



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**Aušra Kuzmickienė**

**Tarpusavio sinchronizacijos sistemos  
matematinio modelio sudarymas ir tyrimas**

Magistro darbas

**Vadovas**  
**prof. dr. J. Rimas**

**KAUNAS, 2005**



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**TVIRTINU**  
**Katedros vedėjas**  
**prof. dr. J.Rimas**  
**2005 06 11**

**Tarpusavio sinchronizacijos sistemos**  
**matematinio modelio sudarymas ir tyrimas**

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

**Kalbos konsultantas**  
**dr. J.Džežulskienė**  
**2005 05 30**

**Vadovas**  
**prof. dr. J.Rimas**  
**2005 06 03**

**Recenzentas**  
**prof. habil. dr. R.Simutis**  
**2005 06 01**

**Atliko**  
**FMMM – 3gr. stud.**  
**A.Kuzmickienė**  
**2005 05 27**

**KAUNAS, 2005**

## KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

**Pirmininkas:**

Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

**Sekretorius:**

Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

**Nariai:**

Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, banko NORD/LB vyriausiasis analitikas

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

**Kuzmickienė A. Formation and research of the mathematical model of the mutual synchronization system: Master's work in applied mathematics / supervisor prof. dr. J. Rimas; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2005. – 58 p.**

## **SUMMARY**

The mutual synchronization system is analyzed in this work. The mutual synchronization is a double – side synchronization of interdependent tactical oscillators. Every of interdependent oscillators has influence on the frequency of other oscillators. The frequency of all oscillators will be the same and equal to the certain medium frequency which depends upon, the frequency and distances among separate oscillators of all in the settled regime of them joined into the net.

The objective of the work is to analyze the synchronization system which is joined of four interdependent oscillators. The mathematical model of synchronization system is formed, analytic expressions of transitional function and differences among phases of oscillation are set transitional processes of synchronization system and differences among phases of oscillation are researched.

The mathematical model of synchronization system is matrixal rectilinear dif. Equation with the argument to be late. It is solved using the method of steps and the transformation of Laplace. Exact analytical expressions of the solution components are found using Jordan's form of descriptive matrix which describes the structure of inherent relations among the blocks of the system analytical expressions of transitional functions in the system and differences of phases of oscillation are obtained on the basis of the solution.

## TURINYS

<b>PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS .....</b>	<b>6</b>
<b>ĮVADAS.....</b>	<b>7</b>
<b>1. TEORINĖ DALIS .....</b>	<b>8</b>
<b>1.1. RYŠIO TINKLO SINCHRONIZACIJA.....</b>	<b>8</b>
<b>1.2. APIBENDRINTOS FUNKCIJOS.....</b>	<b>9</b>
1.2.1. APIBENDRINTOS FUNKCIJOS SĄVOKA.....	9
1.2.2. VEIKSMAI SU APIBENDRINTOSIOMIS FUNKCIJOMIS.....	10
1.2.3. VIENETINĖ HEVISAIDO IR DIRAKO DELTA FUNKCIJOS.....	11
<b>1.3. LAPLASO TRANSFORMACIJA .....</b>	<b>12</b>
1.3.1. PIRMAVAIZDŽIO IR VAIZDO SĄVOKOS .....	12
1.3.2. LAPLASO TRANSFORMACIJOS SAVYBĖS .....	14
1.3.3. TIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMAS .....	15
1.3.4. PROGRAMINĖ ĮRANGA.....	16
<b>2. TIRIAMOJI DALIS.....</b>	<b>17</b>
<b>2.1. SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS MATEMATINIO MODELIO SUDARYMAS.....</b>	<b>17</b>
<b>2.2. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDIMAS.....</b>	<b>20</b>
<b>2.3. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES, APRAŠANČIOS SINCHRONIZACIJOS SISTEMĄ, SPRENDINIO DEDAMŲJŲ TIKSLIŲ ANALIZINIŲ IŠRAIŠKŲ IŠVEDIMAS.....</b>	<b>24</b>
2.3.1. MATRICOS $B_1$ KĖLIMAS SVEIKUOJU LAIPSNIU.....	24
2.3.2. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES LAISVOJO NARIO KOMPONENČIŲ ANALIZINĖS IŠRAIŠKOS .....	27
2.3.3. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDINIO TIKSLI ANALIZINĖ IŠRAIŠKA .....	28
<b>2.4. SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS PEREINAMŲJŲ PROCESŲ TYRIMAS .....</b>	<b>29</b>
2.4.1. SISTEMOS PEREINAMŲJŲ PROCESŲ TYRIMAS, NAUDOJANT PEREINAMAŠIAS FUNKCIJAS.....	29
2.4.2. SISTEMOS PEREINAMŲJŲ PROCESŲ PRIKLAUSOMYBĖ NUO PRADINIŲ SĄLYGŲ .....	34
<b>IŠVADOS .....</b>	<b>45</b>
<b>LITERATŪRA .....</b>	<b>46</b>
<b>1 PRIEDAS. PEREINAMŲJŲ FUNKCIJŲ SKAIČIAVIMO PROGRAMOS TEKSTAS.....</b>	<b>47</b>
<b>2 PRIEDAS. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ SKAIČIAVIMO PROGRAMOS TEKSTAS .....</b>	<b>47</b>
<b>3 PRIEDAS. PEREINAMŲJŲ FUNKCIJŲ GRAFIKAI.....</b>	<b>55</b>
<b>4 PRIEDAS. FAZIŲ SKIRTUMŲ <math>x_j(t) - x_i(t)</math> GRAFIKAI .....</b>	<b>57</b>

## PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

- 1.1 pav. Ryšio tinklo sinchronizacijos būdai, psl. 8,
- 1.2 pav. Hevisaido vienetinė funkcija, psl. 11,
- 1.3 pav. Funkcijos  $\delta_h(t)$  grafikas, psl. 11,
- 1.4 pav. Vėluojanti vienetinė funkcija, psl. 13,
- 1.5 pav. Vėluojanti funkcija, psl. 13,
- 1.6 pav. Vaizdo egzistavimo sritis, psl. 14,
- 2.1 pav. Sinchronizacijos sistemos schema, psl. 17,
- 2.2 pav. Sinchronizacijos sistemos struktūrinė schema, psl. 18,
- 2.3 pav. Grafinė pradinių sąlygų interpretacija, psl. 19,
- 2.4 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ij}(\kappa t)$  grafikai, psl. 33,
- 2.5 pav. Fazių skirtumų  $x_j(t) - x_i(t)$  grafikai, psl. 43.

## IVADAS

Moderni telekomunikacijos sistema yra ilgo evoliucinio proceso rezultatas, kuris prasidėjo XIX a. pabaigoje. Perdavimas ir komutavimas yra dvi pagrindinės telekomunikacijos sistemos funkcijos. Perdavimas – tai informacijos persiuntimas iš vieno sistemos taško į kitą. Komutatoriaus paskirtis – paskirstyti pagrindinio vartotojo signalo užklausą tarp visų galimų perdavimo kanalų tinkle [6].

Siekiant išvengti perduodamos informacijos ryšio tinklu nuostolių, būtina sinchronizuoti taktinius generatorius, esančius tinklo komutacijos centruose. Generatoriams sinchronizuoti gali būti panaudotos įvairios sinchronizacijos sistemos. Šiame darbe nagrinėjama tarpusavio sinchronizacijos sistema. Tokioje sistemoje visų taktinių generatorių dažniai yra valdomi. Valdymo signalas proporcingas generatorių virpesių fazių skirtumams. Nusistovėjusiame režime visų generatorių dažniai yra vienodi.

Šio darbo tikslas – išanalizuoti sinchronizacijos sistemą, sudarytą iš keturių tarpusavyje sujungtų generatorių. Šiam tikslui pasiekti, keliami uždaviniai:

- sudaryti sinchronizacijos sistemos matematinį modelį;
- nustatyti pereinamųjų funkcijų ir virpesių fazių skirtumų analizines išraiškas.
- ištirti sinchronizacijos sistemos pereinamuosius procesus;
- ištirti generatorių virpesių fazių skirtumų pereinamuosius procesus;

Šia tema skaitytas pranešimas konferencijoje „Matematika ir matematikos dėstymas – 2005“ balandžio 8 d.

## 1. TEORINĖ DALIS

### 1.1. RYŠIO TINKLO SINCHRONIZACIJA

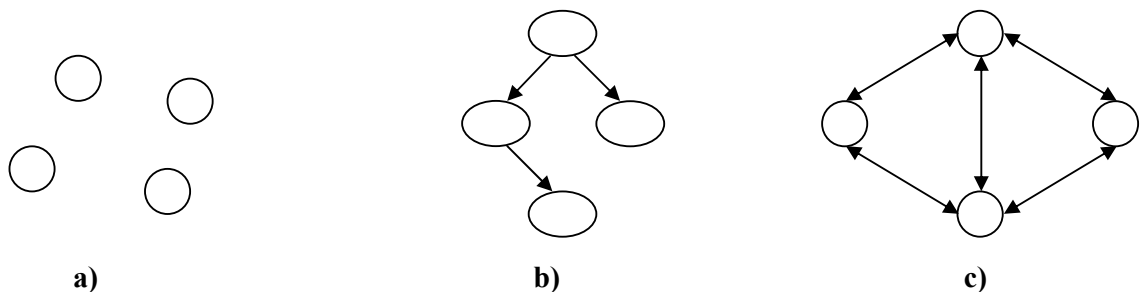
Sinchronizacija – tai kelių vienodų arba atitinkamų procesų suderinimas, kad jie vyktų vienu metu arba jų vyksmo periodai skirtųsi tam tikru laiko intervalu.

Skaitmeninių ryšio tinklų perdavimo stotys yra sujungtos ryšio linijomis. Perduodamos informacijos greitis priklauso nuo stoties taktinio generatoriaus dažnio. Kai dviejų sujungtų stočių generatorių dažniai skiriasi, prarandama arba dubliuojama perduodama informacija. Tokiems nuostoliams išvengti sinchronizuojami ryšio tinklo taktiniai generatoriai. Ryšio tinklo komutacijos centrų taktiniams generatoriams sinchronizuoti naudojami įvairūs būdai. Plačiausiai naudojami yra šie:

- Pleziosinchronizacija (anarchija) (1.1 pav. a). Tai pats paprasčiausias būdas, kai naudojami stabilūs vienas su kitu nesusiję taktiniai generatoriai. Kadangi ateinančių į komutacijos mazgą signalų taktiniai dažniai skiriasi nuo komutacijos mazge esančio taktinio generatoriaus dažnio, kiekvienas ateinantis signalas užrašomas į buferinę atmintį, iš kurios nuskaitomas vietinio taktinio generatoriaus dažniu. Dėl esančių dažnių skirtumų ryšio tinkle bus perduodami informacijos nuostoliai (jie bus tuo retesni, kuo bus stabilesni taktiniai generatoriai).

- Priverstinė sinchronizacija (despotizmas) (1.1 pav. b). Ši strategija remiasi vieno pagrindinio generatoriaus panaudojimu. Esant nusistovėjusiam režimui, visi ryšio tinklo taktiniai generatoriai veikia pagrindinio generatoriaus dažniu. Trūkumas – žemas sistemos gyvybingumas.

- Tarpusavio sinchronizacija (demokratija) (1.1 pav. c). Tai dvipusė tarpusavyje sujungtų taktinių generatorių sinchronizacija. Kiekvienas iš sujungtų generatorių turi įtakos kitų generatorių dažniams. Nusistovėjusiame režime visų generatorių dažniai bus vienodi ir lygūs tam tikram vidutiniam dažniui, priklausančiam nuo visų generatorių, sujungtų į tinklą, dažnių ir atstumų tarp atskirų generatorių. Pagrindinis trūkumas – palyginti sudėtingas tokios sistemos valdymas [6].



1.1 pav. Ryšio tinklo sinchronizacijos būdai



## 1.2. APIBENDRINTOS FUNKCIJOS

### 1.2.1. APIBENDRINTOS FUNKCIJOS SĄVOKA.

Apibendrintos funkcijos taikomos sprendžiant matematinės fizikos, kvantinės mechanikos bei elektrotechnikos uždavinius, kuriems išspręsti reikalingos trūkiosios funkcijos, nusakančios taškines mases, taškinius laukų šaltinius, momentinius impulsus ir pan.

Norint apibrėžti apibendrintąsias funkcijas, pirmiausia reikia susipažinti su pagrindinės ir finičiosios funkcijų bei tiesinio tolydaus funkcionalo sąvokomis.

Pagrindine funkcija vadinama be galo daug kartų diferencijuojama realaus kintamojo  $x$  funkcija  $\varphi(x)$ , kurios reikšmė lygi nuliui tam tikro baigtinio intervalo  $K \subset R$  išorėje. Baigtinis intervalas  $K$  vadinamas šios funkcijos atrama. Intervalai  $K$  kiekvienai pagrindinei funkcijai gali būti skirtingi.

Kai  $\varphi(x) \in D$ , tai pagrindinė funkcija  $\varphi(x)$  vadinama finičiaja (čia  $D$  – be galo daug kartų diferencijuojamų funkcijų  $\varphi(x)$ , su apribotomis atramomis  $K$ , erdvė).

Tegu  $U$  ir  $V$  yra tiesinės erdvės. Atvaizdis  $f:U \rightarrow V$  vadinamas tiesiniu operatoriumi, jei atitinka lygybę:

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2), \forall x_1, x_2 \in U, \forall \alpha, \beta \in R. \quad (1.2.1)$$

Tiesinis operatorius  $f:U \rightarrow R$ , priskiriantis tik skaitines reikšmes, vadinamas tiesiniu funkcionalu. Tiesinis funkcionalas  $f$  yra tolydus taške  $\varphi \in U$ , jei bet kuriai sekai  $(\varphi_n) \in U$  konverguojančiai į  $\varphi$ , galioja sąlyga:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi_n) = f(\varphi). \quad (1.2.2)$$

Tiesinis funkcionalas yra tolydus erdvėje  $U$ , jei jis tolydus kiekviename taške  $\varphi \in U$ .

1. A p i b r ė ž i m a s . Bet kurią tiesinį tolydų funkcionalą, apibrėžtą pagrindinių funkcijų erdvėje  $D$ , vadiname *apibendrintąja funkcija*.

Apibendrintoji funkcija užrašoma taip:

$$f(\varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in D. \quad (1.2.3)$$

Funkcionalas  $f$ , žymintis apibendrintąją funkciją, pasižymi savybėmis:

1. apibendrintoji funkcija  $f$  yra *tiesinis* funkcionalas, t.y.:

$$(f, \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2) = \alpha (f, \varphi_1) + \beta (f, \varphi_2) = \alpha f(\varphi_1) + \beta f(\varphi_2), \quad \forall \alpha, \beta \in R; \varphi_1, \varphi_2 \in D,$$

2. apibendrintoji funkcija  $f$  yra *tolydus* funkcionalas, t.y. jei  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ , kai  $\varphi \in D$ , tai

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi).$$

Išskirsime dvi plačias apibendrintų funkcijų klases:

- apibendrintoji funkcija vadinama *reguliariąja*, jei ji atitinka lygybę:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in D, \quad (1.2.4)$$

- apibendrintąsias funkcijas  $f$ , kurių negalima išreikšti (1.2.4) formule, vadinsime *singulariosiomis apibendrintomis funkcijomis*.

2. **A p i b r ė ž i m a s** Apibendrintosios funkcijos  $f$  atrama vadinama visų atvirųjų aibių, kuriose funkcija  $f$  lygi nuliui, sąjungos papildinys. Apibendrintosios funkcijos  $f$  atramą žymėsime simboliu  $\text{supp } f$ .

Iš apibrėžimo išplaukia šios išvados:

1. bet kurioje srityje, kuri nesikerta su atrama  $\text{supp } f$ , apibendrintoji funkcija  $f$  lygi nuliui, t.y.:  $\langle f, \varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in D, \text{supp } f \cap \text{supp } \varphi = \emptyset,$
2. apibendrintosios funkcijos atrama yra aibė tų ir tik tų taškų, kurių jokioje aplinkoje apibendrintoji funkcija  $f$  nėra lygi nuliui.

## 1.2.2. VEIKSMAI SU APIBENDRINTOSIOMIS FUNKCIJOMIS

Dvi apibendrintosios funkcijos  $f_1$  ir  $f_2$  vadinamos lygiomis, jei jų funkcionalai sutampa su kiekviena pagrindinės funkcijos reikšme, t.y.

$$(f_1 = f_2) \Leftrightarrow (f_1, \varphi) = (f_2, \varphi), \quad \forall \varphi \in D.$$

Galioja lygybė  $(\alpha(x)f, \varphi) = (f, \alpha(x)\varphi)$ , jei  $\alpha(x) = \alpha = \text{const}$ , tai  $(\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi), \forall \varphi \in D$ .

Apibrėšime apibendrintosios funkcijos išvestinę. Tegu  $f$  diferencijuojama funkcija. Tada  $\forall \varphi \in D$  galioja:

$$(f'(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Kadangi pirmasis narys, esantis dešinėje lygybės pusėje, visoms finičiosioms funkcijoms  $\varphi \in D$  lygus nuliui, tai

$$(f'(x), \varphi(x)) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f(x), \varphi'(x)). \quad (1.2.5)$$

Tada apibendrintosios funkcijos išvestinė užrašoma taip:  $(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \forall \varphi \in D$ .

Analogiškai gauname  $k$ -tosios eilės apibendrintosios funkcijos išvestinę:

$$(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)}), \quad \forall \varphi \in D, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Apibendrintąją išvestinę žymėsime simboliu  $D$ , kad atskirtume nuo klasikinės išvestinės.

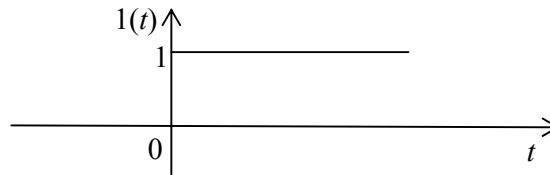
Apibendrintosios funkcijos  $k$ -tosios eilės išvestinę užrašysime taip:

$$(D^k f, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)}), \quad \forall \varphi \in D, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2.6)$$

Iš pastarosios lygybės mes matome, kad apibendrintoji funkcija turi bet kurios eilės apibendrintąją išvestinę [1].

### 1.2.3. VIENETINĖ HEVISAIDO IR DIRAKO DELTA FUNKCIJOS

Funkciją  $f(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$  vadiname *Hevisaido vienetine funkcija* (1.2 pav.).

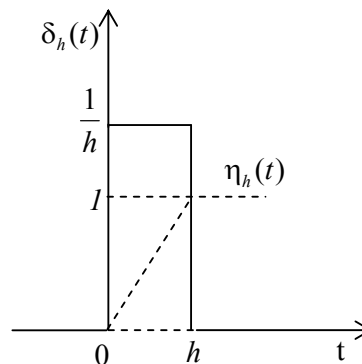


1.2 pav. Hevisaido vienetinė funkcija

Viena iš paprasčiausių ir svarbiausių singuliariųjų apibendrintųjų funkcijų yra Dirako delta funkcija, ji taikoma uždaviniuose, kuriuose susiduriame su dydžiais, apibūdinančiais momentinius postūmius. Ši funkcija apibrėžiama formule [5]:

$$\delta_h = \begin{cases} 0, & t < 0, t > h, \\ \frac{1}{h}, & 0 < t < h. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Panagrinėkime funkciją  $\delta_h(t)$ , kurios grafikas pavaizduotas 1.3 paveiksle.



1.3 pav. Funkcijos  $\delta_h(t)$  grafikas

Ši funkcija atkarpoje  $(0, h)$  turi pastovią reikšmę  $\frac{1}{h}$ , o impulso plotas yra lygus vienetui, t.y.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t) dt = \int_0^h \frac{1}{h} dt = 1. \quad (1.2.8)$$

Tarkim, kad  $h \rightarrow 0$ . Akivaizdu, kad funkcijų  $\delta_h(t)$  šeima diverguoja. Įveskime funkciją  $\delta(t)$ ,

kuri yra funkcijų  $\delta_h(t)$  šeimos riba:

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t).$$

Šią funkciją vadinsime nulinės eilės impulsine funkcija.  $\delta(t)$  lygi nuliui visuose taškuose, išskyrus tašką  $t = 0$ , kuriame  $\delta(t) = +\infty$ . Be to  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ .

$\delta$ -funkcijos vaizdas gali būti gaunamas iš funkcijos  $\delta_h(t) = \frac{1}{h} [1(t) - 1(t-h)]$  vaizdo. Pritaikius vėlavimo teoremą turime:

$$\delta_h(t) \doteq \frac{1 - e^{-ph}}{ph}. \quad (1.2.9)$$

Perėję prie ribos, kai  $h \rightarrow 0$ , gauname

$$\delta(t) \doteq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph} = 1. \quad (1.2.10)$$

Dirako  $\delta$ -funkcijai galioja pagrindinės Laplaso transformacijos savybės [10]. Pavyzdžiui:

- vėlavimo teorema:  $\delta(t - \tau) \doteq e^{-p\tau}$ ,
- vaizdų sandaugos teorema:  $1 \cdot F(p) \doteq \int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$ .

Fizikine prasme delta funkcija gali būti suprantama kaip vienetinio krūvio, esančio koordinatų pradžioje, tankis. Jei krūvio dydis  $m$ , tai jo tankis  $\rho(x) = m\delta(x)$  [11].

## 1.3. LAPLASO TRANSFORMACIJA

### 1.3.1. PIRMAVAIZDŽIO IR VAIZDO SĄVOKOS

Realaus kintamojo  $t$  kompleksinę funkciją  $f(t)$  vadiname pirmavaizdžiu, kai

1. funkcija  $f(t)$  intervale  $0 \leq t < +\infty$  yra tolydi arba turi tiksliai pirmojo tipo trūkio taškus, kurių skaičius bet kuriame baigtiniame intervale yra baigtinis;
2.  $f(t) = 0$ , kai  $t < 0$ ;
3. didėjant  $t$ , funkcijos  $f(t)$  modulis didėja ne greičiau, kaip eksponentinė funkcija, t.y. egzistuoja tokie skaičiai  $M > 0$  ir  $\sigma > 0$ , su kuriais

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma t}, \quad (1.3.1)$$

kai  $t > 0$ . Tikslus apatinis visų skaičių  $\sigma$ , kuriems teisinga (1.3.1) nelygybė, režis  $\sigma_0$  vadinamas funkcijos  $f(t)$  didėjimo rodikliu.

Pirmąją ir trečiąją pirmavaizdį apibrėžiančias sąlygas tenkina dauguma praktikoje pasitaikančių funkcijų. Antroji sąlyga taip pat nėra varžanti. Sprendžiant fizikinius uždavinius, paprastai, domimės funkcijos reikšmėmis, įgyjamomis tikrai nuo pradinio laiko momento, kurį nepažeisdami bendrumo, galime laikyti lygiu nuliui.

Paprasčiausias pirmavaizdis yra vienetinė Hevisaido funkcija. Ji tenkina visas pirmavaizdį apibrėžiančias sąlygas, be to, turi didėjimo rodiklį  $\sigma_0 = 0$ . Kiekvieną pirmavaizdį, naudojant vienetinę funkciją, galima parašyti taip:

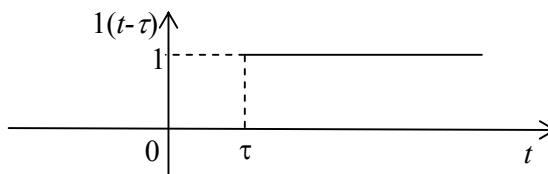
$$f(t)l(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Bet kokia funkcija  $f(t)$ , tenkinanti pirmąją ir trečiąją pirmavaizdžio sąlygas, padauginta iš vienetinės funkcijos, tampa pirmavaizdžiu.

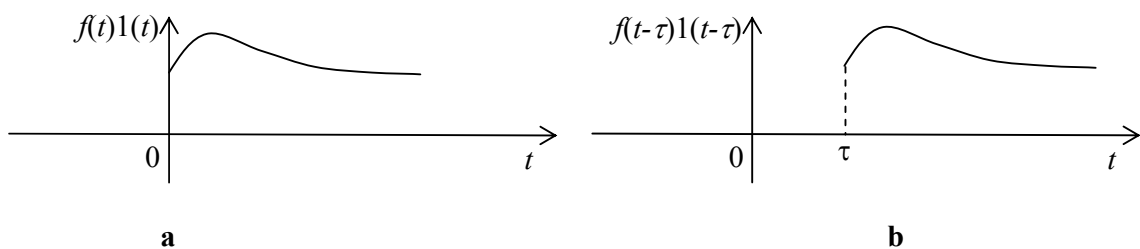
$$\text{Funkciją } l(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau \end{cases}$$

vadiname vėluojančiąja vienetine funkcija (1.4 pav.).

Funkciją  $f(t-\tau)l(t-\tau)$  vadiname vėluojančiąja funkcija [9]. Vėluojančios funkcijos grafikas gaunamas iš funkcijos  $f(t)l(t)$  grafiko, pastūmus jį į dešinę atstumu  $\tau$  (1.5 pav.).



1.4 pav. Vėluojanti vienetinė funkcija



1.5 pav. Vėluojanti funkcija

Dirako delta funkcija  $\delta(t)$  gali būti išreiškiama vienetinės funkcijos  $1(t)$  išvestine:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}1(t).$$

Pirmavaizdžio  $f(t)$  vaizdu vadiname kompleksinio kintamojo  $\rho = \sigma + i\omega$  funkciją  $F(p)$ , apibrėžiamą netiesioginiu integralu

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (1.3.2)$$

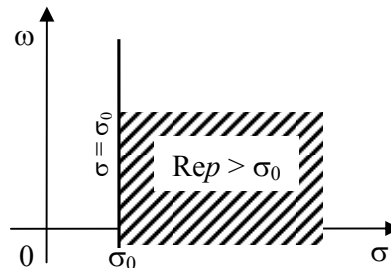
(1.3.2) integralas vadinamas funkcijos  $f(t)$  Laplaso transformacija (kartais Laplaso integralu). Veiksmas, kuriuo randamas pirmavaizdžio  $f(t)$  vaizdas  $F(p)$ , taip pat vadinamas Laplaso transformacija [5].

Vaizdo  $F(p)$  ir pirmavaizdžio  $f(t)$  atitiktį žymėsime vienu šių simbolių:

$$F(p) = L\{f(t)\}, \quad F(p) \div f(t), \quad f(t) \div F(p).$$

Pirmavaizdžio  $f(t)$  vaizdas  $F(p)$  yra apibrėžtos ne visoje kompleksinėje plokštumoje  $p$ .

**Vaizdo egzistavimo teorema.** Kiekvienas pirmavaizdis  $f(t)$  turi vaizdą  $F(p)$ , apibrėžtą pusplokštumėje  $\text{Re } p > \sigma_0$ , čia  $\sigma_0$  - funkcijos  $f(t)$  didėjimo rodiklis (1.6 pav.)



1.6 pav. Vaizdo egzistavimo sritis

### 1.3.2. LAPLASO TRANSFORMACIJOS SAVYBĖS

Pateiksime svarbiausias Laplaso transformacijos savybes [10].

**1. Tiesiškumo savybė.** Jeigu pirmavaizdžių  $f_1(t)$  ir  $f_2(t)$  vaizdai yra atitinkamai  $F_1(p)$  ir  $F_2(p)$ , t.y.  $f_1(p) \div F_1(p)$ ,  $f_2(p) \div F_2(p)$ , ir  $C_1, C_2$  - kompleksiniai skaičiai, tai

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p). \quad (1.3.3)$$

(tiesinį pirmavaizdžių darinį atitinka jų vaizdų toks pat tiesinis darinys).

Laplaso transformacijos tiesiškumo savybė gali būti apibendrinta, imant bet kurį baigtinį dėmenų skaičių: jeigu

$$f_k(t) \div F_k(p), \quad k = \overline{1, n} \text{ ir } C_k \in \mathbb{C}, \text{ tai } \sum_{k=1}^n C_k f_k(t) \div \sum_{k=1}^n C_k F_k(p). \quad (1.3.4)$$

**2. Panašumo teorema.** Jeigu

$$f(t) \div F(p) \text{ ir } \lambda > 0, \text{ tai } f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (1.3.5)$$

**3. Postūmio teorema.** Jeigu  $\alpha$  yra bet koks kompleksinis skaičius ir  $F(p) \div f(t)$ , tai  $F(p - \alpha) \div e^{\alpha t} f(t)$ . (1.3.6)

**4. Vėlavimo teorema.** Jeigu  $\tau > 0$  ir  $f(t) \div F(p)$ , tai

$$f(t - \tau) 1(t - \tau) \div e^{-p\tau} F(p). \quad (1.3.7)$$

Pirmavaizdžio vėlavimas laiku  $\tau$  atitinka vaizdo dauginimą iš  $e^{-p\tau}$ .

**5. Pirmavaizdžio diferencijavimo teorema.** Jeigu  $f(t)$  yra tolydi, dalimis diferencijuojama funkcija, kai  $t > 0$ , be to,  $f(t)$  ir  $f'(t)$  yra pirmavaizdžiai ir  $f(t) \div F(p)$ , tai

$$f'(t) \div pF(p) - f(0); \quad (1.3.8)$$

čia  $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$  - pradinė pirmavaizdžio reikšmė.

**6. Vaizdo diferencijavimo teorema.** Jeigu

$$F(p) \div f(t), \text{ tai } F'(p) \div -tf(t). \quad (1.3.9)$$

Vaizdo diferencijavimas atitinka pirmavaizdžio dauginimą iš  $(-t)$ .

**7. Pradinės reikšmės teorema.** Jeigu  $f(t)$  ir  $f'(t)$  yra pirmavaizdžiai ir  $f(t) \div F(p)$ , tai

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(0). \quad (1.3.10)$$

**8. Ribinės reikšmės teorema.** Jeigu  $f(t) \div F(p)$  ir  $f'(t)$  yra pirmavaizdis ir egzistuoja riba

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ , tai:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (1.3.11)$$

Funkciją  $f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$  vadiname dviejų funkcijų  $f_1(\tau)$  ir  $f_2(\tau)$  sąsūka ir žymime

$f_1(\tau) * f_2(\tau)$ .

**9. Vaizdų sandaugos teorema.** Jeigu  $F_1(p) \div f_1(t)$  ir  $F_2(p) \div f_2(t)$ , tai

$$F_1(p) F_2(p) \div \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (1.3.12)$$

### 1.3.3. TIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMAS

Tarkime, duota  $n$ -tosios eilės tiesinė diferencialinė lygtis su pastoviais koeficientais

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t); \quad (1.3.13)$$

čia  $a_0 \neq 0$ ,  $x = x(t)$ ,  $t \geq 0$ . Reikia rasti šios lygties atskirą sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (1.3.14)$$

Sakykime, kad funkcija  $f(t)$  ir sprendinys  $x(t)$  kartu su savo išvestinėmis iki  $n$ -tosios eilės yra pirmavaizdžiai. Tada egzistuoja jų vaizdai. Pažymėkime  $F(p) \div f(t), X(p) \div x(t)$ . Remdamiesi pirmavaizdžio diferencijavimo teorema ir (1.3.14) pradinėmis sąlygomis, turime

$$\begin{aligned} x'(t) &\div pX(p) - x_0, \\ x''(t) &\div p^2 X(p) - px_0 - x'_0, \\ &\dots\dots\dots \\ x^{(n)}(t) &\div p^n X(p) - p^{n-1}x_0 - \dots - px_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Iš Laplaso transformacijos tiesiškumo išplaukia

$$\begin{aligned} a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x &\div (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X(p) - \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k) x_0^{(n-1-k)}; \end{aligned}$$

čia  $x_0^{(0)} = x_0$ .

Pažymėję

$$\begin{aligned} A_n(p) &= a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \\ B_{n-1}(p) &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k) x_0^{(n-1-k)} \end{aligned}$$

ir įvertinę tai, kad lygių pirmavaizdžių vaizdai yra lygūs, gauname

$$A_n(p)X(p) - B_{n-1}(p) = F(p). \quad (1.3.15)$$

Iš čia

$$X(p) = \frac{F(p) + B_{n-1}(p)}{A_n(p)}. \quad (1.3.16)$$

A p i b r ė ž i m a s . (1.3.15) lygtį vadiname operatorine lygtimi, o jos sprendinį  $X(p)$  – operatoriniu sprendiniu.

Suradę operatorinį sprendinį, atitinkantį pirmavaizdį  $x(t) \div X(p)$ , turėsime (1.3.13) diferencialinės lygties atskirą sprendinį, tenkinantį (1.3.14) pradines sąlygas.

Šis diferencialinių lygčių sprendimo metodas vadinamas operaciniu [5].

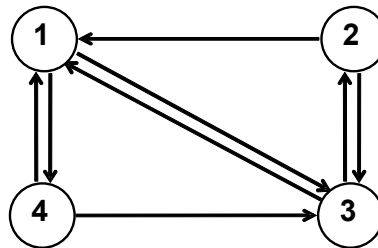
### 1.3.4. PROGRAMINĖ ĮRANGA

Skaičiavimai atlikti naudojantis „Mathcad 11“ paketą. Šis paketas orientuotas į mokslinius-techninius skaičiavimus ir patogus tuo, kad čia matematinės išraiškos rašomos jų įprastu pavidalu ir juo galima atlikti ne tik skaitmeninius, bet ir simbolinius skaičiavimus.



## 2. TIRIAMOJI DALIS

Nagrinėsime sinchronizacijos sistemą, sudarytą iš keturių tarpusavyje sujungtų generatorių (2.1 pav.). Paveiksle pateikta sinchronizacijos schema, kurioje parodyti generatoriai (rutuliukai) ir ryšio linijos, kuriomis perduodami sinchronizacijos signalai (orientuotos atkarpos). Sinchronizacijos signalų vėlinimus visose ryšio linijose laikysime pastoviais ir vienodais.



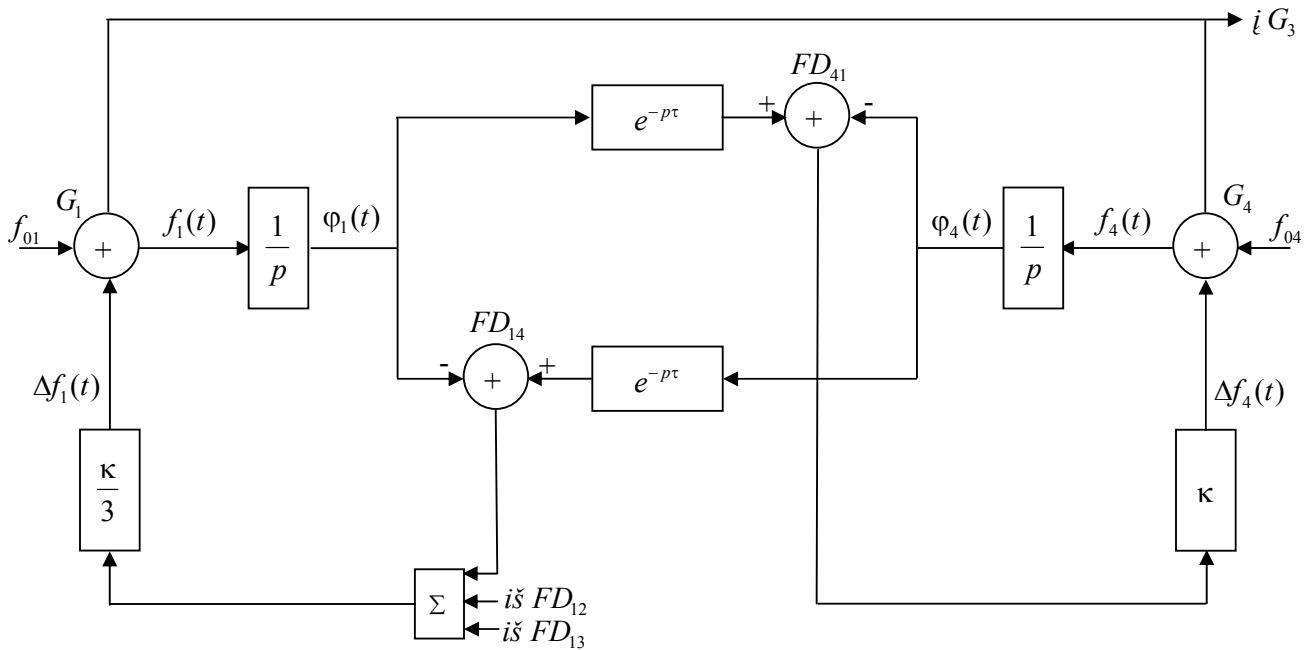
2.1 pav. Sinchronizacijos sistemos schema

Ištirsime pereinamuosius procesus šioje sistemoje. Tam tikslui sudarysime generatorių veikimo matematinį modelį – matricinę diferencialinę lygtį su vėluojančiu argumentu. Šios lygties sprendinio analizinę išraišką rasime taikydami žingsnių metodą ir panaudoję Laplaso transformaciją. Remdamiesi surastu sprendiniu, gausime sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų ir generatorių virpesių fazių tikslias analizes išraiškas, ištirsime sistemos pereinamuosius procesus ir jos darbą nusistovėjusiam režime [2].

### 2.1. SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS MATEMATINIO MODELIO SUDARYMAS

Sinchronizacijos sistemos struktūrinė schema pavaizduota 2.2 paveiksle. Schemoje pažymėta:  $G_i$ , ( $i = \overline{1,4}$ ) –  $i$ -tasis valdomas taktinis generatorius,  $FD_{ij}$  –  $ij$ -tosios linijos fazinis detektorius ( $ij$ -toji linija – tai ryšio linija, kuria signalas perduodamas iš  $j$ -tojo generatoriaus į  $i$ -tąjį),  $\tau$  – signalo vėlinimas,  $f_{0i}$  – savasis  $i$ -tojo generatoriaus dažnis (kai nėra įjungtas valdymas),  $f_i(t)$  –  $i$ -tojo generatoriaus dažnis,  $\varphi_i(t)$  –  $i$ -tojo generatoriaus virpesio fazė,  $\kappa$  – stiprinimo koeficientas,  $\Delta f_i(t)$  –  $i$ -tojo generatoriaus valdymo signalas.

Visi sistemos generatoriai yra valdomi. Jų dažniai derinami, naudojant automatines fazines dažnio derinimo sistemas.  $i$ -tojo generatoriaus valdymo signalas  $\Delta f_i(t)$  proporcingas generatorių virpesių fazių skirtumams fazinių detektorių įėjimuose. Remdamiesi struktūrine schema, pavaizduota 2.2 paveiksle, sudarysime sinchronizacijos sistemos matematinį modelį [7,8].



2.2 pav. Synchronizacijos sistemos struktūrinė schema

Užrašome  $i$ -tojo generatoriaus valdymo lygtį:

$$f_i(t) = f_{0i} + \Delta f_i(t), i = \overline{1,4}; \quad (2.1.1)$$

čia

$$\Delta f_1(t) = \frac{\kappa}{3} \sum_{j=2}^4 \varphi_j(t - \tau) - \kappa \varphi_1(t),$$

$$\Delta f_2(t) = \kappa(\varphi_3(t - \tau) - \varphi_2(t)),$$

$$\Delta f_3(t) = \frac{\kappa}{3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^4 \varphi_j(t - \tau) - \kappa \varphi_3(t),$$

$$\Delta f_4(t) = \kappa(\varphi_1(t - \tau) - \varphi_4(t)).$$

Įvertinę  $i$ -tojo generatoriaus virpesio fazės ir dažnio sąryšį  $\varphi_i'(t) = f_i(t)$ , iš (2.1) lygybės gauname diferencialinių lygčių sistemą:

$$\varphi_i'(t) = f_{0i}(t) + \Delta f_i(t), i = \overline{1,4}. \quad (2.1.2)$$

Šią sistemą perrašome panaudoję apibendrinto diferencijavimo operatorių  $D$ . Pažymėkime  $x_i(t) = \varphi_i(t)1(t)$ ,  $i = \overline{1,4}$  (čia  $1(t)$ -vienetinė Hevisaido funkcija) ir raskime šios funkcijos apibendrintą išvestinę  $Dx_i(t)$ :

$$Dx_i(t) = D(\varphi_i(t)1(t)) = \varphi_i'(t)1(t) + \varphi_i(t)\delta(t) = \varphi_i'(t)1(t) + \varphi_i(0)\delta(t);$$

čia  $\varphi_i(0) = \varphi_{0i}$  -  $i$ -tojo generatoriaus pradinė fazė,  $\delta(t)$  - delta funkcija. Iš pastarosios lygybės gauname

$$Dx_i(t) - \varphi_i(0)\delta(t) = \varphi_i'(t)1(t). \quad (2.1.3)$$

Padauginę (2.1.2) lygybės abi puses iš vienetinės Hevisaido funkcijos ir panaudoję (2.1.3), turime

$$Dx_i(t) - \varphi_i(0)\delta(t) = f_{0i}(t)l(t) + \Delta f_i(t)l(t), i = \overline{1,4}.$$

Atlikę reikiamus pertvarkymus šią sistemą užrašome taip:

$$\begin{cases} Dx_1(t) = \frac{\kappa}{3} (x_2(t-\tau) + x_3(t-\tau) + x_4(t-\tau)) - \kappa x_1(t) + z_1(t), \\ Dx_2(t) = \kappa (x_3(t-\kappa) - x_2(t)) + z_2(t), \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{3} (x_1(t-\tau) + x_2(t-\tau) + x_4(t-\tau)) - \kappa x_3(t) + z_3(t), \\ Dx_4(t) = \kappa (x_1(t-\kappa) - x_4(t)) + z_4(t); \end{cases} \quad (2.1.4)$$

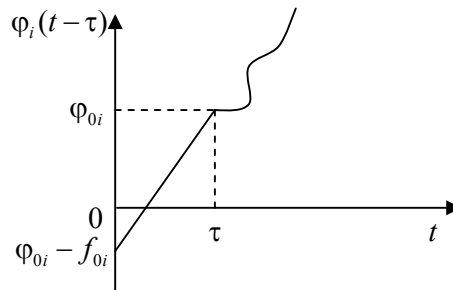
čia

$$\begin{aligned} z_1(t) &= f_{01}(t)l(t) + \varphi_1(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{3} \sum_{j=2}^4 \varphi_j(t-\tau)[1(t) - 1(t-\tau)], \\ z_2(t) &= f_{02}(t)l(t) + \varphi_2(0)\delta(t) + \kappa\varphi_3(t-\tau)[1(t) - 1(t-\tau)], \\ z_3(t) &= f_{03}(t)l(t) + \varphi_3(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^4 \varphi_j(t-\tau)[1(t) - 1(t-\tau)], \\ z_4(t) &= f_{04}(t)l(t) + \varphi_4(0)\delta(t) + \kappa\varphi_1(t-\tau)[1(t) - 1(t-\tau)]. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Pradines sąlygas (2.1.4) lygčių sistemai užrašysime taip:

$$\varphi_i(t) = \varphi_{0i} + f_{0i}t, t \leq 0, i = \overline{1,4}. \quad (2.1.6)$$

Pradinių sąlygų fizikinė prasmė: laiko momentu  $t=0$  visiems generatoriams įjungiamas valdymas; kai  $t \leq 0$  generatorių dažniai  $f_j(t) = f_{0j}$ , o fazės –  $\varphi_i(t) = \varphi_{0i} + f_{0i}t$ . Šių sąlygų grafinė interpretacija pateikta 2.3 paveiksle.



2.3 pav. Grafinė pradinių sąlygų interpretacija

Panaudoję matricas, (2.1.4) diferencialinių lygčių sistemą, pakeičiame viena matricine diferencialine lygtimi:

$$Dx(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + z(t); \quad (2.1.7)$$

čia  $A = -\kappa E$ ,  $E$  – 4-tosios eilės vienetinė matrica,  $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t))^T$  – ieškoma

vektorinė funkcija,  $z(t) = (z_1(t) \ z_2(t) \ z_3(t) \ z_4(t))^T$  – vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių

sąlygų,  $B = \frac{\kappa}{3} B_1$ ,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.8)$$

## 2.2. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDIMAS

(2.1.7) diferencialinės lygties sprendinio ieškosime žingsnių metodu [2]. Laiko ašį  $t \in [0, \infty)$  dalijame į vėlinimo  $\tau$  dydžio atkarpas.  $x(t)$  grafiką padalinsime į dalis ir atskiruose intervaluose  $k\tau \leq t < (k+1)\tau$  pavadinsime  $x_k(t)$ .

$$x(t) = x_k(t), \quad k\tau \leq t < (k+1)\tau, \quad k = -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.1)$$

Kiekviename intervale  $k\tau < t < (k+1)\tau$  (2.1.7) diferencialinę lygtį sprendžiame atskirai, kaip paprastą matricinę diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento.  $k$ -tajame intervale gautas sprendinys yra pradinė sąlyga sprendžiant lygtį  $(k+1)$ -jame intervale. Ieškodami sprendinio kiekviename daliniame intervale, taikome Laplaso transformaciją. Iš pradžių išnagrinėsime (2.1.7) diferencialinę lygtį intervale  $[0, \tau)$ .

Panaudoję (2.2.1) rašome

$$[0, \tau): Dx_0(t) = Ax_0(t) + Bx_{-1}(t-\tau) + z(t).$$

Įvertinę tai, kad  $x_{-1}(t) = 0$ , kai  $-\tau < t < 0$ , turime:  $x_{-1}(t-\tau) = 0$ , kai  $0 < t < \tau$ . Tada iš (2.2.1) gauname:

$$Dx_0(t) = Ax_0(t) + z(t). \quad (2.2.2)$$

Sprendami šią lygtį operaciniu metodu, randame:

$$pX_0(p) = AX_0(p) + Z(p);$$

$$X_0(p) = (pE - A)^{-1} Z(p) = (pE + \kappa E)^{-1} Z(p) = \frac{Z(p)}{p + \kappa}. \quad (2.2.3)$$

Remdamiesi vaizdų sandaugos teorema, gauname

$$X_0(p) = L\{z(t)\} L\{e^{-\kappa t}\} \div \left[ \int_0^t z(\tau) e^{-\kappa(t-\tau)} d\tau \right] 1(t) = x_0(t).$$

Gautas sprendinys atitinka sąlygas:

$$x_0(t) = \begin{cases} x_{-1}(t), & -\tau \leq t < 0, \\ x(t), & 0 \leq t < \tau. \end{cases}$$

Toliau iširsime (2.1.7) lygtį intervale  $[\tau, 2\tau)$ . Sprendinys  $x(t)$  intervale  $[\tau, 2\tau)$  pažymėtas  $x_1(t)$ , o intervale  $[0, \tau) - x_0(t)$ . Įvertinę tai, (2.1.7) lygtį užrašome taip:

$$Dx_1(t) = Ax_1(t) + Bx_0(t - \tau) + z(t). \quad (2.2.4)$$

(2.2.4) diferencialinę lygtį sprendžiame operaciniu metodu:

$$\begin{aligned} pX_1(p) &= A X_1(p) + BX_0(p)e^{-p\tau} + Z(p); \\ X_1(p) &= \frac{BX_0(p)}{p + \kappa} e^{-p\tau} + \frac{Z(p)}{p + \kappa} = \frac{BX_0(p)}{p + \kappa} e^{-p\tau} + X_0(p). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Panaudoję Laplaso transformacijos simbolį  $L$  ir taikydami vaizdų sandaugos teoremą, randame

$$X_1(p) = BL\{x_0(t)\}L\{e^{-\kappa t}\}e^{-p\tau} + X_0(p) = BL\left\{\int_0^t x_0(w)e^{-\kappa(t-w)}dw\right\}e^{-p\tau} + X_0(p).$$

ir

$$X_1(p) \div B\left[\int_0^t x_0(w)e^{-\kappa(t-\tau-w)}dw\right]1(t - \tau) + x_0(t) = x_1(t) = \begin{cases} x_0(t), & t < \tau, \\ \neq x_0(t), & t > \tau. \end{cases}$$

Gautas sprendinys atitinka sąlygas:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \begin{cases} x(t), & t \leq \tau < 2\tau, \\ \neq x(t), & t \geq 2\tau. \end{cases} \\ x_1(t) &= \begin{cases} x(t), & t < 2\tau, \\ \neq x(t), & t \geq 2\tau. \end{cases} \end{aligned}$$

Toliau (2.1.7) lygtį išstirsime intervale  $[2\tau, 3\tau)$ . Sprendinys  $x(t)$  intervale  $[2\tau, 3\tau)$  pažymėtas  $x_2(t)$ , o intervale  $[\tau, 2\tau) - x_1(t)$ . Įvertinę tai, (2.1.7) parašome taip:

$$Dx_2(t) = Ax_2(t) + Bx_1(t - \tau) + z(t). \quad (2.2.6)$$

Šią lygtį sprendžiame operaciniu metodu:

$$\begin{aligned} pX_2(p) &= A X_2(p) + BX_1(p)e^{-p\tau} + Z(p); \\ X_2(p) &= \frac{BX_1(p)e^{-p\tau}}{p + \kappa} + \frac{Z(p)}{p + \kappa} = \frac{B^2 X_0(p)e^{-2p\tau}}{(p + \kappa)^2} + \frac{BX_0(p)e^{-p\tau}}{p + \kappa} + \frac{Z(p)}{p + \kappa}; \\ X_2(p) &= \frac{B^2 X_0(p)e^{-2p\tau}}{(p + \kappa)^2} + X_1(p). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Remdamiesi Laplaso transformacijos savybėmis, randame

$$X_2(p) = B^2 L\{x_0(t)\}L\{te^{-\kappa t}\}e^{-2p\tau} + X_1(p) = B^2 L\left\{\int_0^t x_0(w)(t-w)e^{-\kappa(t-w)}dw\right\}e^{-2p\tau} + X_1(p)$$

ir

$$X_2(p) \div B^2\left[\int_0^{t-2\tau} x_0(w)(t-w-2\tau)e^{-\kappa(t-2\tau-w)}dw\right]1(t - 2\tau) + x_1(t) = x_2(t) = \begin{cases} x_1(t), & t < 2\tau, \\ \neq x_1(t), & t \geq 2\tau. \end{cases}$$

Gautas sprendinys atitinka sąlygas:

$$x_2(t) = \begin{cases} x(t), & 2t \leq \tau < 3\tau, \\ \neq x(t), & t \geq 3\tau. \end{cases}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), & t < 3\tau, \\ \neq x(t), & t \geq 3\tau. \end{cases}$$

(2.1.7) lygtį išstirsime intervale  $[3\tau, 4\tau)$ . Sprendinys  $x(t)$  šiame intervale pažymėtas  $x_3(t)$ , todėl

$$DX_3(t) = AX_3(t) + BX_2(t - \tau) + Z(t). \quad (2.2.8)$$

Kadangi  $x_2(t)$ , kai  $t < 3\tau$ , yra žinoma funkcija, tai (2.2.8) lygtis yra matricinė diferencialinė lygtis be vėluojančio argumento. Užrašome jai atitinkančią operatorinę lygtį:

$$pX_3(p) = AX_3(p) + BX_2(p)e^{-p\tau} + Z(p).$$

Randame operatorinį sprendinį

$$X_3(p) = \frac{B^3 X_0(p)e^{-3p\tau}}{(p + \kappa)^3} + X_2(p). \quad (2.2.9)$$

Remdamiesi Laplaso transformacijos savybėmis, rašome

$$X_3(p) = B^3 L\{x_0(t)\} L\left\{\frac{t^2}{2} e^{-\kappa t}\right\} e^{-3p\tau} + X_2(p) = B^3 L\left\{\int_0^t x_0(w) \frac{(t-w)^2}{2} e^{-\kappa(t-w)} dw\right\} e^{-3p\tau} + X_2(p)$$

ir

$$X_3(p) \div B^3 \left[ \int_0^{t-3\tau} x_0(w) \frac{(t-w-3\tau)}{2} e^{-\kappa(t-3\tau-w)} dw \right] 1(t-3\tau) + x_2(t) = x_3(t) = \begin{cases} x_2(t), & t < 3\tau, \\ \neq x_2(t), & t \geq 3\tau. \end{cases}$$

Gautas sprendinys atitinka sąlygas:

$$x_3(t) = \begin{cases} x(t), & 3t \leq \tau < 4\tau, \\ \neq x(t), & t \geq 4\tau. \end{cases}$$

$$x_3(t) = \begin{cases} x(t), & t < 4\tau, \\ \neq x(t), & t \geq 4\tau. \end{cases}$$

Toliau tęsdami šią procedūrą  $k$  kartų, gausime:

$$x_k(t) = \begin{cases} x(t), & kt \leq \tau < (k+1)\tau, \\ \neq x(t), & t \geq (k+1)\tau. \end{cases}$$

(2.2.10)

$$x_k(t) = \begin{cases} x(t), & t < (k+1)\tau, \\ \neq x(t), & t \geq (k+1)\tau, \quad k = 4, 5, \dots \end{cases}$$

Rasime sprendinio  $x(t)$  analizinę išraišką. Įveskime pažymėjimus:

$$\varepsilon_0(t) = x_0(t) - x_{-1}(t) = x_0(t);$$

$$\varepsilon_1(t) = x_1(t) - x_0(t);$$

.....

$$\varepsilon_k(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t),$$

$$\mathfrak{D}_L = \sum_{k=0}^L \varepsilon_k(t) = x_0(t) + [x_1(t) - x_0(t)] + \dots + [x_L(t) - x_{L-1}(t)] = x_L(t) = x(t), \quad \text{kai } t < (L+1)\tau.$$

Ieškomas sprendinys:

$$x(t) = \mathfrak{D}_L(t) = \sum_{k=0}^L \varepsilon_k(t), \quad 0 < t < (L+1)\tau, \quad (2.2.11)$$

arba

$$x(t) \div \Theta_L(p) = \sum_{k=0}^L \int_0^{\infty} \varepsilon_k(x) e^{-px} dx. \quad (2.2.12)$$

Rasime Laplaso integralą, įrašytą (2.2.12) išraiškoje. Parašysime diferencialinę lygtį vektorinės funkcijos  $\varepsilon_k(t)$  atžvilgiu. Kadangi  $\varepsilon_k(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t)$  ir

$$Dx_k(t) = Ax_k(t) + Bx_{k-1}(t-\tau) + Z(t), \quad (2.2.13)$$

$$Dx_{k-1}(t) = Ax_{k-1}(t) + Bx_{k-2}(t-\tau) + Z(t), \quad (2.2.14)$$

tai, atėmę (2.2.14) lygtį iš (2.2.13), gausime

$$D\varepsilon_k(t) = A\varepsilon_k(t) + B\varepsilon_{k-1}(t-\tau). \quad (2.2.15)$$

Ieškosime operacinės lygties, atitinkančios (2.2.15) lygtį. Abiems lygties pusėms taikysime Laplaso transformaciją:

$$(pE - A) \int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = B \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t-\tau) e^{-pt} dt. \quad (2.2.16)$$

Pertvarkome dešinėsios pusės integralą:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t-\tau) e^{-pt} dt = \left\{ \begin{array}{ll} t-\tau = \theta & dt = d\theta \\ t = 0 & \theta = -\tau \\ t = \infty & \tau = \infty \end{array} \right\} = \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\theta) e^{-p(\tau+\theta)} d\theta = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt. \quad (2.2.17)$$

Pasinaudojant (2.2.17) išraiška, (2.2.16) perrašom taip:

$$(pE - A) \int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = B e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt. \quad (2.2.18)$$

Kadangi  $pE - A = (p + \kappa)E$ , tai

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = \frac{B}{p + \kappa} e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt. \quad (2.2.19)$$

Pažymėkime  $M = \frac{B}{p + \kappa} e^{-p\tau}$ . Tada

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = M \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt. \quad (2.2.20)$$

Įvertinus funkcijos  $\varepsilon_k(t)$  savybes, galime rašyti:  $\varepsilon_{k-1}(t) = 0$  su visais  $t < 0$  ir  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Todėl

$$\int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt$$

ir (2.2.20) išraiška įgyja pavidalą:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = M \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt. \quad (2.2.21)$$

Žinome, kad  $\varepsilon_0(t) = x_0(t)$ . Taikant šiai lygybei Laplaso transformaciją, gauname:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = X_0(p). \quad (2.2.22)$$

Skirtingiems  $k=1,2,3\dots$  iš (2.2.20) randame

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varepsilon_1(t) e^{-pt} dt &= M \int_0^{\infty} \varepsilon_0(t) e^{-pt} dt = M X_0(p), \\ \int_0^{\infty} \varepsilon_2(t) e^{-pt} dt &= M \int_0^{\infty} \varepsilon_1(t) e^{-pt} dt = M^2 X_0(p), \\ &\dots\dots\dots \\ \int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt &= M \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt = M^k X_0(p) \end{aligned}$$

Iš (2.2.12) gauname (čia  $M = \frac{B}{p+k} e^{-p\tau}$ ):

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L M^k X_0(p) = \sum_{k=0}^L \frac{B^k}{(p+k)^k} e^{-pk\tau} X_0(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau. \quad (2.2.23)$$

Turėjome (2.2.3), todėl

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{3}\right)^k \frac{1}{(p+\kappa)^{k+1}} B_1^k e^{-pk\tau} Z(p), \quad \text{kai } 0 < t < (L+1)\tau. \quad (2.2.24)$$

## 2.3. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES, APRAŠANČIOS SINCHRONIZACIJOS SISTEMĄ, SPRENDINIO DEDAMŲJŲ TIKSLIŲ ANALIZINIŲ IŠRAIŠKŲ IŠVEDIMAS

### 2.3.1. MATRICOS $B_1$ KĖLIMAS SVEIKUOJU LAIPSNIU

Matrica  $B_1$  aprašo sinchronizacijos sistemos vidinių ryšių struktūrą. Matricos  $B_1^k$  ieškosime remdamiesi formule  $B_1^k = T J^k T^{-1}$ ; čia  $J$  –  $B_1$  matricos Žordano forma,  $T$  – transformuojančioji matrica. Šias matricas rasime, jeigu žinosime matricos  $B_1$  tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius [3].

- **Matricos  $B_1$  tikrinės reikšmės ir Žordano forma.**

Matricos  $B_1$  tikrines reikšmes rasime išsprendę charakteristinę lygtį  $|B_1 - \lambda E| = 0$ :



$$|B_1 - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.3.1)$$

Determinantą skleidžiame pirmosios eilutės elementais:

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 3 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^3 - 7\lambda - 6).$$

Išsprendę lygtį  $\lambda(\lambda^3 - 7\lambda - 6) = 0$  gauname tikrines matricos  $B_1$  reikšmes:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 3.$$

Kadangi tikrinės reikšmės yra paprastosios, tai  $B_1$  matricos Žordano forma yra diagonalioji matrica:

$$J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \text{diag}(-2, -1, 0, 3). \quad (2.3.2)$$

• **Matricos  $B_1$  tikriniai vektoriai ir transformuojančioji matrica.**

Kadangi matricos  $B_1$  tikrinės reikšmės yra paprastosios (ne kartotinės), tai transformuojančiosios matricos  $T$  stulpeliai yra matricos  $B_1$  tikriniai vektoriai:  $T = (T_1 T_2 T_3 T_4)$ . Rasime juos remdamiesi lygybe

$$(B_1 - \lambda_k E)T_k = 0, \quad k = \overline{1, 4}. \quad (2.3.3)$$

Pažymėkime

$$T_k = (x_1^{(k)} \ x_2^{(k)} \ x_3^{(k)} \ x_4^{(k)})^T.$$

Tarkime tikrinį vektorių  $T_1$  atitinka tikrinė reikšmė  $\lambda_1 = -2$ . Paprastumo dėlei tikrinio vektoriaus elementų viršutinį indeksą praleisime. Gausime tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_4 = 0. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Pažymėję  $x_4 = 3$ , parašome tikrinį vektorių

$$T_1 = (-2 \ 3 \ -2 \ 3)^T.$$

Analogiškai randame kitus tikrinius vektorius:

$$T_2 = (-1 \quad -3 \quad 1 \quad 3)^T,$$

$$T_3 = (0 \quad 3 \quad 0 \quad -3)^T,$$

$$T_4 = (3 \quad 3 \quad 3 \quad 3)^T.$$

Parašome transformuojančią matricą

$$T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.3.5)$$

Randame matricą  $T^{-1}$  (matricą atvirkštinę matricai  $T$ ) [4]. Apskaičiuojame matricos  $T$  determinantą:

$$|T| = -2 \begin{vmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 180.$$

Determinantas nelygus 0, vadinasi matricai  $T$  egzistuoja atvirkštinė matrica ir ji išreiškiama taip:

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}; \quad (2.3.6)$$

čia  $A_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, 4}$ , matricos  $T$  elementų adjunktai.

Ieškome adjunktų:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -18; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -90;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -90; \quad A_{14} = - \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 18.$$

Analogiškai apskaičiuojame likusius adjunktus:

$$A_{21} = 18, A_{22} = 0, A_{23} = 30, A_{24} = 12;$$

$$A_{31} = -18, A_{32} = 90, A_{33} = 90, A_{34} = 18;$$

$$A_{41} = 18, A_{42} = 0, A_{43} = -30, A_{44} = 12.$$

Sudarome atvirkštinę matricą, matricai  $T$ :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.167 & 0.5 & -0.167 \\ 0.1 & 0.067 & 0.1 & 0.067 \end{pmatrix}. \quad (2.3.7)$$

- Matricos  $B_1$ , pakeltos sveikuoju laipsniu, elementų skaičiavimas.

Turėdami matricas  $J, T, T^{-1}$  apskaičiuojame matricą  $B_1^k$  ( $k=1,2,3\dots$ ):

$$B_1^k = TJ^kT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.167 & 0.5 & -0.167 \\ 0.1 & 0.067 & 0.1 & 0.067 \end{pmatrix}.$$

Sudauginę matricas, randame

$$B^k = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_5 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_2 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}; \quad (2.3.8)$$

čia

$$a_1 = 0.2(-2)^k + 0.5(-1)^k + 0.3 \cdot 3^k,$$

$$a_2 = -0.2(-2)^k + 0.2 \cdot 3^k,$$

$$a_3 = 0.2(-2)^k - 0.5(-1)^k + 0.3 \cdot 3^k,$$

$$a_4 = -0.3(-2)^k + 1.5(-1)^k + 0.3 \cdot 3^k,$$

$$a_5 = 0.3(-2)^k + 0.2 \cdot 3^k,$$

$$a_6 = -0.3(-2)^k - 1.5(-1)^k + 0.3 \cdot 3^k.$$

### 2.3.2. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES LAISVOJO NARIO KOMPONENČIŲ ANALIZINĖS IŠRAIŠKOS

Vektorius  $z(t) = (z_1(t) \ z_2(t) \ z_3(t) \ z_4(t))^T$  priklauso nuo pradinių sąlygų, t.y. nuo generatorių savųjų dažnių  $f_i$  ir pradinių fazių  $\varphi_{0i}$ ,  $i = \overline{1,4}$ .

Vektoriaus  $z(t)$  pirmoji komponentė:

$$z_1(t) = f_{01}(t)1(t) + \varphi_1(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{3} \sum_{j=2}^4 \varphi_j(t-\tau)[1(t) - 1(t-\tau)].$$

Funkcijai  $z_1(t)$  taikome Laplaso transformaciją:

$$Z_1(p) = \frac{f_{01}}{p} + \varphi_{01} + \frac{\kappa}{3} \left( \frac{f_{02}}{p^2} - \frac{f_{02}\tau}{p} + \frac{\varphi_{02}}{p} - \frac{f_{02}}{p^2} e^{-p\tau} - \frac{\varphi_{02}}{p} e^{-p\tau} + \frac{f_{03}}{p^2} - \frac{f_{03}\tau}{p} + \frac{\varphi_{03}}{p} - \frac{f_{03}}{p^2} e^{-p\tau} - \frac{\varphi_{03}}{p} e^{-p\tau} + \frac{f_{04}}{p^2} - \frac{f_{04}\tau}{p} + \frac{\varphi_{04}}{p} - \frac{f_{04}}{p^2} e^{-p\tau} - \frac{\varphi_{04}}{p} e^{-p\tau} \right).$$

Pažymėkime:

$$\begin{aligned}
f_{0i}+f_{0j} &= f_{ij}, \quad f_{0i}f_{0j} = f_{0ij}, \\
\varphi_{0i}+\varphi_{0j} &= \varphi_{ij}, \\
\varphi_{0i}-\varphi_{0j} &= \varphi_{0ij}, \quad \text{čia } i,j = \overline{1,4}.
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Panaudoję (2.3.9) pažymėjimus, parašome pirmosios komponentės vaizdo išraišką:

$$Z_1(p) = \varphi_{01} + \frac{f_{01}}{p} - \frac{\kappa \tau f_{234}}{3p} + \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} + \frac{\kappa \varphi_{234}}{3p} - \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa \varphi_{234}}{3p} e^{-p\tau}. \tag{2.3.10}$$

Analogiškai gauname ir vaizdų  $Z_2(p)$ ,  $Z_3(p)$ ,  $Z_4(p)$  išraiškas:

$$Z_2(p) = \varphi_{02} + \frac{f_{02}}{p} - \frac{\kappa \tau f_3}{3p} + \frac{\kappa f_3}{3p^2} + \frac{\kappa \varphi_3}{3p} - \frac{\kappa f_3}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa \varphi_3}{3p} e^{-p\tau}, \tag{2.3.11}$$

$$Z_3(p) = \varphi_{03} + \frac{f_{03}}{p} - \frac{\kappa \tau f_{214}}{3p} + \frac{\kappa f_{214}}{3p^2} + \frac{\kappa \varphi_{214}}{3p} - \frac{\kappa f_{214}}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa \varphi_{214}}{3p} e^{-p\tau}, \tag{2.3.12}$$

$$Z_4(p) = \varphi_{04} + \frac{f_{04}}{p} - \frac{\kappa \tau f_1}{3p} + \frac{\kappa f_1}{3p^2} + \frac{\kappa \varphi_1}{3p} - \frac{\kappa f_1}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa \varphi_1}{3p} e^{-p\tau}. \tag{2.3.13}$$

### 2.3.3. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDINIO TIKSLI ANALIZINĖ IŠRAIŠKA

Skyrelyje 2.2 radome matricinės diferencialinės lygties sprendinį:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \left( \frac{\kappa}{3} \right)^k \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} B_1^k e^{-pk\tau} Z(p).$$

Pasinaudoję rastomis vektoriaus  $Z(p)$  komponentių, ir matricos  $B_1^k$  elementų išraiškomis, parašome matricinės diferencialinės lygties sprendinio tikslią, analizinę išraišką. Šio sprendinio pirmoji komponentė  $x_1(t)$  bus išreiškiamas taip:

$$x_1(t) \div \sum_{k=0}^L \left( \frac{\kappa}{3} \right)^k \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} (a_1 Z_1(p) + a_2 Z_2(p) + a_3 Z_3(p) + a_4 Z_4(p)) e^{-pk\tau}; \tag{2.3.14}$$

čia  $a_1, a_2, a_3, a_4$  yra matricos  $B_1^k$  pirmos eilutės elementai (žr. (2.3.8)). Įstatome  $a_i$  ir  $Z_m(p)$  išraiškas į (2.3.14):

$$\begin{aligned}
x_1(t) \div \sum_{k=1}^L \left( \frac{\kappa}{3} \right)^k \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} \cdot \\
\cdot \left( (0.2(-2)^k + 0.5(-1)^k + 0.3 \cdot 3^k) \left( \varphi_{01} + \frac{f_{01}}{p} - \frac{\kappa \tau f_{234}}{3p} + \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} + \frac{\kappa \varphi_{234}}{3p} - \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa \varphi_{234}}{3p} e^{-p\tau} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -0.2(-2)^k + 0.2 \cdot 3^k \right) \left( \varphi_{02} + \frac{f_{02}}{p} - \frac{\kappa \tau f_3}{3p} + \frac{\kappa f_3}{3p^2} + \frac{\kappa \varphi_3}{3p} - \frac{\kappa f_3}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa \varphi_3}{3p} e^{-p\tau} \right) + \\
& + \left( 0.2(-2)^k - 0.5(-1)^k + 0.3 \cdot 3^k \right) \left( \varphi_{03} + \frac{f_{03}}{p} - \frac{\kappa \tau f_{214}}{3p} + \frac{\kappa f_{214}}{3p^2} + \frac{\kappa \varphi_{214}}{3p} - \frac{\kappa f_{214}}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa \varphi_{214}}{3p} e^{-p\tau} \right) + \\
& + \left( -0.2(-2)^k + 0.2 \cdot 3^k \right) \left( \varphi_{04} + \frac{f_{04}}{p} - \frac{\kappa \tau f_1}{3p} + \frac{\kappa f_1}{3p^2} + \frac{\kappa \varphi_1}{3p} - \frac{\kappa f_1}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa \varphi_1}{3p} e^{-p\tau} \right) + \\
& + \frac{1}{p + \kappa} \left( \varphi_{01} + \frac{f_{01}}{p} - \frac{\kappa \tau f_{234}}{3p} + \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} + \frac{\kappa \varphi_{234}}{3p} - \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa \varphi_{234}}{3p} e^{-p\tau} \right).
\end{aligned}$$

Likusių sprendinio komponentų analizinės išraiškos randamos analogiškai.

## 2.4. SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS PEREINAMŪJŲ PROCESŲ TYRIMAS

### 2.4.1. SISTEMOS PEREINAMŪJŲ PROCESŲ TYRIMAS, NAUDOJANT PEREINAMĄSIAS FUNKCIJAS

Pereinamasis procesas – tai grandinės reakcija laikotarpyje tarp dviejų stacionariųjų būsenų. Sistemos dinamiką (jos pereinamuosius procesus) tirsime remdamiesi jos reakcija į vienetinį fazės šuolį [2]. Sistemos  $i$ -tojo generatoriaus virpesio fazės reakciją į  $j$ -tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį, vadinsime sistemos pereinamąja funkcija  $h_{ij}(t)$ . Pereinamųjų funkcijų  $h_{ij}(t)$  ( $i, j = \overline{1,4}$ ) visuma sudaro sistemos pereinamųjų funkcijų matricą  $h(t) = (h_{ij}(t))$ . Šią matricą rasime, remdamiesi (2.1.7) diferencialinės lygties (2.2.24) sprendiniu.

- **Sistemos pereinamosios funkcijos.**

Kai vienetinis šuolis veikia  $j$ -tojo generatoriaus virpesio fazę, (1) lygties laisvasis narys įgauna pokyti

$$\Delta z(t) = \delta(t) I^{(j)}; \tag{2.4.1}$$

čia  $I^{(j)}$  – matrica–stulpelis, kurio  $j$ -tasis elementas lygus 1, o likusieji – 0.  $\delta(t)$  – delta funkcija (jai teisinga tokia operatorinė lygybė  $\delta(t) \div 1$ ).

Remdamiesi (2.2.24) sprendiniu ir (2.4.1) išraiška randame

$$h(t) \div \sum_{k=0}^L \left( \frac{\kappa}{3} \right)^k \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} B_1^k e^{-pk\tau}. \tag{2.4.2}$$

(2.4.2) išraiškai taikome atvirkštinę Laplaso transformaciją ir gauname pereinamųjų funkcijų matricos elementų skaičiavimo formulę:

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=0}^L \frac{\kappa^k (t - k\tau)^k}{3^k k!} e^{-\kappa(t - k\tau)} \{B_1^k\}_{ij} 1(t - k\tau), \quad 0 < t < (L+1)\tau. \quad (2.4.3)$$

Pereinamųjų funkcijų tiksliai analitines išraiškas randame įstatę matricos  $B_1$ , pakeltos  $k$ -tuoju laipsniu ( $k \in N$ ), elementus (žr. 2.3.1 skyr.) į (2.4.2).

- **Pereinamųjų funkcijų ribinių reikšmių skaičiavimas.**

Pereinamųjų funkcijų ribines reikšmes skaičiuojame remdamiesi (2.4.1) išraiška ir ribinės reikšmės teorema:

$$h_{ij}(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pH_{ij}(p), \quad i, j = \overline{1, 4}. \quad (2.4.4)$$

Sistemos 1-ojo generatoriaus virpesio fazės reakciją į 1-ojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį, užrašome taip:

$$\begin{cases} Dh_{11}(t) = \frac{\kappa}{3} (h_{21}(t - \tau) + h_{31}(t - \tau) + h_{41}(t - \tau)) - \kappa h_{11}(t) + \delta(t), \\ Dh_{21}(t) = \kappa (h_{31}(t - \kappa) - h_{21}(t)), \\ Dh_{31}(t) = \frac{\kappa}{3} (h_{11}(t - \tau) + h_{21}(t - \tau) + h_{41}(t - \tau)) - \kappa h_{31}(t), \\ Dh_{41}(t) = \kappa (h_{11}(t - \kappa) - h_{41}(t)). \end{cases}$$

Pritaikome Laplaso transformaciją

$$\begin{cases} pH_{11}(p) = \frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} (H_{21}(p) + H_{31}(p) + H_{41}(p)) - \kappa H_{11}(p) + 1, \\ pH_{21}(p) = \kappa e^{-p\tau} (H_{31}(p) - H_{21}(p)), \\ pH_{31}(p) = \frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} (H_{11}(p) + H_{21}(p) + H_{41}(p)) - \kappa H_{31}(p), \\ pH_{41}(p) = \kappa e^{-p\tau} (H_{11}(p) - H_{41}(p)). \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Šios sistemos sprendinį rasime remdamiesi Kramerio taisykle. Užrašome sistemos koeficientų matricą:

$$Q = \begin{pmatrix} p + \kappa & -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} \\ 0 & p + \kappa & -\kappa e^{-p\tau} & 0 \\ -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} & p + \kappa & -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} \\ -\kappa e^{-p\tau} & 0 & 0 & p + \kappa \end{pmatrix}. \quad (2.4.6)$$

Apskaičiuojame jos determinantą:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+\kappa & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ 0 & p+\kappa & -\kappa e^{-p\tau} & 0 \\ -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & p+\kappa & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ -\kappa e^{-p\tau} & 0 & 0 & p+\kappa \end{vmatrix} = \kappa e^{-p\tau} \begin{vmatrix} -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ p+\kappa & -\kappa e^{-p\tau} & 0 \\ -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & p+\kappa & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \end{vmatrix} +$$

$$+(p+\kappa) \begin{vmatrix} p+\kappa & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ 0 & p+\kappa & -\kappa e^{-p\tau} \\ -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & p+\kappa \end{vmatrix} = (p+\kappa)^4 - \frac{7\kappa^2}{9}e^{-2p\tau}(p+\kappa)^2 - \frac{2\kappa^3}{9}e^{-3p\tau}(p+\kappa).$$

Matricos  $Q$  pirmą stulpelį keisdami sistemos laisvųjų narių stulpeliu  $b = (1; 0; 0; 0)^T$  apskaičiuojame determinantą  $|\Delta_{11}|$ :

$$|\Delta_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ 0 & p+\kappa & -\kappa e^{-p\tau} & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & p+\kappa & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ 0 & 0 & 0 & p+\kappa \end{vmatrix} = (p+\kappa)^3 - (p+\kappa)\frac{\kappa^2}{3}e^{-2p\tau};$$

Toliau ieškome ribos  $\lim_{p \rightarrow 0} pH_{11}$

$$\lim_{p \rightarrow 0} pH_{11} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{|\Delta_{11}|}{\Delta} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \left( (p+\kappa)^3 - (p+\kappa)\frac{\kappa^2}{3}e^{-2p\tau} \right)}{(p+\kappa)^4 - \frac{7\kappa^2}{9}e^{-2p\tau}(p+\kappa)^2 - \frac{2\kappa^3}{9}e^{-3p\tau}(p+\kappa)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kadangi gaunasi neapibrėžtumas taikome Liopitalio taisyklę.

$$\lim_{p \rightarrow 0} pH_{11} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p+\kappa)^3 + 3p(p+\kappa)^2 - (p+\kappa)\frac{\kappa^2}{3}e^{-2p\tau} - p\frac{\kappa^2}{3}e^{-2p\tau} + 2p^2\tau\frac{\kappa^2}{3}e^{-2p\tau} + 2p\tau\frac{\kappa^3}{3}e^{-2p\tau}}{4(p+\kappa)^3 + \frac{6\kappa^3}{9}e^{-3p\tau}(p+\kappa)\tau - \frac{2\kappa^3}{9}e^{-3p\tau} + \frac{14\kappa^2}{9}e^{-2p\tau}(p+\kappa)^2\tau - \frac{14\kappa^2}{9}e^{-2p\tau}(p+\kappa)}$$

$$= \frac{9 \left( \kappa^3 - \frac{\kappa^3}{3} \right)}{20\kappa^3(1+\kappa\tau)} = \frac{3}{10(1+\kappa\tau)}.$$

Jei suteikiame vienetinį šuolį 2-ajam generatoriui, tai lygčių sistema atrodys taip:

$$\begin{cases} Dh_{12}(t) = \frac{\kappa}{3}(h_{22}(t-\tau) + h_{32}(t-\tau) + h_{42}(t-\tau)) - \kappa h_{12}(t), \\ Dh_{22}(t) = \kappa(h_{32}(t-\tau) - h_{22}(t)) + \delta(t), \\ Dh_{32}(t) = \frac{\kappa}{3}(h_{12}(t-\tau) + h_{22}(t-\tau) + h_{42}(t-\tau)) - \kappa h_{32}(t), \\ Dh_{42}(t) = \kappa(h_{12}(t-\tau) - h_{42}(t)). \end{cases}$$

Pritaikę Laplaso transformaciją gauname:

$$\begin{cases} pH_{12}(p) = \frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} (H_{22}(p) + H_{32}(p) + H_{42}(p)) - \kappa H_{12}(p), \\ pH_{22}(p) = \kappa e^{-p\tau} (H_{32}(p) - H_{22}(p)) + 1, \\ pH_{32}(p) = \frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} (H_{12}(p) + H_{22}(p) + H_{42}(p)) - \kappa H_{32}(p), \\ pH_{42}(p) = \kappa e^{-p\tau} (H_{12}(p) - H_{42}(p)). \end{cases} \quad (2.4.7)$$

Matrica  $Q$  išliks tokia pat, o laisvųjų narių stulpelis  $b = (0; 1; 0; 0)^T$ , tai

$$|\Delta_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ 1 & p + \kappa & -\kappa e^{-p\tau} & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & p + \kappa & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ 0 & 0 & 0 & p + \kappa \end{vmatrix} = -(p + \kappa)^2 \frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} - (p + \kappa) \frac{\kappa^2}{9} e^{-2p\tau}.$$

Apskaičiavę ribą gauname

$$\lim_{p \rightarrow 0} pH_{12} = \frac{1}{5(1 + \kappa\tau)}.$$

Analogiškai gauname šiuos rezultatus:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} pH_{13} &= \frac{3}{10(1 + \kappa\tau)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{14} &= \frac{1}{5(1 + \kappa\tau)}; \\ \lim_{p \rightarrow 0} pH_{21} &= \frac{3}{10(1 + \kappa\tau)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{22} &= \frac{1}{5(1 + \kappa\tau)}; \\ \lim_{p \rightarrow 0} pH_{23} &= \frac{3}{10(1 + \kappa\tau)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{24} &= \frac{1}{5(1 + \kappa\tau)}; \\ \lim_{p \rightarrow 0} pH_{31} &= \frac{3}{10(1 + \kappa\tau)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{32} &= \frac{1}{5(1 + \kappa\tau)}; \\ \lim_{p \rightarrow 0} pH_{33} &= \frac{3}{10(1 + \kappa\tau)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{34} &= \frac{1}{5(1 + \kappa\tau)}; \\ \lim_{p \rightarrow 0} pH_{41} &= \frac{3}{10(1 + \kappa\tau)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{42} &= \frac{1}{5(1 + \kappa\tau)}; \\ \lim_{p \rightarrow 0} pH_{43} &= \frac{3}{10(1 + \kappa\tau)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{44} &= \frac{1}{5(1 + \kappa\tau)}. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

- **Pereinamojo proceso priklausomybės nuo sistemos parametrų tyrimas.**

Pereinamojo proceso pobūdis sinchronizacijos sistemoje priklauso nuo parametrų  $\kappa$  ir  $\tau$  sandaugos. Paveiksle 2.4.a pavaizduoti grafikai, prie skirtingų sandaugos  $\kappa\tau$  reikšmių, o 2.4.b grafikai, kai vienetinis fazės šuolis suteikiamas 2 ir 3 generatorių virpesių fazėms (daugiau grafikų žr.



3 priede).

Matome, kad pereinamojo proceso trukmė, kai  $\kappa\tau$  sandauga didesnė, trunka ilgiau. Ribines reikšmes apskaičiuojame naudodamiesi (2.4.8) išraiškomis. Kai  $\kappa\tau = 0.5$ , tai

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i1}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i3}(t) = \frac{3}{10(1+0.5)} = 0.2,$$

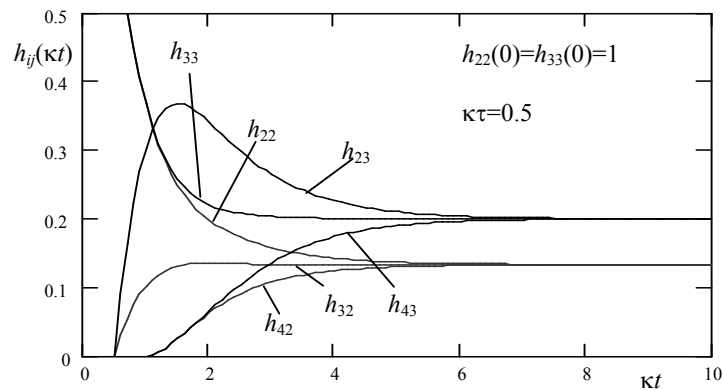
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i2}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i4}(t) = \frac{1}{5(1+0.5)} = 0.133, \quad i = \overline{1,4}.$$

Kai vienetinis fazės šuolis suteikiamas 1 ir 3 generatoriui, tai ribinė reikšmė yra 0.2, kai 2 ir 4 generatoriui – 0.133. Jei  $\kappa\tau = 1.5$

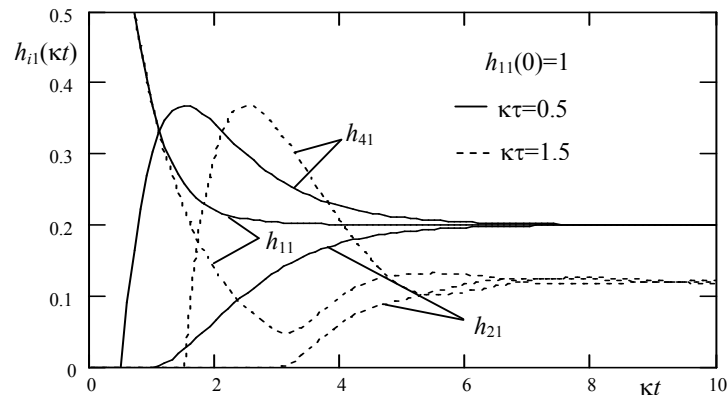
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i1}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i3}(t) = \frac{3}{10(1+1.5)} = 0.12,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i2}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i4}(t) = \frac{1}{5(1+1.5)} = 0.08.$$

Kai vienetinis šuolis suteikiamas 1 ir 3 generatoriui ribinė reikšmė yra 0.12, kai 2 ir 4 – 0.08.



a)



b)

2.4 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ij}(\kappa t)$  grafikai

## 2.4.2. SISTEMOS PEREINAMŲJŲ PROCESŲ PRIKLAUSOMYBĖ NUO PRADINIŲ SĄLYGŲ

Tiriame sistemos pereinamuosius procesus, įvertindami pradinės sąlygas. Jas apibrėšime taip: laiko momentu  $t = 0$  visiems generatoriams įjungiamas valdymas. Kai  $t < 0$ , generatorių dažniai  $f_i(t) = f_{0i}$ , o fazės  $\varphi_i(t) = f_{0i} t + \varphi_{0i}$  ( $i = \overline{1,4}$ ); čia  $f_{0i}$  –  $i$ -tojo generatoriaus savasis dažnis,  $\varphi_i(t)$  –  $i$ -tojo generatoriaus virpesio pradinė fazė (fazė laiko momentu  $t = 0$ ).

- **Generatorių virpesių fazių skirtumų ribinių reikšmių skaičiavimas.**

Generatorių virpesių fazių skirtumų ribines reikšmes skaičiuosime, naudodami ribinės reikšmės teoremą:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_j(t) - x_i(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p(X_j(p) - X_i(p)), \quad i, j = \overline{1,4}, \quad i \neq j. \quad (2.4.9)$$

Turime (2.1.4) diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} Dx_1(t) = \frac{\kappa}{3} (x_2(t - \tau) + x_3(t - \tau) + x_4(t - \tau)) - \kappa x_1(t) + z_1(t), \\ Dx_2(t) = \kappa (x_3(t - \kappa) - x_2(t)) + z_2(t), \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{3} (x_1(t - \tau) + x_2(t - \tau) + x_4(t - \tau)) - \kappa x_3(t) + z_3(t), \\ Dx_4(t) = \kappa (x_1(t - \kappa) - x_4(t)) + z_4(t). \end{cases}$$

Pritaikome Laplaso transformaciją:

$$\begin{cases} pX_1(p) = \frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} (X_2(p) + X_3(p) + X_4(p)) - \kappa X_1(p) + Z_1(p), \\ pX_2(p) = \kappa e^{-p\tau} (X_3(p) - X_2(p)) + Z_2(p), \\ pX_3(p) = \frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} (X_1(p) + X_2(p) + X_4(p)) - \kappa X_3(p) + Z_3(p), \\ pX_4(p) = \kappa e^{-p\tau} (X_1(p) - X_4(p)) + Z_4(p). \end{cases}$$

Šios sistemos sprendinių radimui naudosime Kramerio taisyklę. Rasime  $\lim_{p \rightarrow 0} p(X_j(p) - X_i(p))$ , kur

$$X_i(p) = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,4}.$$

Iš koeficientų prie  $X_i$  sudarome matricą:

$$Q = \begin{pmatrix} p + \kappa & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ 0 & p + \kappa & -\kappa e^{-p\tau} & 0 \\ -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & p + \kappa & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ -\kappa e^{-p\tau} & 0 & 0 & p + \kappa \end{pmatrix}. \quad (2.4.10)$$

Ši matrica lygi matricai  $Q$  (žr. 2.4.1 skyr.), taigi matricos  $Q$  determinantas  $\Delta$  yra

$$\Delta = (p + \kappa)^4 - \frac{7\kappa^2}{9}e^{-2p\tau}(p + \kappa)^2 - \frac{2\kappa^3}{9}e^{-3p\tau}(p + \kappa).$$

Sistemos laisvųjų narių stulpelis  $b = (Z_1(p), Z_2(p), Z_3(p), Z_4(p))^T$ . Determinanto  $\Delta$  stulpelius paeiliui keiskime sistemos laisvųjų narių stulpeliu  $b$ , gausime tokius determinantus:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} Z_1(p) & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ Z_2(p) & p + \kappa & -\kappa e^{-p\tau} & 0 \\ Z_3(p) & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & p + \kappa & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ Z_4(p) & 0 & 0 & p + \kappa \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p + \kappa & Z_1(p) & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ 0 & Z_2(p) & -\kappa e^{-p\tau} & 0 \\ -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & Z_3(p) & p + \kappa & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ -\kappa e^{-p\tau} & Z_4(p) & 0 & p + \kappa \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} p + \kappa & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & Z_1(p) & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ 0 & p + \kappa & Z_2(p) & 0 \\ -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & Z_3(p) & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ -\kappa e^{-p\tau} & 0 & Z_4(p) & p + \kappa \end{vmatrix}; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} p + \kappa & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & Z_1(p) \\ 0 & p + \kappa & -\kappa e^{-p\tau} & Z_2(p) \\ -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & p + \kappa & Z_3(p) \\ -\kappa e^{-p\tau} & 0 & 0 & Z_4(p) \end{vmatrix}.$$

Ieškome  $\lim_{p \rightarrow 0} p(X_2 - X_1)$ :

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_2(p) - X_1(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{\Delta} (Z_1(p)(\Delta_{12} - \Delta_{11}) + Z_2(p)(\Delta_{22} - \Delta_{21}) + Z_3(p)(\Delta_{32} - \Delta_{31}) + Z_4(p)(\Delta_{42} - \Delta_{41})); \quad (2.4.11)$$

čia  $\Delta_{ij}, j=1,2, i=1,4$ , matricos  $Q$  adjunktai.

Gauname neapibrėžtumą, taikome Liopitalio taisyklę. Pertvarkome (2.4.11) išraišką:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_2 - X_1) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_1(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{12} - \Delta_{11}}{p} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_2(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{22} - \Delta_{21}}{p} + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_3(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{32} - \Delta_{31}}{p} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_4(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{42} - \Delta_{41}}{p} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_1(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{12} - \Delta_{11})'_p + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_2(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{22} - \Delta_{21})'_p + \\
&+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_3(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{32} - \Delta_{31})'_p + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_4(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{42} - \Delta_{41})'_p.
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Ieškome išvestinių ribų:

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow 0} \Delta' &= \lim_{p \rightarrow 0} (4(p + \kappa)^3 + \frac{6\kappa^3}{9} e^{-3p\tau} (p + \kappa) \tau - \frac{2\kappa^3}{9} e^{-3p\tau} + \frac{14\kappa^2}{9} e^{-2p\tau} (p + \kappa)^2 \tau - \\
&- \frac{14\kappa^2}{9} e^{-2p\tau} (p + \kappa)) = \frac{20\kappa^3(1 + \kappa\tau)}{9}.
\end{aligned}$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} p + \kappa & -\kappa e^{-p\tau} & 0 \\ \frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} & p + \kappa & -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} \\ 0 & 0 & p + \kappa \end{vmatrix};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -\kappa & 0 \\ \frac{\kappa\tau}{3} & \kappa & -\frac{\kappa}{3} \\ 0 & 0 & \kappa \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \kappa & \kappa\tau & 0 \\ -\frac{\kappa}{3} & 1 & -\frac{\kappa}{3} \\ 0 & 0 & \kappa \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \kappa & -\kappa & 0 \\ -\frac{\kappa}{3} & \kappa & -\frac{\kappa\tau}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{8\kappa^2}{3} + \frac{2\kappa^3\tau}{3}.$$

$$\Delta_{21} = - \begin{vmatrix} -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} \\ -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} & p + \kappa & -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} \\ 0 & 0 & p + \kappa \end{vmatrix};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{21} = - \begin{vmatrix} \frac{\kappa\tau}{3} & -\frac{\kappa}{3} & -\frac{\kappa}{3} \\ \frac{\kappa\tau}{3} & \kappa & -\frac{\kappa}{3} \\ 0 & 0 & \kappa \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{\kappa}{3} & \kappa\tau & -\frac{\kappa}{3} \\ -\frac{\kappa}{3} & 1 & -\frac{\kappa}{3} \\ 0 & 0 & \kappa \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{\kappa}{3} & -\frac{\kappa}{3} & \frac{\kappa\tau}{3} \\ -\frac{\kappa}{3} & \kappa & \frac{\kappa\tau}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{7\kappa^2}{3} - \frac{5\kappa^3\tau}{9}.$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} \\ p + \kappa & -\kappa e^{-p\tau} & 0 \\ 0 & 0 & p + \kappa \end{vmatrix};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{31} = \begin{vmatrix} \frac{\kappa\tau}{3} & -\frac{\kappa}{3} & -\frac{\kappa}{3} \\ 1 & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{\kappa}{3} & \frac{\kappa\tau}{3} & -\frac{\kappa}{3} \\ \kappa & \kappa\tau & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{\kappa}{3} & -\frac{\kappa}{3} & \frac{\kappa\tau}{3} \\ \kappa & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \kappa^2 - \kappa^3\tau.$$

$$\Delta_{41} = - \begin{vmatrix} -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \\ p + \kappa & -\kappa e^{-p\tau} & 0 \\ -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} & p + \kappa & -\frac{\kappa}{3}e^{-p\tau} \end{vmatrix};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{41} = - \begin{vmatrix} \frac{\kappa\tau}{3} & -\frac{\kappa}{3} & -\frac{\kappa}{3} \\ 1 & -\kappa & 0 \\ \frac{\kappa\tau}{3} & \kappa & -\frac{\kappa}{3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{\kappa}{3} & \frac{\kappa\tau}{3} & -\frac{\kappa}{3} \\ \kappa & \kappa\tau & 0 \\ -\frac{\kappa}{3} & 1 & -\frac{\kappa}{3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{\kappa}{3} & -\frac{\kappa}{3} & \frac{\kappa\tau}{3} \\ \kappa & -\kappa & 0 \\ -\frac{\kappa}{3} & \kappa & \frac{\kappa\tau}{3} \end{vmatrix} = \frac{7\kappa^2}{9} - \frac{5\kappa^3\tau}{9}.$$

Analogiškai randame šias ribas:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{12} = \frac{\kappa^2}{3} - \frac{5\kappa^3\tau}{3}; \quad \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{22} = \frac{23\kappa^2}{9} + \frac{11\kappa^3\tau}{9};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{32} = 2\kappa^2; \quad \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{42} = \frac{\kappa^2}{3} - \kappa^3\tau.$$

Apskaičiuosime  $\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 Z_i(p))'$ , (išraiškos  $Z_i(p)$  rastos 2.3.2 skyrelyje):

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 (\varphi_{01} + \frac{f_{01}}{p} - \frac{\kappa\tau f_{234}}{3p} + \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} + \frac{\kappa\varphi_{234}}{3p} - \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\varphi_{234}}{3p} e^{-p\tau}))' = f_{01};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 (\varphi_{02} + \frac{f_{02}}{p} - \frac{\kappa\tau f_3}{3p} + \frac{\kappa f_3}{3p^2} + \frac{\kappa\varphi_3}{3p} - \frac{\kappa f_3}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\varphi_3}{3p} e^{-p\tau}))' = f_{02};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 (\varphi_{03} + \frac{f_{03}}{p} - \frac{\kappa\tau f_{214}}{3p} + \frac{\kappa f_{214}}{3p^2} + \frac{\kappa\varphi_{214}}{3p} - \frac{\kappa f_{214}}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\varphi_{214}}{3p} e^{-p\tau}))' = f_{03};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 (\varphi_{04} + \frac{f_{04}}{p} - \frac{\kappa\tau f_1}{3p} + \frac{\kappa f_1}{3p^2} + \frac{\kappa\varphi_1}{3p} - \frac{\kappa f_1}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\varphi_1}{3p} e^{-p\tau}))' = f_{04}.$$

Gautus rezultatus įstatome į (2.4.12):

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_2(p) - X_1(p)) &= \frac{9f_{01}}{20\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left( \frac{\kappa^2}{3} - \frac{5\kappa^3\tau}{3} - \frac{8\kappa^2}{3} - \frac{2\kappa^3\tau}{3} \right) + \\ &+ \frac{9f_{02}}{20\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left( \frac{23\kappa^2}{9} + \frac{11\kappa^3\tau}{9} - \frac{7\kappa^2}{9} + \frac{5\kappa^3\tau}{9} \right) + \frac{9f_{03}}{20\kappa^3(1+\kappa\tau)} (2\kappa^2 - \kappa^2 + \kappa^3\tau) + \\ &+ \frac{9f_{04}}{20\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left( \frac{\kappa^2}{3} - \kappa^3\tau - \frac{7\kappa^2}{9} + \frac{5\kappa^3\tau}{9} \right) = -\frac{21}{20} \frac{f_{01}}{\kappa} + \frac{16}{20} \frac{f_{02}}{\kappa} + \frac{9}{20} \frac{f_{03}}{\kappa} - \frac{4}{20} \frac{f_{04}}{\kappa} = \\ &= \frac{4}{5} \frac{f_{02} - f_{01}}{\kappa} + \frac{1}{4} \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa} + \frac{1}{5} \frac{f_{03} - f_{04}}{\kappa}. \end{aligned}$$

Analogiškai randame:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{13} = \kappa^2 - \kappa^3 \tau; \quad \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{23} = \frac{7\kappa^2}{9} - \frac{5\kappa^3 \tau}{9};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{33} = \frac{8\kappa^2}{3} + \frac{2\kappa^3 \tau}{3}; \quad \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{43} = \frac{7\kappa^2}{9} - \frac{5\kappa^3 \tau}{9}.$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{41} = 2\kappa^2; \quad \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{42} = \frac{\kappa^2}{3} - \kappa^3 \tau;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{43} = \frac{\kappa^2}{3} - \frac{5\kappa^3 \tau}{3}; \quad \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{44} = \frac{23\kappa^2}{9} + \frac{11\kappa^3 \tau}{9}.$$

Gautas išraiškas įstatę į (2.4.12) lygį ir atlikę reikiamus pertvarkymus, gauname:

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_1(p)) = \frac{3}{4} \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_2(p)) = \frac{1}{5} \frac{f_{04} - f_{02}}{\kappa} + \frac{3}{10} \frac{f_{01} - f_{03}}{\kappa} + \frac{3}{5} \frac{f_{03} - f_{02}}{\kappa};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_1(p)) = -\frac{3}{10} \frac{f_{01} - f_{03}}{\kappa} + \frac{1}{5} \frac{f_{04} - f_{02}}{\kappa} + \frac{3}{5} \frac{f_{04} - f_{03}}{\kappa};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_2(p)) = \frac{3}{4} \frac{f_{01} - f_{03}}{\kappa} + \frac{f_{04} - f_{02}}{\kappa};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_3(p)) = \frac{9}{20} \frac{f_{01} - f_{03}}{\kappa} + \frac{1}{5} \frac{f_{04} - f_{02}}{\kappa} + \frac{3}{5} \frac{f_{04} - f_{03}}{\kappa}.$$

- **Generatorių virpesių fazių skirtumų pereinamųjų procesų tyrimas**

Pradinių sąlygų įtaką pereinamiesiems procesams sistemoje tirsime remdamiesi (2.2.24) sprendiniu. Parašome  $i$ -tojo ir  $j$ -tojo ( $i, j = \overline{1, 4}, i \neq j$ ) generatorių virpesių fazių skirtumo analizinę išraišką:

$$x_j(t) - x_i(t) \div \sum_{k=1}^L \frac{\kappa^k}{3^k (p + \kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} g_{ji}(k), \quad 0 < t < (L+1)\tau; \quad (2.4.13)$$

čia  $g_{ji}(k) = \sum_{m=1}^4 \left( \{B_1^k\}_{jm} - \{B_1^k\}_{im} \right) Z_m(p)$ .  $Z_m(p)$  yra vektoriaus  $Z(p) \div z(t)$ , priklausančio nuo pradinių sąlygų,  $m$ -toji komponentė.

Pažymėkime  $\{B_1^k\}_{jm} - \{B_1^k\}_{im} = \beta_{ji}(m, k)$   $m = \overline{1, 4}$ . Kadangi  $B_1^0$  vienetinė matrica, tai kai  $k = 0$ ,

$\beta_{ji}(m, 0) = \delta_{ji}(m)$ . Ieškome skirtumo:

$$x_j(t) - x_i(t) \div \sum_{k=1}^L \frac{\kappa^k}{3^k (p + \kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} (Z_1(p)\beta_{ji}(1, k) + Z_2(p)\beta_{ji}(2, k) + Z_3(p)\beta_{ji}(3, k) + Z_4(p)\beta_{ji}(4, k)) + \frac{1}{p + \kappa} (Z_1(p)\delta_{ji}(1) + Z_2(p)\delta_{ji}(2) + Z_3(p)\delta_{ji}(3) + Z_4(p)\delta_{ji}(4)).$$

Įstatome  $Z_m(p)$  išraiškas ir atliekame pertvarkymus:

$$\begin{aligned}
& x_j(t) - x_i(t) \div \sum_{k=1}^L \frac{\kappa^k}{3^k (p + \kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} \cdot (\beta_{ji}(1, k) (\varphi_{01} + \frac{f_{01}}{p} - \frac{\kappa\tau f_{234}}{3p} + \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} + \frac{\kappa\varphi_{234}}{3p} - \\
& - \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\varphi_{234}}{3p} e^{-p\tau}) + \beta_{ji}(2, k) (\varphi_{02} + \frac{f_{02}}{p} - \frac{\kappa\tau f_3}{3p} + \frac{\kappa f_3}{3p^2} + \frac{\kappa\varphi_3}{3p} - \frac{\kappa f_3}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\varphi_3}{3p} e^{-p\tau}) + \\
& + \beta_{ji}(3, k) (\varphi_{03} + \frac{f_{03}}{p} - \frac{\kappa\tau f_{214}}{3p} + \frac{\kappa f_{214}}{3p^2} + \frac{\kappa\varphi_{214}}{3p} - \frac{\kappa f_{214}}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\varphi_{214}}{3p} e^{-p\tau}) + \\
& + \beta_{ji}(4, k) (\varphi_{04} + \frac{f_{04}}{p} - \frac{\kappa\tau f_1}{3p} + \frac{\kappa f_1}{3p^2} + \frac{\kappa\varphi_1}{3p} - \frac{\kappa f_1}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\varphi_1}{3p} e^{-p\tau})) + \\
& + \frac{1}{p + \kappa} (\delta_{ji}(1) (\varphi_{01} + \frac{f_{01}}{p} - \frac{\kappa\tau f_{234}}{3p} + \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} + \frac{\kappa\varphi_{234}}{3p} - \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\varphi_{234}}{3p} e^{-p\tau}) + \\
& + \delta_{ji}(2) (\varphi_{02} + \frac{f_{02}}{p} - \frac{\kappa\tau f_3}{3p} + \frac{\kappa f_3}{3p^2} + \frac{\kappa\varphi_3}{3p} - \frac{\kappa f_3}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\varphi_3}{3p} e^{-p\tau}) + \\
& + \delta_{ji}(3) (\varphi_{03} + \frac{f_{03}}{p} - \frac{\kappa\tau f_{214}}{3p} + \frac{\kappa f_{214}}{3p^2} + \frac{\kappa\varphi_{214}}{3p} - \frac{\kappa f_{214}}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\varphi_{214}}{3p} e^{-p\tau}) + \delta_{ji}(4) (\varphi_{04} + \frac{f_{04}}{p} - \\
& - \frac{\kappa\tau f_1}{3p} + \frac{\kappa f_1}{3p^2} + \frac{\kappa\varphi_1}{3p} - \frac{\kappa f_1}{3p^2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\varphi_1}{3p} e^{-p\tau})) = \sum_{k=1}^L \frac{\kappa^k}{3^k (p + \kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} ((\varphi_{01}\beta_{ji}(1, k) + \varphi_{02}\beta_{ji}(2, k) + \\
& + \varphi_{03}\beta_{ji}(3, k) + \varphi_{04}\beta_{ji}(4, k)) + \frac{f_{01}\beta_{ji}(1, k) + f_{02}\beta_{ji}(2, k) + f_{03}\beta_{ji}(3, k) + f_{04}\beta_{ji}(4, k)}{p} - \\
& - \frac{\kappa}{p} e^{-p\tau} (\frac{\varphi_{234}}{3} \beta_{ji}(1, k) + \varphi_{03}\beta_{ji}(2, k) + \frac{\varphi_{214}}{3} \beta_{ji}(3, k) + \varphi_{01}\beta_{ji}(4, k)) + \\
& + \frac{\kappa}{p^2} (\frac{f_{234}}{3} \beta_{ji}(1, k) + f_{03}\beta_{ji}(2, k) + \frac{f_{214}}{3} \beta_{ji}(3, k) + f_{01}\beta_{ji}(4, k)) - \\
& - \frac{\kappa}{p^2} e^{-p\tau} (\frac{f_{234}}{3} \beta_{ji}(1, k) + f_{03}\beta_{ji}(2, k) + \frac{f_{214}}{3} \beta_{ji}(3, k) + f_{01}\beta_{ji}(4, k)) - \\
& - \frac{\kappa\tau}{p} (\frac{f_{234}}{3} \beta_{ji}(1, k) + f_{03}\beta_{ji}(2, k) + \frac{f_{214}}{3} \beta_{ji}(3, k) + f_{01}\beta_{ji}(4, k)) + \\
& + \frac{\kappa}{p} (\frac{\varphi_{234}}{3} \beta_{ji}(1, k) + \varphi_{03}\beta_{ji}(2, k) + \frac{\varphi_{214}}{3} \beta_{ji}(3, k) + \varphi_{01}\beta_{ji}(4, k)) + \\
& + \frac{1}{p + \kappa} ((\varphi_{01}\delta_{ji}(1) + \varphi_{02}\delta_{ji}(2) + \varphi_{03}\delta_{ji}(3) + \varphi_{04}\delta_{ji}(4)) + \\
& + \frac{f_{01}\delta_{ji}(1) + f_{02}\delta_{ji}(2) + f_{03}\delta_{ji}(3) + f_{04}\delta_{ji}(4)}{p} - \\
& - \frac{\kappa}{p} e^{-p\tau} (\frac{\varphi_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + \varphi_{03}\delta_{ji}(2) + \frac{\varphi_{214}}{3} \delta_{ji}(3) + \varphi_{01}\delta_{ji}(4)) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\kappa}{p^2} \left( \frac{f_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + f_{03} \delta_{ji}(2) + \frac{f_{214}}{3} \delta_{ji}(3) + f_{01} \delta_{ji}(4) \right) - \\
& - \frac{\kappa}{p^2} e^{-p\tau} \left( \frac{f_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + f_{03} \delta_{ji}(2) + \frac{f_{214}}{3} \delta_{ji}(3) + f_{01} \delta_{ji}(4) \right) - \\
& - \frac{\kappa\tau}{p} \left( \frac{f_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + f_{03} \delta_{ji}(2) + \frac{f_{214}}{3} \delta_{ji}(3) + f_{01} \delta_{ji}(4) \right) + \\
& + \frac{\kappa}{p} \left( \frac{\varphi_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + \varphi_{03} \delta_{ji}(2) + \frac{\varphi_{214}}{3} \delta_{ji}(3) + \varphi_{01} \delta_{ji}(4) \right).
\end{aligned}$$

Pažymime:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \varphi_{01} \beta_{ji}(1, k) + \varphi_{02} \beta_{ji}(2, k) + \varphi_{03} \beta_{ji}(3, k) + \varphi_{04} \beta_{ji}(4, k); \\
\alpha_2 &= f_{01} \beta_{ji}(1, k) + f_{02} \beta_{ji}(2, k) + f_{03} \beta_{ji}(3, k) + f_{04} \beta_{ji}(4, k); \\
\alpha_3 &= \frac{f_{234}}{3} \beta_{ji}(1, k) + f_{03} \beta_{ji}(2, k) + \frac{f_{214}}{3} \beta_{ji}(3, k) + f_{01} \beta_{ji}(4, k); \\
\alpha_4 &= \frac{\varphi_{234}}{3} \beta_{ji}(1, k) + \varphi_{03} \beta_{ji}(2, k) + \frac{\varphi_{214}}{3} \beta_{ji}(3, k) + \varphi_{01} \beta_{ji}(4, k).
\end{aligned}$$

$$\eta_1 = \varphi_{01} \delta_{ji}(1) + \varphi_{02} \delta_{ji}(2) + \varphi_{03} \delta_{ji}(3) + \varphi_{04} \delta_{ji}(4);$$

$$\eta_2 = f_{01} \delta_{ji}(1) + f_{02} \delta_{ji}(2) + f_{03} \delta_{ji}(3) + f_{04} \delta_{ji}(4);$$

$$\eta_3 = \frac{f_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + f_{03} \delta_{ji}(2) + \frac{f_{214}}{3} \delta_{ji}(3) + f_{01} \delta_{ji}(4);$$

(2.4.14)

$$\eta_4 = \frac{\varphi_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + \varphi_{03} \delta_{ji}(2) + \frac{\varphi_{214}}{3} \delta_{ji}(3) + \varphi_{01} \delta_{ji}(4).$$

Panaudojame (2.4.14) išraiškas:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^L \frac{\kappa^k}{3^k (p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} \left( \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{p} + \frac{\kappa}{p^2} \alpha_3 - \frac{\kappa\tau}{p} \alpha_3 + \frac{\kappa}{p} \alpha_4 - \frac{\kappa}{p^2} \alpha_3 e^{-p\tau} - \frac{\kappa}{p} \alpha_4 e^{-p\tau} \right) + \\
& + \frac{1}{p+\kappa} \left( \eta_1 + \frac{\eta_2}{p} + \frac{\kappa}{p^2} \eta_3 - \frac{\kappa\tau}{p} \eta_3 + \frac{\kappa}{p} \eta_4 - \frac{\kappa}{p^2} \eta_3 e^{-p\tau} - \frac{\kappa}{p} \eta_4 e^{-p\tau} \right) = \\
& = \sum_{k=1}^L \alpha_1 \frac{\kappa^k}{3^k (p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} + \sum_{k=1}^L (\alpha_2 - \kappa\tau\alpha_3 + \kappa\alpha_4) \frac{\kappa^k}{3^k p(p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} + \\
& + \sum_{k=1}^L \alpha_3 \kappa \frac{\kappa^k}{3^k p^2 (p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} - \sum_{k=1}^L \alpha_3 \kappa \frac{\kappa^k}{3^k p^2 (p+\kappa)^{k+1}} e^{-p(k+1)\tau} - \sum_{k=1}^L \alpha_4 \kappa \frac{\kappa^k}{3^k p(p+\kappa)^{k+1}} e^{-p(k+1)\tau} + \\
& + \frac{\eta_1}{p+\kappa} + \frac{\eta_2 - \kappa\tau\eta_3 + \kappa\eta_4}{p(p+\kappa)} + \frac{\kappa\eta_3}{p^2(p+\kappa)} - \frac{\kappa\eta_3}{p^2(p+\kappa)} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\eta_4}{p(p+\kappa)} e^{-p\tau}.
\end{aligned}$$

Pažymėkime:

$$S_1(p) = \sum_{k=1}^L \alpha_1 \frac{\kappa^k}{3^k (p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau}, \quad S_2(p) = \sum_{k=1}^L (\alpha_2 - \kappa\tau\alpha_3 + \kappa\alpha_4) \frac{\kappa^k}{3^k p(p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau},$$

$$S_3(p) = \sum_{k=1}^L \alpha_3 \kappa \frac{\kappa^k}{3^k p^2 (p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau}, \quad S_4(p) = \sum_{k=1}^L \alpha_4 \kappa \frac{\kappa^k}{3^k p(p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau},$$

$$S_{11}(p) = \frac{\eta_1}{p+\kappa}, \quad S_{21}(p) = \frac{\eta_2 - \kappa\tau\eta_3 + \kappa\eta_4}{p(p+\kappa)}, \quad S_{13}(p) = \frac{\kappa\eta_3}{p^2(p+\kappa)}, \quad S_{14}(p) = \frac{\kappa\eta_4}{p(p+\kappa)}.$$



Tada

$$\begin{aligned}
 & x_j(t) - x_i(t) \div S_1(p) + S_2(p) + S_3(p) - S_3(p)e^{-p\tau} - S_4(p)e^{-p\tau} + \\
 & + S_{11}(p) + S_{21}(p) + S_{31}(p) - S_{31}(p)e^{-p\tau} - S_{41}(p)e^{-p\tau} \div \\
 & \div S_1(t) + S_2(t) + S_3(t) - S_3(t-\tau)l(t-\tau) - S_4(t-\tau)l(t-\tau) + \\
 & + S_{11}(t) + S_{21}(t) + S_{31}(t) - S_{31}(t-\tau)l(t-\tau) - S_{41}(t-\tau)l(t-\tau);
 \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

čia

$$\begin{aligned}
 S_1(t) &= \sum_{k=1}^L \alpha_1 \frac{(\kappa t - k\kappa\tau)^k}{3^k k!} e^{-(\kappa t - k\kappa\tau)} l(t - k\tau); \\
 \kappa S_2(t) &= \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_2 - \kappa\tau\alpha_3 + \kappa\alpha_4}{3^k} \left(1 - \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa t - k\kappa\tau)^v}{v!} e^{-(\kappa t - k\kappa\tau)}\right) l(t - k\tau); \\
 \kappa^2 S_3(t) &= \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_3}{3^k} (\kappa t - k\kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa t - k\kappa\tau)^r}{r!} e^{-(\kappa t - k\kappa\tau)}) l(t - k\tau); \\
 \kappa S_4(t) &= \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_4}{3^k} \left(1 - \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa t - k\kappa\tau)^v}{v!} e^{-(\kappa t - k\kappa\tau)}\right) l(t - k\tau); \\
 S_{11}(t) &= \eta_1 e^{-\kappa t}; \\
 \kappa S_{21}(t) &= (\eta_2 - \kappa\tau\eta_3 + \kappa\eta_4)(1 - e^{-\kappa t}); \\
 \kappa^2 S_{31}(t) &= \eta_3 (\kappa t - 1 + e^{-\kappa t}); \\
 \kappa S_{41}(t) &= \eta_4 (1 - e^{-\kappa t}).
 \end{aligned}$$

Pasinaudojame išraiškėmis

$$\frac{1}{p(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{1}{\kappa^{k+1}} - \frac{1}{\kappa^{k+1}} \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa t)^v}{v!} e^{-\kappa t}, \tag{2.4.16}$$

$$\frac{1}{p^2(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{t}{\kappa^{k+1}} - \frac{k+1}{\kappa^{k+2}} + \frac{1}{\kappa^{k+2}} \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa t)^r}{r!} e^{-\kappa t}, \tag{2.4.17}$$

kurias gauname remdamiesi Diuamelio formule:

$$pF_1(p)F_2(p) \div f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau. \tag{2.4.18}$$

Taikydami atvirkštinę Laplaso transformaciją, randame pirmavaizdžius:

$$\frac{1}{(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{t^k}{k!} e^{-\kappa t} = f_1(t),$$

$$\frac{1}{p^2} \div t = f_2(t).$$

Randame

$$f_2(0) = 0; \quad f_2'(t) = 1.$$

Įsistatome gautus reiškinius į formulę (2.4.18):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{t^k}{k!} e^{-\kappa t} \cdot 0 + \int_0^t \frac{\tau^k}{k!} e^{-\kappa \tau} d\tau = \left( \begin{array}{l} u = \tau^k \quad dv = e^{-\kappa \tau} d\tau \\ du = k\tau^{k-1} d\tau \quad v = -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa \tau} \end{array} \right) = \\
& = -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa \tau} \tau^k \frac{1}{k!} \Big|_0^t - \frac{1}{k!} \int_0^t \left(-\frac{1}{\kappa}\right) e^{-\kappa \tau} k\tau^{k-1} d\tau = \frac{t^k e^{-\kappa t}}{\kappa k!} + \frac{k}{\kappa k!} \int_0^t \tau^{k-1} e^{-\kappa \tau} d\tau = \\
& = \left( \begin{array}{l} u = \tau^{k-1} \quad dv = e^{-\kappa \tau} d\tau \\ du = (k-1)\tau^{k-2} d\tau \quad v = -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa \tau} \end{array} \right) = \frac{t^k e^{-\kappa t}}{\kappa k!} + \frac{t^{k-1} e^{-\kappa t}}{\kappa^2 (k-1)!} + \frac{k-1}{\kappa^2 (k-1)!} \int_0^t e^{-\kappa \tau} \tau^{k-2} d\tau = \\
& = \dots = \frac{1}{\kappa^{k+1}} - \frac{1}{\kappa^{k+1}} \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa t)^v}{v!} e^{-\kappa t}.
\end{aligned}$$

Gavome (2.4.16) išraišką.

Įvedame pažymėjimus:

$$\begin{aligned}
S_2^*(t) &= \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_2^* - \kappa t \alpha_3^* + \alpha_4}{3^k} \left(1 - \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa t - k\kappa \tau)^v}{v!} e^{-(\kappa t - k\kappa \tau)}\right) l(t - k\tau); \\
S_{21}^*(t) &= (\eta_2^* - \kappa t \eta_3^* + \eta_4)(1 - e^{-\kappa t}); \\
S_3^*(t) &= \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_3^*}{3^k} (\kappa t - k\kappa \tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa t - k\kappa \tau)^r}{r!} e^{-(\kappa t - k\kappa \tau)}) l(t - k\tau); \\
S_{31}^*(t) &= \eta_3^* (\kappa t - 1 + e^{-\kappa t}); \\
\alpha_2^* &= \frac{f_{01}}{\kappa} \beta_{ji}(1, k) + \frac{f_{02}}{\kappa} \beta_{ji}(2, k) + \frac{f_{03}}{\kappa} \beta_{ji}(3, k) + \frac{f_{04}}{\kappa} \beta_{ji}(4, k); \\
\alpha_3^* &= \frac{f_{234}}{3\kappa} \beta_{ji}(1, k) + \frac{f_{03}}{\kappa} \beta_{ji}(2, k) + \frac{f_{214}}{3\kappa} \beta_{ji}(3, k) + \frac{f_{01}}{\kappa} \beta_{ji}(4, k); \\
\eta_2^* &= \frac{f_{01}}{\kappa} \delta_{ji}(1) + \frac{f_{02}}{\kappa} \delta_{ji}(2) + \frac{f_{03}}{\kappa} \delta_{ji}(3) + \frac{f_{04}}{\kappa} \delta_{ji}(4); \\
\eta_3^* &= \frac{f_{234}}{3\kappa} \delta_{ji}(1) + \frac{f_{03}}{\kappa} \delta_{ji}(2) + \frac{f_{214}}{3\kappa} \delta_{ji}(3) + \frac{f_{01}}{\kappa} \delta_{ji}(4)
\end{aligned}$$

ir parašome galutinę fazių skirtumo išraišką:

$$\begin{aligned}
x_j(t) - x_i(t) &= S_1(t) + S_2^*(t) + S_3^*(t) - S_3^*(t - \tau) l(t - \tau) - S_4(t - \tau) l(t - \tau) + \\
&+ S_{11}(t) + S_{21}^*(t) + S_{31}^*(t) - S_{31}^*(t - \tau) l(t - \tau) - S_{41}(t - \tau) l(t - \tau).
\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

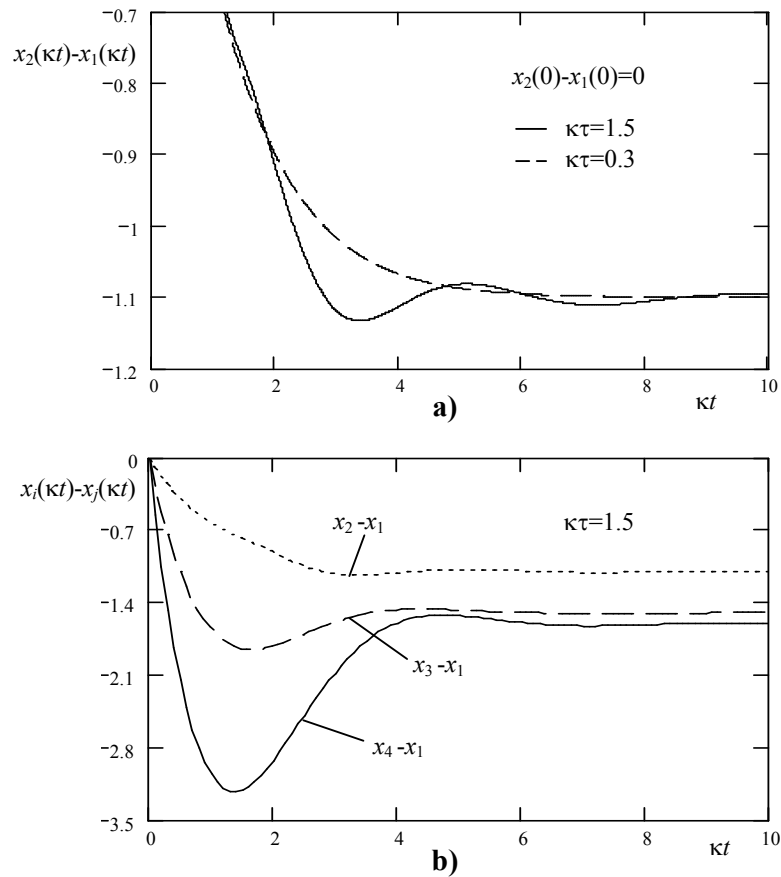
Apskaičiuojame  $\beta_{ji}(m, k)$  ir  $\delta_{ji}(m)$ ,  $m = \overline{1, 4}$ ,  $i \neq j$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ :

kai  $j = 2$ ,  $i = 1$ , tai

$$\begin{aligned}
\beta_{21}(1, k) &= (-2)^{k-1} + (-1)^k, \quad \beta_{21}(2, k) = \beta_{21}(4, k) = (-2)^{k-1}, \quad \beta_{21}(3, k) = (-2)^{k-1} - (-1)^k; \\
\delta_{21}(1) &= -1; \quad \delta_{21}(2) = 1; \quad \delta_{21}(3) = 0; \quad \delta_{21}(4) = 0;
\end{aligned}$$

kai  $j = 3$ ,  $i = 1$  tai

$$\begin{aligned}
\beta_{31}(1, k) &= -(-1)^k, \quad \beta_{31}(2, k) = \beta_{31}(4, k) = 0, \quad \beta_{31}(3, k) = (-1)^k; \\
\delta_{31}(1) &= -1; \quad \delta_{31}(2) = 0; \quad \delta_{31}(3) = 1; \quad \delta_{31}(4) = 0;
\end{aligned}$$



2.5 pav. Fazių skirtumų  $x_j(t) - x_i(t)$  grafikai

kai  $j = 3, i = 2$

$$\beta_{32}(1, k) = 0.5(-2)^k - 2(-1)^k, \quad \beta_{32}(2, k) = \beta_{32}(4, k) = -0.5(-2)^k, \quad \beta_{32}(4, k) = 0.5(-2)^k + 2(-1)^k;$$

$$\delta_{32}(1) = 0; \quad \delta_{32}(2) = -1; \quad \delta_{32}(3) = 1; \quad \delta_{32}(4) = 0;$$

kai  $j = 4, i = 1$

$$\beta_{41}(1, k) = (-2)^{k-1} - 2(-1)^k, \quad \beta_{41}(2, k) = \beta_{41}(4, k) = 0.5(-2)^k, \quad \beta_{41}(3, k) = (-2)^{k-1} + 2(-1)^k;$$

$$\delta_{41}(1) = -1; \quad \delta_{41}(2) = 0; \quad \delta_{41}(3) = 0; \quad \delta_{41}(4) = 1;$$

kai  $j = 4, i = 2$

$$\beta_{42}(1, k) = -3(-1)^k, \quad \beta_{42}(2, k) = \beta_{42}(4, k) = 0, \quad \beta_{42}(3, k) = 3(-1)^k;$$

$$\delta_{42}(1) = 0; \quad \delta_{42}(2) = -1; \quad \delta_{42}(3) = 0; \quad \delta_{42}(4) = 1;$$

kai  $j = 4, i = 3$

$$\beta_{43}(1, k) = (-2)^{k-1} - (-1)^k, \quad \beta_{43}(2, k) = \beta_{43}(4, k) = 0.5(-2)^k, \quad \beta_{43}(3, k) = (-2)^{k-1} + (-1)^k;$$

$$\delta_{43}(1) = 0; \quad \delta_{43}(2) = 1; \quad \delta_{43}(3) = -1; \quad \delta_{43}(4) = 1.$$

Generatorių virpesių fazių skirtumų pereinamieji procesai priklauso nuo pradinių sąlygų, t.y. nuo generatorių savųjų dažnių  $f_{0i}$  ir pradinių fazių  $\varphi_{0i}$ ,  $i = \overline{1, 4}$ . Taip pat nuo parametru  $\kappa\tau$  sandaugos.

Didėjant  $\kappa\tau$  pereinamojo proceso trukmė didėja. Kai kurių fazių skirtumų grafikai pateikti 2.5 paveiksle (skaičiuota, kai  $\frac{f_{01}}{\kappa} = 2001$ ;  $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2000$ ;  $\frac{f_{03}}{\kappa} = 1999$ ;  $\frac{f_{04}}{\kappa} = 1998$ ,  $\varphi_{0i} = 0.5$   $i = \overline{1,4}$ ) (daugiau grafikų žr. 4 priede).

## IŠVADOS

1. Pereinamojo proceso pobūdis sinchronizacijos sistemoje priklauso nuo parametrų  $\kappa$  ir  $\tau$  sandaugos. Didėjant  $\kappa\tau$  pereinamojo proceso trukmė didėja, pereinamasis procesas tampa virpamu, kai  $\kappa\tau > 0.75$ .

2. Kai vėlinimo  $\tau$  ir koeficiento  $\kappa$  sandauga daug mažesnė nei vienetą ( $\kappa\tau < 0,01$ ), tai pereinamosios funkcijos praktiškai nepriklauso nuo vėlinimo  $\tau$  dydžio, Tuo atveju galima nagrinėti supaprastintą sistemos matematinį modelį – matricinę diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento.

3. Generatorių virpesių fazių skirtumų nusistovėjusios reikšmės sinchronizacijos sistemoje yra tiesiogiai proporcingos generatorių savųjų dažnių skirtumams ir atvirkščiai proporcingos koeficientui  $\kappa$ . Jos nepriklauso nuo vėlinimo  $\tau$  dydžio ir generatorių virpesių fazių reikšmių pradinio laiko momentu.

## LITERATŪRA

1. Ambrazevičius A., Domarkas A. Matematinės fizikos lygtys. Vilnius: Aldorija, 1999, 2d. – 388 p.
2. Krivickas R., Jočys A. Grandinių teorijos pagrindai. Vilnius: Mokslas, 1980, 294 p.
3. Kvedaras B. Matricų teorija. Kaunas: VDU, 1999, 362 p.
4. Apynis A., Stankus E. Matematika. Vilnius: 2001, 357 p.
5. Rimas J. Operacinis skaičiavimas. Kaunas, 1999, 65 p.
6. Stefano Bregni C. A Historical Perspective on Telecommunications Network Synchronization. //IEEE Communications Magazine, June 1998, p. 158 – 166.
7. Miller M. R. Feasibility studies of synchronized - oscillator systems for p.e.m. telephone networks. //Proc IEE, Vol. 116, No.7, 1969, p. 1135-1144.
8. Синхронные сети передачи данных. Москва: Радио и связь, 1988, с. 256.
9. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. Москва: Машиностроение, 1974, с. 327.
10. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория Поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. Москва: Наука, 1973, с. 336.
11. Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике. Москва: Наука, 1970, с. 560.

### 3. 1 priedas. Pereinamųjų funkcijų skaičiavimo programos tekstas

Kintamas dydis  $\kappa\tau := 0.3$

ORIGIN := 1

$$B_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L := \left( \frac{15}{\kappa\tau} \right) - 1$$

$t\kappa := 0, 0.01 \dots (L + 1) \cdot \kappa\tau$

$d := \text{floor}(L) \quad k := 0 \dots d$

$$P(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{Vienetinė Hevisaido funkcija}$$

pereinamųjų funkcijų skaičiavimo formulė:

$$h(t\kappa) := \sum_{k=0}^d \left[ \frac{(t\kappa - k \cdot \kappa\tau)^k}{3^k \cdot k!} \cdot e^{-(t\kappa - k \cdot \kappa\tau)} \cdot B_1^k \cdot P(t\kappa - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

### 4. 2 priedas. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ skaičiavimo programos tekstas

Pradinės fazės:	Kintami dydžiai	
	Generatorių savieji dažniai:	Koeficiento $\kappa$ ir velinimo $\tau$ sandauga
$\phi_{01} := 0.5$	$f_{01\kappa} := 2000$	$\kappa\tau := 0.5$
$\phi_{02} := 0.5$	$f_{02\kappa} := 2002$	
$\phi_{03} := 0.5$	$f_{03\kappa} := 2001$	
$\phi_{04} := 0.5$	$f_{04\kappa} := 2004$	

## PROGRAMA

Pažymėjimai:  $f_{234\kappa} := f_{02\kappa} + f_{03\kappa} + f_{04\kappa}$

$$f_{214\kappa} := f_{02\kappa} + f_{01\kappa} + f_{04\kappa}$$

$$\phi_{214} := \phi_{01} + \phi_{02} + \phi_{04}$$

$$\phi_{234} := \phi_{02} + \phi_{03} + \phi_{04}$$

$$L := \left( \frac{15}{\kappa\tau} \right) - 1$$

$$\kappa\tau := 0, 0.1.. (L + 1) \cdot \kappa\tau$$

$$d := \text{floor}(L)$$

$$P(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

matricos  $B_1$  pakeltos  $k$ -tuoju laipsniu elementu skirtumai:

$$\beta_1(k) := -[(-1)^k]$$

$$\beta_2(k) := 0$$

$$\beta_3(k) := (-1)^k$$

$$\beta_4(k) := 0$$

Pažymėjimai:

$$\alpha_1(k) := \phi_{01} \cdot \beta_1(k) + \phi_{02} \cdot \beta_2(k) + \phi_{03} \cdot \beta_3(k) + \phi_{04} \cdot \beta_4(k)$$

$$\alpha_2(k) := f_{01\kappa} \cdot \beta_1(k) + f_{02\kappa} \cdot \beta_2(k) + f_{03\kappa} \cdot \beta_3(k) + f_{04\kappa} \cdot \beta_4(k)$$

$$\alpha_3(k) := \frac{f_{234\kappa} \cdot \beta_1(k)}{3} + f_{02\kappa} \cdot \beta_2(k) + \frac{f_{214\kappa} \cdot \beta_3(k)}{3} + f_{04\kappa} \cdot \beta_4(k)$$

$$\alpha_4(k) := \frac{\phi_{234} \beta_1(k)}{3} + \phi_{02} \cdot \beta_2(k) + \frac{\phi_{214} \beta_3(k)}{3} + \phi_{04} \cdot \beta_4(k)$$



$$S_1(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_1(k) (\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^k}{3^k k!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_2(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_2(k) - \kappa \tau \cdot \alpha_3(k) + \alpha_4(k)}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_3(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_3(k)}{3^k} \cdot \left[ \kappa t - k \cdot \kappa \tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_4(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_4(k)}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{11}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{(-\phi_{01} + \phi_{03})(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^k}{3^k k!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{\left( (-f_{01\kappa} + f_{03\kappa} - \kappa \tau \cdot \frac{-f_{234\kappa} + f_{214\kappa}}{3}) - \frac{\phi_{234}}{3} + \frac{\phi_{214}}{3} \right)}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{31}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{-f_{234\kappa} + f_{214\kappa}}{3^k} \cdot \left[ \kappa t - k \cdot \kappa \tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{41}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{\frac{\phi_{234}}{3} + \frac{\phi_{214}}{3}}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$x_{31}(\kappa t) = S_1(\kappa t) + S_2(\kappa t) + S_3(\kappa t) - S_3(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) - S_4(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) +$$

$$\blacksquare + S_{11}(\kappa t) + S_{21}(\kappa t) + S_{31}(\kappa t) - S_{31}(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) - S_{41}(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau)$$

$$\beta_{11}(k) := (-2)^k \cdot (-0.5) + (-1)^k$$

$$\beta_{21}(k) := (-2)^k \cdot 0.5$$

$$\beta_{31}(k) := (-2)^k \cdot (-0.5) - (-1)^k$$

$$\beta_{41}(k) := (-2)^k \cdot 0.5$$

$$S_{11}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_1(k) (\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^k}{3^k k!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_2(k) - \kappa \tau \cdot \alpha_3(k) + \alpha_4(k)}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{31}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_3(k)}{3^k} \cdot \left[ \kappa t - k \cdot \kappa \tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{41}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_4(k)}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{111}(\kappa t) := (-\phi_{01} + \phi_{02}) \cdot e^{-\kappa t}$$

$$S_{211}(\kappa t) := \left[ -f_{01\kappa} + f_{02\kappa} - \kappa \tau \cdot \left( \frac{-f_{234\kappa}}{3} + f_{03\kappa} \right) - \frac{\phi_{234}}{3} + \phi_{03} \right] \cdot (1 - e^{-\kappa t})$$

$$S_{311}(\kappa t) := \left( \frac{-f_{234\kappa}}{3} + f_{03\kappa} \right) \cdot (\kappa t - 1 + e^{-\kappa t})$$

$$S_{411}(\kappa t) := \left( -\frac{\phi_{234}}{3} + \phi_{03} \right) \cdot (1 - e^{-\kappa t})$$

$$x_{21}(\kappa t) = S_1(\kappa t) + S_2(\kappa t) + S_3(\kappa t) - S_3(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) - S_4(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) +$$

$$\blacksquare + S_{11}(\kappa t) + S_{21}(\kappa t) + S_{31}(\kappa t) - S_{31}(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) - S_{41}(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau)$$

$$\beta_{11}(k) := (-2)^k \cdot 0.5 - 2(-1)^k$$

$$\beta_{21}(k) := (-2)^k \cdot (-0.5)$$

$$\beta_{31}(k) := (-2)^k \cdot 0.5 + 2(-1)^k$$

$$\beta_{41}(k) := (-2)^k \cdot (-0.5)$$

$$S_{11}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_1(k) (\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^k}{3^k k!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_2(k) - \kappa \tau \cdot \alpha_3(k) + \alpha_4(k)}{3^k} \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{31}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_3(k)}{3^k} \left[ \kappa t - k \cdot \kappa \tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{41}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_4(k)}{3^k} \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{111}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{(-\phi_{02} + \phi_{03}) (\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^k}{3^k k!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{211}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{\left[ -f_{02\kappa} + f_{03\kappa} - \kappa \tau \cdot \left( -f_{03\kappa} + \frac{f_{214\kappa}}{3} \right) \right] - \phi_{03} + \frac{\phi_{214}}{3}}{3^k} \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{311}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{-f_{03\kappa} + \frac{f_{214\kappa}}{3}}{3^k} \left[ \kappa t - k \cdot \kappa \tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{411}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{-\phi_{03} + \frac{\phi_{214}}{3}}{3^k} \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$x_{32}(\kappa t) = S_1(\kappa t) + S_2(\kappa t) + S_3(\kappa t) - S_3(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) - S_4(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) +$$

$$\blacksquare + S_{11}(\kappa t) + S_{21}(\kappa t) + S_{31}(\kappa t) - S_{31}(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) - S_{41}(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau)$$

$$\beta_{11}(k) := (-2)^k \cdot (-0.5) - 2(-1)^k$$

$$\beta_{21}(k) := (-2)^k \cdot 0.5$$

$$\beta_{31}(k) := (-2)^k \cdot (-0.5) + 2(-1)^k$$

$$\beta_{41}(k) := (-2)^k \cdot 0.5$$

$$S_{11}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_1(k) (\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^k}{3^k k!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_2(k) - \kappa \tau \cdot \alpha_3(k) + \alpha_4(k)}{3^k} \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{31}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_3(k)}{3^k} \left[ \kappa t - k \cdot \kappa \tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{41}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_4(k)}{3^k} \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{111}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{(-\phi_{01} + \phi_{03}) (\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^k}{3^k k!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{211}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{\left[ -f_{01\kappa} + f_{04\kappa} - \kappa \tau \cdot \left( \frac{-f_{234\kappa}}{3} + f_{01\kappa} \right) \right] - \frac{\phi_{234}}{3} + \phi_{01}}{3^k} \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{311}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{\frac{-f_{234\kappa}}{3} + f_{01\kappa}}{3^k} \left[ \kappa t - k \cdot \kappa \tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{411}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{\frac{\phi_{234}}{3} + \phi_{01}}{3^k} \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$x_{41}(\kappa t) = S_1(\kappa t) + S_2(\kappa t) + S_3(\kappa t) - S_3(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) - S_4(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) +$$

$$\blacksquare + S_{11}(\kappa t) + S_{21}(\kappa t) + S_{31}(\kappa t) - S_{31}(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) - S_{41}(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau)$$

$$\beta_{11}(k) := (-1)^k \cdot (-3)$$

$$\beta_{21}(k) := 0$$

$$\beta_{31}(k) := 3(-1)^k$$

$$\beta_{41}(k) := 0$$

$$S_{11}(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_1(k) (\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^k}{3^k k!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_2(k) - \kappa\tau \cdot \alpha_3(k) + \alpha_4(k)}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{31}(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_3(k)}{3^k} \cdot \left[ \kappa\tau - k \cdot \kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[ \frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{41}(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_4(k)}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{111}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{(-\phi_{02} + \phi_{04}) (\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^k}{3^k k!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{211}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{[-f_{02\kappa} + f_{04\kappa} - \kappa\tau \cdot (-f_{03\kappa} + f_{01\kappa})] - \phi_{03} + \phi_{01}}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{311}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{-f_{03\kappa} + f_{01\kappa}}{3^k} \cdot \left[ \kappa\tau - k \cdot \kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[ \frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{411}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{-\phi_{03} + \phi_{01}}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$x_{42}(\kappa\tau) = S_1(\kappa\tau) + S_2(\kappa\tau) + S_3(\kappa\tau) - S_3(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) - S_4(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) +$$

$$\blacksquare + S_{11}(\kappa\tau) + S_{21}(\kappa\tau) + S_{31}(\kappa\tau) - S_{31}(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) - S_{41}(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau)$$

$$\beta_{11}(k) := (-2)^k \cdot (-0.5) - (-1)^k$$

$$\beta_{21}(k) := (-2)^k \cdot 0.5$$

$$\beta_{31}(k) := (-2)^k \cdot (-0.5) + (-1)^k$$

$$\beta_{41}(k) := (-2)^k \cdot 0.5$$

$$S_{11}(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_1(k)(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)^k}{3^k k!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)} \cdot P(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_2(k) - \kappa\tau \cdot \alpha_3(k) + \alpha_4(k)}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau) \right]$$

$$S_{31}(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_3(k)}{3^k} \cdot \left[ \kappa\tau - k\cdot\kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[ \frac{(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau) \right]$$

$$S_{41}(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\alpha_4(k)}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau) \right]$$

$$S_{111}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{(-\phi_{03} + \phi_{04})(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)^k}{3^k k!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)} \cdot P(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau) \right]$$

$$S_{211}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{\left[ -f_{03\kappa} + f_{04\kappa} - \kappa\tau \cdot \left( \frac{-f_{214\kappa}}{3} + f_{01\kappa} \right) \right] - \frac{\phi_{214}}{3} + \phi_{01}}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau) \right]$$

$$S_{311}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{\frac{-f_{214\kappa}}{3} + f_{01\kappa}}{3^k} \cdot \left[ \kappa\tau - k\cdot\kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[ \frac{(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau) \right]$$

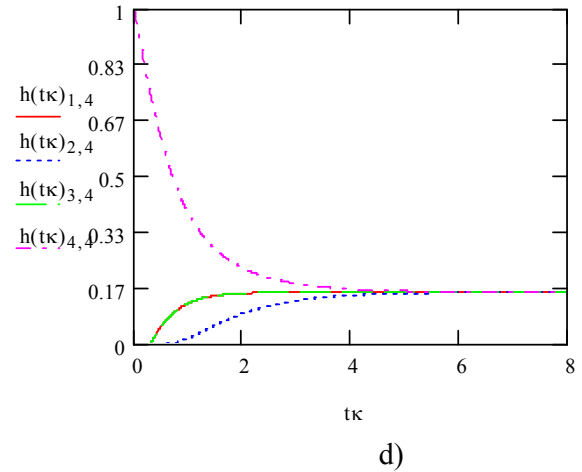
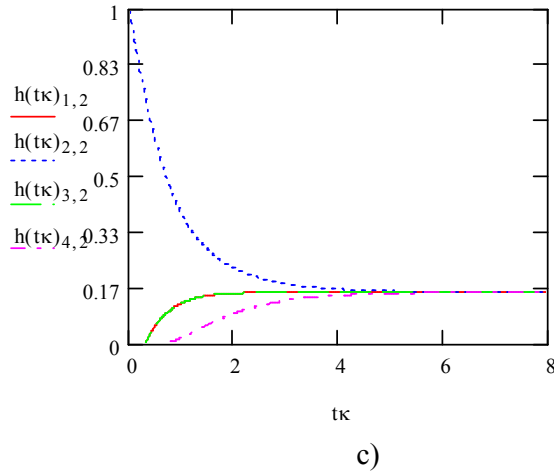
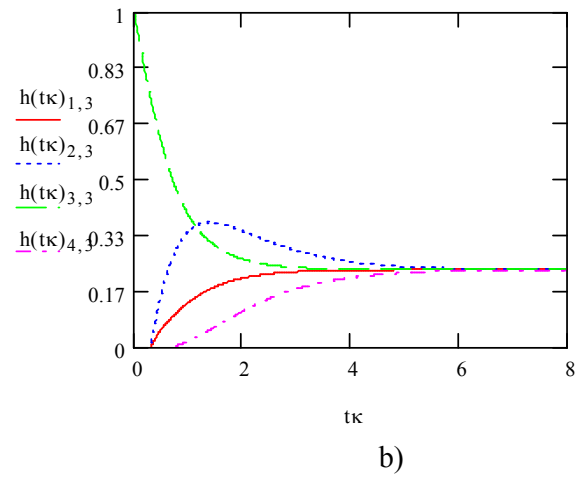
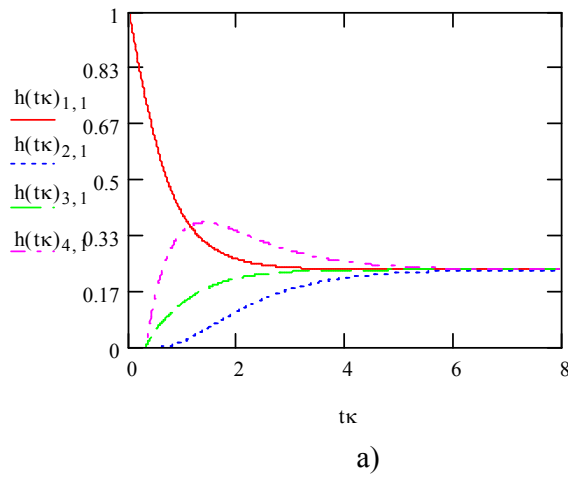
$$S_{411}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[ \frac{\frac{\phi_{214}}{3} + \phi_{01}}{3^k} \cdot \left[ 1 - \sum_{v=0}^k \left[ \frac{(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k\cdot\kappa\tau) \right]$$

$$x_{43}(\kappa\tau) = S_1(\kappa\tau) + S_2(\kappa\tau) + S_3(\kappa\tau) - S_3(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) - S_4(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) +$$

$$\blacksquare + S_{11}(\kappa\tau) + S_{21}(\kappa\tau) + S_{31}(\kappa\tau) - S_{31}(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) - S_{41}(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau)$$

## 5. 3 priedas. Pereinamųjų funkcijų grafikai

Pereinamųjų funkcijų grafikai prie skirtingų  $\kappa\tau$  reikšmių.

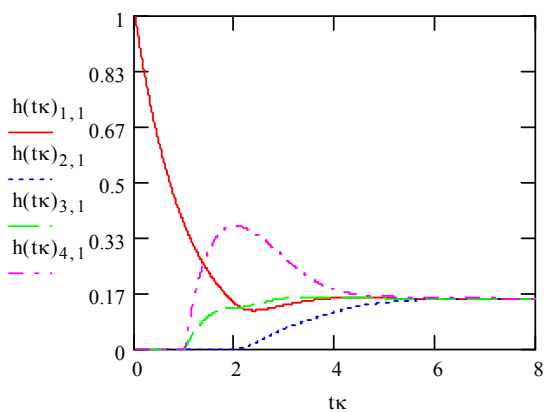


1 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ij}(\kappa t)$  grafikai, kai  $\kappa\tau=0.3$

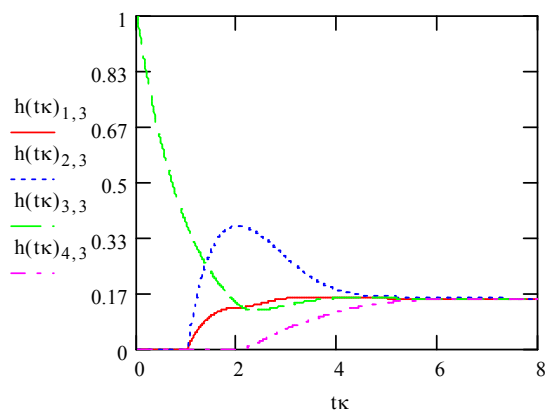
**Ribinės reikšmės, kai  $\kappa\tau = 0.3$**

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i1}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i3}(t) = \frac{3}{10(1+0.3)} = 0.23,$$

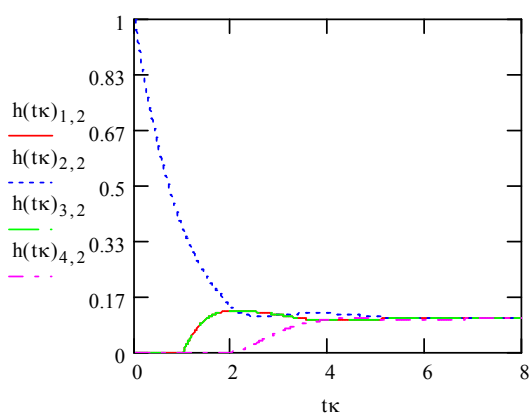
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i2}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i4}(t) = \frac{1}{5(1+0.3)} = 0.154, \quad i = \overline{1,4}.$$



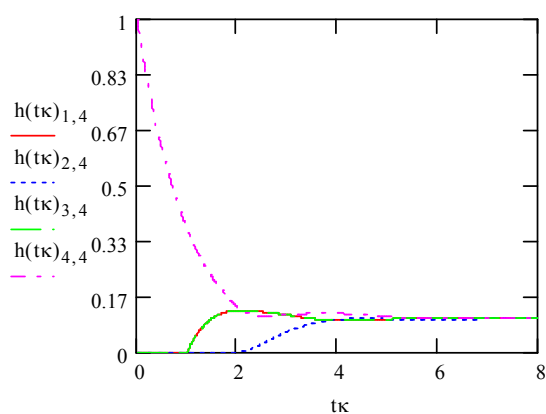
a)



b)



c)



d)

2 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ij}(\kappa t)$  grafikai, kai  $\kappa\tau=1$ 

**Ribinės reikšmės, kai  $\kappa = 1$**

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i1}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i3}(t) = \frac{3}{10(1+1)} = 0.15,$$

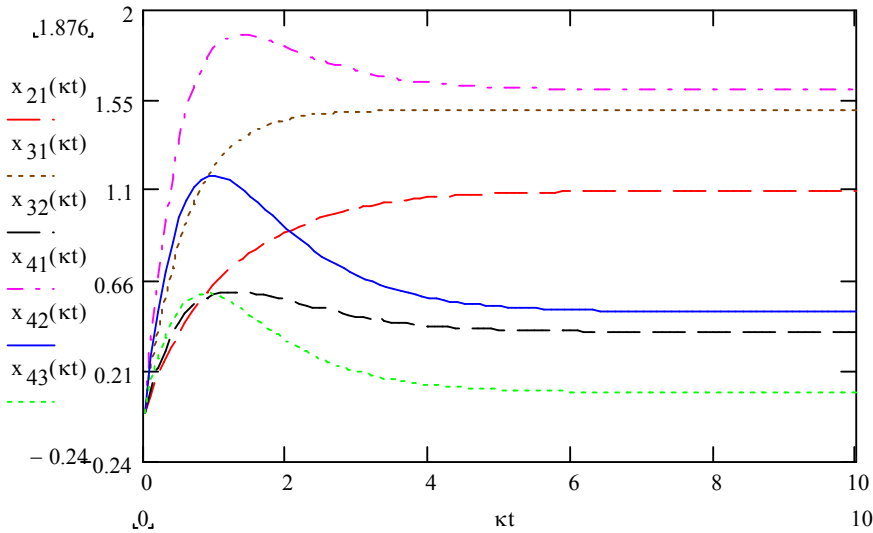
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i2}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} h_{i4}(t) = \frac{1}{5(1+1)} = 0.1, \quad i = \overline{1,4}.$$



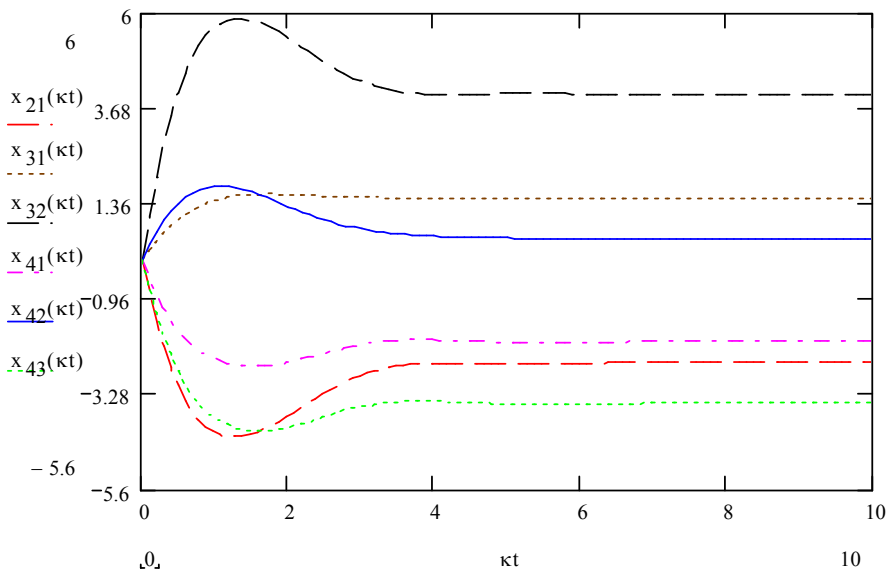
### 6. 4 priedas. Fazių skirtumų $X_j(T) - X_i(T)$ grafikai

Skaičiuota, 3.a pav., kai  $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$ ;  $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2000$ ;  $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2001$ ;  $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2002$ ,  $\varphi_{0i} = 0.5$   $i = \overline{1,4}$ ,  $\kappa\tau = 0.5$ .

3.b pav., kai  $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1899$ ;  $\frac{f_{02}}{\kappa} = 1894$ ;  $\frac{f_{03}}{\kappa} = 1901$ ;  $\frac{f_{04}}{\kappa} = 1896$ ,  $\varphi_{0i} = 0.25$   $i = \overline{1,4}$ ,  $\kappa\tau = 1$ .



a)



b)

3 pav. Fazių skirtumų  $x_j(t) - x_i(t)$  grafikai (čia  $x_{ji}$  atitinka skirtumą  $x_j(t) - x_i(t)$ )

Generatorių virpesių fazių skirtumų ribinės reikšmės, kai  $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$ ;  $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2000$ ;  
 $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2001$ ;  $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2002$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_2(p) - X_1(p)) = \frac{4}{5} \frac{f_{02} - f_{01}}{\kappa} + \frac{1}{4} \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa} + \frac{1}{5} \frac{f_{03} - f_{04}}{\kappa} = 1.1;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_1(p)) = \frac{3}{4} \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa} = 1.5;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_2(p)) = \frac{1}{5} \frac{f_{04} - f_{02}}{\kappa} + \frac{3}{10} \frac{f_{01} - f_{03}}{\kappa} + \frac{3}{5} \frac{f_{03} - f_{02}}{\kappa} = 0.4;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_1(p)) = -\frac{3}{10} \frac{f_{01} - f_{03}}{\kappa} + \frac{1}{5} \frac{f_{04} - f_{02}}{\kappa} + \frac{3}{5} \frac{f_{04} - f_{03}}{\kappa} = 1.6;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_2(p)) = \frac{3}{4} \frac{f_{01} - f_{03}}{\kappa} + \frac{f_{04} - f_{02}}{\kappa} = 0.5;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_3(p)) = \frac{9}{20} \frac{f_{01} - f_{03}}{\kappa} + \frac{1}{5} \frac{f_{04} - f_{02}}{\kappa} + \frac{3}{5} \frac{f_{04} - f_{03}}{\kappa} = 0.1.$$

$$\mathbf{Kai} \frac{f_{01}}{\kappa} = 1899; \frac{f_{02}}{\kappa} = 1894; \frac{f_{03}}{\kappa} = 1901; \frac{f_{04}}{\kappa} = 1896, \mathbf{tai}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_2(p) - X_1(p)) = -2.5;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_1(p)) = 1.5;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_2(p)) = 4;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_1(p)) = -2;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_2(p)) = 0.5;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_3(p)) = -3.5.$$