumoje (X, \dot{X}) gaunamos iš energijos integralo. Tai vienparametrinių kreivių šeima, priklausanti nuo konstantos C . Visos fazinės trajektorijos yra uždaros kreivės. Tai reiškia, kad nagrinėjamos lygties sprendiniai periodiniai. Periodas $T = \frac{2\pi}{\omega}$ nepriklauso nuo sistemos energijos. Svyravimų amplitudė – maksimalus atsilenkimas nuo pusiausvyros padėties, kai $\dot{x} = 0$ bus lygi

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2C}{\omega^2}}.$$

Tokiu būdu svyravimų periodas T ir maksimalus atsilenkimas (amplitudė) nepriklauso vienas nuo kito. Tokia tiesinių sistemų savybė vadinama izochroniškumu.

Nagrinėkime vieną paprasčiausių lygčių – Diufingo lygtį:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \mu x^3 = 0.$$

Energijos integralas turės pavidalą:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \pi = C,$$

kur π - potencinė energija:

$$\pi = \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\mu x^4}{4}.$$

Tegu $\mu > 0$ ir $\omega^2 > 0$. Šiuo atveju fazinę plokštumą sudaro uždaros fazinės trajektorijos t.y. sprendiniai bus periodiniai. Tokiu atveju, fazinė plokštuma bus identiška tiesiniam atvejui, bet periodas priklauso nuo amplitudės. Tokia netiesinių sistemų savybė vadinama neizochroniškumu.

Jei $\mu < 0$, fazinė plokštuma skiriasi nuo tiesinio atvejo. Šiuo atveju Diufingo lygtis periodinių sprendinių neturi.

Netiesinių virpesių atveju, keičiantis amplitudei, keičiasi ir nuosavas dažnis. Kai standumo charakteristika $f(x)$ simetrinė, laisvųjų virpesių amplitudės – dažninės charakteristikos priklausomybė nuo savojo dažnio atrodo taip:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} : \int_0^A \frac{dq}{\sqrt{\int_0^A f(q) dq}}. \quad (1.2.2)$$

Kita netiesinių virpesių savybė yra priverstinių virpesių amplitudinės dažninės charakteristikos nevienareikšmiškumas: vienam ir tam pačiam dažniui egzistuoja skirtingos amplitudės. Skirtingas amplitudės elgesys ir esant rezonanso atveju. Tiesiniu atveju amplitudė neapibrėžtai didėja, vienai dažnio reikšmei atitinka viena amplitudės reikšmė. Netiesinių virpesių atveju keičiantis amplitudei, keičiasi ir nuosavas dažnis. Tokiu būdu gali egzistuoti nusistovėję periodiniai sprendiniai, turintys baigtinę amplitudę. Dar viena netiesinių virpesių savybė yra priverstinių virpesių amplitudinės dažninės charakteristikos nevienareikšmiškumas, t.y. vienai dažnio reikšmei egzistuoja skirtingų dydžių amplitudės.

Netiesinėse sistemose superpozicijos principas negalioja:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = h_1(t) + h_2(t), \quad (1.2.3)$$

jei $\ddot{x}_1 + f(x_1, \dot{x}_1) = h_1(t)$, $\ddot{x}_2 + f(x_2, \dot{x}_2) = h_2(t)$, tai $x \neq x_1 + x_2$.

Kitas svarbus netiesinių sistemų skirtumas nuo tiesinių yra subharmoninių ir superharmoninių virpesių egzistavimas veikiant harmoninio žadinimo jėgai. Tegu žadinimo jėgos dažnis ω . Netiesinėje sistemoje veikiant ω dažnio žadinimo jėgai gali atsirasti virpesių, kurių dažnis $m\omega$ (m – sveikas skaičius). Tokie virpesiai vadinami superharmoniniais. Be pagrindinių virpesių, kurių dažnis ω ir superharmoninių virpesių, sistemose su netiesine standumo charakteristika, gali egzistuoti subharmoniniai virpesiai, kurių dažnis $\frac{\omega}{n}$. Subharmoninių virpesių amplitudė a_3 gali būti didesnė už pagrindinių virpesių amplitudę a_1 . Kai slopinimas didelis

subharmoniniai virpesiai gali visai išnykti. Subharmoniniai ir superharmoniniai virpesiai yra atskiras atvejis kombinacinių rezonansų, kurių dažnis $\frac{m\omega}{n}$ (m, n – sveikieji skaičiai).

Pagrindinė šiuolaikinės netiesinių virpesių teorijos kryptis yra netiesinių analitinių ir pusiau – analitinių metodų tobulinimas.

Harmoninės linearizacijos metodas remiasi harmoninio balanso metodu. Harmoninio balanso metodo idėja priklauso N. M. Krylovui ir N. N. Bogoliubovui. Šiuo metu harmoninio balanso metodas yra vienas iš plačiausiai taikomų artutinių metodų periodiniams sprendiniams nustatyti netiesinėse sistemose.

Jei nagrinėjant kokią nors sistemą nesvarbi pereinamųjų procesų analizė, galima naudotis harmoninio balanso metodu kuriuo surandami stacionarūs lygčių sprendiniai ir kuris faktiškai yra atskiras lėtai kintančios amplitudės metodo atvejis. Harmoninio balanso metodas pagrįstas tuo, kad nepaisant netiesiškumų, nusistovėję virpesiai sistemose su tam tikromis sąlygomis būna artimi harmoniniams.

Tegu sistemos judesys aprašomas lygtimi:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F(t), \quad (1.2.4)$$

kur $f(x, \dot{x})$ – tam tikra netiesinė funkcija; $F(t)$ – periodinė laiko funkcija su periodu $T = 2\pi/\omega$, išskleista Furjė eilutė:

$$F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t).$$

Tarkime, kad lygtis (1.2.4) turi periodinį sprendinį su periodu T , išskleistą Furjė eilute:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + \beta_n \sin n\omega t). \quad (1.2.5)$$

Įstatę išraišką (1.2.5) į (1.2.4) lygtį ir tarę, kad funkciją $f(x(t), \dot{x}(t))$ tenkina Dirichlė teoremos sąlygas, ją išskleidžiame Furjė eilute:

$$f(x(t), \dot{x}(t)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + \beta_n \sin n\omega t).$$

Kur a_0, a_n, β_n - Furjė išdėstymo koeficientai:

$$a = a_0(a_0, a_1, b_1, \dots) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x(t), \dot{x}(t)) dt;$$

$$a_n = a_n(a_0, a_1, b_1, \dots) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x(t), \dot{x}(t)) \cos n\omega t dt; \quad (1.2.6)$$

$$\beta_n = \beta(a_0, a_1, b_1, \dots) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x(t), x(t)) \sin n\omega t dt;$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

Įstatę $f(x, x)$, $F(t)$, $x(t)$ Furjė eilutės sprendinius į pradinę lygtį, gauname išraišką, susidedančią iš narių su $\sin n\omega t$ ir $\cos n\omega t$. Lygindami koeficientus prie $\sin n\omega t$ ir $\cos n\omega t$ atskirai abiejose gautose lygybės pusėse, gauname lygčių sistemą koeficientams a_n ir b_n nustatyti:

$$a_0 = A_0;$$

.....

$$n^2 \omega^2 a_n = a_n(a_0, a_1, b_1, \dots) - A_n; \quad (1.2.7)$$

$$n^2 \omega^2 b_n = \beta_n(a_0, a_1, b_1, \dots) - B_n.$$

(1.2.7) sistemos sprendimas taip pat ir tikslus sistemos (1.2.4) sprendinio radimas daugeliu atveju yra sudėtingas. Tačiau, jeigu tarsime, kad dominuojančios sprendinyje yra pastovioji sudaromoji ir pilnoji harmonika, tai artutinio sprendimo galima ieškoti tokiu pavidalu:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \cos \omega t + \tilde{b}_1 \sin \omega t. \quad (1.2.8)$$

Tada vietoj (1.2.7) sistemos gauname tokias tris lygybės koeficientams \tilde{a}_0 , \tilde{a}_1 , \tilde{b}_1 nustatyti:

$$\tilde{a}_0(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1) = A_0;$$

$$\tilde{a}_1 \omega^2 = \tilde{a}_1(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1) - A_1;$$

$$\tilde{b}_1 \omega^2 = \tilde{\beta}_1(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1) - B_1.$$

Čia funkcijos \tilde{a}_0 , \tilde{a}_1 , $\tilde{\beta}_1$ yra iš išraiškų (1.2.6), kuriose vietoj $x(t)$ įstatyta $\tilde{x}(t)$ pagal (1.2.8). Šios išraiškos gali būti supaprastintos, jeigu prisiminsime, kad sprendinys (1.2.8) turi tokį pavidalą:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{a}_0 + \tilde{a} \sin \omega t, \quad (1.2.9)$$

o žadinimo jėga:

$$f(t) = A_0 + A \sin(\omega t - \tilde{\epsilon}).$$

Tada koeficientai $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1$ randami iš lygčių:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0 &= \tilde{\alpha}_0(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha} \sin \tau, \tilde{\alpha} \omega \cos \tau) d\tau; \\ \tilde{\alpha}_1 &= \tilde{\alpha}_1(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha} \sin \tau, \tilde{\alpha} \omega \cos \tau) \cos \tau d\tau; \\ \tilde{\beta}_1 &= \tilde{\beta}_1(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha} \sin \tau, \tilde{\alpha} \omega \cos \tau) \sin \tau d\tau; \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

o lygtys nežinomiesiems $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\epsilon}$ nustatyti yra tokio pavidalo:

$$\tilde{\alpha}_0(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}) = A_0;$$

$$\tilde{\alpha}_1(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}) = -A \sin \tilde{\epsilon};$$

$$\tilde{\beta}_1(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}) - \omega^2 \tilde{\alpha} = A \sin \tilde{\epsilon};$$

Eliminavę $\tilde{\epsilon}$ dviejose paskutinėse lygtyse, gausime išraišką:

$$\tilde{\alpha}_1^2(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}) + (\tilde{\beta}_1(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}) - \omega^2 \tilde{\alpha})^2 = A^2,$$

kuri su pirma lygtimi naudojama surasti $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}$. Po viso šito fazės postūmį $\tilde{\epsilon}$ lengva surasti, naudojant formulę:

$$tg\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\alpha}_1(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1)}{\omega^2 a - \beta_1(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1)}.$$

Apriboti pirmąją harmoniką galima, kai ieškomi sprendiniai yra arti rezonanso. Kai netiesinė charakteristika yra nelyginė, sprendinio galima ieškoti $X = a \sin t$, o netiesinė funkcija $f(x)$ ištiesinama $f(x) = qx$. Sudaromas funkcionalas ištiesinimo koeficientui q rasti.

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(a \sin t) - q \cdot a \cdot \sin t)^2 dt = \min;$$

$$\frac{\partial I}{\partial q} = 0;$$

$$\frac{\partial I}{\partial q} = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(f(a \sin t) - q \cdot a \cdot \sin t)(-a \sin t) dt;$$

$$-\frac{2a}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(a \sin t) \sin t dt + \frac{2a^2}{\pi} q \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 0;$$

$$q = \frac{2}{\pi a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(a \sin t) \sin t dt. \quad (1.2.11)$$

Formulė (1.2.11) yra atskiras harmoninio balanso metodo atvejis.

1.3 FRIKCINIS DINAMINIS SLOPINTUVAS

Taikant dinaminį slopintuvą be trinties, papildoma masė sukelia antrojo dažnio rezonansą ir slopinimas efektyvus tik siauroje dažnių juostoje. Dinaminis slopintuvas be trinties yra naudojamas tik esant nusistovėjusiems žadinimo dažniams. Kitose dažnių zonose toks slopintuvas gali smarkiai padidinti virpesių amplitudes. Todėl jis netinka, kai harmoninio žadinimo dažnis kinta arba kai žadinimas periodinis ir sudarytas iš keleto harmonikų, nes dinaminį slopintuvą galima suderinti tik

vienos harmonikos virpesiams slopinti. Bet kurio dažnių diapazono, ir pirmiausia rezonansinės zonos virpesius efektyviai slopina frikcinis dinaminis slopintuvas.

Tegu dinaminis modelis su frikciniu dinaminio slopintuvu yra aprašomas diferencialinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + c \dot{q}_1 - c \dot{q}_2 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2 q_2 = F_1 e^{i\alpha t} \\ m_2 \ddot{q}_2 - c \dot{q}_1 + c \dot{q}_2 - k_2 q_1 + k_2 q_2 = 0. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Lygčių sistemą (1.3.1) užrašysime matriciniu pavidalu:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = p(t)$$

arba

$$\begin{vmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & -c \\ -c & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 e^{i\alpha t} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (1.3.2)$$

$\vec{q}(t)$ – poslinkio vektorius.

$$\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} e^{i\alpha t},$$

$M\ddot{q}$ – išreiškia inercijos jėgas, narys $B\dot{q}$ – slopinimo jėgas, Kq – tamprumo, narys $p(t)$ – išorinio žadinimo jėgas.

Nagrinėjame harmoninio žadinimo atvejį.

Reakcija į harmoninį žadinimą išreiškiamo atitinkama forma:

$$q(t) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} e^{i\alpha t},$$

Kur x_1, x_2 yra virpesių kompleksinės amplitudės, įeinančios į lygtį:

$$\left| K + i\omega c - \omega^2 M \right| x = f,$$

Matricos: $z(\omega) = K + i\omega c - \omega^2 M$ bendroji išraiška:

$$z_{ij}(\omega) = k_{ij} + i\omega c_{ij} - \omega^2 m_{ij}$$

yra sistemos impedansų matrica, o jai atvirkštinė matrica, vaizduoja su žadinimu susijusių sistemos poslinkių amplitudes:

$$H(\omega) = z^{-1}(\omega).$$

Kompleksinės reakcijos amplitudes randame iš lygties:

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 + i\omega c - \omega^2 m_1 & -(k_2 + i\omega c) \\ -(k_2 + i\omega c) & k_2 + i\omega c - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (1.3.3)$$

Išsprendus tiesinių lygčių sistemą (1.3.3), gauname:

$$x_1 = \frac{(k_2 + i\omega c - \omega^2 m_2)F_1}{(k_1 + k_2 + i\omega c - \omega^2 m_1)(k_2 + i\omega c - \omega^2 m_2) - (k_2 + i\omega c)^2},$$

$$x_2 = \frac{(k_2 + i\omega c)F_1}{(k_1 + k_2 + i\omega c - \omega^2 m_1)(k_2 + i\omega c - \omega^2 m_2) - (k_2 + i\omega c)^2}.$$

Apskaičiuojame modulio kvadratą:

$$\left| \frac{x_1}{F_1} \right|^2 = \frac{(k_2 - \omega^2 m_2)^2 + \omega^2 c^2}{((k_1 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - \omega^2 m_2 k_2)^2 + \omega^2 c^2 (k_1 - \omega^2 m_1 - \omega^2 m_2)^2},$$

Išraišką užrašysime bedimense forma, įvedus pažymėjimus:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} - \text{pagrindinės masės savasis dažnis,}$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} - \text{slopintuvo savasis dažnis,}$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} - \text{santykinė papildoma masė,}$$

$$b = \frac{\omega}{\omega_n} - \text{žadinimo dažnis, kuris susijęs su pagrindinės sistemos rezonansiniu dažniu,}$$

$$x_{st} = \frac{F_1}{k_1} - \text{pagrindinės sistemos statinis poslinkis,}$$

$$a = \frac{\omega_a}{\omega_n} - \text{koeficientas,}$$

$$\xi = \frac{c}{c_{kr}}, \quad c_{kr} = 2\sqrt{k_2 m_2} = 2\omega_a m_2.$$

Atlikę skaičiavimus, gauname:

$$\left(\frac{x_1}{x_{st}}\right)^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 + (2\xi ab)^2}{\left((1 - b^2)(a^2 - b^2) - a^2 b^2 \mu\right)^2 + (2\xi ab^2)(1 - b^2 - \mu b^2)^2}.$$

Ribinė reikšmė $\xi = 0$ atitinka charakteristiką su begalinėmis reikšmėmis, esant saviesiems dažniams ω_1 ir ω_2 , o kai ξ be galo didelis, turime dar vieną ribinį atvejį, atitinkantį vienmatės švytuoklės, kurios masė $m_1 + m_2$ ir standumas k_1 virpesius, kurių amplitudė:

$$x_1 = \frac{1}{\left|1 - \frac{m_1 + m_2}{k_1} \omega^2\right|}.$$

Įsidėmėtina, kad visos amplitudinės dažninės charakteristikos, nepriklausomai nuo slopinimo laipsnio ξ reikšmės pereina per ypatingus taškus P ir Q . Šių taškų koordinatės yra amplitudinių dažninių charakteristikų susikirtimo su ribinėmis charakteristikomis (kai $\xi = 0$ ir $\xi = \infty$) taškuose:

$$\frac{(a^2 - b^2)^2}{\left((1 - b^2)(a^2 - b^2) - a^2 b^2 \mu\right)^2} = \frac{1}{(1 - b^2 - \mu b^2)^2}.$$

Sprendiniai randami, kai :

$$\frac{a^2 - b^2}{(1 - b^2)(a^2 - b^2) - a^2 b^2 \mu} = \pm \frac{1}{1 - b^2 - \mu b^2}.$$

Netrivialūs sprendiniai randami iš lygties:

$$\frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{1 - b^2 - \mu b}{(a^2 - b^2)(1 - b^2) - a^2 b^2 \mu} = 0.$$

Iš šios lygties randame:

$$b^4 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - b^2 (1 - a^2 + a^2 \mu) + a^2 = 0.$$

Iš čia gauname šaknis b_1 ir b_2 sutampančias su taškų P ir Q abscisėmis. Jų ordinatės apskaičiuojamos, įrašius $\xi = \infty$:

$$\frac{x}{x_{st}} = \frac{1}{1 - b_1^2(1 + \mu)},$$

$$\frac{x}{x_{st}} = \frac{1}{b_2^2(1 + \mu) - 1}.$$

Minimizuosime sistemos reakciją dažnių diapazone $\omega \approx \omega_a$. Visų pirma, jį galima realizuotiis dviem reakcijos maksimumams, apytiksliai atitinkantiems taškus P ir Q , nustatant tą pačią ordinatę:

$$\frac{1}{1 - b_1^2(1 + \mu)} = \frac{1}{b_2^2(1 + \mu) - 1}$$

arba

$$b_1^2 + b_2^2 = \frac{2}{1 + \mu}.$$

Iš bikvadratinės lygties, pritaikius Vieto teoremą, gauname:

$$b_1^2 + b_2^2 = \frac{1 + a^2 + a^2\mu}{1 + \frac{\mu}{2}}.$$

Sulyginus dešiniąsias puses:

$$\frac{2}{1 + \mu} = \frac{1 + a^2(1 + \mu)}{1 + \frac{\mu}{2}},$$

Darome išvadą, kad dinaminis slopinantysis amortizatorius yra sureguliuotas optimaliai, jei:

$$\frac{\omega_a}{\omega_n} = a = a_{opt} = \frac{1}{1 + \mu}.$$

Iš šios išraiškos randame optimalų pagrindinės sistemos dažnio ω_n ir slopintuvo dažnio ω_a santykį. Ieškosime optimalaus slopintuvo reakcijos amplitudės. Tuo atveju, kai $a = a_{opt}$ fiksuoti taškai išsidėsto taškuose su abscisėmis:

$$b^4 \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) - b^2(1 + a^2 + a^2\mu) + a^2 = 0.$$

Fiksuotų taškų P ir Q ordinatė bus:

$$\frac{x_1}{x_{st}} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}}.$$

Ji tuo mažesnė, kuo didesnė slopintuvo masė.

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1 NETIESINIŲ SISTEMŲ PRIVERSTINIAI VIRPESIAI

Sistemoje su netiesine atstatomąja jėga, veikiant harmoninei žadinimo jėgai, sužadunami periodiniai (bet ne harmoniniai) virpesiai. Pirmosios jų – pagrindinės harmonikos – dažnis yra lygus žadinimo dažniui. Harmonikos, kurių dažniai $2\omega, 3\omega, \dots$ vadinamos superharmonikomis. Jų amplitudės yra gana mažos ir dažnai, skaičiuojant pirmąjį priartėjimą, pakanka vienanario sprendinio. Kai tamprumo charakteristika simetriška, paklaida siekia tik kelis procentus, tačiau esant nesimetriškajai atstatomajai jėgai, patenkinamas sprendinys turi būti bent dvinaris. Tiriant rezonansinius sprendinius pakanka apsiriboti viena dedamąja.

Kai netiesinė sistema aprašoma lygtimi:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + f(x) = A \sin \omega t, \quad (2.1.1)$$

pagrindinės harmonikos amplitudės reikšmė randama taip:

$$a = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_1(a))^2 + 4n\omega_1^2(a)}}, \quad (2.1.2)$$

čia $\omega_1(a)$ atitinka netiesinių laisvųjų virpesių dažnį. Naudotis lygtimi nėra paprasta, nes skirtingai nuo tiesinių sistemų, netiesinėse sistemose amplitudės a reikšmės priklausomybė nuo dažnio ω nėra vienareikšmiška ir yra sąlygojama atstatomosios jėgos $f(x)$ tipo.

2.1.1 DINAMINIŲ SLOPINTUVŲ TAIKYMAS NETIESINEI SISTEMAI SU ĮVERŽIMU

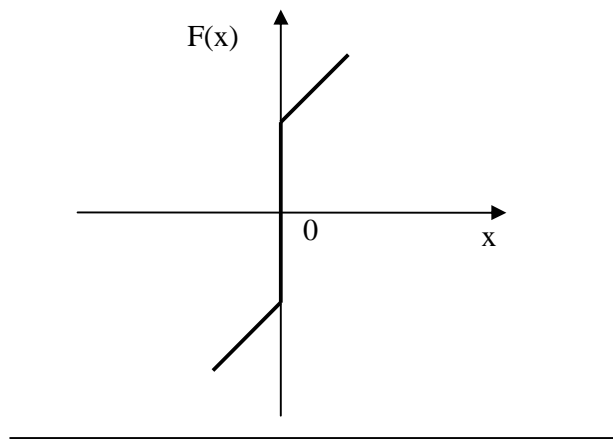
Tarkime, kad dinaminis modelis yra aprašomas diferencialinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + f(x) - c_1(x_1 - x) = A \sin \omega t, \\ m_1\ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x) = 0; \end{cases} \quad (2.1.1.1)$$

čia x, x_1 – koordinatės, atskaitomos nuo sistemos statinės pusiausvyros padėties, m_1, c_1 – tiesinio dinaminio slopintuvo parametrai, m – pagrindinė sistemos masė, $f(x)$ – standumo charakteristika, kuri yra dalimis tiesinė ir nusakoma lygtimi:

$$f(x) = \begin{cases} c(x + x_y), & x > 0, \\ c(x - x_y), & x < 0, \end{cases} \quad (2.1.1.2)$$

čia x_y , – sistemos judesio apribojimas, c – standumo charakteristikos parametras.



2.1.1.1 pav. Dalimis tiesinė standumo charakteristika

Sistemai spręsti taikomas harmoninės linearizacijos metodas. Netiesinė standumo charakteristika ištiesinama, panaudojant lygtį

$$\tilde{f}(x) = qx. \quad (2.1.1.3)$$

Tuomet (2.1.1.3) sistemos sprendiniai bus:

$$\begin{aligned} x &= B \sin \tau, \\ x_1 &= B_1 \sin \tau, \end{aligned} \quad (2.1.1.4)$$

čia $\tau = \omega t$.

Ištiesintos standumo charakteristikos koeficientas q apskaičiuojamas taip:

$$q(B) = \frac{1}{\pi B} \int_0^{2\pi} f(B \sin \tau) \cdot \sin \tau d\tau$$

Atsižvelgiant į standumo charakteristikos simetriją, galima imti ketvirtį periodo, todėl gauname:

$$q(B) = \frac{4}{\pi B} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(B \sin \tau) \sin \tau d\tau = \frac{4}{\pi \beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cB \sin \tau + cx_y) \sin \tau d\tau = \quad (2.1.1.5)$$

$$= \frac{4}{\pi B} \left(\frac{c}{2} B \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\tau) d\tau - cx_y \cos \tau \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{4}{\pi B} \left(\frac{cB\pi}{4} + cx_y \right) = \frac{4cx_y}{\pi B} + c.$$

Įrašę į (2.1.1.1) sistemą sprendinio (2.1.1.4) išraiškas ir ištiesintą standumo charakteristiką, lygčių sistemą pertvarkome į sistemą:

$$\begin{cases} m\omega^2 \ddot{x} + qx - c_1(x_1 - x) = A \sin \tau, \\ m_1\omega^2 \ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x) = 0, \end{cases} \quad (2.1.1.6)$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 B + qB - c_1(B_1 - B) = A, \\ -m_1\omega^2 B_1 + c_1(B_1 - B) = 0. \end{cases}$$

Dinaminio slopintuvo amplitudę randame iš (2.1.1.6) sistemos antrosios lygties:

$$B_1(c_1 - m_1\omega^2) - c_1B = 0,$$

$$B_1 = \frac{c_1B}{c_1 - m_1\omega^2} = \frac{\omega_1^2 B}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

čia $\omega_1^2 = \frac{c_1}{m_1}$.

Pagrindinės masės amplitudė B , įstačius B_1 išraišką į (2.1.1.6) sistemos pirmą lygtį, bus tokia:

$$B \left(-\frac{m\omega^2}{c_1} + \frac{q}{c_1} - \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega^2} + 1 \right) = \frac{A}{c_1},$$

$$\frac{Bc_1}{A} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_1^2} \left(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega^2} - \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \right)}, \quad (2.1.1.7)$$

čia $\mu = \frac{m_1}{m}, \omega_1^2 = \frac{c_1}{m_1}$.

Pertvarkius (2.1.1.7) lygtį, gaunama amplitudinė dažninė charakteristika su dinaminio slopintuvu:

$$\frac{Bc_1}{A} = \frac{1}{\gamma^2 \left(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1-\gamma^2} \right)},$$

$$B \frac{c_1}{A} = \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2 \left(-\frac{1-\gamma^2}{\mu} + \frac{q}{c_1} \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2} - 1 \right)}; \quad (2.1.1.8)$$

čia $\gamma = \frac{p}{p_1}$.

Iš (2.1.1.8) lygties išplaukia, kad $B \rightarrow 0$, kai $\gamma \rightarrow 1$.

Atitinkamai parinkus dinaminio slopintuvo parametrus, kai $\frac{c_1}{m_1} \rightarrow \omega_1^2 \rightarrow \omega^2$, pagrindiniai virpesiai sistemoje nuslopinami.

Bedimensėse koordinatėse amplitudinė dažninė charakteristika su dinaminio slopintuvo bus tokia:

$$\frac{ax_y c_1}{A} = \frac{1}{\gamma^2 \left(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1-\gamma^2} \right)},$$

$$\frac{x_y c_1}{A} = \frac{1}{a\gamma^2 \left(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1-\gamma^2} \right)},$$

$$a\gamma^2 \left(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1-\gamma^2} \right) - \frac{A}{c_1 x_y} = 0. \quad (2.1.1.9)$$

čia $q(a) = \frac{4c}{\pi a} + c, a = \frac{B}{x_y}$.

Bedimensėse koordinatėse amplitudinė dažninė charakteristika be dinaminio slopintuvo gaunama iš lygties

$$m\ddot{x} + qx = A \sin(\omega t),$$

įrašius į ją $x = B \sin \omega t$:

$$-m\omega^2 B + qB = A,$$

$$B(q - m\omega^2) = A,$$

$$B\left(\frac{q}{c} - m\omega^2\right) = A,$$

$$a\left(\frac{q}{c} - \gamma_1^2\right) = \frac{A}{x_y c} \quad (2.1.1.10)$$

Perėjus prie ribos, kai $a \rightarrow \infty$, iš amplitudinės dažninės charakteristikos

$$a = \frac{\frac{A}{c_1 x_y}}{\left(-\frac{\gamma^2}{\mu} + \frac{4c}{c_1 \pi a} + \frac{c}{c_1} - \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2}\right)}$$

gaunama lygtis dažniams nustatyti:

$$-\frac{\gamma^2}{\mu} + \frac{c}{c_1} - \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2} = 0. \quad (2.1.1.11)$$

Išsprendus (2.1.1.11) lygtį, sistema turės rezonansinius virpesius, kai

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{1 + \mu\left(\frac{c}{c_1} + 1\right) \pm \sqrt{\left(1 + \mu\left(\frac{c}{c_1} + 1\right)\right)^2 - \frac{4\mu c}{c_1}}}{2}.$$

Sąlyga, kad determinantas būtų neneigiamas tikrai išpildyta, nes

$$\left(1 + \mu\left(\frac{c}{c_1} + 1\right)\right)^2 - 4\mu\frac{c}{c_1} = 1 + 2\mu\left(\frac{c}{c_1} + 1\right) + \mu^2\left(\frac{c}{c_1} + 1\right)^2 - 4\mu\frac{c}{c_1} =$$

$$= 1 - 2\mu \left(\frac{c}{c_1} + 1 \right) + \mu^2 \left(\frac{c}{c_1} + 1 \right)^2 - 4\mu = \left(1 - \mu \left(\frac{c}{c_1} + 1 \right) \right)^2 + 4\mu \geq 0.$$

Atstumas tarp rezonansų Δ lygus:

$$\Delta = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = \sqrt{\left(1 + \mu \left(\frac{c}{c_1} + 1 \right) \right)^2 - 4\mu} \frac{c}{c_1} = \sqrt{\left(1 + \mu \left(\frac{c}{c_1} + 1 \right) \right)^2 - 4\mu}.$$

Palyginus su tiesiniu atveju, kai atstumas tarp rezonansų lygus $\gamma_1^2 - \gamma_2^2 = \sqrt{4\mu + \mu^2}$, negalima teigti, kad visuomet netiesiniu atveju slopintuvas veikia platesnėje dažnio juostoje. Tik atitinkamai parinkus parametrus galima pasiekti šio efekto. Būtent, kai išpildyta sąlyga $\left(1 - \mu \left(\frac{c}{c_1} + 1 \right) \right)^2 > \mu^2$ dinaminis slopintuvas veiks platesnėje dažnio juostoje nei tiesinius atveju:

$$\left| 1 - \mu \left(\frac{c}{c_1} + 1 \right) \right| \geq \mu, \text{ t.y. kai } \mu > \frac{c}{c_1} \text{ arba } 0 < \mu < \frac{c_1}{c + 2c_1}.$$

Žinant, kad $\frac{m_1}{m} = \mu < 1$, slopintuvo parametrų kitimo sritis bus

$$0 < \mu < \frac{c_1}{c + 2c_1} < 1 \text{ arba } \mu > \frac{c}{c_1}.$$

Kai slopintuvo parametrai m_1, c_1 tenkina nelygybę $\frac{c}{c_1} < \frac{m_1}{m} < \frac{c_1}{(2c_1 + c)}$, dinaminis slopintuvas netiesinėje sistemoje veikia siauresniame dažnių diapazone negu tiesinėje sistemoje. Dažnių diapazonas netiesinėje sistemoje platesnis, kai slopintuvo parametrai tenkina sąlygas:

$$\frac{c_1}{m_1} < \frac{c}{m} \text{ arba } 0 < \frac{m_1}{m} < \frac{c_1}{2c_1 + c}.$$

Šiuo atveju gautos amplitudinės dažninės charakteristikos pateikiamos 1 priede.

2.2 FRIKCINIO DINAMINIO SLOPINTUVO TAIKYMAS NETIESINEI SISTEMAI SU ĮVERŽIMU

Nagrinėjama netiesinė sistema, kurios tamprumo jėga yra dalimis tiesinė. Siekiant sumažinti nusistovėjusių virpesių amplitudes platesniame dažnių diapazone, prijungimas dinaminis slopintuvas su trintimi.

Dinaminis modelis yra aprašomas diferencialinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + f(x) - c_1(x_1 - x) + h(\dot{x} - \dot{x}_1) = A \sin \omega t, \\ m_1\ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x) + h(\dot{x}_1 - \dot{x}) = 0; \end{cases} \quad (2.2.1)$$

kur:

$$f(x) = \begin{cases} c(x + x_y), x > 0, \\ c(x - x_y), x < 0, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Netiesinė standumo charakteristika ištiesinama, panaudojant lygtį:

$$\tilde{f}(x) = kx = \left(\frac{4cx_y}{\pi B} + c \right) x. \quad (2.2.3)$$

Lygčių sistemą užrašysime matricine forma:

$$M\ddot{q} + H\dot{q} + Cq = p(t)$$

arba

$$\begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{q}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h & -h \\ -h & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{q} \\ \dot{q}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k + c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q \\ q_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ae^{i\omega t} \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Reakcija į harmoninį žadinimą išreiškiama forma:

$$k(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t},$$

Kur x_1, x_2 yra virpesių kompleksinės amplitudės, įeinančios į matricinę lygtį:

$$\left[C + i\omega H - \omega^2 M \right] x = A.$$

Matricos $z(\omega) = \left[C + i\omega H - \omega^2 M \right]$ atvirkštinė matrica $H(\omega) = z^{-1}(\omega)$ vaizduoja su žadinimu susijusių sistemos poslinkių amplitudes. Kompleksinės reakcijos amplitudes randame iš lygties:

$$\begin{vmatrix} k + c_1 + i\omega h - \omega^2 m & -(c_1 + i\omega h) \\ -(c_1 + i\omega h) & c_1 + i\omega h - \omega^2 m_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \\ 0 \end{vmatrix} \quad (2.2.4)$$

Išsprendę tiesinę lygčių sistemą (2.2.4), gauname:

$$x_1 = \frac{(c_1 + i\omega h - \omega^2 m_1)A}{(k + c_1 + i\omega h - \omega^2 m)(c_1 + i\omega h - \omega^2 m_1) - (c_1 + i\omega h)^2}, \quad (2.2.5)$$

$$x_2 = \frac{(c_1 + i\omega h)A}{(k + c_1 + i\omega h - \omega^2 m)(c_1 + i\omega h - \omega^2 m_1) - (c_1 + i\omega h)^2},$$

Apskaičiavus modulio kvadrata:

$$\left| \frac{x}{A} \right|^2 = \frac{(c_1 - \omega^2 m_1)^2 + \omega^2 h^2}{((c_1 - \omega^2 m_1)(k - \omega^2 m) - c_1 \omega^2 m_1)^2 + \omega^2 h^2 (k - \omega^2 m_1 - \omega^2 m)^2};$$

Išraišką užrašysime bedimense forma, įvedę pažymėjimus:

$$\mu = \frac{m_1}{m} \text{ – santykinė papildoma masė,}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ – pagrindinės masės savasis dažnis,}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} \text{ – slopintuvo savasis dažnis,}$$

$$b = \frac{\omega}{\omega_2} \text{ – žadinimo dažnis, kuris yra susijęs su pagrindinės sistemos rezonansiniu dažniu,}$$

$$x_{st} = \frac{A}{c} \text{ – pagrindinės sistemos statinis poslinkis,}$$

$$a = \frac{\omega_a}{\omega_n} \text{ – koeficientas,}$$

$$\xi = \frac{h}{h_{kr}}, \text{ kur } h_{kr} = 2\sqrt{c_1 m_1} = 2\omega_1 m_1.$$

$$\left| \frac{x}{A} \right|^2 = \frac{m_1^2 \left(\left(\left(\frac{c_1}{m_1} \right)^2 - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2 h^2}{m_1^2} \right)}{\left(m_1 \left(\frac{c_1}{m_1} - \omega^2 \right) m \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) - c_1 \omega^2 m_1 \right)^2 + \omega^2 h^2 c^2 \left(\frac{k}{c} - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \mu - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right)}$$

$$\begin{aligned}
& m_1^2 \omega_2^4 \left(\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right)^2 + \frac{\omega^2 h^2}{\omega_2^2 m_1^2} \right) \\
&= \frac{\left(m_1 m \omega_2^2 \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right) \omega_2^2 \left(\frac{k}{c} - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right) - c_1 \omega^2 m_1 \right)^2 + \omega^2 h^2 c^2 \left(\frac{k}{c} - b^2 \mu - b^2 \right)^2}{(a^2 - b^2)^2 + (2\xi ab)^2} = \\
&= \frac{m^2 \omega_2^4 \left((a^2 - b^2) \left(\frac{k}{c} - b^2 \right) - \frac{c_1 \omega^2 m_1}{m \omega_2^2} \right) + \frac{\omega^2 h^2 c^2}{m^2 \omega_2^4} \left(\frac{k}{c} - b^2 \mu - b^2 \right)^2}{(a^2 - b^2)^2 + (2\xi ab)^2} = \\
&= \frac{(a^2 - b^2)^2 + (2\xi ab)^2}{c^2 \left((a^2 - b^2) \left(\frac{k}{c} - b^2 \right) - a^2 b^2 \mu \right)^2 + (2\xi ab)^2 \left(\frac{k}{c} - b^2 \mu - b^2 \right)^2}. \\
\left| \frac{xc}{A} \right|^2 &= \left(\frac{x}{x_{st}} \right)^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 + (2\xi ab)^2}{\left((a^2 - b^2) \left(\frac{k}{c} - b^2 \right) - a^2 b^2 \mu \right)^2 + (2\xi ab)^2 \left(\frac{k}{c} - b^2 \mu - b^2 \right)^2} \quad (2.2.6)
\end{aligned}$$

Kai $\xi = 0$ ir $\xi = \infty$ išraiškoje (2.2.6) gauname ribines charakteristikas, kurias sulyginus randame du fiksuotus taškus P ir Q :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(a^2 - b^2)^2} &= \frac{\left(\frac{k}{c} - b^2 \mu - b^2 \right)^2}{\left((a^2 - b^2) \left(\frac{k}{c} - b^2 \right) - b^2 a^2 \mu \right)^2}, \\
\frac{1}{a^2 - b^2} &= \frac{\frac{k}{c} - b^2 \mu - b^2}{(a^2 - b^2) \left(\frac{k}{c} - b^2 \right) - b^2 a^2 \mu},
\end{aligned}$$

Tik paskutinioji lygtis duoda netrivialų sprendinį:

$$\begin{aligned}
b^4(2 + \mu) - 2b^2 \left(a^2 \mu + a^2 + \frac{k}{c} \right) + 2 \frac{a^2 k}{c} &= 0, \\
b^4 \left(1 + \frac{\mu}{2} \right) - b^2 \left(a^2 \mu + a^2 + \frac{k}{c} \right) + \frac{a^2 k}{c} &= 0, \quad (2.2.7)
\end{aligned}$$

Išspendę (2.2.7) lygtį, gauname taškų P ir Q abscises, kurios skirtingai nei tiesiniu atveju priklauso nuo pagrindinės masės amplitudės, nes įeina į išraišką:

$$k = k \left(\frac{x}{x_{st}} \right).$$

Ordinates gauname amplitudinėje dažninėje išraiškoje, perėjus prie ribos, kai $\xi \rightarrow \infty$.

$$\frac{x}{x_{st}} = \frac{1}{1 - b_1^2(1 + \mu)},$$

$$\frac{x}{x_{st}} = \frac{1}{b_2^2(1 + \mu) - 1};$$

Sulyginus:

$$\frac{1}{1 - b_1^2(1 + \mu)} = \frac{1}{b_2^2(1 + \mu) - 1},$$

$$b_1^2 + b_2^2 = \frac{2}{1 + \mu}. \quad (2.2.8)$$

Iš lygties (2.2.8), pritaikius Vieto teoremą, gauname:

$$b_1^2 + b_2^2 = \frac{a^2(1 + \mu) + \frac{k}{c}}{1 + \frac{\mu}{2}} \quad (2.2.9)$$

Sulyginus (2.2.8) ir (2.2.9) išraiškas, gauname lygtį a atžvilgiu:

$$\frac{2}{1 + \mu} = \frac{a^2(1 + \mu) + \frac{k}{c}}{1 + \frac{\mu}{2}},$$

$$2 + \mu = a^2(1 + \mu)^2 + \frac{k}{c}(1 + \mu)$$

$$2 + \mu - \frac{k}{c}(1 + \mu) = a^2(1 + \mu)^2$$

$$\frac{2 + \mu}{(1 + \mu)^2} - \frac{k}{(1 + \mu)^2} = a^2$$

$$\frac{k}{c} = 1 + \frac{1}{1 + \mu} - a^2(1 + \mu) \quad (2.2.10)$$

Skirtingai nei tiesiniu atveju, optimalaus dinaminio slopintuvo parametrų parinkimas priklauso nuo amplitudės.

Ištačius

$$\frac{k}{c} = \frac{4x_y}{B} + 1 = \frac{4x_{st}}{x} \cdot \frac{x_y}{x_{st}} + 1 = \frac{4}{\frac{x}{x_{st}}} \cdot \frac{x_y}{x_{st}} + 1$$

Į lygtį (2.2.10), gaunama lygtis a^2 atžvilgiu:

$$a^2 = \frac{1}{1 + \mu} \left(1 - \frac{4}{x} \cdot \frac{x_y}{x_{st}} - 1 + \frac{1}{1 + \mu} \right) = \frac{1}{1 + \mu} \left(\frac{1}{1 + \mu} - \frac{4}{x} \cdot \frac{x_y}{x_{st}} \right) \leq \frac{1}{(1 + \mu)^2}$$

Matome, kad

$$a \leq \frac{1}{1 + \mu} < 1$$

t.y., slopintuvo savasis dažnis yra mažesnis už sistemos savąjį dažnį.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{c_1}{c\mu}} \leq \frac{1}{1 + \mu}$$

arba

$$0 < \frac{c_1}{c} \leq \frac{\mu}{(1 + \mu)^2} \quad (2.2.11)$$

Dinaminis slopinantysis amortizatorius yra sureguliuotas optimaliai, jei tenkina (2.2.11) nelygybę.

Panagrinėkime detalai teiginį, kad minimizuojant sistemos reakciją, galima pasiekti, kad taškų P ir Q ordinatės gali įgyti tą pačią reikšmę, analogiškai kaip ir tiesiniu atveju. Tuo tikslu į dažnių lygtį

(2.2.7) įstatykime $\frac{k}{c}$ išraišką:

$$b^4 \left(1 + \frac{\mu}{2} \right) - b^2 \left(a^2 \mu + a^2 + 1 + \frac{1}{1 + \mu} - a^2(1 + \mu) \right) + a^2 \left(1 + \frac{1}{1 + \mu} - a^2(1 + \mu) \right) = 0,$$

$$b^4 - b^2 \frac{2}{1 + \mu} + 2a^2 \left(1 + \frac{1}{1 + \mu} - a^2(1 + \mu) \right) \frac{1}{\mu + 2} = 0.$$

Lygties diskriminantas turi būti neneigiamas:

$$D = \frac{1}{(1 + \mu)^2} - 2 \frac{a^2}{\mu + 2} \left(1 + \frac{1}{1 + \mu} - a^2(1 + \mu) \right) \geq 0,$$

$$\frac{2(1+\mu)}{\mu+2}a^4 - \frac{2}{1+\mu}a^2 + \frac{1}{(1+\mu)^2} \geq 0.$$

Atžvilgiu a^2 kvadratinis trinaris yra neneigiamas visoms a^2 reikšmėms, kai:

$$D_1 = \left(\frac{2}{1+\mu} \right)^2 - \frac{8}{(1+\mu)^2} \cdot \frac{1+\mu}{2+\mu} < 0 \text{ ir } \frac{2(1+\mu)}{2+\mu} > 0,$$

$$\frac{4(2+\mu)-8(1+\mu)}{(1+\mu)^2(\mu+2)} < 0, \frac{-4\mu}{(1+\mu)^2(\mu+2)} < 0. \quad (2.2.12)$$

Nelygybė teisinga visoms teigiamoms $\mu = \frac{m_1}{m}$ reikšmėms. Tai reiškia, kaip ir tiesinėje sistemoje, minimizuoti sistemos reakciją galima plačiame dažnių diapazone, taikant frikcinį slopintuvą.

Išnagrinėtu atveju amplitudinės dažninės charakteristikos pateikiamos 2 priede.

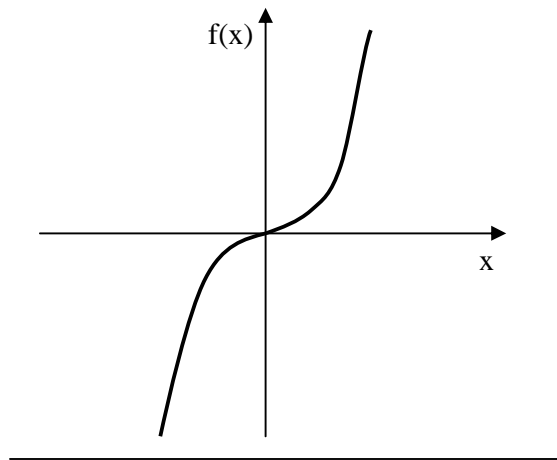
2.3 DINAMINIO SLOPINTUVO TAIKYMAS SISTEMAI, KAI TAMPRUMO JĖGA LYGI $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$

Efektyvus būdas kovoti su žalingais virpesiais yra dinaminio slopintuvų taikymas mechaninei sistemai. Dinaminiai slopintuvai turi tokį privalumą, kad jų panaudojimas nereikalauja esminių konstrukcinių pakeitimų. Jei pagrindinę masę m veikianti jėga iššaukia pavojingai dideles virpesių amplitudes, tai prijungus dinaminį slopintuvą, t.y. papildomą masę m_1 , ir parinkus tos masės parametrus, galima žymiai sumažinti amplitudę. Tegu dinaminis modelis yra aprašomas diferencialinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + f(x) - c_1(x_1 - x) = A \sin \omega t, \\ m_1\ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x) = 0, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

čia m_1, c_1 – tiesinio dinaminio slopintuvo parametrai,

$m, f(x)$ – pagrindinės sistemos masė ir standumo charakteristika:



2.3.1 pav. Netiesinė standumo charakteristika, kai tamprumo jėga lygi $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$

$$f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x. \quad (2.3.2)$$

Sistemai spręsti taikomas harmoninės linearizacijos metodas. Tolydi standumo charakteristika ištiesinama :

$$\tilde{f}(x) = q \cdot x. \quad (2.3.3)$$

Sistemos sprendiniai bus:

$$x = B \sin \tau, \quad x_1 = B_1 \sin \tau, \quad (2.3.4)$$

čia $\tau = \omega t$.

Ištiesintos standumo charakteristikos koeficientas q apskaičiuojamas taip:

$$\begin{aligned} q(B) &= \frac{1}{\pi B} \int_0^{2\pi} f(B \sin \tau) \cdot \sin \tau d\tau = \frac{4}{\pi B} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(B \sin \tau) \cdot \sin \tau d\tau = \\ &= \frac{4}{\pi B} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cB^2 \sin^3 \tau d\tau = \frac{4cB}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \tau (1 - \cos^2 \tau) d\tau = \frac{4cB}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \tau d\tau - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \tau \cdot \cos^2 \tau d\tau \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{4cB}{\pi} \left((-\cos \tau) \left| \frac{\pi}{2} \right|_0 + \frac{\cos^3 \tau}{3} \left| \frac{\pi}{2} \right|_0 \right) = \frac{8cB}{3\pi} \quad (2.3.5)$$

Įstačius į (2.3.1) sistemą sprendinio išraiškas (2.3.4) ir ištiesintą standumo charakteristiką, lygčių sistema pertvarkoma taip:

$$\begin{cases} m\omega^2 \ddot{x} + qx - c_1(x_1 - x) = A \sin \tau, \\ m_1\omega^2 \ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x) = 0, \end{cases} \quad (2.3.6)$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 B + qB - c_1(B_1 - B) = A, \\ -m_1\omega^2 B_1 + c_1(B_1 - B) = 0. \end{cases}$$

Dinaminio slopintuvo amplitudė iš (2.3.6) sistemos antrosios lygties randama:

$$B_1(c_1 - m_1\omega^2) - c_1B = 0,$$

$$B_1 = \frac{c_1B}{c_1 - m_1\omega^2} = \frac{\frac{c_1}{m_1}B}{\frac{c_1}{m_1} - \frac{m_1}{m_1}\omega^2} = \frac{\omega_1^2 B}{\omega_1^2 - \omega^2},$$

čia $\omega_1^2 = \frac{c_1}{m_1}$.

Pagrindinės masės amplitudė B , įstačius B_1 išraišką į (2.3.6) sistemos pirmą lygtį, bus:

$$B \left(-\frac{m\omega^2}{c_1} + \frac{q}{c_1} - \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega^2} + 1 \right) = \frac{A}{c_1},$$

$$\frac{Bc_1}{A} = \frac{1}{\frac{q}{c_1} - \frac{m}{c_1}\omega^2 - \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega^2} + 1},$$

$$\frac{Bc_1}{A} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_1^2} \left(-\frac{m\omega_1^2}{c_1} + \frac{q}{c_1} \frac{\omega_1^2}{\omega^2} - \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \right)},$$

$$\frac{Bc_1}{A} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_1^2} \left(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1} \frac{\omega_1^2}{\omega^2} - \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}} \right)}, \quad (2.3.7)$$

$$\text{čia } \mu = \frac{m_1}{m}, \quad \omega_1^2 = \frac{c_1}{m_1}.$$

Pertvarkius (2.3.7) lygtį, gaunama amplitudinė dažninė charakteristika su dinaminio slopintuvu:

$$\frac{Bc_1}{A} = \frac{1}{\gamma^2 \left(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1 - \gamma^2} \right)},$$

$$\frac{Bc_1}{A} = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2 \left(-\frac{1}{\mu} (1 - \gamma^2) + \frac{q}{c_1} \frac{1}{\gamma^2} (1 - \gamma^2) - 1 \right)}, \quad (2.3.8)$$

$$\text{čia } \gamma = \frac{\omega}{\omega_1}.$$

Iš kur matyti, kad $B \rightarrow 0$, kai $\gamma^2 \rightarrow 1$.

Atitinkamai parinkus dinaminio slopintuvo parametrus, kai $\frac{c_1}{m_1} \rightarrow \omega^2$ pagrindiniai virpesiai sistemoje nuslopunami. Bedimensėse koordinatėse amplitudinė dažninė charakteristika su dinaminio slopintuvu bus tokia:

$$\frac{ax_y c_1}{A} = \frac{1}{\gamma^2 \left(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1 - \gamma^2} \right)},$$

$$\frac{x_y c_1}{A} = \frac{1}{a\gamma^2 \left(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1-\gamma^2} \right)},$$

$$a\gamma^2 \left(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1-\gamma^2} \right) - \frac{A}{c_1 x_y} = 0. \quad (2.3.9)$$

Amplitudinė dažninė charakteristika be dinaminio slopintuvo:

$$-m\omega^2 B + qB = A,$$

$$B(q - m\omega^2) = A,$$

$$B = \frac{A}{q - m\omega^2},$$

$$B \left(\frac{8cB}{3\pi} - m\omega^2 \right) = A,$$

$$ax_y c \left(\frac{8ax_y}{3\pi} - \frac{m\omega^2}{c} \right) = A,$$

$$a \left(\frac{8ax_y}{3\pi} - \gamma_1^2 \right) = \frac{A}{x_y c},$$

$$\frac{B}{x_y} = a, \gamma_1 = \frac{\omega}{\omega_2}, \omega_2^2 = \frac{c}{m}.$$

Amplitudinė dažninė charakteristika su dinaminio slopintuvu pertvarkoma taip:

$$a\gamma^2 \left(-\frac{1}{\mu} + \frac{q}{c_1} \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{1-\gamma^2} \right) = \frac{A}{c_1 x_y},$$

$$\frac{1}{\mu}\gamma^4 + \gamma^2 \left(-\frac{1}{\mu} - \frac{q}{c_1} - 1 + \frac{A}{ac_1x_y} \right) + \frac{q}{c_1} - \frac{A}{c_1x_y a} = 0.$$

Perėjus prie ribos, kai $a \rightarrow \infty$ gaunama lygtis rezonansiniams dažniams nustatyti:

$$\gamma^4 + \gamma^2 \left(-1 - \frac{q}{c_1} \gamma - \mu \right) + \frac{q}{c_1} = 0, \quad (2.3.10)$$

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{\left(1 + \frac{q}{c_1} \mu + \mu \right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{q}{c_1} \mu + \mu \right)^2 - \frac{4q}{c_1} \mu}}{2}.$$

Determinantas $\left(1 + \frac{q}{c_1} \mu + \mu \right)^2 - \frac{4q}{c_1} \mu \geq 0$, nes

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{q}{c_1} \mu + \mu \right)^2 - \frac{4q}{c_1} \mu &= 1 + \left(\frac{q}{c_1} \mu \right)^2 + \mu^2 + 2\mu + 2\frac{q}{c_1} \mu^2 + 2\frac{q}{c_1} \mu - 4\frac{q}{c_1} \mu = \\ &= 1 + \left(\frac{q}{c_1} \mu \right)^2 + \mu^2 - 2\frac{q}{c_1} \mu - 2\mu + 2\frac{q}{c_1} \mu^2 + 4\mu = \\ &= \left(1 - \frac{q}{c_1} \mu - \mu \right)^2 + 4\mu = \left(1 - \mu \left(\frac{q}{c_1} + 1 \right) \right)^2 + 4\mu > 0. \end{aligned}$$

Atstumas tarp rezonansų lygus:

$$\Delta = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = \sqrt{\left(1 + \frac{q}{c_1} \mu + \mu \right)^2 - \frac{4q}{c_1} \mu} = \sqrt{\left(1 - \mu \left(\frac{q}{c_1} + 1 \right) \right)^2 + 4\mu}.$$

Ištirsiu funkciją $\Delta(u)$.

$$\Delta'(u) = \frac{-2 \left(1 - \mu \left(\frac{q}{c_1} + 1 \right) \right) \left(\frac{q}{c_1} + 1 \right) + 4}{2 \sqrt{\left(1 + \mu \left(\frac{q}{c_1} + 1 \right) \right)^2 + 4\mu}},$$

$$\mu = -\frac{2}{\left(\frac{q}{c_1} + 1 \right)^2} + \frac{1}{\frac{q}{c_1} + 1},$$

$$\min \Delta = 2 \frac{\sqrt{\frac{q}{c_1} + 1} - 1}{\left(\frac{q}{c_1} + 1 \right)^2} = \frac{2}{\frac{q}{c_1} + 1} \sqrt{\frac{q}{c_1}} = \frac{2c_1}{q + c_1} \sqrt{\frac{q}{c_1}}.$$

Kaip jau žinome, tiesinėje sistemoje dinaminio slopintuvo veikimo dažnio juosta lygi $\sqrt{\mu^2 + 4\mu}$. Netiesinėje sistemoje dinaminis slopintuvas veiks platesnėje dažnio juostoje, kai

$$\left(1 - \mu \left(\frac{q}{c_1} + 1 \right) \right)^2 > \mu^2,$$

$$\left| 1 - \mu \left(\frac{q}{c_1} + 1 \right) \right| > |\mu|.$$

Išsprendus nelygybę, gaunamos μ reikšmės $\mu > \frac{c_1}{q}$ arba $0 < \mu < \frac{c_1}{q + 2c_1}$, kurioms galiojant, dinaminis slopintuvas veikia efektyviau netiesinėje sistemoje negu tiesinėje. Gautas amplitudinės dažninės charakteristikos parodytos 3 priede.

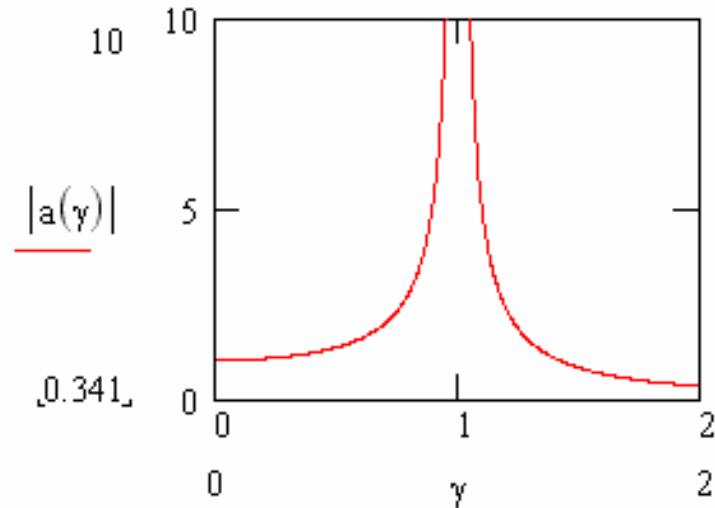
IŠVADOS

1. Surastos netiesinės sistemos parametrų kitimo sritys, kuriose dinaminis slopintuvas yra efektyvesnis negu tiesinėse sistemose.
2. Dinaminio slopintuvo dažnis visais atvejais turi būti artimas žadinimo dažniui.
3. Frikcinio dinaminio slopintuvo veikimo dažnio diapazonas yra platesnis negu spyruoklinio slopintuvo.
4. Kitaip negu tiesiniu atveju, optimalaus frikcinio dinaminio slopintuvo parametrų parinkimas priklauso nuo pagrindinės masės amplitudės
5. Netiesinėje sistemoje, taikant frikcinį slopintuvą, minimizuoti sistemos reakciją galime analogiškai, kaip ir tiesinėje sistemoje.

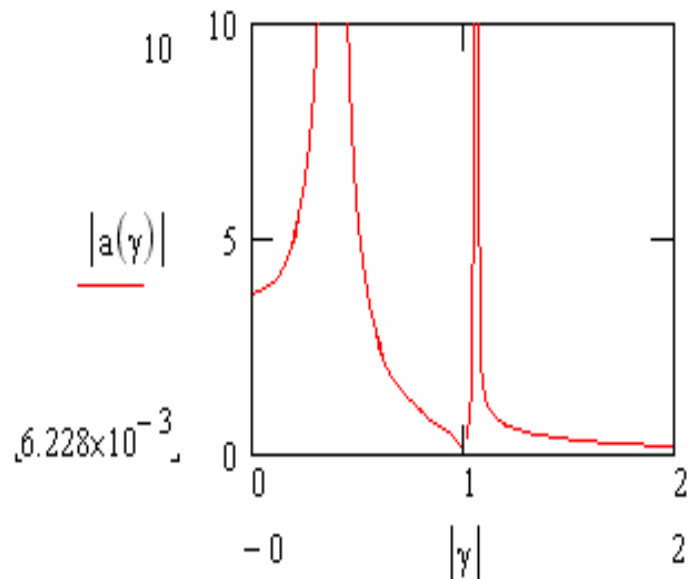
LITERATŪRA

1. Arnold, F. R. Steady – state behavior of systems provided with nonlinear dynamic vibration absorbers, *J. Appl. Mech.* v 22, 1955. p. 487.
2. Алексеев, И. М., Сборовский А. К. Судовые виброгасители, Л. Судпромгиз, 1962. p. 315.
3. Бауер, Г. Ф. Установившиеся гармонические и комбинационные колебания нелинейного динамического поглотителя колебаний, *Прикладная механика Е33* (перевод), Мир, No.1, 1966.
4. Карамышкин, В. В. Замечание о характере резонансного движения механической системы с центробежным вибратором, *Вестник МГУ*, Nr. 1, 1967.
5. Карамышкин, В. В. Колебания балки с динамическим гасителем / Симпозиум. Новые методы исследований шумов и вибраций, кибернетическая диагностика машин и механизмов, тезисы докладов, Каунас, 1970.
6. Pust L., Szollos O. Forced irregular oscillations of two degrees of freedom nonlinear systems / 2 nd. European nonlinear oscillations Conference, Prague, September 9-19, 1996.
7. Nainys V., Zaksienė G. Suppression of mechanical oscillations in a nonlinear system / The 6-th International conference, Environmental Engineering Volume 1, May 26-27, 2005, Vilnius.2005. p. 185-190.
8. Pipes, L. A. Analysis of a nonlinear dynamic vibration absorber, *J. Appl. Mech.*, V.20, 1953. p. 515.
9. Потехин, А. Ф. О выборе оптимальной упругой характеристики нелинейного гасителя колебаний, *Тр. Томбовского ин-та хим. машиностр.*, 1970.
10. Roberson, R. E. Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber, *Journal of the Franklin Institute*, V 254, 2002. p. 205 – 220.
11. Сринивасан. Установившиеся колебания балок, поддерживаемых нелинейными пружинами, перевод, *Фак. техн. и космонивтика*, Т 4 No. 10, 1966.
12. Thomson, J.J. Vibration suppression using self arranging mass: Effects of adding restoring force / *Journal of Sound and vibration*, 1996. p. 62-68.
13. Фейгин, М. И., К расчету оптимальная параметров демфера сухово трения. *ПММ т. XXУ*, 1981.

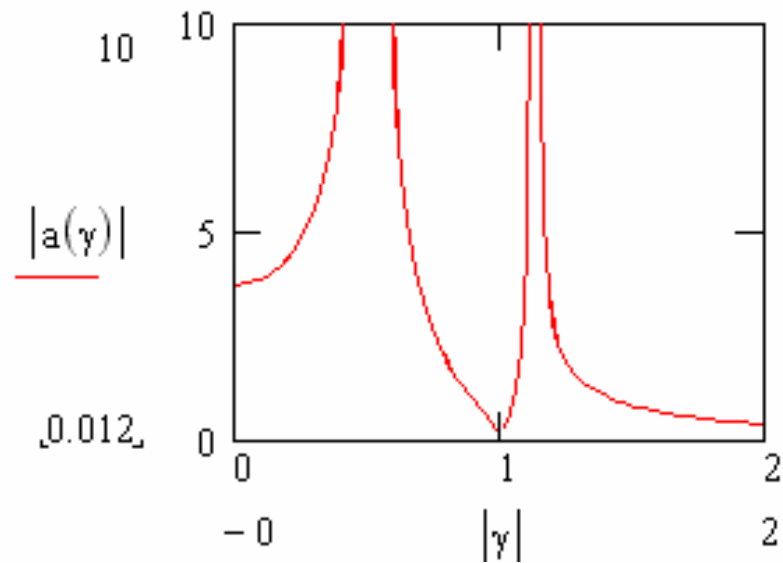
1. PRIEDAS. NETIESINĖS SISTEMOS SU ĮVERŽIMU AMPLITUDINĖS DAŽNINĖS CHARAKTERISTIKOS



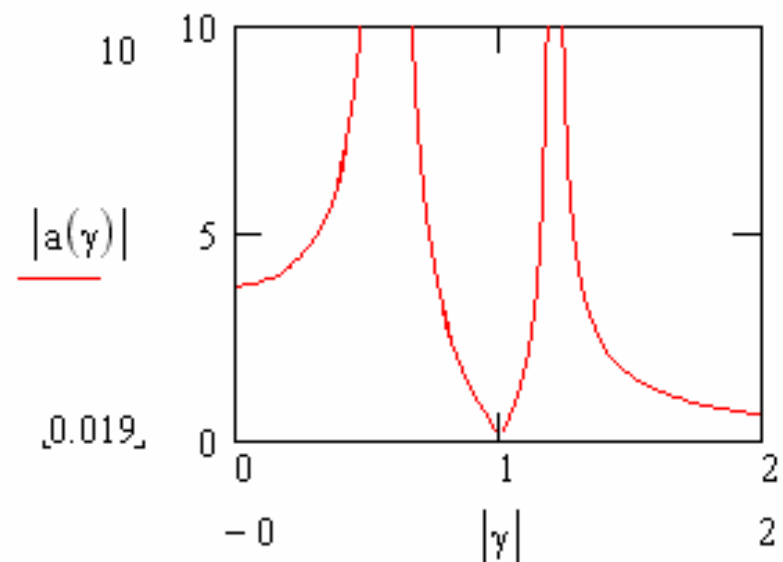
1.1.pav. Netiesinės sistemos su įveržimu amplitudinės dažninės charakteristikos be dinaminio slopintuvo, kai parametrai parinkti tokie : $A=0,1$, $\mu=0,5$, $c=0,8$, $x_y=0,5$, $c_1=0.5$.



1.2 pav. Netiesinės sistemos su įveržimu amplitudinės dažninės charakteristikos su dinaminio slopintuvu, kai parametrai parinkti tokie : $A=1$, $\mu=0,1$, $c=0,5$, $x_y=0,4$, $c_1=0.3$.

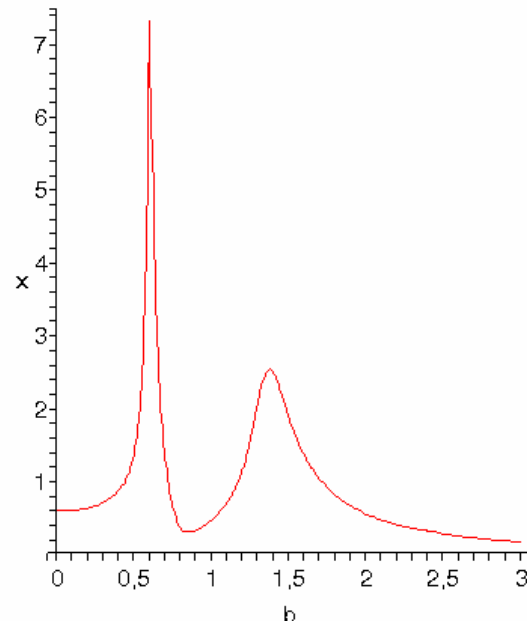


1.3 pav. Netiesinės sistemos su įveržimu amplitudinės dažninės charakteristikos su dinamiiniu slopintuvu, kai parametrai parinkti tokie : $A=1$, $\mu=0,2$, $c=0,5$, $x_y=0,4$, $c_1=0,3$.

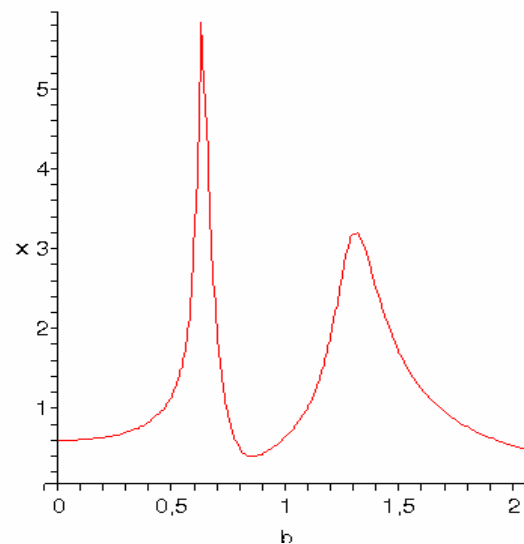


1.4 pav. Netiesinės sistemos su įveržimu amplitudinės dažninės charakteristikos su dinamiiniu slopintuvu, kai parametrai parinkti tokie : $A=1$, $\mu=0,3$, $c=0,5$, $x_y=0,4$, $c_1=0,3$.

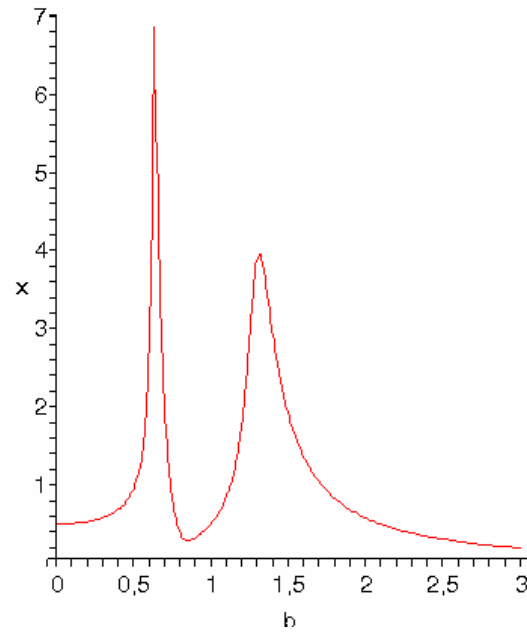
2. PRIEDAS. FRIKCINIO DINAMINIO SLOPINTUVO TAIKYMAS NETIESINEI SISTEMAI SU ĮVERŽIMU. AMPLITUDINĖS DAŽNINĖS CHARAKTERISTIKOS



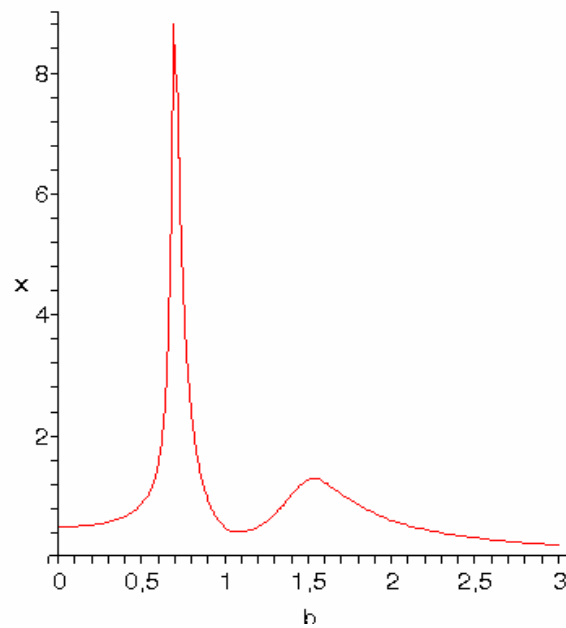
2.1 pav. Netiesinės sistemos su frikciniu dinaminio slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai parametrai parinkti tokie : $\mu=0,8$, $a=0,8$, $x_y=0,4$, $\xi=0,1$.



2.2 pav. Netiesinės sistemos su frikciniu dinaminio slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai parametrai parinkti tokie : $\mu=0,8$, $a=0,8$, $x_y=0,4$, $\xi=0,3$.

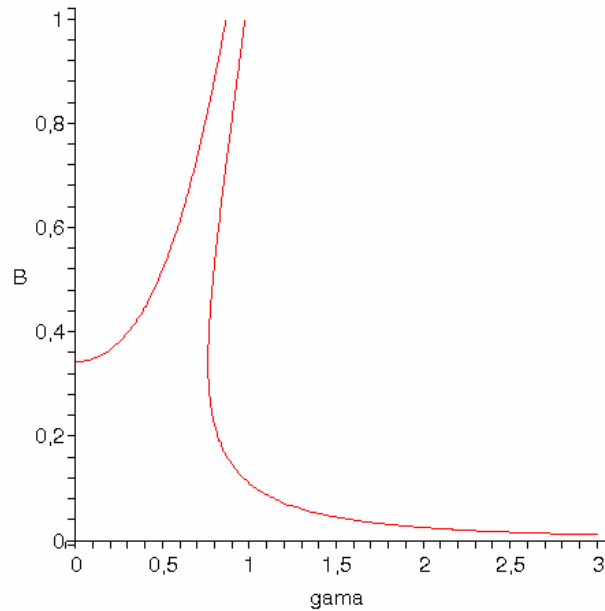


2.3 pav. Netiesinės sistemos su frikciniu dinaminio slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai parametrai parinkti tokie : $\mu=0,8$, $a=0,6$, $x_y=0,4$, $\xi=0,5$.

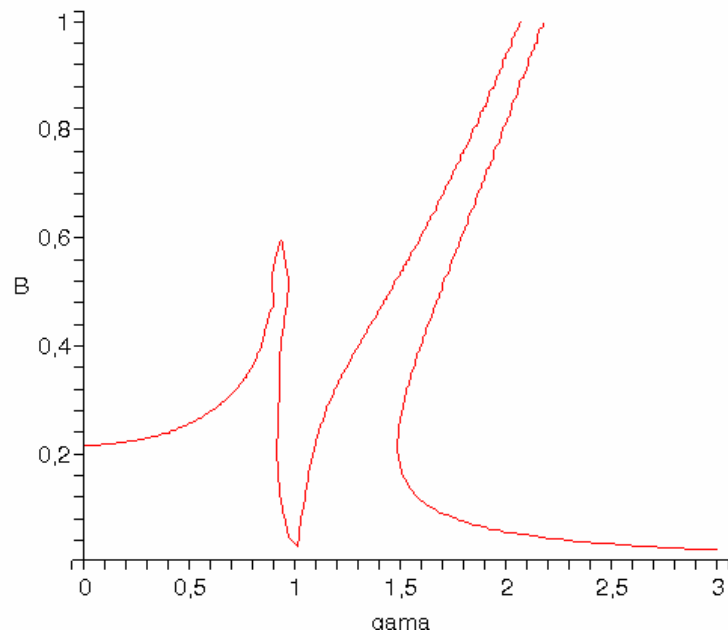


2.4 pav. Netiesinės sistemos su frikciniu dinaminio slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai parametrai parinkti tokie : $\mu=0,4$, $a=1$, $x_y=0,4$, $\xi=0,6$.

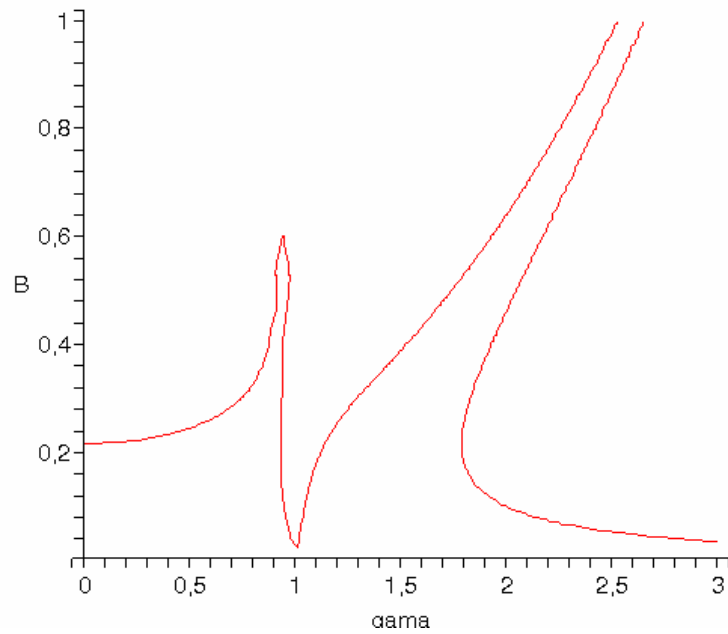
3. PRIEDAS. DINAMINIO SLOPINTUVO TAIKYMAS SISTEMAI, KAI TAMPRUMO JĖGA LYGI $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$. AMPLITUDINĖS DAŽNINĖS CHARAKTERISTIKOS



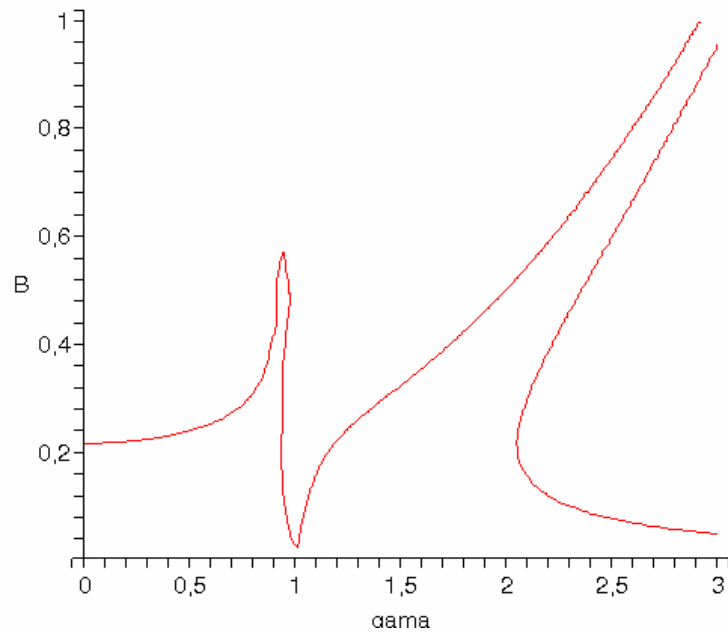
3.1 pav. Netiesinės sistemos, kai tamprumo jėga lygi $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$ amplitudinės dažninės charakteristikos be dinaminio slopintuvo, kai parametrai parinkti tokie : $A=0,2$, $c=0,1$, $x_y=0,5$.



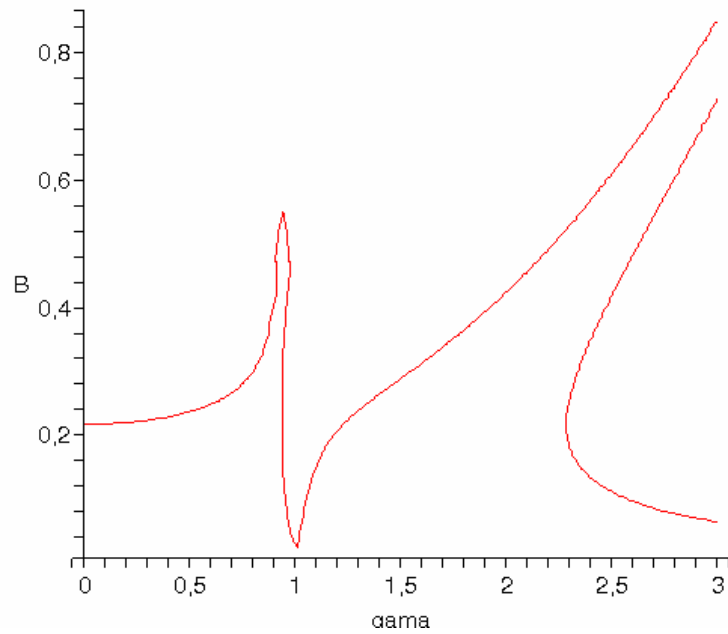
3.2 pav. Netiesinės sistemos su slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai tamprumo jėga lygi $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$ ir parametrai parinkti tokie : $A=0,1$, $c=0,4$, $c_1=0,04$, $\mu=0,2$.



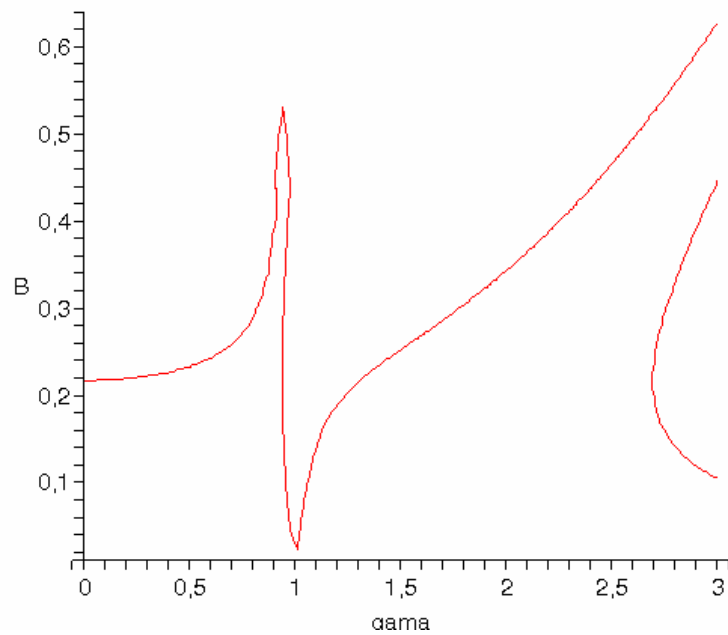
3.3 pav. Netiesinės sistemos su slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai tamprumo jėga lygi $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$ ir parametrai parinkti tokie : $A=0,1$, $c=0,4$, $c_1=0,04$, $\mu=0,3$.



3.4 pav. Netiesinės sistemos su slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai tamprumo jėga lygi $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$ ir parametrai parinkti tokie : $A=0,1$, $c=0,4$, $c_1=0,04$, $\mu=0,4$.



3.5 pav. Netiesinės sistemos su slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai tamprumo jėga lygi $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$ ir parametrai parinkti tokie : $A = 0,1$, $c = 0,5$, $c_1 = 0,04$, $\mu = 0,5$.



3.6 pav. Netiesinės sistemos su slopintuvu amplitudinės dažninės charakteristikos, kai tamprumo jėga lygi $f(x) = cx^2 \operatorname{sgn} x$ ir parametrai parinkti tokie : $A = 0,1$, $c = 0,5$, $c_1 = 0,04$, $\mu = 0,7$.