KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Agnė Burauskaitė

PRIKLAUSOMŲ NORMALIŲJŲ DYDŽIŲ EKSTREMUMŲ MOMENTAI

Magistro darbas

Vadovas

prof.dr. J.A.Aksomaitis

KAUNAS, 2005

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. dr. J.Rimas
2005 06 06

PRIKLAUSOMŲ NORMALIŲJŲ DYDŽIŲ EKSTREMUMŲ MOMENTAI

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Kalbos konsultantas
dr. J.Džežulskienė
2005 05 24

Vadovas
prof.dr. J.A.Aksomaitis
2005 05 26

Recenzentas
prof.dr. M.Bloznelis
2005 05 26

Atliko
FMMM-3 gr. stud.
A.Burauskaitė
2005 05 24

KAUNAS, 2005

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas:	Leonas Saulis, profesorius (VGTU)
Sekretorius:	Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)
Nariai:	Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)
	Vytautas Janilionis, docentas (KTU)
	Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)
	Rimantas Rudzkis, banko NORD/LB vyriausiasis analitikas
	Zenonas Navickas, profesorius (KTU)
	Arūnas Barauskas, UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

Burauskaitė A. Moments of extremes of normally distributed dependent values: Master's work in applied mathematics / supervisor prof. dr. J. A. Aksomaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology.- Kaunas, 2005. - 56p.

SUMMARY

Gaussian distribution is the most applied in practice and because of that reason there is a great amount of studies done in this area. In this report we look at Gaussian distribution from a point of view of extreme value theory. More concretely, moments of maximum of normally distributed values are discussed.

There are methods to calculate moments of extremes of independent identically distributed normal values, values with different variances and asymptotical results.

In this work a case of dependant variables is analyzed and aim is to look for results in similar cases that is done for independent variables. Continuing Bachelor's work formula for moment calculation of maximum of two dependent normal variables with all different parameters is presented. Also there is a proof of formula for calculation of odd order moments of three dependent variable maximum. This result is generalized for random variable vectors of any length. There is a theorem stated, according to which moments of length n vector maximum could be expressed by same order moments of shorter vectors. Unfortunately, because of requirements for numbers n and m, no recursion method could be applied.

Using computer, maximum of various length random vectors with dependent components is simulated and average is analyzed. In experiments relation between mean values of dependent and independent variable maximums is observed. This relation is stated in a form of a formula and proved for vectors of any length. In this way it forms a method all results that were showed for independent normal variable to be transfered into dependent variable case.

A part of this work was presented and published in XLV Conference of Lithuanian Mathematicians Society (2004). Report: "On Calculation of Moments of Normal Values Extremes".

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮŽANGA

Dažnai praktikoje pasitaikantis yra normalusis arba Gauso pasiskirstymo dėsnis. Dėl savo populiarumo šis skirstinys yra ištirtas visapusiškai. Šiame darbe dar kartą bandysime panagrinėti normalųjį skirstinį ekstremaliųjų reikšmių teorijos požiūriu, o konkrečiau, bus tiriamos normaliųjų dydžių maksimumo skaitinės charakteristikos.

Nepriklausomų normaliųjų dydžių ekstremumų pradiniai momentai yra išsamiai išnagrinėti. Žinomos konkrečios reikšmės keliems vienodai pasiskirsčiusiems normaliesiems dydžiams, normaliesiems dydžiams su skirtingomis dispersijomis ([2]).

Priklausomiems atsitiktiniams dydžiams, išskyrus asimptotinę aproksimaciją, yra nedaug kas ištirta. Tikslios normaliųjų dydžių maksimumo ir minimumo momentų išraiškos yra taikomos ekonomikos modeliavime, operacijų tyrime, genetikoje ([5]). Taip pat, kai ekstremumų pasiskirstymo funkcija turi sudėtingą išraišką, kurią nėra patogu naudoti, yra naudinga žinoti kitais metodais apskaičiuotus ekstremumų momentus.

Šiame darbe bandoma rasti momentų išraiškas priklausomiems normaliesiems dydžiams tokiais atvejais, kuriais rezultatai literatūroje yra pateikti nepriklausomiems dydžiams. Pratęsiant bakalauro darbą yra pateikiamos formulės dviejų priklausomų dydžių su skirtingais parametrais maksimumo momentams skaičiuoti, taip pat formulė trijų priklausomų normaliųjų dydžių maksimumo nelyginės eilės momentams skaičiuoti. Šis rezultatas yra apibendrinamas n-mačiams vektoriams. Pateikta teorema, kurios rezultatais remiantis n-mačio vektoriaus maksimumo momentus galima išreiškiant mažesnio mato vektorių maksimumų momentais. Tačiau, dėl sąlygų vektoriaus matui (ilgiui) n ir momento eilei m, negalima sudaryti bendros rekurentinės formulės momentams skaičiuoti.

Kompiuterio pagalba yra modeliuojami ir analizuojami įvairaus ilgio vektorių, sudarytų iš priklausomų vienodai pasiskirsčiusių normaliųjų dydžių, maksimumo vidurkiai. Eksperimentiškai tiriant pastebėtas ryšys tarp priklausomų ir nepriklausomų atsitiktinių dydžių maksimumų vidurkių. Šis sąryšis pateikiamas formule ir įrodomas n-mačiams vektoriams. Taip pat rezultatai yra apibendrinami aukštesnės eilės momentams. Tai leidžia rezultatus, gautus nepriklausomiems vienodai pasiskirsčiusiems normaliesiems dydžiams, perkelti priklausomiems dydžiams.

Dalis šio darbo medžiagos buvo paskelbta XLV Lietuvos matematikų draugijos konferencijoje (2004). Pranešimas „Priklausomų normaliųjų dydžių maksimumo vidurkis".

1 BENDROJI DALIS

1.1 EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ TEORIJA

Ekstremaliųjų reikšmių teorija yra tikimybių teorijos šaka, jungianti daug taikymų ir aukšto lygio matematinius rezultatus. Dėl to ši sritis yra įdomi tiek tikimybių teorijos specialistams, tiek inžinieriams bei statistikams. Daugelį metų šis mokslas buvo glaudžiai susijęs su E. J. Gumbelio, įdomios ir įvairiapusiškos asmenybės, veikla.

Ekstremaliųjų reikšmių teorija tiria atsitiktinių dydžių maksimumus ir minimumus. Tai yra ekstremalių reikšmių skirstinius, pozicines statistikas ir viršutinės bei apatinės ribų peržengimus – vadinamąsias skirstinio viršutinę ir apatinę uodegas. Ekstremaliųjų reikšmių teorija yra taikoma įvairiose srityse, kuriose dideli nuokrypiai yra reikšmingi. Galima paminėti tokias sritis, kaip aplinkosauga, meteorologija, finansai ir draudimas, medžiagų atsparumo tyrimas. Įprasti statistiniai metodai didelių nuokrypių situacijoms modeliuoti netinka. Būtent tokių situacijų prognozavimui priemones pateikia ekstremaliųjų reikšmių teorija.

Istorijoje ekstremaliųjų reikšmių problemų sprendimo pradžią jau galima įžvelgti N. Bernulio darbuose (1709). N. Bernulis tyrė vidutinį didžiausią nuotolį nuo atsitiktinai išsidėsčiusių n taškų iki fiksuoto ilgio t tiesės.

Tačiau pati ekstremaliųjų reikšmių teorija pradėjo formuotis vėliau. Teorijos formavimąsi paskatino astronomų poreikis atrinkti patikimus stebėjimus, atmetant viršijančius tam tikro kriterijaus ribą. M. L. Fulerio (1914) ir A. Grifito (1920) ankstyvuosiuose šios srities darbuose tiriami tiek matematinės analizės metodai, tiek jų taikymai. Susistemintai bendrajai ekstremaliųjų reikšmių teorijai pradžią davė fon Bortkevičiaus darbas, aprašantis normaliųjų atsitiktinių dydžių imties intervalo skirstinį. Šis darbas svarbus tuo, kad čia pirmą kartą buvo pavartotas terminas – „maksimalios reikšmės pasiskirstymas". Kitais metais fon Mizesas (1923) apskaičiavo šio pasiskirstymo vidurkį, o Dodas (1923) apskaičiavo medianą ir tyrė kitokius nei normalusis pasiskirstymas atvejus. Didesnės reikšmės buvo R. M. Frešė (1927) darbas, kuriame aptartas maksimumo asimptotinis skirstinys. R. A. Fišeris ir L. H. C. Tipetas (1928) paskelbė atskiro šios problemos tyrimo rezultatus. Tačiau R. M. Frešė (1927) nurodė tik vieną galimą ribinį ekstremumo skirstinį, o R. A. Fišeris ir L. H. C. Tipetas (1928) parodė, kad ekstremumo ribinis skirstinys gali būti tik vieno iš trijų tipų. Fon Mizesas (1936) pateikė paprastai suformuluotas, pakankamas kiekvieno iš trijų, R. A. Fišerio ir L. H. C. Tipeto (1928) pateiktų, ekstremumų ribinių skirstinių silpno konvergavimo sąlygas. B.V. Gnedenko (1943) pateikė būtinas ir pakankamas ekstremumų konvergavimo sąlygas, tuo padėdamas tvirtą pagrindą tolimesniam ekstremaliųjų reikšmių teorijos vystymuisi.

D. Meizleris (1949), B. Markusas ir M. Pinskis (1969) (nežinodami apie D. Meizlerio rezultatus) ir L. de Hanas (1970) (1971) išplėtė B. V. Gnedenkos rezultatus. M. L. Junkoso (1949) darbas, išplečiantis B. V. Gnedenkos rezultatus nevienodai pasiskirsčiusiems nepriklausomiems atsitiktiniams dydžiams, teoriškai buvo svarbus, tačiau nepriimtas dėl savo menko pritaikomumo.

Praeito amžiaus 3-čiojo ir 4-tojo dešimtmečių teorinius darbus 4-ajame ir 5-ajame dešimtmečiuose papildė straipsniai apie ekstremaliųjų reikšmių teorijos taikymą. Tai taikymai žmogaus gyvenimo trukmės pasiskirstymui, radioaktyviai emisijai (E. J. Gumbelis (1937a,b)), medžiagų atsparumui tirti (E. H. V. Veiblas (1939)), potvynių analizei (E. J. Gumbelis (1941, 1944, 1945, 1949a), S. E. Rantsas ir H. C. Rigsas (1949)), seisminei analizei (J. M. Nordkvistas (1945)), liūčių tyrimui (K. N. Poteris (1949)) ir kita. Labai didelę įtaką taikymams turėjo E. J. Gumbelio darbai. Daugelis šių problemų nagrinėjama darbe „Ekstremumų statistikos" (E. J. Gumbelis (1958)).

E. J. Gumbelis buvo pirmasis atkreipęs inžinierių ir statistikų dėmesį į galimą formalios ekstremaliųjų reikšmių teorijos taikymą tam tikriems pasiskirstymams, kurie anksčiau buvo nagrinėjami empiriškai. Pirmosios problemos tokiu būdu pradėtos tirti JAV 1941 metais. Tai buvo susiję su meteorologiniais reiškiniais, tokiais kaip kasmetiniai potvyniai, kritulių maksimumas ir kita.

Daugelis medžiagų atsparumo statistinių modelių rėmėsi A. Grifito idėja, kur teigiama, kad neatitikimas tarp apskaičiuoto ir stebimo medžiagų atsparumo atsiranda dėl tam tikrų dinaminių procesų medžiagos viduje. Ryšį tarp medžiagų atsparumo ir ekstremaliųjų reikšmių pasiskirstymo dėsnių pirmasis pastebėjo F. T. Pirsas. Panašias idėjas savo darbuose taikė ir švedų fizikas bei inžinierius E. H. V. Veiblas (1939).

Vėliau šias problemas tyrė rusų fizikai – J. I. Frenkelis ir T. A. Kontorova (1943). Svarbus, bet nepripažintas, darbas buvo S. Kase'o (1953) straipsnis apie gumų stiprumo pasiskirstymo ekstremaliąsias reikšmes.

Jei būtų sudarytas visos su ekstremaliųjų reikšmių teorija susijusios literatūros sąrašas, jame būtų virš 1000 publikacijų. Tai rodo šios tikimybių teorijos šakos turtingumą, gyvybingumą bei taikymų gausą, tačiau lygiai taip pat koordinacijos tarp atskirų mokslininkų trūkumą, nes daug vienodų tyrimų buvo atlikta lygiagrečiai.

Yra keletas puikių knygų apie ekstremaliųjų reikšmių asimptotikos teoriją ir jos taikymus statistikoje. G. Deividas (1981), o taip pat B. C. Arnoldas, N. Balakrišnanas ir H. N. Nagaraja (1992) trumpai pateikė ekstremumų asimptotikos rezultatus. J. Galambošas (1978, 1987), S. Resnikas (1987) ir M. R. Ledbeteris, G. Lindgrenas bei H. Rucenas (1983) detaliau nagrinėjo kai kuriuos šios temos aspektus. R. D. Raisas (1989) aptarė įvairius ekstremumų, o taip pat ir pozicinių statistikų, konvergavimo greičius. E. Kastilo (1988) atnaujino E. J. Gumbelio (1958) darbą, pateikdamas daug ekstremaliųjų reikšmių teorijos taikymo pavyzdžių tiek statistikoje tiek inžinerijoje. H. L. Harteris (1978) parengė ekstremaliųjų reikšmių teorijos bibliografiją, kuri ir dabar tebeturi didelę mokslinę vertę. J. Bairlantas, J. Toigelsas ir P. Vynekeris (1996) pateikė lengvai suprantamą ekstremaliųjų reikšmių praktinę analizę ir jos taikymus aktuarijų matematikoje. S. Coleso (2001) yra išleistas statistinio ekstremaliųjų reikšmių modeliavimo vadovėlis su išsamiai išnagrinėtais pavyzdžiais iš meteorologijos ir finansų sričių.

Lietuvoje ekstremaliųjų reikšmių teorija susidomėta palyginti neseniai. Šios teorijos pradininku Lietuvoje derėtų laikyti prof. J. A. Aksomaitį, kuris jau penkiolika metų dirba šioje srityje ir yra paskelbęs nemažai darbų. P. Gudynas (1990, 1992), L. Sakalauskas (1992), A. Jokimaitis, R. Vilkas taip pat yra paskelbę darbų ekstremaliųjų reikšmių tematika. Daug dėmesio atsitiktinių procesų ekstremumams yra skyręs R. Rudzkis (1985, 1986, 1987, 1989). Atsitiktinių procesų maksimumo vertinimui skirtas N. Kalinauskaitės darbas (1986). Nemažai Lietuvos matematikų yra tyrę atsitiktinių dydžių sumų maksimumus bei maksimumo įtaką atsitiktinių dydžių sumoms.

1.2 POZICINĖS STATISTIKOS IR EKSTREMALIOSIOS REIKŠMĖS

Nagrinėkime atsitiktinę imtį $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iš aibės su tolydžiąja tankio funkcija $f(x)$ ir pasiskirstymo funkcija $F(x)$. Jei reikšmes išrikiuosime didėjimo tvarka:

$$X^{<1>} < X^{<2>} < \ldots < X^{<n>},$$

tai $X^{<1>} = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $X^{<n>} = max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Tuomet $X^{<i>}$ yra vadinama i-tąja pozicine statistika, o $X^{<1>}$ ir $X^{<n>}$ - ekstremaliosiomis imties reikšmėmis. Dažnai literatūroje yra žymima:

$$W_n = min(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$
$$Z_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

1.3 EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ MOMENTAI

Taikant matematinius modelius dažnai tenka skaičiuoti ekstremaliųjų reikšmių skaitines charakteristikas. Taip pat sudėtingesniais atvejais, kai neįmanoma nustatyti ekstremumų pasiskirstymo dėsnio, skaitinės charakteristikos yra vienintelis būdas reiškiniui aprašyti. Tuo atveju, kai atsitiktiniai dydžiai yra vienodai pasiskirstę ir imties dydis artėja į begalybę, šis klausimas yra išspręstas. B.V. B. V. Gnedenko ištyrė galimas ekstremumų momentų ribines reikšmes ir konvergavimo greičius. Tačiau yra labai daug įvairių praktikoje pasitaikančių atvejų, kai atsitiktinių dydžių kiekis yra baigtinis ir jų skirstiniai nevienodi. Toliau nagrinėsime normaliųjų dydžių ekstremumų momentų skaičiavimą.

1.3.1 NORMALUSIS SKIRSTINYS

Nagrinėkime nepriklausomų normaliųjų atsitiktinių dydžių imtį $X_1, X_2, \ldots, X_n,$ kur

$$X_i \sim N(m_i, \sigma_i), \; i = \overline{1, n},$$

$$f_i(x) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_i)^2}{2\sigma_i}}, \tag{1.1}$$

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(y)dy = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-m_i)^2}{2\sigma_i}} dy. \tag{1.2}$$

Statistikos $Z_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ skirstinys užrašomas

$$P(Z_n < x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x), \tag{1.3}$$

o momentai skaičiuojami pagal formulę

$$MZ_n^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r d\left(\prod_{i=1}^{n} F_i(x) \right). \tag{1.4}$$

Atitinkamai statistikai $W_n = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$$P(W_n < x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - F_i(x)\right), \tag{1.5}$$

$$MW_n^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r d\left(1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - F_i(x)\right) \right). \tag{1.6}$$

Jei turime vienodai pasiskirsčiusius dydžius $X_i \sim N(m, \sigma)$, galime užrašyti

$$P(Z_n < x) = F^n(x), \tag{1.7}$$

$$MZ_n^r = n\int_{-\infty}^{\infty} x^r F^{n-1}(x) f(x)dx, \tag{1.8}$$

$$P(W_n < x) = 1 - \left(1 - F(x)\right)^n, \tag{1.9}$$

$$MW_n^r = n\int_{-\infty}^{\infty} x^r \left(1 - F(x)\right)^{n-1} f(x)dx. \tag{1.10}$$

Nors gautos formulės neatrodo sudėtingos, tikslų rezultatą apskaičiuoti nėra paprasta. Tuo atveju, kai imties elementai yra nepriklausomi ir pasiskirstę vienodai, elementariosiomis funkcijomis galima išreikšti visus momentus, kai n ≤ 5 (čia n – imties dydis). Straipsnyje ([4]) yra pateiktos vidurkių bei dispersijų išraiškos:

$$\mu_1 = 0, \tag{1.11}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5641895835..., \tag{1.12}$$

$$\mu_3 = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} = 0{,}8462843753..., \tag{1.13}$$

$$\mu_4 = \frac{3}{2\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 1{,}0293753730..., \tag{1.14}$$

$$\mu_5 = \frac{5}{4\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{6}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 1{,}1629644736..., \tag{1.15}$$

$$\left(\sigma_1\right)^2 = 1, \tag{1.16}$$

$$\left(\sigma_2\right)^2 = 1 - \frac{1}{\pi} = 0{,}6816901138..., \tag{1.17}$$

$$\left(\sigma_3\right)^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right) - \left(\mu_3\right)^2 = 0{,}5594672037..., \tag{1.18}$$

$$\left(\sigma_4\right)^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) - \left(\mu_4\right)^2 = 0{,}4917152368..., \tag{1.19}$$

$$\left(\sigma_5\right)^2 = 1 + \frac{5\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{5\sqrt{3}}{2\pi^2}\arcsin\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\mu_5\right)^2 = 0{,}447534069.... \tag{1.20}$$

Rubenas (1954) nurodė ryšį tarp pozicinių statistikų momentų ir tam tikrų apibendrintų sferinių trikampių. Pagal šį požiūrį gaunamas įrodymas, kad *MZ_6* negalima išreikšti elementariosiomis funkcijomis.

Įdomu tai, kad nors neturime μ_6 = 1,2672063606 ir σ_6 = 0,4159271090 išraiškų elementariosiomis funkcijomis, jų kvadratų suma gali būti užrašoma tokiu būdu:

$$(\mu_6)^2 + (\sigma_5)^2 = 1 + \frac{5\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{15\sqrt{3}}{2\pi^2}\arcsin\left(\frac{1}{4}\right). \tag{1.21}$$

Vatanabe (1957) tiesioginiais skaičiavimais išreiškė pozicinių statistikų ir jų sandaugų vidurkius bei dispersijas iki n ≤ 7. Rezultatą sudarė ne tik elementariosios, bet ir atvirkštinės funkcijos bei specialios formos integralai. Vėlesniuose darbuose Vatanabe tokiu pat būdu išreiškė ir trečios bei ketvirtos eilės momentus.

Buvo įvestos tokios formos specialiosios funkcijos:

$$S(\alpha) = \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\right) \tag{1.22}$$

$$T(\alpha) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi\cdot S(\alpha)}\arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+2) - tg(z)^2}}\right)dz \tag{1.23}$$

Pasinaudojant šiomis funkcijomis, vektoriams *$n = 6$* ir *$n = 7$* vidurkiai ir dispersijos užrašomi tokiu būdu:

$$\mu_6 = \frac{15}{2\sqrt{\pi}}\left(1 - 4S(2) + 2T(2)\right) = 1{,}267..., \tag{1.24}$$

$$\mu_7 = \frac{21}{2\sqrt{\pi}}\left(1 - 5S(2) + 5T(2)\right) = 1{,}352..., \tag{1.25}$$

$$(\sigma_6)^2 = 1 + \frac{5\sqrt{3}}{\pi}\left(1 - 3S(3)\right) - (\mu_6)^2 = 0{,}416..., \tag{1.26}$$

$$(\sigma_6)^2 = 1 + \frac{35\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{1}{4} - S(3) + \frac{1}{2}T(3)\right) - (\mu_7)^2 = 0{,}392..., \tag{1.27}$$

Vektoriams n ≥ 8 išraiškų elementariosiomis ir minėtomis specialiosiomis funkcijomis nėra gauta.

Tuo atveju, kai nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai turi tą patį vidurkį, bet skirtingas dispersijas, knygoje ([1]) yra pateiktos formulės visiems dviejų dydžių ir nelyginės eilės trijų dydžių maksimumo momentams skaičiuoti. Pateiksime šias teoremas.

Teorema 1.1.([1])

Jei X_1 ir X_2 – nepriklausomi normalieji dydžiai su parametrais (0, σ_1^2) ir (0, σ_2^2), tai

$$MZ_2^{2k} = \frac{1}{2}(2k-1)!!\left(\sigma_1^{2k} + \sigma_2^{2k}\right), \tag{1.11}$$

$$MZ_2^{2k-1} = \frac{(2k-1)!!}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{C_{k-1}^i \left(\sigma_1^{2(k+i)} + \sigma_2^{2(k+i)}\right)}{(2i+1)\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)^{2i+1/2}}. \tag{1.12}$$

Teorema įrodoma naudojantis kombinatoriniais metodais ir eilučių teorija. Gauso funkcijos skleidinys eilute:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!!}. \tag{1.13}$$

Išvada 1.1.1. ([1])

Dviejų nepriklausomų normaliųjų dydžių su parametrais (m, σ_1^2) ir (m, σ_1^2) pradiniai n-tos eilės maksimumo momentai

$$MZ_2^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i m^i MZ_2^{n-i}, \tag{1.14}$$

o centriniai n-tos eilės momentai

$$\left(MZ_2^n\right)_C = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \left(MZ_2^1\right)^i MZ_2^{n-i}, \tag{1.15}$$

čia MZ_2^n, n = 1, 2,… apskaičiuojami pagal formules ***(1.11)(1.12)***.

Išvada 1.1.2. ([1])

Dviejų nepriklausomų normaliųjų dydžių X_1, X_2 su parametrais (m, σ_1^2) ir (m, σ_1^2) maksimumo vidurkis ir dispersija yra lygūs

$$M\left(\max(X_1, X_2)\right) = m + \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\pi}}, \tag{1.16}$$

$$D\left(\max(X_1, X_2)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right). \tag{1.17}$$

Teorema 1.2. ([1])

Jei X_1, X_2 ir X_3 – nepriklausomi normalieji dydžiai su parametrais $(0, \sigma_1^2)$, $(0, \sigma_2^2)$ ir $(0, \sigma_3^2)$, tai

$$MZ_3^{2k-1} = \frac{1}{2}\left(M^{2k-1}\left(\max(X_1, X_2)\right) + M^{2k-1}\left(\max(X_1, X_3)\right) + M^{2k-1}\left(\max(X_2, X_3)\right)\right), \tag{1.18}$$

*čia M^n $(max(X_i, Y_j))$ apskaičiuojama pagal formules **(1.11), (1.12)**, kur $k = 1, 2, ...$.*

1.3.2 DAUGIAMATIS NORMALUSIS SKIRSTINYS. PRIKLAUSOMŲ DYDŽIŲ EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ MOMENTAI

Normalųjį skirstinį galima apibrėžti n-matėje erdvėje. Atsitiktinio vektoriaus $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ skirstinį vadinsime normaliuoju, jei jo tankis yra

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |B|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_i - m)(x_j - m)\right) \tag{1.19}$$

su visais $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$; čia $m_i = MX_i$ $(i = 1, \dots, n)$; B – vektoriaus kovariacijų matrica

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

kurios elementai yra

$$b_{ij} = M(X_i - m_i)(X_j - m_j) = \mathrm{cov}(X_i, X_j), \quad i, j = \overline{1, n}, \qquad \textbf{(1.21)}$$

|B| = det B; c_{ij} – matricos C = B^{-1} elementai.

Dvimačio normaliojo skirstinio tankis užrašomas taip

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right), \qquad \textbf{(1.22)}$$

čia $m_1 = MX, m_2 = MY, \sigma_1^2 = DX, \sigma_2^2 = DY, \rho = \dfrac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_1\sigma_2}$.

N-mačio normaliojo vektoriaus su priklausomomis koordinatėmis $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ statistikų $Z_n = max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ir $W_n = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ skirstiniai turi sudėtingas išraiškas, todėl šių statistikų pradiniai momentai gali būti užrašomi tik formaliai:

$$MZ_n^r = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} \left(\max(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)^r p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \qquad \textbf{(1.23)}$$

$$MW_n^r = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} \left(\min(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)^r p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \qquad \textbf{(1.24)}$$

Priklausomus normaliuosius dydžius yra įmanoma išreikšti nepriklausomų normaliųjų dydžių sumomis:

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}X_1^*, \\ X_2 &= a_{21}X_1^* + a_{22}X_2^*, \\ &\ldots \\ X_n &= a_{n1}X_1^* + a_{n2}X_2^* + \ldots + a_{nn}X_n^*, \end{aligned} \qquad \textbf{(1.25)}$$

čia $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ - nepriklausomi normalieji dydžiai. Koeficientai a_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$, apskaičiuojami pagal charakteristikas DX_i ir $cov(X_i, X_j)$.

Tačiau, nors ir priklausomi normalieji dydžiai yra išreiškiami nepriklausomais, formulių ***(1.11)**, **(1.12)**, **(1.18)**,* skirtų normaliųjų dydžių vektorių su nepriklausomomis koordinatėmis maksimumų pradiniams momentams skaičiuoti, pritaikyti negalime. Taip yra dėl to, kad gauname tokios formos funkciją

$$\max\left(a_{11}X_1^*,\quad a_{21}X_1^*+a_{22}X_2^*,\ldots,\quad a_{n1}X_1^*+a_{n2}X_2^*+\ldots+a_{nn}X_n^*,\right), \tag{1.26}$$

kurios neįmanoma suvesti į teoremose **(1.1)**, **(1.2)** reikalaujamą formą: $max(X_1^{**}, X_2^{**}, ..., X_n^{**})$, kai $X_1^{**}, X_2^{**}, ..., X_n^{**}$ nepriklausomi normalieji dydžiai.

Taigi priklausomiems normaliesiems dydžiams teoremų **(1.1)**, **(1.2)** pritaikyti negalima ir turi būti ieškomi kiti būdai maksimumo pradinių momentų išraiškoms apskaičiuoti. Tai yra pagrindinė šio darbo užduotis.

1.4 DARBE SPRENDŽIAMOS PROBLEMOS, PROGRAMINĖS ĮRANGOS PASIRINKIMAS

Pagrindinis šio darbo tikslas - rasti analitinius metodus priklausomų normaliųjų dydžių maksimumo pradiniams momentams skaičiuoti, nustatyti, kuriais atvejais momentai gali būti išreiškiami elementariosiomis funkcijomis. Nagrinėjami vienodai pasiskirsčiusių normaliųjų dydžių vektoriai, taip pat centruotų ir necentruotų normaliųjų dydžių su skirtingais parametrais vektoriai. Vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių vektorių maksimumai taip pat tiriami eksperimentiškai. Siekiama rasti momentų išraiškas priklausomiems normaliesiems dydžiams tokiais atvejais, kuriais rezultatai buvo gauti nepriklausomiems dydžiams.

Modeliavimui naudojama Matlab programa. Pasirinkimą nulėmė tai, kad Matlab yra pritaikyta matriciniams skaičiavimams, turi statistinių funkcijų biblioteką ir patogias vizualizavimo priemones. Analitiniams skaičiavimams palengvinti buvo naudota programa Matematica.

2 TIRIAMOJI DALIS

2.1 NORMALIOJO VEKTORIAUS (X, Y) SU PRIKLAUSOMOMIS KOORDINATĖMIS TYRIMAS

Nagrinėkime atsitiktinius dydžius *X, Y* ~ N(μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, ρ). Straipsnyje ([4]) pateikta dydžių *X* ir *Y* minimumo tankio funkcija ***(2.1)***, momentus generuojanti funkcija ***(2.2)***, bei pirmasis ***(2.3)*** ir antrasis ***(2.4)*** momentai.

$$f_{\min(X,Y)}(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad \text{čia}$$
$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\Phi\left(\frac{-\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$
$$f_2(x) = \frac{1}{\sigma_2}\phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)\Phi\left(\frac{-\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)+\rho\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right). \tag{2.1}$$

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t), \quad \text{čia}$$
$$m_1(t) = \exp\left(t\mu_1 + \frac{1}{2}t^2\sigma_1^2\right)\Phi\left(\frac{\mu_2-\mu_1-t\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right)$$
$$m_2(t) = \exp\left(t\mu_2 + \frac{1}{2}t^2\sigma_2^2\right)\Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_2-t\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right). \tag{2.2}$$

$$E(\min(X,Y)) = \mu_1\Phi\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\theta}\right) + \mu_2\Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\theta}\right) - \theta\,\Phi\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\theta}\right), \quad \text{čia}$$
$$\theta = \sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}. \tag{2.3}$$

$$E(\min^2(X,Y)) = \left(\sigma_1^2+\mu_1^2\right)\Phi\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\theta}\right) + \left(\sigma_2^2+\mu_2^2\right)\Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\theta}\right) -$$
$$-\left(\mu_1+\mu_2\right)\theta\,\Phi\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\theta}\right), \quad \text{čia}$$
$$\theta = \sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}. \tag{2.4}$$

Remiantis straipsnyje pateikta metodika analogiški skaičiavimus atliksime atsitiktinių dydžių X ir Y maksimumui.

Dviejų priklausomų atsitiktinių dydžių ekstremumams yra teisinga:

$$\begin{aligned} &P(\max(X,Y) < z) = P(X < z, Y < z), \\ &P(\min(X,Y) < z) = P(X < z) + P(Y < z) - P(X < z, Y < z), \\ &P(\max(X,Y) < z) = P(X < z) + P(Y < z) - P(\min(X,Y) < z). \end{aligned} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Perrašę sąryšį panaudodami pasiskirstymo funkciją ir apskaičiavę išvestinę gauname:

$$f_{\max(X,Y)}(x) = f_X(x) + f_Y(x) - f_{\min(X,Y)}(x). \qquad \textbf{(2.6)}$$

Į šią formulę įrašę ***(2.1)*** ir pertvarkę reiškinį, gauname atsitiktinių dydžių X ir Y maksimumo pasiskirstymo funkciją:

$$f_{\max(X,Y)}(x) = \frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) + \frac{1}{\sigma_2}\phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right) -$$

$$-\frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\Phi\left(\frac{-\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - \frac{1}{\sigma_2}\phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)\Phi\left(\frac{-\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)+\rho\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) + \frac{1}{\sigma_2}\phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right) -$$

$$-\frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(1-\Phi\left(\frac{\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)-\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right) - \tag{2.7}$$

$$-\frac{1}{\sigma_2}\phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)\left(1-\Phi\left(\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)-\rho\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\Phi\left(\frac{\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)-\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + \frac{1}{\sigma_2}\phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)\Phi\left(\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)-\rho\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right).$$

Funkciją perrašome kaip dviejų funkcijų sumą:

$$f_{\max(X,Y)}(x) = f_1(x) + f_2(x), \tag{2.8}$$

čia

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\Phi\left(\frac{\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)-\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\sigma_2}\phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)\Phi\left(\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)-\rho\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right).$$

Momentus generuojanti funkcija:

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_1(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_2(x)dx. \qquad \textbf{(2.9)}$$

Integralus apskaičiuosime pasiremdami lema, pateikta straipsnyje ([4]).

Jei b ≠ 0,

$$\text{tai} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(a+bx)\Phi(c+dx)dx = \begin{cases} \frac{1}{|b|}\Phi\left(\frac{-\frac{c}{d}+\frac{a}{b}}{\sqrt{\frac{1}{d^2}+\frac{1}{b^2}}}\right), & jei\ d<0, \\ \frac{1}{|b|}\Phi(c), \quad jei\ d=0, \\ \frac{1}{|b|}\Phi\left(\frac{\frac{c}{d}-\frac{a}{b}}{\sqrt{\frac{1}{d^2}+\frac{1}{b^2}}}\right), & jei\ d>0, \end{cases} \qquad \textbf{(2.10)}$$

Tada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(t\mu_1 + \frac{1}{2}t^2\sigma_1^2\right)\frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{x-\mu_1-t\sigma_1^2}{\sigma_1}\right)\Phi\left(\frac{\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)-\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)dx =$$

$$= \exp\left(t\mu_1 + \frac{1}{2}t^2\sigma_1^2\right)\Phi\left(\frac{\mu_1-\mu_2+t\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right). \qquad \textbf{(2.11)}$$

Analogiškai:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_2(x)dx = \exp\left(t\mu_2 + \frac{1}{2}t^2\sigma_2^2\right)\Phi\left(\frac{\mu_2-\mu_1+t\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_2\sigma_1\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right) \qquad \textbf{(2.12)}$$

ir

$$m(t) = \exp\left(t\mu_1 + \frac{1}{2}t^2\sigma_1^2\right)\Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2 + t\left(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}}\right) + \tag{2.13}$$
$$+ \exp\left(t\mu_2 + \frac{1}{2}t^2\sigma_2^2\right)\Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1 + t\left(\sigma_2^2 - \rho\sigma_2\sigma_1\right)}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}}\right).$$

Pasinaudodami momentus generuojančia funkcija apskaičiuojame atsitiktinių dydžių X ir Y maksimumo vidurkį ir antrąjį momentą:

$$E(\max(X,Y)) = m'(0) = \mu_1\Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\theta}\right) + \frac{\left(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\theta}\phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\theta}\right) +$$
$$+ \mu_2\Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\theta}\right) + \frac{\left(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\theta}\phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\theta}\right),$$

$$E(\max(X,Y)) = \mu_1\Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\theta}\right) + \mu_2\Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\theta}\right) + \theta\,\phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\theta}\right), \quad \check{c}ia \tag{2.14}$$
$$\theta = \sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}.$$

$$E(\max{}^2(X,Y)) = m''(0) =$$
$$= \mu_1^2\Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\theta}\right) + \sigma_1^2\Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\theta}\right) + 2\frac{\mu_1\left(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\theta}\phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\theta}\right) -$$
$$- \frac{\left(\mu_1 - \mu_2\right)\left(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)^2}{\theta^3}\phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\theta}\right) +$$
$$+ \mu_2^2\Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\theta}\right) + \sigma_2^2\Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\theta}\right) + 2\frac{\mu_2\left(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\theta}\phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\theta}\right) -$$
$$- \frac{\left(\mu_2 - \mu_1\right)\left(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)^2}{\theta^3}\phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\theta}\right),$$

$$E(\max{}^2(X,Y)) = \left(\mu_1^2 + \sigma_1^2\right)\Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\theta}\right) + \left(\mu_2^2 + \sigma_2^2\right)\Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\theta}\right) + \tag{2.15}$$
$$+ \left(\mu_1 + \mu_2\right)\theta\phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\theta}\right), \quad \check{c}ia$$
$$\theta = \sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}.$$

Apskaičiuotos skaitinės charakteristikos ***(2.14), (2.15)*** sutampa su straipsnyje ([5]) pateiktais rezultatais. Pasinaudojant momentus generuojančia funkcija ***(2.13)*** galima apskaičiuoti ir kitus maksimumo momentus.

2.2 NORMALIOJO VEKTORIAUS (X_1, ... , X_N) SU PRIKLAUSOMOMIS KOORDINATĖMIS TYRIMAS

Dviejų priklausomų normaliųjų dydžių su skirtingais vidurkiais ir dispersijomis maksimumo momentai gali būti apskaičiuojami pasinaudojant momentus generuojančia funkcija. Metodika pateikta **2.1** skyriuje**.** Tą pačią metodika buvo bandyta pritaikyti trims atsitiktiniams dydžiams, bet norimas rezultatas nebuvo gautas. Šiame skyriuje bandysime rasti netiesioginių būdų priklausomų dydžių vektoriaus maksimumo momentams apskaičiuoti. Visi šiame skyriuje pateikti rezultatai turi apribojimą – atsitiktinių dydžių vektoriaus komponenčių vidurkiai turi būti vienodi. Dėl maksimumo funkcijos savybės, neprarasdami bendrumo, nagrinėsime vektorius, kurių vidurkiai yra lygūs nuliui. Pradžioje pateiksime rezultatus trijų atsitiktinių dydžių maksimumui, vėliau rezultatus apibendrinsime n-mačiams vektoriams.

Teorema 2.1. *Atsitiktinių dydžių vektoriui* (X, Y, Z), *kurio tankis yra lyginė funkcija, galioja lygybė:*

$$\begin{aligned} &P(\max(X,Y,Z)<u)+P(\max(X,Y,Z)<-u)=1-P(X<u)-P(Y<u)-P(Z<u)+ \\ &+P(\max(X,Y)<u)+P(\max(Y,Z)<u)+P(\max(X,Z)<u) \end{aligned} \quad \textbf{(2.16)}$$

Įrodymas

Atlikdami pertvarkymus tikimybę *P(min(X,Y,Z)<u)* išreikšime atsitiktinių dydžių *X, Y, Z* ir šių dydžių maksimumo tikimybėmis:

$$\begin{aligned} &P(\min(X,Y,Z)<u)=1-P(\min(X,Y,Z)>u)=1-P(X>u,Y>u,Z>u)= \\ &=1-\left(P(Y>u,Z>u)-P(X<u,Y>u,Z>u)\right)=1-P(Y>u,Z>u)+P(X<u,Y>u,Z>u)= \\ &=1-\left(P(Z>u)-P(Y<u,Z>u)\right)+P(X<u,Z>u)-P(X<u,Y<u,Z>u)= \\ &=1-P(Z>u)+P(Y<u,Z>u)+P(X<u,Z>u)-P(X<u,Y<u,Z>u)= \\ &=P(Z<u)+P(Y<u)-P(Y<u,Z<u)+P(X<u)-P(X<u,Z<u)- \\ &-\left(P(X<u,Y<u)-P(X<u,Y<u,Z<u)\right)= \\ &=P(X<u)+P(Y<u)+P(Z<u)-P(X<u,Y<u)-P(Y<u,Z<u)- \\ &-P(Z<u,X<u)+P(X<u,Y<u,Z<u)= \\ &=P(X<u)+P(Y<u)+P(Z<u)-P(\max(X,Y)<u)-P(\max(Y,Z)<u)- \\ &-P(\max(Z,X)<u)+P(\max(X,Y,Z)<u). \end{aligned} \quad \textbf{(2.17)}$$

Atsitiktiniai dydžiai *X, Y, Z* turi lygines tankio funkcijas, todėl yra teisinga:

$$\min(X,Y,Z) = -\max(X,Y,Z). \tag{2.18}$$

Pasinaudodami šia savybe išreikškime *X, Y, Z* minimumo tikimybę šių dydžių maksimumo tikimybe:

$$\begin{aligned} &P(\min(X,Y,Z) < u) = P(-\max(X,Y,Z) < u) = P(\max(X,Y,Z) > -u) = \\ &= 1 - P(\max(X,Y,Z) < -u). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Iš ***(2.17)*** ir ***(2.19)*** išplaukia, kad:

$$\begin{aligned} &1 - P(\max(X,Y,Z) < -u) = P(X < u) + P(Y < u) + P(Z < u) - \\ &- P(\max(X,Y) < u) - P(\max(Y,Z) < u) - P(\max(Z,X) < u) + P(\max(X,Y,Z) < u), \\ \\ &P(\max(X,Y,Z) < u) + P(\max(X,Y,Z) < -u) = 1 - P(X < u) - P(Y < u) - P(Z < u) + \\ &+ P(\max(X,Y) < u) + P(\max(Y,Z) < u) + P(\max(Z,X) < u). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Teorema įrodyta.

Teorema 2.2. *Atsitiktinių dydžių vektoriaus* (X, Y, Z), *kurio tankis yra lyginė funkcija, maksimumo nelyginės eilės pradiniams momentams galioja sąryšis:*

$$\begin{aligned} &E(\max(X,Y,Z))^m = \\ &= \frac{1}{2}\left(E(\max(X,Y))^m + E(\max(Y,Z))^m + E(\max(Z,X))^m - E(X)^m - E(Y)^m - E(Z)^m\right), \\ &m = 2s+1; \quad s = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{2.21}$$

Įrodymas

Remsimės teorema **(2.1)**. Užrašykime sąryšį ***(2.16)*** pasiskirstymo funkcijomis**:**

$$\begin{aligned} &F_{\max(X,Y,Z)}(u) + F_{\max(X,Y,Z)}(-u) = 1 - F_X(u) - F_Y(u) - F_Z(u) + \\ &+ F_{\max(X,Y)}(u) + F_{\max(Y,Z)}(u) + F_{\max(Z,X)}(u). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Diferencijuodami abi lygybės puses gauname sąryšį atsitiktinių dydžių tankiams:

$$f_{\max(X,Y,Z)}(u) - f_{\max(X,Y,Z)}(-u) = -f_X(u) - f_Y(u) - f_Z(u) + \\ + f_{\max(X,Y)}(u) + f_{\max(Y,Z)}(u) + f_{\max(Z,X)}(u). \tag{2.23}$$

Abi lygybės puses padauginame iš u^m ir integruojame visoje u apibrėžimo srityje:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^m \left(f_{\max(X,Y,Z)}(u) - f_{\max(X,Y,Z)}(-u) \right) du = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} u^m \left(-f_X(u) - f_Y(u) - f_Z(u) + f_{\max(X,Y)}(u) + f_{\max(Y,Z)}(u) + f_{\max(Z,X)}(u) \right) du. \tag{2.24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X,Y,Z)}(u) du - \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X,Y,Z)}(-u) du = \\ = -\int_{-\infty}^{\infty} u^m f_X(u) du - \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_Y(u) du - \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_Z(u) du + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X,Y)}(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(Y,Z)}(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(Z,X)}(u) du. \tag{2.25}$$

Antrajame integrale pakeiskime kintamąjį $-u$:

$$w = -u \\ \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X,Y,Z)}(-u) du = \int_{\infty}^{-\infty} (-w)^m f_{\max(X,Y,Z)}(w) d(-w) = \\ = \begin{cases} -\int_{-\infty}^{\infty} w^m f_{\max(X,Y,Z)}(w) dw, & m = 2k+1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} w^m f_{\max(X,Y,Z)}(w) dw, & m = 2k \end{cases} \tag{2.26}$$

Įrašę ***(2.26)*** į ***(2.25)*****,** tuo atveju, kai m – nelyginis, gauname:

$$2\int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X,Y,Z)}(u) du = \\ = -\int_{-\infty}^{\infty} u^m f_X(u) du - \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_Y(u) du - \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_Z(u) du + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X,Y)}(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(Y,Z)}(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(Z,X)}(u) du. \tag{2.27}$$

Pagal *m*-tojo pradinio momento apibrėžimą:

$$
\begin{aligned}
&2E(\max(X,Y,Z))^m = \\
&= -E(X)^m - E(Y)^m - E(Z)^m + E(\max(X,Y))^m + E(\max(Y,Z))^m + E(\max(Z,X))^m, \\
&m = 2s+1; \quad s = 1, 2, \ldots.
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

Atlikę aritmetinius pertvarkymus gauname ***(2.21)*** sąryšį. Teorema įrodyta.

Išvada 2.2.1. *Atsitiktinių dydžių* X, Y, Z ~ N(0, 0, 0, σ_1, σ_2, σ_3, ρ_{12}, ρ_{23}, ρ_{31}) *maksimumo nelyginės eilės pradiniams momentams galioja sąryšis:*

$$
\begin{aligned}
&E(\max(X,Y,Z))^m = \\
&= \frac{1}{2}\left(E(\max(X,Y))^m + E(\max(Y,Z))^m + E(\max(Z,X))^m - E(X)^m - E(Y)^m - E(Z)^m\right), \\
&m = 2s+1; \quad s = 1, 2, \ldots.
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

Gauti rezultatai (**Teorema 2.2**) yra reikšmingi tuo, kad pasinaudojant ***(2.21)*** sąryšiu galima netiesioginiu būdu apskaičiuoti trijų atsitiktinių dydžių maksimumo nelyginės eilės pradinius momentus. Pasirinktos eilės pradiniam momentui apskaičiuoti reikia žinoti dviejų atsitiktinių dydžių maksimumo ir pačių atsitiktinių dydžių *X, Y, Z* tos pačios eilės pradinius momentus. Dviejų normaliųjų dydžių maksimumo momentus generuojanti funkcija yra pateikta ***(2.13).*** Taip pat nėra sunkumu apskaičiuoti normaliųjų dydžių pradinius momentus.

Bakalauro darbe ([8]), pasinaudojant maksimumo funkcijos savybe, buvo išvesta trijų atsitiktinių dydžių maksimumo vidurkio skaičiavimo formulė, kuri yra **(2.2.1)** išvados atskiras atvejis:

$$
M(\max(X,Y,Z)) = \frac{1}{2}\left(M(\max(X,Y)) + M(\max(Y,Z)) + M(\max(Z,Y)) - MX - MY - MZ\right), \tag{2.30}
$$

$$
\begin{aligned}
&M(\max(X,Y,Z)) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} + \sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2} + \sqrt{\sigma_3^2 - 2\rho_{31}\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

Toliau, kaip teoremos **(2.2)** panaudojimo pavyzdį, pateiksime trijų atsitiktinių dydžių maksimumo trečios eilės pradinio momento skaičiavimus. Pagal teoremą, trijų atsitiktinių dydžių maksimumo trečios eilės pradinis momentas yra išreiškiamas dviejų atsitiktinių dydžių maksimumų ir pačių atsitiktinių dydžių trečios eilės pradiniais momentais tokiu būdu:

$$E\left(\max(X,Y,Z)\right)^3 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(E\left(\max(X,Y)\right)^3 + E\left(\max(Y,Z)\right)^3 + E\left(\max(Z,X)\right)^3 - E\left(X\right)^3 - E\left(Y\right)^3 - E\left(Z\right)^3\right) \quad \textbf{(2.32)}$$

Pasinaudodami momentus generuojančia funkcija ***(2.13)*** apskaičiuosime dviejų atsitiktinių dydžių maksimumo trečios eilės pradini momentą. Čia nagrinėjamų atsitiktinių dydžių vidurkiai yra lygūs nuliui, todėl momentus generuojančios funkcijos išraiška tampa paprastesne:

$$m(t) = \exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_1^2\right)\Phi\left(\frac{t\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right) + \exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_2^2\right)\Phi\left(\frac{t\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_2\sigma_1\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right). \quad \textbf{(2.33)}$$

Apskaičiuojame momentus generuojančios funkcijos išvestines:

$$\begin{aligned}
m'(t) = {} & \sigma_1^2 t\exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_1^2\right)\Phi\left(\frac{t\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right) + \\
& + \frac{\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_1^2\right)\phi\left(\frac{t\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right) + \\
& + \sigma_2^2 t\exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_2^2\right)\Phi\left(\frac{t\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_2\sigma_1\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right) + \\
& + \frac{\sigma_2^2-\rho\sigma_2\sigma_1}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_2^2\right)\phi\left(\frac{t\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_2\sigma_1\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right),
\end{aligned} \quad \textbf{(2.34)}$$

$$\begin{aligned}
m''(t) = {} & \sigma_1^2\left(\sigma_1^2 t^2+1\right)\exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_1^2\right)\Phi\left(\frac{t\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right) + \\
& + \frac{\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\left(2\sigma_1^2 t + \frac{t\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)^2}{\left(\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2\right)}\right)\exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_1^2\right)\phi\left(\frac{t\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right) + \\
& + \sigma_2^2\left(\sigma_2^2 t^2+1\right)t\exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_2^2\right)\Phi\left(\frac{t\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_2\sigma_1\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right) + \\
& + \frac{\sigma_2^2-\rho\sigma_2\sigma_1}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\left(2\sigma_2^2 t + \frac{t\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_2\sigma_1\right)^2}{\left(\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2\right)}\right)\exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_2^2\right)\phi\left(\frac{t\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_2\sigma_1\right)}{\sqrt{\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2}}\right),
\end{aligned} \quad \textbf{(2.35)}$$

$$
\begin{aligned}
m'''(t) &= \sigma_1^2 t\left(\sigma_1^2 t^2 + 2\right)\exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_1^2\right)\Phi\left(\frac{t\left(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}}\right) + \\
&+ \sigma_1^2 \frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}}\left(3\sigma_1^2 t^2 - \frac{t\left(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)^2}{\left(\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2\right)} + 1\right) \times \\
&\times \exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_1^2\right)\phi\left(\frac{t\left(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}}\right) + \\
&+ \frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}}\left(2\sigma_1^2 - \frac{\left(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)^2}{\left(\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2\right)}\right)\left(1 - \frac{t^2\left(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)^2}{\left(\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2\right)}\right) \times \\
&\times \exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_1^2\right)\phi\left(\frac{t\left(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}}\right) + \\
&+ \sigma_2^2 t\left(\sigma_2^2 t^2 + 2\right)\exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_2^2\right)\Phi\left(\frac{t\left(\sigma_2^2 - \rho\sigma_2\sigma_1\right)}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}}\right) + \\
&+ \sigma_2^2 \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_2\sigma_1}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}}\left(3\sigma_2^2 t^2 - \frac{t^2\left(\sigma_2^2 - \rho\sigma_2\sigma_1\right)^2}{\left(\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2\right)} + 1\right) \times \\
&\times \exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_2^2\right)\phi\left(\frac{t\left(\sigma_2^2 - \rho\sigma_2\sigma_1\right)}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}}\right) + \\
&+ \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_2\sigma_1}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}}\left(2\sigma_2^2 - \frac{\left(\sigma_2^2 - \rho\sigma_2\sigma_1\right)^2}{\left(\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2\right)}\right)\left(1 - \frac{t^2\left(\sigma_2^2 - \rho\sigma_2\sigma_1\right)^2}{\left(\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2\right)}\right) \times \\
&\times \exp\left(\frac{1}{2}t^2\sigma_2^2\right)\phi\left(\frac{t\left(\sigma_2^2 - \rho\sigma_2\sigma_1\right)}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}}\right).
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Trečiasis pradinis momentas yra lygus trečiosios išvestinės reikšmei, kai $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
m'''(0) &= \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma_1^2\left(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\left(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\right)^3}{\left(\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \\
&+ \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma_2^2\left(\sigma_2^2 - \rho\sigma_2\sigma_1\right)}{\sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\left(\sigma_2^2 - \rho\sigma_2\sigma_1\right)^3}{\left(\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Atlikę aritmetinius pertvarkymus, gauname galutinę išraišką:

$$E\left(\max\left(X,Y\right)\right)^3 = m'''(0) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(3\frac{\left(\sigma_1^2\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)+\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)+\sigma_2^2\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)\right)}{\theta}-\theta^3\right), \quad \textbf{(2.38)}$$
$$\textit{čia} \quad \theta = \sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}.$$

Momentų $E(max(Y,Z))^3$, $E(max(Z,X))^3$ išraiškos yra analogiškos ***(2.38)***. Momentai EX^3, EY^3, EZ^3 yra lygūs nuliui. Gautas išraiškas įrašę į ***(2.32)***, gauname:

$$E\left(\max(X,Y,Z)\right)^3 =$$
$$= \frac{3}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\left(\sigma_1^2\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)+\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)+\sigma_2^2\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2\right)\right)}{\theta}+\right.$$
$$+\frac{\left(\sigma_2^2\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_2\sigma_3\right)+\left(\sigma_2^2-\rho\sigma_2\sigma_3\right)\left(\sigma_3^2-\rho\sigma_2\sigma_3\right)+\sigma_3^2\left(\sigma_3^2-\rho\sigma_2\sigma_3\right)\right)}{\theta}+$$
$$\left.+\frac{\left(\sigma_3^2\left(\sigma_3^2-\rho\sigma_3\sigma_1\right)+\left(\sigma_3^2-\rho\sigma_3\sigma_1\right)\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_3\sigma_1\right)+\sigma_1^2\left(\sigma_1^2-\rho\sigma_3\sigma_1\right)\right)}{\theta}-\theta^3\right), \quad \textbf{(2.39)}$$
$$\textit{čia} \quad \theta = \sqrt{\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2}.$$

Teoremas **(2.1)** ir **(2.2)** apibendrinsime n-mačiams vektoriams.

Teorema 2.3. *Atsitiktinių dydžių vektoriui* (X_1, X_2,..., X_n), *kuriotankio funkcija yra lyginė, galioja lygybė:*

$$P\left(\max(X_1,\ldots,X_n)<-u\right)+\left(-1\right)^{n+1}P\left(\max(X_1,\ldots,X_n)<u\right)=$$
$$=1-P\left(X_1<u\right)-\ldots-P\left(X_n<u\right)+P\left(\max(X_1,X_2)<u\right)+\ldots+P\left(\max(X_{n-1},X_n)<u\right)+ \quad \textbf{(2.40)}$$
$$+\ldots+\left(-1\right)^{n+1}\left(P\left(\max(X_1,\ldots,X_{n-1})<u\right)+\ldots+P\left(\max(X_2,\ldots,X_n)<u\right)\right).$$

Įrodymas

Pirmiausiai indukcijos būdu įrodysime lygybę:

$$P\left(\min(X_1,\ldots,X_n)<u\right)=$$
$$=P\left(X_1<u\right)+\ldots+P\left(X_n<u\right)-P\left(\max(X_1,X_2)<u\right)-\ldots-P\left(\max(X_{n-1},X_n)<u\right)+ \quad \textbf{(2.41)}$$
$$+\ldots+\left(-1\right)^{n+1}P\left(\max(X_1,\ldots,X_n)<u\right).$$

Nesunku įsitikinti, kad sąryšis galioja, kai *n = 2*:

$$P(\min(X_1, X_2) < u) = P(X_1 < u) + P(X_2 < u) - P(X_1 < u, X_2 < u) = \\ = P(X_1 < u) + P(X_2 < u) - P(\max(X_1, X_2) < u). \quad \textbf{(2.42)}$$

Kai $n = 3$, įrodymas buvo pateiktas anksčiau ***(2.17)***.

Tarkime sąryšis yra teisingas, kai $n = k$,

$$P(\min(X_1, \ldots, X_k) < u) = \\ = P(X_1 < u) + \ldots + P(X_k < u) - P(\max(X_1, X_2) < u) - \ldots - P(\max(X_{k-1}, X_k) < u) + \\ + \ldots + (-1)^{k+1} P(\max(X_1, \ldots, X_k) < u) \quad \textbf{(2.43)}$$

Remdamiesi šia sąlyga įrodysime, kad sąryšis yra teisingas, kai $n = k+1$.

$$P(\min(X_1, \ldots, X_{k+1}) < u) = 1 - P(\min(X_1, \ldots, X_{k+1}) > u) = 1 - P(X_1 > u, \ldots, X_{k+1} > u) = \\ = 1 - (P(X_1 > u, \ldots, X_k > u) - P(X_1 > u, \ldots, X_k > u, X_{k+1} < u)) = \\ = 1 - P(X_1 > u, \ldots, X_k > u) + P(X_1 > u, \ldots, X_k > u, X_{k+1} < u) = \\ = 1 - P(\min(X_1, \ldots, X_k) > u) + P(\min(X_1, \ldots, X_k) > u, X_{k+1} < u) = \\ = P(\min(X_1, \ldots, X_k) < u) + P(X_{k+1} < u) - P(\min(X_1, \ldots, X_k) < u, X_{k+1} < u) = \\ = P(X_1 < u) + \ldots + P(X_k < u) - P(\max(X_1, X_2) < u) - \ldots - P(\max(X_{k-1}, X_k) < u) + \\ + \ldots + (-1)^{k+1} P(\max(X_1, \ldots, X_k) < u) + \\ + P(X_{k+1} < u) - \\ - (P(X_1 < u, X_{k+1} < u) + \ldots + P(X_k < u, X_{k+1} < u) - P(\max(X_1, X_2) < u, X_{k+1} < u) - \\ - \ldots - P(\max(X_{k-1}, X_k) < u, X_{k+1} < u) + \ldots + (-1)^{k+1} P(\max(X_1, \ldots, X_k) < u, X_{k+1} < u)) = \\ = P(X_1 < u) + \ldots + P(X_{k+1} < u) - P(\max(X_1, X_2) < u) - \ldots - P(\max(X_k, X_{k+1}) < u) + \\ + \ldots + (-1)^{k+2} P(\max(X_1, \ldots, X_{k+1}) < u) \quad \textbf{(2.44)}$$

Pasinaudodami sąlyga, kad sąryšis yra teisingas, kai $n = k$, įrodėme, kad sąryšis yra teisingas, kai $n = k+1$, todėl ši lygybė yra teisinga kiekvienam n.

Analogiškai kaip formulėje ***(2.18)***, dėl to, kad tankis yra nelyginė funkcija, atsitiktiniams dydžiams $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra teisinga:

$$\min(X_1, \ldots, X_n) = -\max(X_1, \ldots, X_n). \quad \textbf{(2.45)}$$

Remdamiesi šia savybe išreikškime $X_1, X_2, \ldots, X_n$ minimumo tikimybę šių dydžių maksimumo tikimybe:

$$P\left(\min(X_1,\ldots,X_n)<u\right)=P\left(-\max(X_1,\ldots,X_n)<u\right)=P\left(\max(X_1,\ldots,X_n)>-u\right)=$$
$$=1-P\left(\max(X_1,\ldots,X_n)<-u\right). \quad \textbf{(2.46)}$$

Teoremos teiginį įrodysime įrašę išraišką ***(2.46)*** į ***(2.41)*** ir atlikę pertvarkymus:

$$1-P\left(\max(X_1,\ldots,X_n)<-u\right)=P\left(X_1<u\right)+\ldots+P\left(X_n<u\right)-P\left(\max(X_1,X_2)<u\right)-$$
$$-\ldots-P\left(\max(X_{n-1},X_n)<u\right)+\ldots+(-1)^{n+1}P\left(\max(X_1,\ldots,X_n)<u\right),$$

$$P\left(\max(X_1,\ldots,X_n)<-u\right)+(-1)^{n+1}P\left(\max(X_1,\ldots,X_n)<u\right)=$$
$$=1-P\left(X_1<u\right)-\ldots-P\left(X_n<u\right)+P\left(\max(X_1,X_2)<u\right)+\ldots+P\left(\max(X_{n-1},X_n)<u\right)+$$
$$+\ldots+(-1)^{n+1}\left(P\left(\max(X_1,\ldots,X_{n-1})<u\right)+\ldots+P\left(\max(X_2,\ldots,X_n)<u\right)\right). \quad \textbf{(2.47)}$$

Teorema 2.4. *Atsitiktinių dydžių vektoriui* ($X_1, X_2,..., X_n$), *kurio tankio funkcija yra lyginė, maksimumo pradiniams momentams galioja sąryšiai:*

1. Kai $n=2k+1,\ m=2l+1,$

$$E\left(\max(X_1,\ldots,X_n)\right)^m=$$
$$=\frac{1}{2}\Big(-E\left(X_1\right)^m-\ldots-E\left(X_n\right)^m+E\left(\max(X_1,X_2)\right)^m+\ldots+E\left(\max(X_{n-1},X_n)\right)^m+\ldots+$$
$$+E\left(\max(X_1,\ldots,X_{n-1})\right)^m+\ldots+E\left(\max(X_2,\ldots,X_n)\right)^m\Big). \quad \textbf{(2.48)}$$

2. Kai $n=2k,\ m=2l,$

$$E\left(\max(X_1,\ldots,X_n)\right)^m=$$
$$=\frac{1}{2}\Big(E\left(X_1\right)^m+\ldots+E\left(X_n\right)^m-E\left(\max(X_1,X_2)\right)^m-\ldots-E\left(\max(X_{n-1},X_n)\right)^m+\ldots+$$
$$+E\left(\max(X_1,\ldots,X_{n-1})\right)^m+\ldots+E\left(\max(X_2,\ldots,X_n)\right)^m\Big). \quad \textbf{(2.49)}$$

Įrodymas

Įrodymo metodika analogiška, kaip ir teoremoje **(2.2)**. Remsimės teoremoje **(2.3)** pateiktu sąryšiu ***(2.40)***. Šį sąryšį užrašysime pasiskirstymo funkcijomis**:**

$$(-1)^{n+1}F_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(u)+F_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(-u)=1-F_{X_1}(u)-\ldots-F_{X_n}(u)+$$
$$+F_{\max(X_1,X_2)}(u)+\ldots+F_{\max(X_{n-1},X_n)}(u)+(-1)^{n+1}\left(F_{\max(X_1,\ldots,X_{n-1})}(u)+\ldots+F_{\max(X_2,\ldots,X_n)}(u)\right). \quad \textbf{(2.50)}$$

Diferencijuodami abi lygybės puses gauname atitinkamą sąryšį atsitiktinių dydžių tankiams:

$$\begin{aligned}&(-1)^{n+1} f_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(u) - f_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(-u) = -f_{X_1}(u) - \ldots - f_{X_n}(u) + \\ &+ f_{\max(X_1,X_2)}(u) + \ldots + f_{\max(X_{n-1},X_n)}(u) + (-1)^{n+1}\left(f_{\max(X_1,\ldots,X_{n-1})}(u) + \ldots + f_{\max(X_2,\ldots,X_n)}(u)\right).\end{aligned} \quad \textbf{(2.51)}$$

Naudosime tą pačią metodiką kaip teoremoje **(2.3)**. Abi puses dauginsime iš kintamojo u^m ir integruosime visoje apibrėžimo srityje:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} u^m\left((-1)^{n+1} f_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(u) - f_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(-u)\right)du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u^m\left(-f_{X_1}(u) - \ldots - f_{X_n}(u) + f_{\max(X_1,X_2)}(u) + \ldots + f_{\max(X_{n-1},X_n)}(u) + \right. \\ &\left. + (-1)^{n+1}\left(f_{\max(X_1,\ldots,X_{n-1})}(u) + \ldots + f_{\max(X_2,\ldots,X_n)}(u)\right)\right)du,\end{aligned} \quad \textbf{(2.52)}$$

$$\begin{aligned}&(-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X_1,\ldots,X_n))}(u)du - \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(-u)du = \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{X_1}(u)du - \ldots - \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{X_n}(u)du + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X_1,X_2)}(u)du + \ldots + \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X_{n-1},X_n)}(u)du + \\ &'+(-1)^{n+1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X_1,\ldots,X_{n-1})}(u)du + \ldots + \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X_2,\ldots,X_n)}(u)du\right).\end{aligned} \quad \textbf{(2.53)}$$

Norėdami gauti tos pačios formos integralus, antrajame integrale pakeiskime kintamąjį $-u$:

$$\begin{aligned}&w = -u \\ &\int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(-u)du = \int_{\infty}^{-\infty} (-w)^m f_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(w)d(-w) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-w)^m f_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(w)dw\end{aligned} \quad \textbf{(2.54)}$$

Nagrinėjami integralai pagal apibrėžimą atitinka m-tosios eilės momentus. Pakeistą integralą ***(2.54)*** įrašykime į lygybę ***(2.53)*** ir atlikime pertvarkymus atskiriems n ir m atvejams:

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X_1,\ldots,X_n))}(u)du - \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(-u)du = \\
&= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X_1,\ldots,X_n))}(u)du - \int_{-\infty}^{\infty} (-u)^m f_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(u)du, & n = 2k+1, \\ -\int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X_1,\ldots,X_n))}(u)du - \int_{-\infty}^{\infty} (-u)^m f_{\max(X_1,\ldots,X_n)}(u)du, & n = 2k. \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 2\int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X_1,\ldots,X_n))}(u)du, & n = 2k+1,\, m = 2l+1, \\ 0, & n = 2k+1,\, m = 2l, \\ 0, & n = 2k,\, m = 2l+1, \\ -2\int_{-\infty}^{\infty} u^m f_{\max(X_1,\ldots,X_n))}(u)du, & n = 2k,\, m = 2l. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

Įrašę ***(2.55)*** į ***(2.53)*** ir atitinkamai pertvarkę lygybės ***(2.53)*** dešiniąją pusę, gauname:

Kai $n = 2k+1,\, m = 2l+1,$

$$
\begin{aligned}
&2E(\max(X_1,\ldots,X_n))^m = \\
&= -E(X_1)^m - \ldots - E(X_n)^m + E(\max(X_1,X_2))^m + \ldots + E(\max(X_{n-1},X_n))^m + \ldots + \\
&+ E(\max(X_1,\ldots,X_{n-1}))^m + \ldots + E(\max(X_2,\ldots,X_n))^m,
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

kai $n = 2k+1,\, m = 2l,$

$$
\begin{aligned}
&0 = -E(X_1)^m - \ldots - E(X_n)^m + E(\max(X_1,X_2))^m + \ldots + E(\max(X_{n-1},X_n))^m + \ldots + \\
&+ E(\max(X_1,\ldots,X_{n-1}))^m + \ldots + E(\max(X_2,\ldots,X_n))^m,
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

kai $n = 2k,\, m = 2l+1,$

$$
\begin{aligned}
&0 = -E(X_1)^m - \ldots - E(X_n)^m + E(\max(X_1,X_2))^m + \ldots + E(\max(X_{n-1},X_n))^m + \ldots - \\
&- E(\max(X_1,\ldots,X_{n-1}))^m - \ldots - E(\max(X_2,\ldots,X_n))^m,
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

kai $n = 2k,\, m = 2l,$

$$
\begin{aligned}
&-2E(\max(X_1,\ldots,X_n))^m = \\
&= -E(X_1)^m - \ldots - E(X_n)^m + E(\max(X_1,X_2))^m + \ldots + E(\max(X_{n-1},X_n))^m + \ldots - \\
&- E(\max(X_1,\ldots,X_{n-1}))^m - \ldots - E(\max(X_2,\ldots,X_n))^m.
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

Sąryšių ***(2.57)*** ir ***(2.58)*** toliau nenagrinėsime. Iš sąryšių ***(2.56)*** ir ***(2.59)***, atlikus aritmetinius pertvarkymus seka teoremos įrodymas.

Išvada 2.4.1. *Atsitiktinių dydžių vektoriaus* ($X_1, X_2,..., X_n$) ~ N(0,V_X),

$$V_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_n\rho_{1n} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_n\rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_n\sigma_1\rho_{n1} & \sigma_n\sigma_2\rho_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$ *maksimumo pradiniams momentams galioja sąryšiai:*

1. Kai $n = 2k + 1,\ m = 2l + 1,$

$$\begin{aligned} &E(\max(X_1,\dots,X_n))^m = \\ &= \frac{1}{2}\Big(-E(X_1)^m - \dots - E(X_n)^m + E(\max(X_1,X_2))^m + \dots + E(\max(X_{n-1},X_n))^m + \dots + \\ &+ E(\max(X_1,\dots,X_{n-1}))^m + \dots + E(\max(X_2,\dots,X_n))^m\Big). \end{aligned} \quad \textbf{(2.60)}$$

2. Kai $n = 2k,\ m = 2l,$

$$\begin{aligned} &E(\max(X_1,\dots,X_n))^m = \\ &= \frac{1}{2}\Big(E(X_1)^m + \dots + E(X_n)^m - E(\max(X_1,X_2))^m - \dots - E(\max(X_{n-1},X_n))^m + \dots + \\ &+ E(\max(X_1,\dots,X_{n-1}))^m + \dots + E(\max(X_2,\dots,X_n))^m\Big). \end{aligned} \quad \textbf{(2.61)}$$

Išvada 2.4.2. *Atsitiktinių dydžių vektorių* ($Y_1, Y_2,..., Y_n$) ~ N(μ,V_X) ir ($X_1, X_2,..., X_n$) ~ N(0,V_X),

$$V_X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_n\rho_{1n} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_n\rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_n\sigma_1\rho_{n1} & \sigma_n\sigma_2\rho_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$ *maksimumų pradiniams momentams galioja sąryšis:*

$$E(\max(Y_1,\dots,Y_n))^m = \sum_{i=0}^{m} C_m^i \mu^i E(\max(X_1,\dots,X_n))^{m-i}. \quad \textbf{(2.62)}$$

Šis sąryšis įrodomas pasiremiant maksimumo funkcijos tiesiškumo savybe ir Niutono binomu:

$$\begin{aligned} &E(\max(Y_1,\dots,Y_n))^m = E(\mu + \max(X_1,\dots,X_n))^m = E\left(\sum_{i=0}^{m} C_m^i \mu^i (\max(X_1,\dots,X_n))^{m-i}\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{m} C_m^i \mu^i E(\max(X_1,\dots,X_n))^{m-i}. \end{aligned} \quad \textbf{(2.63)}$$

Deje, dėl išvadoje **(2.4.1)** pateiktų apribojimų skaičiams *n* ir *m,* formulę **(2.62)** bendru atveju galima pritaikyti tik dviems atsitiktiniams dydžiams. Didesnio ilgio necentruotiems vektoriams galima apskaičiuoti tik vidurkį:

$$\begin{aligned} &E\left(\max(Y_1,\dots,Y_n)\right)=\mu+E\left(\max(X_1,\dots,X_n)\right)=\\ &=\mu+\frac{1}{2}\left(-E(X_1)-\dots-E(X_n)+E\left(\max(X_1,X_2)\right)+\dots+E\left(\max(X_{n-1},X_n)\right)+\dots+\right.\\ &\left.+E\left(\max(X_1,\dots,X_{n-1})\right)+\dots+E\left(\max(X_2,\dots,X_n)\right)\right). \end{aligned} \qquad \mathbf{(2.64)}$$

Aukštesnės eilės momentų apskaičiuoti negaima, nes nėra būdo rasti visų Niutono binomo narių reikšmes.

Šiame skyriuje pateikti rezultatai leidžia apskaičiuoti *n* ilgio vektoriaus maksimumo momentus, išreiškiant juos mažesnio ilgio vektorių maksimumų momentais. Tačiau, dėl sąlygų vektoriaus ilgiui *n* ir momento eilei *m*, negalima sudaryti bendros rekurentinės formulės momentams skaičiuoti. Yra būtina žinoti (kitu būdu apskaičiuoti) vienetu mažesnio ilgio vektoriaus maksimumo atitinkamos eilės momentus. Šiuo metu kitais metodais yra apskaičiuoti tik dviejų priklausomų normaliųjų dydžių maksimumo momentai, todėl šiame skyriuje aprašomus rezultatus galima pritaikyti tik trijų priklausomų normaliųjų dydžių maksimumo nelyginės eilės momentams skaičiuoti.

Pastebėsime dar vienas faktą, kuris tiesiogiai seka iš išvados **(2.4.1)** antrosios dalies. Bakalauro darbe ([8]), atliekant kompiuterinį modeliavimą, buvo pastebėta, o vėliau ir įrodyta, kad dviejų priklausomų normaliųjų dydžių maksimumo lyginės eilės momentai nepriklauso nuo koreliacijos koeficiento ρ. Remiantis išvada **(2.4.1)**, tai gali būti nesudėtingai parodyta. Užrašykime sąryšį ***(2.61)*** dviems atsitiktiniams dydžiams:

$$E\left(\max(X_1,X_2)\right)^m=\frac{1}{2}\left(E(X_1)^m+E(X_2)^m\right),\ \text{čia } m\text{-lyginis skaičius.} \qquad \mathbf{(2.64)}$$

Dešinėje lygybės pusėje yra atskirų kintamųjų X_1 ir X_2 momentai, todėl akivaizdu, kad šių kintamųjų maksimumo lyginės eilės momentai nepriklauso nuo koreliacijos koeficiento.

2.3 DAUGELIO KINTAMŲJŲ MAKSIMUMO VIDURKIO TYRIMAS

2.3.1 NORMALIOJO VEKTORIAUS MAKSIMUMO MOMENTŲ MODELIAVIMAS

Tolesnius normaliojo vektoriaus su priklausomomis koordinatėmis maksimumo momentų tyrimus atliksime kompiuteriu. Generuosime priklausomus normaliuosius dydžius ir juos naudosime įvairiems skaičiavimams.

Standartinių funkcijų priklausomiems dydžiams generuoti nėra, todėl, pasinaudodami principu analogišku aprašytam **(1.4.2)** skyriuje, priklausomus dydžius formuosime iš nepriklausomų standartinių normaliųjų dydžių. Skyriuje **(1.4.2)** buvo minėta, kad priklausomus normaliuosius dydžius galima išreikšti nepriklausomais. Lygiai taip pat yra žinoma, kad turint nepriklausomus standartinius normaliuosius dydžius, galima suformuoti priklausomų normaliųjų dydžių vektorių su pageidaujamais parametrais.

Jei turime nepriklausomų standartinių normaliųjų dydžių vektorių $X=(X_1, X_2, \ldots, Xn)$, pageidaujamų vidurkių vektorių $MY=(MY_1, MY_2, \ldots, MYn)$ ir koreliacijų matricą

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.65)}$$

$$b_{ij} = M(Y_i - MY_i)(Y_j - MY_j) = \operatorname{cov}(Y_i, Y_j), \quad i, j = \overline{1, n},$$

tai priklausomų normaliųjų dydžių vektorių formuojame tokiu būdu:

$$Y = MY + X * R;$$
$$\text{čia } \; R^T * R = B. \qquad \textbf{(2.66)}$$

Šiame darbe matricai R suformuoti naudojama Matlab funkcija $R = CHOL(B)$, čia B turi būti teigiamai apibrėžta ir simetriška pagrindinės ašies atžvilgiu. Algoritmo veikimą pademonstruosime suformuodami normalųjį vektorių Y_1, $Y_2 \sim N(5, -5, 2, 3, 0.5)$. Šiuo atveju vidurkių vektorius MY = (5, -5), o kovariacijų matrica

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Pasinaudojus Matlab funkcija *R = CHOL(B)* gauname

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ 0 & 2.5981 \end{pmatrix}.$$

Tuomet Y = (5 + 2*X_1, -5 + 1.5*X_1 + 2.5981*X_2).

Šio darbo tyrimams yra atliekamas didelis skaičius generavimų, kiekvieną kartą randant *max(Y)* reikšmę ir skaičiuojant empirinius vidurkius.

Funkcijų tekstus galime rasti 2 priede. Skaitiniai rezultatai pateikti 1 priede.

2.3.2 PRIKLAUSOMŲ IR NEPRIKLAUSOMŲ NORMALIŲJŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ MOMENTŲ SĄRYŠIS

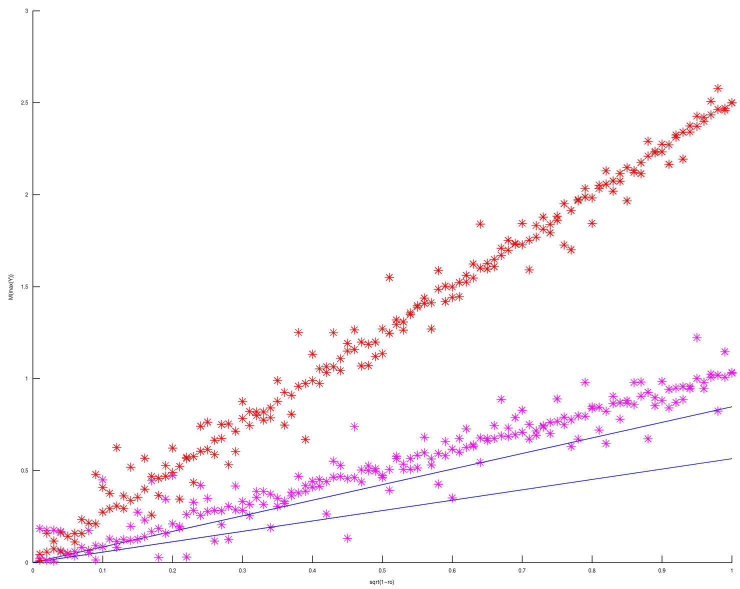
Šiame darbe buvo pateiktos formulės dviejų **(2.14)** ir trijų **(2.31)** normaliųjų priklausomų dydžių maksimumų vidurkiams skaičiuoti. Jei parinktume vienodus vidurkius, dispersijas ir koreliacijos koeficientus, pagal šias formules gautume

$$M\left(\max(Y_1, Y_2)\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\sqrt{1-\rho} \quad \text{ir} \tag{2.67}$$

$$M\left(\max(Y_1, Y_2, Y_3)\right) = \frac{3\sigma}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{1-\rho}. \tag{2.68}$$

Matome, kad šiose išraiškose vidurkis tiesiškai priklauso nuo $\sqrt{1-\rho}$ reikšmės. Eksperimentiškai patikrinsime, ar šis dėsningumas galioja keturių ir daugiau kintamųjų atveju.

Maksimumo vidurkio priklausomybės grafikus matome (**2.1 pav.**). Skaitinės reikšmės (**lentelė 1**) pateiktos priede.



2.1 pav. max(Y) vidurkio priklausomybės nuo sqrt(1-ρ) grafikai skirtingiems vektoriaus Y ilgiams

Mėlynos linijos vaizduoja dviejų ir trijų atsitiktinių dydžių maksimumo vidurkius. Šios tiesės yra nubrėžtos pagal formules **(2.67)** ir **(2.68)**. Alyvinėmis žvaigždutėmis pavaizduoti eksperimento rezultatai keturių kintamųjų, o raudonomis – šimto kintamųjų atveju. Pagal brėžinį matome, jog tikėtina, kad bet kokio kiekio atsitiktinių dydžių maksimumo vidurkiai taip pat tiesiškai priklauso nuo $\sqrt{1-\rho}$ reikšmės. Tiesės, aproksimuojančios eksperimento rezultatus, taip pat, kaip ir tiesės nubrėžtos pagal **(2.67)** ir **(2.68)** formules, eitų per tašką (0, 0) tačiau su x ašimi sudarytų statesnį kampą. Tai reiškia, kad vidurkio išraiškoje koeficientas prie $\sqrt{1-\rho}$ būtų didesnis.

Modeliavimo rezultatai rodo, kad maksimumo vidurkis tiesiškai priklauso nuo $\sqrt{1-\rho}$. Be to, pagal šiame darbe pateiktas dviejų ir trijų priklausomų normaliųjų dydžių ekstremumų vidurkių skaičiavimo išraiškas pastebime, kad priklausomų ir nepriklausomų dydžių vidurkiai turi panašią struktūrą. Priklausomiems standartiniams normaliesiems dydžiams su vienodais koreliacijos koeficientais vidurkiai pateikti skyriaus pradžioje, formulės **(2.67)** ir **(2.68)**. Atitinkami nepriklausomų dydžių vidurkiai:

$$M\left(\max(Y_1, Y_2)\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \quad \text{ir} \tag{2.69}$$

$$M\left(\max(Y_1, Y_2, Y_3)\right) = \frac{3\sigma}{2\sqrt{\pi}}. \tag{2.70}$$

Remiantis šiais pastebėjimais, yra pagrindo manyti, jog galioja sąryšis:

$$\mu_n * = \mu_n \sqrt{1-\rho}, \quad n \geq 1, \qquad \textbf{(2.71)}$$

čia $\mu_n *$ - priklausomų, o μ_n - nepriklausomų normaliųjų dydžių maksimumo vidurkiai.

Šį pastebėjimą taip pat paremia ir matematinis modeliavimas. Trumpai aptarsime modeliavimo metodiką.

Nepriklausomų normaliųjų dydžių maksimumo vidurkiai, kai $n<8$ yra žinomi (**[2]**). Didesniems n vidurkius skaičiuosime tokiu būdu: generuojamos standartinių normaliųjų dydžių sekos, išrenkamos sekų maksimalios reikšmės, apskaičiuojamas reikšmių aritmetinis vidurkis.

Priklausomų normaliųjų dydžių maksimumo vidurkių modeliavimo algoritmas:

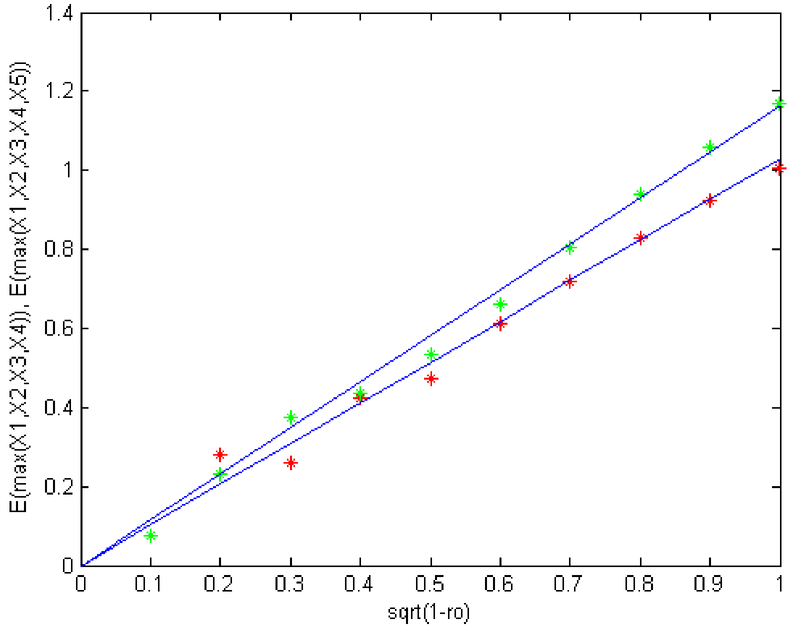
1) generuojamos standartinių normaliųjų dydžių sekos $X_j = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$;
2) sekos transformuojamos, gaunamos priklausomų dydžių sekos Y_j:

$$Y_j = V^T X_j^T, \quad \text{čia } V^T V = C = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}; \qquad \textbf{(2.72)}$$

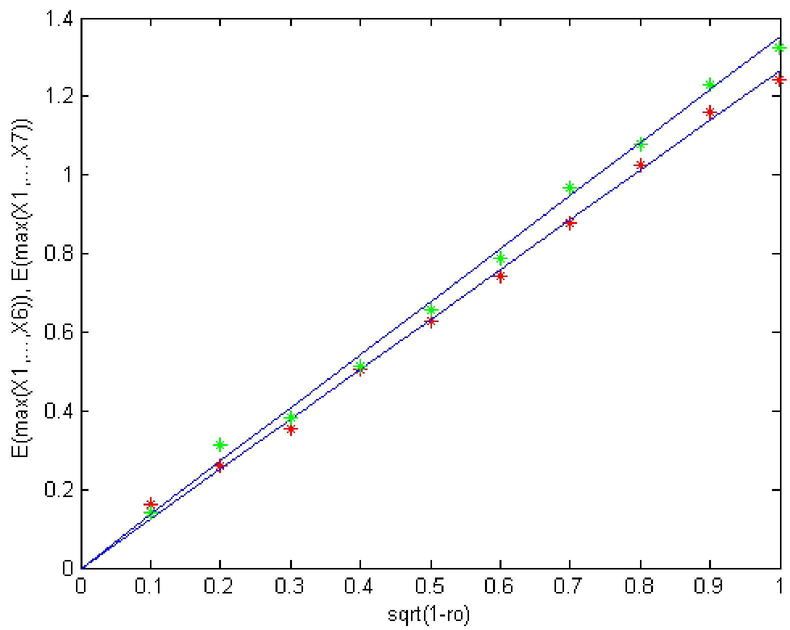
(transformacijų matrica V apskaičiuojama standartine Matlab funkcija V=*chol(C)*)

3) išrenkamos sekų Y_j maksimalios reikšmės;
4) apskaičiuojamas maksimumų aritmetinis vidurkis.

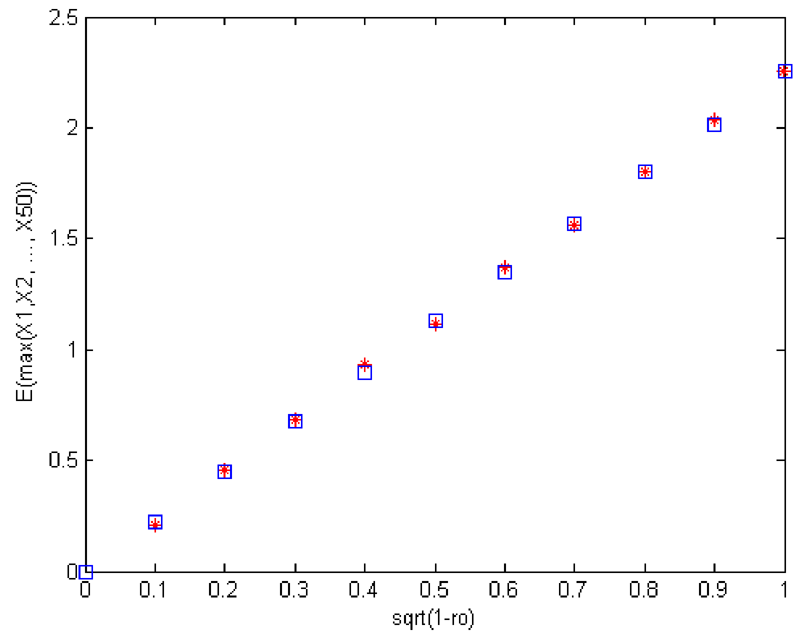
Toliau pateikiami modeliavimo rezultatai, kai n = 4, 5, 6, 7 (**2.2 pav., 2.3 pav. 2, 3, 4, 5 lentelės**), tai yra tais atvejais, kai nepriklausomų dydžių maksimumo vidurkiai yra žinomi, o taip pat, kai n=50 (**2.4 pav., 2.5 pav., 6 lentelė**).



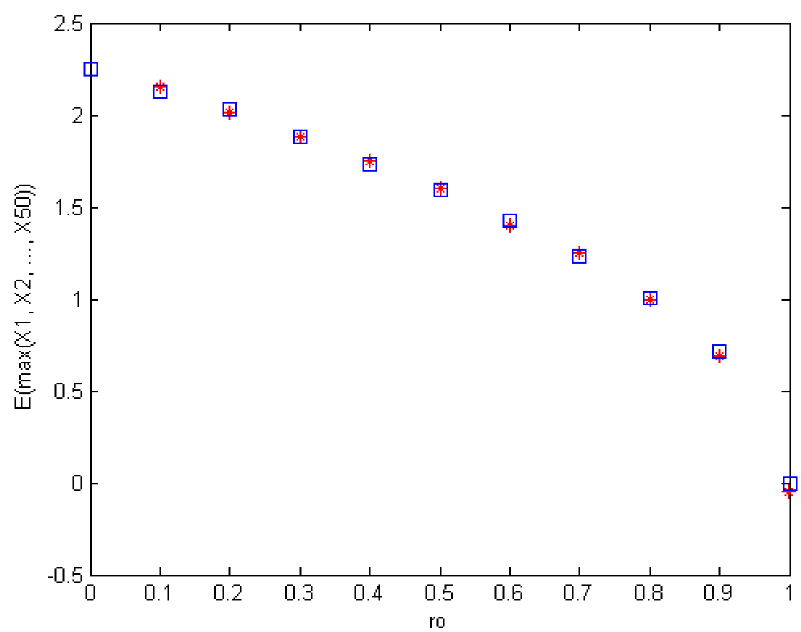
2.2 pav. μ_n* **ir** $\mu_n\sqrt{1-\rho}$ **grafikai, n=4, n=5**



2.3 pav. μ_n* **ir** $\mu_n\sqrt{1-\rho}$ **grafikai, n=6, n=7**



2.4 pav. μ_n * **ir** $\mu_n\sqrt{1-\rho}$ **grafikai, n=50**



2.5 pav. μ_n * **ir** $\mu_n\sqrt{1-\rho}$ **grafikai, priklausomybė nuo ρ, kai n=50**

Gauti rezultatai iliustruoja prielaidos teisingumą, tačiau šis sąryšis yra įrodytas tik dviejų ir trijų atsitiktiniams dydžių atveju.

Panaudojant transformacijų matricą, kuri nepriklausomų normaliųjų dydžių seką pakeičia į priklausomų, nagrinėjamąjį sąryšį **(2.71)** galima užrašyti kita forma:

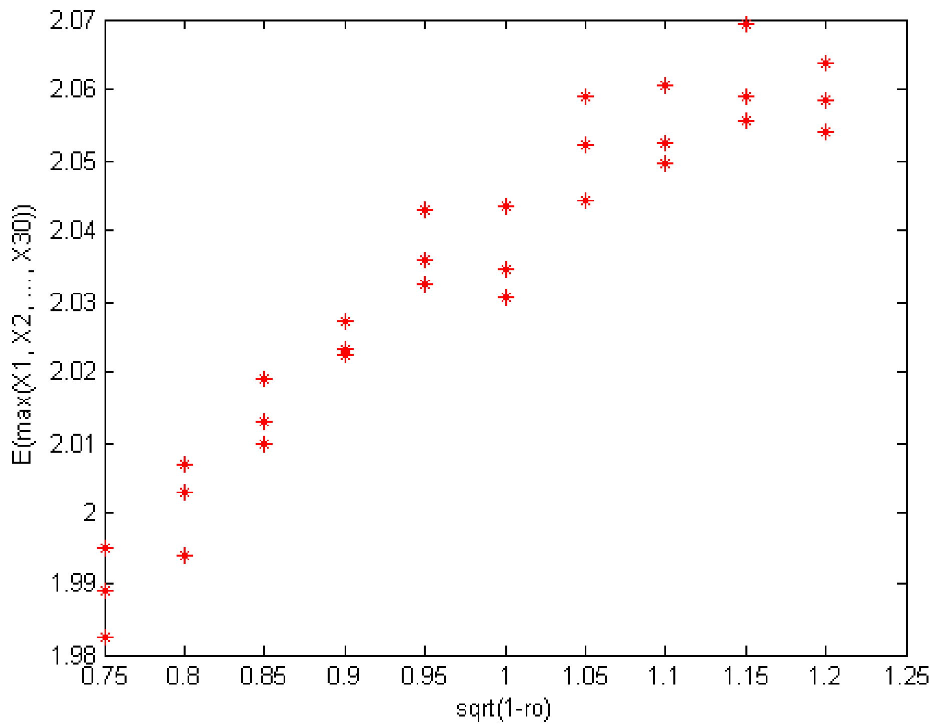
$$E\left(\max\left(V^T(X_1, X_2, \dots, X_n)^T\right)\right) = E\left(\max\left(\sqrt{1-\rho}(X_1, X_2, \dots, X_n)^T\right)\right) \quad \textbf{(2.73)}$$

Taigi, modeliavimo rezultatai rodo, kad atsitiktiniai dydžiai $\max\left(V^T(X_1, X_2, \dots, X_n)^T\right)$ ir $\max\left(\sqrt{1-\rho}(X_1, X_2, \dots, X_n)^T\right)$ yra ekvivalentūs vidurkio prasme.

Taip pat tyrimai buvo atlikti su kitokios formos koreliacine matrica. Praktikoje dažnai pasitaiko atvejis, kai ryšys egzistuoja tik tarp kaimyninių atsitiktinių dydžių, o likusieji yra nepriklausomi. Buvo modeliuojama pagal prieš tai aprašytą schemą, tačiau su kita koreliacine matrica, kurios elementai yra apibrėžiami:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & kai\ i = j; \\ \rho, & kai\ i = j \pm 1; \\ 0, & kitais\ atvejais. \end{cases} \quad \textbf{(2.74)}$$

Tikrinome, ar, taip pat kaip ir normaliųjų dydžių sekoms su vienodais koreliacijos koeficientais, galioja maksimumo vidurkio tiesinė priklausomybė nuo $\sqrt{1-\rho}$. Deja, pagal grafikus matyti, kad labai tikėtina, jog ši priklausomybė nėra tiesinė. Kaip pavyzdį pateikiame 30-ties kintamųjų sekos tyrimo rezultatus (**2.6 pav.**). Taip pat nėra aišku ar šiuo atveju galimas tiesioginis sąryšis su nepriklausomų normaliųjų dydžių maksimumo vidurkiu.



2.6 pav. μ_n * **grafikas, kai n=30**

2.3.3 PRIKLAUSOMŲ IR NEPRIKLAUSOMŲ NORMALIŲJŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ MOMENTŲ SĄRYŠIO TEORINIS TYRIMAS

Šiame skyrelyje nagrinėsime atsitiktinių dydžių seką (X_1, X_2,..., X_n) ~ N(0,V_X), kurios kovariacijų matricos struktūra yra $V_X = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, čia -1 ≤ ρ ≤ 1 – koreliacijos koeficientas.

Prieš pradedant maksimumo momentų tyrimą yra svarbu žinoti ar yra papildomu apribojimų parametrui ρ. Apskaičiuokime šios atsitiktinių dydžių sekos sumos antrąjį momentą:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} X_i X_j\right) = \tag{2.75}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} E\left(X_i X_j\right) = n + n\,(n-1)\rho.$$

Sumos kvadrato vidurkis yra neneigiamas skaičius, todėl:

$$n + n\,(n-1)\rho \ge 0,$$

$$\rho \ge -\frac{1}{n-1}. \quad \textbf{(2.76)}$$

$$\rho \ge 0,\ kai\ n \to \infty. \quad \textbf{(2.77)}$$

Taigi, dideliems n koreliacijos koeficientas ρ turi būti didesnis už neigiamą skaičių artimą nuliui. Tolesniuose tyrimuose apsiribosime tuo atveju, kai ρ yra neneigiamas.

Teorema 2.2. *Normaliųjų atsitiktinių dydžių sekoms* $(X_1, X_2,..., X_n) \sim N(0,V_X)$,

$V_X = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ *ir* $(U_1, U_2,..., U_n) \sim N(0,V_U)$, $V_U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ *galioja sąryšis:*

$$E\left(\max_{i=1,n} X_i\right) = \sqrt{1-\rho}\, E\left(\max_{i=1,n} U_i\right), \quad n \ge 1,\ \rho \ge 0, \quad \textbf{(2.78)}$$

Įrodymas

Nagrinėkime vienodai pasiskirsčiusių nepriklausomų atsitiktinių dydžių seką $(Z_1, Z_2,..., Z_n) \sim N(0,1\text{-}\rho)$ ir atsitiktinį dydį $Y\sim N(0,\rho)$, čia $\rho > 0$. Sukonstruokime naują atsitiktinių dydžių seką $(X_1, X_2,..., X_n)$, $X_i = Y+Z_i$, $1\le i \le n$. Apskaičiuosime šios sekos skaitines charakteristikas.

$$EX_i = E(Y + Z_i) = EY + EZ_i = 0, \quad 1 \le i \le n, \quad \textbf{(2.79)}$$

$$Var(X_i) = Var(Y + Z_i) = Var(Y) + Var(Z_i) = \rho + 1 - \rho = 1, \quad 1 \le i \le n, \quad \textbf{(2.80)}$$

$$Cov(X_i X_j) =$$

$$= EX_i X_j - EX_i EX_j = E(Y+Z_i)(Y+Z_j) = EY^2 + EYZ_i + EYZ_j + EZ_i Z_j = \rho \quad \textbf{(2.81)}$$

Sekos $(X_1, X_2,..., X_n)$ maksimumą galima išreikšti tokiu būdu:

$$\max_{i=1,n} X_i = Y + \max_{i=1,n} Z_i = Y + \sqrt{1-\rho}\,\max_{i=1,n} U_i, \quad n \ge 1, \quad \textbf{(2.82)}$$

čia $(U_1, U_2,..., U_n)$ nepriklausomų standartinių normaliųjų dydžių seka.

Pagal šią išraišką sekos ($X_1, X_2,..., X_n$) maksimumo vidurkis:

$$E\left(\max_{i=1,n} X_i\right) = E\left(Y + \max_{i=1,n} Z_i\right) = EY + E\left(\max_{i=1,n} Z_i\right) = \sqrt{1-\rho}\, E\left(\max_{i=1,n} U_i\right) \quad n \ge 1. \qquad \textbf{(2.83)}$$

Sąryšis įrodytas.

Išvada 2.2.1 *Normaliųjų atsitiktinių dydžių sekoms ($X_1, X_2,..., X_n$) ~ $N(\mu, V_X)$,*

$V_X = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ *ir ($U_1, U_2,..., U_n$) ~ $N(0,V_U)$,* $V_U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ *galioja sąryšis:*

$$E\left(\max_{i=1,n} X_i\right) = \mu + \sigma\sqrt{1-\rho}\, E\left(\max_{i=1,n} U_i\right), \quad n \ge 1,\ \rho \ge 0, \qquad \textbf{(2.84)}$$

Išvada seka iš maksimumo funkcijos ir vidurkio tiesiškumo savybių. Jei *($Y_1, Y_2,..., Y_n$) ~ $N(0,V_Y)$,*

$V_Y = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, tai pagal prieš tai įrodytą teoremą:

$$E\left(\max_{i=1,n} X_i\right) = E\left(\max_{i=1,n}(\mu + \sigma Y_i)\right) = \mu + \sigma E\left(\max_{i=1,n} Y_i\right) = \mu + \sigma\sqrt{1-\rho}\, E\left(\max_{i=1,n} U_i\right),$$
$$n \ge 1,\ \rho \ge 0. \qquad \textbf{(2.85)}$$

Teorema 2.3. *Normaliųjų atsitiktinių dydžių sekos ($X_1, X_2,..., X_n$) ~ $N(0,V_X)$,*

$V_X = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $\rho > 0$ *maksimumo antrasis momentas:*

$$\rho + (1-\rho)E\left(\max_{i=1,n} U_i\right)^2, \quad n \ge 1, \qquad \textbf{(2.86)}$$

čia ($U_1, U_2,..., U_n$) nepriklausomų standartinių normaliųjų dydžių seka.

Įrodymas

Remiantis ta pačia metodika kaip ir teoremos **2.2** įrodyme sukonstruojame atsitiktinių dydžių seką (X_1, X_2,..., X_n), X_i = Y+Z_i, 1≤ i ≤n. Pasinaudodami **(2.82)** savybę apskaičiuosime antrąjį momentą

$$E\left(\max_{i=1,n} X_i\right)^2 = E\left(Y + \max_{i=1,n} Z_i\right)^2 = E\left(Y^2 + 2Y\max_{i=1,n} Z_i + \left(\max_{i=1,n} Z_i\right)^2\right) =$$
$$= EY^2 + 2EYE\max_{i=1,n} Z_i + E\left(\max_{i=1,n} Z_i\right)^2 = \rho + (1-\rho)E\left(\max_{i=1,n} U_i\right)^2, \quad n \geq 1. \qquad \textbf{(2.87)}$$

Išvada 2.3.1 *Normaliųjų atsitiktinių dydžių sekos (X_1, X_2,..., X_n) ~ N(0,V_X),*

$$V_X = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \rho > 0$$

maksimumo dispersija:

$$Var\left(\max_{i=1,n} X_i\right) = \rho + (1-\rho)\left(E\left(\max_{i=1,n} U_i\right)^2 - E^2\left(\max_{i=1,n} U_i\right)\right), \quad n \geq 1, \rho \geq 0, \qquad \textbf{(2.88)}$$

čia (U_1, U_2,..., U_n) nepriklausomų standartinių normaliųjų dydžių vektorius.

Įrodoma tiesiogiai pagal dispersijos apibrėžimą:

$$Var\left(\max_{i=1,n} X_i\right) = E\left(\max_{i=1,n} X_i\right)^2 - E^2\left(\max_{i=1,n} X_i\right) =$$
$$= \rho + (1-\rho)E\left(\max_{i=1,n} U_i\right)^2 - (1-\rho)E^2\left(\max_{i=1,n} U_i\right) = \qquad \textbf{(2.89)}$$
$$= \rho + (1-\rho)\left(E\left(\max_{i=1,n} U_i\right)^2 - E^2\left(\max_{i=1,n} U_i\right)\right), \quad n \geq 1.$$

Išvada 2.3.2 *Normaliųjų atsitiktinių dydžių sekos $(X_1, X_2,..., X_n) \sim N(\mu, V_X)$,*

$$V_X = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \rho > 0$$

maksimumo dispersija:

$$Var\left(\max_{i=\overline{1,n}} X_i\right) = \sigma^2\rho + \sigma^2(1-\rho)\left(E\left(\max_{i=\overline{1,n}} U_i\right)^2 - E^2\left(\max_{i=\overline{1,n}} U_i\right)\right), \quad n \ge 1, \rho \ge 0, \tag{2.90}$$

čia $(U_1, U_2,..., U_n)$ nepriklausomų standartinių normaliųjų dydžių vektorius.

Išvada seka iš maksimumo funkcijos ir dispersijos savybių. Jei $(Y_1, Y_2,..., Y_n) \sim N(0,V_Y)$,

$$V_Y = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$ tai pagal savybę **2.3.1**:

$$Var\left(\max_{i=\overline{1,n}} X_i\right) = Var\left(\mu + \sigma \max_{i=\overline{1,n}} Y_i\right) = \sigma^2 Var\left(\max_{i=\overline{1,n}} Y_i\right) =$$
$$= \sigma^2\rho + \sigma^2(1-\rho)\left(E\left(\max_{i=\overline{1,n}} U_i\right)^2 - E^2\left(\max_{i=\overline{1,n}} U_i\right)\right), \quad n \ge 1. \tag{2.91}$$

Teorema 2.4. *Normaliųjų atsitiktinių dydžių sekos $(X_1, X_2,..., X_n) \sim N(0,V_X)$,*

$$V_X = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \rho > 0$$

maksimumo pradinius momentus galima išreikšti nepriklausomų standartinių normaliųjų dydžių $(U_1, U_2,..., U_n)$ maksimumo pradinių momentų sumomis:

$$E\left(\max_{i=\overline{1,n}} X_i\right)^m = \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(C_m^{2j}(2j-1)!!\,\rho^j(1-\rho)^{\frac{m}{2}-j} E\left(\max_{i=\overline{1,n}} U_i\right)^{m-2j}\right), \tag{2.92}$$

$n \ge 1, \rho \ge 0.$

Įrodymas

Remiantis ta pačia metodika kaip ir teoremos **2.2** įrodyme sukonstruojame atsitiktinių dydžių seką (X_1, X_2,..., X_n), X_i = Y+Z_i, 1≤ i ≤n. Momentams išreikšti pasinaudojame **(2.82)** savybę bei Niutono binomo formulę:

$$E\left(\max_{i=\overline{1,n}} X_i\right)^m = E\left(Y+\sqrt{1-\rho}\max_{i=\overline{1,n}} U_i\right)^m = E\sum_{k=0}^{m}\left(C_m^k Y^k\left(\sqrt{1-\rho}\max_{i=\overline{1,n}} U_i\right)^{m-k}\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\left(C_m^k EY^k(1-\rho)^{\frac{m-k}{2}} E\left(\max_{i=\overline{1,n}} U_i\right)^{m-k}\right), \quad n\ge 1. \qquad \textbf{(2.93)}$$

Atskirai apskaičiuosime atsitiktinio dydžio Y~ N(0,ρ) (čia ρ > 0) k-tąjį pradinį momentą, integruosime dalimis:

$$EY^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_{-\infty}^{\infty} y^k e^{-\frac{y^2}{2\rho}}dy,$$
$$u=\frac{y}{\sqrt{2\rho}},$$
$$du=\frac{dy}{\sqrt{2\rho}},$$
$$y=\sqrt{2\rho}u,$$

$$EY^k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(2\rho)^{\frac{k}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} u^k e^{-u^2}du = \frac{n-1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}(2\rho)^{\frac{k}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} u^{k-2} e^{-u^2}du = \ldots \qquad \textbf{(2.94)}$$

Tęsdami integravimą dalimis gauname pradinių momentų išraiškas:

jei k-nelyginis skaičius,

$$EY^k = \frac{(k-1)!!}{2^{\frac{n-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}(2\rho)^{\frac{k}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-u^2}du = 0, \qquad \textbf{(2.95)}$$

jei k-lyginis skaičius,

$$EY^k = \frac{(k-1)!!}{2^{\frac{k}{2}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}(2\rho)^{\frac{k}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{(n-1)!!}{\sqrt{\pi}}\rho^{\frac{k}{2}}\sqrt{\pi} = (k-1)!!\,\rho^{\frac{k}{2}}. \qquad \textbf{(2.96)}$$

Pradinius momentus **(2.95), (2.96)** įrašome į **(2.93)** išraišką:

$$E\left(\max_{i=1,n} X_i\right)^m = \sum_{k=0}^{m}\left(C_m^k EY^k (1-\rho)^{\frac{m-k}{2}} E\left(\max_{i=1,n} U_i\right)^{m-k}\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(C_m^{2j}(2j-1)!!\rho^j (1-\rho)^{\frac{m}{2}-j} E\left(\max_{i=1,n} U_i\right)^{m-2j}\right), \quad n \geq 1. \tag{2.97}$$

Teorema įrodyta.

Išvada 2.4.1 *Normaliųjų atsitiktinių dydžių sekos* $(X_1, X_2,..., X_n) \sim N(\mu, V_X)$,

$V_X = \sigma^2\begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ *maksimumo pradinius momentus galima išreikšti nepriklausomų*

standartinių normaliųjų dydžių $(U_1, U_2,..., U_n)$ *maksimumo pradinių momentų sumomis*:

$$E\left(\max_{i=1,n} X_i\right)^s = \sum_{r=0}^{s}\mu^r\sigma^{s-r}\sum_{j=0}^{\left[\frac{s-r}{2}\right]}\left(C_{s-r}^{2j}(2j-1)!!\rho^j(1-\rho)^{\frac{s-r}{2}-j} E\left(\max_{i=1,n} U_i\right)^{s-r-2j}\right), \tag{2.98}$$
$n \geq 1,\ \rho \geq 0.$

Išvada seka iš maksimumo funkcijos tiesiškumo savybės. Jei $(Y_1, Y_2,..., Y_n) \sim N(0, V_Y)$,

$V_Y = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, tai pagal teoremą **2.4**:

$$E\left(\max_{i=1,n} X_i\right)^s = E\left(\max_{i=1,n}(\mu+\sigma Y_i)\right)^s = E\left(\mu + \sigma\max_{i=1,n} Y_i\right)^s = \sum_{r=0}^{s}\mu^r\sigma^{s-r} E\left(\max_{i=1,n} Y_i\right)^{s-r}, \tag{2.99}$$
$n \geq 1.$

$E\left(\max_{i=1,n} Y_i\right)^{s-r}$ apskaičiuojamas pagal **(2.92)** formulę:

$$E\left(\max_{i=\overline{1,n}} Y_i\right)^{s-r} = \sum_{j=0}^{\left[\frac{s-r}{2}\right]} \left(C_{s-r}^{2j} (2j-1)!! \rho^j (1-\rho)^{\frac{s-r}{2}-j} E\left(\max_{i=\overline{1,n}} U_i\right)^{s-r-2j} \right), \quad n \geq 1. \qquad \textbf{(2.100)}$$

IŠVADOS

1. Gautas sąryšis tarp vienodai pasiskirsčiusių priklausomų ir nepriklausomų normaliųjų dydžių maksimumų pradinių momentų. Tai leidžia nepriklausomų dydžių atveju gautus rezultatus perkelti priklausomiems dydžiams.

2. Nevienodai pasiskirsčiusių normaliųjų dydžių maksimumų momentams gauti rezultatai visais atvejais, kurie prieš tai buvo ištirti nepriklausomiems dydžiams.

3. Įrodyta, kad dviejų ir daugiau priklausomų normaliųjų dydžių su skirtingais parametrais maksimumo momentai negali būti išreikšti elementariosiomis funkcijomis.

4. Nėra gauta rekurentinių išraiškų normaliųjų dydžių maksimumų aukštesnės eilės pradiniams momentams skaičiuoti.

LITERATŪRA

1. Коваленко И. Н., Левитская А. А., Савчик М. Н. Избранные задачи вероятностной комбинаторики. – Киев, 1986.
2. Дэйвид Г. Порядковые статистики. – Москва: Наука, 1979. 336 с.
3. Aksomaitis A. Tikimybių teorija ir statistika. Kaunas: Technologija, 2000. 344psl.
4. Cian M. The Moment-Generating Function of the Minimum of Bivariate Normal Random Variables. The American Statistician, Vol.48, No.2, 1994. pp. 124-125.
5. Ker A. P. On the Maximum of Bivariate Normal Random Variables. Extremes, Kluver Academic Publisher Vol.4, No.2, 1994. pp. 185-190.
6. Basu A. P., Ghosh J. K., Identifiability of the multinormal and other distributions under competing risk model. Journal of Multivariate Analysis 8, 1978. pp. 413-429.
7. Burauskaitė A., Aksomaitis A. Moments of extremes of Normally Distributed Values. Liet. mat rink., T43, spec. nr., Vilnius: Matematikos ir informatikos institutas, 2003. 677-681psl.
8. Burauskaitė A., Aksomaitis A. Priklausomų normaliųjų dydžių maksimumo vidurkis. Liet. mat rink., T44, spec. nr., Vilnius: Matematikos ir informatikos institutas, 2004. 241-244psl.
9. Burauskaitė A. Bakalauro darbas: Normaliųjų dydžių ekstremumų momentų skaičiuotė. Kauno technologijos universitetas, Kaunas, 2003. 51psl.
10. Mathsoft Resaurces, Extreme Value Constants:
http://www.mathsoft.com/mathresources/constants/diskrete structures/article/ 0,,2202,00.html.
11. Kotz S., Nadarajah S. Extreme value distributions: Theory and Applications. Imperial College Press, 2001. pp. 196.
12. Harwayne F. Reviews of publication: E. J. Gumbel, Statistics of Extremes, Columbia University press, New York, Second printing 1960, pp. 375. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1963.

1 PRIEDAS. TYRIMO REZULTATAI

1 lentelė

Max(Y) vidurkio priklausomybės nuo sqrt(1-ρ) tyrimas skirtingiems vektoriaus Y ilgiams

Keturi kintamieji
Koreliacija sqrt(1-ro) Maximumo antrasis momentas
0.999900 0.010000 0.022631
0.951600 0.220000 0.260513
0.815100 0.430000 0.463758
0.590400 0.640000 0.677227
0.277500 0.850000 0.879598
Simtas kintamuju
Koreliacija sqrt(1-ro) Maximumo antrasis momentas
0.999900 0.010000 0.013260
0.951600 0.220000 0.565367
0.815100 0.430000 1.063837
0.590400 0.640000 1.600582
0.277500 0.850000 2.146424

2 lentelė

Max(Y) vidurkio priklausomybės nuo sqrt(1-ρ) tyrimas,

keturi kintamieji

4 kintamieji			
Koreliacija	sqrt(1-ro)	Maks.vid.generuotas	Maks.vid.apskaiciuotas
0.990000	0.100000	0.067490	0.102938
0.960000	0.200000	0.205491	0.205875
0.910000	0.300000	0.221083	0.308813
0.840000	0.400000	0.531416	0.411750
0.750000	0.500000	0.497531	0.514688
0.640000	0.600000	0.589238	0.617625
0.510000	0.700000	0.659103	0.720563
0.360000	0.800000	0.771453	0.823500
0.190000	0.900000	0.928840	0.926438
0.000000	1.000000	1.122362	1.029375
-0.210000	1.100000	1.147079	1.132313

3 lentelė

Max(Y) vidurkio priklausomybės nuo sqrt(1-ρ) tyrimas,

penki kintamieji

5 kintamieji			
Koreliacija	sqrt(1-ro)	Maks.vid.generuotas	Maks.vid.apskaiciuotas
0.990000	0.100000	0.141968	0.116296
0.960000	0.200000	0.311510	0.232593
0.910000	0.300000	0.391217	0.348889
0.840000	0.400000	0.473181	0.465186
0.750000	0.500000	0.562575	0.581482
0.640000	0.600000	0.696056	0.697779
0.510000	0.700000	0.871576	0.814075
0.360000	0.800000	0.900854	0.930372
0.190000	0.900000	1.044678	1.046668
0.000000	1.000000	1.121217	1.162964
-0.210000	1.100000	1.307994	1.279261

4 lentelė

Max(Y) vidurkio priklausomybės nuo sqrt(1-ρ) tyrimas,

šeši kintamieji

6 kintamieji			
Koreliacija	sqrt(1-ro)	Maks.vid.generuotas	Maks.vid.apskaiciuotas
0.990000	0.100000	0.165184	0.126700
0.960000	0.200000	0.351063	0.253400
0.910000	0.300000	0.429670	0.380100
0.840000	0.400000	0.545956	0.506800
0.750000	0.500000	0.630763	0.633500
0.640000	0.600000	0.770650	0.760200
0.510000	0.700000	0.915233	0.886900
0.360000	0.800000	1.048052	1.013600
0.190000	0.900000	1.134433	1.140300
0.000000	1.000000	1.281370	1.267000

5 lentelė

Max(Y) vidurkio priklausomybės nuo sqrt(1-ρ) tyrimas,

septyni kintamieji

7 kintamieji			
Koreliacija	sqrt(1-ro)	Maks.vid.generuotas	Maks.vid.apskaiciuotas
0.990000	0.100000	0.126716	0.135200
0.960000	0.200000	0.264674	0.270400
0.910000	0.300000	0.414234	0.405600
0.840000	0.400000	0.512824	0.540800
0.750000	0.500000	0.647852	0.676000
0.640000	0.600000	0.792785	0.811200
0.510000	0.700000	0.930284	0.946400
0.360000	0.800000	1.095886	1.081600
0.190000	0.900000	1.246650	1.216800
0.000000	1.000000	1.355370	1.352000

6 lentelė

Max(Y) vidurkio priklausomybės nuo sqrt(1-ρ) tyrimas,

penkiasdešimt kintamųjų

50 kintamieji			
Koreliacija	sqrt(1-ro)	Maks.vid.generuotas	Maks.vid.apskaiciuotas
0.990000	0.100000	0.208327	0.225894
0.960000	0.200000	0.513345	0.451706
0.910000	0.300000	0.721382	0.683767
0.840000	0.400000	0.871553	0.901585
0.750000	0.500000	1.140690	1.133925
0.640000	0.600000	1.393659	1.333213
0.510000	0.700000	1.568767	1.563118
0.360000	0.800000	1.851557	1.802974
0.190000	0.900000	2.021212	2.007273
0.000000	1.000000	2.252936	2.243639

2 PRIEDAS. MATLAB FUNKCIJŲ TEKSTAI

```
function [y] = multid(mu,kov,n)

%generuoja priklausomus normaliuosius dydzius

%mu -vidurkiu vektorius
%kov-kovariaciju matrica
%n  -generuojamu dydziu skaicius

len=length(mu);
[c d]=chol(kov);
for i=1:1:n
   y(1:len,i)=c'*normrnd(0,1,len,1)+mu';
end;
```

```
function [maxvid1, maxvid2, ro]=analizeM(zingsnis,itsk,kiek,f,filename)

%funkcija skirta daugelio atsitiktiniu dydziu maksimumo vidurkio
%priklausomybes tyrimo rezultatams apibendrinti

%zingsnis-zingsnio ilgis. Patartina ~0.1
%itsk-iteraciju skaicius. Rekomenduojama >500
%kiek-analizuojamu atsitiktiniu dydziu kiekis
%f-jei 1 spausdina rezultatus i byla, kitu atveju nespausdina
%filename-rezultatu bylos vardas

[maxvid1, maxvid2, ro]=vidnuoroM(zingsnis,itsk,kiek);

if f==1
   f=fopen(filename, 'a');
   %spausdinimoz=floor(1/zingsnis/5)+1;
   [w, l]= size(ro);
   fprintf(f, '%i kintamieji\n', kiek);
   fprintf(f, '\n');
   fprintf(f, 'Koreliacija  sqrt(1-ro)  Maks.vid.generuotas
Maks.vid.apskaiciuotas\n');
   for i=1:w
      fprintf(f, '%f    ', ro(i,1));
      fprintf(f, '%f    ', ro(i,2));
      fprintf(f, '%f                  ', maxvid1(i));
    fprintf(f, '%f\n', maxvid2(i));
   end
   fprintf(f, '\n');
   fprintf(f, '\n');
end
fclose(f);
```

```
function [vidurkiai, vidurkiai2, rrr]=vidnuoroM(zingsnis,itsk,kiek)

%funkcija skirta daugelio atsitiktiniu dydziu maksimumo vidurkio priklausomybei
nuo
%sqrt(1-ro) tirti

%zingsnis-zingsnio ilgis. Patartina ~0.1
%itsk-iteraciju skaicius. Rekomenduojama >500
```

```
%kiek-generuojami atsitiktiniu dydziu skaicius

r=0+zingsnis;
mu=zeros(1,kiek);
vidurkiai=[];
vidurkiai2=[];
rrr=[];
iki=floor(sqrt(1/(kiek-1)+1)/zingsnis);
for i=1:iki
   ro=1-r^2;
   kov=ro*(ones(kiek)-eye(kiek))+eye(kiek);
   y=multid(mu, kov, itsk);
   mb=y(1,:);
   for j=1:kiek-1
      m=max(mb,y(j+1,:));
      mb=m;
   end;
   vid=sum(m)/itsk;
   vidurkiai=[vidurkiai; vid];
   plot(r,vid,'*r');
   hold on
   rrr=[rrr; ro r];
   r=r+zingsnis;
end
r=0+zingsnis;
for i=1:iki
    if kiek==2
        vid2=1/sqrt(pi);
    elseif kiek==3
        vid2=3/(2*sqrt(pi));
    elseif kiek==4
        vid2=3/(2*sqrt(pi))*(1+2/pi*asin(1/3));
    elseif kiek==5
        vid2=5/(4*sqrt(pi))*(1+6/pi*asin(1/3));
    elseif kiek==6
        vid2=1.267;
    elseif kiek==7
        vid2=1.352;
    elseif kiek>7
        kov=eye(kiek);
        y=multid(mu, kov, itsk);
        mb=y(1,:);
        for j=1:kiek-1
            m=max(mb,y(j+1,:));
            mb=m;
        end;
        vid2=sum(m)/itsk;
    end
    vidurkiai2=[vidurkiai2; vid2*r];
    if kiek>7
        plot(r,vid2*r,'sb');
    end
    hold on
    r=r+zingsnis;
end
if kiek<=7
        plot([zingsnis,zingsnis*iki],vid2.*[zingsnis,zingsnis*iki],'-');
        hold on
end
```