KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

Natalja Sinicyna

PAPRASTŲJŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ INTEGRAVIMO METODŲ KONSTRAVIMAS REMIANTIS SILPNĄJA GALIORKINO FORMULUOTE

Magistro darbas

Vadovas
prof. habil. dr. M. K. Ragulskis

KAUNAS, 2008

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. habil.dr. V.Pekarskas
2008 06 09

PAPRASTŲJŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ INTEGRAVIMO METODŲ KONSTRAVIMAS REMIANTIS SILPNĄJA GALIORKINO FORMULUOTE

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
(_______) prof. habil. dr. M.K.Ragulskis
2008 06 05

Recenzentas
(_______) doc. dr. G.S.Dosinas
2008 06 06

Atliko
FMMM-6 gr. studentė
(_______) N. Sinicyna
2008 06 05

KAUNAS, 2008

KVALIFIKCINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, habil. dr., valdybos pirmininko pavaduotojas (BnB NORD Bankas)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., vice-prezidentas projektams (UAB "Baltic Amadeus")

Sinicyna N. Construction of integrators of ordinary differential equations based on Galiorkin‘s weak formulation: Master‘s work in applied mathematics / supervisor Prof. Dr. Habil. M. K. Ragulskis, Department of Mathemtical Research in Systems, Faculty of Fundamental Science, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2008. – p. 77.

SUMMARY

Lots of mathematical models in economics, physics and other spheres of science are discribed in the terms of differential equations and their systems. Not every equation we can solve analytically and find an exact first integral. That‘s why numerical methods, constructed to integrate the differential equations, are actual and become the theme of scientific articles and researches.

In this paper we are talking about the ordinary differential equations of the second order with constant coefficients. And we constructed three numerical integrators of ordinary differential equations based on Galiorkin‘s weak formulation:

1. The first one is based on linear shape functions aproksimating the solution on the one step interval.
2. The second one is based on the shape functions of the second order. There we have a parameter, which allow to control the precision of integrator.
3. The third one is a multistep integrator (3 base points) and it is based on the shape functions of the second order. But there we don‘t have the control parameter.

In this paper we give the formulas of integrators and write how to get them. The first and the second integrator is realized in MatLab 6.5 programme, so there you can find the results of 4 examples of integrating exact differential equations. The precision of integrators is evaluated numerically, by comparing the result with exact first integral and the solution got using Runge-Kutto integrator.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Materialaus taško judėjimo, gamybos apimties kitimo uždaroje ekonominėje sistemoje, harmoninio asciliatoriaus, slopinamųjų svyravimų lygtys, Lotkio-Voltero populiacijų sąveikos, plėšrūno-aukos, kainų išlyginimo pagal aktyvo lygį modeliai - šiuolaikiniame moksle daugelio sričių – kinematikos, termodinamikos, ekonomikos, finansų, elektronikos ir kitų – realių reiškinių matematiniai modeliai aprašomi naudojant diferencialines lygtis arba jų sistemas.

Šiame darbe nagrinėdami diferencialines lygtis tarsime, kad jų išsprendžiamumo sąlygos yra išpildytos, tai yra egzistuoja pakankamai glodi sprendinio funkcija. Tačiau reikia pastebėti, kad palyginus labai nedidelę diferencialinių lygčių dalį galima išspręsti tiksliai ir rasti jų sprendinių analizinę išraišką. Dažniausiai šias lygtis tenka spręsti kompiuterių pagalba naudojant skaitinius integravimo ir interpoliavimo metodus. Todėl bendrasis sprendinio radimo metodas gali būti įvardintas kaip įvairių apytikslių sprendimo modelių panaudojimas. Šiuo metu plačiai naudojami integralinių lygčių modeliai ir modeliai, kurie remiasi diskrečiuoju tinkleliu.

Šiame darbe stengtasi papildyti antros grupės integravimo metodų įvairovę ir sukurti skaitinius integravimo metodus, pritaikytus nehomogeninių paprastų diferencialinių lygčių su pastoviais koeficientais sprendimui, kurie būtų nesunkiai formuluojami ir realizuojami praktiškai, tačiau suteiktų tam tikrą pranašumą prieš klasikinius skaitinius integratorius. Taigi darbo tikslai formuluojami taip:

1. Išvystyti naujus integravimo metodus remaintis Galiorkino integravimo metodo algoritmu.
2. Programiškai realizuoti sukurtus metodus.
3. Skaitiškai patikrinti metodo tinkamumą diferencialinių lygčių sprendimui, tai yra įsitikinti, kad mažėjant integravimo žingsniui apytikslis lygties sprendinys artėja prie tiksliojo.
4. Įvertinti sukurto metodo tikslumą remiantis skaitiniais integravimo rezultatais, lyginant gautą rezultatą su tiksliuoju sprendiniu (jeigu jį galima rasti) ir kitų integratorių apytiksliu rezultatu.
5. Ištirti sukurtų metodų priklausomybę nuo parametrų reikšmių parinkimo.

Darbo pradžioje trumpai apžvelgiame klasikinių - baigtinių skirtumų (išreikštinio, neišreikštinio ir simetrinio Eulerio), prediktoriaus-korektoriaus, Rungės ir Kuto, daugiažingsnių baigtinių skirtumų, neišreikštinio Rungės ir Kuto, klasikinio Galiorkino ir baigtinio elemento, integravimo metodų pagrindiniai principai, formulės privalumai ir trūkumai.

Toliau pagrindinis dėmesys sukoncentruojamas į nehomogeninių paprastųjų diferencialinių lygčių su pilnosiosmis išvestinėmis ir pastoviais koeficientais pradinio uždavinio skaitinį sprendimą. Taigi, nagrinėjama lygtis

$$F(x'', x', x, t) = 0$$

kartu su pradinėmis sąlygomis

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_0'.$$

Remiantis Galiorkino integravimo metodo silpnąja formuluote darbe išvystomos trys naujos šio metodo modifikacijos, atitinkamai parenkant formos funkcijas, kuriomis vieno žingsnio intervale aproksimuojamas sprendinys, ir keičiant mazgų skaičių. Du metodai yra vienažingsniai (dviejų mazgų schema):

- Pirmajame metode nagrinėjamas pats paprasčiausias atvejis, kai sprendinys kiekviename integravimo žingsnyje aproksimuojamas dviejų tiesinių funkcijų atkarpomis.
- Antrajame metode įvedamas papildomas kontrolinis parametras. Jo reikšmių kitimas leistinose ribose leis kontroliuoti diferencialinės lygties integravimo tikslumą. Šiuo atveju aproksimuojančiomis funkcijomis tampa antros eilės daugianiariai.

Trečiasis metodas – daugiažingsnis skaitinio integravimo metodas. Šiuo atveju ieškant sprendinio naudojama trijų mazgų schema. Tikslusis sprendinys dviejų žingsnių intervale aproksimuojamas trimis kvadratinėmis funkcijomis, todėl kaip ir tiesinių formos funkcijų atveju dviejų mazgų schemoje gaunamas metodas, neturintis parametrų, leidžiančių kontroliuoti integravimo paklaidų. Metodo tikslumas gali būti didinamas tik mažinant integravimo žingsnį.

Darbe aprašytas pilnasis visų integratorių formulių išvedimas ir pateikiami kelių pavyzdžių skaitinių realizacijų su matematiniu programiniu paketu MatLab 6.5 rezultatai (programos tekstus galima rasti šiuo darbo prieduose). Naudojant šiuos metodus nebūtina visame intervale, kuriame ieškamos diferencialinės lygties sprendinys, integruoti ją tuo pačiu žingsniu. Gali būti taikomas adaptyvaus integravimo žingsnio parinkimo algoritmas, apie kurį rašoma šio darbo istorinėje apžvalgoje.

Metodų tikslumo ir tinkamumo analizė atliekama skaitiškai. Gautus skaitinius sprendinius lyginame su tiksliais diferencialinių lygčių sprendiniais bei kitų integratorių skaitiniais rezultatais ir apskaičiuojame suminę absoliučių skirtumų tarp skaitinio ir tiksliojo sprendinių paklaidą.

Atliktas darbas yra matematinės bazės ir programinės įrangos paruošimas nuodugnesnei ir tikslesnei sukurtų integratorių analizei. Čia nepateikiamas atsakymas, kokiai paprastų diferencialinių lygčių su pastoviais koeficientais grupei, kuris metodas geriausiai tinka. Taip pat atviras lieka klausimas apie sukurtų metodų pranašumą prieš klasikinius integratorius.

1. KLASIKINIŲ SKAITINIŲ INTEGRAVIMO METODŲ APŽVALGA

Jeigu sudarant tam tikro reiškinio matematinį modelį mus dominantis procesas priklauso tik nuo vieno kintamojo, gausime paprastą diferencialinę lygtį:

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X), \tag{1}$$

čia $X = X(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_M(t))^T$ yra ieškomasis funkcijų vektorius, $F(t, X)$ - išorines jėgas aprašantis vektorius. Diferencialinė lygtis (1) kartu su pradine sąlyga

$$X(t_0) = X_0 \tag{2}$$

sudaro pradinį paprastosios diferencialinės lygties (PDL) uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = F(t,X), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{3}$$

Trumpai apžvelkime klasikinius ir plačiai naudojamus skaitinio integravimo metodus.

Bigtinių skirtumų schema yra pats paprasčiausias būdas aproksimuoti diferenciavimo operatorių. Todėl vieno iš seniausių ir plačiausiai naudojamų metodų diferencialinės lygties sprendimui esmę sudaro perėjimas nuo diferencialinės lygties prie skirtuminės, aproksimuojant išvestines baigtiniais skirtumais. Šiuo atveju atsiranda dviejų rūšių paklaidos – diskretizavimo ir nukirpimo (antroji siejama su tuo, kad skirtumo opertorius gali būti nagrinėjamas, kaip baigtinis Tailoro eilutės pirmųjų narių skaičius).

1.1. BAIGTINIŲ SKIRTUMŲ METODAS

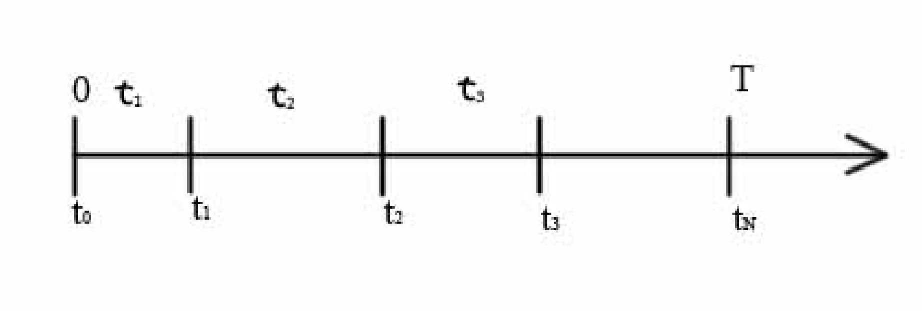
Diferencialinis uždavinys aproksimuojamas baigtinio mato (bendru atveju netiesinių) algebrinių lygčių sistema atliekant du pagrindinius žingsnius:

1. Apibrėžimo srities diskretizacija.
2. Išvestinių aproksimacija baigtiniais skirtumais.

Pirmame etape visas intervalas $0 \le t \le T$, kuriame ieškomas sprendinys, skaidomas į mažesnius intervalus – įvedamas taip vadinamas diskretusis tinklelis pagal koordinatę t:

$$w_t = \{t_n : t_n = t_{n-1} + \tau_n; n = 1,..., N; t_0 = 0; t_N = T\}, \tag{5}$$

čia $\tau_n > 0$ yra diskrečiojo tinklelio žingsnis, t_n vadinamas diskrečiojo tinklelio mazgu.



1 pav. Diskrečiojo tinklelio pavyzdys

Diskretusis tinklelis, kurio žingsnis yra pastovus, vadinamas tolygiuoju:

$$w_t = \{t_n : t_n = n\tau; n = 0,1,...,N; t_N = T\} \tag{6}$$

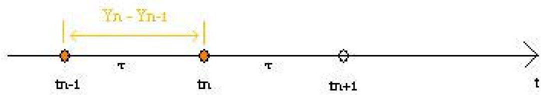
Diskrečiojo tinklelio mazguose skaičiuojamas PDL pradinio uždavinio sprendinio artinys, kuris žymimas:

$$Y_n = Y(t_n) = (y_{n1}, y_{n2}, ..., y_{nM})^T, n = 0,1,...,N. \tag{7}$$

Tokiu būdu gaunamas baigtinis skaičius nežinomųjų. Žinodami sprendinio artinius tinklo mazguose, taikydami interpoliavimo metodus, galime apskaičiuoti jo reikšmes ir kituose taškuose. Svarbu tik taip pasirinkti interpoliavimo funkcijas, kad jų aproksimacijos tikslumas būtų ne mažesnis už apskaičiuoto artinio tikslumą diskrečiojo tinklo mazguose.

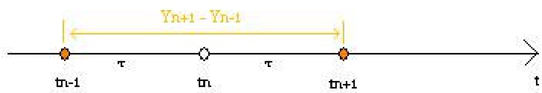
Antrame etape diskrečiojo tinklo mazguose tolydžios funkcijos išvestinė aproksimuojama baigtiniais skirtumais. Kalbant apie pirmos eilės išvestinę, galimi trys būdai:

1. Kairioji schema: $\dot{y}_k = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{\tau}$



2. Dešinioji schema: $\dot{y}_d = \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau}$

3. Centrinė schema: $\dot{y}_c = \dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau}$



Diferencialinėje lygtyje (1) pakeitę išvestinę baigtinių skirtumų antrąja formule taške $t = t_n$ gausime baigtinių skirtumų lygtį:

$$\frac{Y_{n+1} - Y_n}{\tau_{n+1}} = F(t_n, Y_n) \tag{8}$$

Baigtinių skirtumų lygtis (8) ($n = 0,1,...,N-1$), kartu su pradine sąlyga $Y_0 = X_0$, sudaro *baigtinių skirtumų uždavinį*.

1.2. EULERIO METODAI

Aprašytas PDL sistemos pradinio uždavinio sprendimo baigtinių skirtumų metodas vadinamas *išreikštiniu Eulerio metodu.* Jis paprastai realizuojamas, nes sprendinio reikšmės apskaičiuojamos pagal išreikštinę formulę:

$$Y_{n+1} = Y_n + \tau_{n+1} F(t_n, Y_n) \tag{9}$$

Jei dešinėje pusėje esančios funkcijos reikšmę skaičiuosime *(n+1)*-jame mazge gausime *neišreikštinį Eulerio metodą:*

$$\frac{Y_{n+1} - Y_n}{\tau_{n+1}} = F(t_{n+1}, Y_{n+1}) \tag{10}$$

Šiuo atveju ieškant diskrečiojo sprendinio laiko momentu t_{n+1} tenka spręsti (paprastųjų iteracijų arba Niutono metodu) netiesinių lygčių sistemą:

$$Y_{n+1} - \tau_{n+1} F(t_{n+1}, Y_{n+1}) = Y_n \tag{11}$$

Trečioji galima formuluotė - *simetrinis Eulerio metodas* – dešinėje pusėje imamas funkcijos reikšmių *n*-tajame ir *(n+1)*-jame mazguose vidurkis :

$$\frac{Y_{n+1} - Y_n}{\tau_{n+1}} = \frac{F(t_{n+1}, Y_{n+1}) - F(t_n, Y_n)}{2} \tag{12}$$

Šis metodas taip pat yra neišreikštinis, todėl vėl teks spręsti netiesinių lygčių sistemą:

$$Y_{n+1} - \frac{\tau_{n+1}}{2} F(t_{n+1}, Y_{n+1}) = Y_n + \frac{\tau_{n+1}}{2} F(t_n, Y_n) \tag{13}$$

Kalbėdami apie vieno arba kito Eulerio metodo privalumus, turime pabrėžti, kad išreikštinio metodo realizacija yra ekonomiškesnė, kas yra aktualu sprendžiant dideles PDL sistemas. Tačiau ir išreikštinio, ir neišreikštinio Eulerio metodų tikslumo eilė yra pirmoji, tuo tarpu simetrinio metodo – antroji. Todėl apskaičiuojant PDL pradinio uždavinio sprendinį numatytu tikslumu, simetrinio metodo atveju gali būti naudojamas didesnis žingsnis.

1.3. PREDIKTORIAUS-KOREKTORIAUS METODAS

Prediktoriaus-korektoriaus metodas – dar vienas išreikštinis baigtinių skirtumų metodas, kurio tikslumo eilė yra antroji. Jeigu simetrinio Eulerio metodo (12) išraiką pakeisime lygtimi:

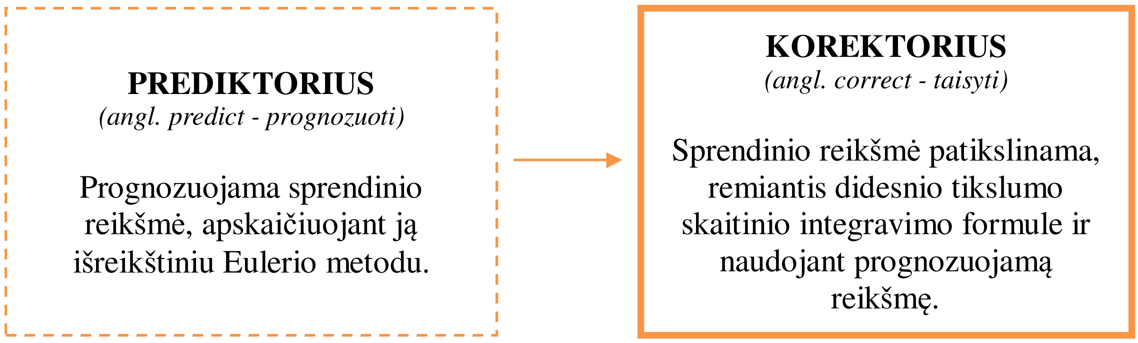
$$\frac{Y_{n+1} - Y_n}{\tau_{n+1}} = \frac{F(t_{n+1}, Y_{n+1}) + F(t_n, Y^*)}{2}, \tag{14}$$

jo tikslumo eilė nepasikeis. Pagalbinė funkcija Y^* apskaičiuojama taip, kad imdami diferencialinio uždavinio sprendinį X gautume lygybę:

$$\left\| F(t_{n+1}, X_{n+1}) - F(t_{n+1}, X^*) \right\| \le C\tau^2 \tag{15}$$

Įrodoma, kad Y^* galima apskaičiuoti išreikštiniu Eulerio metodu:

$$Y^* = Y_n + \tau_{n+1} F(t_n, Y_n) \tag{16}$$



2 pav. Prediktoriaus-korektoriaus metodo algoritmo schema

1.4. ADAPTYVUS DISKREČIOJO ŽINGSNIO τ PARINKIMAS

Diferencialinio uždavinio sprendinio kitimas nebūtinai turi būti tolygus visame nagrinėjamame intervale: greito didėjimo arba mažėjimo intervalus gali keisti santykinai lėtas sprendinio kitimas ir atvirkščiai. Todėl to paties žingsnio parametro τ naudojimas visame intervale $[0, T]$ nėra optimalus.

Tarkime, kad naudodami vieną iš anksčiau aprašytų metodų išsprendėme pradinį diferencialinį uždavinį (3) ir gavome skaitinį sprendinio artinį Y_{n+1}. Jį lyginsime su pagalbinio PDL pradinio uždavinio

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = F(t, X), \\ X(t_n) = Y_n. \end{cases} \tag{17}$$

sprendiniu $X(t_{n+1})$, tai yra kontroliuosime paklaidą, daromą vienu žingsniu.

Diskretusis žingsnis τ_{n+1} parenkamas taip, kad būtų išpildyta sąlyga

$$\left\| Y_{n+1} - X(t_{n+1}) \right\| \le \varepsilon \tag{18}$$

Kadangi pagalbinio diferencialinio uždavinio (19) tiksli sprendinio reikšmė nėra žinoma, tai praktikoje naudojami aposterioriniai paklaidos įverčiai. Rungės metodo aposteriorinis paklaidos įvertis atrodo taip:

$$\delta(\tau_{n+1}) = \frac{Y_{n+1} - \tilde{Y}_{n+1}}{2^{p+1} - 1}, \tag{19}$$

čia Y_{n+1} - (3) uždavinio sprendinio artinys, apskaičiuotas su žingsniu τ_{n+1}; $\tilde{Y}_{n+1}$ - to paties uždavinio sprendinio artinys, apskaičiuotas su žingsniu $0{,}5 \cdot \tau_{n+1}$; p – Rungės metodo tikslumo eilė.

Jeigu aposteriorinis paklaidos įvertis rodo, kad paklaida yra per didelė

$$\|\delta(\tau_{n+1})\| > \varepsilon, \tag{20}$$

tai žingsnis τ_{n+1} mažinamas ir integravimo algoritmas kartojamas. Dažniausiai naudojama tokia žingsnio perskaičiavimo formulė:

$$\tau_N = \tau_{n+1} \min\left(d_1, \max\left(d_2, 0.85\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{1/(p+1)} \right)\right), \tag{21}$$

Daugiklis 0,85 padidina garantiją, kad naujas integravimo algoritmo žingsnis, atliktas su prognozuojamu parametru τ_N bus sėkmingas. Daugiklis d_1 (paprastai $1{,}5 \le d_1 \le 5$) neleidžia diskrečiam parametrui τ didėti labai greitai, o daugiklis d_2 riboja τ mažinimą po nesėkmingo bandymo.

Taigi, adaptyviame algoritme integravimo žingsnis yra mažinamas, kai neišpildyta tikslumo sąlyga, arba didinamas, kai eiliniame žingsnyje padaryta paklaida mažesnė už leistiną.

1.5. RUNGĖS IR KUTO METODAS

Apibrėžimas: Tegu s – sveikas teigiamas skaičius (etapų skaičius), $a_{21}, a_{31}, a_{32}, ..., a_{s1}, a_{s2}, ..., a_{s,s-1}$, $b_1, ..., b_s$, $c_2, ... c_s$ - realieji koeficientai. Tuomet metodas

$$\begin{aligned}
&k_1 = F(t_n, Y_n),\\
&k_2 = F(t_n + \tau_{n+1}c_2, Y_n + \tau_{n+1}a_{21}k_1),\\
&k_3 = F(t_n + \tau_{n+1}c_3, Y_n + \tau_{n+1}(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)),\\
&...\\
&k_s = F(t_n + \tau_{n+1}c_s, Y_n + \tau_{n+1}(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + ... + a_{s,s-1}k_s)),\\
&Y_{n+1} = Y_n + \tau_{n+1} \cdot \sum_{j=1}^{s} b_j k_j \ .
\end{aligned} \tag{22}$$

vadinamas s-pakopiu išreikštiniu Rungės ir Kuto metodu.

Šių sąlygų esmė yra ta, kad visi taškai, kuriuose apskaičiuojamos funkcijos *F(t,X)* reikšmės, yra pirmos eilės tikslumo sprendinio artiniai ir jie parenkami taip, kad gautojo metodo aproksimacijos tikslumas būtų kuo didesnis.

Literatūroje Rungės ir Kuto metodai aprašomi lentele:

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{s,s-1} & \\ \hline & b_1 & b_2 & \ldots & b_{s-1} & b_s \end{array} \tag{23}$$

Konkrečiai s reikšmei visada gaunamas ne vienas Rungės ir Kuto metodas, bet metodų šeima, priklausanti nuo vieno ar kelių parametrų. Šie parametrai parenkami, remiantis papildomis sąlygomis: algoritmo realizavimo tikslumu, stabilumo reikalavimu arba kitais krieterijais. Reikia pastebėti, kad pakopų skaičius didėja greičiau, negu metodo aproksimavimo tikslumo eilė.

1 lentelė

Rungės ir Kuto metodo etapų skaičiai ir tikslumo eilės

Etapų skaičius	s	1	2	3	4	5	6	7	8
Tikslumo eilė	p	1	2	3	4	4	5	6	6

Naudojant Rungės ir Kuto metodą diferencialinių lygčių integravimui viename žingsnyje funkcijos $F(t, X)$ reikšmės skaičiuojamos keliuose taškuose, tačiau kitame žingsnyje šios reikšmės jau nenaudojamos – tai yra pagrindinis aprašyto metodo trūkumas. Toliau apžvelgsime tuos metodus, kuriuose tos pačios $F(t, X)$ reikšmės naudojamos keliems algoritmo žingsniams.

1.6. DAUGIAŽINGSNIAI BAIGTINIŲ SKIRTUMŲ METODAI

Pažymėkime:

$$F_k = F(t_k, Y_k),\ k = 0,1,..,n \tag{24}$$

Daugiažingsniu baigtinių skirtumų metodu vadiname algoritmą

$$\frac{a_0 Y_n + a_1 Y_{n-1} + \ldots + a_m Y_{n-m}}{\tau_n} = b_0 F_n + b_1 F_{n-1} + \ldots + b_m F_{n-m}, \tag{25}$$

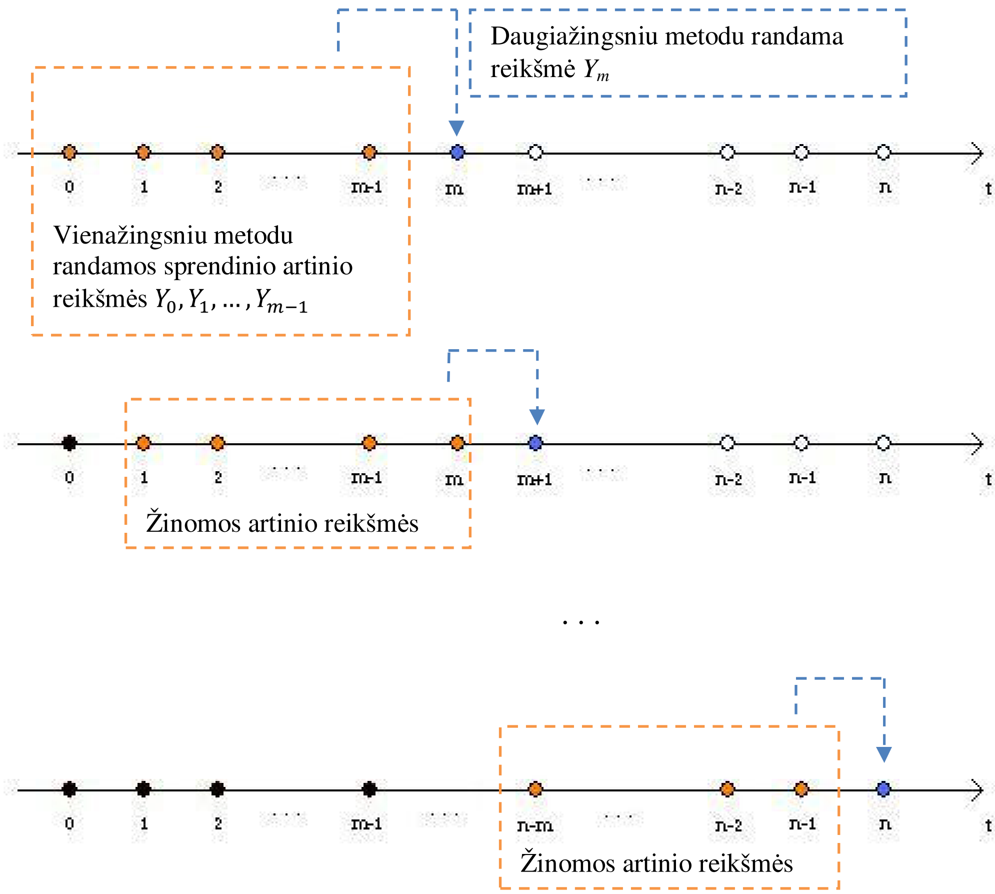
čia m – žingsnių skaičius.

Daugiažingsnis metodas vadinamas išreikštiniu, jeigu $b_0 = 0$, ir neišreikštiniu, jeigu $b_0 \neq 0$.

Šio metodo koeficientai apibrėžti konstantos tikslumu, todėl formuluojama normavimo sąlyga:

$$\sum_{k=0}^{m} b_k = 1 \tag{26}$$

(25) formulė gali būti taikoma tik tuomet, kai $m \le n$, todėl skaičiavimo pradžioje sprendinio artinio reikšmes $Y_0, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ tarime apskaičiuoti kokiu nors vienažingsniu metodu.



3 pav. m-žingsnio baigtinių skirtumų metodo algoritmo schema

Atskirą daugiažingsnių baigtinių skirtumų klasę sudaro Adamso metodai:

$$\frac{Y_n - Y_{n-1}}{\tau} = \sum_{k=0}^{m} b_k F(t_{n-k}; Y_{n-k}) \tag{27}$$

Jeigu $b_0 = 0$, tai gauname išreikštinį Adamso ir Bashfortho metodą. Jei $b_0 \neq 0$ - neišreikštinį Adamso ir Moultono metodą. Norint rasti koeficientus b_k, užtenka nagrinėti vieną diferencialinę lygtį ($M = 1$), kuri integruojama intervale $[t_{n-1}; t_n]$.

$$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t, u) du \tag{28}$$

Adamso metodo formulės gaunamos aproksimuojant integralą skaitinio integravimo formulėmis, dažniausiai naudojamas interpoliacinis Niutono daugianaris arba neapibrėžtinių koeficientų metodas.

Daugiažingsnio metodo aproksimacija yra *p*-osios tikslumo eilės, jei koeficientai apskaičiuojami pagal formules:

$$a_0 = -\sum_{k=1}^{m} a_k \, , b_0 = 1 - \sum_{k=1}^{m} b_k \tag{29}$$

Kiti koeficientai randami išsprendus tiesinę lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k = -1, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m} k^{l-1}(ka_k + lb_k) = 0, \;\; l = 2,3,\dots,p. \end{cases} \tag{30}$$

Daugiažingsnio metodo tikslumo eilė negali būti didesnė už *2m*. Išreikštinės schemos atveju, kai $b_0 = 0$, didžiausia aproksimacijos eilė yra *2m-1*. Analogiškai apskaičiuojami ir Adamso metodo koeficientai:

$$\begin{cases} b_0 = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{m} b_k \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m} k^{l-1} b_k = \frac{1}{l}, \;\; l = 2,3,\dots,p. \end{cases} \tag{31}$$

1.7. DAUGIAŽINGSNIŲ SKIRTUMŲ METODŲ STABILUMAS

Iki šiol kalbėdami apie diferencialinių lygčių sprendimo metodus, atkreipėme dėmesį tik į metodo tikslumą, tačiau yra dar viena svarbi integravimo metodų savybė – stabilumas. Stabilumas siejamas su modelinių diferecialinių lygčių sprendinių kokybinėmis charakteristikomis – akivaizdu, kad skaitinis metodas, kuris netinka net ir paprasčiausioms diferencialinėms lygtims spręsti, negali būti taikytinas sudėtingesniems skaičiavimams.

Sakysime, kad baigtinių skirtumų metodas yra *stabilus*, jei šiuo metodu aproksimavę PDL uždavinį, turintį aprėžtą sprendinį, gauname taip pat aprėžtą diskretųjį sprendinį. Jeigu diskretusis sprendinys yra aprėžtas tik tam tikroms parametro τ reikšmėms, tai baigtinių skirtumų metodas yra *sąlygiškai stabilus*.

Nagrinėkime modelinį uždavinį:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\lambda x, \lambda > 0, \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{32}$$

Šio uždavinio sprendinys yra $u(t) = e^{-\lambda t}$ - nedidėjanti ir aprėžta funkcija.

Pagal apibrėžimą daugiažingsnis metodas yra stabilus, jei skirtuminės lygties, gaunamos pereinant prie daugiažingsnio metodo (25):

$$\sum_{k=0}^{m}(a_k + \tau\lambda b_k)y^{n-k} = 0 \tag{33}$$

sprendinys yra aprėžtas. Schemos stabilumas priklauso ir nuo parametrų a_k, ir nuo b_k. Lygtis (33) yra tiesinė skirtumų lygtis su pastoviais koeficientais ir jos bendrasis sprendinys gali būti išreikštas atskirų sprendinių $y(t_n) = q^n$ tiesine kombinacija. Įrašę atskirąjį sprendinį į nagrinėjamą lygtį, gauname charakteringąją lygtį:

$$\sum_{k=0}^{m}(a_k + \tau\lambda b_k)q^{m-k} = 0 \tag{33}$$

Apibrėžimas: Baigtinių skirtumų schema yra stabili, kai jos charakteringosios lygties visų šaknų moduliai yra ne didesni už vienetą, o tarp šaknų, kurių modulis lygus vienam, nėra kartotinių.

Tiriant metodo stabilumą tiesiogiai pagal apibrėžimą, reikia rasti visas charakteristinės lygties šaknis, o paskui ištirti, kada jos tenkina stabilumo sąlygą. Ši analizė gali būti supaprastinta. Aibė tokių λ, kai diskretusis metodas yra stabilus, vadinama *stabilumo sritimi*, kurios kontūrinius taškus rasime į charakteristinę lygtį įrašę reikšmes $q = 1$ ir $q = -1$.

1.8. A STABILUMAS

Aibė kompleksinės plokštumos taškų $\mu = \lambda\tau$, kuriuose šis metodas yra stabilus, tai yra visų jo charakteristinės lygties šaknų moduliai yra ne didesni už vienetą, vadinama daugiažingsnio skirtumų metodo stabilumo sritimi.

Baigtinių skirtumų metodas vadinamas A stabiliuoju, jeigu jo stabilumo sričiai

$$A = \{\mu \in C: |q(\mu)| \leq 1\} \tag{34}$$

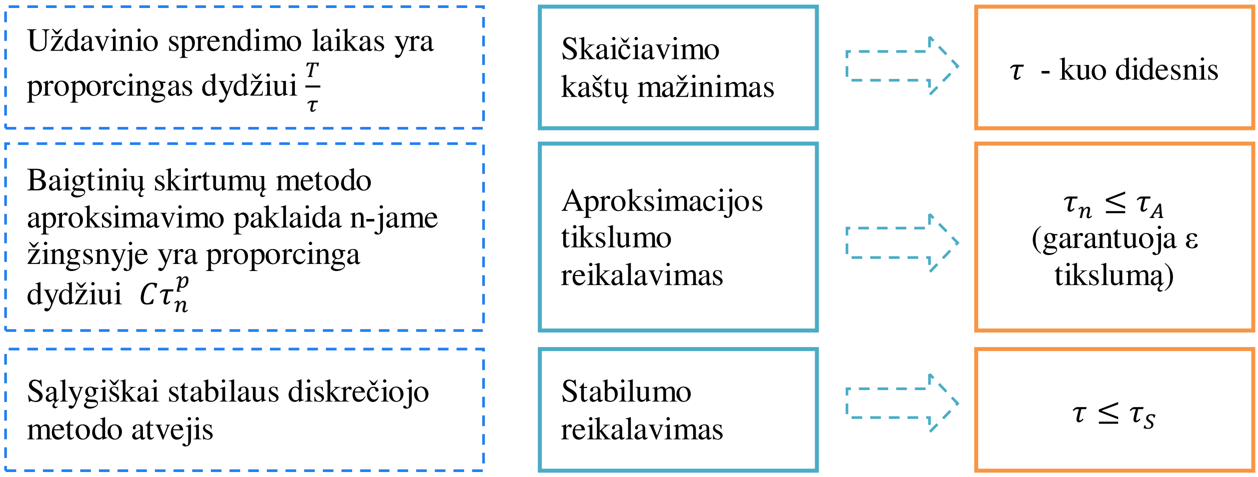
priklauso modelinio diferencialinio uždavinio

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda x, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{35}$$

stabilumo sritis C^-, tai yra visa pusplokštumė $Re\lambda \leq 0$. Taigi A stabilus metodas yra nesąlygiškai stabilus.

1.9. STANDŽIOSIOS PDL SISTEMOS

Diskrečiojo parametro τ parinkimas sprendžiant diferencialines lygtis skaitiniais metodais – kompromiso tarp kelių reikalavimų paieška:



4 pav. Integravimo žingsnio parinkimo schema

Norėdami apskaičiuoti pakankamai tikslų diferencialinio uždavinio sprendinio artinį, turime išpildyti ir aproksimacijos tikslumo, ir diskrečiojo metodo stabilumo sąlygas. Todėl žingsnį τ_n parenkame tokį, kad galiotų nelygybė

$$\tau_n \leq \min(\tau_S, \tau_A) \tag{36}$$

Priklausomai nuo sprendžiamos užduoties žingsnis τ_n vienais atvejais labiau ribojamas aproksimacijos tikslumo, kitais atvejais – stabilumo reikalavimo.

Paprasčiausias standžiųjų PDL apibrėžimas: PDL pradinis uždavinys yra standusis, jei τ_S yra daug mažesnis už τ_A, tai yra stabilumo reikalavimas yra daug griežtesnis už aproksimacijos tikslumo reikalavimą.

1.10. NEIŠREIKŠTINIS RUNGĖS IR KUTO METODAS

Išreikštiniai Rungės ir Kuto metodai nėra A stabilieji, todėl jie nėra tinkami standžiosioms diferencalinėms lygtims spręsti. Joms spręsti tinka neišreikštiniai m-pakopiai Rungės ir Kuto metodai, kurie yra apibrėžiami matrica:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,s-1} & a_{1,s} \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,s-1} & a_{2,s} \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,s-1} & a_{3,s} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array}
\tag{37}
$$

Neišreikštinio Rungės ir Kuto metodo koeficientai randami naudojantis Ležandro daugianariais, kurie rekurentiškai užrašomi taip:

$$
\begin{gathered}
(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \\
L_0(x) = 1, \qquad L_1(x) = x
\end{gathered}
\tag{38}
$$

Rungės ir Kuto koeficientai $c_1, \dots, c_s$ parenkami kaip modifikuoto Ležandro daugianario

$$
\widetilde{L_s(y)} = L_s(2y-1) \tag{39}
$$

šaknys. Tuomet likusieji koeficientai apskaičiuojami vienareikšmiškai, išsprendus tiesinių lygčių sistemą:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & & 1 \\
c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\
c_1^2 & c_2^2 & & c_s^2 \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
c_1^{s-1} & c_2^{s-1} & \cdots & c_s^{s-1}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
a_{11} & & a_{s1} & b_1 \\
a_{12} & \cdots & a_{s2} & b_2 \\
a_{13} & & a_{s3} & b_3 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{1s} & \cdots & a_{ss} & b_s
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
a_1 & & a_s & 1 \\
\frac{a_1^2}{2} & \cdots & \frac{a_s^2}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{a_1^3}{3} & & \frac{a_s^3}{3} & \frac{1}{3} \\
\vdots & \ddots & & \vdots \\
\frac{a_1^s}{s} & \cdots & \frac{a_s^s}{s} & \frac{1}{s}
\end{bmatrix}
\tag{40}
$$

Neišreikštinis Rungės ir Kuto metodas yra A stabilus ir pasižymi didele aproksimacijos tikslumo eile.

1.11. GALIORKINO METODAS

Pareikime prie diferencialinių lygčių integravimo metodo, kuriuo remdamiesi konstruosime naują metodą, atitinkamai pakeičiant jį apibrėžiančius parametrus.

Nagrinėjamas kraštinis uždavinys

$$
\begin{cases}
-\dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), & 0 < x < l \\
-k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_0, & u(l) = \mu_1
\end{cases}
\tag{41}
$$

sprendimo metodo. Tarsime, kad šio uždavinio koeficientai tenkina eliptiškumo sąlygas:

$$k(x) \geq k_0 > 0, \qquad q(x) \geq 0, \qquad \beta \geq 0. \tag{42}$$

(41) lygtį patogu perrašyti operatoriniu pavidalu

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u - f = 0 \tag{43}$$

arba

$$L_1 u = f \tag{44}$$

Galiorkino metodo formulavimas

Apibrėžiama bandomųjų funkcijų aibė

$$\{\varphi_j(x), j = 1, \dots, N\}, \tag{45}$$

kurių pagalba diferencialinio kraštinio uždavinio sprendinys aproksimuojamas suma

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x) \tag{46}$$

Verta atkreipti dėmesį į tai, kad nustatę kol kas nežinomus koeficientus c_i apytikslį sprendinį žinosime visame intervale $[0, l]$, o ne tik atskiruose taškuose, kaip baigtinių skirtumų metodo atveju.

Įvairiai parenkant bandomąsias funkcijas $\{\varphi_i(x)\}$, gaunamos skirtingos Galiorkino metodo modifikacijos, iš jų istoriškai skiriami du variantai: *klasikinis Galiorkino metodas* ir *baigtinių elementų metodas*.

Klasikinis Galiorkino metodas

APIBRĖŽIAMOS bandomosios funkcijos $\varphi_i(x)$, kurios:

1. nėra tapatingai lygios nuliui visame intervale $\varphi_i(x)$.
2. sudaro pilnąją tiesiškai nepriklausomų funkcijų sistemą.*

** Pilnumas garantuoja apytikslio sprendinio y(x) konvergavimą.*
Funkcijų pvz.: laipsninės funkcijos $\{x^i, i = 0,1,\dots,N\}$ *ir trigonimetrinės funkcijos* $\{\sin(i\pi x), i = 1,\dots,N\}$

1

Sprendinys **APROKSIMUOJAMAS** suma:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i(x)$$

c_i – nežinomi koeficientai

6

REIKALAUJAMA, kad paklaida (netiktis) būtų ortogonali visoms bandomosioms funkcijoms:

$$\int_0^l Ly\varphi_j(x)dx = 0, \qquad j = \overline{1,N}.$$

t.y.

$$(Ly, \varphi_j) = 0, \ j = \overline{1,N}.^*$$

** (u,v) – funcijų u ir v skaliarinė sandauga*

2

KEITIMAS
$Ly = L_1y - f$

$$(L_1y - f, \varphi_j) = 0, \qquad j = \overline{1,N}.$$

arba

$$(f, \varphi_j) = (L_1y, \varphi_j), \qquad j = \overline{1,N}.$$

3

$y(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i(x)$

$$\sum_{i=1}^{N} (L_1\varphi_i, \varphi_j)\, c_i = (f, \varphi_j), \qquad j = 1,2,\dots,N.$$

t.y. gaunama tiesinių lygčių sistema $AC = F$, kurios koeficientai apskaičiuojami pagal formules:

$$a_{ij} = (L_1\varphi_j, \varphi_i), \qquad f_i = (f, \varphi_i), \qquad 1 \le i,j \le N$$

4

APSKAIČIUOJAMI nežinomi koeficientai c_i

5

Randamas skaitinis sprendinys

5 pav. Klasikinio Galiorkino metodo algoritmo schema

Pastabos:

1. Funkcinėje analizėje įrodoma, kad, jei funkcija $w(x)$ yra ortogonali visoms pilnosios funkcijų sistemos funkcijoms, tai $w(x) \equiv 0$. Todėl iš sistemos $\int_0^l Ly\varphi_j(x)dx = 0,\ j = \overline{1,N}$ gauname:
$$Ly \to 0, \qquad kai\ \ N \to \infty. \tag{47}$$
Toks sprendinio konvergavimas vadinamas silpnuoju, nes tik skaitinio sprendinio vaizdas Ly konverguoja į diferencialinio uždavinio sprendinio vaizdą.
2. Tiesinių lygčių sistema turi vienintelį sprendinį, jei diferencialinis operatorius L_i yra teigiamai apibrėžtas, t.y.
$$\left(L_1\varphi_i, \varphi_j\right) \geq \gamma(y, y), \qquad \gamma > 0 \tag{48}$$

Pagrindiniai klasikinio Galiorkino metodo trūkumai:

1. Visi tiesinių lygčių sistemos matricos A elementai nelygūs nuliui (matrica yra pilna), todėl apskaičiuodami koeficientus c_i Gauso metodu atliekame $O(N^3)$ aritmetinių veiksmų.
2. Matricos A sąlygotumo skaičius sparčiai didėja, kai didėja N, todėl dėl apvalinimo paklaidų Galiorkino metodo tiesinių lygčių sistemos sprendimas tampa nestabilus.

Baigtinių elementų metodas

APIBRĖŽIAMAS diskretusis tinklelis intervale [0,l]:

$$\overline{w_h} = \{x_0 = 0,\ \ x_i = x_{i-1} + h_{i-0,5},\ \ i = 1,2,\dots,N,\ \ x_N = l\}$$

Tinklelis nebūtinai turi būti tolygus;
Intervalas $[x_{i-1}; x_i]$ vadinamas elementu; Tinklelio $\overline{w_h}$ taškai ir elementai sudaro baigtinių elementų tinklą.

1

APIBRĖŽIAMOS bandomosios funkcijos $\varphi_i(x)$, kurios:

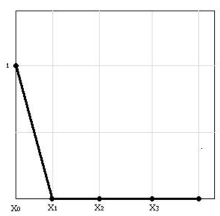
2

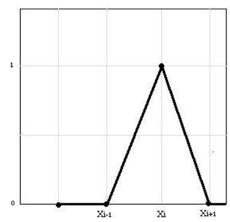
Tenkina interpoliacinės funkcijų aibės savybę:

$$\varphi_i(x) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & kai\ \ i = j, \\ 0, & kai\ \ i \neq j. \end{cases}$$

Yra tiesinės kiekviename intervale $[x_j; x_{j+1}]$.
Tuomet gaunamos dalimis tiesinės funkcijos:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & kai\ x < x_{i-1}, \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h_{i-0,5}}, & kai\ x_{i-1} < x < x_i, \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+0,5}}, & kai\ x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & kai\ x > x_{i+1}. \end{cases}$$





Sprendinys **APROKSIMUOJAMAS** suma:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i \varphi_i(x)$$

Funkcija $\varphi_i(x)$ nelygi nuliui tik intervale $(x_{i-1}; x_{i+1})$

ATLIEKAMI klasikinio Galiorkino metodo veiksmai 2, 3:

3

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i \varphi_i(x)$$

$$\sum_{i=1}^{N} (L_1\varphi_i, \varphi_j)\, y_i = (f, \varphi_j), \qquad j = 1,2,\dots,N.$$

t.y. gaunama tiesinių lygčių sistema $AY = F$, kurios koeficientai apskaičiuojami pagal formules:

$$a_{ij} = (L_1\varphi_j, \varphi_i), \qquad f_i = (f, \varphi_i), \qquad 1 \le i, j \le N$$

4

APSKAIČIUOJAMOS reikšmės y_i

5

RANDAMAS sprendinys bet kuriame elemento $[x_{i-1}; x_i]$ taške:

$$y(x) = y_{i-1}\varphi_{i-1}(x) + y_i\varphi_i(x)$$

6

6 pav. Baigtinių elementų metodo algoritmo schema

2. GALIORKINO METODO MODIFIKACIJOS

Toliau savo darbe apsiribokime PDL uždaviniais, kuriuos sudaro antros eilės paprastosios nehomogeninės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficientais ir pradinės sąlygos. Imdami kaip pagrindą Galiorkino metodų klasę, išvystykime naują diferencialinių lygčių integravimo metodą.

Pradėkime nuo paties paprasčiausio atvejo, kai bandomųjų funkcijų aibę sudaro tiesinės funkcijos.

2.1. APROKSIMACIJA TIESINĖMIS FORMOS FUNKCIJOMIS

2.1.1. FORMULIŲ IŠVEDIMAS

Suformuluokime užduotį. Kaip jau buvo minėta, nagrinėjama antros eilės nehomogeninė pilnųjų išvestinių diferencialinė lygtis su pastoviais koeficientais:

$$F(x'', x', x, t) = 0 \tag{49}$$

Išskleistoje formoje ją galime užrašyti taip:

$$mx'' + hx' + kx = f \Rightarrow mx'' + hx' + kx - f = 0 \tag{50}$$

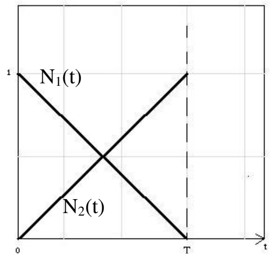
čia *m, h, k* – skaliariniai koeficientai, *f=f(t)* – tam tikra iš anksto žinoma funkcija, *x=x(t)* – ieškoma funkcija.

Laiko ašyje Ot duoti du taškai:

1. t = 0 . Šiame taške žinomos reikšmės: x_0, x_0' (pradinės sąlygos).
2. t = T . Šiame taške reikia rasti reikšmes: x_T, x_T'.

Nagrinėkime patį paprasčiausią atvejį, ir funkciją, jungiančią šiuos du taškus – tai yra sprendinio funkciją viename žingsnyje - aproksimuokime tiesės atkarpa. Tai reiškia, kad mes turime apibrėžti dvi tiesines formos funkcijas $N_1(t)$ ir $N_2(t)$, kurios tenkina kraštines sąlygas:

taškas / funkcija	t = 0	t = T
$N_1(t)$	1	0
$N_2(t)$	0	1



Nesunku įsitikinti, kad šios funkcijos yra tokios:

Pirmoji funkcija: $$N_1(t)=1-\frac{t}{T} \quad (51)$$

Antroji funkcija: $$N_2(t)=\frac{t}{T} \quad (52)$$

Tolimesniam darbui mums patogu įvesti matricas X, X', X'', kurios apskaičiuojamos kaip formos funkcijų atitinkamų išvestinių vektoriaus ir vektoriaus-stulpelio $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}$ sandaugos:

1. $$X=\left[N_1(t), N_2(t)\right]\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}=\left[1-\frac{t}{T}, \frac{t}{T}\right]\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}=N\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}$$

2. $$X'=\left[N_1'(t), N_2'(t)\right]\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}=\left[\frac{dN_1(t)}{dt}, \frac{dN_2(t)}{dt}\right]\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}=\left[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}\right]\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}=N'\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}$$

3. $$X''=\left[N_1''(t), N_2''(t)\right]\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}=\left[\frac{d^2N_1(t)}{dt^2}, \frac{d^2N_2(t)}{dt^2}\right]\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}=[0,0]\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}=[0]=N''\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}$$

Jeigu

$$\tilde{x}=\tilde{x}(t) \quad (53)$$

yra nagrinėjamos diferencialinės lygties (49) sprendinys, tai įstatę jį į lygtį, gauname paklaidą $\varepsilon(t)$:

$$F(\tilde{x}'', \tilde{x}', \tilde{x}, t)=\varepsilon(t) \quad (54)$$

$$\varepsilon(t)=(mN''+hN'+kN)\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}-f \quad (55)$$

Galiorkino metodu šią paklaidą normuojame: padauginę ją iš formos funkcijos, integruojame srityje $V=\{0\le t\le T\}$, kurioje ieškomas lygties sprendinys. Tiksliojo sprendinio atveju paklaida lygi nuliui, todėl keliame šį reikalavimą ir gautajam integralui.

$$\int_0^T N^T\cdot\varepsilon(t)dt=0 \quad (56)$$

(56) lygybė reiškia, kad funkcija $\tilde{x}=\tilde{x}(t)$ tenkina nagrinėjamą diferencialinę lygtį „vidurkine“ (integraline) prasme, kai svorio elementai yra funkcijos $N_1(t)$ ir $N_2(t)$.

Iš (55) ir (56) lygybių gauname:

$$\varepsilon(t)=mX''+(hN'+kN)\cdot\begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}-f \quad (57)$$

$$\int_0^T N^T\cdot\varepsilon(t)dt=m\cdot\int_0^T N^T X''dt+\left(h\cdot\int_0^T N^T N'dt+k\cdot\int_0^T N^T\cdot Ndt\right)\cdot\begin{bmatrix} x0 \\ xT \end{bmatrix}-f\int_0^T N^T dt=0 \quad (58)$$

Remiantis baigtinio elemento silpnosios formuluotės logika integralą su antrąja išvestine X'' integruosime dalimis, nes kitu atveju gausime 0 ir nepavyks išvesti difrencialinės lygties integravimo formulių:

$$\int_0^T N^T X''dt = \int_0^T N^T d(X') = \begin{bmatrix} u = N^T; du = (N')^T dt \\ dv = d(X'); v = X' \end{bmatrix} = N^T X'\Big|_0^T - \int_0^T X'(N')^T dt =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\dfrac{t}{T} \\ \dfrac{t}{T} \end{bmatrix} X'\Bigg|_0^T - \int_0^T X'(N')^T dt = \left[\int_0^T X'(N')^T dt = \int_0^T N' \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix} \cdot (N')^T dt = \int_0^T (N')^T N' dt \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x'_T - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x'_0 - \int_0^T (N')^T N' dt \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x'_0 \\ x'_T \end{bmatrix} - \int_0^T (N')^T N' dt \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}$$

Taigi:

$$\int_0^T N^T X''dt = \begin{bmatrix} -x'_0 \\ x'_T \end{bmatrix} - \int_0^T (N')^T N' dt \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix} \tag{59}$$

Grįžtant prie (58) lygybės:

$$\int_0^T N^T \cdot \varepsilon(t)dt = m\left(\begin{bmatrix} -x'_0 \\ x'_T \end{bmatrix} - \int_0^T (N')^T N'dt \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}\right) + \left(h \cdot \int_0^T N^T N'dt + k \cdot \int_0^T N^T \cdot Ndt\right) \cdot \begin{bmatrix} x0 \\ xT \end{bmatrix} - f\int_0^T N^T dt = 0 \tag{60}$$

$$\left(-m \cdot \int_0^T (N')^T N'dt + h \cdot \int_0^T N^T N'dt + k \cdot \int_0^T N^T \cdot Ndt\right) \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix} - f \cdot \int_0^T N^T dt = -m \cdot \begin{bmatrix} -x'_0 \\ x'_T \end{bmatrix} \tag{61}$$

Atskirai apskaičiuokime įeinančius į (61) išraišką integralus.

Pirmasis integralas:

$$\int_0^T (N')^T N' dt = \int_0^T \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{T} \\ \dfrac{1}{T} \end{bmatrix} \cdot \left[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}\right] dt = \int_0^T \begin{bmatrix} \dfrac{1}{T^2} & -\dfrac{1}{T^2} \\ -\dfrac{1}{T^2} & \dfrac{1}{T^2} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \int_0^T \dfrac{1}{T^2} dt & -\int_0^T \dfrac{1}{T^2} dt \\ -\int_0^T \dfrac{1}{T^2} dt & \int_0^T \dfrac{1}{T^2} dt \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{T^2}t\Big|_0^T & -\frac{1}{T^2}t\Big|_0^T \\ -\frac{1}{T^2}t\Big|_0^T & \frac{1}{T^2}t\Big|_0^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & -\frac{1}{T} \\ -\frac{1}{T} & \frac{1}{T} \end{bmatrix}$$

Antrasis integralas:

$$\int_0^T N^T N' dt = \int_0^T \begin{bmatrix} 1-\frac{t}{T} \\ \frac{t}{T} \end{bmatrix} \cdot \left[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T} \right] dt = \int_0^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{T}\left(1-\frac{t}{T}\right) & \frac{1}{T}\left(1-\frac{t}{T}\right) \\ -\frac{1}{T}\cdot\frac{t}{T} & \frac{1}{T}\cdot\frac{t}{T} \end{bmatrix} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)dt & \frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)dt \\ -\frac{1}{T^2}\int_0^T tdt & \frac{1}{T^2}\int_0^T tdt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T}\left(t\Big|_0^T - \frac{t^2}{2T}\Big|_0^T\right) & -\frac{1}{T}\left(t\Big|_0^T - \frac{t^2}{2T}\Big|_0^T\right) \\ -\frac{1}{T^2}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^T & \frac{1}{T^2}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T}\left(T-\frac{T}{2}\right) & \frac{1}{T}\left(T-\frac{T}{2}\right) \\ -\frac{1}{T^2}\cdot\frac{T^2}{2} & \frac{1}{T^2}\cdot\frac{T^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Trečiasis integralas:

$$\int_0^T N^T \cdot N dt = \int_0^T \begin{bmatrix} 1-\frac{t}{T} \\ \frac{t}{T} \end{bmatrix} \cdot \left[1-\frac{t}{T}, \frac{t}{T} \right] dt = \int_0^T \begin{bmatrix} \left(1-\frac{t}{T}\right)^2 & \frac{t}{T}\left(1-\frac{t}{T}\right) \\ \frac{t}{T}\left(1-\frac{t}{T}\right) & \left(\frac{t}{T}\right)^2 \end{bmatrix} dt ==$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^T\left(1-\frac{2}{T}t+\frac{1}{T^2}t^2\right)dt & \int_0^T\left(\frac{1}{T}t-\frac{1}{T}t^2\right)dt \\ \int_0^T\left(\frac{1}{T}t-\frac{1}{T}t^2\right)dt & \int_0^T\frac{1}{T^2}t^2dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(t-\frac{2}{T}\cdot\frac{t^2}{2}+\frac{1}{T^2}\cdot\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^T & \left(\frac{1}{T}\cdot\frac{t^2}{2}-\frac{1}{T^2}\cdot\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^T \\ \left(\frac{1}{T}\cdot\frac{t^2}{2}-\frac{1}{T^2}\cdot\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^T & \frac{1}{T^2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} T-T+\frac{T}{3} & \frac{T}{2}-\frac{T}{3} \\ \frac{T}{2}-\frac{T}{3} & \frac{T}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{3} & \frac{T}{6} \\ \frac{T}{6} & \frac{T}{3} \end{bmatrix}$$

Ketvirtasis integralas:

$$\int_0^T N^T dt = \int_0^T \begin{bmatrix} 1-\frac{t}{T} \\ \frac{t}{T} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \int_0^T \left(1-\frac{t}{T}\right) dt \\ \int_0^T \frac{t}{T} dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(t - \frac{1}{T}\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^T \\ \frac{1}{T}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T-\frac{T}{2} \\ \frac{1}{T}\cdot\frac{T^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{2} \\ \frac{T}{2} \end{bmatrix}$$

t.y.

$$\int_0^T (N')^T N' dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & -\frac{1}{T} \\ -\frac{1}{T} & \frac{1}{T} \end{bmatrix} \tag{62}$$

$$\int_0^T N^T N' dt = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{63}$$

$$\int_0^T N^T \cdot N dt = \begin{bmatrix} \frac{T}{3} & \frac{T}{6} \\ \frac{T}{6} & \frac{T}{3} \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$\int_0^T N^T dt = \begin{bmatrix} \frac{T}{2} \\ \frac{T}{2} \end{bmatrix} \tag{65}$$

Įrašome gautus rezultatus į (61) sąryšį ir gauname tiesinių lygčių sistemą:

$$\left(-m \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & -\frac{1}{T} \\ -\frac{1}{T} & \frac{1}{T} \end{bmatrix} + h \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} \frac{T}{3} & \frac{T}{6} \\ \frac{T}{6} & \frac{T}{3} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix} = -m \cdot \begin{bmatrix} -x'_0 \\ x'_T \end{bmatrix} + f \cdot \begin{bmatrix} \frac{T}{2} \\ \frac{T}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{T}m - \frac{1}{2}h + \frac{T}{3}k & \frac{1}{T}m + \frac{1}{2}h + \frac{T}{6}k \\ \frac{1}{T}m - \frac{1}{2}h + \frac{T}{6}k & -\frac{1}{T}m + \frac{1}{2}h + \frac{T}{3}k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{2} f + m \cdot x'_0 \\ \frac{T}{2} f - m \cdot x'_T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{T}m - \frac{1}{2}h + \frac{T}{3}k\right)x_0 + \left(\frac{1}{T}m + \frac{1}{2}h + \frac{T}{6}k\right)x_T \\ \left(\frac{1}{T}m - \frac{1}{2}h + \frac{T}{6}k\right)x_0 + \left(-\frac{1}{T}m + \frac{1}{2}h + \frac{T}{3}k\right)x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{2} f + m \cdot x'_0 \\ \frac{T}{2} f - m \cdot x'_T \end{bmatrix}$$

Iš paskutinės išraiškos gauname formules, pagal kurias galime apskaičiuoti funkcijos ir pirmosios išvestinės reikšmes taške $t = T$:

$$x_T = \frac{\frac{T}{2} f + m \cdot x'_0 + \left(\frac{1}{T} m + \frac{1}{2} h - \frac{T}{3} k \right) x_0}{\frac{1}{T} m + \frac{1}{2} h + \frac{T}{6} k} \tag{66}$$

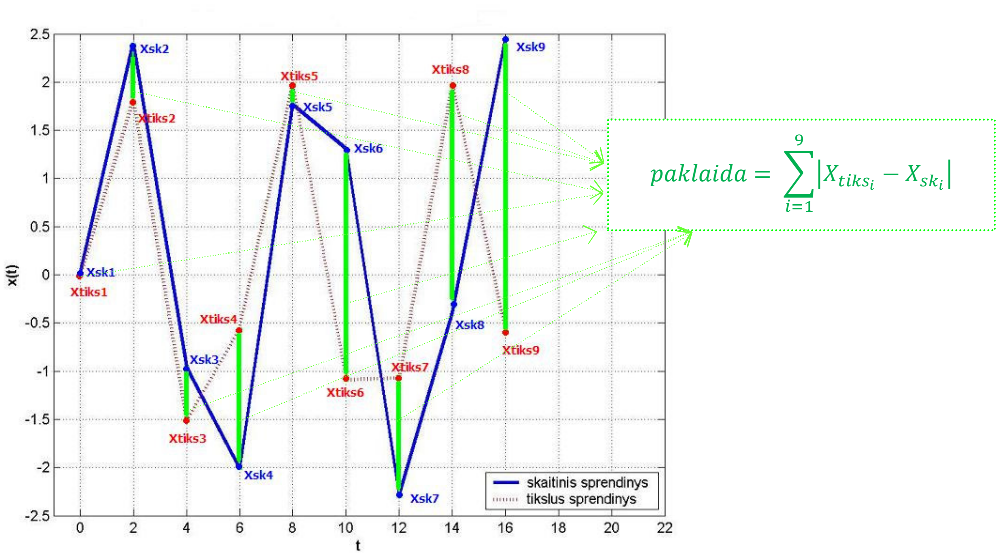
$$x'_T = \frac{\frac{T}{2} f - \left(\frac{1}{T} m - \frac{1}{2} h + \frac{T}{6} k \right) x_0 + \left(\frac{1}{T} m - \frac{1}{2} h - \frac{T}{3} k \right) x_T}{m} \tag{67}$$

2.1.2. METODO TIKSLUMO ĮVERTIS

Prieš pereinant prie pavyzdžių aptarkime, kaip vertinsime integratoriaus tikslumą. Įveskime paklaidos matą tokiu būdu:

$$paklaida = \sum_{i=1}^{N} \left| X_{tikslus_i} - X_{skaitinis_i} \right| \tag{68}$$

čia N – mazgų, kuriuose apskaičiuojama skaitinio sprendinio reikšmė, skaičius; $X_{tikslus_i}$- tiksliojo (etaloninio) sprendinio reikšmė i-tajame mazge; $X_{skaitinis_i}$- skaitinio sprendinio reikšmė i-tajame mazge.



7 pav. Diferencialinės lygties integravimo paklaidos įvertinimo schema

Mažėjant integravimo žingsniui paklaidos įvertis artieja prie reikšmės, reiškiančios plotą tarp dviejų kreivių (tiksliojo ir skaitinio sprendinių).

2.1.3. PAVYZDŽIAI

1. Paimkime paprastą homogeninę diferencialinę lygtį su pastoviais koeficientais:

$$4y'' + 4y' + y = 0$$

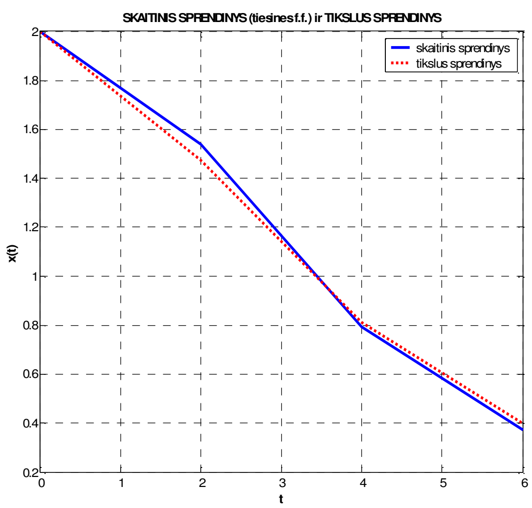
su pradine sąlyga $y(0) = 2, y'(0) = 0$. Šios diferencialinės lygties charakteringoji lygtis: $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$. Jos šaknys realios ir lygios: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}$, todėl bendrasis šios lygties sprendinys yra: $y = e^{-\frac{t}{2}}(C_1 + C_2 t)$. Įvetrinę pradines sąlygas, gauname konstantų reikšmes: $C_1 = 2, C_2 = 1$. Tuomet atskiras homogeninės lygties sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas, yra:

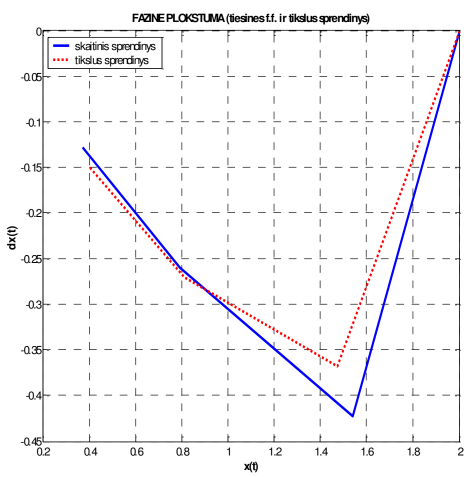
$$y = e^{-\frac{t}{2}}(2 + t)$$

$$y' = -\frac{1}{2} t e^{-\frac{t}{2}}$$

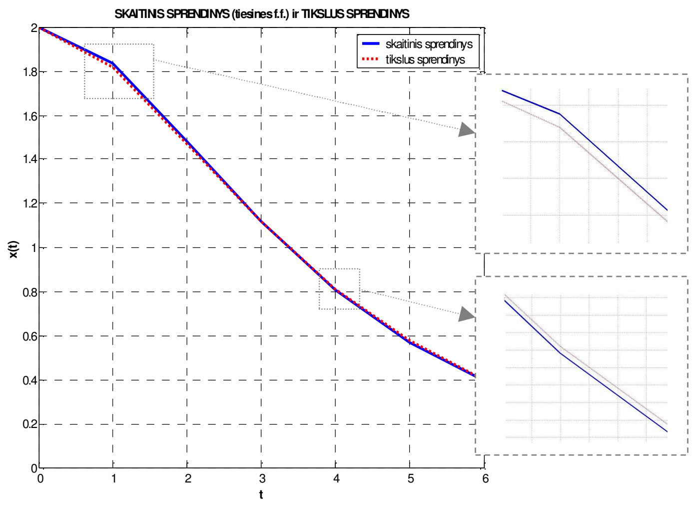
Dabar suintegruokime šią lygtį, naudodami ką tik išvestas formules:

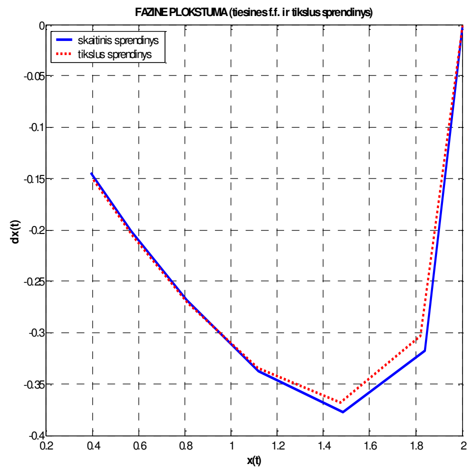
```
------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 2
parametras a (kvadratines f.f.): 0.0625
------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
         0    2.0000    4.0000    6.0000
    2.0000    1.4715    0.8120    0.3983
         0   -0.3679   -0.2707   -0.1494
APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT TIESINES FORMOS FUNKCIJAS:
         0    2.0000    4.0000    6.0000
    2.0000    1.5385    0.7929    0.3696
         0   -0.4231   -0.2604   -0.1277
------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant tiesines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.11476
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:0.0872
------------------------------------------------------------------------
```



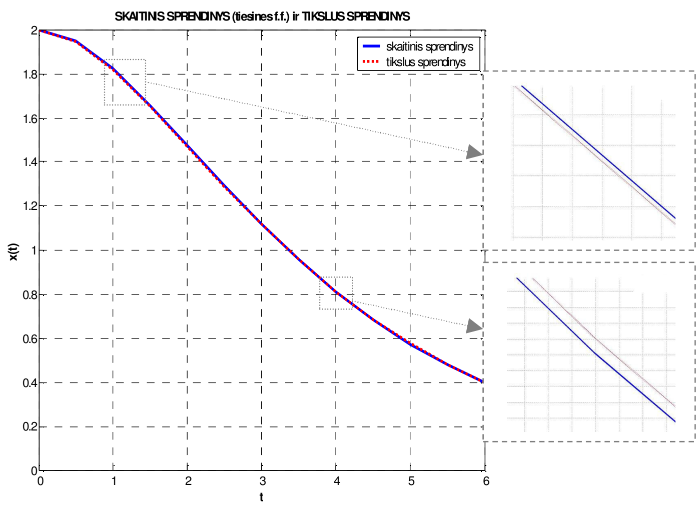


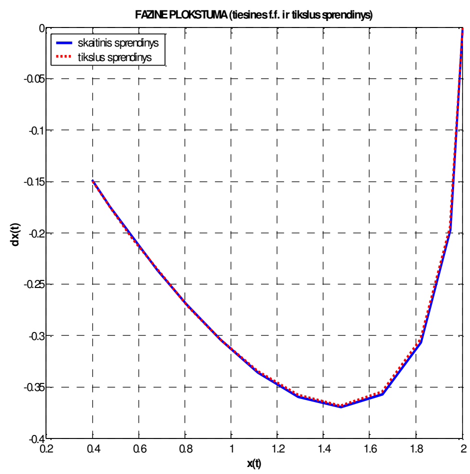
```
---------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 1
parametras a (kvadratines f.f.): 0.0625
---------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
         0    1.0000    2.0000    3.0000    4.0000    5.0000    6.0000
    2.0000    1.8196    1.4715    1.1157    0.8120    0.5746    0.3983
         0   -0.3033   -0.3679   -0.3347   -0.2707   -0.2052   -0.1494
APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT TIESINES FORMOS FUNKCIJAS:
         0    1.0000    2.0000    3.0000    4.0000    5.0000    6.0000
    2.0000    1.8378    1.4828    1.1176    0.8081    0.5683    0.3919
         0   -0.3176   -0.3776   -0.3375   -0.2687   -0.2009   -0.1445
---------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant tiesines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.048193
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:0.037982
---------------------------------------------------------------------------
```



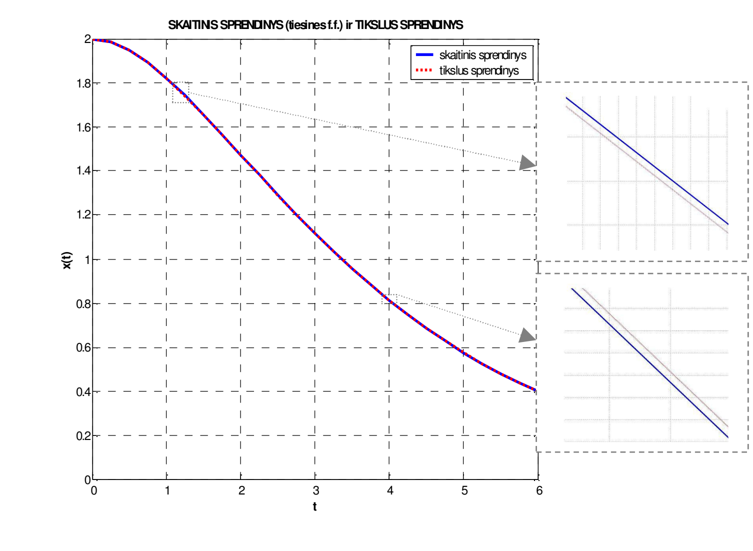


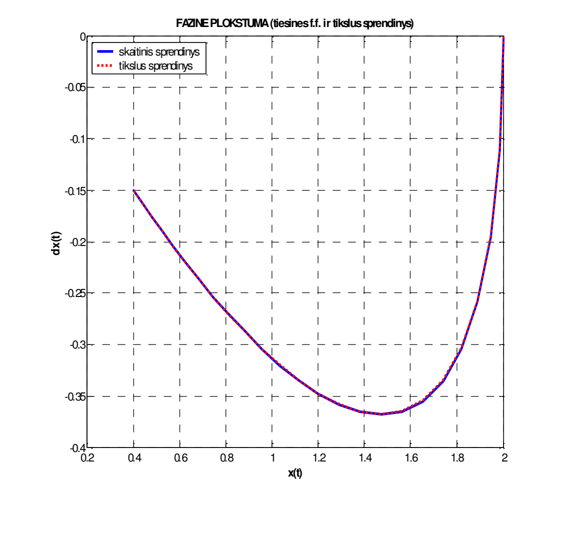

```
---------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 0.5
parametras a (kvadratines f.f.): 0.0625
---------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
0         0.5000    1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000    3.5000    4.0000    4.5000    5.0000    5.5000    6.0000
2.0000    1.9470    1.8196    1.6533    1.4715    1.2893    1.1157    0.9558    0.8120    0.6851    0.5746    0.4795    0.3983
0        -0.1947   -0.3033   -0.3543   -0.3679   -0.3581   -0.3347   -0.3041   -0.2707   -0.2371   -0.2052   -0.1758   -0.1494

APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT TIESINES FORMOS FUNKCIJAS:
0         0.5000    1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000    3.5000    4.0000    4.5000    5.0000    5.5000    6.0000
2.0000    1.9504    1.8238    1.6570    1.4741    1.2907    1.1161    0.9554    0.8111    0.6838    0.5731    0.4779    0.3967
0        -0.1973   -0.3066   -0.3573   -0.3702   -0.3596   -0.3354   -0.3041   -0.2702   -0.2363   -0.2042   -0.1747   -0.1482
---------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant tiesines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.023143
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:0.017995
---------------------------------------------------------------------------
```





```
--------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 0.25
parametras a (kvadratines f.f.): 0.0625
--------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
 0        0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500  3.0000  3.2500  3.5000
 2.0000  1.9856  1.9470  1.8900  1.8196  1.7396  1.6533  1.5632  1.4715  1.3798  1.2893  1.2010  1.1157  1.0338  0.9558
 0       -0.1103 -0.1947 -0.2577 -0.3033 -0.3345 -0.3543 -0.3648 -0.3679 -0.3652 -0.3581 -0.3477 -0.3347 -0.3200 -0.3041

 3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500  6.0000
 0.8818  0.8120  0.7465  0.6851  0.6278  0.5746  0.5252  0.4795  0.4372  0.3983
-0.2875 -0.2707 -0.2538 -0.2371 -0.2209 -0.2052 -0.1902 -0.1758 -0.1622 -0.1494

APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT TIESINES FORMOS FUNKCIJAS:
 0        0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500  3.0000  3.2500  3.5000
 2.0000  1.9861  1.9478  1.8910  1.8206  1.7406  1.6542  1.5640  1.4722  1.3803  1.2896  1.2012  1.1158  1.0338  0.9557
 0       -0.1107 -0.1953 -0.2585 -0.3041 -0.3353 -0.3550 -0.3654 -0.3684 -0.3657 -0.3585 -0.3479 -0.3349 -0.3201 -0.3041

 3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500  6.0000
 0.8816  0.8118  0.7462  0.6848  0.6275  0.5742  0.5248  0.4791  0.4368  0.3979
-0.2875 -0.2706 -0.2536 -0.2369 -0.2207 -0.2050 -0.1899 -0.1755 -0.1619 -0.1491
--------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant tiesines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.011314
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:0.008871
--------------------------------------------------------------------------
```





2. Paimkime dar vieną homogeninę diferenciallinę lygtį su pastoviais koeficientais:

$$y'' + y = 0$$

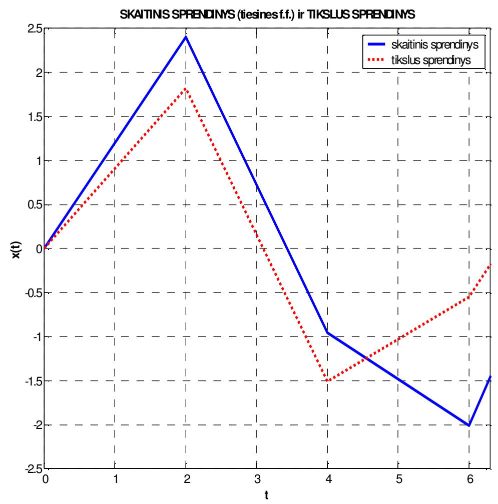
su pradine sąlyga $y(0) = 0, y'(0) = 2$. Šios diferencialinės lygties charakteringoji lygties $\lambda^2 + 1 = 0$, jos šaknys kompleksinės jungtinės $\lambda_{1,2} = \pm i$. Todėl bendrasis šios lygties prendinys yra: $y = C_1 cost + C_2 sint$. Įvetrinę pradines sąlygas, gauname konstantų reikšmes: $C_1 = 0, C_2 = 2$. Tuomet atskiras homogeninės lygties sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas, yra:

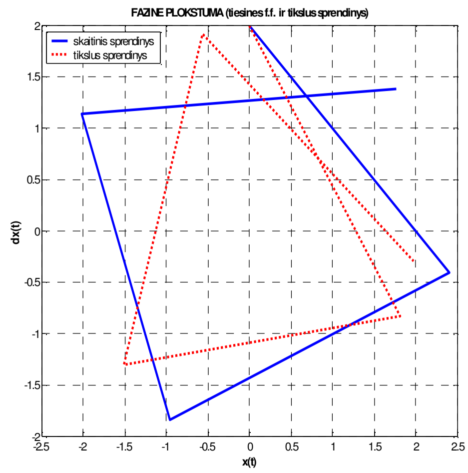
$$y = 2sint$$

$$y' = 2cost$$

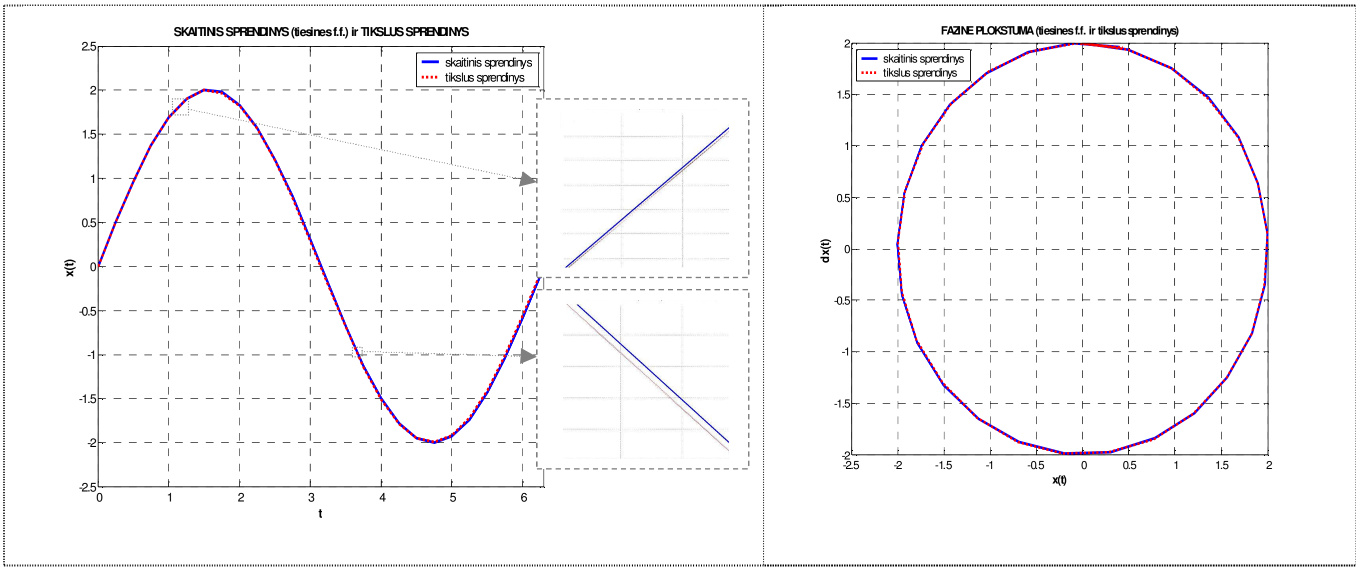
Suintegruokime šią lygtį naudodami skaitinį metodą:

```
-------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 2
-------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
         0    2.0000    4.0000    6.0000    8.0000
         0    1.8186   -1.5136   -0.5588    1.9787
    2.0000   -0.8323   -1.3073    1.9203   -0.2910
APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT TIESINES FORMOS FUNKCIJAS:
         0    2.0000    4.0000    6.0000    8.0000
         0    2.4000   -0.9600   -2.0160    1.7664
    2.0000   -0.4000   -1.8400    1.1360    1.3856
-------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant tiesines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 2.8045
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:3.4259
-------------------------------------------------------------------------
```






```
-------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 0.25
-------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500  3.0000  3.2500  3.5000
 0       0.4948  0.9589  1.3633  1.6829  1.8980  1.9950  1.9680  1.8186  1.5561  1.1969  0.7633  0.2822 -0.2164 -0.7016
 2.0000  1.9378  1.7552  1.4634  1.0806  0.6306  0.1415 -0.3565 -0.8323 -1.2563 -1.6023 -1.8486 -1.9800 -1.9883 -1.8729

 3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500  6.0000  6.2500  6.5000
-1.1431 -1.5136 -1.7900 -1.9551 -1.9986 -1.9178 -1.7179 -1.4111 -1.0166 -0.5588 -0.0664  0.4302
-1.6411 -1.3073 -0.8922 -0.4216  0.0752  0.5673  1.0242  1.4173  1.7224  1.9203  1.9989  1.9532

APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT TIESINES FORMOS FUNKCIJAS:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500  3.0000  3.2500  3.5000
 0       0.4948  0.9591  1.3640  1.6845  1.9009  1.9996  1.9747  1.8276  1.5675  1.2104  0.7785  0.2984 -0.2002 -0.6864
 2.0000  1.9381  1.7564  1.4660  1.0850  0.6368  0.1492 -0.3476 -0.8229 -1.2473 -1.5945 -1.8431 -1.9777 -1.9900 -1.8792

 3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500  6.0000  6.2500  6.5000
-1.1301 -1.5039 -1.7847 -1.9551 -2.0046 -1.9301 -1.7361 -1.4348 -1.0448 -0.5901 -0.0989  0.3984
-1.6521 -1.3229 -0.9118 -0.4443  0.0506  0.5425  1.0008  1.3971  1.7071  1.9114  1.9976  1.9601
-------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant tiesines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.32561
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:0.26779
-------------------------------------------------------------------------
```



Paklaida padaroma per vieną periodą (T=6,3; T – intervalo, kuriame ieškomas sprendinys, pabaigos taškas):

žingsnis	0,25	0.05	0.025	0.005	0.0025	0.0005	0.00025
Paklaida funkcijos reikšmėms	0.29376	0.056609	0.028474	0.0057344	0.0028654	0.00056731	0.00027514

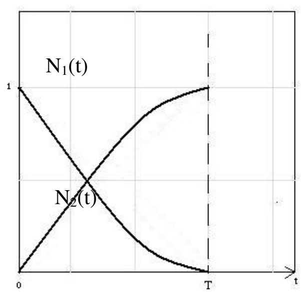
Išnagrinėję šiuos du pavyzdžius galime patvirtinti teorinę prielaidą, kad skaitinio sprendinio, apskaičiuoto naudojant išvystytą anksčiau metodą, tikslumas priklauso nuo integravimo žingsnio – mažindami integravimo žingsnį gauname tikslesnį diferencialinės lygties skaitinį sprendinį.

2.2. APROKSIMACIJA KVADRATINĖMIS FORMOS FUNKCIJOMIS

2.2.1. FORMULIŲ IŠVEDIMAS

Patobulinkime mūsų sukurtą diferencialinės lygties integratorių, įvedę papildomą kontrolinį parametrą, Kuris leistų valdyti formos funkcijų savybes. Aproksimuokime funkciją, jungiančią intervalo [0,T] pradžios ir pabaigos taškus, kvadratinėmis formos funkcijomis $N_1(t)$ ir $N_2(t)$, kurios tenkina kraštines sąlygas:

taškas / funkcija	t = 0	t = T
$N_1(t)$	1	0
$N_2(t)$	0	1



Iškėlėme reikalavimus tik dviejose taškuose, tuo tarpu į kvadratinį trinarį įeina trys parametrai. Tai reiškia, kad vienas parametras paliekamas laisvas. Susitarkime, kad tai bus koeficientas a prie aukščiausio laipsnio. Be to bandysime abi dvi formos funkcijas išreikšti per vieną parametrą.

Pirmoji funkcija:

$$N_1(t) = at^2 + bt + c \tag{69}$$

$$\begin{cases} N_1(0) = 0a + 0b + c = 1 \\ N_1(T) = aT^2 + bT + c = 0 \end{cases} \tag{70}$$

Iš sistemos pirmosios lygties: $c = 1$. Tuomet:

$$aT^2 + bT + c = aT^2 + bT + 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{-(aT^2 + 1)}{T} \tag{71}$$

Taigi,

$$N_1(t) = at^2 - \frac{(aT^2 + 1)}{T} t + 1 \tag{72}$$

Suraskime antrąją funkciją:

$$N_2(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2 \tag{73}$$

$$\begin{cases} N_2(0) = 0a_2 + 0b_2 + c_2 = 1 \\ N_2(T) = a_2 T^2 + b_2 T + c_2 = 0 \end{cases} \tag{74}$$

Iš pirmos lygties c = 0. Tuomet:

$$a_2 T^2 + b_2 T + c_2 = a_2 T^2 + b_2 T + 0 = 1 \Rightarrow b_2 = \frac{-(a_2 T^2 - 1)}{T} \tag{75}$$

Taigi,

$$N_2(t) = a_2 t^2 - \frac{(a_2 T^2 - 1)}{T} t \tag{76}$$

Kiekviename vidiniame intervalo [0;T] taške t formos funkcijos $N_1(t)$ ir $N_2(t)$ turi tenkinti papildomą taškinio normavimo sąlygą:

$$N_1(t) + N_2(t) = 1 \tag{76}$$

Įvertinę šią sąlygą gauname, kad $a_2 = -a$, t.y.:

$$N_2(t) = -a\, t^2 + \frac{(aT^2 + 1)}{T} t \tag{78}$$

Kaip ir tiesinių formos funkcijų atveju, įveskime matricas X, X' ir X'':

1. $X = [N_1(t), N_2(t)] \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix} = \left[at^2 - \frac{aT^2 + 1}{T} t + 1, - at^2 + \frac{aT^2 + 1}{T} t \right] \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix} = N \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}$

2. $X' = [N_1'(t), N_2'(t)] \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix} = \left[\frac{dN_1(t)}{dt}, \frac{dN_2(t)}{dt} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix} = \left[2at - \frac{aT^2 + 1}{T}, -2at + \frac{aT^2 + 1}{T} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix} = N' \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix}$

3. $$X''=\left[N_1''(t),N_2''(t)\right]\cdot\begin{bmatrix}x_0\\x_T\end{bmatrix}=\left[\frac{d^2N_1(t)}{dt^2},\frac{d^2N_2(t)}{dt^2}\right]\cdot\begin{bmatrix}x_0\\x_T\end{bmatrix}=\left[2a,-2a\right]\cdot\begin{bmatrix}x_0\\x_T\end{bmatrix}=N''\cdot\begin{bmatrix}x_0\\x_T\end{bmatrix}$$

Nagrinėkime tą pačią nehomogeninę diferencialinę lygtį su pastoviais koeficientais:

$$F(x'',x',x,t)=0 \tag{79}$$

$$mx''+hx'+kx=f\Rightarrow mx''+hx'+kx-f=0 \tag{80}$$

Lygiai taip pat Galiorkino metodu normavę paklaidą gauname lygybę:

$$\int_0^T N^T\cdot\varepsilon(t)dt=m\cdot\int_0^T N^TX''dt+\left(h\cdot\int_0^T N^TN'dt+k\cdot\int_0^T N^T\cdot Ndt\right)\cdot\begin{bmatrix}x0\\xT\end{bmatrix}-f\int_0^T N^Tdt=0 \tag{81}$$

Naudodami silpnąją baigtinių elementų metodo formuluotę, narį su antrąja išvestine integruojame dalimis:

$$\int_0^T N^TX''dt=\int_0^T N^Td(X')=\begin{bmatrix}u=N^T;du=(N')^Tdt\\dv=d(X');v=X'\end{bmatrix}=N^TX'\Big|_0^T-\int_0^T X'(N')^Tdt=$$

$$=\begin{bmatrix}1-\dfrac{t}{T}\\\dfrac{t}{T}\end{bmatrix}X'\Big|_0^T-\int_0^T X'(N')^Tdt=\left[\int_0^T X'(N')^Tdt=\int_0^T N'\begin{bmatrix}x_0\\x_T\end{bmatrix}(N')^Tdt=\int_0^T(N')^TN'dt\begin{bmatrix}x_0\\x_T\end{bmatrix}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x_T'-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}x_0'-\int_0^T(N')^TN'dt\begin{bmatrix}x_0\\x_T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_0'\\x_T'\end{bmatrix}-\int_0^T(N')^TN'dt\begin{bmatrix}x_0\\x_T\end{bmatrix}$$

Taigi, gavome:

$$\int_0^T N^TX''dt=\begin{bmatrix}-x_0'\\x_T'\end{bmatrix}-\int_0^T(N')^TN'dt\begin{bmatrix}x_0\\x_T\end{bmatrix} \tag{82}$$

grįžtant prie (81):

$$\int_0^T N^T\cdot\varepsilon(t)dt=m\left(\begin{bmatrix}-x_0'\\x_T'\end{bmatrix}-\int_0^T(N')^TN'dt\begin{bmatrix}x_0\\x_T\end{bmatrix}\right)+\left(h\cdot\int_0^T N^TN'dt+k\cdot\int_0^T N^T\cdot Ndt\right)\cdot\begin{bmatrix}x0\\xT\end{bmatrix}-f\int_0^T N^Tdt=0 \tag{83}$$

$$\left(-m\int_0^T(N')^TN'dt+h\cdot\int_0^T N^TN'dt+k\cdot\int_0^T N^T\cdot Ndt\right)\cdot\begin{bmatrix}x0\\xT\end{bmatrix}-f\int_0^T N^Tdt=-m\begin{bmatrix}-x_0'\\x_T'\end{bmatrix} \tag{84}$$

Suintegruokime visus į paskutinę išraišką įeinančius integralus.

Pirmasis integralas:

$$\int_0^T (N')^T N' dt = \int_0^T \begin{bmatrix} 2at - \dfrac{aT^2+1}{T} \\ -2at + \dfrac{aT^2+1}{T} \end{bmatrix} \cdot \left[2at - \frac{aT^2+1}{T}, -2at + \frac{aT^2+1}{T} \right] dt =$$

$$= \int_0^T \begin{bmatrix} \left(2at - \dfrac{aT^2+1}{T}\right)^2 & \left(2at - \dfrac{aT^2+1}{T}\right)\left(-2at + \dfrac{aT^2+1}{T}\right) \\ \left(2at - \dfrac{aT^2+1}{T}\right)\left(-2at + \dfrac{aT^2+1}{T}\right) & \left(-2at + \dfrac{aT^2+1}{T}\right)^2 \end{bmatrix} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^T \left(4a^2t^2 - \frac{4a(aT^2+1)}{T}t + \frac{(aT^2+1)^2}{T^2}\right) dt & \displaystyle\int_0^T \left(-4a^2t^2 + \frac{4a(aT^2+1)}{T}t - \frac{(aT^2+1)^2}{T^2}\right) dt \\ \displaystyle\int_0^T \left(-4a^2t^2 + \frac{4a(aT^2+1)}{T}t - \frac{(aT^2+1)^2}{T^2}\right) dt & \displaystyle\int_0^T \left(4a^2t^2 - \frac{4a(aT^2+1)}{T}t + \frac{(aT^2+1)^2}{T^2}\right) dt \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{4a^2T^3}{3} - \dfrac{4a(aT^2+1)}{T} \cdot \dfrac{T^2}{2} + \dfrac{(aT^2+1)^2}{T^2} \cdot T & \dfrac{-4a^2T^3}{3} + \dfrac{4a(aT^2+1)}{T} \cdot \dfrac{T^2}{2} - \dfrac{(aT^2+1)^2}{T^2} \cdot T \\ \dfrac{-4a^2T^3}{3} + \dfrac{4a(aT^2+1)}{T} \cdot \dfrac{T^2}{2} - \dfrac{(aT^2+1)^2}{T^2} \cdot T & \dfrac{4a^2T^3}{3} - \dfrac{4a(aT^2+1)}{T} \cdot \dfrac{T^2}{2} + \dfrac{(aT^2+1)^2}{T^2} \cdot T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{4a^2T^4}{3T} - \dfrac{2aT^2(aT^2+1)}{T} + \dfrac{(aT^2+1)^2}{T} & \dfrac{-4a^2T^4}{3T} + \dfrac{2aT^2(aT^2+1)}{T} - \dfrac{(aT^2+1)^2}{T} \\ \dfrac{-4a^2T^4}{3T} + \dfrac{2aT^2(aT^2+1)}{T} - \dfrac{(aT^2+1)^2}{T} & \dfrac{4a^2T^4}{3T} - \dfrac{2aT^2(aT^2+1)}{T} + \dfrac{(aT^2+1)^2}{T} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[pažymime \;\; \gamma = aT^2 \right] = \begin{bmatrix} \dfrac{4\gamma^2}{3T} - \dfrac{2\gamma(\gamma+1)}{T} + \dfrac{(\gamma+1)^2}{T} & \dfrac{-4\gamma^2}{3T} + \dfrac{2\gamma(\gamma+1)}{T} - \dfrac{(\gamma+1)^2}{T} \\ \dfrac{-4\gamma^2}{3T} + \dfrac{2\gamma(\gamma+1)}{T} - \dfrac{(\gamma+1)^2}{T} & \dfrac{4\gamma^2}{3T} - \dfrac{2\gamma(\gamma+1)}{T} + \dfrac{(\gamma+1)^2}{T} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{4\gamma^2 - 6\gamma^2 - 6\gamma + 3\gamma^2 + 6\gamma + 3}{3T} & \dfrac{-4\gamma^2 + 6\gamma^2 + 6\gamma - 3\gamma^2 - 6\gamma - 3}{3T} \\ \dfrac{-4\gamma^2 + 6\gamma^2 + 6\gamma - 3\gamma^2 - 6\gamma - 3}{3T} & \dfrac{4\gamma^2 - 6\gamma^2 - 6\gamma + 3\gamma^2 + 6\gamma + 3}{3T} \end{bmatrix} = \frac{\gamma^2+3}{3T} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Antrasis integralas:

$$\int_0^T N^T N' dt = \int_0^T \begin{bmatrix} at^2 - \dfrac{aT^2+1}{T}t + 1 \\ -at^2 + \dfrac{aT^2+1}{T}t \end{bmatrix} \cdot \left[2at - \frac{aT^2+1}{T}, -2at + \frac{aT^2+1}{T} \right] dt =$$

$$=\int_0^T \begin{bmatrix} \left(at^2-\frac{aT^2+1}{T}t+1\right)\left(2at-\frac{aT^2+1}{T}\right) & -\left(at^2-\frac{aT^2+1}{T}t+1\right)\left(2at-\frac{aT^2+1}{T}\right) \\ \left(-at^2+\frac{aT^2+1}{T}t\right)\left(2at-\frac{aT^2+1}{T}\right) & -\left(-at^2+\frac{aT^2+1}{T}t\right)\left(2at-\frac{aT^2+1}{T}\right) \end{bmatrix} dt =$$

$$=\begin{bmatrix} \int_0^T\left(2a^2t^3-\frac{3a\left(aT^2+1\right)}{T}t^2+2at+\frac{\left(aT^2+1\right)^2}{T^2}t-\frac{aT^2+1}{T}\right)dt & -\int_0^T\left(2a^2t^3-\frac{3a\left(aT^2+1\right)}{T}t^2+2at+\frac{\left(aT^2+1\right)^2}{T^2}t-\frac{aT^2+1}{T}\right)dt \\ \int_0^T\left(-2a^2t^3+\frac{3a\left(aT^2+1\right)}{T}t^2-\frac{\left(aT^2+1\right)^2}{T^2}t\right)dt & -\int_0^T\left(-2a^2t^3+\frac{3a\left(aT^2+1\right)}{T}t^2-\frac{\left(aT^2+1\right)^2}{T^2}t\right)dt \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2a^2T^4}{4}-\frac{3a\left(aT^2+1\right)T^3}{3T}+\frac{2aT^2}{2}+\frac{\left(aT^2+1\right)^2T^2}{2T^2}-\frac{aT^2+1}{T}T & -\left(\frac{2a^2T^4}{4}-\frac{3a\left(aT^2+1\right)T^3}{3T}+\frac{2aT^2}{2}+\frac{\left(aT^2+1\right)^2T^2}{2T^2}-\frac{aT^2+1}{T}T\right) \\ \frac{-2a^2T^4}{4}+\frac{3a\left(aT^2+1\right)T^3}{3T}-\frac{\left(aT^2+1\right)^2T^2}{2T^2} & -\left(\frac{-2a^2T^4}{4}+\frac{3a\left(aT^2+1\right)T^3}{3T}-\frac{\left(aT^2+1\right)^2T^2}{2T^2}\right) \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{6a^2T^4-12aT^2(aT^2+1)+12aT^2+6(aT^2+1)^2-12aT^2-12}{12} & -\frac{6a^2T^4-12aT^2(aT^2+1)+12aT^2+6(aT^2+1)^2-12aT^2-12}{12} \\ \frac{-6a^2T^4+12aT^2(aT^2+1)-6(aT^2+1)^2}{12} & -\frac{-6a^2T^4+12aT^2(aT^2+1)-6(aT^2+1)^2}{12} \end{bmatrix} =$$

$$=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Trečiasis integralas:

$$\int_0^T N^T N dt = \int_0^T \begin{bmatrix} at^2-\frac{aT^2+1}{T}t+1 \\ -at^2+\frac{aT^2+1}{T}t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} at^2-\frac{aT^2+1}{T}t+1, -at^2+\frac{aT^2+1}{T}t \end{bmatrix} dt =$$

$$=\int_0^T \begin{bmatrix} \left(at^2-\frac{aT^2+1}{T}t+1\right)^2 & \left(at^2-\frac{aT^2+1}{T}t+1\right)\left(-at^2+\frac{aT^2+1}{T}t\right) \\ \left(-at^2+\frac{aT^2+1}{T}t\right)\left(at^2-\frac{aT^2+1}{T}t+1\right) & \left(-at^2+\frac{aT^2+1}{T}t\right)^2 \end{bmatrix} dt =$$

$$=\begin{bmatrix} \int_0^T\left(a^2t^4-\frac{2a\left(aT^2+1\right)}{T}t^3+\frac{a^2T^4+4aT^2+1}{T^2}t^2-\frac{2\left(aT^2+1\right)}{T}t+1\right)dt & \int_0^T\left(-a^2t^4+\frac{2a\left(aT^2+1\right)}{T}t^3-at^2-\frac{\left(aT^2+1\right)^2}{T^2}t^2+\frac{aT^2+1}{T}t\right)dt \\ \int_0^T\left(-a^2t^4+\frac{2a\left(aT^2+1\right)}{T}t^3-at^2-\frac{\left(aT^2+1\right)^2}{T^2}t^2+\frac{aT^2+1}{T}t\right)dt & \int_0^T\left(a^2t^4-\frac{2a\left(aT^2+1\right)}{T}t^3+\frac{\left(aT^2+1\right)^2}{T^2}t^2\right)dt \end{bmatrix}$$

$$= \left[pažymime\ \ \gamma = aT^2\right] = \begin{bmatrix} \frac{\gamma^2 T}{5} - \frac{2\gamma T(\gamma+1)}{4} + \frac{(\gamma^2+4\gamma+1)T}{3} - \frac{2T(\gamma+1)}{2} + T & -\frac{\gamma^2 T}{5} + \frac{2\gamma T(\gamma+1)}{4} - \frac{\gamma T}{3} - \frac{(\gamma+1)^2 T}{3} + \frac{\gamma+1}{2}\cdot T \\ -\frac{\gamma^2 T}{5} + \frac{2\gamma T(\gamma+1)}{4} - \frac{\gamma T}{3} - \frac{(\gamma+1)^2 T}{3} + \frac{\gamma+1}{2}\cdot T & \frac{\gamma^2 T}{5} - \frac{2\gamma T(\gamma+1)}{4} + \frac{(\gamma+1)^2}{3}\cdot T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12\gamma^2 T}{60} - \frac{30\gamma T(\gamma+1)}{60} + \frac{20(\gamma^2+4\gamma+1)T}{60} - \frac{60T(\gamma+1)}{60} + \frac{60T}{60} & -\frac{12\gamma^2 T}{60} + \frac{30\gamma T(\gamma+1)}{60} - \frac{20\gamma T}{60} - \frac{20(\gamma+1)^2 T}{60} + \frac{30(\gamma+1)T}{60} \\ -\frac{12\gamma^2 T}{60} + \frac{30\gamma T(\gamma+1)}{60} - \frac{20\gamma T}{60} - \frac{20(\gamma+1)^2 T}{60} + \frac{30(\gamma+1)T}{60} & \frac{12\gamma^2 T}{60} - \frac{30\gamma T(\gamma+1)}{60} + \frac{20(\gamma+1)^2 T}{60} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{T}{60}\begin{bmatrix} 2\gamma^2 - 10\gamma + 20 & -2\gamma^2 + 10 \\ -2\gamma^2 + 10 & 2\gamma^2 + 10\gamma + 20 \end{bmatrix} = \frac{T}{30}\begin{bmatrix} \gamma^2 - 5\gamma + 10 & -\gamma^2 + 5 \\ -\gamma^2 + 5 & \gamma^2 + 5\gamma + 10 \end{bmatrix}$$

Ketvirtasis integralas:

$$\int_0^T N^T dt = \int_0^T \begin{bmatrix} at^2 - \frac{aT^2+1}{T}t + 1 \\ -at^2 + \frac{aT^2+1}{T}t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \int_0^T \left(at^2 - \frac{aT^2+1}{T}t + 1\right)dt \\ \int_0^T \left(-at^2 + \frac{aT^2+1}{T}t\right)dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{aT^3}{3} - \frac{aT^2+1}{T}\cdot\frac{T^2}{2} + T \\ -\frac{aT^3}{3} + -\frac{aT^2+1}{T}\cdot\frac{T^2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[pažymime\ \gamma = aT^2\right] = \begin{bmatrix} \frac{\gamma T}{3} - \frac{T(\gamma+1)}{2} + T \\ -\frac{\gamma T}{3} + \frac{T(\gamma+1)}{2} \end{bmatrix} = \frac{T}{6}\begin{bmatrix} 2\gamma - 3\gamma - 3 + 6 \\ -2\gamma + 3\gamma + 3 \end{bmatrix} = \frac{T}{6}\begin{bmatrix} -\gamma + 3 \\ \gamma + 3 \end{bmatrix}$$

Tagi, gavome:

$$\int_0^T (N')^T N' dt = \frac{\gamma^2+3}{3T}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{85}$$

$$\int_0^T N^T N' dt = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{86}$$

$$\int_0^T N^T N dt = \frac{T}{30}\begin{bmatrix} \gamma^2 - 5\gamma + 10 & -\gamma^2 + 5 \\ -\gamma^2 + 5 & \gamma^2 + 5\gamma + 10 \end{bmatrix} \tag{87}$$

$$\int_0^T N^T dt = \frac{T}{6}\begin{bmatrix} 3-\gamma \\ 3+\gamma \end{bmatrix} \tag{88}$$

Įrašę šias integralų išraiškas į (84) lygybę, gauname tiesinių lygčių sistemą, kuri matricinėje formoje užrašoma taip:

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_5 + b_7 x'_0 \\ b_6 - b_7 x'_T \end{bmatrix} \tag{89}$$

čia

$$b_1 = \left(-20m + 2kT^2\right)\gamma^2 - 10kT^2\gamma - \left(60m + 30hT - 20kT^2\right) \tag{90}$$

$$b_2 = \left(20m - 2kT^2\right)\gamma^2 + \left(60m + 30hT + 10kT^2\right) \tag{91}$$

$$b_3 = \left(20m - 2kT^2\right)\gamma^2 + \left(60m - 30hT + 10kT^2\right) \tag{92}$$

$$b_4 = \left(-20m + 2kT^2\right)\gamma^2 + 10kT^2\gamma - \left(60m - 30hT - 20kT^2\right) \tag{93}$$

$$b_5 = 10T^2 f\left(3 - \gamma\right) \tag{94}$$

$$b_6 = 10T^2 f\left(3 + \gamma\right) \tag{95}$$

$$b_7 = 60Tm \tag{96}$$

Iš (89) išraiškos gauname fomules, pagal kurias galime apskaičiuoti funkcijos ir pirmosios išvestinės reikšmes taške $t = T$:

$$x_T = \frac{b_5 + b_7 \cdot x_0' - b_1 x_0}{b_2} \tag{97}$$

$$x_T' = \frac{b_6 - b_3 x_0 - b_4 x_T}{b_7} \tag{98}$$

2.2.2. LEISTINOS KONTROLINIO PARAMETRO REIKŠMĖS

Į kvadratinių formos finkcijų išraiškas įeina laisvas parametras a, kuris turi tenkinti tam tikras sąlygas, kad funkcijų panaudojimas sprendžiant diferencialines lygtis turėtų prasmę.

Pirmoji funkcija: $N_1(t) = at^2 - \frac{(aT^2 + 1)}{T}t + 1$

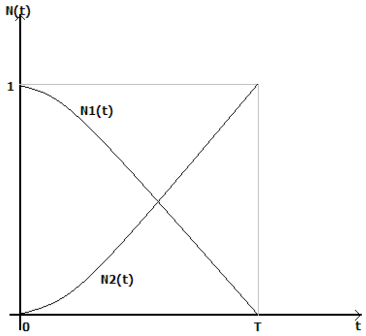
Antroji funkcija: $N_2(t) = -at^2 + \frac{(aT^2 + 1)}{T}t$

Šių funkcijų grafikai – parabolės, kurių viršūnių abscisės apskaičiuojamos pagal tą pačią formulę:

$$x_0 = \frac{aT^2 + 1}{2aT} \leq 0 \tag{99}$$

čia T – integravimo žingsnys.

Kai parametras a įgija neigiamas reikšmes, pirmosios parabolės šakos nukreiptos į apačią, o antrosios - į viršų:



8 pav. Formos finkcijos, kai parametro *a* reikšmės yra neigiamos

Viršūnės abscisė turi tenkinti sąlygą: $x_0 = \dfrac{aT^2+1}{2aT} \le 0$

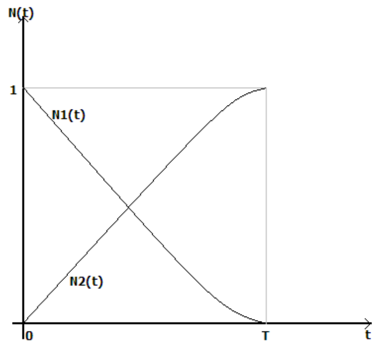
$\begin{cases} aT^2+1 \ge 0, \\ 2aT < 0. \end{cases}$ arba $\begin{cases} aT^2+1 \le 0, \\ 2aT > 0. \end{cases}$

$\begin{cases} a \ge -\dfrac{1}{T^2}, \\ a < 0. \end{cases}$ antroji sistemos lygtis

netenkina sąlygos $a < 0$

Atsakymas: $a \in \left[-\dfrac{1}{T^2};0\right)$ (100)

Kai parametras a įgija teigiamas reikšmes, pirmosios parabolės šakos nukreiptos į viršų, o antrosios – į apačią:



9 pav. Formos funkcijos, kai parametro *a* reikšmės yra teigiamos

Viršūnės abscisė turi tenkinti sąlygą: $x_0 = \dfrac{aT^2+1}{2aT} \geq T \quad \Rightarrow \quad \dfrac{aT^2+1-2aT^2}{2aT} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1-aT^2}{2aT} \geq 0$

$$\begin{cases} 1-aT^2 \geq 0, \\ 2aT > 0. \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} 1-aT^2 \leq 0, \\ 2aT < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq \dfrac{1}{T^2}, \\ a > 0. \end{cases}$$

antroji sistemos lygtis

netenkina sąlygos $a > 0$

Atsakymas: $a \in \left(0; \dfrac{1}{T^2}\right]$ (101)

Taigi gavome parametro a galimų reikšmių intervalą:

$$a \in \left[-\frac{1}{T^2}; \frac{1}{T^2}\right] \qquad (102)$$

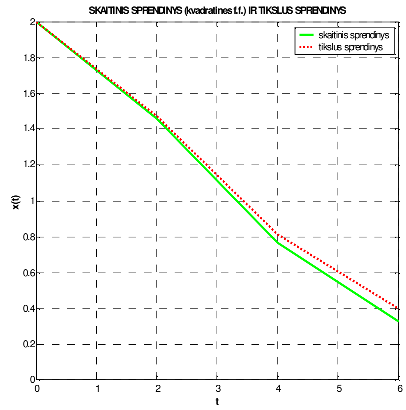
2.2.3. PAVYZDŽIAI

Pradžioje panagrinėkime tuos pačius pavyzdžius, kuriuos sprendėme naudodami tiesinių formos funkcijų aproksimaciją. Dabar atsiradus laisvajam parametrui a, bandykime integruoti parenkant skirtingas jo reikšmes iš leistino intervalo ir stebėkime, kaip keičiasi diferencialinės lygties integravimo tikslumas. Integruosime du kartus – vieną kartą dideliu žingsniu, kitą kartą mažu.

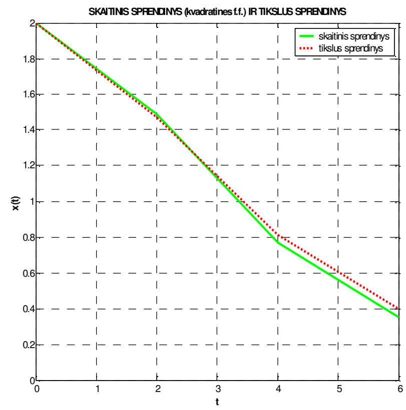
1. $4y'' + 4y' + y = 0,$

$y(0) = 2, y'(0) = 0.$

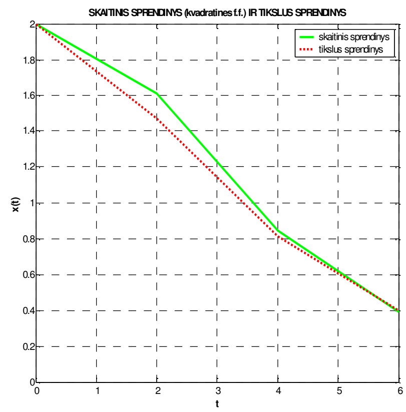
```
--------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 2
parametras a (kvadratines f.f.): -0.25
--------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
0          2.0000    4.0000    6.0000
2.0000    1.4715    0.8120    0.3983
0        -0.3679   -0.2707   -0.1494
APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
0          2.0000    4.0000    6.0000
2.0000    1.4595    0.7655    0.3239
0        -0.3694   -0.2895   -0.1570
--------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.13295
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:0.027993
--------------------------------------------------------------------------
```



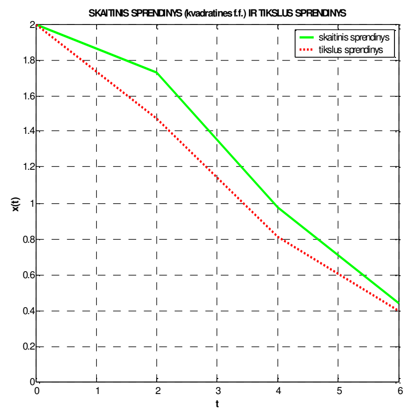

```
--------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 2
parametras a (kvadratines f.f.): -0.1
--------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
     0    2.0000    4.0000    6.0000
2.0000    1.4715    0.8120    0.3983
     0   -0.3679   -0.2707   -0.1494
APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
     0    2.0000    4.0000    6.0000
2.0000    1.4883    0.7667    0.3505
     0   -0.3774   -0.2436   -0.1206
--------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.10986
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:0.065361
--------------------------------------------------------------------------
```



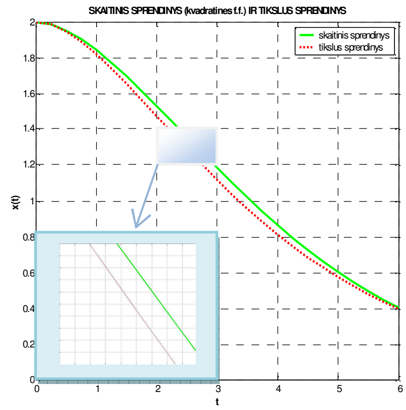

```
--------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 2
parametras a (kvadratines f.f.): 0.1
--------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
         0    2.0000    4.0000    6.0000
    2.0000    1.4715    0.8120    0.3983
         0   -0.3679   -0.2707   -0.1494
APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
         0    2.0000    4.0000    6.0000
    2.0000    1.6087    0.8444    0.3890
         0   -0.4978   -0.3213   -0.1591
--------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.17878
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:0.19025
--------------------------------------------------------------------------
```



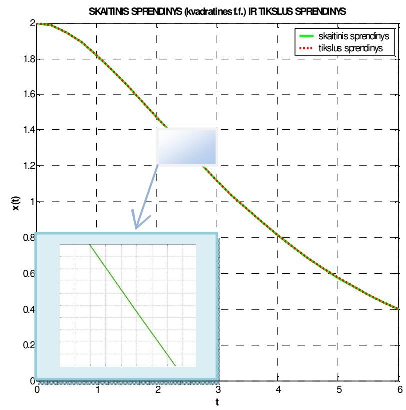

```
--------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 2
parametras a (kvadratines f.f.): 0.25
--------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
         0    2.0000    4.0000    6.0000
    2.0000    1.4715    0.8120    0.3983
         0   -0.3679   -0.2707   -0.1494
APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
         0    2.0000    4.0000    6.0000
    2.0000    1.7297    0.9774    0.4388
         0   -0.6396   -0.5013   -0.2719
--------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.46405
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:0.625
--------------------------------------------------------------------------
```



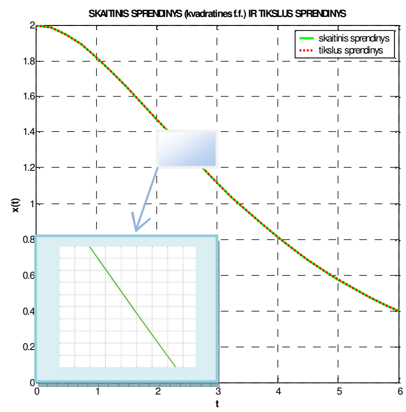
```
---------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 0.25
parametras a (kvadratines f.f.): -16
---------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 2.0000  1.9856  1.9470  1.8900  1.8196  1.7396  1.6533  1.5632  1.4715  1.3798  1.2893  1.2010
 0      -0.1103 -0.1947 -0.2577 -0.3033 -0.3345 -0.3543 -0.3648 -0.3679 -0.3652 -0.3581 -0.3477

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500  6.0000
 1.1157  1.0338  0.9558  0.8818  0.8120  0.7465  0.6851  0.6278  0.5746  0.5252  0.4795  0.4372  0.3983
-0.3347 -0.3200 -0.3041 -0.2875 -0.2707 -0.2538 -0.2371 -0.2209 -0.2052 -0.1902 -0.1758 -0.1622 -0.1494

APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 2.0000  1.9857  1.9527  1.9044  1.8440  1.7742  1.6973  1.6155  1.5304  1.4435  1.3560  1.2690
 0      -0.1104 -0.2008 -0.2735 -0.3309 -0.3749 -0.4073 -0.4299 -0.4440 -0.4509 -0.4518 -0.4477

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500  6.0000
 1.1833  1.0996  1.0185  0.9403  0.8655  0.7943  0.7267  0.6629  0.6030  0.5468  0.4944  0.4457  0.4006
-0.4396 -0.4281 -0.4140 -0.3979 -0.3803 -0.3616 -0.3423 -0.3226 -0.3028 -0.2832 -0.2639 -0.2451 -0.2269
---------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.9411
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:1.8603
---------------------------------------------------------------------------
```



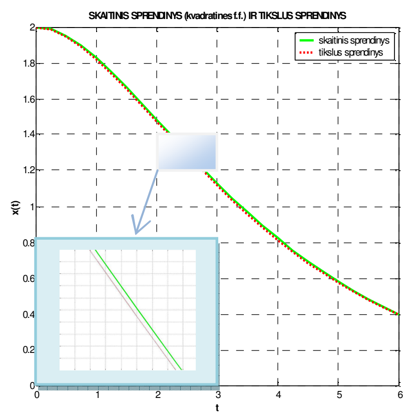

```
---------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 0.25
parametras a (kvadratines f.f.): -2
---------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 2.0000  1.9856  1.9470  1.8900  1.8196  1.7396  1.6533  1.5632  1.4715  1.3798  1.2893  1.2010
 0      -0.1103 -0.1947 -0.2577 -0.3033 -0.3345 -0.3543 -0.3648 -0.3679 -0.3652 -0.3581 -0.3477

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500  6.0000
 1.1157  1.0338  0.9558  0.8818  0.8120  0.7465  0.6851  0.6278  0.5746  0.5252  0.4795  0.4372  0.3983
-0.3347 -0.3200 -0.3041 -0.2875 -0.2707 -0.2538 -0.2371 -0.2209 -0.2052 -0.1902 -0.1758 -0.1622 -0.1494

APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 2.0000  1.9856  1.9470  1.8901  1.8197  1.7397  1.6534  1.5633  1.4715  1.3797  1.2891  1.2008
 0      -0.1102 -0.1946 -0.2576 -0.3032 -0.3346 -0.3544 -0.3649 -0.3681 -0.3655 -0.3585 -0.3480

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500  6.0000
 1.1153  1.0334  0.9552  0.8812  0.8113  0.7457  0.6842  0.6269  0.5736  0.5241  0.4784  0.4361  0.3971
-0.3351 -0.3204 -0.3045 -0.2879 -0.2710 -0.2541 -0.2374 -0.2212 -0.2054 -0.1904 -0.1760 -0.1623 -0.1495
---------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.011565
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:0.005514
---------------------------------------------------------------------------
```




```
---------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 0.25
parametras a (kvadratines f.f.): -1
---------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 2.0000  1.9856  1.9470  1.8900  1.8196  1.7396  1.6533  1.5632  1.4715  1.3798  1.2893  1.2010
 0      -0.1103 -0.1947 -0.2577 -0.3033 -0.3345 -0.3543 -0.3648 -0.3679 -0.3652 -0.3581 -0.3477

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500  6.0000
 1.1157  1.0338  0.9558  0.8818  0.8120  0.7465  0.6851  0.6278  0.5746  0.5252  0.4795  0.4372  0.3983
-0.3347 -0.3200 -0.3041 -0.2875 -0.2707 -0.2538 -0.2371 -0.2209 -0.2052 -0.1902 -0.1758 -0.1622 -0.1494

APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 2.0000  1.9859  1.9474  1.8905  1.8200  1.7399  1.6535  1.5634  1.4715  1.3797  1.2890  1.2006
 0      -0.1104 -0.1949 -0.2579 -0.3035 -0.3347 -0.3544 -0.3648 -0.3679 -0.3652 -0.3580 -0.3475

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500  6.0000
 1.1152  1.0333  0.9552  0.8811  0.8113  0.7457  0.6843  0.6271  0.5738  0.5244  0.4787  0.4364  0.3975
-0.3345 -0.3197 -0.3038 -0.2872 -0.2703 -0.2534 -0.2368 -0.2205 -0.2048 -0.1898 -0.1754 -0.1618 -0.1490
---------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.012031
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:0.0060171
---------------------------------------------------------------------------
```



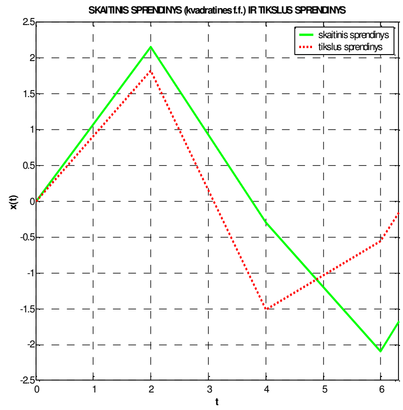

```
---------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 0.25
parametras a (kvadratines f.f.): 5
---------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 2.0000  1.9856  1.9470  1.8900  1.8196  1.7396  1.6533  1.5632  1.4715  1.3798  1.2893  1.2010
 0      -0.1103 -0.1947 -0.2577 -0.3033 -0.3345 -0.3543 -0.3648 -0.3679 -0.3652 -0.3581 -0.3477

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500  6.0000
 1.1157  1.0338  0.9558  0.8818  0.8120  0.7465  0.6851  0.6278  0.5746  0.5252  0.4795  0.4372  0.3983
-0.3347 -0.3200 -0.3041 -0.2875 -0.2707 -0.2538 -0.2371 -0.2209 -0.2052 -0.1902 -0.1758 -0.1622 -0.1494

APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 2.0000  1.9879  1.9517  1.8970  1.8285  1.7502  1.6651  1.5760  1.4848  1.3933  1.3028  1.2142
 0      -0.1125 -0.1993 -0.2646 -0.3124 -0.3456 -0.3670 -0.3789 -0.3831 -0.3812 -0.3746 -0.3644

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500  6.0000
 1.1283  1.0458  0.9669  0.8921  0.8213  0.7547  0.6923  0.6341  0.5798  0.5295  0.4828  0.4397  0.4000
-0.3515 -0.3366 -0.3204 -0.3034 -0.2859 -0.2684 -0.2510 -0.2340 -0.2175 -0.2016 -0.1865 -0.1721 -0.1584
---------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.2057
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:0.3008
```



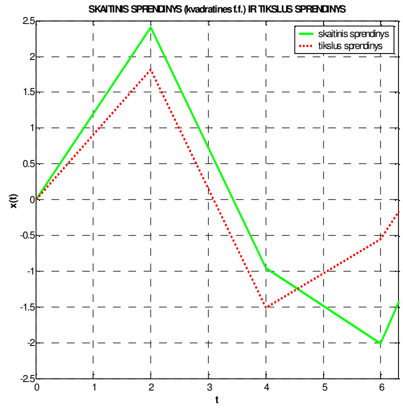
2. $y'' + y = 0,$

$y(0) = 0, y'(0) = 2.$

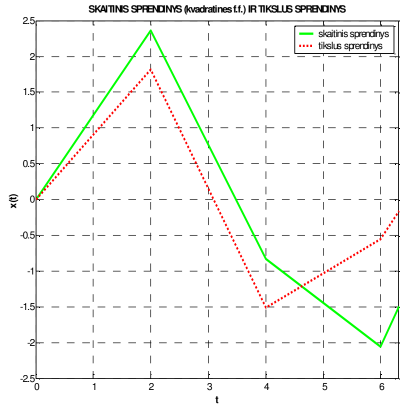
```
---------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 2
parametras a (kvadratines f.f.): -0.25
---------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
         0    2.0000    4.0000    6.0000    8.0000
         0    1.8186   -1.5136   -0.5588    1.9787
    2.0000   -0.8323   -1.3073    1.9203   -0.2910

APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
         0    2.0000    4.0000    6.0000    8.0000
         0    2.1429   -0.3061   -2.0991    0.6060
    2.0000    0.5714   -2.0816   -0.2741    2.1208
---------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 4.4448
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:6.7842
---------------------------------------------------------------------------
```



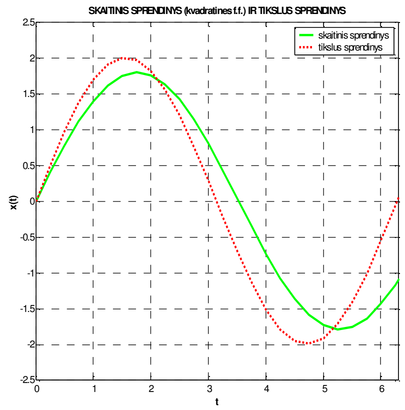

```
---------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 2
parametras a (kvadratines f.f.): 0
---------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
         0    2.0000    4.0000    6.0000    8.0000
         0    1.8186   -1.5136   -0.5588    1.9787
    2.0000   -0.8323   -1.3073    1.9203   -0.2910

APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
         0    2.0000    4.0000    6.0000    8.0000
         0    2.4000   -0.9600   -2.0160    1.7664
    2.0000   -0.4000   -1.8400    1.1360    1.3856
---------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 2.8045
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:3.4259
---------------------------------------------------------------------------
```



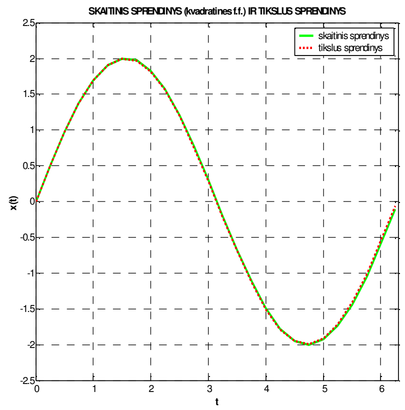

```
---------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 2
parametras a (kvadratines f.f.): 0.1
---------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
         0    2.0000    4.0000    6.0000    8.0000
         0    1.8186   -1.5136   -0.5588    1.9787
    2.0000   -0.8323   -1.3073    1.9203   -0.2910

APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
         0    2.0000    4.0000    6.0000    8.0000
         0    2.3548   -0.8355   -2.0584    1.5657
    2.0000   -0.6688   -1.7627    1.2942    1.3036
---------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 3.1269
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:2.8397
---------------------------------------------------------------------------
```



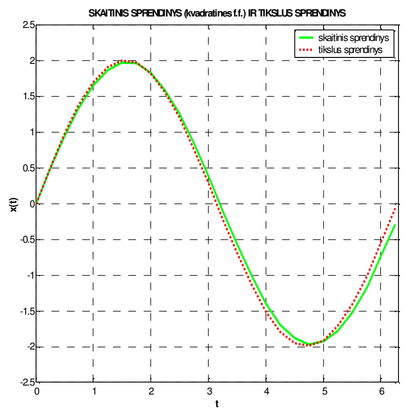
```
---------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 0.25
parametras a (kvadratines f.f.): -14
---------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 0       0.4948  0.9589  1.3633  1.6829  1.8980  1.9950  1.9680  1.8186  1.5561  1.1969  0.7633
 2.0000  1.9378  1.7552  1.4634  1.0806  0.6306  0.1415 -0.3565 -0.8323 -1.2563 -1.6023 -1.8486

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500
 0.2822 -0.2164 -0.7016 -1.1431 -1.5136 -1.7900 -1.9551 -1.9986 -1.9178 -1.7179 -1.4111 -1.0166
-1.9800 -1.9883 -1.8729 -1.6411 -1.3073 -0.8922 -0.4216  0.0752  0.5673  1.0242  1.4173  1.7224

 6.0000  6.2500
-0.5588 -0.0664
 1.9203  1.9989

APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 0       0.3956  0.7716  1.1094  1.3924  1.6066  1.7413  1.7899  1.7500  1.6236  1.4169  1.1401
 2.0000  1.9650  1.8328  1.6100  1.3076  0.9405  0.5269  0.0873 -0.3566 -0.7829 -1.1705 -1.5002

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500
 0.8070  0.4340  0.0395 -0.3569 -0.7357 -1.0781 -1.3672 -1.5887 -1.7317 -1.7890 -1.7579 -1.6398
-1.7558 -1.9245 -1.9981 -1.9728 -1.8501 -1.6358 -1.3407 -0.9793 -0.5694 -0.1314  0.3131  0.7421

 6.0000  6.2500
-1.4407 -1.1703
 1.1344  1.4706
---------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 10.6899
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems: 13.0427
---------------------------------------------------------------------------
```




```
---------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 0.25
parametras a (kvadratines f.f.): -1
---------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 0       0.4948  0.9589  1.3633  1.6829  1.8980  1.9950  1.9680  1.8186  1.5561  1.1969  0.7633
 2.0000  1.9378  1.7552  1.4634  1.0806  0.6306  0.1415 -0.3565 -0.8323 -1.2563 -1.6023 -1.8486

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500
 0.2822 -0.2164 -0.7016 -1.1431 -1.5136 -1.7900 -1.9551 -1.9986 -1.9178 -1.7179 -1.4111 -1.0166
-1.9800 -1.9883 -1.8729 -1.6411 -1.3073 -0.8922 -0.4216  0.0752  0.5673  1.0242  1.4173  1.7224

 6.0000  6.2500
-0.5588 -0.0664
 1.9203  1.9989

APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 0       0.4942  0.9579  1.3624  1.6827  1.8991  1.9982  1.9738  1.8275  1.5683  1.2122  0.7812
 2.0000  1.9395  1.7592  1.4702  1.0904  0.6432  0.1563 -0.3402 -0.8158 -1.2409 -1.5894 -1.8397

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500
 0.3020 -0.1959 -0.6817 -1.1254 -1.4995 -1.7811 -1.9526 -2.0034 -1.9305 -1.7384 -1.4388 -1.0504
-1.9764 -1.9909 -1.8825 -1.6578 -1.3306 -0.9213 -0.4550  0.0393  0.5313  0.9904  1.3883  1.7005

 6.0000  6.2500
-0.5971 -0.1069
 1.9076  1.9969
---------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 0.3488
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:0.40952
---------------------------------------------------------------------------
```




```
---------------------------------------------------------------------------
INTEGRAVIMO PARAMETRAI:
zingsnis: 0.25
parametras a (kvadratines f.f.): 5
---------------------------------------------------------------------------
TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 0       0.4948  0.9589  1.3633  1.6829  1.8980  1.9950  1.9680  1.8186  1.5561  1.1969  0.7633
 2.0000  1.9378  1.7552  1.4634  1.0806  0.6306  0.1415 -0.3565 -0.8323 -1.2563 -1.6023 -1.8486

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500
 0.2822 -0.2164 -0.7016 -1.1431 -1.5136 -1.7900 -1.9551 -1.9986 -1.9178 -1.7179 -1.4111 -1.0166
-1.9800 -1.9883 -1.8729 -1.6411 -1.3073 -0.8922 -0.4216  0.0752  0.5673  1.0242  1.4173  1.7224

 6.0000  6.2500
-0.5588 -0.0664
 1.9203  1.9989

APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:
 0       0.2500  0.5000  0.7500  1.0000  1.2500  1.5000  1.7500  2.0000  2.2500  2.5000  2.7500
 0       0.4795  0.9302  1.3252  1.6408  1.8580  1.9639  1.9520  1.8232  1.5851  1.2519  0.8438
 2.0000  1.9338  1.7517  1.4647  1.0898  0.6496  0.1705 -0.3189 -0.7891 -1.2120 -1.5623 -1.8190

 3.0000  3.2500  3.5000  3.7500  4.0000  4.2500  4.5000  4.7500  5.0000  5.2500  5.5000  5.7500
 0.3850 -0.0968 -0.5728 -1.0145 -1.3954 -1.6926 -1.8884 -1.9710 -1.9355 -1.7840 -1.5255 -1.1756
-1.9666 -1.9963 -1.9064 -1.7023 -1.3961 -1.0062 -0.5560 -0.0725  0.4153  0.8783  1.2886  1.6217

 6.0000  6.2500
-0.7553 -0.2896
 1.8576  1.9821
---------------------------------------------------------------------------
PAKLAIDOS
Naudojant kvadratines formos funkcijas:
Paklaida funkcijos reiksmems: 1.9464
Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:1.4687
---------------------------------------------------------------------------
```



Paklaida padaroma per vieną periodą (T=6,3):

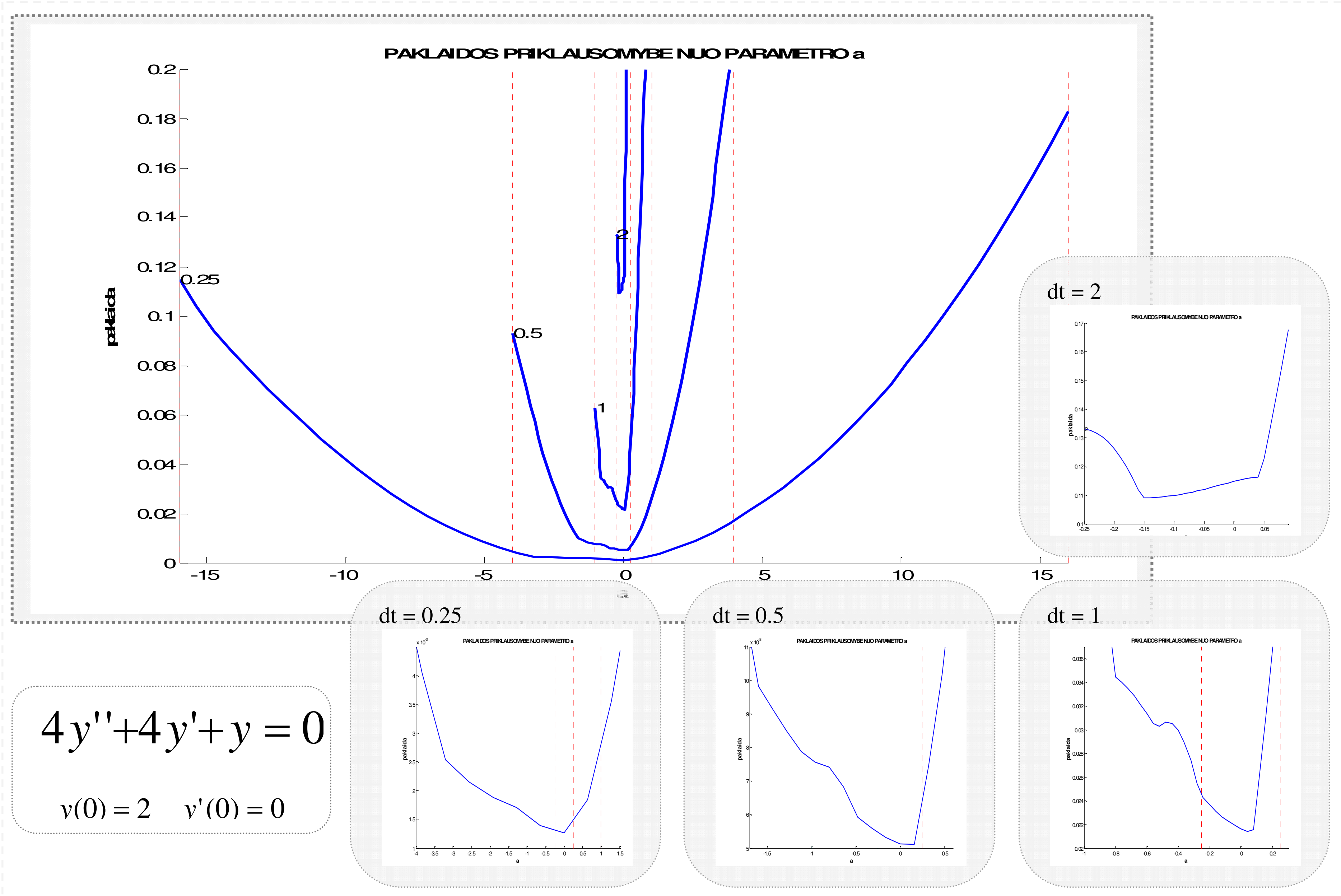
Žingsnis\a	**-6**	**-4**	**-2**	**0**	**2**	**4**	**6**
0.5		6.2214	2.2572	0.54116	2.2572	6.2214	
0.25	2.6479	1.3519	0.5385	0.29376	0.5385	1.3519	2.6479
0.05	0.07207	0.063003	0.058107	0.056609	0.058107	0.063003	0.07207
0.025	0.030225	0.029229	0.028658	0.028474	0.028658	0.029229	0.030225

Apibendrinkime gautus rezultatus:

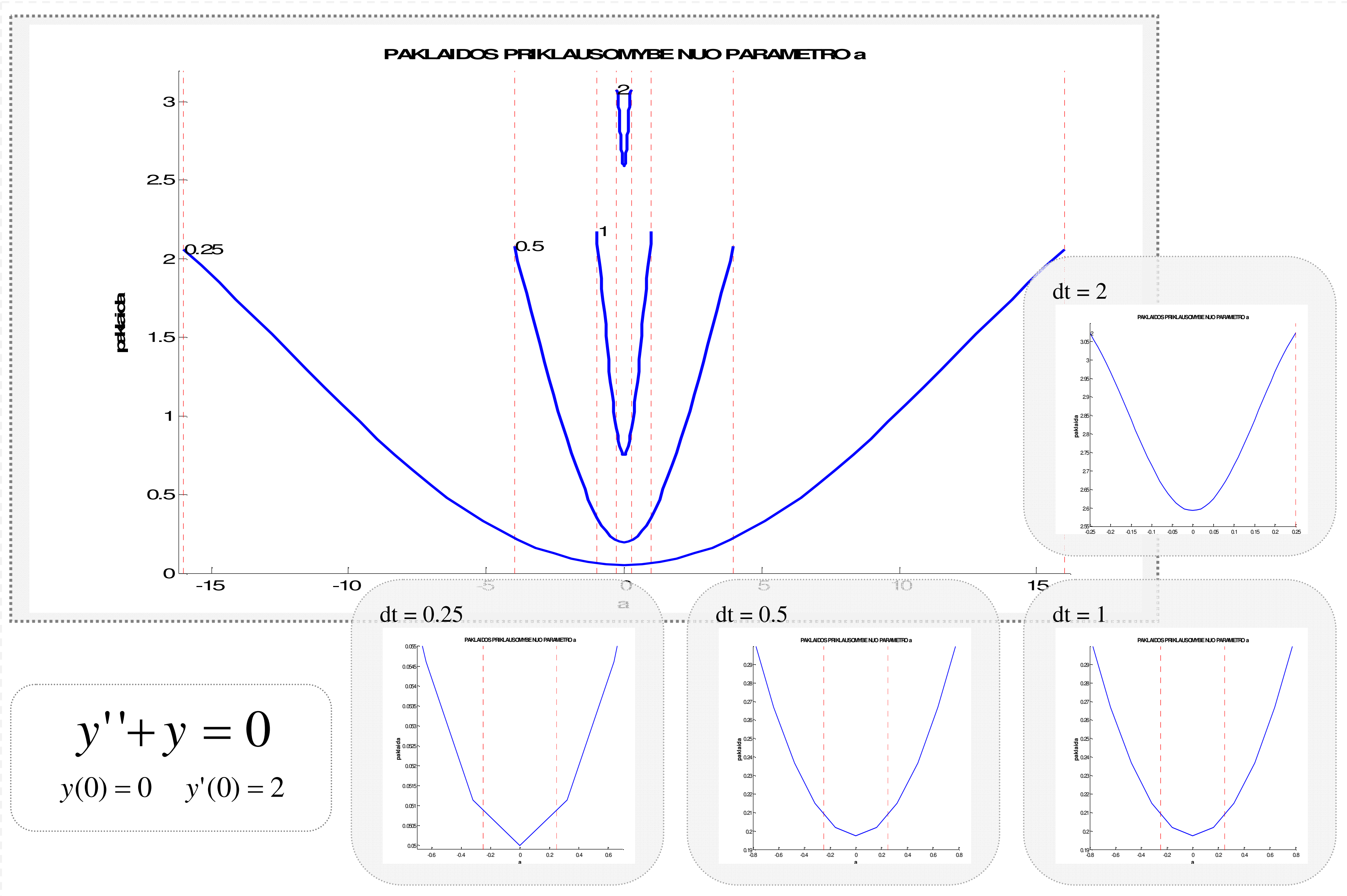
1. Kaip ir tiesinių firmos funkcijų atveju integravimo tikslumas tiesiogiai priklauso nuo parinkto integravimo žingsnio – kuo jis mažesnis, tuo tikslesnis skaitinis sprendinys.

2. Įvestas papildomas parametras *a* leidžia kontroliuoti integravimo tikslumą, tačiau reikia pastebėti, kad jo panaudojimo racionalumo įvertinimas reikalauja papildomos analizės. Iš pateiktų integravimo rezultatų matome, kad pirmame pavyzdyje, keisdami kontrolinį parametrą galime pasiekti didesnio tikslumo, negu gavome tiesinių formos funkcijų atveju, tačiau antrajame pavyzdyje tiksliausias sprendinys gaunamas, kai $a = 0$, t.y. tiesinių funkcijų atveju.

Antroji išvada bus akivaizdesnė, kai pavaizduosime integravimo paklaidos priklausmybę nuo papildomai įvesto kontrolinio parametro *a* grafiškai.



10 pav. 1 pavyzdžio integravvimo paklaidos priklausomybė nuo žingsnio ir kontrolinio parametro a



11 pav. 2 pavyzdžio integravvimo paklaidos priklausomybė nuo žingsnio ir kontrolinio parametro a

2.3. PALYGINIMAS SU KITAIS INTEGRATORIAIS

Palyginkime sukurto metodo rezultatus su vienu iš klasikinių skaitinių integratorių – 4-5 eilės Rungės ir Kuto metodu, kuris programiniame pakete MatLab 6.5 realizuojamas standartine funkcija *ode45()*.

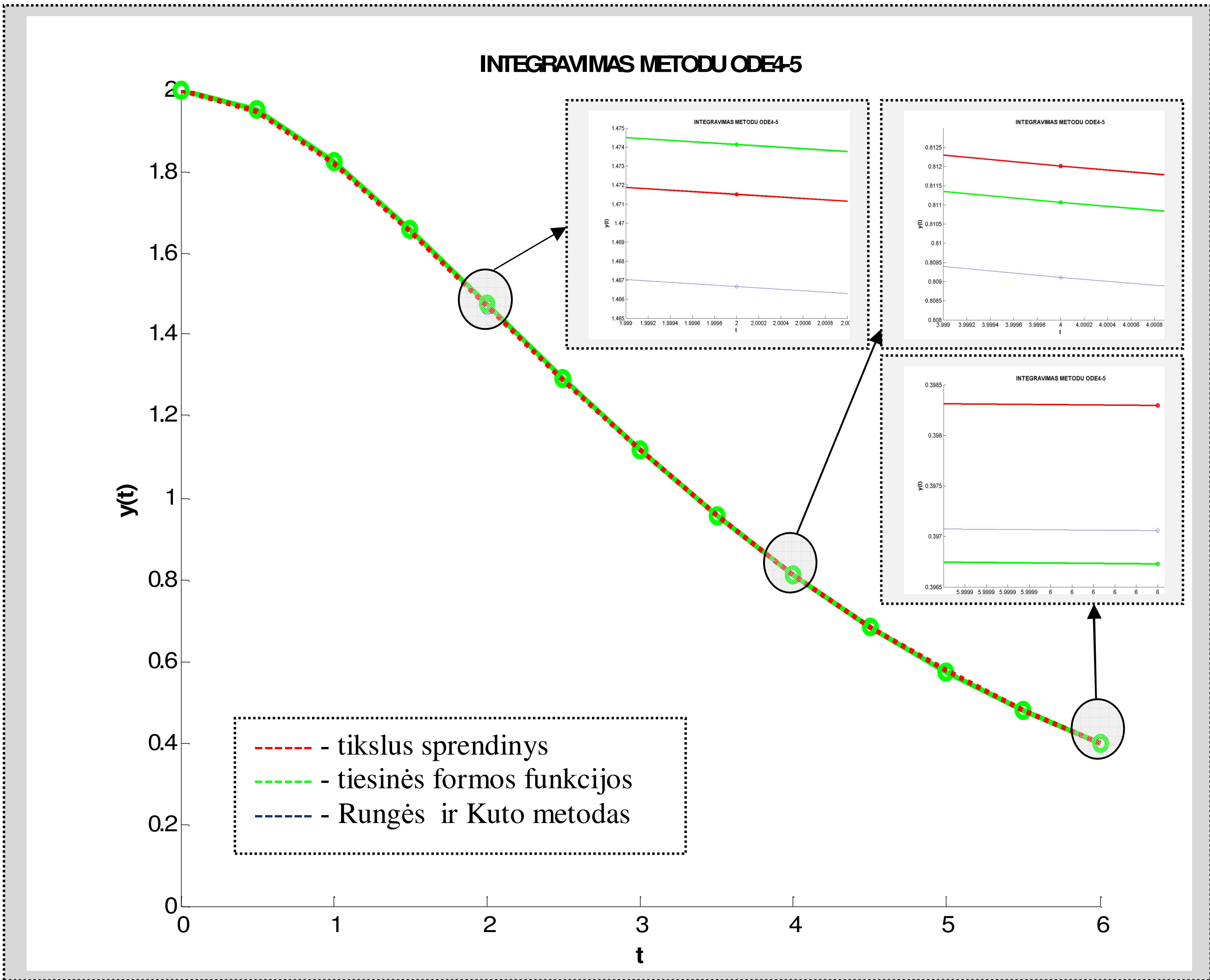
2.3.1. 4-5 EILĖS RUNGĖS IR KUTO METODAS

Paimkime jau nagrinėtą anksčiau pirmąjį pavyzdį:

$$4y'' + 4y' + y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = 0.$$

Ir palyginkime rezultatus, gaunamus suintegravus diferencialinę lygtį, taikant aproksimaciją tiesinėmis funkcijomis ir taikant 4-5 eilės Rungės ir Kuto metodą. Rezultatus pateiksime grafiškai ir reikšmių lentele. Integratorių tikslumą lyginsime, skaičiuodami absoliučiąją paklaidą kiekviename mazge ir įvestą anksčiau tikslumo įvertį, t.y. suminę absoliučiąją paklaidą.

Integravimo žingsnis: 0,5.



2 lentelė

Integratorių tikslumo palyginimas: tiesinės formos funkcijos ir Rungės-Kuto metodas (dt=0,5)

t	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	suminė paklaida
y_{tff}	1.9504	1.8238	1.6570	1.4741	1.2907	1.1161	0.9554	0.8111	0.6838	0.5731	0.4779	0.3967	
y_{RK}	1.9535	1.8293	1.6553	1.4667	1.2876	1.1158	0.8091	0.8091	0.6835	0.5738	0.4785	0.3971	
y_{tiks}	1.9470	1.8196	1.6533	1.4715	1.2893	1.1157	0.9558	0.8120	0.6851	0.5746	0.4795	0.3983	
$\lvert y_{tiks}-y_{tff}\rvert$	0.0034	0.0042	0.0037	0.0026	0.0014	0.0004	0.0004	0.0009	0.0013	0.0015	0.0016	0.0016	**0.0230**
$\lvert y_{tiks}-y_{RK}\rvert$	0.0065	0.0097	0.0020	0.0048	0.0017	0.0001	0.1467	0.0029	0.0016	0.0008	0.0010	0.0012	**0.1790**

Integravimo žingsnis: 0,25.

3 lentelė

Integratorių tikslumo palyginimas: tiesinės formos funkcijos ir Rungės-Kuto metodas (dt=0,25)

t	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75	3	3.25	3.5
y_{tff}	1.9861	1.9478	1.8910	1.8206	1.7406	1.6542	1.5640	1.4722	1.3803	1.2896	1.2012	1.1158	1.0338	0.9557
y_{RK}	1.9858	1.9472	1.8901	1.8195	1.7396	1.6534	1.5632	1.4715	1.3798	1.2893	1.2010	1.1156	1.0338	0.9557
y_{tiks}	1.9856	1.9470	1.8900	1.8196	1.7396	1.6533	1.5632	1.4715	1.3798	1.2893	1.2010	1.1157	1.0338	0.9558
$\lvert y_{tiks}-y_{tff}\rvert$	0.0005	0.0008	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0008	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000	0.0001
$\lvert y_{tiks}-y_{RK}\rvert$	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0001

t	3.75	4	4.25	4.5	4.75	5	5.25	5.5	5.75	6	suminė paklaida
y_{tff}	0.8816	0.8118	0.7462	0.6848	0.6275	0.5742	0.5248	0.4791	0.4368	0.3979	
y_{RK}	0.8818	0.8120	0.7464	0.6851	0.6278	0.5746	0.5252	0.4794	0.4372	0.3983	
y_{tiks}	0.8818	0.8120	0.7465	0.6851	0.6278	0.5746	0.5252	0.4795	0.4372	0.3983	
$\lvert y_{tiks}-y_{tff}\rvert$	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	**0.0107**
$\lvert y_{tiks}-y_{RK}\rvert$	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	**0.0009**

Analogiškai analizuokime antrojo pavyzdžio lygties integravimo rezultatus:

$$y'' + y = 0,\ \ y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

4 lentelė

Integratorių tikslumo palyginimas: tiesinės formos funkcijos ir Rungės-Kuto metodas (dt=0,5)

t	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	suminė paklaida
y_{tff}	0.9600	1.6896	2.0137	1.8545	1.2502	0.3459	-0.6414	-1.4748	-1.9543	-1.9647	-1.5036	-0.6816	
y_{RK}	0.9648	1.7033	2.0381	1.8667	1.2467	0.3176	-0.7469	-1.6427	-2.1244	-2.0931	-1.5128	-0.5419	
y_{tiks}	0.9589	1.6829	1.9950	1.8186	1.1969	0.2822	-0.7016	-1.5136	-1.9551	-1.9178	-1.4111	-0.5588	
$\lvert y_{tiks}-y_{tff}\rvert$	0.0011	0.0067	0.0187	0.0359	0.0533	0.0637	0.0602	0.0388	0.0008	0.0469	0.0925	0.1228	**0.5414**
$\lvert y_{tiks}-y_{RK}\rvert$	0.0059	0.0204	0.0431	0.0481	0.0498	0.0354	0.0453	0.1291	0.1693	0.1753	0.1017	0.0169	**0.8403**

5 lentelė

Integratorių tikslumo palyginimas: tiesinės formos funkcijos ir Rungės-Kuto metodas (dt=0,25)

a	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75	3	3.25	3.5
y_{tff}	0.4948	0.9591	1.3640	1.6845	1.9009	1.9996	1.9747	1.8276	1.5675	1.2104	0.7785	0.2984	-0.2002	-0.6864
y_{RK}	0.4954	0.9598	1.3639	1.6833	1.8990	1.9964	1.9685	1.8180	1.5555	1.1963	0.7620	0.2801	-0.2191	-0.7044
y_{tiks}	0.4948	0.9589	1.3633	1.6829	1.8980	1.9950	1.9680	1.8186	1.5561	1.1969	0.7633	0.2822	-0.2164	-0.7016
$\lvert y_{tiks} - y_{tff} \rvert$	0.0000	0.0002	0.0007	0.0016	0.0029	0.0046	0.0067	0.0090	0.0114	0.0135	0.0152	0.0162	0.0162	0.0152
$\lvert y_{tiks} - y_{RK} \rvert$	0.0006	0.0009	0.0006	0.0004	0.0010	0.0014	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006	0.0013	0.0021	0.0027	0.0028

a	3.75	4	4.25	4.5	4.75	5	5.25	5.5	5.75	6	
y_{tff}	-1.1301	-1.5039	-1.7847	-1.9551	-2.0046	-1.9301	-1.7361	-1.4348	-1.0448	-0.5901	
y_{RK}	-1.1455	-1.5155	-1.7921	-1.9570	-1.9992	-1.9168	-1.7164	-1.4092	-1.0136	-0.5547	
y_{tiks}	-1.1431	-1.5136	-1.7900	-1.9551	-1.9986	-1.9178	-1.7179	-1.4111	-1.0166	-0.5588	
											suminė paklaida
$\lvert y_{tiks} - y_{tff} \rvert$	0.0130	0.0097	0.0053	0.0000	0.0060	0.0123	0.0182	0.0237	0.0282	0.0313	**0.2611**
$\lvert y_{tiks} - y_{RK} \rvert$	0.0024	0.0019	0.0021	0.0019	0.0006	0.0010	0.0015	0.0019	0.0030	0.0041	**0.0359**

Kaip matome iš pateiktų lentelių, esant didesniam integravimo žingsniui, tikslesnis sprendinio skaitinis artinys gaunamas, taikant išvystytą šiame darbe metodą. Tačiau mažinant integravimo žingsnį, 4-5 eilės Rungės ir Kuto metodas pranašesnis ir duoda tikslesnį rezultatą. Pateikėme integravimo rezultatus, kai vieno žingsnio intervale buvo taikoma aproksimacija tiesinėmis formos funkcijomis. Jeigu nagrinėsime diferencialinę lygtį, kuriai pasiteisina kontrolinio parametro įvedimas (aproksimacijos kvadratinėmis formos funkcijomis taikymas), tai turėdami galimybė pagerinti skaitinio artinio tikslumą keičiant parametro reikšmę, skaitinį sprendinį galime rasti mažesniais kaštais.

2.4. DAUGIAŽINGSNIS METODAS

Iki šiol kalbėjome apie vienažingsnius metodus. Pabandykime padidinti mazgų skaičių iki trijų ir išvesti didesnio tikslumo pradinio diferencialinio uždavinio sprendimo metodą.

Taigi laiko ašyje nagrinėjami trys taškai:

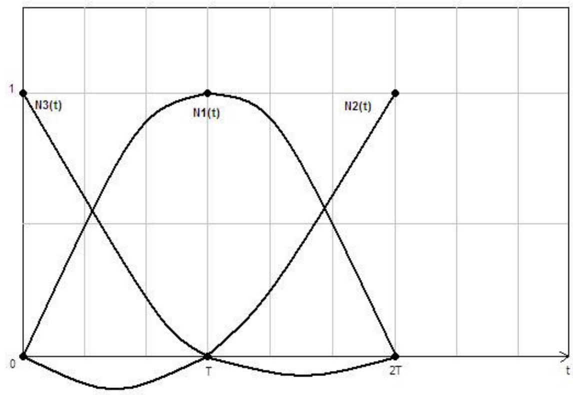
3. t = 0 . Šiame taške žinomos reikšmės: x_0, x_0' (pradinės sąlygos).

4. t = T . Šiame taške reikia žinomos reikšmės: x_T, x_T' (apskaičiuojamos vianažingsniu metodu).

5. t = 2T. Šiame taške reikia rasti reikšmes: x_{2T}, x_{2T}' .

Sprendinio funkciją intervale $[0,2\pi]$ aproksimuosime antros eilės polinomais, t.y. kvadratinėmis formos funkcijomis $N_1(t)$, $N_2(t)$ ir $N_3(t)$, kurios tenkina kraštines sąlygas:

taškas / funkcija	t = 0	t = T	t = 2T
$N_1(t)$	0	1	0
$N_2(t)$	0	0	1
$N_3(t)$	1	0	0



Bendroji formos funkcijos išraiška: $N(t) = at^2 + bt + c$

Pirmosios funkcijos sąlygos: $\begin{cases} N_1(0) = 0 + 0 + c = 0, \\ N_1(T) = aT^2 + bT + c = 1, \\ N_1(2T) = 4aT^2 + 2bT + c = 0. \end{cases}$

$$c = 0 \Rightarrow -\begin{cases} aT^2 + bT = 1, \\ 4aT^2 + 2bT = 0. \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{T^2}, b = \frac{2}{T}$$

Antrosios funkcijos sąlygos: $\begin{cases} N_1(0) = 0 + 0 + c = 0, \\ N_1(T) = aT^2 + bT + c = 0, \\ N_1(2T) = 4aT^2 + 2bT + c = 1. \end{cases}$

$$c = 0 \Rightarrow -\begin{cases} aT^2 + bT = 0, \\ 4aT^2 + 2bT = 1. \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2T^2}, b = -\frac{1}{2T}$$

Trečiosios funkcijos sąlygos: $\begin{cases} N_1(0) = 0 + 0 + c = 1, \\ N_1(T) = aT^2 + bT + c = 0, \\ N_1(2T) = 4aT^2 + 2bT + c = 0. \end{cases}$

$$c = 0 \Rightarrow -\begin{cases} aT^2 + bT = 0, \\ 4aT^2 + 2bT = 1. \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2T^2}, b = -\frac{3}{2}$$

Taigi gavome tokias formos funkcijas:

$$N_1(t) = -\frac{1}{T^2}t^2 + \frac{2}{T}t \tag{103}$$

$$N_2(t) = \frac{1}{2T^2}t^2 - \frac{1}{2T}t \tag{104}$$

$$N_3(t) = -\frac{1}{2T^2}t^2 - \frac{3}{2T}t + 1 \tag{105}$$

Kaip ir anksčiau apibrėžkime matricas X, X' ir X'':

1.$X = \begin{bmatrix} N_1(t) & N_2(t) & N_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T^2}t^2 + \frac{2}{T}t & \frac{1}{2T^2}t^2 - \frac{1}{2T}t & -\frac{1}{2T^2}t^2 - \frac{3}{2T}t + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix}$

2.$X' = \begin{bmatrix} \frac{dN_1(t)}{dt} & \frac{dN_2(t)}{dt} & \frac{dN_3(t)}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{T^2}t + \frac{2}{T} & \frac{1}{T^2}t - \frac{1}{2T} & -\frac{1}{T^2}t - \frac{3}{2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} = N' \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix}$

3.$X'' = \begin{bmatrix} \frac{d^2N_1(t)}{dt^2} & \frac{d^2N_2(t)}{dt^2} & \frac{d^2N_3(t)}{dt^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{T^2} & \frac{1}{T^2} & -\frac{1}{T^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} = N'' \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix}$

Nagrinėjama ta pati nehomogeninė diferencialinė lygtis su pastoviais koeficientais:

$$F(x'', x', x, t) = 0 \tag{106}$$

$$mx'' + hx' + kx = f \Rightarrow mx'' + hx' + kx - f = 0 \tag{107}$$

Lygiai taip pat Galiorkino metodu normavę paklaidą gauname lygybę:

$$\int_0^{2T} N^T \cdot \varepsilon(t)dt = m \cdot \int_0^{2T} N^T X''dt + \left(h \cdot \int_0^{2T} N^T N'dt + k \cdot \int_0^{2T} N^T \cdot Ndt \right) \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} - f \int_0^{2T} N^T dt = 0 \tag{108}$$

Ir naudodami silpnąją baigtinių elementų metodo formuluotę narį su antrąja išvestine integruojame dalimis:

$$\int_0^{2T} N^T X''dt = \int_0^{2T} N^T d(X') = \begin{bmatrix} u = N^T; du = (N')^T dt \\ dv = d(X'); v = X' \end{bmatrix} = N^T X' \Big|_0^{2T} - \int_0^{2T} X'(N')^T dt =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T^2}t^2 + \frac{2}{T}t \\ \frac{1}{2T^2}t^2 - \frac{1}{2T}t \\ -\frac{1}{2T^2}t^2 - \frac{3}{2T}t + 1 \end{bmatrix} X' \Big|_0^{2T} - \int_0^{2T} X'(N')^T dt = \left[\int_0^{2T} X'(N')^T dt = \int_0^{2T} N' \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} (N')^T dt = \int_0^{2T} (N')^T N'dt \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} x'_{2T} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x'_0 - \int_0^{2T} (N')^T N'dt \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x'_{2T} \\ -4x'_{2T} - x'_0 \end{bmatrix} - \int_0^{2T} (N')^T N'dt \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix}$$

Taigi, gavome:

$$\int_0^T N^T X''dt = \begin{bmatrix} 0 \\ x'_{2T} \\ -4x'_{2T} - x'_0 \end{bmatrix} - \int_0^{2T} (N')^T N'dt \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} \tag{109}$$

grįžtant prie (108):

$$m\left(\begin{bmatrix} 0 \\ x'_{2T} \\ -4x'_{2T} - x'_0 \end{bmatrix} - \int_0^{2T} (N')^T N'dt \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix}\right) + \left(h \cdot \int_0^{2T} N^T N'dt + k \cdot \int_0^{2T} N^T \cdot Ndt\right) \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} - f \int_0^{2T} N^T dt = 0 \tag{110}$$

$$\left(-m\int_0^{2T} (N')^T N'dt + h \cdot \int_0^{2T} N^T N'dt + k \cdot \int_0^{2T} N^T \cdot Ndt\right) \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} - f\int_0^{2T} N^T dt = -m\begin{bmatrix} 0 \\ x'_{2T} \\ -4x'_{2T} - x'_0 \end{bmatrix} \tag{111}$$

Suintegruokime visus į paskutinę išraišką įeinančius integralus.

Pirmasis integralas:

$$\int_0^{2T} (N')^T N'dt = \int_0^{2T} \begin{bmatrix} -\frac{2t}{T^2} + \frac{2}{T} \\ \frac{t}{T^2} - \frac{1}{2T} \\ -\frac{t}{T^2} - \frac{3}{2T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2t}{T^2} + \frac{2}{T} & \frac{t}{T^2} - \frac{1}{2T} & -\frac{t}{T^2} - \frac{3}{2T} \end{bmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{2T} \begin{bmatrix} \left(-\frac{2t}{T^2} + \frac{2}{T}\right)^2 & \left(-\frac{2t}{T^2} + \frac{2}{T}\right)\left(\frac{t}{T^2} - \frac{1}{2T}\right) & \left(-\frac{2t}{T^2} + \frac{2}{T}\right)\left(-\frac{t}{T^2} - \frac{3}{2T}\right) \\ \left(\frac{t}{T^2} - \frac{1}{2T}\right)\left(-\frac{2t}{T^2} + \frac{2}{T}\right) & \left(\frac{t}{T^2} - \frac{1}{2T}\right)^2 & \left(\frac{t}{T^2} - \frac{1}{2T}\right)\left(-\frac{t}{T^2} - \frac{3}{2T}\right) \\ \left(-\frac{t}{T^2} - \frac{3}{2T}\right)\left(-\frac{2t}{T^2} + \frac{2}{T}\right) & \left(-\frac{t}{T^2} - \frac{3}{2T}\right)\left(\frac{t}{T^2} - \frac{1}{2T}\right) & \left(-\frac{t}{T^2} - \frac{3}{2T}\right)^2 \end{bmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{2T} \begin{bmatrix} \frac{4t^2}{T^4} - \frac{8t}{T^3} + \frac{4}{T^2} & -\frac{2t^2}{T^4} + \frac{3t}{T^3} - \frac{1}{T^2} & \frac{2t^2}{T^4} + \frac{t}{T^3} - \frac{3}{T^2} \\ -\frac{2t^2}{T^4} + \frac{3t}{T^3} - \frac{1}{T^2} & \frac{t^2}{T^4} - \frac{t}{T^3} + \frac{1}{4T^2} & -\frac{t^2}{T^4} - \frac{t}{T^3} + \frac{3}{4T^2} \\ \frac{2t^2}{T^4} + \frac{t}{T^3} - \frac{3}{T^2} & -\frac{t^2}{T^4} - \frac{t}{T^3} + \frac{3}{4T^2} & \frac{t^2}{T^4} + \frac{3t}{T^3} + \frac{9}{4T^2} \end{bmatrix} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4t^3}{3T^4} - \frac{4t^2}{T^3} + \frac{4t}{T^2} & -\frac{2t^3}{3T^4} + \frac{3t^2}{2T^3} - \frac{t}{T^2} & \frac{2t^3}{3T^4} + \frac{t^2}{2T^3} - \frac{3t}{T^2} \\ -\frac{2t^3}{3T^4} + \frac{3t^2}{2T^3} - \frac{t}{T^2} & \frac{t^3}{3T^4} - \frac{t^2}{2T^3} + \frac{t}{4T^2} & -\frac{t^3}{3T^4} - \frac{t^2}{2T^3} + \frac{3t}{4T^2} \\ \frac{2t^3}{3T^4} + \frac{t^2}{2T^3} - \frac{3t}{T^2} & -\frac{t^3}{3T^4} - \frac{t^2}{2T^3} + \frac{3t}{4T^2} & \frac{t^3}{3T^4} + \frac{3t^2}{2T^3} + \frac{9t}{4T^2} \end{bmatrix} \Bigg|_0^{2T} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{32T^3}{3T^4} - \frac{16T^2}{T^3} + \frac{8T}{T^2} & -\frac{16T^3}{3T^4} + \frac{6T^2}{T^3} - \frac{2T}{T^2} & \frac{16T^3}{3T^4} + \frac{2T^2}{T^3} - \frac{6T}{T^2} \\ -\frac{16T^3}{3T^4} + \frac{6T^2}{T^3} - \frac{2T}{T^2} & \frac{8T^3}{3T^4} - \frac{4T^2}{2T^3} + \frac{2T}{4T^2} & -\frac{8T^3}{3T^4} - \frac{2T^2}{T^3} + \frac{6T}{4T^2} \\ \frac{16T^3}{3T^4} + \frac{2T^2}{T^3} - \frac{6T}{T^2} & -\frac{8T^3}{3T^4} - \frac{2T^2}{T^3} + \frac{6T}{4T^2} & \frac{8T^3}{3T^4} + \frac{6T^2}{T^3} + \frac{9T}{2T^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6T}\begin{bmatrix} 16 & -8 & 8 \\ -8 & 7 & -19 \\ 8 & -19 & 79 \end{bmatrix}$$

Antrasis integralas:

$$\int_0^{2T} N^T N' dt = \int_0^{2T} \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{T^2}+\frac{2t}{T} \\ \frac{t^2}{2T^2}-\frac{t}{2T} \\ -\frac{t^2}{2T^2}-\frac{3t}{2T}+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2t}{T^2}+\frac{2}{T} & \frac{t}{T^2}-\frac{1}{2T} & -\frac{t}{T^2}-\frac{3}{2T} \end{bmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{2T} \begin{bmatrix} \left(-\frac{t^2}{T^2}+\frac{2t}{T}\right)\cdot\left(-\frac{2t}{T^2}+\frac{2}{T}\right) & \left(-\frac{t^2}{T^2}+\frac{2t}{T}\right)\cdot\left(\frac{t}{T^2}-\frac{1}{2T}\right) & \left(-\frac{t^2}{T^2}+\frac{2t}{T}\right)\cdot\left(-\frac{t}{T^2}-\frac{3}{2T}\right) \\ \left(\frac{t^2}{2T^2}-\frac{t}{2T}\right)\cdot\left(-\frac{2t}{T^2}+\frac{2}{T}\right) & \left(\frac{t^2}{2T^2}-\frac{t}{2T}\right)\cdot\left(\frac{t}{T^2}-\frac{1}{2T}\right) & \left(\frac{t^2}{2T^2}-\frac{t}{2T}\right)\cdot\left(-\frac{t}{T^2}-\frac{3}{2T}\right) \\ \left(-\frac{t^2}{2T^2}-\frac{3t}{2T}+1\right)\cdot\left(-\frac{2t}{T^2}+\frac{2}{T}\right) & \left(-\frac{t^2}{2T^2}-\frac{3t}{2T}+1\right)\cdot\left(\frac{t}{T^2}-\frac{1}{2T}\right) & \left(-\frac{t^2}{2T^2}-\frac{3t}{2T}+1\right)\cdot\left(-\frac{t}{T^2}-\frac{3}{2T}\right) \end{bmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{2T} \begin{bmatrix} \frac{2t^3}{T^4}-\frac{6t^2}{T^3}+\frac{4t}{T^2} & -\frac{t^3}{T^4}+\frac{5t^2}{2T^3}-\frac{t}{T^2} & \frac{t^3}{T^4}-\frac{t^2}{2T^3}-\frac{3t}{T^2} \\ -\frac{t^3}{T^4}+\frac{2t^2}{T^3}-\frac{t}{T^2} & \frac{t^3}{2T^4}-\frac{3t^2}{4T^3}+\frac{t}{4T^2} & -\frac{t^3}{2T^4}-\frac{t^2}{4T^3}+\frac{3t}{4T^2} \\ \frac{t^3}{T^4}+\frac{2t^2}{T^3}-\frac{5t}{T^2}+\frac{2}{T} & -\frac{t^3}{2T^4}-\frac{5t^2}{4T^3}+\frac{7t}{4T^2}-\frac{1}{2T} & \frac{t^3}{2T^4}+\frac{9t^2}{4T^3}+\frac{5t}{4T^2}-\frac{3}{2T} \end{bmatrix} dt =$$

$$= \left.\begin{bmatrix} \frac{t^4}{2T^4}-\frac{2t^3}{T^3}+\frac{2t^2}{T^2} & -\frac{t^4}{4T^4}+\frac{5t^3}{6T^3}-\frac{t^2}{2T^2} & \frac{t^4}{4T^4}-\frac{t^3}{6T^3}-\frac{3t^2}{2T^2} \\ -\frac{t^4}{4T^4}+\frac{2t^3}{3T^3}-\frac{t^2}{2T^2} & \frac{t^4}{8T^4}-\frac{t^3}{4T^3}+\frac{t^2}{8T^2} & -\frac{t^4}{8T^4}-\frac{t^3}{12T^3}+\frac{3t^2}{8T^2} \\ \frac{t^4}{4T^4}+\frac{2t^3}{3T^3}-\frac{5t^2}{2T^2}+\frac{2t}{T} & -\frac{t^4}{8T^4}-\frac{5t^3}{12T^3}+\frac{7t^2}{8T^2}-\frac{t}{2T} & \frac{t^4}{8T^4}+\frac{3t^3}{4T^3}+\frac{5t^2}{8T^2}-\frac{3t}{2T} \end{bmatrix}\right|_0^{2T} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{8T^4}{T^4}-\frac{16T^3}{T^3}+\frac{8T^2}{T^2} & -\frac{4T^4}{T^4}+\frac{20T^3}{3T^3}-\frac{2T^2}{T^2} & \frac{4T^4}{T^4}-\frac{4T^3}{3T^3}-\frac{6T^2}{T^2} \\ -\frac{4T^4}{T^4}+\frac{16T^3}{3T^3}-\frac{2T^2}{T^2} & \frac{2T^4}{T^4}-\frac{2T^3}{T^3}+\frac{T^2}{2T^2} & -\frac{2T^4}{T^4}-\frac{2T^3}{3T^3}+\frac{3T^2}{2T^2} \\ \frac{4T^4}{T^4}+\frac{16T^3}{3T^3}-\frac{10T^2}{T^2}+\frac{4T}{T} & -\frac{2T^4}{T^4}-\frac{10T^3}{3T^3}+\frac{7T^2}{2T^2}-\frac{T}{T} & \frac{8T^4}{T^4}+\frac{6T^3}{T^3}+\frac{5T^2}{2T^2}-\frac{3T}{T} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8-16+8 & -4+\frac{20}{3}-2 & 4-\frac{4}{3}-6 \\ -4+\frac{16}{3}-2 & 2-2+\frac{1}{2} & -2-\frac{2}{3}+\frac{3}{2} \\ 4+\frac{16}{3}-10+4 & -2-\frac{10}{3}+\frac{7}{2}-1 & 8+6+\frac{5}{2}-3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 4 & -20 \\ -4 & 3 & -7 \\ 20 & -17 & 45 \end{bmatrix}$$

Trečiasis integralas:

$$\int_0^{2T} N^T N dt = \int_0^{2T} \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{T^2}+\frac{2t}{T} \\ \frac{t^2}{2T^2}-\frac{t}{2T} \\ -\frac{t^2}{2T^2}-\frac{3t}{2T}+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{T^2}+\frac{2t}{T} & \frac{t^2}{2T^2}-\frac{t}{2T} & -\frac{t^2}{2T^2}-\frac{3t}{2T}+1 \end{bmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{2T} \begin{bmatrix} \left(-\frac{t^2}{T^2}+\frac{2t}{T}\right)^2 & \left(-\frac{t^2}{T^2}+\frac{2t}{T}\right)\cdot\left(\frac{t^2}{2T^2}-\frac{t}{2T}\right) & \left(-\frac{t^2}{T^2}+\frac{2t}{T}\right)\cdot\left(-\frac{t^2}{2T^2}-\frac{3t}{2T}+1\right) \\ \left(\frac{t^2}{2T^2}-\frac{t}{2T}\right)\cdot\left(-\frac{t^2}{T^2}+\frac{2t}{T}\right) & \left(\frac{t^2}{2T^2}-\frac{t}{2T}\right)^2 & \left(\frac{t^2}{2T^2}-\frac{t}{2T}\right)\cdot\left(-\frac{t^2}{2T^2}-\frac{3t}{2T}+1\right) \\ \left(-\frac{t^2}{2T^2}-\frac{3t}{2T}+1\right)\cdot\left(-\frac{t^2}{T^2}+\frac{2t}{T}\right) & \left(-\frac{t^2}{2T^2}-\frac{3t}{2T}+1\right)\cdot\left(\frac{t^2}{2T^2}-\frac{t}{2T}\right) & \left(-\frac{t^2}{2T^2}-\frac{3t}{2T}+1\right)^2 \end{bmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{2T} \begin{bmatrix} \frac{t^4}{T^4} - \frac{4t^3}{T^3} + \frac{4t^2}{T^2} & -\frac{t^4}{2T^4} + \frac{3t^3}{2T^3} - \frac{t^2}{T^2} & \frac{t^4}{2T^4} + \frac{t^3}{2T^3} - \frac{4t^2}{T^2} + \frac{2t}{T} \\ -\frac{t^4}{2T^4} + \frac{3t^3}{2T^3} - \frac{t^2}{T^2} & \frac{t^4}{4T^4} - \frac{t^3}{2T^3} + \frac{t^2}{4T^2} & -\frac{t^4}{4T^4} - \frac{t^3}{2T^3} + \frac{5t^2}{4T^2} - \frac{t}{2T} \\ \frac{t^4}{2T^4} + \frac{t^3}{2T^3} - \frac{4t^2}{T^2} + \frac{2t}{T} & -\frac{t^4}{4T^4} - \frac{t^3}{2T^3} + \frac{5t^2}{4T^2} - \frac{t}{2T} & \frac{t^4}{4T^4} + \frac{3t^3}{2T^3} + \frac{5t^2}{4T^2} - \frac{3t}{T} + 1 \end{bmatrix} dt =$$

$$= \left. \begin{bmatrix} \frac{t^5}{5T^4} - \frac{t^4}{T^3} + \frac{4t^3}{3T^2} & -\frac{t^5}{10T^4} + \frac{3t^4}{8T^3} - \frac{t^3}{3T^2} & \frac{t^5}{10T^4} + \frac{t^4}{8T^3} - \frac{4t^3}{3T^2} + \frac{t^2}{T} \\ -\frac{t^5}{10T^4} + \frac{3t^4}{8T^3} - \frac{t^3}{3T^2} & \frac{t^5}{20T^4} - \frac{t^4}{8T^3} + \frac{t^3}{12T^2} & -\frac{t^5}{20T^4} - \frac{t^4}{8T^3} + \frac{5t^3}{12T^2} - \frac{t^2}{4T} \\ \frac{t^5}{10T^4} + \frac{t^4}{8T^3} - \frac{4t^3}{3T^2} + \frac{t^2}{T} & -\frac{t^5}{20T^4} - \frac{t^4}{8T^3} + \frac{5t^3}{12T^2} - \frac{t^2}{4T} & \frac{t^5}{20T^4} + \frac{3t^4}{8T^3} + \frac{5t^3}{12T^2} - \frac{3t^2}{2T} + t \end{bmatrix} \right|_0^{2T} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{32T^5}{5T^4} - \frac{16T^4}{T^3} + \frac{32T^3}{3T^2} & -\frac{16T^5}{5T^4} + \frac{6T^4}{T^3} - \frac{8T^3}{3T^2} & \frac{16T^5}{5T^4} + \frac{2T^4}{T^3} - \frac{32T^3}{3T^2} + \frac{4T^2}{T} \\ -\frac{16T^5}{5T^4} + \frac{6T^4}{T^3} - \frac{8T^3}{3T^2} & \frac{8T^5}{5T^4} - \frac{2T^4}{T^3} + \frac{2T^3}{3T^2} & -\frac{8T^5}{5T^4} - \frac{2T^4}{T^3} + \frac{10T^3}{3T^2} - \frac{T^2}{T} \\ \frac{16T^5}{5T^4} + \frac{2T^4}{T^3} - \frac{32T^3}{3T^2} + \frac{4T^2}{T} & -\frac{8T^5}{5T^4} - \frac{2T^4}{T^3} + \frac{10T^3}{3T^2} - \frac{T^2}{T} & \frac{8T^5}{5T^4} + \frac{6T^4}{T^3} + \frac{10T^3}{3T^2} - \frac{6T^2}{T} + 2T \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{T}{15} \begin{bmatrix} 96 - 240 + 160 & -48 + 90 - 40 & 48 + 30 - 160 + 60 \\ -48 + 90 - 40 & 24 - 30 + 10 & -24 - 30 + 50 - 15 \\ -48 + 30 - 160 + 60 & -24 - 30 + 50 - 15 & 24 + 90 + 50 - 90 + 30 \end{bmatrix} = \frac{T}{15} \begin{bmatrix} 16 & 2 & -22 \\ 2 & 4 & -19 \\ -22 & -19 & 104 \end{bmatrix}$$

Ketvirtasis integralas:

$$\int_0^{2T} N^T dt = \int_0^{2T} \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{T^2} + \frac{2t}{T} \\ \frac{t^2}{2T^2} - \frac{t}{2T} \\ -\frac{t^2}{2T^2} - \frac{3t}{2T} + 1 \end{bmatrix} dt = \left. \begin{bmatrix} -\frac{t^3}{3T^2} + \frac{t^2}{T} \\ \frac{t^3}{6T^2} - \frac{t^2}{4T} \\ -\frac{t^3}{6T^2} - \frac{3t^2}{4T} + t \end{bmatrix} \right|_0^{2T} = \begin{bmatrix} -\frac{8T^3}{3T^2} + \frac{4T^2}{T} \\ \frac{4T^3}{3T^2} - \frac{T^2}{T} \\ -\frac{4T^3}{3T^2} - \frac{3T^2}{T} + 2T \end{bmatrix} = \frac{T}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Taigi gavome:

$$\int_0^{2T} \left(N'\right)^T N' dt = \frac{1}{6T} \begin{bmatrix} 16 & -8 & 8 \\ -8 & 7 & -19 \\ 8 & -19 & 79 \end{bmatrix} \tag{112}$$

$$\int_0^{2T} N^T N' dt = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -20 \\ -4 & 3 & -7 \\ 20 & -17 & 45 \end{bmatrix} \tag{113}$$

$$\int_0^{2T} N^T N dt = \frac{T}{15} \begin{bmatrix} 16 & 2 & -22 \\ 2 & 4 & -19 \\ -22 & -19 & 104 \end{bmatrix} \tag{114}$$

$$\int_0^{2T} N^T dt = \frac{T}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \tag{115}$$

Grįžtame prie (111) lygties:

$$\left(-\frac{m}{6T} \begin{bmatrix} 16 & -8 & 8 \\ -8 & 7 & -19 \\ 8 & -19 & 79 \end{bmatrix} + \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -20 \\ -4 & 3 & -7 \\ 20 & -17 & 45 \end{bmatrix} + \frac{kT}{15} \begin{bmatrix} 16 & 2 & -22 \\ 2 & 4 & -19 \\ -22 & -19 & 104 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} = -m \begin{bmatrix} 0 \\ x'_{2T} \\ -4x'_{2T} - x'_0 \end{bmatrix} + \frac{fT}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \tag{116}$$

Gautoji tiesinių lygčių sistema matricinėje formoje gali būti užrašyta taip:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_T \\ x_{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ -b_2 x'_{2T} + b_1 \\ 4b_2 x'_{2T} + b_2 x'_0 - 7b_1 \end{bmatrix} \tag{117}$$

čia

$$\begin{gathered} a_{11} = -80m + 32kT^2;\; a_{12} = 40m + 20hT + 4kT^2;\; a_{13} = -40m - 100hT - 44kT^2 \\ a_{21} = 40m - 20hT + 4kT^2;\; a_{22} = -35m + 15hT + 8kT^2;\; a_{23} = 95m - 35hT - 38kT^2 \\ a_{31} = -40m + 100hT - 44kT^2;\; a_{32} = 95m - 85hT - 38kT^2;\; a_{33} = -395m + 225hT + 2088kT^2 \\ b_1 = 10fT^2;\; b_2 = 30mT; \end{gathered} \tag{118}$$

Iš (15) lygčių sistemos gauname formules, pagal kurias galime apskaičiuoti funkcijos ir jos išvestinės reikšmes taške $t = 2T$. Kadangi turime tik du nežinomuosius, tai mūsų sistema iš trijų tiesinių lygčių yra perteklinė:

1). Iš pirmosios ir antrosios lygties:

$$\begin{gathered} x_{2T} = \frac{4b_1 - a_{11}x_0 - a_{12}x_T}{a_{13}} \\ x'_{2T} = \frac{b_1 - a_{21}x_0 - a_{22}x_T - a_{23}x_{2T}}{b_2} \end{gathered} \tag{119}$$

2). Iš pirmosios ir trečiosios lygties:

$$\begin{gathered} x_{2T} = \frac{4b_1 - a_{11}x_0 - a_{12}x_T}{a_{13}} \\ x'_{2T} = \frac{a_{31}x_0 + a_{32}x_T + a_{33}x_{2T} - b_2 x'_0 + 7b_1}{4b_2} \end{gathered} \tag{120}$$

IŠVADOS

1. Remiantis baigtinio elemento metodo silpnąja formuluote šiame darbe išvystyti trys Galiorkino metodo modifikacijos:
   a) Sprendinio funkcija viename žingsnyje aproksimuojama tiesinių funkcijų atkarpomis.
   b) Sprendinio funkcija viename žingsnyje aproksimuojama kvadratinių funkcijų fragmentais, paliekant laisvą parametrą paklaidų kontrolei.
   c) Daugiažingsnis metodas (trijų mazgų schema), kai sprendinys dviejų žingsnių intervale aproksimuojamas kvadratinių funkcijų fragmentais.
2. Sukurtų metodų realizacijai parašyta programa su matematiniu paketu MatLab 6.5. Programos pagalba galima suintegruoti nehomogeninę paprastąją diferencialinę lygtį su pastoviais koeficientais naudojant (a) ir (b) metodų formules.
3. Nagrinėdami pavyzdžius įsitikinome, kad mažinant integravimo žingsnį (a) ir (b) metodais apskaičiuotas skaitinis sprendinys artėja prie tiksliojo sprendinio, todėl galime teigti, kad sukonstruoti metodai tinka apibrėžtos klasės diferencialinių lygčių skaitiniam integravimui. Reikia pabrėžti, kad žingsnio mažinimas turi didelę įtaką sprendinio tikslumui tik iki tam tikros ribos. Šiame darbe nebuvo apskaičiuotas tikslus integravimo žingsnio apatinio rėžio įvertis, tačiau apytiksliai tai būtų galima įvertinti kiekvieno pavyzdžio atveju, braižant paklaidos priklausomybės nuo integravimo žingsnio ir kontrolinio parametro a grafikus.
4. Kontrolinio parametro įvedimas pasiteisina ne kiekvienos diferencialinės lygties atveju. Kartais jo kitimas leistinose ribose leidžia gauti tikslesnį sprendinio artinį, nekeičiant integravimo žingsnio reikšmės. Tačiau yra pavyzdžių, kai tiksliausias atsakymas gaunamas, kai parametro reikšmė lygi nuliui, o tai reiškia, kad sprendinys buvo aproksimuotas tiesinėmis funkcijomis ir didesnio tikslumo galima pasiekti tik mažinant integravimo žingsnį.
5. Klausimas apie tinkamiausio metodo parinkimą konkrečiai lygčiai lieka atviras ir reikalauja papildomos analizės.
6. Vadovaujantis ta pačia logika gali būti sukurtas m-žingsnis skaitinio integravimo metodas. Paliekant laisvą parametrą paklaidų kontrolei galima gauti aukštesnės tikslumo eilės integratorių, kurio taikymas tam tikrai diferencialinių lygčių klasei suteiktų pranašumą prieš klasikinius integravimo metodus.

LITERATŪRA

1. Čiegis R. Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai. Vilnius, 2003.
2. Plukas K. Skaitiniai metodai ir algoritmai. Kaunas, 2001.
3. Bathe K.-J. Finite element procedures in engineering analysis. New Jersey, 1982. p. 449-556.
4. Хайер А. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи / С. Нёрсет, Г. Ваннер – Москва, 1990.
5. http://numericalmethods.eng.usf.edu/
6. www.exponenta.ru/educat/class/courses/student/ode/examples.asp

PRIEDAI

1 PRIEDAS: PROGRAMOS TEKSTAS

pvz_1.m

```
% nagrinejama diferencialine lygtis
% mx'' + hx' + kx = f
% ----- LYGTIES KOEFICIENTAI ------------------------------------------
m =4;   h =4;   k = 1;  f = 0;
% ----- PRADINES SALYGOS ----------------------------------------------
x0 = 2;     dx0 = 0;
% ----- INTEGRAVIMO PARAMETRAI ----------------------------------------
dt = 0.25;              % zingsnis
t = 0;                  % pradinis taskas
T = 6;                  % pabaigos taskas
a = 0.05;               % kvadratiniu formos funkciju parametras
% --------------------------------------------------------------------
disp(['t=',num2str(t),' T=',num2str(T),' x0=',num2str(x0),' dx0=',num2str(dx0),' m=',num2str(m),' h=',num2str(h),' f=',num2str(f),'
dt=',num2str(dt), ' a=',num2str(a)]);


% --------------------------------------------------------------------
% /////    DIFERENCIALINES LYGTIES INTEGRAVIMAS    ///////////////////
% --------------------------------------------------------------------

% ----- 1). naudojant tiesines formos funkcijas -----------------------
R_tiesines = TiesinesFunkcijos(t,T,x0,dx0,m,h,k,f,dt);
% ----- 2). naudojant kvadratines formos funkcijas --------------------
R_kvadratines = KvadratinesFunkcijos(t,T,x0,dx0,m,h,k,f,dt,a);
% ----- 3). tikslusis sprendinys --------------------------------------
R_tikslus = TikslusSprendinys_1pvz(t,T,dt);
% ----- 4). Runges ir Kuto 4-5 eiles metodas --------------------------
figure(9)
title('INTEGRAVIMAS METODU ODE4-5','FontSize',10,'FontWeight', 'bold')
xlabel('t','FontWeight', 'bold')
ylabel('y(t)','FontWeight', 'bold')
axis([0 6 0 2])
hold on

options = odeset('AbsTol',100,'NormControl','off','InitialStep',1,'MaxStep',1);
[T,Y] = ode45(@sistema_1pvz,[0 T],[x0 dx0],options)
plot(T,Y(:,1),'-o')
hold on
plot(R_kvadratines(1,:),R_kvadratines(2,:),'-og',R_tikslus(1,:),R_tikslus(2,:),'-or','LineWidth',2.5)


% --------------------------------------------------------------------
% /////    PAKLAIDU SKAICIAVIMAS    /////////////////////////////////
% --------------------------------------------------------------------

% ----- 1). Tiesiniu formos funkciju atvejis --------------------------
P_ties = Paklaida(R_tiesines, R_tikslus);
% ----- 2). kvadratiniu formos funkciju atvejis -----------------------
P_kvadr = Paklaida(R_kvadratines, R_tikslus);
% ----------------  keiciantis a ir zingsniui dt   --------------------
a_rezis_tikslus = 1/(dt^2);
figure(8)
title('PAKLAIDOS PRIKLAUSOMYBE NUO PARAMETRO a','FontSize',10,'FontWeight', 'bold')
xlabel('a','FontWeight', 'bold')
ylabel('paklaida','FontWeight', 'bold')
%axis([-4 1.5 0.001 0.0045])
hold on

    dt_ = dt;
    for j=1:4
        a_rezis_tikslus = 1/(dt_^2)
        P_kvadr_matr_dt = Paklaidos_keiciantis_dt(50,0,t,T,x0,dx0,dt_,m,h,k,f,j,1);
        hold on
        plot(P_kvadr_matr_dt(1,:),P_kvadr_matr_dt(2,:),'LineWidth',1.5)
        text(-a_rezis_tikslus,P_kvadr_matr_dt(2,1),num2str(dt_),'HorizontalAlignment','left')
        hold on
        dt_ = dt_/2;
    end
% --------------------------------------------------------------------


% --------------------------------------------------------------------
% /////    REZULTATU ISVEDIMAS I EKRANA    /////////////////////////
% --------------------------------------------------------------------
Isvedimas_i_ekrana(dt,a,R_tikslus,R_tiesines,R_kvadratines,P_ties,P_kvadr,P_kvadr_matr_dt);
% --------------------------------------------------------------------


% --------------------------------------------------------------------
% /////    GRAFIKU BRAIZYMAS    ////////////////////////////////////
% --------------------------------------------------------------------
Grafiku_braizymas(R_tikslus,R_tiesines,R_kvadratines);
% --------------------------------------------------------------------
```

pvz_2.m

```
% nagrinejama diferencialine lygtis
% mx'' + hx' + kx = f
% ----- LYGTIES KOEFICIENTAI -------------------------------------------
m =1;   h =0;   k = 1;  f = 0;
% ----- PRADINES SALYGOS -----------------------------------------------
x0 = 0;     dx0 = 2;
% ----- INTEGRAVIMO PARAMETRAI -----------------------------------------
dt = 0.25;                  % zingsnis
t = 0;                      % pradinis taskas
T = 6;                      % pabaigos taskas
a = 0;                      % kvadratiniu formos funkciju parametras
% ---------------------------------------------------------------------



% ---------------------------------------------------------------------
% /////    DIFERENCIALINES LYGTIES INTEGRAVIMAS    //////////////////
% ---------------------------------------------------------------------

% ----- 1). naudojant tiesines formos funkcijas -----------------------
R_tiesines = TiesinesFunkcijos(t,T,x0,dx0,m,h,k,f,dt);
% ----- 2). naudojant kvadratines formos funkcijas --------------------
R_kvadratines = KvadratinesFunkcijos(t,T,x0,dx0,m,h,k,f,dt,a);
% ----- 3). tikslusis sprendinys --------------------------------------
R_tikslus = TikslusSprendinys_2pvz(t,T,dt);
% ----- 4). Runges ir Kuto 4-5 eiles metodas --------------------------
figure(9)
title('INTEGRAVIMAS METODU ODE4-5','FontSize',10,'FontWeight', 'bold')
xlabel('t','FontWeight', 'bold')
ylabel('y(t)','FontWeight', 'bold')
axis([0 6 -2.3 2.3])
hold on

options = odeset('AbsTol',100,'NormControl','off','InitialStep',1,'MaxStep',1);
[T,Y] = ode45(@sistema_2pvz,[0 T],[x0 dx0],options)
plot(T,Y(:,1),'-o')
hold on
plot(R_kvadratines(1,:),R_kvadratines(2,:),'-og',R_tikslus(1,:),R_tikslus(2,:),'-or','LineWidth',2.5)



% ---------------------------------------------------------------------
% /////    PAKLAIDU SKAICIAVIMAS    /////////////////////////////////
% ---------------------------------------------------------------------
% ----- 1). Tiesiniu formos funkciju atvejis --------------------------
P_ties = Paklaida(R_tiesines, R_tikslus);
% ---- 2). kvadratiniu formos funkciju atvejis ------------------------
P_kvadr = Paklaida(R_kvadratines, R_tikslus);
% ----------------  keiciantis a ir zingsniui dt   --------------------
a_rezis_tikslus = 1/(dt^2);
figure(8)
title('PAKLAIDOS PRIKLAUSOMYBE NUO PARAMETRO a','FontSize',10,'FontWeight', 'bold')
xlabel('a','FontWeight', 'bold')
ylabel('paklaida','FontWeight', 'bold')
axis([-0.7 0.7 0.0499 0.055])
hold on

    dt_ = dt;
    for j=1:4
        a_rezis_tikslus = 1/(dt_^2)
        P_kvadr_matr_dt = Paklaidos_keiciantis_dt(100,0,t,T,x0,dx0,dt_,m,h,k,f,j,2);
        hold on
        plot(P_kvadr_matr_dt(1,:),P_kvadr_matr_dt(2,:),'LineWidth',1.5)
        text(-a_rezis_tikslus,P_kvadr_matr_dt(2,1),num2str(dt_),'HorizontalAlignment','left')
        hold on
        dt_ = dt_/2;
    end



% ---------------------------------------------------------------------
% /////    REZULTATU ISVEDIMAS I EKRANA    //////////////////////////
% ---------------------------------------------------------------------
Isvedimas_i_ekrana(dt,a,R_tikslus,R_tiesines,R_kvadratines,P_ties,P_kvadr,P_kvadr_matr_dt);
% ---------------------------------------------------------------------



% ---------------------------------------------------------------------
% /////    GRAFIKU BRAIZYMAS    /////////////////////////////////////
% ---------------------------------------------------------------------
Grafiku_braizymas(R_tikslus,R_tiesines,R_kvadratines);
% ---------------------------------------------------------------------
```

pvz_3.m

```
% nagrinejama diferencialine lygtis
% mx'' + hx' + kx = f
% ----- LYGTIES KOEFICIENTAI ------------------------------------------
m =1;   h =1;   k = 6;  f = 0;
% ----- PRADINES SALYGOS ----------------------------------------------
x0 = 1;     dx0 = 2;
% ----- INTEGRAVIMO PARAMETRAI ----------------------------------------
dt = 0.25;                  % zingsnis
t = 0;                      % pradinis taskas
T = 8;                      % pabaigos taskas
a = 0.05;                   % kvadratiniu formos funkciju parametras
% ---------------------------------------------------------------------



% ---------------------------------------------------------------------
% /////    DIFERENCIALINES LYGTIES INTEGRAVIMAS    ///////////////////
% ---------------------------------------------------------------------

% ----- 1). naudojant tiesines formos funkcijas -----------------------
R_tiesines = TiesinesFunkcijos(t,T,x0,dx0,m,h,k,f,dt);
% ----- 2). naudojant kvadratines formos funkcijas --------------------
R_kvadratines = KvadratinesFunkcijos(t,T,x0,dx0,m,h,k,f,dt,a);
% ----- 3). tikslusis sprendinys --------------------------------------
R_tikslus = TikslusSprendinys_2pvz(t,T,dt);
% ----- 4). Runges ir Kuto 4-5 eiles metodas --------------------------



% ---------------------------------------------------------------------
% /////    PAKLAIDU SKAICIAVIMAS     ////////////////////////////////
% ---------------------------------------------------------------------
% ----- 1). Tiesiniu formos funkciju atvejis --------------------------
P_ties = Paklaida(R_tiesines, R_tikslus);
% ---- 2). kvadratiniu formos funkciju atvejis ------------------------
P_kvadr = Paklaida(R_kvadratines, R_tikslus);
% ----------------  keiciantis a ir zingsniui dt   --------------------
a_rezis_tikslus = 1/(dt^2);
figure(8)
title('PAKLAIDOS PRIKLAUSOMYBE NUO PARAMETRO a','FontSize',10,'FontWeight', 'bold')
xlabel('a','FontWeight', 'bold')
ylabel('paklaida','FontWeight', 'bold')
axis([-2.1 2.1 0.237 0.26])
hold on

    dt_ = dt;
    for j=1:4
        a_rezis_tikslus = 1/(dt_^2)
        P_kvadr_matr_dt = Paklaidos_keiciantis_dt(100,0,t,T,x0,dx0,dt_,m,h,k,f,j,2);
        hold on
        plot(P_kvadr_matr_dt(1,:),P_kvadr_matr_dt(2,:),'LineWidth',1.5)
        text(-a_rezis_tikslus,P_kvadr_matr_dt(2,1),num2str(dt_),'HorizontalAlignment','left')
        hold on
        dt_ = dt_/2;
    end


% ---------------------------------------------------------------------
% /////    REZULTATU ISVEDIMAS I EKRANA     //////////////////////////
% ---------------------------------------------------------------------
Isvedimas_i_ekrana(dt,a,R_tikslus,R_tiesines,R_kvadratines,P_ties,P_kvadr,P_kvadr_matr_dt);
% ---------------------------------------------------------------------



% ---------------------------------------------------------------------
% /////    GRAFIKU BRAIZYMAS    //////////////////////////////////////
% ---------------------------------------------------------------------
Grafiku_braizymas(R_tikslus,R_tiesines,R_kvadratines);
% ---------------------------------------------------------------------
```

Tikslus_sprendinys_1pvz.m

```
function R_tikslus = TikslusSprendinys_1pvz(t,T,dt)

itsk = T/dt+1;
R_tikslus = zeros(3,itsk);                % tuscios matricos sukurimas rezultato surasymui
for i=1:itsk
    xT  = exp(-t/2)*(2+t);
    dxT = -0.5*t*exp(-t/2);

    R_tikslus_st = (Matricos_stulpelis(t,xT,dxT))';        % rezultato irasymas i matrica
    R_tikslus(:,i) = R_tikslus_st;

    t = t + dt;
end

end
```

Tikslus_sprendinys_2pvz.m

```
function R_tikslus = TikslusSprendinys_2pvz(t,T,dt)

itsk = T/dt+1;
R_tikslus = zeros(3,itsk);                % tuscios matricos sukurimas rezultato surasymui
for i=1:itsk
    xT  = 2*sin(t);
    dxT = 2*cos(t);

    R_tikslus_st = (Matricos_stulpelis(t,xT,dxT))';        % rezultato irasymas i matrica
    R_tikslus(:,i) = R_tikslus_st;

    t = t + dt;
end

end
```

Tikslus_sprendinys_3pvz.m

```
function R_tikslus = TikslusSprendinys_3pvz(t,T,dt)

itsk = T/dt+1;
R_tikslus = zeros(3,itsk);                % tuscios matricos sukurimas rezultato surasymui
for i=1:itsk
    xT  = exp(-0.5*t)*(cos(2.5*t)+sin(2.5*t));
    dxT = -0.5*exp(-0.5*t)*(cos(2.5*t)+sin(2.5*t))+2.5*exp(-0.5*t)*(cos(2.5*t)-sin(2.5*t));

    R_tikslus_st = (Matricos_stulpelis(t,xT,dxT))';        % rezultato irasymas i matrica
    R_tikslus(:,i) = R_tikslus_st;

    t = t + dt;
end

end
```

sistema_1pvz.m

```
function dy = sistema_1pvz(t,y)

    dy = zeros(2,1);
    dy(1) = y(2);
    dy(2) = (-4*y(2)-y(1))/4;

end
```

sistema_2pvz.m

```
function dy = sistema_1pvz(t,y)

    dy = zeros(2,1);
    dy(1) = y(2);
    dy(2) = -y(1);

end
```

TiesinesFunkcijos.m

```
function R_tiesines = TiesinesFunkcijos(t,T,x0,dx0,m,h,k,f,dt)

% funkcija integruojanti dif.lygti, kai funkcijos aproksimacijai naudojamos
% tiesine funkcijos
% LYGTIS: mx'' + hx' + kx = f
% PRADINES SALYGOS: x0, dx0
% IESKOMOS REIKSMES: xT, dxT
% Intervalo PRADZIOS taskas: t
% Intervalo PABAIGOS taskas: T
% ITERACIJU SKAICIUS: itsk
% ZINGSNIS: dt

itsk = T/dt;                                         % atliekamu iteraciju (zingsniu) skaicius

R_tiesines = zeros(3,itsk+1);                 % tuscios matricos sukurimas rezultato surasymui
R_tiesines(:,1) = ([t x0 dx0])';

for i=1:itsk
    xT  = ( dt*f/2 + m*dx0 + (m/dt + h/2 - dt*k/3)*x0) / (m/dt + h/2 + (k*dt)/6);
    dxT = (dt*f/2 - (m/dt - h/2 + dt*k/6)*x0 + (m/dt - h/2 - dt*k/3)*xT) / m;

    R_tiesines_st = (Matricos_stulpelis(t+dt,xT,dxT))';        % rezultato irasymas i matrica
    R_tiesines(:,i+1) = R_tiesines_st;

    x0 = xT;
    dx0 = dxT;
    t = t + dt;
end

end
```

KvadratinesFunkcijos.m

```
function R_kvadratines = KvadratinesFunkcijos(t,T,x0,dx0,m,h,k,f,dt,a)

% funkcija integruojanti dif.lygti, kai funkcijos aproksimacijai naudojamos
% tiesine funkcijos
% LYGTIS: mx'' + hx' + kx = f
% PRADINES SALYGOS: x0, dx0
% IESKOMOS REIKSMES: xT, dxT
% Intervalo PRADZIOS taskas: t
% Intervalo PABAIGOS taskas: T
% ITERACIJU SKAICIUS: itsk
% ZINGSNIS: dt

itsk = T/dt;

gama = a*(dt^2);
b1 = (-20*m + 2*k*(dt^2))*(gama^2)  - 10*k*(dt^2)*gama - (60*m + 30*h*dt - 20*k*(dt^2));
b2 = ( 20*m - 2*k*(dt^2))*(gama^2)                     + (60*m + 30*h*dt + 10*k*(dt^2));
b3 = ( 20*m - 2*k*(dt^2))*(gama^2)                     + (60*m - 30*h*dt + 10*k*(dt^2));
b4 = (-20*m + 2*k*(dt^2))*(gama^2)  + 10*k*(dt^2)*gama - (60*m - 30*h*dt - 20*k*(dt^2));
b5 = 10*(dt^2)*f*(3-gama);
b6 = 10*(dt^2)*f*(3+gama);
b7 = 60*dt*m;

R_kvadratines = zeros(3,itsk+1);              % tuscios matricos sukurimas rezultato surasymui
R_kvadratines(:,1) = ([t x0 dx0])';

for i=1:itsk

    xT  = (b5 + (b7)*dx0 - (b1)*x0) / (b2);
    dxT = (b6 - (b3)*x0  - (b4)*xT) / (b7);

    R_kvadratines_st = (Matricos_stulpelis(t+dt,xT,dxT))';        % rezultato irasymas i matrica
    R_kvadratines(:,i+1) = R_kvadratines_st;

    x0 = xT;
    dx0 = dxT;
    t = t + dt;
end

end
```

Paklaidos_kieciantis_dt.m

```
function P_kvadr_matr = Paklaidos_keiciantis_dt(kiek,priedas,t,T,x0,dx0,dt,m,h,k,f,j,pvz_num)

% kiek - i kiek daliu dalinamas parametro a kitimo intervalas
% priedas - dydis, padidinamas parametro a kitimo intervalo ploti
% t - intervalo, kuriame ieskomas sprendinys, pradzios taskas
% T - intervalo, kuriame ieskomas sprendinys, pabaigos taskas
% x0 ir dx0 - pradines salygos
% dt - integravimo zingsnis
%

a_rezis = 1/(dt^2) + priedas;  % parametro a reziai, kuriuose skaiciuojama paklaida
suolis = (2*a_rezis) / kiek;   % parametro a kitimo zingsnis

% ----------------------------------------------------------------------
a_rezis_tikslus = 1/(dt^2);
aukstis_vnt = 25;
Reiksmes = zeros(3,aukstis_vnt);
for i=1:aukstis_vnt
    Reiksmes(1,i) = a_rezis_tikslus;
    Reiksmes(2,i) = (-1)*a_rezis_tikslus;
    Reiksmes(3,i) = i-1;
end
plot(Reiksmes(1,:),Reiksmes(3,:),':r',Reiksmes(2,:),Reiksmes(3,:),':r','LineWidth',0.5);
hold on
% ----------------------------------------------------------------------

    a = (-1) * a_rezis;

    for i=1:(kiek+1)

        % ---- diferencialines lygties parametrai ----------------------
        R_kvadratines = [];
        x0_ = x0;
        dx0_ = dx0;
        t_ = t;
        T_ = T;
        % ---- diferencialines lygties integravimas --------------------
        R_kvadratines = KvadratinesFunkcijos(t_,T_,x0_,dx0_,m,h,k,f,dt,a);

        if pvz_num==1
            R_tikslus = TikslusSprendinys_1pvz(t_,T_,dt);
        end
        if pvz_num==2
            R_tikslus = TikslusSprendinys_2pvz(t_,T_,dt);
        end
        if pvz_num==3
            R_tikslus = TikslusSprendinys_3pvz(t_,T_,dt);
        end


        if j>1
            R_kvadratines_isr = Nufiltruoti(R_kvadratines,j);
            R_tikslus_isr = Nufiltruoti(R_tikslus,j);
        else
            R_kvadratines_isr = R_kvadratines;
            R_tikslus_isr = R_tikslus;
        end


        % ---- paklaidu skaiciavimas -----------------------------------
        % ---- lyginant su tiksliuoju sprendiniu -----------------------

            P_kvadr = Paklaida(R_kvadratines_isr, R_tikslus_isr);
            P_kvadr_st = (Matricos_stulpelis(a,P_kvadr(1,1),P_kvadr(1,2)))';       % rezultato irasymas i matrica
            P_kvadr_matr(:,i) = P_kvadr_st;


        a = a + suolis;
        R_kvadratines = [];
        R_tiklus = [];

    end

end
```

Paklaida.m

```
function P = Paklaida(R_skaitinis, R_tikslus)

% funkcijos reiksmems
Skirtumai_funkc = abs(R_skaitinis(2,:) - R_tikslus(2,:));
Suma_funkc = sum(Skirtumai_funkc);
% funkcijos isvestines reiksmems
Skirtumai_isv = abs(R_skaitinis(3,:) - R_tikslus(3,:));
Suma_isv = sum(Skirtumai_isv);

P = [Suma_funkc Suma_isv];

end
```

Matricos_stulpelis.m

```
function M = Matricos_stulpelis(T,xT,dxT)

% i-taji matricos stulpeli sudaro:

M(1) = T;      % - tasko koordinate laiko asyje
M(2) = xT;     % - funkcijos reiksme taske t=T
M(3) = dxT;    % - funkcijos isvestines koordinate taske t=T

end
```

Nufiltruoti.m

```
function R_nufiltruotas = Nufiltruoti(R_matrica,j)

for i=1:(j-1)

           kk = 1;
           for k=1:length(R_matrica(1,:))
               if (mod(k,2)==1)
                   for kkk=1:3
                   R_nufiltruotas(kkk,kk)=R_matrica(kkk,k);
                   end
                   kk = kk + 1;
               end
           end

  R_matrica = [];
  R_matrica = R_nufiltruotas;
  R_nufiltruotas = [];
end
  R_nufiltruotas = R_matrica;

end
```

Grafiku_braizymas.m

```
function Grafiku_braizymas(R_tikslus,R_tiesines,R_kvadratines)

 figure(1)
 plot(R_tiesines(1,:),R_tiesines(2,:),'-b',R_tikslus(1,:),R_tikslus(2,:),':r','LineWidth',2.5)
 title('SKAITINIS SPRENDINYS (tiesines f.f.) ir TIKSLUS SPRENDINYS','FontSize',10,'FontWeight', 'bold')
 xlabel('t','FontWeight', 'bold')
 ylabel('x(t)','FontWeight', 'bold')
 h = legend('skaitinis sprendinys', 'tikslus sprendinys',4);
 axis([-1 22 -2.5 2.5]);
 grid on

 figure(2)
 plot(R_kvadratines(1,:),R_kvadratines(2,:),'-g',R_tikslus(1,:),R_tikslus(2,:),':r','LineWidth',2.5)
 title('SKAITINIS SPRENDINYS (kvadratines f.f.) IR TIKSLUS SPRENDINYS','FontSize',10,'FontWeight', 'bold')
 xlabel('t','FontWeight', 'bold')
 ylabel('x(t)','FontWeight', 'bold')
 axis([0 6.3 -2.5 2.5]);
 h = legend('skaitinis sprendinys', 'tikslus sprendinys',1);
 grid on

 figure(3)
 plot(R_tiesines(1,:),R_tiesines(2,:),'-b',R_kvadratines(1,:),R_kvadratines(2,:),':g','LineWidth',2.5)
 title('SKAITINIS SPRENDINYS (tiesines f.f. ir kvadratines f.f.)','FontSize',10,'FontWeight', 'bold')
 xlabel('t','FontWeight', 'bold')
 ylabel('x(t)','FontWeight', 'bold')
 h = legend('skaitinis spr. (tiesines f.f.)', 'skaitinis spr. (kvadratines f.f.)',4);
 grid on

 figure(4)
 plot(R_tiesines(2,:),R_tiesines(3,:),'-b',R_tikslus(2,:),R_tikslus(3,:),':r','LineWidth',2.5)
 title('FAZINE PLOKSTUMA (tiesines f.f. ir tikslus sprendinys)','FontSize',10,'FontWeight', 'bold')
 xlabel('x(t)','FontWeight', 'bold')
 ylabel('dx(t)','FontWeight', 'bold')
 h = legend('skaitinis sprendinys', 'tikslus sprendinys',2);
 grid on

 figure(5)
 plot(R_kvadratines(2,:),R_kvadratines(3,:),'-g',R_tikslus(2,:),R_tikslus(3,:),':r','LineWidth',2.5)
 title('FAZINE PLOKSTUMA (kvadratines f.f. ir tikslus sprendinys)','FontSize',10,'FontWeight', 'bold')
 xlabel('x(t)','FontWeight', 'bold')
 ylabel('dx(t)','FontWeight', 'bold')
 h = legend('skaitinis sprendinys', 'tikslus sprendinys',2);
 grid on

 figure(6)
 plot(R_tiesines(2,:),R_tiesines(3,:),'-b',R_kvadratines(2,:),R_kvadratines(3,:),':g','LineWidth',2.5)
 title('FAZINE PLOKSTUMA (tiesines f.f. ir kvadratines f.f.)','FontSize',10,'FontWeight', 'bold')
 xlabel('x(t)','FontWeight', 'bold')
 ylabel('dx(t)','FontWeight', 'bold')
 h = legend('skaitinis spr. (tiesines f.f.)', 'skaitinis spr. (kvadratines f.f.)',4);
 grid on

end
```

Isvedimas_i_ekrana.m

```
function Isvedimas_i_ekrana(dt,a,R_tikslus,R_tiesines,R_kvadratines,P_ties,P_kvadr,P_kvadr_matr_dt)

disp('---------------------------------------------------------------------------')
disp('INTEGRAVIMO PARAMETRAI:')
disp('')
disp(['zingsnis: ', num2str(dt)])
disp(['parametras a (kvadratines f.f.): ', num2str(a)])
disp('---------------------------------------------------------------------------')
disp('')
disp('TIKSLIOJO SPRENDINIO REIKSMES:');
disp(R_tikslus)
disp('')
disp('APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT TIESINES FORMOS FUNKCIJAS:')
disp(R_tiesines)
disp(' ')
disp('APYTIKSLIO SPRENDINIO REIKSMES, NAUDOJANT KVADRATINES FORMOS FUNKCIJAS:')
disp(R_kvadratines)
disp(' ')
disp('---------------------------------------------------------------------------')
disp(' ')
disp('PAKLAIDOS')
disp(' ')
disp('Naudojant tiesines formos funkcijas:')
disp(['Paklaida funkcijos reiksmems: ', num2str(P_ties(1,1))])
disp(['Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:', num2str(P_ties(1,2))])
disp(' ')
disp('Naudojant kvadratines formos funkcijas:')
disp(['Paklaida funkcijos reiksmems: ', num2str(P_kvadr(1,1))])
disp(['Paklaida funkcijos isvestines reiksmems:', num2str(P_kvadr(1,2))])
disp(' ')
% disp('Paklaidos kvadratiniu formos funkciju atveju, keiciantis parametrui a:')
% disp(P_kvadr_matr_a)
% disp(' ')
% disp('Paklaidos kvadratiniu formos funkciju atveju, keiciantis zingsniui dt:')
% disp(P_kvadr_matr_dt)
% disp(' ')
disp('---------------------------------------------------------------------------')

end
```

pvz4.m

```
% nagrinejama diferencialine lygtis
% mx'' + hx' + kx = f
% ----- LYGTIES KOEFICIENTAI ------------------------------------------
m =1;   h =0;   k = 1;
% f = 3sint

% ----- PRADINES SALYGOS ----------------------------------------------
x0 = 3;     dx0 = 0.5;
% ----- INTEGRAVIMO PARAMETRAI ----------------------------------------
dt = 2;                     % zingsnis
t = 0;                      % pradinis taskas
T = 8;                      % pabaigos taskas
a = 0.01;                   % kvadratiniu formos funkciju parametras
% --------------------------------------------------------------------



% --------------------------------------------------------------------
% /////    DIFERENCIALINES LYGTIES INTEGRAVIMAS    ///////////////////
% --------------------------------------------------------------------

% ----- 1). naudojant tiesines formos funkcijas -----------------------
R_tiesines = TiesinesFunkcijos_f(t,T,x0,dx0,m,h,k,@funkcija_4pvz,dt);
% ----- 2). naudojant kvadratines formos funkcijas --------------------
R_kvadratines = KvadratinesFunkcijos_f(t,T,x0,dx0,m,h,k,@funkcija_4pvz,dt,a);
% ----- 3). tikslusis sprendinys --------------------------------------
R_tikslus = TikslusSprendinys_4pvz(t,T,dt);
% --------------------------------------------------------------------




% --------------------------------------------------------------------
% /////    PAKLAIDU SKAICIAVIMAS     /////////////////////////////////
% --------------------------------------------------------------------

% ----- 1). Tiesiniu formos funkciju atvejis --------------------------
P_ties = Paklaida(R_tiesines, R_tikslus);
% ---- 2). kvadratiniu formos funkciju atvejis ------------------------
P_kvadr = Paklaida(R_kvadratines, R_tikslus);
% --------------------------------------------------------------------
a_rezis_tikslus = 1/(dt^2)
figure(8)
title('PAKLAIDOS PRIKLAUSOMYBE NUO PARAMETRO a','FontSize',10,'FontWeight', 'bold')
xlabel('a','FontWeight', 'bold')
ylabel('paklaida','FontWeight', 'bold')
axis([-a_rezis_tikslus a_rezis_tikslus 0 20])
hold on

    dt_ = dt;
    for j=1:6
        a_rezis_tikslus = 1/(dt_^2);
        P_kvadr_matr_dt = Paklaidos_keiciantis_dt_f(30,0,t,T,x0,dx0,dt_,m,h,k,@funkcija_4pvz,j);
        hold on
        plot(P_kvadr_matr_dt(1,:),P_kvadr_matr_dt(2,:),'LineWidth',1.5)
        text(-1*a_rezis_tikslus,P_kvadr_matr_dt(2,1),num2str(dt_),'HorizontalAlignment','left')
        hold on
        dt_ = dt_/2;
    end


% --------------------------------------------------------------------
% /////    REZULTATU ISVEDIMAS I EKRANA     //////////////////////////
% --------------------------------------------------------------------
Isvedimas_i_ekrana(dt,a,R_tikslus,R_tiesines,R_kvadratines,P_ties,P_kvadr,P_kvadr_matr_dt);
% --------------------------------------------------------------------



% --------------------------------------------------------------------
% /////    GRAFIKU BRAIZYMAS    //////////////////////////////////////
% --------------------------------------------------------------------
Grafiku_braizymas(R_tikslus,R_tiesines,R_kvadratines);
% --------------------------------------------------------------------
```

funkcija_4pvz.m

```
function x = funkcija_4pvz(t)

x = 3*sin(t);

end
```

TikslusSprendinys_4pvz.m

```
function R_tikslus = TikslusSprendinys_4pvz(t,T,dt)
itsk = T/dt+1;
R_tikslus = zeros(3,itsk);               % tuscios matricos sukurimas rezultato surasymui
for i=1:itsk
    xT  = (3-1.5*t)*cos(t) + 2*sin(t);
    dxT = (-3+1.5*t)*sin(t) + 0.5*cos(t);

    R_tikslus_st = (Matricos_stulpelis(t,xT,dxT))';        % rezultato irasymas i matrica
    R_tikslus(:,i) = R_tikslus_st;

    t = t + dt;
end

end
```

TiesinesFunkcijos_f.m

```
function R_tiesines = TiesinesFunkcijos_f(t,T,x0,dx0,m,h,k,f,dt)

% funkcija integruojanti dif.lygti, kai funkcijos aproksimacijai naudojamos
% tiesine funkcijos
% LYGTIS: mx'' + hx' + kx = f, cia f=f(t)
% PRADINES SALYGOS: x0, dx0
% IESKOMOS REIKSMES: xT, dxT
% Intervalo PRADZIOS taskas: t
% Intervalo PABAIGOS taskas: T
% ITERACIJU SKAICIUS: itsk
% ZINGSNIS: dt

itsk = T/dt;                                  % atliekamu iteraciju (zingsniu) skaicius

R_tiesines = zeros(3,itsk+1);              % tuscios matricos sukurimas rezultato surasymui
R_tiesines(:,1) = ([t x0 dx0])';

for i=1:itsk
    f_r = feval(f,t);  % funkcijos f reiksme taske t

    xT  = ( dt*f_r/2 + m*dx0 + (m/dt + h/2 - dt*k/3)*x0) / (m/dt + h/2 + (k*dt)/6);
    dxT = (dt*f_r/2 - (m/dt - h/2 + dt*k/6)*x0 + (m/dt - h/2 - dt*k/3)*xT) / m;

    R_tiesines_st = (Matricos_stulpelis(t+dt,xT,dxT))';        % rezultato irasymas i matrica
    R_tiesines(:,i+1) = R_tiesines_st;

    x0 = xT;
    dx0 = dxT;
    t = t + dt;
end

end
```

KvadratinesFunkcijos_f.m

```
function R_kvadratines = KvadratinesFunkcijos_f(t,T,x0,dx0,m,h,k,f,dt,a)

% funkcija integruojanti dif.lygti, kai funkcijos aproksimacijai naudojamos
% tiesine funkcijos
% LYGTIS: mx'' + hx' + kx = f
% PRADINES SALYGOS: x0, dx0
% IESKOMOS REIKSMES: xT, dxT
% Intervalo PRADZIOS taskas: t
% Intervalo PABAIGOS taskas: T
% ITERACIJU SKAICIUS: itsk
% ZINGSNIS: dt

itsk = T/dt;
gama = a*(dt^2);
b1 = (-20*m + 2*k*(dt^2))*(gama^2)  - 10*k*(dt^2)*gama - (60*m + 30*h*dt - 20*k*(dt^2));
b2 = ( 20*m - 2*k*(dt^2))*(gama^2)                     + (60*m + 30*h*dt + 10*k*(dt^2));
b3 = ( 20*m - 2*k*(dt^2))*(gama^2)                     + (60*m - 30*h*dt + 10*k*(dt^2));
b4 = (-20*m + 2*k*(dt^2))*(gama^2)  + 10*k*(dt^2)*gama - (60*m - 30*h*dt - 20*k*(dt^2));
b7 = 60*dt*m;

R_kvadratines = zeros(3,itsk+1);              % tuscios matricos sukurimas rezultato surasymui
R_kvadratines(:,1) = ([t x0 dx0])';

for i=1:itsk
    f_r = feval(f,t); % funkcijos f reiksme taske t

    b5 = 10*(dt^2)*f_r*(3-gama);
    b6 = 10*(dt^2)*f_r*(3+gama);

    xT  = (b5 + (b7)*dx0 - (b1)*x0) / (b2);
    dxT = (b6 - (b3)*x0  - (b4)*xT) / (b7);

    R_kvadratines_st = (Matricos_stulpelis(t+dt,xT,dxT))';        % rezultato irasymas i matrica
    R_kvadratines(:,i+1) = R_kvadratines_st;

    x0 = xT;
    dx0 = dxT;
    t = t + dt;
end
end
```

PaklaidosKeiciantis_dt_f.m

```
function P_kvadr_matr = Paklaidos_keiciantis_dt_f(kiek,priedas,t,T,x0,dx0,dt,m,h,k,f,j)


a_rezis = 1/(T^2) + priedas;
suolis = (2*a_rezis) / kiek;
% ----------------------------------------------------------------------
a_rezis_tikslus = 1/(T^2);
aukstis_vnt = 2;
Reiksmes = zeros(3,aukstis_vnt);
for i=1:aukstis_vnt
    Reiksmes(1,i) = a_rezis_tikslus;
    Reiksmes(2,i) = (-1)*a_rezis_tikslus;
    Reiksmes(3,i) = i-1;
end
plot(Reiksmes(1,:),Reiksmes(3,:),':r',Reiksmes(2,:),Reiksmes(3,:),':r','LineWidth',1.5);
hold on
% ----------------------------------------------------------------------
    a = (-1) * a_rezis;

    for i=1:(kiek+1)

        % ---- diferencialines lygties parametrai ----------------------
        R_kvadratines = [];
        x0_ = x0;
        dx0_ = dx0;
        t_ = t;
        T_ = T;
        % ---- diferencialines lygties integravimas --------------------
        R_kvadratines = KvadratinesFunkcijos_f(t_,T_,x0_,dx0_,m,h,k,f,dt,a);
        R_tikslus = TikslusSprendinys_4pvz(t_,T_,dt);

        if j>1
            R_kvadratines_isr = Nufiltruoti(R_kvadratines,j);
            R_tikslus_isr = Nufiltruoti(R_tikslus,j);
        else
            R_kvadratines_isr = R_kvadratines;
            R_tikslus_isr = R_tikslus;
        end


        % ---- paklaidu skaiciavimas -----------------------------------
        % ---- lyginant su tiksliuoju sprendiniu -----------------------

            P_kvadr = Paklaida(R_kvadratines_isr, R_tikslus_isr);
            P_kvadr_st = (Matricos_stulpelis(a,P_kvadr(1,1),P_kvadr(1,2)))';       % rezultato irasymas i matrica
            P_kvadr_matr(:,i) = P_kvadr_st;


        a = a + suolis;
        R_kvadratines = [];
        R_tiklus = [];

    end

end
```

2 PRIEDAS: 3 IR 4 PAVYZDŽIAI

3 PVZ.:

Homogeninė diferenciallinė lygtis su pastoviais koeficientais:

$$y'' + y' + 6y = 0$$

su pradine sąlyga: $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Šios diferencialinės lygties charakteringoji lygties $\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$ šaknys kompleksinės jungtinės:

$$\lambda_{1,2} = -0{,}5 \pm 2{,}5i$$

Todėl bendrasis šios lygties sprendinys yra: $y = e^{-0{,}5t}(C_1 cos2{,}5t + C_2 sin2{,}5t)$.

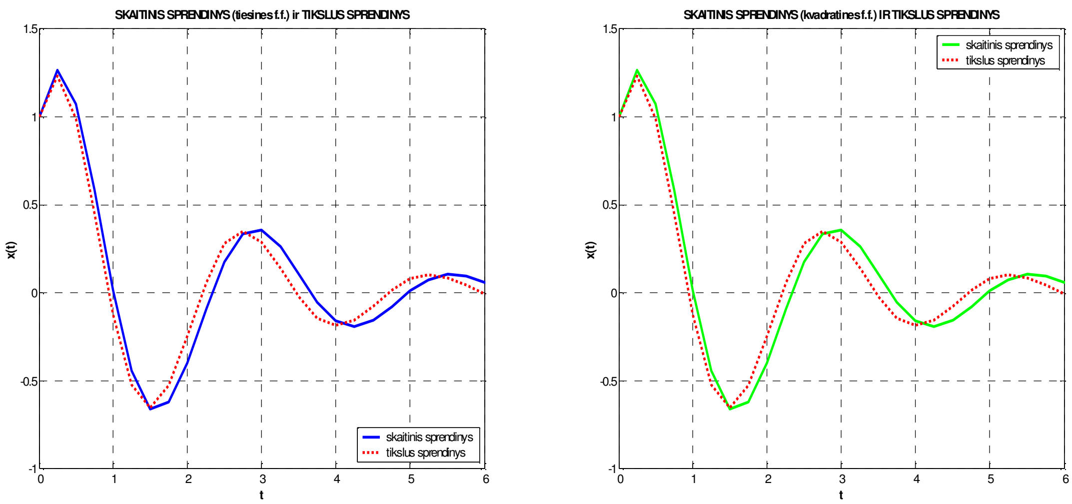
Įvetrinę pradines sąlygas, gauname konstantų reikšmes: $C_1 = C_2 = 1$.

Tuomet atskiras homogeninės lygties sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas, yra:

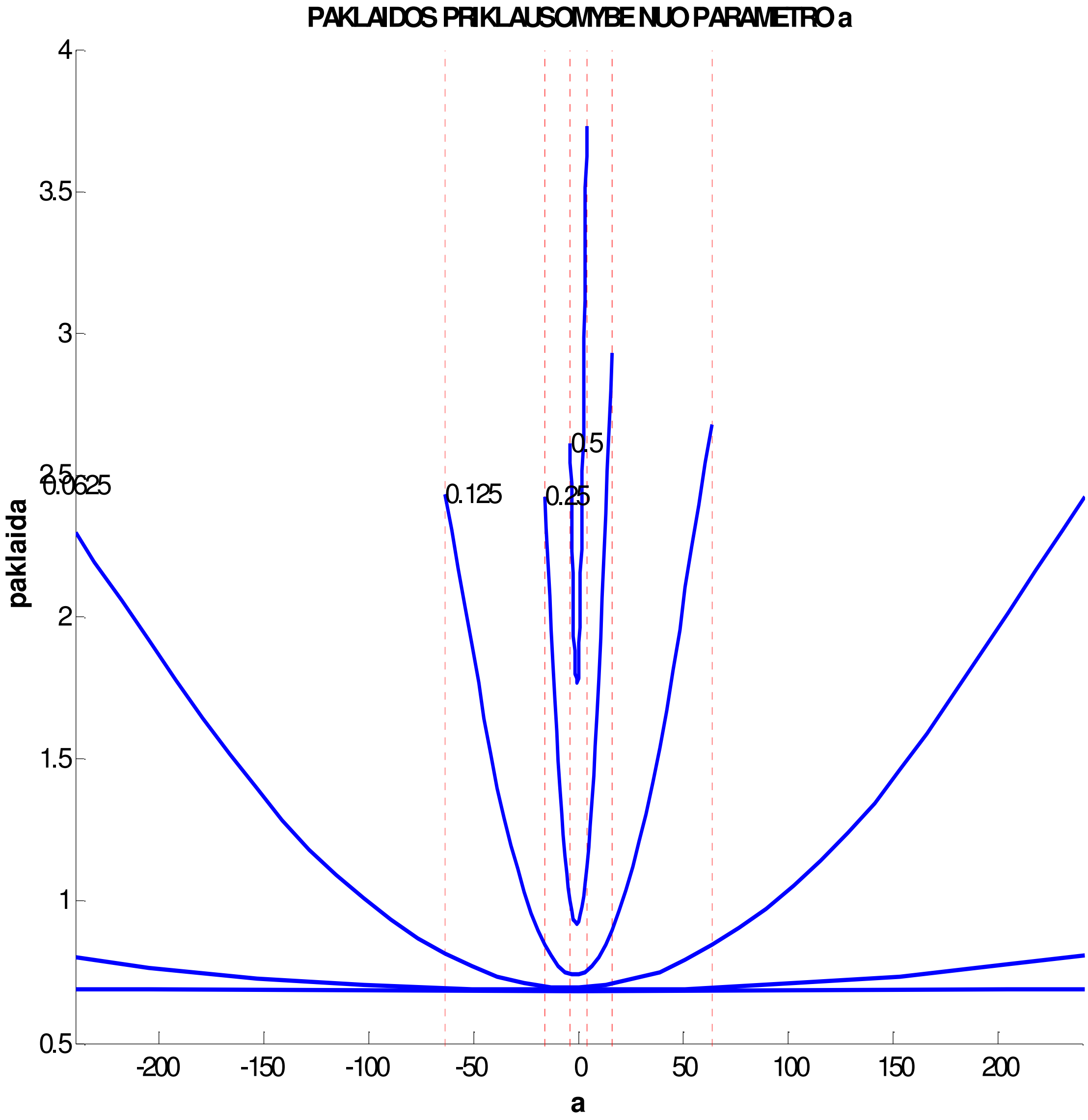
$$y = e^{-\frac{t}{2}}(cos2{,}5t + sin2{,}5t)$$

$$y' = -0{,}5e^{-\frac{t}{2}}(cos2{,}5t + sin2{,}5t) + 2{,}5e^{-\frac{t}{2}}(cos2{,}5t - sin2{,}5t)$$

Dabar pateiksime diferencialinės lygties sprendimo skaitinius rezultatus:



12 pav. 3 pavyzdžio integravimo rezultatai, kai žingsnis - 0.25, parametras *a* - 0.05



13 pav. Paklaidos priklausomybė nuo integravimo žingsnio ir parametro *a*

4 PVZ.:

Paimkime antro pavyzdžio diferencialinę lygtį ir dešinėje pusėje pakeiskime funkciją, gausime nehomogeninę diferencialinę lygtį su pastoviais koeficietais:

$$y'' + y = 3sint$$

su pradine sąlyga

$$y(0) = 3, y'(0) = 0{,}5$$

Šios diferencialinės lygties bendrasis sprendinys randamas kaip atitinkamos homogeninės diferencialinės lygties bendrojo sprendinio ir nehomogeninės diferencialinės lygties atskiro sprendinio suma.

Atitinkanti homogeninės lygtis buvo išspręsta antrame pavyzdyje, jos charakteringosios lygties šaknys yra kompleksinės jungtinės

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

ir bendrasis sprendinys užrašomas taip:

$$y^* = C_1 cost + C_2 sint$$

Dešinėje pusėje esanti funkcija gali būti užrašyta trigonometrinėje formoje:

$$f(t) = e^{\alpha t}(P_n(t)cos\beta t + Q_m(t)sin\beta t) = 3sint,$$

kai

$$\alpha = 0, \beta = 1$$

$$P_n(t) = 0 \Rightarrow n = 0$$

$$Q_m(t) = 3 \Rightarrow m = 0$$

Kadangi $\alpha \pm \beta i$ yra homogeninės diferencialinės lygties charakteringosios lygties šaknys, tai nehomogeninės diferencialinės lygties atskiras sprendinys užrašomas tokia forma:

$$\bar{y} = te^{\alpha t}(Q_s(t)cos\beta t + R_s(t)sin\beta t), s = \max(n, m)$$

Mūsų atveju

$$s = \max(0{,}0) = 0$$

$$Q_s(t) = C_3, R_s(t) = C_4$$

Taigi

$$\bar{y} = t(C_3 cost + C_4 sint)$$

Paskaičiuokime pirmąją ir antrąją išvestines:

$$\bar{y}' = C_3 cost - C_3 tsint + C_4 sint + C_4 tcost$$

$$\bar{y}'' = -2C_3 sint + 2C_4 cost - C_3 tcost - C_4 tsint$$

Įstatykime į pradinę lygtį ir apskaičiuokime konstatntų reikšmes:

$$-2C_3 sint + 2C_4 cost - C_3 tcost - C_4 tsint + C_3 cost - C_3 tsint + C_4 sint + C_4 tcost = 3sint$$

$$-2C_3 sint + 2C_4 cost = 3sint$$

Sulyginame koeficientus prie vienodų trigonometrinių funkcijų:

$$\begin{cases} -2C_3 = 3, \\ 2C_4 = 0. \end{cases}$$

Iš paskutinės sistemos randame laisvų konstantų reikšmes:

$$C_3 = -1{,}5, C_4 = 0$$

Tuomet atskiras nehomogeninės lygties sprendinys:

$$\bar{y} = -1{,}5tcost$$

Ir bendrasis nehomogeninės lygties sprendinys:

$$y = y^* + \bar{y}$$

$$y = C_1 cost + C_2 sint - 1{,}5tcost$$

Įvetrinę pradines sąlygas, gauname konstantų reikšmes:

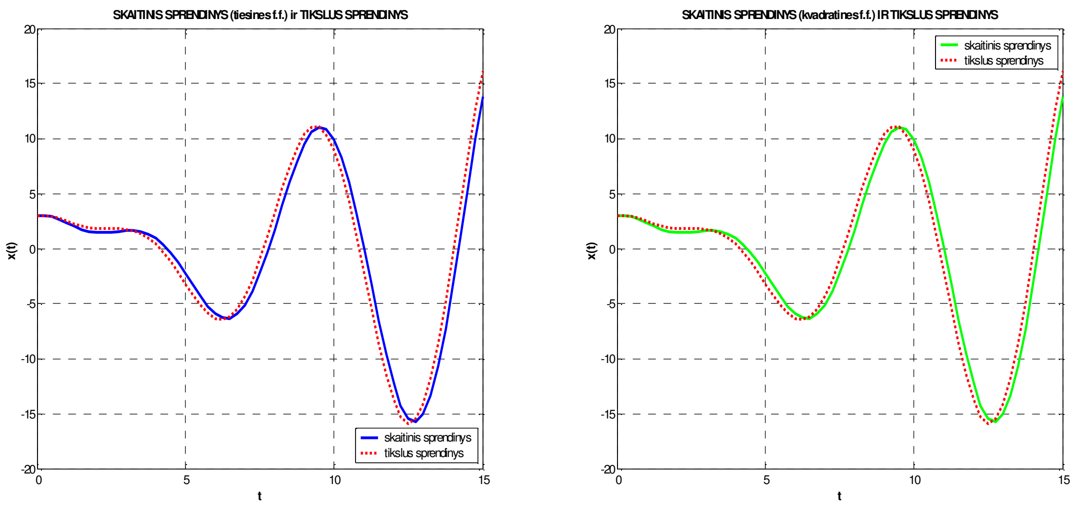
$$C_1 = 3, C_2 = 2$$

Tuomet atskiras nehomogeninės lygties sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas, yra:

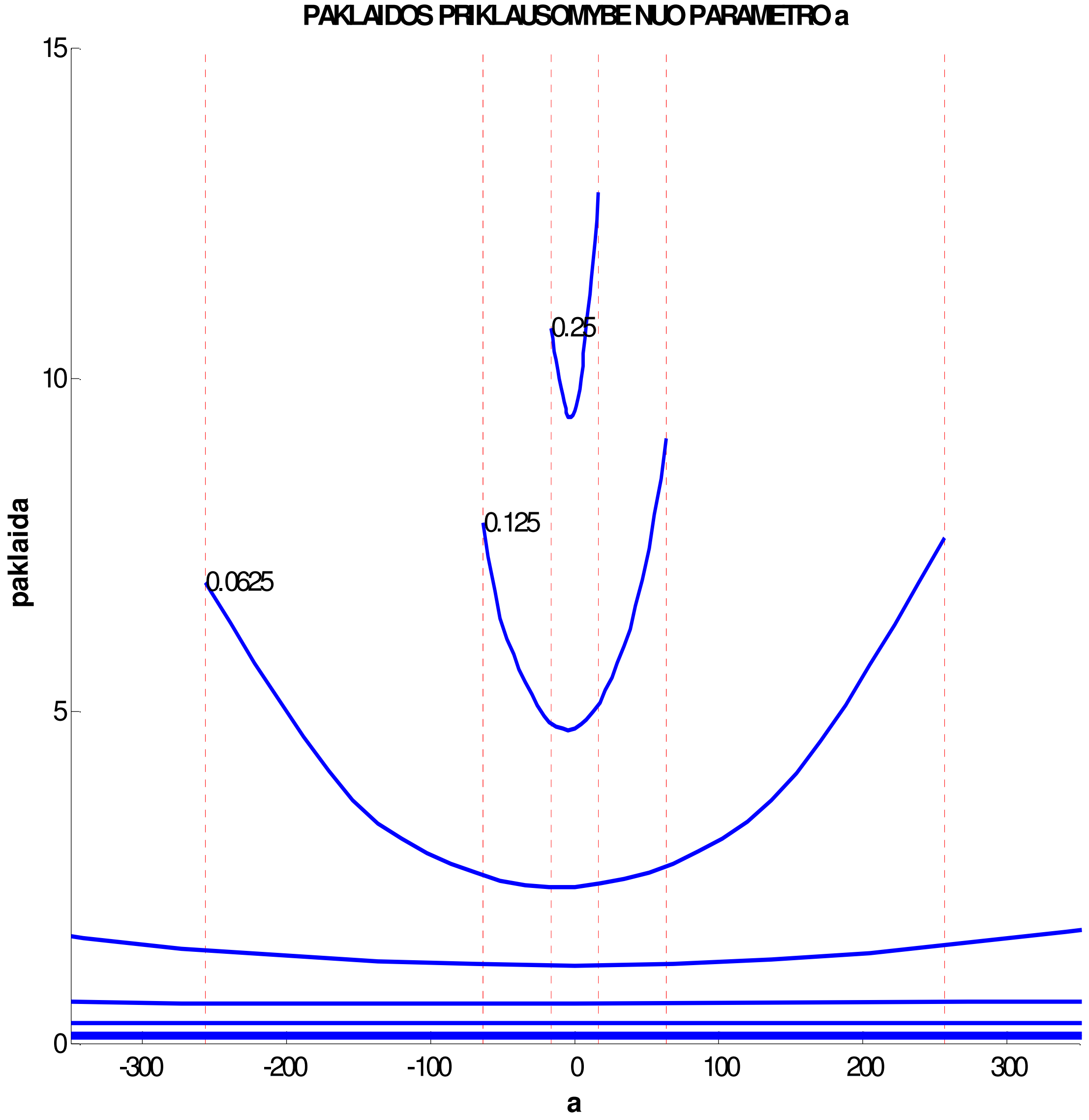
$$y = (3 - 1{,}5t)cost + 2sint$$

$$y' = (-3 + 1{,}5t)sint + 0{,}5cost$$

Skaitinio integravimo rezultatai:



14 pav. 3 pavyzdžio integravimo rezultatai, kai žingsnis - 0.25, parametras *a* - 0.05



15 pav. Paklaidos priklausomybė nuo integravimo žingsnio ir parametro *a*