KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Asta Karpinaitė

NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ k-TŲJŲ EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Magistro darbas

Vadovas
doc. dr. A.Jokimaitis

KAUNAS, 2008

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
doc. dr. N.Listopadskis

NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ k-TŲJŲ EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
( ) doc. dr. A.Jokimaitis
2008 06 03

Recenzentas
( ) lek. |D.Petronaitis
2008 06 03

Atliko
FMMM 6 gr. stud.
( ) A.Karpinaitė
2008 06 03

KAUNAS, 2008

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, habil. dr., valdybos pirmininko pavaduotojas (DnB NORD Bankas)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., vice-prezidentas projektams (UAB „Baltic Amadeus“)

Karpinaitė A. The convergence rate analysis of the k-th extremes of independent random variables: Master's work in applied mathematics / supervisor doc. dr. A. Jokimaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2008. – 52 p.

SUMMARY

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sequence of independent random variables with distribution function $F(x)$. Denote

$$X_{1:n} \le X_{2:n} \le \ldots \le X_{n:n}$$

ordered sample values.

Random variables $X_{n-k+1:n}$ and $X_{k:n}$ is k-th extreme values. Let's note maximum and minimum terms of variation series:

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)\,.$$

If there are satisfying particular condition, then

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x)\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) = H_{(k)}(x) \text{ and}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x)\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{k:n} < c_n + d_n x) = L_{(k)}(x)\,.$$

In this work we research the convergence rate of k-th extreme values ($X_{n-k+1:n}$ and $X_{k:n}$) to limit distribution (in case of maximum to limit distribution $H_{(k)}(x)$, in case of minimum - $L_{(k)}(x)$). This problem is solving in case of particular distributions such as, exponential, Pareto, uniform.

The phase of this problem solving are:

1) the matching of centering and normalization constants;
2) the determination of extreme values limit distribution;
3) the determination of k-th extreme values distribution;
4) computerized analysis.

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Ekstremalių reikšmių teorijos aktualumas ir svarba**.** Pateiksime keletą pavyzdžių, kuriuose ekstremalios reikšmės (maksimumai arba minimumai) vaidina svarbų vaidmenį.

Stichiniai gamtos reiškiniai. Potvyniai, liūtys, ekstremalios temperatūros, uraganai gali pridaryti nuostolių įvairiems statiniams (bokštams, užtvankoms, gyvenamiesiems namams ir pan.). Aišku, tokių stichinių nelaimių išvengti negalima, tačiau, projektuojant šiuos statinius bei parenkant jiems statybines medžiagas, galima ir reikia atsižvelgti į minėtų stichinių nelaimių galimybę, kas padėtų sumažinti jų padarinius.

Sistemų patikimumo problema. Sakysime sistema nustoja veikusi, jei sugenda bent vienas iš jos elementų. Šiuo atveju mažiausiai patikimas sistemos elementas turi lemiamos įtakos visos sistemos funkcionavimui.

Korozija. Paprastai laikoma, kad metalinė danga su dideliu korozinių dėmių skaičiumi yra pažeista korozijos, jeigu kurioje nors iš šių dėmių korozija apima visą dangos storį. Korozijos dėmių gylis yra atsitiktinis ir jis kinta laikui einant, priklausomai nuo aplinkos poveikio. Šiuo atveju lemiamą įtaką turi maksimali korozijos defekto gylio reikšmė.

Atmosferos užterštumas. Atmosferos užterštumas išreiškiamas procentiniu teršalų kiekiu atmosferoje (koncentracija). Šių teršalų koncentracija yra nuolat matuojama. Svarbu, kad maksimali koncentracija neviršytų nustatytos normos.

Atsparumas trūkiams. Kaip rodo eksperimentai, nėra absoliučiai vienalyčių medžiagų. Todėl ir atsparumas traukimui taip pat gali būti nevienodas, net jei medžiagos pagamintos taikant tą patį technologinį procesą. Šį faktą galima paaiškinti tuo, kad kiekviename taške (arba mažoje srityje) medžiagos atsparumas yra atsitiktinis dydis. Todėl medžiagos atsparumą traukimui lemia minimalų atsparumą turintis taškas.

Šie pateikti pavyzdžiai toli gražu neišsemia visų atvejų, kuomet gali būti taikoma ekstremalių reikšmių teorija, tačiau ir jų pakanka parodyti, kokia plati gali būti šios teorijos taikymo sritis. Tačiau ne vien taikomojo pobūdžio uždaviniais turtinga ekstremaliųjų reikšmių teorija, joje gausu ir įdomių teorinių problemų.

Plačiau apie ekstremaliųjų reikšmių teoriją ir jos taikymais galime susipažinti [5], [6] ir [7] darbuose.

Kai atsitiktinių poveikių skaičius didelis, naudotinos maksimumų ir minimumų (ekstremumų) ribinės teoremos. Jos teikia galimybes sudėtingus ekstremumų skirstinius aproksimuoti paprastesniais (ribiniais) skirstiniais. Tačiau iškyla aproksimavimo paklaidų problemos.

Šiame darbe tirsime nepriklausomų atsitiktinių dydžių k-tųjų ekstremaliųjų reikšmių konvergavimo greitį, bei nepriklausomų atsitiktinių dydžių k-tųjų ekstremaliųjų reikšmių tankio konvergavimo greitį.

Konkrečių skirstinių atveju parinksime centravimo ir normavimo konstantas, gausime k- tųjų maksimumų (minimumų) ribinį skirstinį $H_k(x)$ ($L_k(x)$), bei k-tųjų maksimumų (minimumų) tankį $h_k(x)$ ($l_k(x)$). Aproksimavimo paklaidas tirsime remdamiesi kompiuterine analize.

1. BENDROJI DALIS

1.1. EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SCHEMOS SĄVOKA

Sakykime, kad $X_1, X_2, ..., X_n$ - atsitiktinių dydžių (a.d) seka. Sudarykime n pirmųjų sekos narių variacinę eilutę

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq ... \leq X_{n:n}.$$

Fiksuokime $k \in N$. Kai $n \to \infty$, atsitiktinius dydžius $X_{k:n}$ ir $X_{n-k+1:n}$ vadinsime k-osiomis ekstremaliosiomis reikšmėmis. Didžiausią ir mažiausią variacinės eilutės narius pažymėsime

$$Z_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n),$$

$$W_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Atsitiktinius dydžius Z_n ir W_n vadinsime ekstremaliosiomis reikšmėmis arba tiesiog maksimumu ir minimumu.

Tarkime, $u_n = u_n(x)$ - tokia realaus kintamojo funkcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka $H_n(u_n(x)) = P(Z_n < u_n(x))$ silpnai konverguoja į neišsigimusią pasiskirstymo funkciją $H(x)$. Taip apibrėžta struktūra Z_n kartu su prielaidomis apie atsitiktinių dydžių seką $\{X_n, n \geq 1\}$ bei jų funkcijų seką $\{u_n, n \geq 1\}$ sudaro maksimumų schemą.

Analogiškai apibrėšime minimumų schemą. Tarkime $v_n = v_n(x)$ - tokia realaus kintamojo funkcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka $L_n(v_n(x)) = P(W_n < v_n(x))$ silpnai konverguoja į neišsigimusią pasiskirstymo funkciją $L(x)$. Struktūrą W_n kartu su prielaidomis apie atsitiktinių dydžių seką $\{X_n, n \geq 1\}$ ir funkcijų seką $\{v_n, n \geq 1\}$ sudaro minimumų schemą.

Jei atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n \geq 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija $F(x)$, o normavimo funkcijos u_n ir v_n tiesinės, t.y.

$$u_n(x) = a_n + b_n x, \quad a_n \in \Re, \quad b_n > 0,$$

$$v_n(x) = c_n + d_n x, \quad c_n \in \Re, \quad d_n > 0,$$

tai tokia ekstremaliųjų reikšmių (maksimumų arba minimumų) schema vadinama klasikine.

Galimi įvairūs klasikinės ekstremaliųjų reikšmių schemos apibendrinimai. Pavyzdžiui, vietoje maksimumo ar minimumo galime imti k-ąsias ekstremaliąsias reikšmes; galima nagrinėti atsitiktinių dydžių serijų sekų ekstremaliąsias reikšmes; atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n \geq 1\}$ gali būti nevienodai pasiskirstę arba priklausomi; normavimo funkcijos u_n ir v_n gali būti netiesinės; atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n \geq 1\}$ gali būti daugiamačiai; variacinės eilutės ilgis gali būti ne fiksuotas, o atsitiktinis (šią problemą nagrinėja taip vadinamos perkėlimo teoremos); pagaliau, galima nagrinėti ne atsitiktinių dydžių, o atsitiktinių procesų ar atsitiktinių laukų ekstremalias reikšmes.

1.2. RIBINIAI EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SKIRSTINIAI

Suformuluosime keletą fundamentalių vienmačių ekstremaliųjų reikšmių teorijos rezultatų, kuriuose yra gauti nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių tiesiškai normuotų ekstremaliųjų reikšmių ribiniai skirstiniai ir pateikiami centravimo ir normavimo konstantų parinkimo būdai.

Sakykime, $\{X_n, n \geq 1\}$ - nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka.

Tarkime,

$$F(x) = P(X_j < x), \quad \forall j \geq 1.$$

Pažymėkime

$$Z_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{a_n, n \geq 1\}$ ir $\{b_n > 0, n \geq 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \tag{1.1}$$

kiekviename funkcijos $H(x)$ tolydumo taške (čia $H(x)$ - neišsigimusi pasiskirstymo funkcija). Tokį konvergavimą vadinsime silpnuoju pasiskirstymo funkcijų arba atsitiktiniu dydžių konvergavimu.

Sakysime, kad skirstinys F priklauso ribinio skirtinio H traukos sričiai (žymėsime $F \in D(H)$), jei egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos, kad tenkinama lygybė (1.1).

Pažymėkime

$$W_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{c_n, n \geq 1\}$ ir $\{d_n > 0, n \geq 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x) \tag{1.2}$$

kiekviename funkcijos $L(x)$ tolydumo taške (čia $L(x)$ - neišsigimusi pasiskirstymo funkcija). Tokį konvergavimą vadinsime silpnuoju pasiskirstymo funkcijų arba atsitiktiniu dydžių konvergavimu.

Sakysime, kad skirstinys F priklauso ribinio skirtinio L traukos sričiai (žymėsime $F \in D(L)$), jei egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos, kad tenkinama lygybė (1.2).

Pažymėkime

$$\alpha(F) = \inf\{x : F(x) > 0\},$$

$$w(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti skirstinys F, kad jis priklausytų kurio nors neišsigimusio ribinio skirstinio traukos sričiai. Taip pat pateiksime konstantų parinkimo būdą.

1.1. Teorema. Tarkime , $w(F) = \infty$, ir egzistuoja tokia teigiama konstanta α, kad

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha} \tag{1.3}$$

visiems $x > 0$. Tuomet $F \in D(H_{1,\alpha})$. Čia

$$H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$b_n = \inf\{x : 1 - F(x) \le 1/n\},$$

$$a_n = 0.$$

1.2. Teorema. Tarkime $w(F) < \infty$, o pasiskirstymo funkcija

$$F^*(x) = F(w(F) - 1/x)$$

tenkina sąlygą (1.2). Tuomet $F \in D(H_{2,\alpha})$. Čia

$$H_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & x < 0, \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = w(F),$$

$$b_n = w(F) - \inf\{x : 1 - F(x) \le 1/n\}.$$

1.3. Teorema. Tarkime, su bet kokia baigtine konstanta α integralas

$$\int_{\alpha}^{w(F)} (1 - F(y))dy \tag{1.4}$$

yra baigtinis. Intervale $(\alpha(F), w(F))$ apibrėžkime funkciją

$$R(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_t^{w(F)} (1 - F(y))dy.$$

Jei visiems realiems x egzistuoja riba

$$\lim_{t\to w(F)} \frac{1-F(t+xR(t))}{1-F(t)} = e^{-x}, \qquad \textbf{(1.5)}$$

tai $F \in D(H_{3,\alpha})$. Čia

$$H_{3,\alpha}(x) = \{\exp(-e^{-x})\}, \qquad x \in \Re.$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \inf\{x : 1-F(x) \le 1/n\},$$

$$b_n = R(a_n).$$

1.1. Pastaba. Šiose teoremose patektas centravimo ir normavimo konstantų a_n ir b_n parinkimo būdas nėra vienintelis. Mes net negalime teigti, kad tai pats paprasčiausias konstantų parinkimo būdas, ir kad parinktos konstantos yra geriausios, tačiau jis yra geras tuo, kad yra paprastas ir konstruktyvus.

1.4. Teorema. Klasikinėje maksimumų schemoje egzistuoja tik trys $(H_{1,\alpha}, H_{2,\alpha}, H_{3,\alpha})$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.5. Teorema. Tarkime, turime klasikinę maksimumų schemą.

1) $F \in D(H_{1,\alpha})$ tada ir tik tada, kai $w(F) = \infty$ ir tenkinama sąlyga (1.3);

2) $F \in D(H_{2,\alpha})$ tada ir tik tada, kai $w(F) < \infty$ ir funkcija

$$F^*(x) = F(w(F) - 1/x), \ (x > 0)$$

tenkina sąlygą (1.3);

3) $F \in D(H_{3,0})$ tada ir tik tada, kai integralas (1.4) yra baigtinis, ir tenkinama sąlyga (1.5).

1.6. Teorema. Tarkime, $\alpha(F) = -\infty$, ir egzistuoja tokia teigiama konstanta γ, kad

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\gamma} \qquad \textbf{(1.6)}$$

visiems $x > 0$. Tuomet $F \in D(L_{1,\gamma})$. Čia

$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1-\exp(-(-x)^{-\gamma}), & x < 0, \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

Normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$d_n = \sup\{x : F(x) \le 1/n\},$$
$$c_n = 0.$$

1.7. Teorema. Tarkime $\alpha(F)$ yra baigtinis, o pasiskirstymo funkcija

$$F^*(x) = F(\alpha(F) - 1/x), \ x < 0$$

tenkina sąlygą (1.6). Tuomet $F \in D(L_{2,\gamma})$. Čia

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x)^{\gamma}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$d_n = \sup\{x : F(x) \leq 1/n\} - \alpha(F), \text{ o}$$

$$c_n = \alpha(F).$$

1.8. Teorema. Tarkime, su bet kokia baigtine konstanta α integralas

$$\int_{\alpha(F)}^{\alpha} F(y)dy \tag{1.7}$$

yra baigtinis. Apibrėžkime funkciją

$$r(t) = \frac{1}{F(t)} \int_{\alpha(F)}^{t} F(y)dy,$$

čia $t > \alpha(F)$.

Jei visiems realiems x egzistuoja riba

$$\lim_{t \to \alpha(F)} \frac{F(t + xr(t))}{F(t)} = e^x, \tag{1.8}$$

tai $F \in D(L_{3,\gamma})$. Čia

$$L_{3,\gamma}(x) = 1 - \exp(-e^x), \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$c_n = \sup\{x : F(x) \leq 1/n\},$$

$$d_n = r(c_n).$$

1.9. Teorema. Klasikinėje minimumų schemoje egzistuoja tik trys $(L_{1,\gamma}, L_{2,\gamma}, L_{3,\gamma})$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.10. Teorema. Tarkime, turime klasikinę minimumų schemą.

1) $F \in D(L_{1,\gamma})$ tada ir tik tada, kai $\alpha(F) = -\infty$ ir tenkinama sąlyga (1.6);

2) $F \in D(L_{2,\gamma})$ tada ir tik tada, kai $\alpha(F) > \infty$ ir funkcija

$$F^*(x) = F(\alpha(F) - 1/x), \; (x < 0)$$

tenkina sąlygą (1.6);

3) $F \in D(L_{3,0})$ tada ir tik tada, kai integralas (1.7) yra baigtinis, ir tenkinama sąlyga (1.8).

1.1-1.10 teoremos įrodytos [1] darbe.

1.3. RIBINIAI k-tųjų EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SKIRSTINIAI

1.11. Teorema. Tarkime, $\{a_n\}$ ir $\{b_n > 0\}$ - normavimo ir centravimo konstantų sekos, o $k > 1$ - sveikasis teigiamas skaičius. k-tojo maksimumo $X_{n-k+1:n}$ skirstinys $P(X_{n-k+1:n} < x)$ silpnai konverguoja į neišsigimusią skirstinio funkciją $H_{(k)}(x)$ tada ir tik tada kai

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x);$$

čia $H(x)$ - neišsigimusi skirstinio funkcija.

Jeigu egzistuoja ribinio skirstinio funkcija $H_{(k)}(x)$, tai su visais x, tenkinančias nelygybę $\alpha(H) < x < w(H)$, teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) = H_{(k)}(x) = H(x)\sum_{t=0}^{k-1}\frac{1}{t!}\left(\log\frac{1}{H(x)}\right)^t \tag{1.9}$$

1.12. Teorema. Tarkime, $\{c_n\}$ ir $\{d_n > 0\}$ - normavimo ir centravimo konstantų sekos, o $k > 1$ - sveikasis teigiamas skaičius. k-tojo minimumo $X_{k:n}$ skirstinys $P(X_{k:n} < x)$ silpnai konverguoja į neišsigimusią skirstinio funkciją $L_{(k)}(x)$ tada ir tik tada, kai

$$\lim_{n\to\infty}(W_n < c_n + d_n x) = L(x);$$

čia $L(x)$ - neišsigimusi skirstinio funkcija.

Jeigu egzistuoja ribinio skirstinio funkcija $L_{(k)}(x)$, tai su visais x, tenkinančias nelygybę $\alpha(L) < x < w(L)$, teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{k:n} < c_n + d_n x) = L_{(k)}(x) = 1-(1-L(x))\sum_{t=0}^{k-1}\frac{1}{t!}\left(-\log(1-L(x))\right)^t. \tag{1.10}$$

1.11-1.12 teoremos įrodytos [1] darbe.

1.4. NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO TANKIO ASIMPTOTIKA

Tarkime, kad $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ - nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su pasiskirstymo funkcija $F(x)$ ir tankiu $p(x)$.

Pažymėkime

$$u_n(x) = n(1 - F(a_n + b_n x));$$

čia $\{a_n, n \geq 1\}$ ir $\{b_n > 0, n \geq 1\}$ - centravimo ir normavimo konstantų sekos. Tarkime, kad skirstinio funkcija $F(x)$ yra tokia, jog

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) > 0. \quad \textbf{(1.11)}$$

Tada

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \quad \textbf{(1.12)}$$

visuose funkcijos H tolydumo taškuose; čia H - neišsigimusi skirstinio funkcija. Be to $H(x) = e^{-u(x)}$. Jei tenkinama (1.12) lygybė, sakysime, kad skirstinio funkcija F priklauso ribinio skirstinio H traukos sričiai (žymėsime $F \in D(H)$).

Pažymėkime,

$$p_{Z_n}(x) = H'(x).$$

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti skirstinio funkcija F, kad tiesiškai normuoto maksimumo tankis $p_{Z_n}(x)$ konverguotų į ribinio skirstinio H tankį $H'(x)$, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n}(x) = H'(x). \quad \textbf{(1.13)}$$

1.13. Teorema. Jei $F \in D(H)$ ir

a. $H = H_{1,\alpha}$, tai (1.13) sąryšis bus teisingas intervale $(0;\infty)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(x)$ yra teigiama su pakankamai dideliais x, ir su $\alpha > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xp(x)}{1 - F(x)} = \alpha;$$

b. $H = H_{2,\alpha}$ tai (1.13) sąryšis bus teisingas intervale $(-\infty;0)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(x)$ yra teigiama, ir su $\alpha > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to w(F)} \frac{(w(F) - x)p(x)}{1 - F(x)} = \alpha,$$

čia - $w(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}$;

c. $H = H_{3,0}$ tai (1.13) sąryšis bus teisingas su visais x tada ir tik tada, kai tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to w(F)} \frac{p(x)\int_x^{w(F)}(1 - F(t))dt}{(1 - F(x))^2} = 1.$$

Teorema įrodyta [2] darbe.

1.5 NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ k-TOJO MAKSIMUMO TANKIO ASIMPTOTIKA

Tarkime, tenkinamos 1.11 teoremos sąlygos. Tada

$$H_{(k)}(x) = H(x)\sum_{t=0}^{k-1}\frac{(u(x))^t}{t!}.$$

Tiesiškai normuoto k-tojo maksimumo ribinio skirstinio $H_{(k)}(x)$ tankį pažymėkime $h_{(k)}(x)$. Tada diferencijuodami k-tojo maksimumo skirstinio funkciją $H_{(k)}(x)$, gauname jo tankį $h_{(k)}(x)$:

$$h_{(k)}(x) = H'_{(k)}(x) = H'(x)\frac{(u(x))^{k-1}}{(k-1)!}. \quad \textbf{(1.15)}$$

Tiesiškai normuoto k-tojo maksimumo skirstinio tankį pažymėkime $p_{X_{n-k+1:n}}(x)$.

1.14. Teorema. Tarkime, tenkinama 1.11 ir 1.13 teoremų sąlygos. Tada

$$\lim_{n\to\infty} p_{X_{n-k+1:n}}(x) = h_{(k)}(x).$$

Teorema įrodyta [2] darbe.

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1. k-TŲJŲ MAKSIMUMŲ SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

2.1.1. EKSPONENTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TOJO MAKSIMUMO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Sakykime, kad atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n \geq 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ ir tankiu $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Surasime centravimo ir normavimo konstantas ir maksimumo ribinį skirstinį $H_{(k)}$.

Kadangi $\omega(F) = \infty$, galime taikyti 1.1 arba 1.3 teoremas. 1.1 teoremos sąlyga netenkinama, todėl tikriname 1.3 teoremos sąlygas. Kadangi integralas

$$\int_a^{w(F)} (1 - F(y))dy = \int_0^{+\infty} (1 - 1 + e^{-\lambda y})dy = -\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} d(-\lambda y) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

konverguoja, tai sąlyga tenkinama.

Sukonstruojame f-ją $R(t)$:

$$R(t) = \frac{\int_t^{+\infty} (1 - F(x))dx}{1 - F(t)} = \frac{\int_t^{+\infty} e^{-\lambda x}dx}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda e^{-\lambda t}} = \frac{1}{\lambda},\ \alpha(F) < t < \omega(F),$$

tikriname, ar tenkinama antra teoremos sąlyga

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1 - F(t + xR(t))}{1 - F(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-\lambda(t - x\frac{1}{\lambda})}}{e^{-\lambda t}} = e^{-x}.$$

Kadangi 1.3 teoremos sąlyga tenkinama, tai

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) = e^{-e^{-x}} \quad x \in \Re. \tag{2.1}$$

Parenkame centravimo ir normavimo konstantas.

Iš sąlygų $a_n = \inf\{x : 1 - F(x) \leq 1/n\}$, $b_n = R(a_n)$, gauname, kad $a_n = \dfrac{\ln n}{\lambda}$, $b_n = \dfrac{1}{\lambda}$.

Kadangi teisinga (2.1) lygybė, tai 1.11 teoremos sąlygos tenkinamos ir taikydami 1.11 teoremą gauname k-tojo maksimumo ribinį skirtinį $H_{(k)}(x)$:

$$H_{(k)}(x) = e^{-e^{-x}} \sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} e^{-tx},$$

Kai $k=1$, tai

$$H_{(1)}(x)=e^{-e^{-x}}.$$

Kai $k=2$, tai

$$H_{(2)}(x)=e^{-e^{-x}}\cdot(1+e^{-x}).$$

Kai $k=3$, tai

$$H_{(3)}(x)=e^{-e^{-x}}\cdot(1+e^{-x}+\frac{1}{2}\left(e^{-x}\right)^2).$$

Kai $k=4$, tai

$$H_{(4)}(x)=e^{-e^{-x}}\cdot(1+e^{-x}+\frac{1}{2}\left(e^{-x}\right)^2+\frac{1}{6}\left(e^{-x}\right)^3).$$

Konvergavimo greitį tiriame nagrinėdami skirtumą

$$\left|P(X_{n-k+1:n}<a_n+b_nx)-H_{(k)}(x)\right|.$$

Šio skirtumo kitimo priklausomybė nuo n, x ir k tiriame atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Matome, kad k-tojo maksimumo skirstinys konverguoja greičiau prie ribinio skirstinio $H_{(k)}(x)$, kai x didėja ir k didėja. Grafinė analizė pateikta prieduose (žr. 1 priede 1, 2 pav.) .

2.1.2. PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TOJO MAKSIMUMO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Sakykime, kad atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n\ge 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija $F(x)=1-\frac{1}{x^{\alpha}}$, kai $x>1$.

Surasime centravimo ir normavimo konstantas ir maksimumo ribinį skirstinį $H_{(k)}$.

Kadangi $\omega(F)=+\infty$, tai galime taikyti 1.1 arba 1.3 teoremas . Tikriname 1.1 teoremos sąlygą:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{(tx)^{\alpha}}}{\frac{1}{t^{\alpha}}}=\frac{1}{x^{\alpha}}=x^{-\alpha}.$$

Teoremos 1.1 sąlyga tenkinama, todėl

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) = e^{-e^{-\alpha}}, \text{ kai } \alpha > 0. \quad \textbf{(2.2)}$$

Centravimo ir normavimo konstantas parenkame tokiu būdu:

$a_n = 0$, o $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ iš sąlygų $b_n = \inf\{x : 1 - F(x) \le 1/n\}$.

Kadangi lygybė (2.2) yra teisinga, tai 1.11 teoremos sąlygos tenkinamos ir taikydami 1.11 teoremą gauname k-tojo maksimumo ribinį skirstinį $H_{(k)}(x)$.

$$H_{(k)}(x) = e^{-e^{-\alpha}} \sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} x^{-\alpha x}$$

Kai $k = 1$, tai

$$H_{(1)}(x) = e^{-x^{-\alpha}}.$$

Kai $k = 2$, tai

$$H_{(2)}(x) = e^{-x^{-\alpha}} \cdot (1 + x^{-\alpha}).$$

Kai $k = 3$, tai

$$H_{(3)}(x) = e^{-x^{-\alpha}} \cdot (1 + x^{-\alpha} + \frac{1}{2}\left(x^{-\alpha}\right)^2).$$

Kai $k = 4$, tai

$$H_{(4)}(x) = e^{-x^{-\alpha}} \cdot (1 + x^{-\alpha} + \frac{1}{2}\left(x^{-\alpha}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x^{-\alpha}\right)^3).$$

Konvergavimo greitį tiriame nagrinėdami skirtumą:

$$\left| P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) - H_{(k)}(x) \right|.$$

Šio skirtumo kitimo priklausomybė nuo n, x ir k tiriame atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Matome, kad k-tojo maksimumo skirstinys konverguoja greičiau prie ribinio skirstinio $H_{(k)}(x)$, kai x didėja ir k didėja. Grafinė analizė pateikta prieduose (žr. 2 priede 1, 2 pav.) .

2.1.3. TOLYGIŲ INTERVALE (a,b) ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ k-TOJO MAKSIMUMO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Sakykime, kad atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n \geq 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$, kai $a < x < b$.

Surasime centravimo ir normavimo konstantas ir maksimumo ribinį skirstinį $H_{(k)}$.

Kadangi $\omega(F) = b$, taikome 1.2 teoremą.

Sukonstruojame f-ją

$$F^*(x) = F\left(b - \frac{1}{x}\right) = \frac{b - \frac{1}{x} - a}{b-a} = \frac{(b-a) - \frac{1}{x}}{b-a} = 1 - \frac{1}{x(b-a)}$$

ir tikriname ar ji tenkina 1.2 teoremos sąlygą

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{tx(b-a)}}{\dfrac{1}{t(b-a)}} = x^{-1}.$$

Kadangi 1.2 teoremos sąlyga tenkinama, tai

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) = e^x \text{, kai } x < 0. \tag{2.3}$$

Parenkame centravimo ir normavimo konstantas

$$a_n = b,$$

$$1 - F(b_n') = \frac{1}{n} \quad b_n = b - \frac{(n-1)(b-a) + an}{n} = \frac{b-a}{n}.$$

Kadangi lygybė (2.3) yra teisinga, tai 1.11 teoremos sąlygos tenkinamos ir taikydami 1.11 teoremą gauname k-tojo maksimumo ribinį skirstinį $H_{(k)}(x)$.

Kai $k = 1$, tai

$$H_{(1)}(x) = e^x.$$

Kai $k = 2$, tai

$$H_{(2)}(x) = e^x(1 - x).$$

Kai $k = 3$, tai

$$H_{(3)}(x) = e^x\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2\right).$$

Kai $k = 4$, tai

$$H_{(4)}(x) = e^{x}\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)$$

Konvergavimo greitį tiriame nagrinėdami skirtumą

$$\left|P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) - H_{(k)}(x)\right|.$$

Šio skirtumo kitimo priklausomybė nuo n, x ir k tiriame atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Matome, kad k-tojo maksimumo skirstinys konverguoja greičiau prie ribinio skirstinio $H_{(k)}(x)$, kai x mažėja ir k mažėja. Grafinė analizė pateikta prieduose (žr. 3 priede 1, 2 pav.)

2.2. k-TŲJŲ MINIMUMŲ SKIRSTINIŲ KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

2.2.1. EKSPONENTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TOJO MINIMUMO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Sakykime, kad atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n \geq 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

Surasime centravimo ir normavimo konstantas ir minimumo ribinį skirstinį $L_{(k)}$.

Kadangi $\alpha(F) = 0$, taikome 1.7 teoremą.

Sukonstruojame f-ją $F^*(x)$

$$F^*(x) = F\left(0 - \frac{1}{x}\right) = F\left(-\frac{1}{x}\right), \quad x < 0, \lambda > 0$$

ir tikriname teoremos 1.7 sąlygą:

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{F^*(tx)}{F^*(t)} = \lim_{t \to -\infty} \frac{1 - e^{\frac{\lambda}{tx}}}{1 - e^{\frac{\lambda}{t}}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t \to -\infty} \frac{-e^{\frac{\lambda}{tx}} \cdot \frac{\lambda}{x}\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{-e^{\frac{\lambda}{t}} \cdot \lambda\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = x^{-1}.$$

Kadangi 1.7 teoremos sąlyga tenkinama, tai

$$\lim_{n \to +\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x) = 1 - e^{-x}, \; x \geq 0. \qquad \textbf{(2.4)}$$

Randame centravimo ir normavimo konstantas

$$c_n = \alpha(F), \quad d_n = 0,$$

$$1 - e^{-\lambda x} = \frac{1}{n}, \quad x = \frac{\ln(1 - \frac{1}{n})}{-\lambda} = \frac{1}{n\lambda}, \quad d_n = x - \alpha(F) = \frac{1}{n\lambda}.$$

Kadangi teisinga 2.4 lygybė, tai 1.12 teoremos sąlygos tenkinamos ir taikydami 1.12 teoremą gauname k-tojo minimumo ribinį skirtinį $L_{(k)}(x)$:

$$L_{(k)}(x) = 1 - e^{-x} \sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} (x)^t .$$

Kai $k = 1$, tai

$$L_{(1)}(x) = 1 - e^{-x} .$$

Kai $k = 2$, tai

$$L_{(2)}(x) = 1 - e^{-x}(1 + x) .$$

Kai $k = 3$, tai

$$L_{(3)}(x) = 1 - e^{-x}(1 + x + \frac{1}{2}(x)^2) .$$

Kai $k = 4$, tai

$$L_{(4)}(x) = 1 - e^{-x}(1 + x + \frac{1}{2}(x)^2 + \frac{1}{6}(x)^3) .$$

Konvergavimo greitį tiriame nagrinėdami skirtumą

$$P(X_{k:n} < c_n + d_n x) - L_{(k)}(x) .$$

Šio skirtumo kitimo priklausomybė nuo n, x ir k tiriame atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Matome, kad k-tojo minimumo skirstinys konverguoja greičiau prie ribinio skirstinio $L_{(k)}(x)$, kai x didėja ir k mažėja. Grafinė analizė pateikta prieduose (žr. 1 priede 3, 4 pav.)

2.2.2. PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TOJO MINIMUMO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Sakykime, kad atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n \geq 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija $F(x) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}}$, kai $x > 1$.

Surasime centravimo ir normavimo konstantas ir minimumo ribinį skirstinį $L_{(k)}$.

Kadangi $\alpha(F) = 1$, $\alpha > 0$, $x > 1$ taikome 1.7 teoremą.

Sukonstruojame f-ją $F^*(x)$:

$$F^*(x) = F\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}, \qquad x<0$$

ir tikriname teoremos 1.7 sąlygą:

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{F^*(tx)}{F^*(t)} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{\left(1-\frac{1}{tx}\right)^{\alpha}}}{1-\frac{1}{\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\alpha}}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{t\to-\infty}\frac{-(-\alpha)\left(1-\frac{1}{tx}\right)^{-\alpha-1}\left(-\frac{1}{x}\right)(-1)\frac{1}{t^2}}{-(-\alpha)\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-\alpha-1}(-1)(-1)\frac{1}{t^2}} = x^{-1}.$$

Teoremos 1.7 sąlyga tenkinama, todėl

$$\lim_{n\to+\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x) = 1-e^{-x},\ x\geq 0. \qquad \textbf{(2.5)}$$

Surandame centravimo ir normavimo konstantas

$$c_n = \alpha(F),\ c_n = 1,$$

$$d_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 = \frac{1}{n\lambda}.$$

Kadangi teisinga 2.5 lygybė, tai 1.12 teoremos sąlygos tenkinamos ir taikydami 1.12 teoremą gauname k-tojo minimumo ribinį skirstinį $L_{(k)}(x)$:

$$L_{(k)}(x) = 1 - e^{-x}\sum_{t=0}^{k-1}\frac{1}{t!}(x)^t .$$

Kai $k=1$, tai

$$L_{(1)}(x) = 1-e^{-x}.$$

Kai $k=2$, tai

$$L_{(2)}(x) = 1-e^{-x}(1+x) .$$

Kai $k=3$, tai

$$L_{(3)}(x) = 1-e^{-x}(1+x+\frac{1}{2}(x)^2).$$

Kai $k=4$, tai

$$L_{(4)}(x) = 1 - e^{-x}(1 + x + \frac{1}{2}(x)^2 + \frac{1}{6}(x)^3).$$

Konvergavimo greitį tiriame nagrinėdami skirtumą

$$\left|P(X_{k:n} < c_n + d_n x) - L_{(k)}(x)\right|.$$

Šio skirtumo kitimo priklausomybė nuo n, x ir k tiriame atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Matome, kad k-tojo minimumo skirstinys konverguoja greičiau prie ribinio skirstinio $L_{(k)}(x)$, kai x didėja ir k mažėja. Grafinė analizė pateikta prieduose (žr. 2 priede 3, 4 pav.)

2.2.3. TOLYGIŲ INTERVALE (a,b) ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ k-TOJO MINIMUMO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Sakykime, kad atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n \geq 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$, kai $a < x < b.$

Surasime centravimo ir normavimo konstantas ir minimumo ribinį skirstinį $L_{(k)}$.

Kadangi $\alpha(F) = a$, kai $a < x < b$ taikome 1.7 teoremą.

Sukonstruojame f-ją $F^*(x)$:

$$F^*(x) = F\left(a - \frac{1}{x}\right) = \frac{a - \frac{1}{x} - a}{b-a} = \frac{-\frac{1}{x}}{b-a} \qquad x < 0.$$

Ir tikriname teoremos 1.7 sąlygą:

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{F^*(tx)}{F^*(t)} = \lim_{t \to -\infty} \frac{\frac{-\frac{1}{tx}}{b-a}}{\frac{-\frac{1}{t}}{b-a}} = x^{-1}.$$

Kadangi 1.7 teoremos sąlyga tenkinama, tai

$$\lim_{n \to +\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x) = 1 - e^{-x}, \; x \geq 0. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Surandame centravimo ir normavimo konstantas:

$$c_n = \alpha(F), \quad c_n = a,$$

$$d_n = \frac{b-a}{n} + a - a = \frac{b-a}{n}.$$

Kadangi teisinga 2.6 lygybė, tai 1.12 teoremos sąlygos tenkinamos ir taikydami 1.12 teoremą gauname k-tojo minimumo ribinį skirstinį $L_{(k)}(x)$:

$$L_{(k)}(x) = 1 - e^{-x} \sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} (x)^t .$$

Kai $k = 1$, tai

$$L_{(1)}\ (x) = 1 - e^{-x} .$$

Kai $k = 2$, tai

$$L_{(2)}(x) = 1 - e^{-x}(1 + x) .$$

Kai $k = 3$, tai

$$L_{(3)}(x) = 1 - e^{-x}(1 + x + \frac{1}{2}(x)^2) .$$

Kai $k = 4$, tai

$$L_{(4)}(x) = 1 - e^{-x}(1 + x + \frac{1}{2}(x)^2 + \frac{1}{6}(x)^3) .$$

Konvergavimo greitį tiriame nagrinėdami skirtumą

$$\left| P(X_{k:n} < c_n + d_n x) - L_{(k)}(x) \right| .$$

Šio skirtumo kitimo priklausomybė nuo n, x ir k tiriame atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Matome, kad k-tojo minimumo skirstinys konverguoja greičiau prie ribinio skirstinio $L_{(k)}(x)$, kai x didėja. Grafinė analizė pateikta prieduose (žr. 3 priede 3, 4 pav.)

2.3. k-TŲJŲ MAKSIMUMŲ TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

2.3.1. EKSPONENTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TOJO MAKSIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS.

Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $\{X_j\}$ turi eksponentinį skirstinį su skirstinio f-ja $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$ ir tankiu $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. 2.1.1skyrelyje parodėme, kad

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n < \frac{\ln n}{\lambda} + \frac{x}{\lambda} \right) = e^{-e^{-x}} .$$

Kadangi skirstinys tenkina 1.13 ir 1.14 teoremų sąlygas, tai k-tojo maksimumo tankis

$$p_{X_{n-k+1:n}}(x) = n!b_n p(a_n + b_n x)\frac{F^{n-k}(a_n + b_n x)(1 - F(a_n + b_n x))^{k-1}}{(n-k)!(k-1)!}$$

konverguoja į ribinio maksimumo skirstinio $H_{(k)}(x)$ tankį

$$h_{(k)}(x) = H'_{(k)}(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}\frac{(e^{-x})^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Kai $k = 1$, tai

$$h_{(1)} = e^{-x} \cdot e^{-e^{-x}}.$$

Kai $k = 2$, tai

$$h_{(2)} = e^{-x} \cdot e^{-e^{-x}} \cdot \frac{(e^{-x})}{1}.$$

Kai $k = 3$, tai

$$h_{(3)} = e^{-x} \cdot e^{-e^{-x}} \cdot \frac{(e^{-x})^2}{2}.$$

Kai $k = 4$, tai

$$h_{(4)} = e^{-x} \cdot e^{-e^{-x}} \cdot \frac{(e^{-x})^3}{6}.$$

Konvergavimo greitį tirsime nagrinėdami skirtumą

$$\left| p_{X_{n-k+1:n}}(x) - h_{(k)}(x) \right|.$$

Šio skirtumo kitimo priklausomybė nuo n, x ir k tiriame atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Matome, kad k-tojo maksimumo skirstinys konverguoja greičiau prie ribinio skirstinio $h_{(k)}(x)$, kai x didėja ir k didėja. Grafinė analizė pateikta prieduose (žr. 4 priede 1, 2 pav.).

2.3.2. PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TOJO MAKSIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $\{X_j\}$ turi eksponentinį skirstinį su skirstinio f-ja $F(x) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}}$, kai $x > 1$ ir tankiu $p(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$. 2.1.2 skyrelyje parodėme, kad

$$\lim_{n\to} P\left(Z_n < xn^{\frac{1}{\alpha}} \right) = e^{-x^{-\alpha}}.$$

Kadangi skirstinys tenkina 1.13 ir 1.14 teoremų sąlygas, tai k-tojo maksimumo tankis

$$p_{X_{n-k+1:n}}(x) = n! b_n p(a_n + b_n x) \frac{F^{n-k}(a_n + b_n x)(1 - F(a_n + b_n x))^{k-1}}{(n-k)!(k-1)!}$$

konverguoja į ribinio maksimumo skirstinio $H_{(k)}(x)$ tankį

$$h_{(k)}(x) = H'_{(k)}(x) = x^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} \cdot e^{-x^{-\alpha}} \frac{(x^{-\alpha})^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Kai $k = 1$, tai

$$h_{(1)} = x^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} \cdot e^{-x^{-\alpha}}.$$

Kai $k = 2$, tai

$$h_{(2)} = x^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} \cdot e^{-x^{-\alpha}} \cdot \frac{(x^{-\alpha})}{1}.$$

Kai $k = 3$, tai

$$h_{(3)} = x^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} \cdot e^{-x^{-\alpha}} \cdot \frac{(x^{-\alpha})^2}{2}.$$

Kai $k = 4$, tai

$$h_{(4)} = x^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} \cdot e^{-x^{-\alpha}} \cdot \frac{(x^{-\alpha})^3}{6}.$$

Konvergavimo greitį tirsime nagrinėdami skirtumą

$$\left| p_{X_{n-k+1:n}}(x) - h_{(k)}(x) \right|.$$

Šio skirtumo kitimo priklausomybė nuo n, x ir k tiriame atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Matome, kad k-tojo maksimumo skirstinys konverguoja greičiau prie ribinio skirstinio $h_{(k)}(x)$, kai x didėja ir k didėja. Grafinė analizė pateikta prieduose (žr. 5 priede 1, 2 pav.).

2.3.3. TOLYGIŲ INTERVALE (a,b) ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ k-TOJO MAKSIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $\{X_j\}$ turi tolygių intervale (a,b) skirstinį su skirstinio f-ja $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$, kai $a < x < b.$ ir tankiu $p(x) = \frac{1}{b-a}$. 2.1.3 skyrelyje parodėme, kad

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n < b + \frac{x(b-a)}{n} \right) = e^x.$$

Kadangi skirstinys tenkina 1.13 ir 1.14 teoremų sąlygas, tai k-tojo maksimumo tankis

$$p_{X_{n-k+1:n}}(x) = n! b_n p(a_n + b_n x) \frac{F^{n-k}(a_n + b_n x)(1 - F(a_n + b_n x))^{k-1}}{(n-k)!(k-1)!}$$

konverguoja į ribinio maksimumo skirstinio $H_{(k)}(x)$ tankį

$$h_{(k)}(x) = H'_{(k)}(x) = e^{-x} \frac{(-x)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Kai $k = 1$, tai

$$h_{(1)} = e^{-x}.$$

Kai $k = 2$, tai

$$h_{(2)} = e^{-x} \cdot \frac{(-x)}{1}.$$

Kai $k = 3$, tai

$$h_{(3)} = e^{-x} \cdot \frac{(-x)^2}{2}.$$

Kai $k = 4$, tai

$$h_{(4)} = e^{-x} \cdot \frac{(-x)^3}{6}.$$

Konvergavimo greitį tirsime nagrinėdami skirtumą

$$\left| p_{X_{n-k+1:n}}(x) - h_{(k)}(x) \right|.$$

Šio skirtumo kitimo priklausomybė nuo n, x ir k tiriame atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Matome, kad k-tojo maksimumo skirstinys konverguoja greičiau prie ribinio skirstinio $h_{(k)}(x)$, kai x mažėja. Grafinė analizė pateikta prieduose (žr. 6 priede 1, 2 pav.).

2.4. NEPRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TOJO MINIMUMO TANKIO ASIMPTOTIKA

Tarkime, kad $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ - nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka su pasiskirstymo funkcija $F(x)$ ir tankiu $p(x)$.

Pažymėkime

$$z_n(x) = nF(c_n + d_n x);$$

čia $\{c_n, n \geq 1\}$ ir $\{d_n > 0, n \geq 1\}$ - centravimo ir normavimo konstantų sekos. Tarkime, kad skirstinio funkcija $F(x)$ yra tokia, jog

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x) = z(x) > 0\,. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Tada

$$\lim_{n\to} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x) \qquad \textbf{(2.8)}$$

visuose L tolydumo taškuose; čia L- neišsigimusi skirstinio funkcija. Be to $L(x) = 1 - e^{-z(x)}$. Jei tenkinama (1.17) lygybė, sakysime, kad skirstinio funkcija F priklauso ribinio skirstinio L traukos sričiai (žymėsime $F \in D(L)$).

Pažymėkime,

$$p_{W_n}(x) = n(1 - F(c_n + d_n x))^{n-1} d_n p(c_n + d_n x)$$

čia $p_{W_n}(x)$ - atsitiktinio dydžio $\left(W_n - c_n\right)/ d_n$ tankis.

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti skirstinio funkcija F, kad tiesiškai normuoto minimumo tankis $p_{W_n}(x)$ konverguotų į ribinio skirstinio L tankį $L'(x)$, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_n}(x) = L'(x). \qquad \textbf{(2.9)}$$

2.1. Teorema. Tegul F pasiskirstymo funkcija turi $p(x)$ pasiskirstymo tankį. Jeigu $F \in D(L)$

a. $L = L_{1,\gamma}$, tai (2.9) sąryšis bus teisingas intervale $(-\infty;0)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(-x)$ yra teigiama, pakankamai dideliems x, ir $\gamma > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xp(-x)}{F(-x)} = \gamma$$

b. $L = L_{2,\gamma}$, tai (2.9) sąryšis bus teisingas intervale $(0,\infty)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(-x)$ yra teigiama, ir $\gamma > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\uparrow\alpha(F)} \frac{\left(\alpha(F) - x\right)p(-x)}{F(-x)} = \gamma\,,$$

čia $w(x) = \sup\{x : F(x) < 1\}$

c. $L = L_{3,\gamma}$, tai (2.9) sąryšis bus teisingas visiems x tada ir tik tada, kai tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\alpha(F)} \frac{d}{dx}\left(\frac{1 - F(-x)}{p(-x)}\right) = 0\,.$$

Atsižvelgę į sąryšį

$$\min(X_1,\ldots,X_n) = -\max(-X_1,\ldots,X_n)$$

šioje teoremoje suformuluotos sąlygos gaunamos analogiškai kaip ir 1.13 teoremos sąlygos.

Tiesiškai normuoto k-tojo minimumo ribinio skirstinio $L_{(k)}(x)$ tankį pažymėkime $l_{(k)}(x)$. Tada diferencijuodami gauname

$$l_{(k)}(x) = L'_{(k)}(x) = L'(x)\frac{(z(x))^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Tiesiškai normuoto k-tojo minimumo skirstinio tankį pažymėkime $p_{X_{k:n}}(x)$.

2.2. Teorema. Tarkime tenkinamos 1.12 ir 2.1 teoremų sąlygos, tai

$$\lim_{n\to\infty} p_{X_{k:n}}(x) = l_{(k)}(x).$$

Įrodymas. [4] darbe parodyta, kad

$$p_{X_{k:n}}(x) = n! d_n p(c_n + d_n x)\frac{(F(c_n + d_n x))^{k-1}(1 - F(c_n + d_n x))^{n-k}}{(n-k)!(k-1)!}.$$

Atlikę elementarius pertvarkymus, gauname

$$p_{X_{k:n}}(x) = nd_n p(c_n + d_n x)(1 - F(c_n + d_n x))^{n-1} \cdot \frac{(nF(c_n + d_n x))^{k-1}}{(k-1)!} \times$$
$$\times \frac{(n-1)...(n-k+1)}{n^{k-1}} \cdot \frac{1}{(1 - F(c_n + d_n x))^{k-1}}$$

Panaudoję įvestus pažymėjimus, gauname

$$p_{X_{k:n}}(x) = p_{W_n}(x)\frac{(z_n(x))^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{(1 - F(c_n + d_n x))^{k-1}}.$$

Perėję prie ribos, kai k fiksuotas, o $n \to \infty$, bei atsižvelgę į (2.7) ir (2.9) lygybes ir tai, kad $F(c_n + d_n x) \to 1$, gauname

$$\lim_{n\to\infty} p_{X_{k:n}}(x) = L'(x)\frac{(z(x))^{k-1}}{(k-1)!} = l_{(k)}(x).$$

Teorema įrodyta.

2.5. K-TŲJŲ MINIMUMŲ KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

2.5.1. EKSPONENTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TOJO MINIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS.

Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $\{X_j\}$ turi eksponentinį skirstinį su skirstinio f-ja $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$ ir tankiu $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .2.2.1skyrelyje parodėme, kad

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n < \frac{1}{n\lambda}\right) = 1 - e^{-x},\ x \geq 0.$$

Kadangi skirstinys tenkina 2.1 ir 2.2 teoremų sąlygas, tai k-tojo minimumo tankis

$$p_{X_{k:n}}(x) = n! d_n p(c_n + d_n x) \frac{(F(c_n + d_n x))^{k-1} (1 - F(c_n + d_n x))^{n-k}}{(n-k)!(k-1)!}$$

konverguoja į ribinio minimumo skirstinio $L_{(k)}(x)$ tankį

$$l_{(k)}(x) = L'_{(k)}(x) = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}} \frac{(x^{\gamma})^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Kai $k = 1$, tai

$$l_{(1)} = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}}.$$

Kai $k = 2$, tai

$$l_{(2)} = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}} \cdot x^{\gamma}.$$

Kai $k = 3$, tai

$$l_{(3)} = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}} \cdot \frac{x^{2\gamma}}{2}.$$

Kai $k = 4$, tai

$$l_{(4)} = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}} \cdot \frac{x^{3\gamma}}{6}.$$

Konvergavimo greitį tirsime nagrinėdami skirtumą

$$\left| p_{X_{k:n}}(x) - l_{(k)}(x) \right|.$$

Šio skirtumo kitimo priklausomybė nuo n, x ir k tiriame atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Matome, kad k-tojo minimumo skirstinys konverguoja greičiau prie ribinio skirstinio $l_{(k)}(x)$, kai x didėja ir k mažėja. Grafinė analizė pateikta prieduose (žr. 4 priede 3, 4 pav.).

2.5.2. PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TOJO MINIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $\{X_j\}$ turi pareto skirstinį su skirstinio f-ja $F(x) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}}$, kai $x > 1$ ir tankiu $p(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ .2.2.1skyrelyje parodėme, kad

$$\lim_{n \to \infty} P\left(W_n < 1 + \frac{1}{n\lambda} \right) = 1 - e^{-x}, \ x \ge 0.$$

Kadangi skirstinys tenkina 2.1 ir 2.2 teoremų sąlygas, tai k-tojo minimumo tankis

$$p_{X_{k:n}}(x) = n! d_n p(c_n + d_n x) \frac{(F(c_n + d_n x))^{k-1}(1 - F(c_n + d_n x))^{n-k}}{(n-k)!(k-1)!}$$

konverguoja į ribinio minimumo skirstinio $L_{(k)}(x)$ tankį

$$l_{(k)}(x) = L'_{(k)}(x) = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}} \frac{(x^{\gamma})^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Kai $k = 1$, tai

$$l_{(1)} = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}}.$$

Kai $k = 2$, tai

$$l_{(2)} = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}} \cdot x^{\gamma}.$$

Kai $k = 3$, tai

$$l_{(3)} = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}} \cdot \frac{x^{2\gamma}}{2}.$$

Kai $k = 4$, tai

$$l_{(4)} = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}} \cdot \frac{x^{3\gamma}}{6}.$$

Konvergavimo greitį tirsime nagrinėdami skirtumą

$$\left| p_{X_{k:n}}(x) - l_{(k)}(x) \right|.$$

Šio skirtumo kitimo priklausomybė nuo n, x ir k tiriame atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Matome, kad k-tojo minimumo skirstinys konverguoja greičiau prie ribinio skirstinio $l_{(k)}(x)$, kai x didėja ir k mažėja. Grafinė analizė pateikta prieduose (žr. 5 priede 3, 4 pav.).

2.5.3. TOLYGIŲ INTERVALE (a,b) ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ k-TOJO MINIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $\{X_j\}$ turi tolygių intervale (a,b) skirstinį su skirstinio f-ja $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$, kai $a < x < b$. ir tankiu $p(x) = \frac{1}{b-a}$.2.2.3 skyrelyje parodėme, kad

$$\lim_{n \to \infty} P\left(W_n < a + \frac{b-a}{n} \right) = 1 - e^{-x},\ x \geq 0.$$

Kadangi skirstinys tenkina 2.1 ir 2.2 teoremų sąlygas, tai k-tojo minimumo tankis

$$p_{X_{k:n}}(x) = n! d_n p(c_n + d_n x) \frac{(F(c_n + d_n x))^{k-1} (1 - F(c_n + d_n x))^{n-k}}{(n-k)!(k-1)!}$$

konverguoja į ribinio minimumo skirstinio $L_{(k)}(x)$ tankį

$$l_{(k)}(x) = L'_{(k)}(x) = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}} \frac{(x^{\gamma})^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Kai $k = 1$, tai

$$l_{(1)} = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}}.$$

Kai $k = 2$, tai

$$l_{(2)} = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}} \cdot x^{\gamma}.$$

Kai $k = 3$, tai

$$l_{(3)} = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}} \cdot \frac{x^{2\gamma}}{2}.$$

Kai $k = 4$, tai

$$l_{(4)} = x^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{x} \cdot e^{-x^{\gamma}} \cdot \frac{x^{3\gamma}}{6}.$$

Konvergavimo greitį tirsime nagrinėdami skirtumą

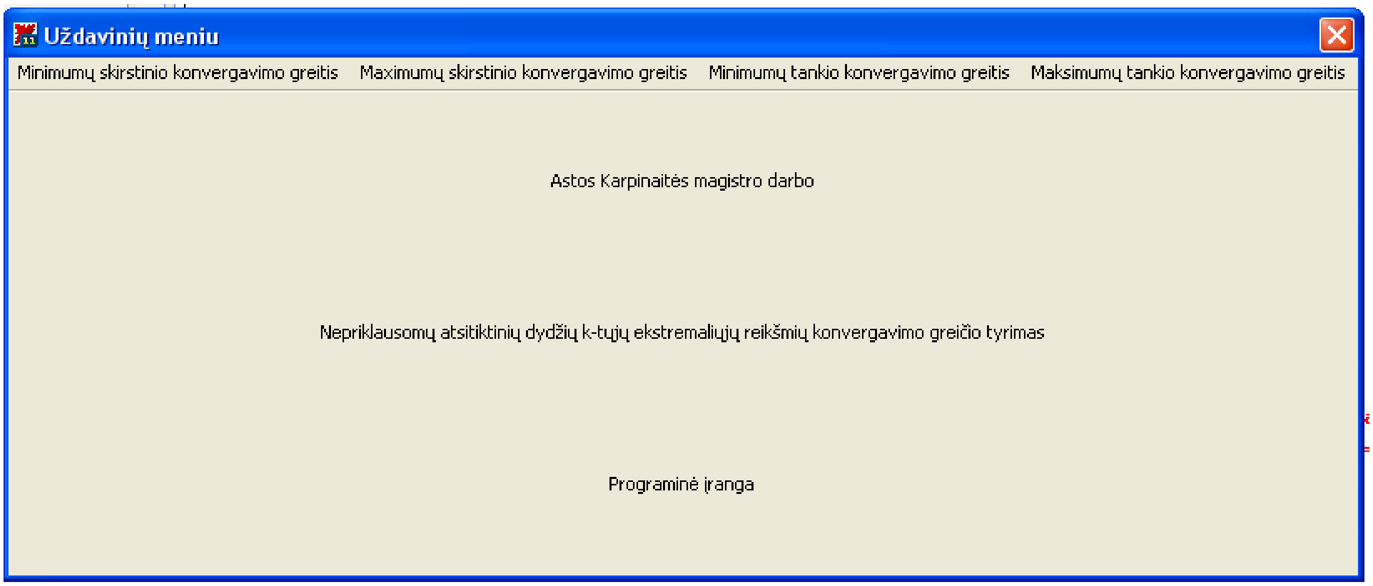
$$\left| p_{X_{k:n}}(x) - l_{(k)}(x) \right|.$$

Šio skirtumo kitimo priklausomybė nuo n, x ir k tiriame atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Matome, kad k-tojo minimumo skirstinys konverguoja greičiau prie ribinio skirstinio $l_{(k)}(x)$, kai x didėja. Grafinė analizė pateikta prieduose (žr. 6 priede 3, 4 pav.).

2.6. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

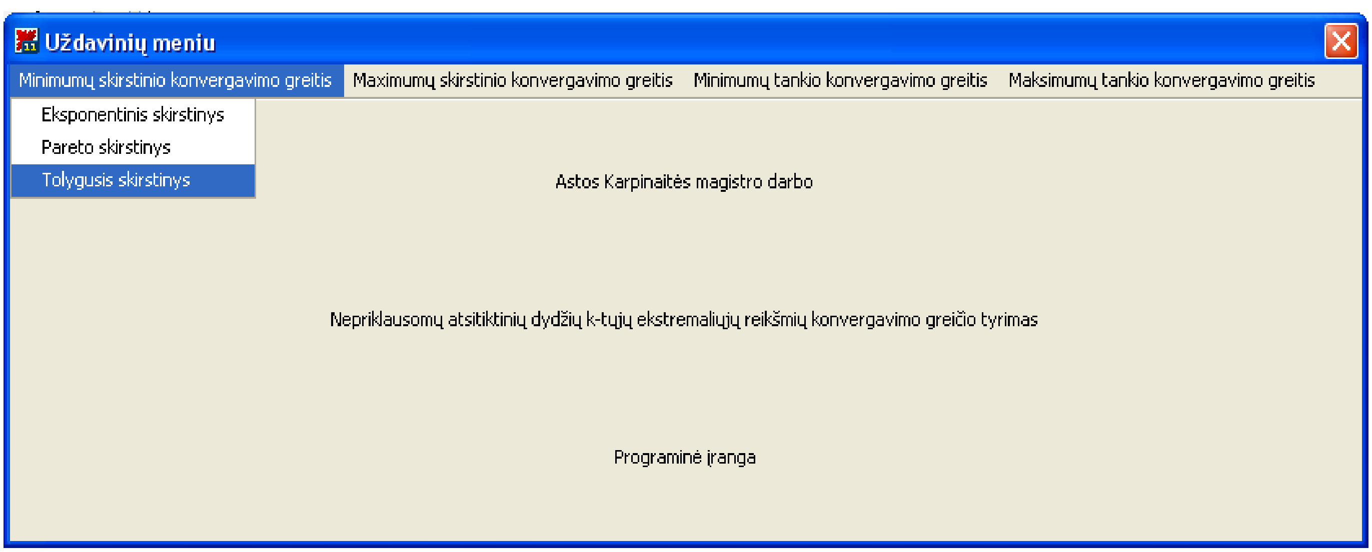
Programa parašyta Maple programavimo kalba. Ši programavimo kalba yra patogi uždavinių sprendimui ir sąsajos vartotojui kūrimui.

Atsidarius bylą „Astos Karpinaitės magistrinis“ ir paleidus programą matome pagrindinį uždavinių meniu.



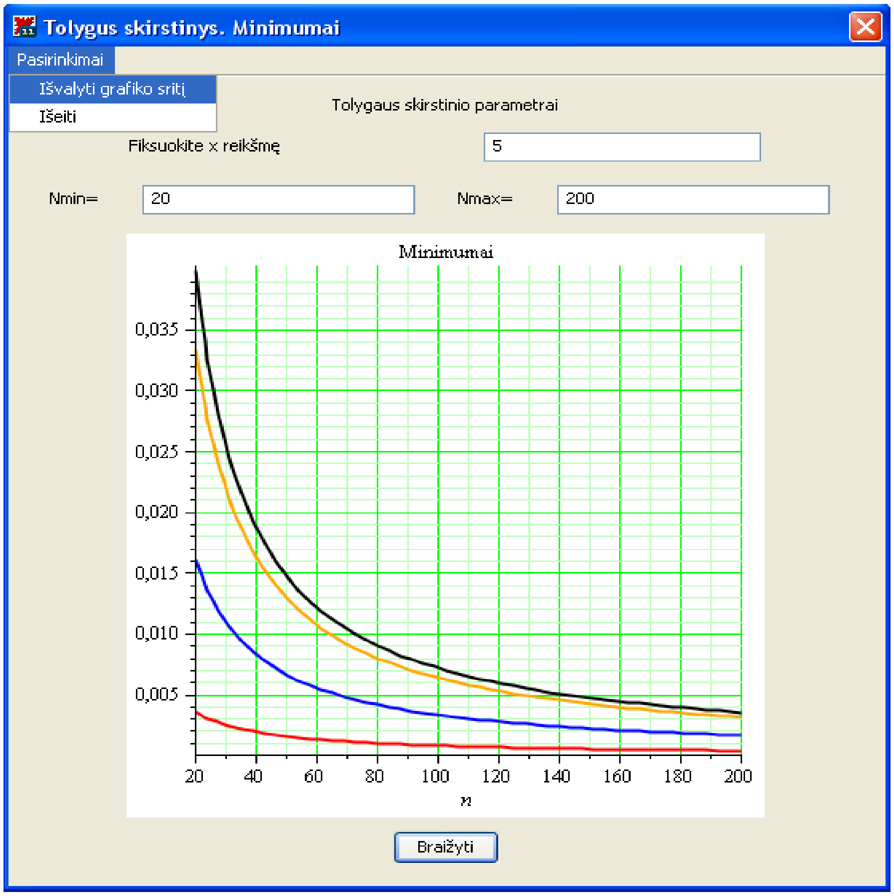
2.6.1 pav. Pagrindinis uždavinių meniu langas.

Viršuje, menių juostoje, vartotojas gali pasirinkti uždavinį: minimumų skirstinio konvergavimo greičio tyrimas, maksimumų skirstinio konvergavimo greičio tyrimas, minimumų tankio konvergavimo greičio tyrimas ar maksimumų tankio konvergavimo greičio tyrimas. Užvedus kompiuterine pele ant norimos užduoties išsiskleidžia trys pasirinkimo variantai (2.6.2 paveikslas).



2.6.2. Skirstinio pasirinkimo galimybės.

Pasirinkus bet kurį iš trijų skirstinių, pasirodo jį atitinkantis meniu (2.6.3 paveikslas).



2.6.3 Grafikas tolygaus skirstinio atveju.

Užpildžius visus laukelius vienu pelės spragtelėjimu ant mygtuko „Braižyti“ aktyvuojame skaičiavimo procesą šiam uždaviniui. Viršuje, kairiąjame lango kampe, galime pasirinkti išvalyti grafiko sritį arba išeiti.

IŠVADOS

Šiame darbe tyrėme nepriklausomų atsitiktinių dydžių k-tųjų ekstremaliųjų reikšmių konvergavimo greitį. Taip pat nagrinėjome nepriklausomų atsitiktinių dydžių k-tųjų ekstremaliųjų reikšmių tankių konvergavimo greitį.

1. Nagrinėtų skirstinių atveju galime pastebėti, kad nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo ir k-tojo minimumo konvergavimo į ribinį skirstinį greitis yra panašus kaip maksimumo ir minimumo. Kadangi yra parodyta, kad šių skirstinių atveju paklaidos eilė n atžvilgių yra lygi 1/n, tai galima daryti prielaidą, kad ir k-tųjų ekstremaliųjų reikšmių konvergavimo greičio eilė lygi 1/n.

2. Eksponentinio skirstinio atveju:

- k-tojo maksimumo paklaida mažėja, kai x didėja. Paklaidos reikšmė mažėja, kai k didėja, o x reikšmės pakankamai didelės.
- k-tojo minimumo paklaida mažėja, kai x didėja. Paklaidos reikšmė mažėja, kai k mažėja.
- k-tojo maksimumo tankio paklaida mažėja, kai x didėja. Paklaidos reikšmė mažėja, kai k didėja.
- k-ojo minimumo tankio paklaida mažėja, kai x didėja. Paklaidos reikšmė mažėja, kai k mažėja.
- parametras λ konvergavimo greičiui įtakos neturi.

3. Pareto skirstinio atveju

- k-tojo maksimumo paklaida mažėja, kai x didėja. Paklaidos reikšmė mažėja, kai k didėja, išskyrus tą atvejį, kai x reikšmės artimos vienetui.
- k-tojo minimumo paklaida mažėja, kai x didėja. Paklaidos reikšmė mažėja, kai k mažėja, o x reikšmės pakankamai didelės.
- k-tojo maksimumo tankio paklaida mažėja, kai x didėja. Paklaidos reikšmė mažėja, kai k didėja, išskyrus tą atvejį, kai x reikšmės artimos vienetui. Parametrui α didėjant paklaidos reikšmė mažėja.
- k-ojo minimumo tankio paklaida mažėja, kai x didėja. Paklaidos reikšmė mažėja, kai k mažėja, išskyrus tą atvejį, kai x reikšmės artimos vienetui. Parametrui α didėjant paklaidos reikšmė mažėja.

4. Tolygių intervale (a,b) skirstinio atveju

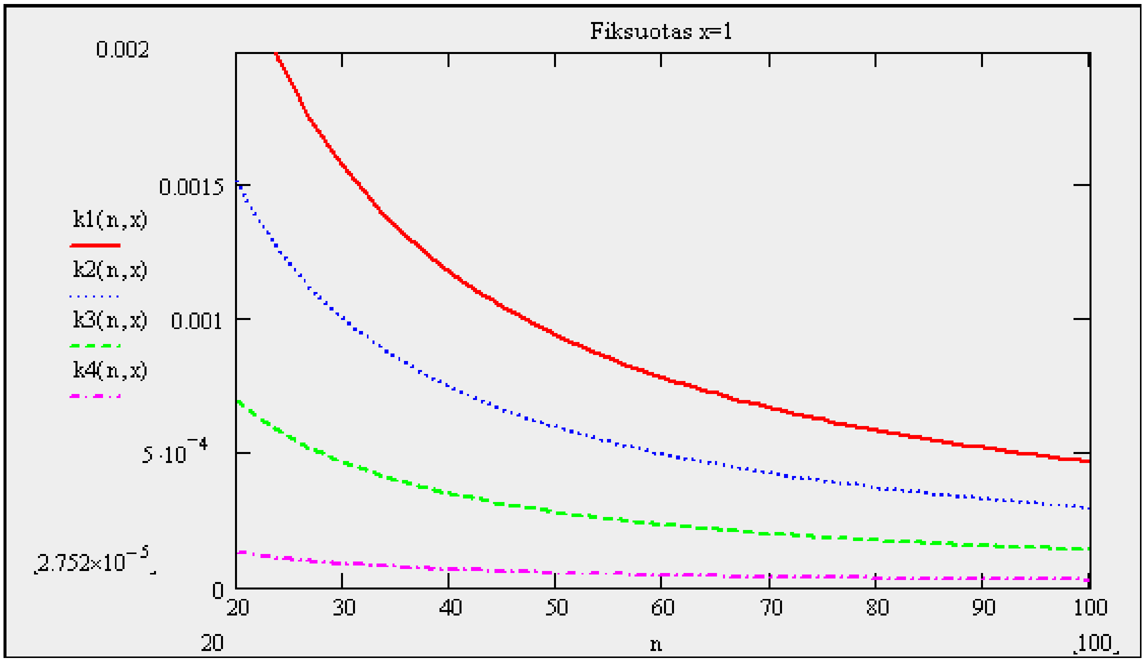
- k-tojo maksimumo paklaida mažėja, kai x mažėja.
- k-tojo minimumo paklaida mažėja, kai x didėja

- k-tojo maksimumo tankio paklaida mažėja, kai x mažėja.
- k-ojo minimumo tankio paklaida mažėja, kai x didėja.
- Parametrai a ir b konvergavimo greičiui įtakos neturi.

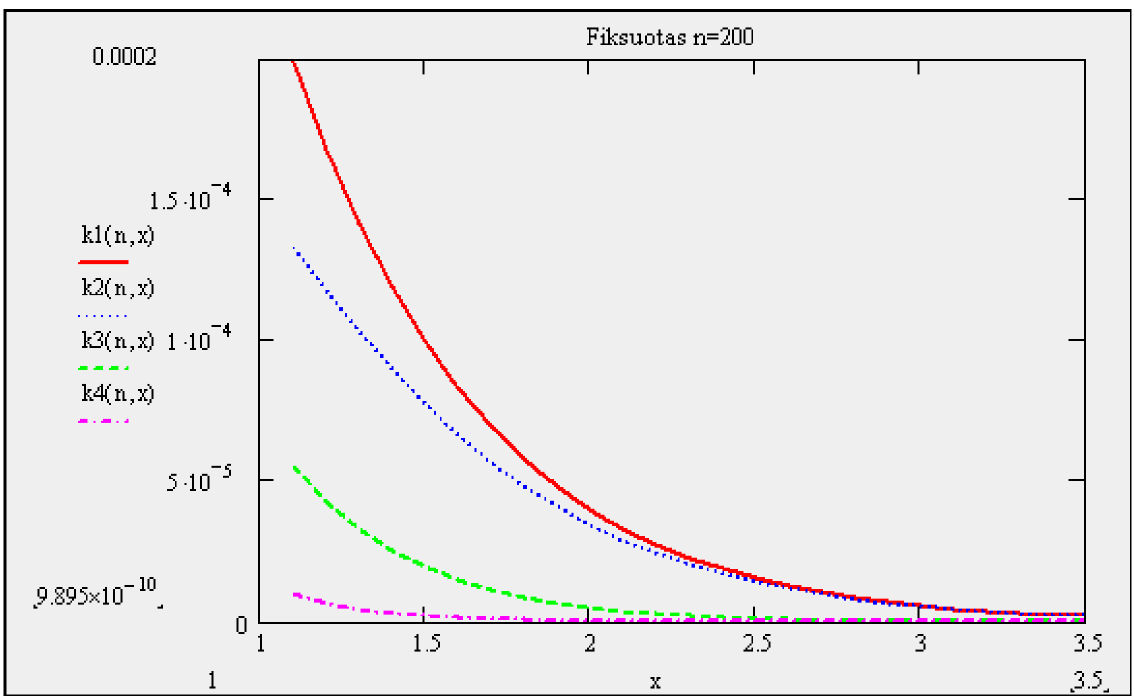
LITERATŪRA

1. J. Galambos. The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics. New York: Wiley, 1978.
2. S.I. Resnick. Extreme Values, Regular variation, and Point Processes. New York: Springer, 1987.
3. A. Jokimaitis. Nepriklausomų atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo tankio asimptotika.//LMD XLVII Konferencijos mokslo darbai, Vilnius, 2006, T.46. spec. nr. p. 442-444.
4. R. –D. Reiss, Approximate Distribution of Order Statistics. New York: Sringer , 1989.
5. Ed. J. Galambos. Extreme Value Theory and Applications. Dordrecht: Kluver, 1994. p. 519.
6. Ed. H. Rootren. Extreme Values in Finance, Telecommunication, and the Environment. New York: Chopman&Hall, 2004. p. 405.
7. S. Coles. An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values. London: Springer. 2001.

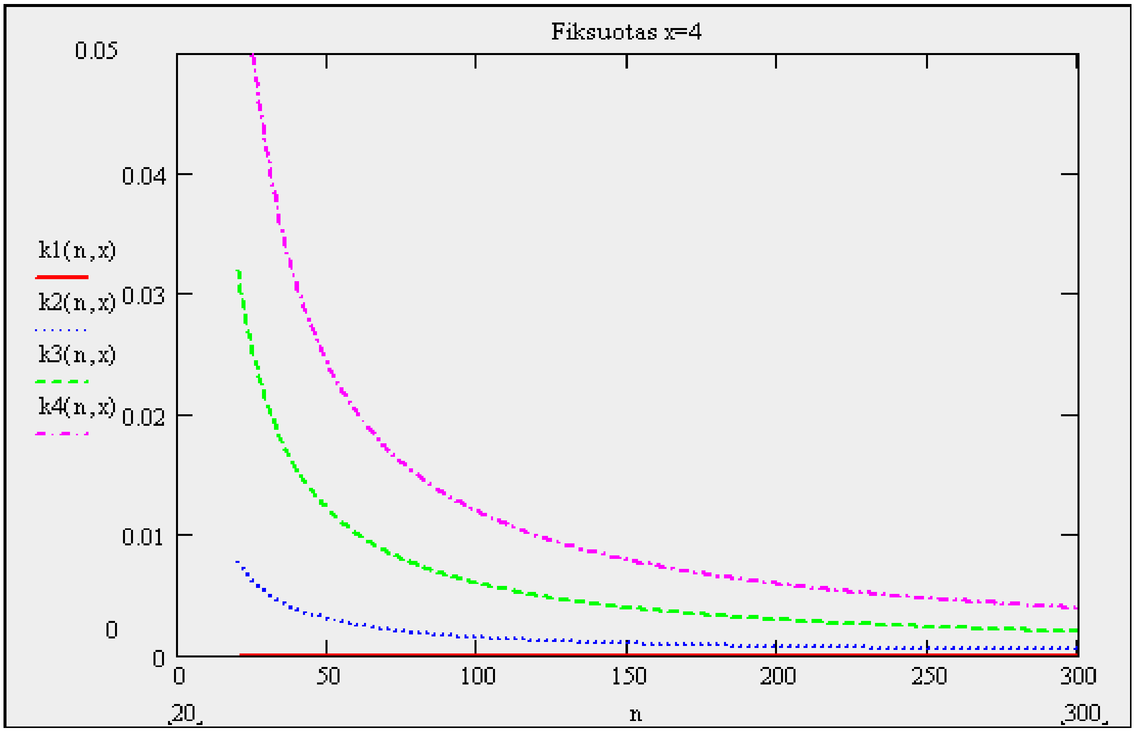
1 PRIEDAS. EKSPONENTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TŲJŲ EKSTREMUMŲ KONVERGAVIMO GREIČIO GRAFINIS VAIZDAVIMAS



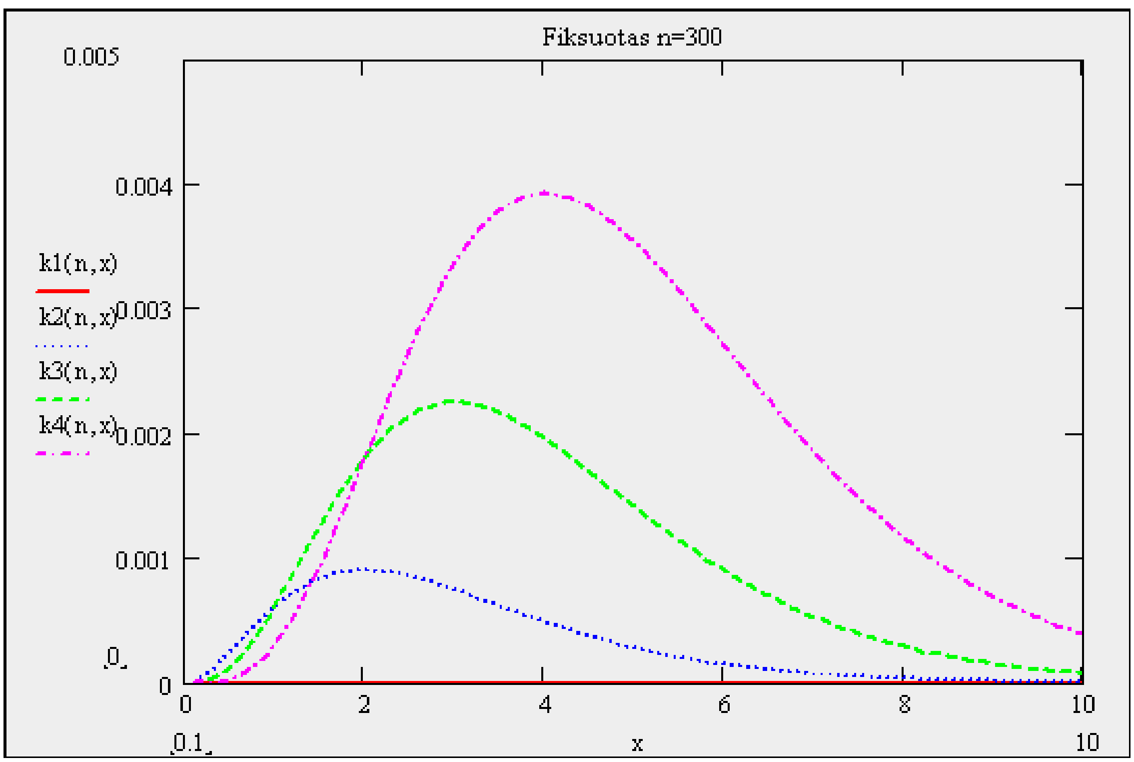
1.1 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.



1.2 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

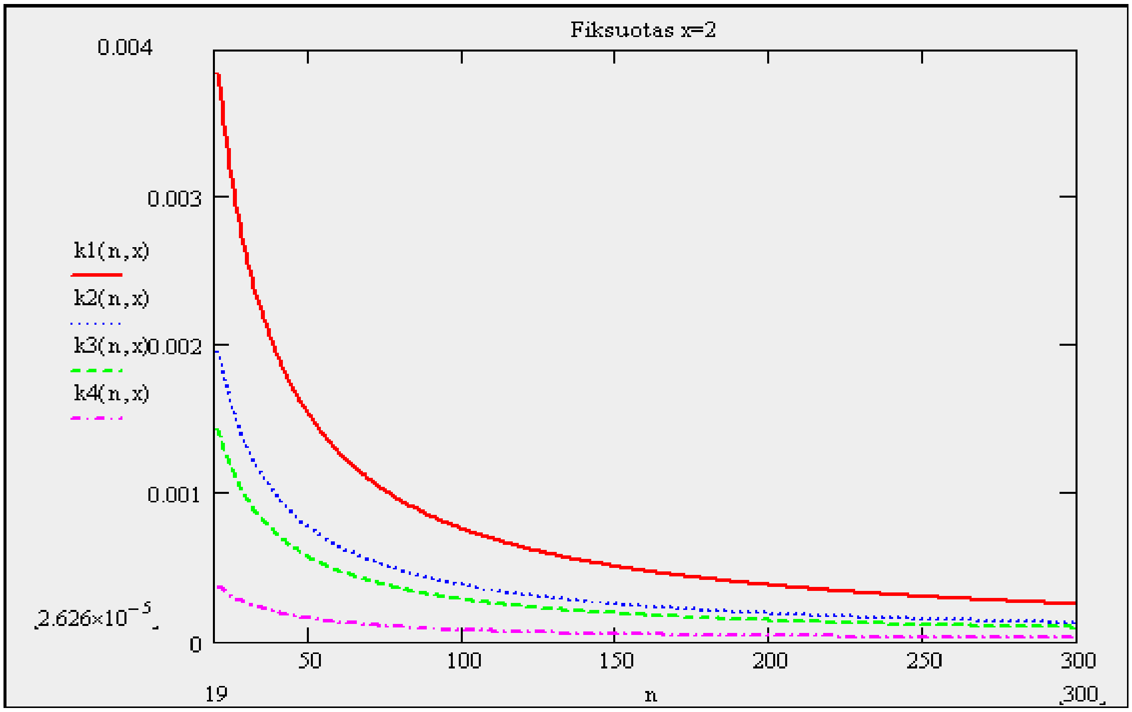


1.3 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių k-tojo minimumo konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.

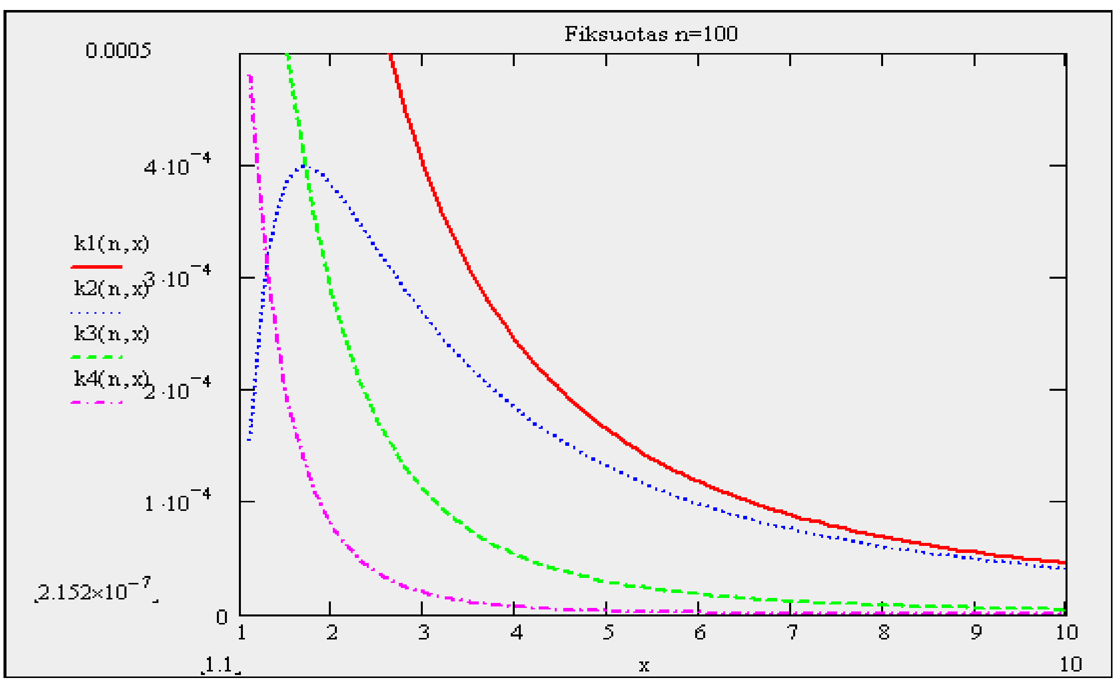


1.4 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių k-tojo minimumo konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

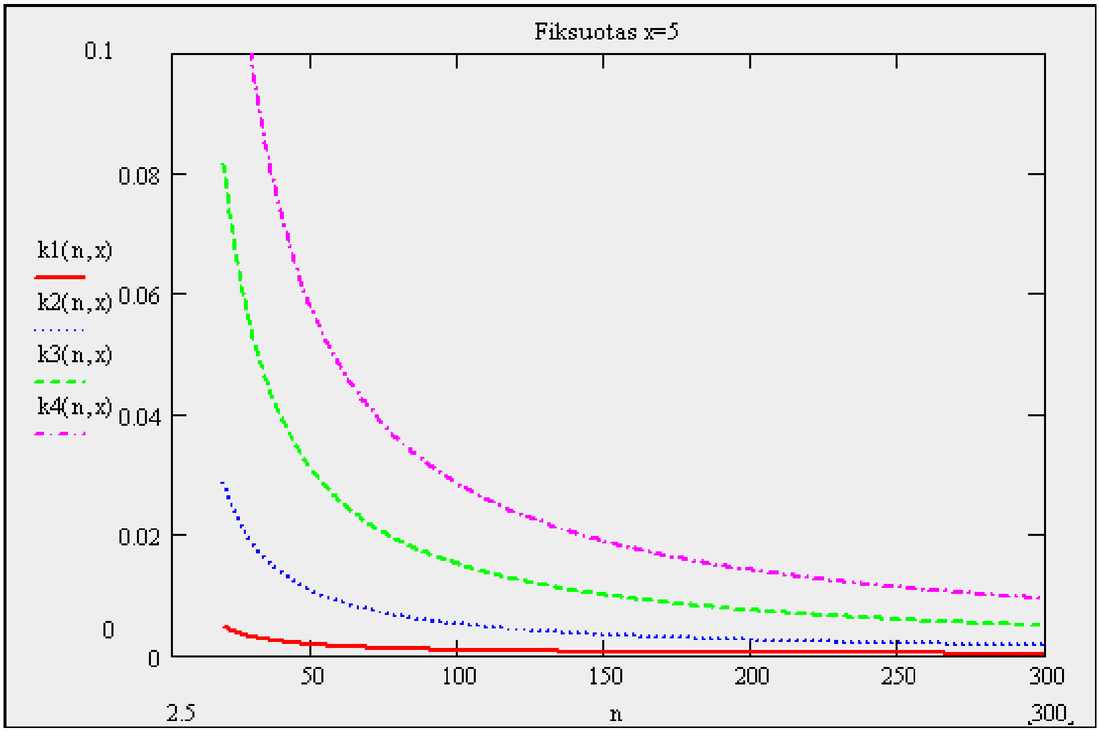
2 PRIEDAS. PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-ŲJŲ EKSTREMUMŲ KONVERGAVIMO GREIČIO GRAFINIS VAIZDAVIMAS



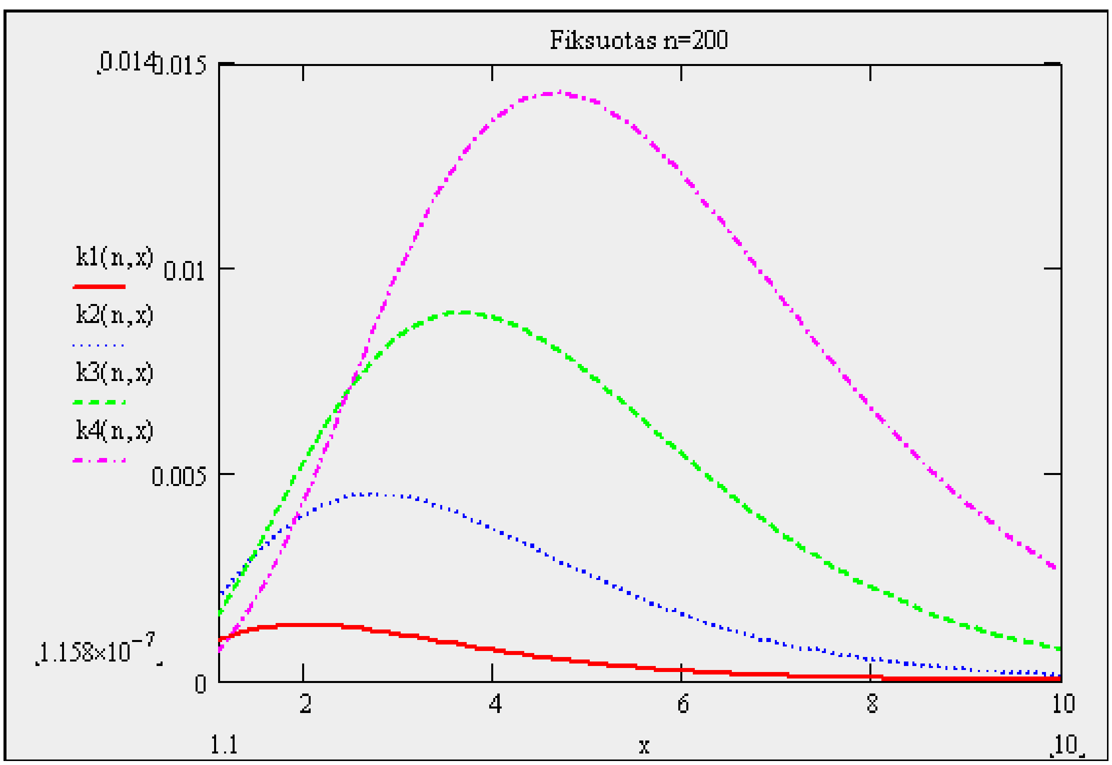
2.1 pav. Pareto atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.



2.2 pav. Pareto atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

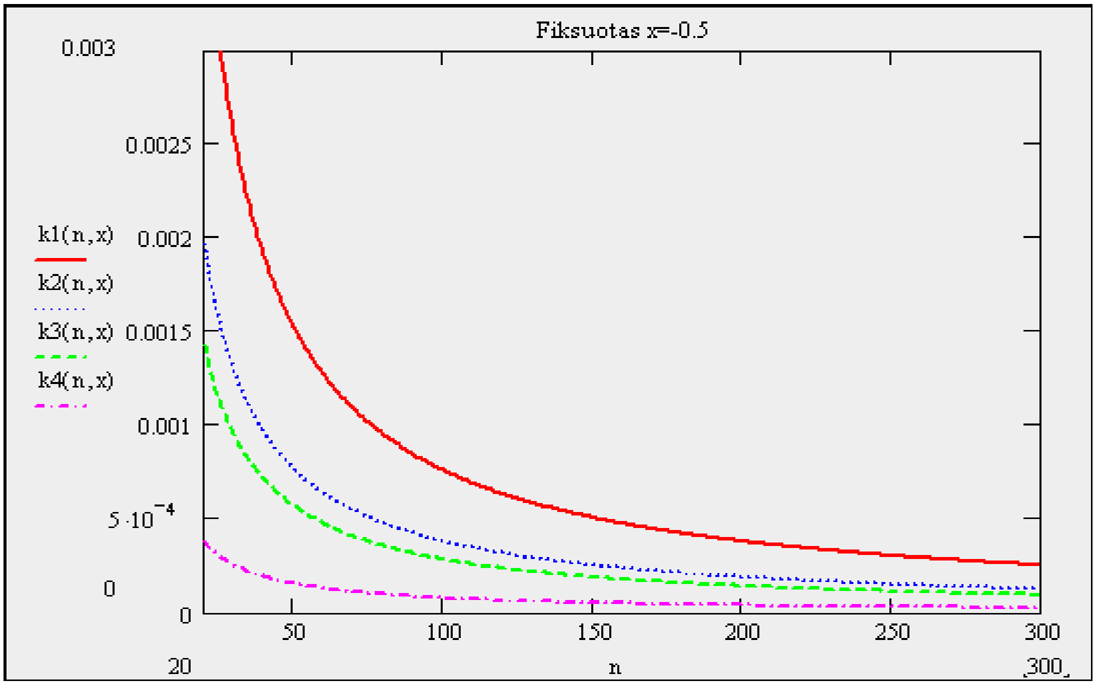


2.3 pav. Pareto atsitiktinių dydžių k-tojo minimumo konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.

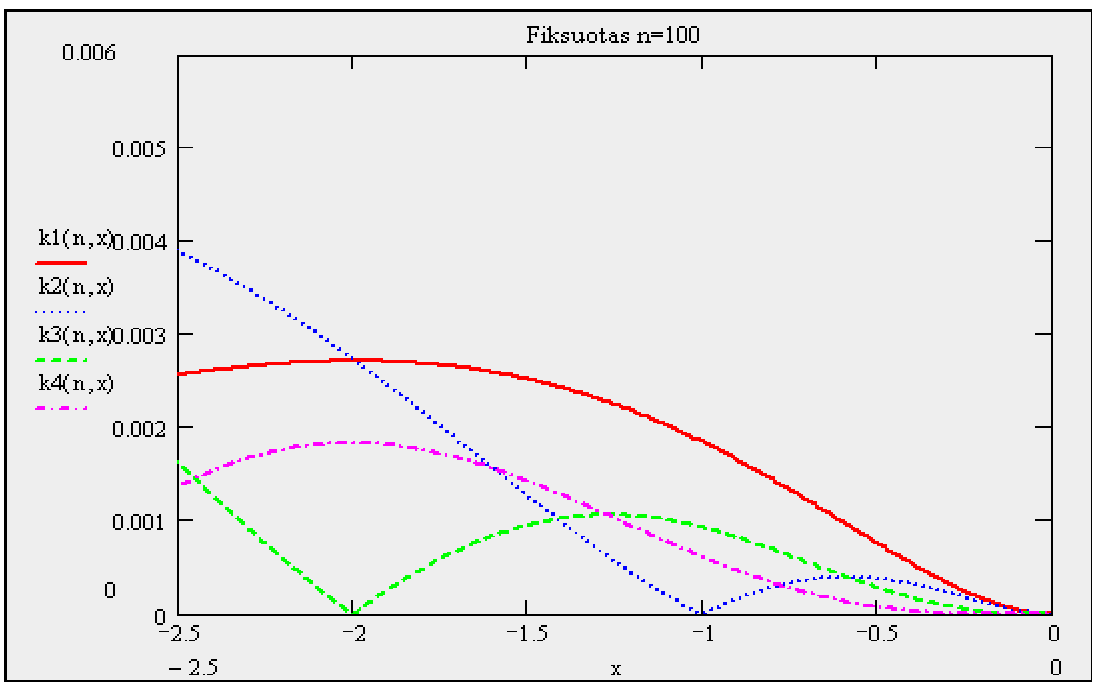


2.4 pav. Pareto atsitiktinių dydžių k-tojo minimumo konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

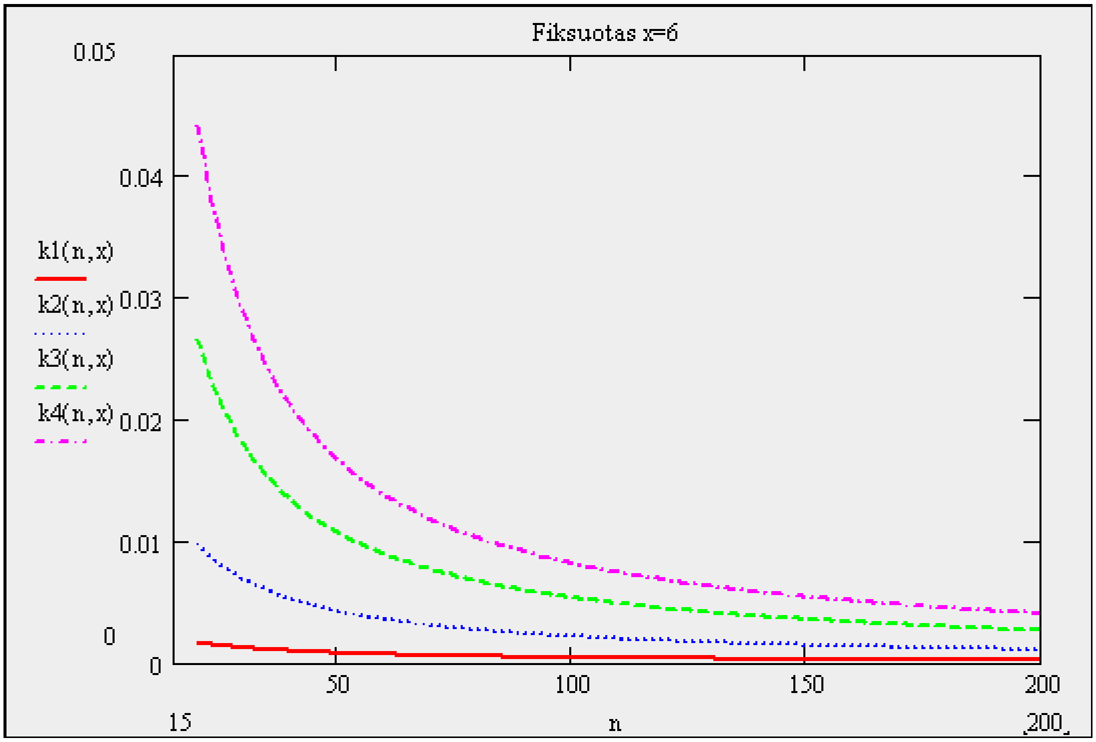
3 PRIEDAS. TOLYGIŲ INTERVALE (a,b) ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TŲJŲ EKSTREMUMŲ KONVERGAVIMO GREIČIO GRAFINIS VAIZDAVIMAS



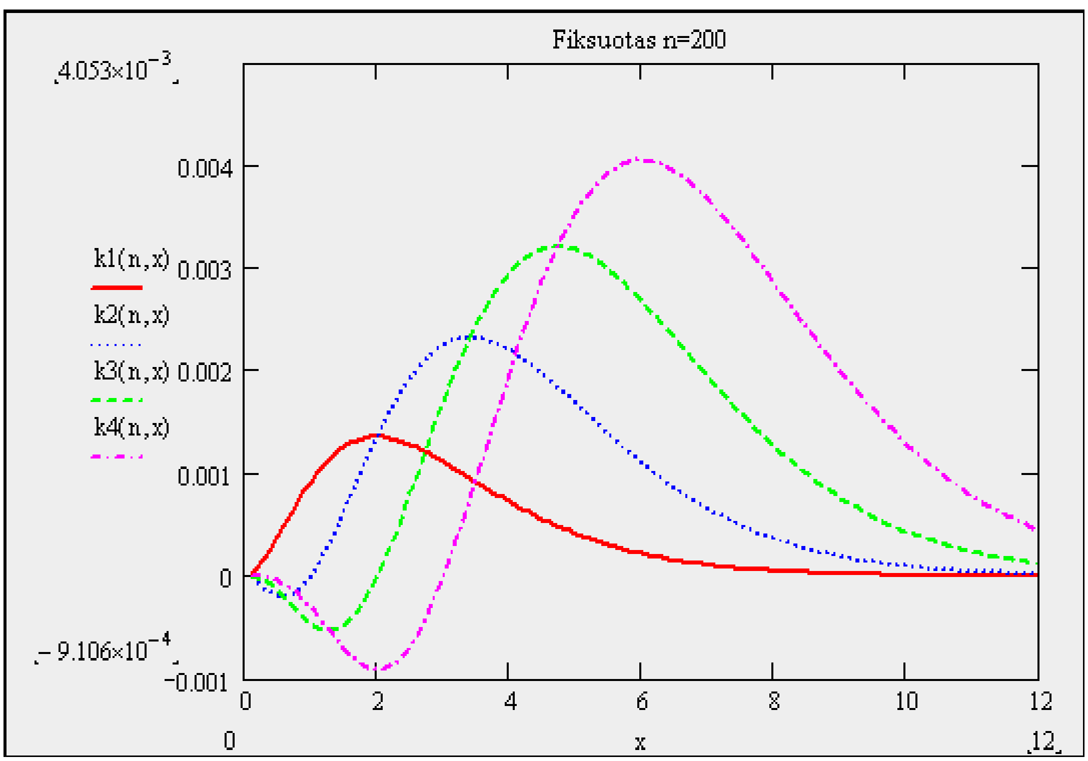
3.1 pav. Tolygių intervale (a,b) atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.



3.2 pav. Tolygių intervale (a,b) atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

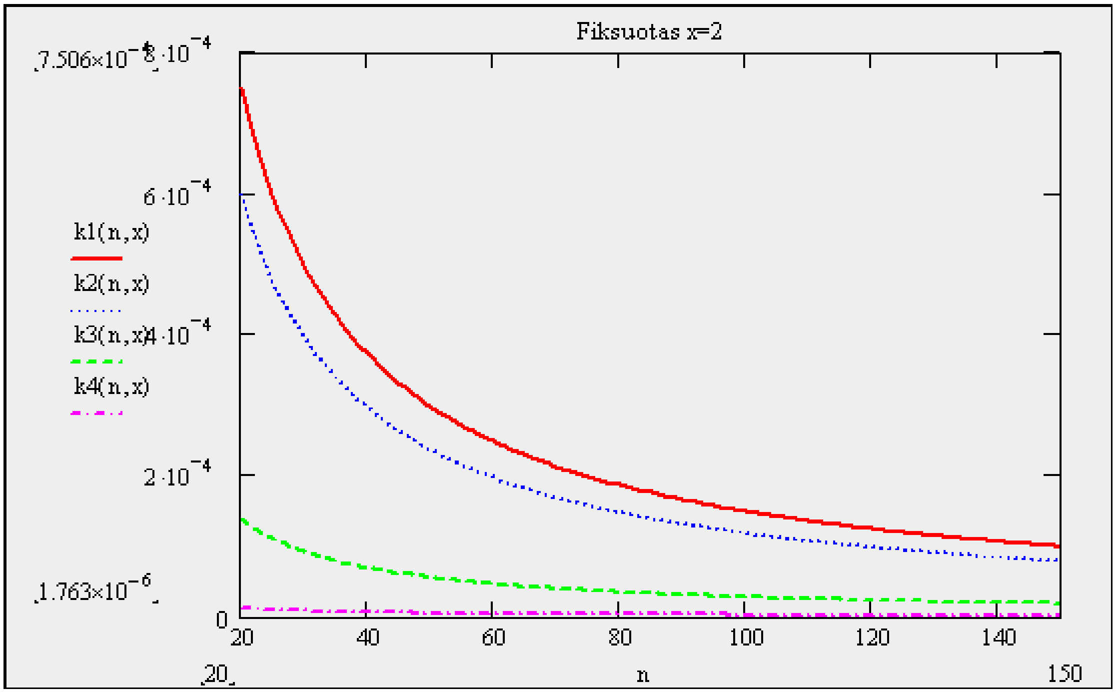


3.3 pav. Tolygių intervale (a,b) atsitiktinių dydžių k-tojo minimumo konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.

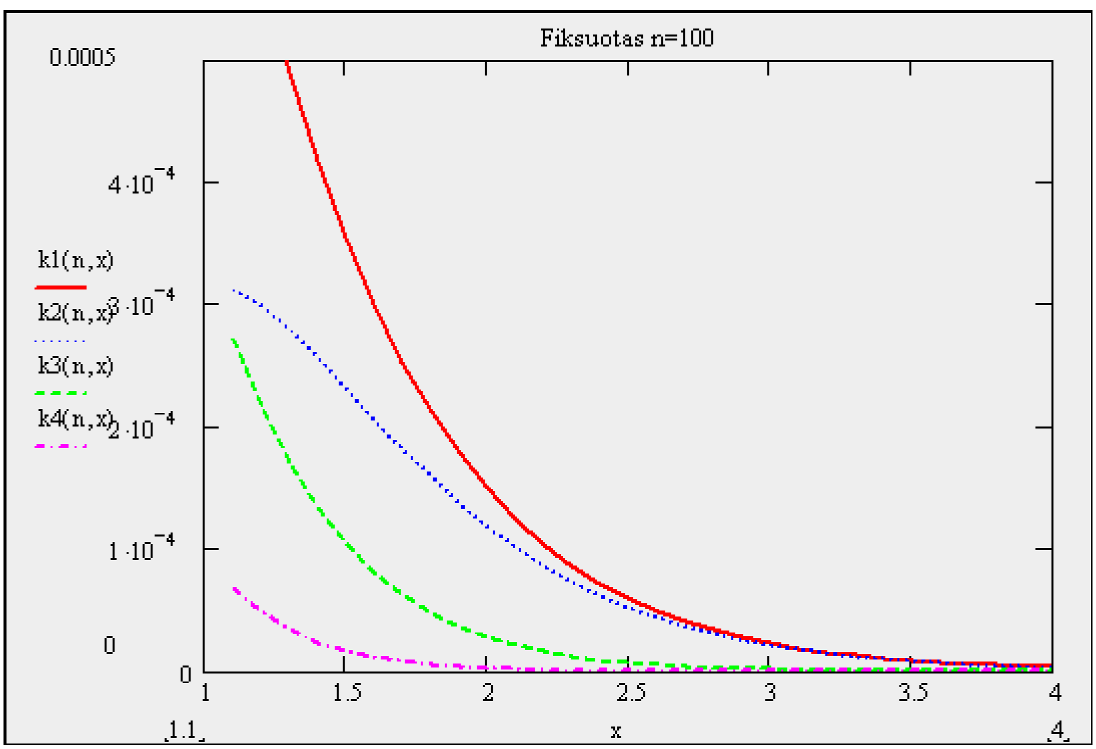


3.4 pav. Tolygių intervale (a,b) atsitiktinių dydžių k-tojo minimumo konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

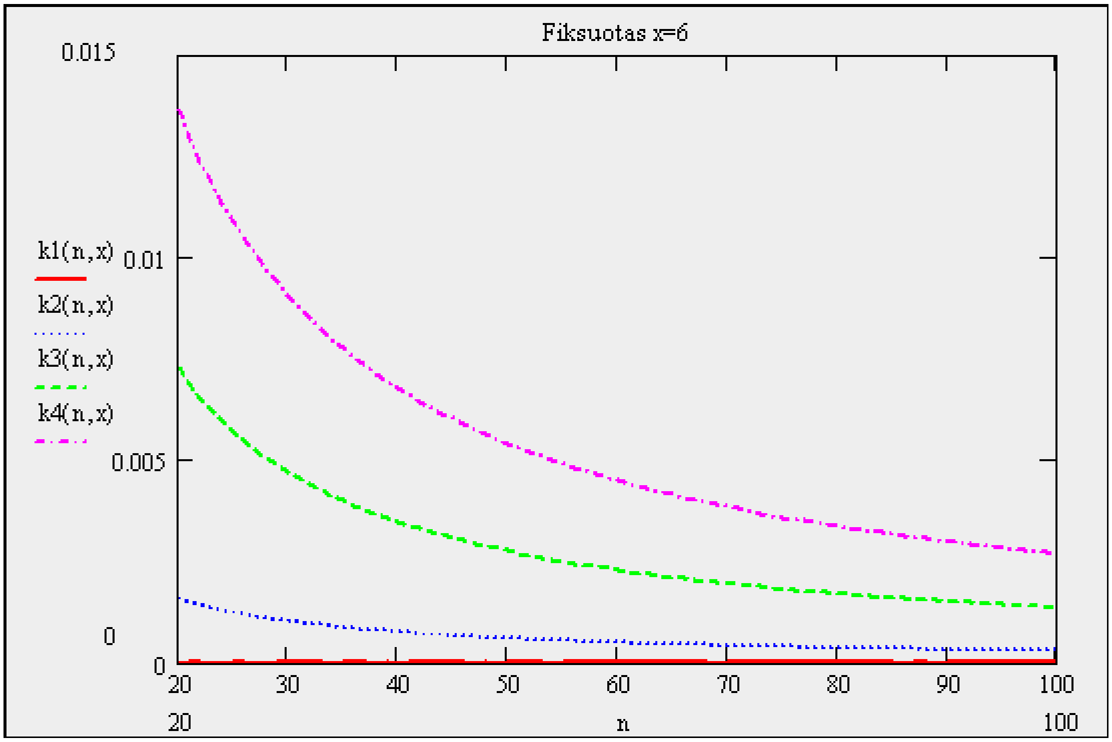
4 PRIEDAS. EKSPONENTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TŲJŲ EKSTREMUMŲ TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO GRAFINIS VAIZDAVIMAS



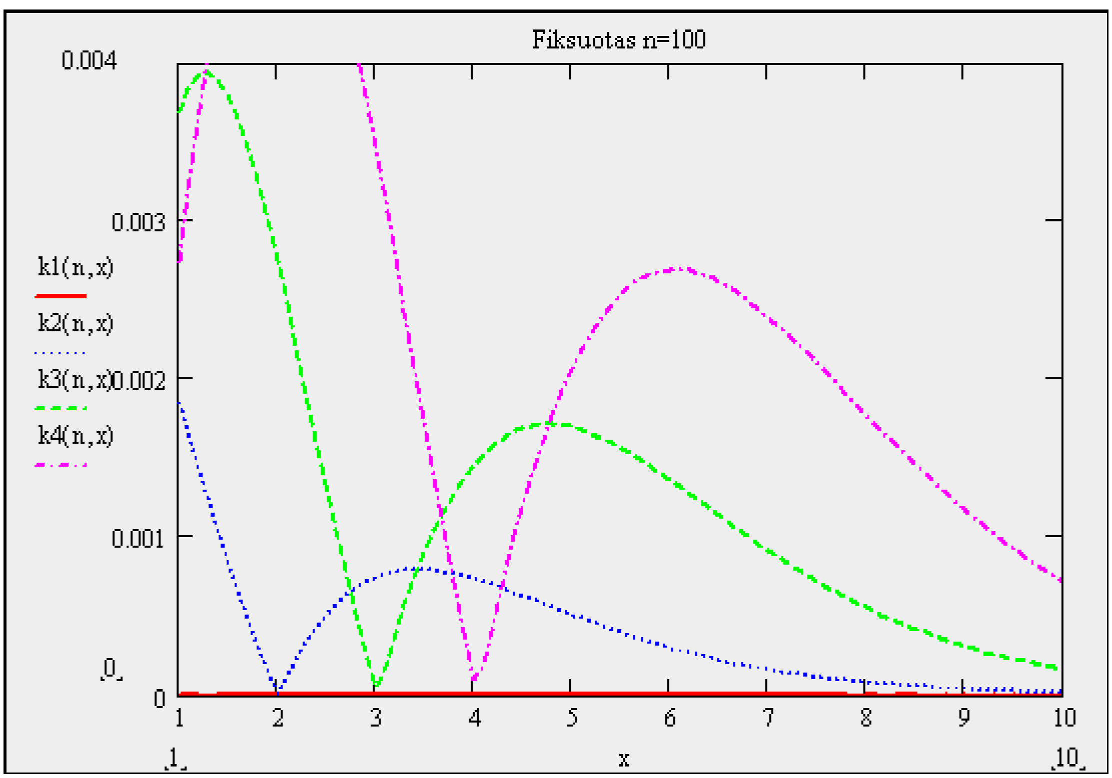
4.1 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.



4.2 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

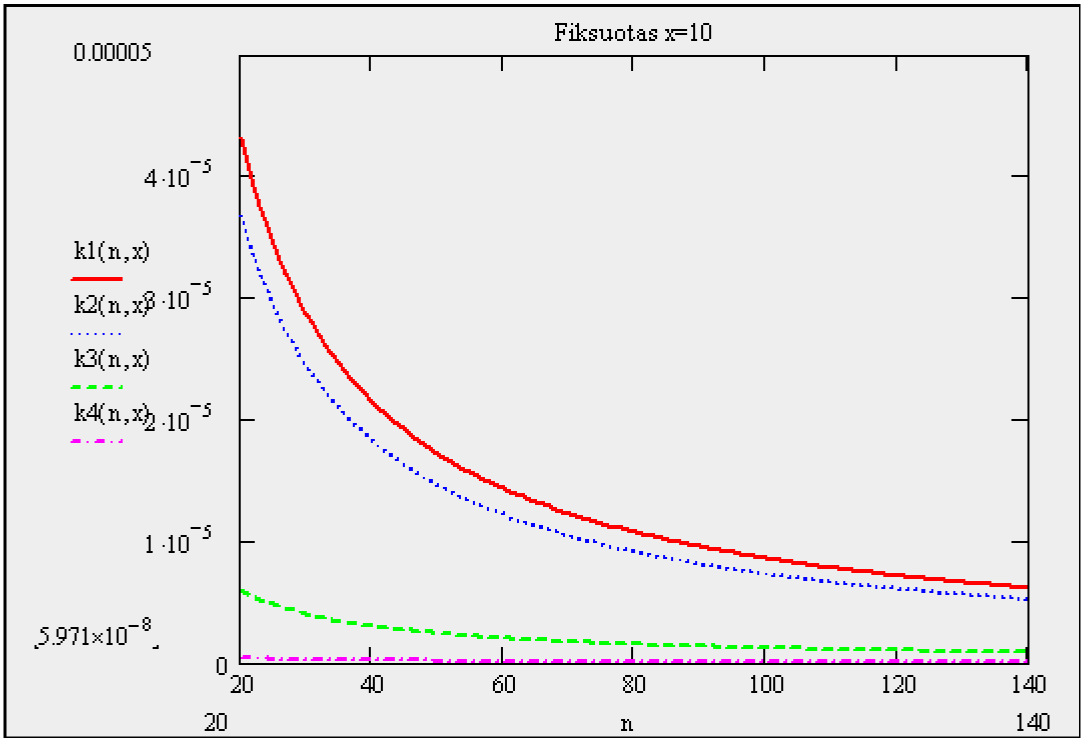


4.3 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių k-tojo minimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.

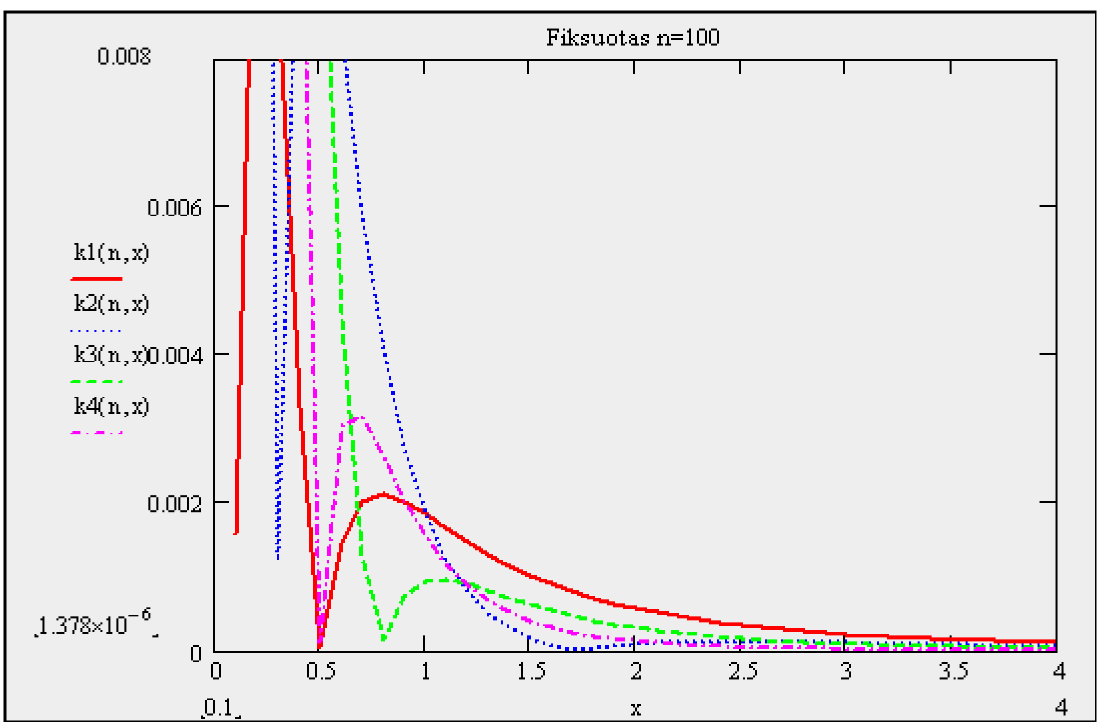


4.4 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių k-tojo minimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

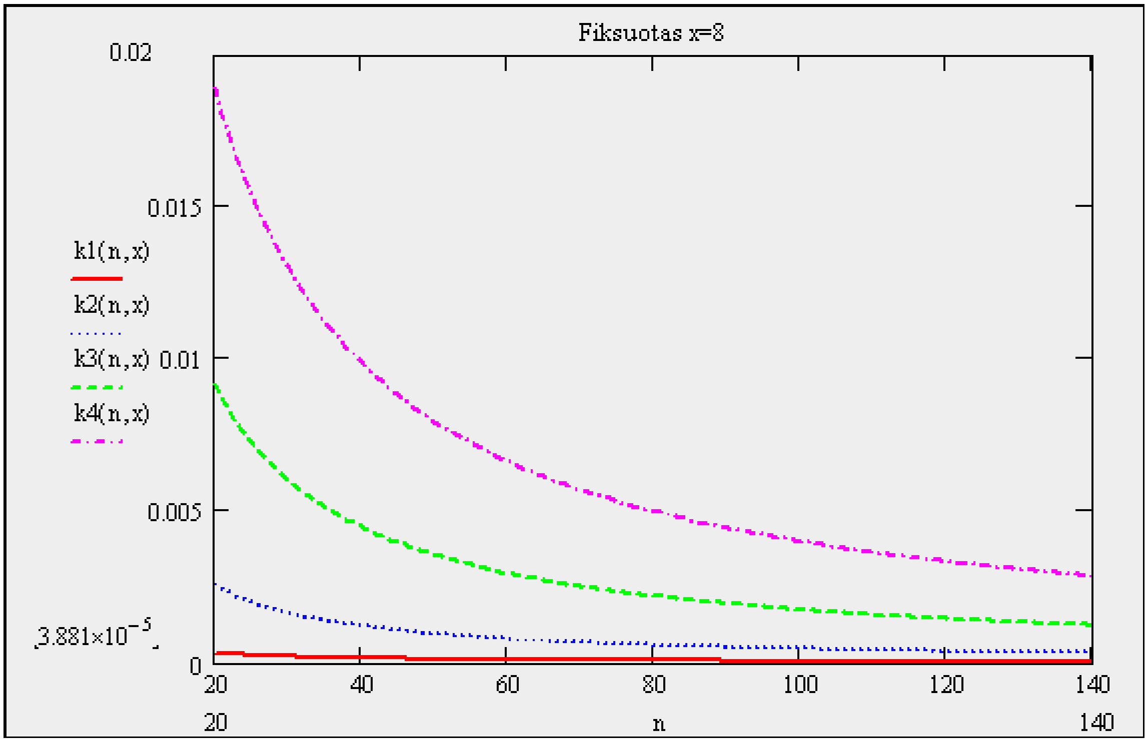
5 PRIEDAS. PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TŲJŲ EKSTREMUMŲ TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO GRAFINIS VAIZDAVIMAS



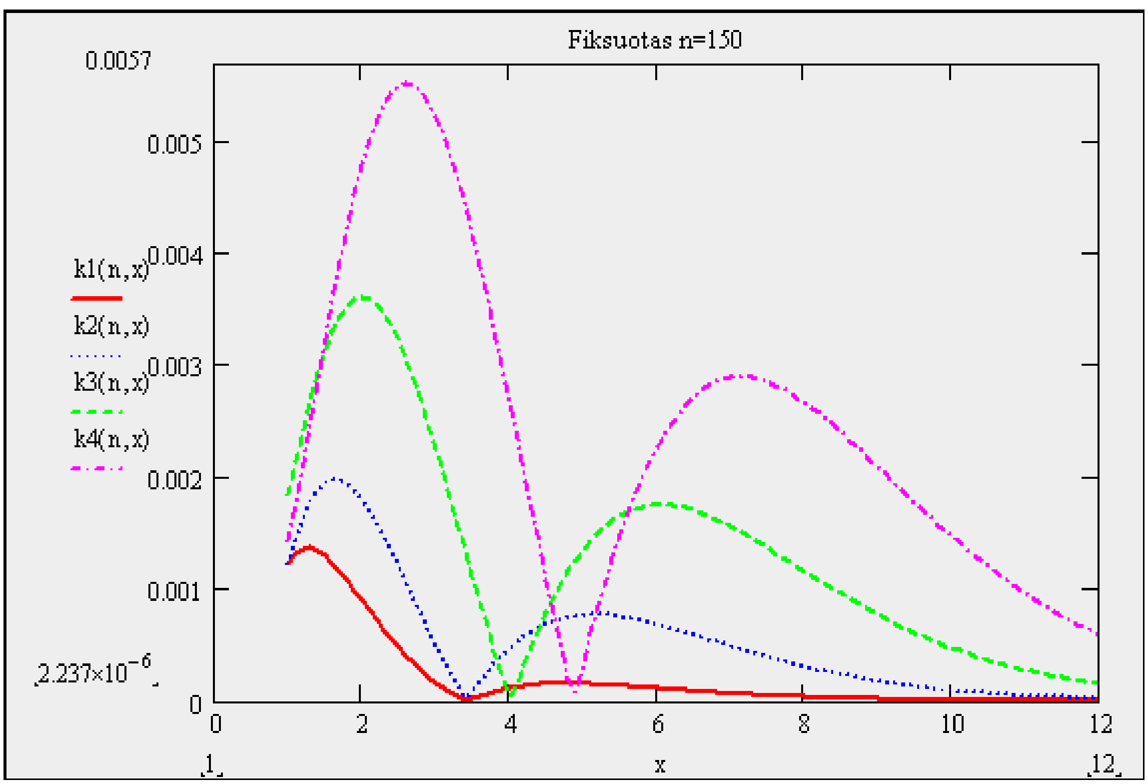
5.1 pav. Pareto atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.



5.2 pav. Pareto atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

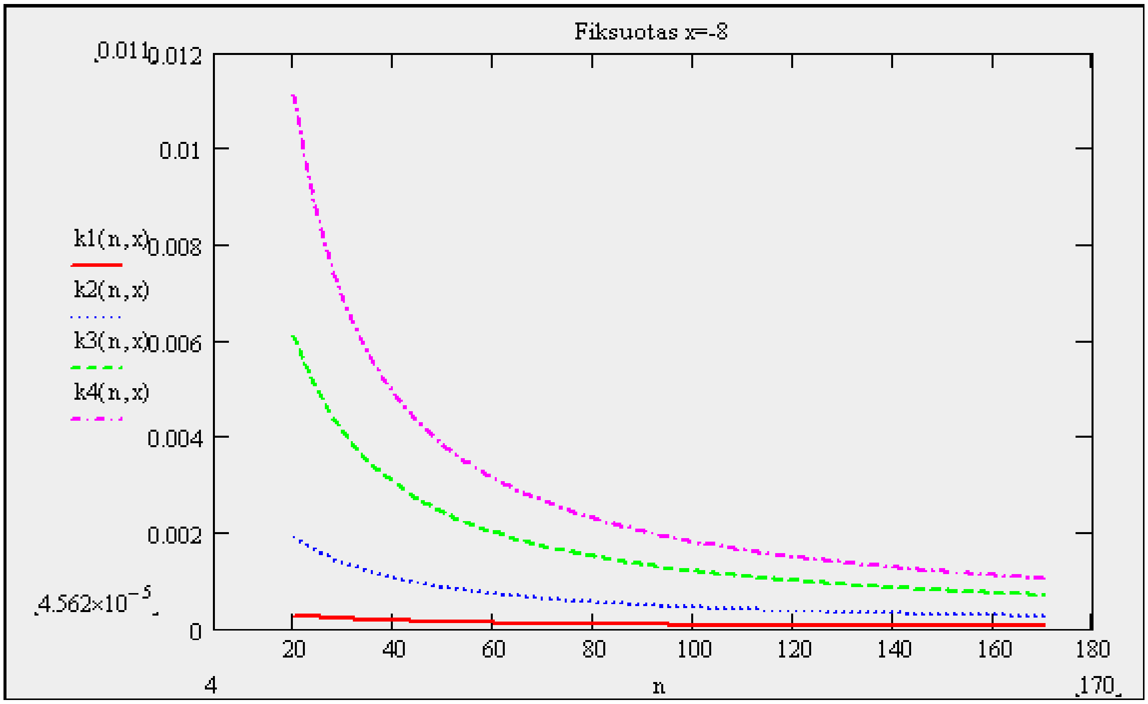


5.3 pav. Pareto atsitiktinių dydžių k-tojo minimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.

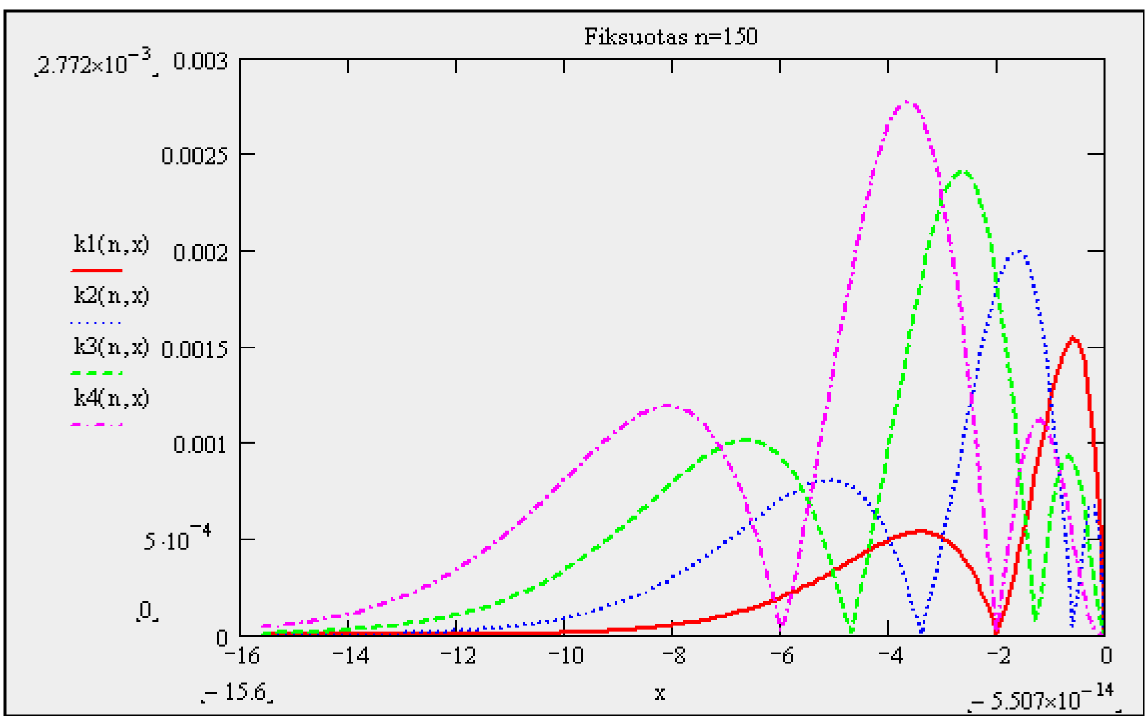


5.4 pav. Pareto atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

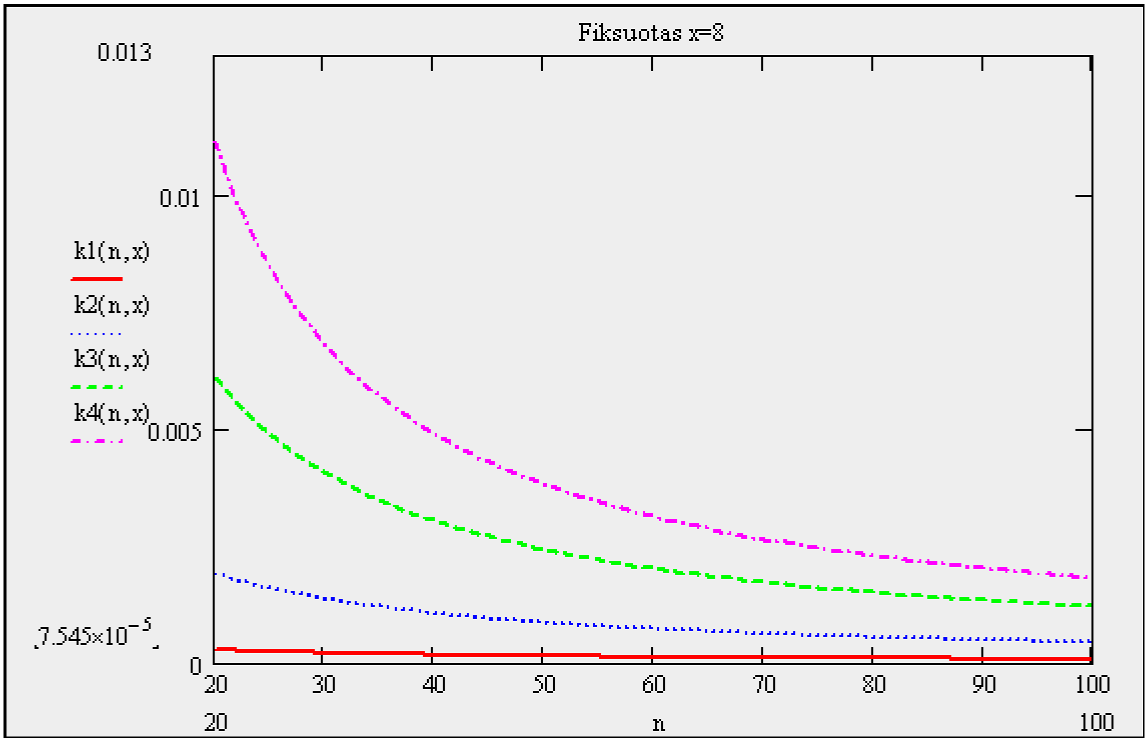
6 PRIEDAS. TOLYGIŲ INTERVALE (a,b) ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ K-TŲJŲ EKSTREMUMŲ TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO GRAFINIS VAIZDAVIMAS



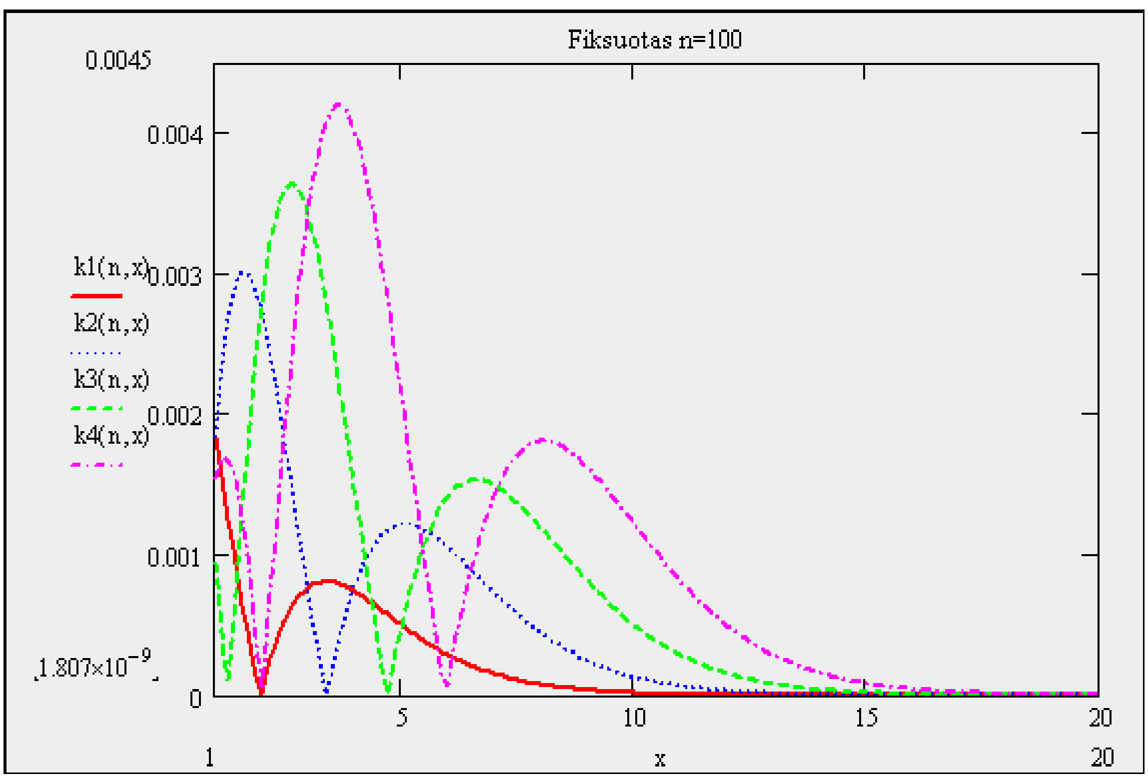
6.1 pav. Tolygių intervale (a,b) atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.



6.2 pav. Tolygių intervale (a,b) atsitiktinių dydžių k-tojo maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.



6.3 pav. Tolygių intervale (a,b) atsitiktinių dydžių k-tojo minimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.



6.4 pav. Tolygių intervale (a,b) atsitiktinių dydžių k-tojo minimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.