KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Irma Ivanovienė

Vektorių geometrinis maks (min) stabilumas

Magistro darbas

Vadovas

prof. dr. J. A. Aksomaitis

KAUNAS, 2009

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
doc. dr. N. Listopadskis
2009 06 05

Vektorių geometrinis maks (min) stabilumas

Matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
prof. dr. J. A. Aksomaitis
2009 06 03

Recenzentė
doc. dr. J. Venclovienė (VDU)
2009 06 02

Atliko
FMMM 7 gr. stud.
I. Ivanovienė
2009 05 25

KAUNAS, 2009

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai:

Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, Vice-prezidentas projektams (UAB „Baltic Amadeus“)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, valdybos pirmininko patarėjas („DnB NORD” bankas)

SANTRAUKA

Nagrinėjant geometrinį maks (min) stabilumą klimatologijoje, finansuose, draudime, ne visada pakanka vieno atsitiktinio dydžio, kartais jų būna visa sistema. Šiame darbe siekiama nuo geometrinio maks (min) stabilumo vienmačiu atveju pereiti prie dvimačio atvejo. Plėtinys atsitiktiniams dvimačiams vektoriams, gali būti atliktas iki daugiamačių vektorių.

Dvimačių skirstinių (Pareto, logistinio) tyrimas pateikė nelauktus rezultatus. Tiriant skirstinius, kurių vektoriaus komponentės nepriklausomos gauta, kad jie nėra geometriškai maks (min) stabilūs, negautas asimptotinis maks (min) stabilumas. Jeigu dvimačiai skirstiniai, kurių vektoriaus komponentės priklausomos yra geometriškai minstabilūs, tai jie nebūtinai geometriškai maksstabilūs ir atvirkščiai.

Gautos ribinės skirstinio funkcijos, kurios yra geometriškai maks (min) stabilios.

Vektorių maks (min) geometrinis stabilumas

Ivanovienė I. : Geometric max (min) stability of vectors : Master's work in applied mathematics / supervisor prof. dr. J. A. Aksomaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2009.- 70p.

SUMMARY

The examination of geometric max (min) stability in climatology, finance or insurance areas isn't enough to examine one random variable, sometimes necessary to consider the whole system of random variables. In this master's work our purpose is graduate from the geometric max (min) stability univariate case to the bivariate case. Extension random bivariate vectors can be made to the multivariate vectors.

Research of bivariate distribution (Pareto, logistic) function submitted unexpected results. The examinations of distributions whose components are independent have not received geometric max (min) stability and have not received asymptotic max (min) stability. If bivariate distributions, whose vectors components are dependent are geometric min stable they do not necessarily will be geometric max stable and vice versa.

Marginal distribution functions are geometric max (min) stable.

Irma Ivanovienė, FMMM-7

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Šio darbo tikslai: ištirti dvimačio vektoriaus geometrinį maks (min) stabilumą, kai jo koordinatės yra nepriklausomieji ir priklausomieji dydžiai, rasti ryšį tarp maksstabilumo ir minstabilumo.

Daugiamačiai ekstremumų skirstiniai, atitinkamuose modeliuose, padeda analizuoti meteorologinius duomenis (pavyzdžiui, ekstremumo reikšmė meteorologiniuose matavimuose atrinkta iš skirtingų reikšmių, turint panašius stebėjimus), sistemų gedimus, finansines struktūras (Tiago de Oliveira J., 1984). Dvimačių ekstremumų struktūra yra žinoma nuo 1960 metų. Vadinasi statistikos teorija apie ekstremumus yra labai nauja (Tiago de Oliveira J., 1984).

Darbe dažnai naudosim lo0gistinį ir Pareto skirstinius.

Tikimybių teorijoje ir statistikoje, logistinis skirstinys yra tolydus tikimybinis skirstinys, kuris yra naudojama logistinėje regresijoje ir nerviniams signalams tirti. Logistinis skirstinys taip pat naudojamas augimo modeliuose, duomenų analizėje. Yra tokių, kurie teigia, kad logistinis skirstinys yra netinkamas duomenų modeliavimui, nes kairėje pusėje logistinio atsitiktinio dydžio reikšmės artėja į neigiama begalybę. Taip gaunama neigiamas rezultatas modeliuojant gedimo laiką. Pavyzdžiui, sprendžiant klausimą dėl neigiamo gedimo laiko įrodyta kad skirstinys įgyja santykinai aukštą vidurkį, vadinasi galima naudoti šį skirstinį (Meeker, W.Q. ir Escobar, L.A., 1998).

Pareto skirstinys iš pradžių buvo sukurtas siekiant aprašyti pajamų paskirstymą. Pagrindas yra tas, kad didelė dalis gyventojų turi mažas pajamas, tačiau tik keli žmonės turi labai dideles pajamas. Pareto skirstinys taip pat taikomas draudime, klimatologijoje jis naudojamas apibūdinti ekstremalias oro sąlygas. Pareto skirstinys buvo pasiūlytas modeliuoti naftos ir dujų telkinius (Reed J. W.).

Teorinėje dalyje supažindinama su vienmačių skirstinių maks (min) stabilumu, geometriniu maks (min) stabilumu. Pareto ir Logistiniais skirstiniais.

Darbo tikslas: dvimačių vektorių maks (min) stabilumo analizė.

Uždaviniai:

- pateikti vektorių maks (min) geometrinio stabilumo kriterijus.
- ištirti galimus stabilumo plėtinius iš vienmačių atvejų į daugiamačius.

Šia tematika skaitytas pranešimas Klaipėdos universitete. Darbas publikuotas. Pateiktas pranešimui LMD 50 - tajai konferencijai.

1. TEORINĖ DALIS

1.1 ATSITIKTINIO DYDŽIO SĄVOKA IR SKIRSTINIO PASISKIRSTYMO FUNKCIJA

Atsitiktinio dydžio sąvoka yra viena svarbiausių tikimybių teorijoje. Atsitiktinio dydžio X kitimo sritį vadiname įgyjamų reikšmių aibe ir žymime Ω_X. Įgyjamų reikšmių aibė kartais būna žinoma prieš eksperimentą, tačiau praktikoje ji dažniausiai nėra tiksliai apibūdinama.

Norint apibūdinti atsitiktinį dydį, nepakanka žinoti jo įgyjamų reikšmių aibę. Reikia apibūdinti, kaip dažnai tas atsitiktinis dydis gali įgyti šias reikšmes, t.y. kaip tikimybės yra pasiskirsčiusios pagal įgyjamas reikšmes. Visiška charakteristika, apibūdinanti šį skirstinį, yra atsitiktinio dydžio skirstinio funkcija.

Atsitiktinio dydžio X skirstinio funkcija F vadinama tikimybė, jog $X \le x$:

$$F(x) = P(X \le x), \quad x \in R$$

Atsitiktinio dydžio skirstinio funkcija išsamiai apibūdina atsitiktinį dydį. Iš jos išraiškos matyti, kokias reikšmes įgyja atsitiktinis dydis ir kaip tikimybės pasiskirsčiusios pagal tas reikšmes (Aksomaitis A., 2000).

1.2 MAKS(MIN) STABILŪS SKIRSTINIAI

Praktikoje dažnai pasitaiko, kad bandymo rezultatas būna ne vienas, o du ir daugiau atsitiktinių dydžių, sudarančių sistemą. Atsitiktinių dydžių $X_1, X_2 \dots X_n$ sistema vadiname daugiamačiu atsitiktiniu vektoriumi.

Tarkime $(X_1, X_2 \dots X_n)$– nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir $F(x) = P(X_j \le x), j = \overline{1, n}$. Atsitiktinių dydžių maksimumo ir minimumo struktūros apibrėžiamos taip:

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{1.2.1}$$

$$W_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \tag{1.2.2}$$

Kai dydžiai X_k, $k \ge 1$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, ekstremumų Z_n ir W_n skirstinio funkcijos yra (Galambos, J., 1987):

$$P(Z_n \le x) = F^n(x), \tag{1.2.3}$$

$$P(W_n \le x) = 1 - (1 - F(x))^n. \tag{1.2.4}$$

1.2.1 Apibrėžimas (Galambos, J., 1978**).** Skirstinio funkcija $F(x)$ vadinama maksstabiliąja, jei egzistuoja tokios normalizavimo konstantos a_n ir $b_n > 0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} \le x\right) = F(x) \tag{1.2.5}$$

ir minstabiliąją

$$P\left(\frac{W_n - c_n}{d_n} \le x\right) = F(x) \tag{1.2.6}$$

su visais $x \in \mathbf{R}$ ir $c_n \in \mathbf{R}$ $d_n > 0$.

1.2.1 Teorema (Zhang Z, 2002**):** Skirstinio funkcija H(x) yra maksstabili tada ir tik tada, kai ji priklauso vienam iš trijų tipų

$$H(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < \infty; \qquad \text{(Gumbel)} \tag{1.2.7}$$

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \quad \alpha > 0 \end{cases} \qquad \text{(Frechet)} \tag{1.2.8}$$

$$H(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & x < 0 \quad \alpha > 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases} \qquad \text{(Weibull)} \tag{1.2.9}$$

1.2.2 Teorema (Zhang Z, 2004**):** Skirstinio funkcija L(x) yra minstabili tada ir tik tada, kai ji priklauso vienam iš trijų tipų

$$L(x) = 1 - \exp(-e^{x}), \quad -\infty < x < \infty \qquad \text{(Gumbel)} \tag{1.2.10}$$

$$L(x) = 1 - \exp(-(-x)^{-\alpha}) \quad x < 0 \qquad \text{(Frechet)} \tag{1.2.11}$$

$$L(x) = 1 - \exp(-x^{\alpha}) \qquad \text{(Weibull)} \tag{1.2.12}$$

Visi šie šeši skirstiniai yra normuotų maksimumų (minimumų) ribiniai skirstiniai

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} \le x\right) = H(x)$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{W_n - a_n}{b_n} \le x\right) = L(x).$$

1.3 PERKĖLIMO TEOREMA

Nagrinėsime struktūrą Z_N, kai N yra atsitiktinis dydis, nepriklausantis nuo $X_i, i \ge 1$.

1.3.1 Perkėlimo Teorema (Galambos, 1978): Tarkime kad

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} H(x)$$

ir

$$P\left(\frac{N_n}{n} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} A(x).$$

Tada

$$P\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Psi(x);$$

čia skirstinio funkcija

$$\Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x)\,dA(z)$$

1.3.1. Pavyzdys: Tarkime, kad N_n skirstinys yra geometrinis su parametru $p_n = \frac{1}{n}$. Tada skirstinio funkcija

$$P(N_n \le x) = \sum_{k=1}^{[x]} P(N_n = k) = p\sum_{k=1}^{[x]} (1-p)^{k-1} = [q = 1-p] = 1 - p\sum_{k=[x]+1}^{\infty} q^{k-1} =$$

$$= 1 - p\frac{q^{[x]}}{1-q} = 1 - q^{[x]}$$

$$P\left(\frac{N_n}{n} \le x\right) = P(N_n \le xn) = 1 - q^{[nx]} = \left[p = \frac{1}{n}\right] = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nx - \{nx\}}$$

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nx - \{nx\}} \to 1 - e^{-x}$$

Taigi, $A(x) = 1 - e^{-x}$

Dabar ribinė skirstinio funkcija

$$\Psi(x)=\int_0^\infty H^z(x)dA(z)=\int_0^\infty H^z(x)dA(1-e^{-z})=\int_0^\infty\left(\frac{H(x)}{e}\right)^z dz=$$

$$=\left.\frac{\left(\frac{H(x)}{e}\right)^z}{\ln\left(\frac{H(x)}{e}\right)}\right|_0^\infty=\frac{1}{1-\ln(H(x))}$$

Turime tris maksstabilias skirstinio funkcijas

$$H(x)=e^{-z(x)}=\begin{cases}\exp(-e^{-x}), & -\infty<x<\infty,\\ \exp(-x^{-\alpha}), & x>0,\\ \exp(-(-x)^{\alpha}), & x<0.\end{cases}$$

ir tris ribines skirstinio funkcijas perkėlimo teoremoje:

$$\Psi(x)=\frac{1}{1+z(x)}=\begin{cases}\frac{1}{1+e^{-x}}, & -\infty<x<\infty,\\ \frac{1}{1+x^{-\alpha}}, & x>0,\\ \frac{1}{1+(-x)^{\alpha}}, & x<0.\end{cases}$$

Pirmasis skirstinys - logistinis, o kiti du - Pareto skirstiniai. Analogiška perkėlimo teorema yra ir atsitiktinių dydžių minimumams. Ribinė skirstinio funkcija, kai N_n geometrinis yra:

$$\Psi(x)=1-\int_0^\infty(1-L(x))^z dA(z)=1-\int_0^\infty(1-L(x))^z dA(1-e^{-z})=1-\int_0^\infty\left(\frac{(1-L(x))}{e}\right)^z dz=$$

$$=1-\left.\frac{\left(\frac{(1-L(x))^z}{e}\right)^z}{\ln\left(\frac{(1-L(x))^z}{e}\right)}\right|_0^\infty=1-\frac{1}{1-\ln(1-L(x))}$$

Minstabilios skirstinio funkcijos

$$L(x)=1-e^{-u(x)}=\begin{cases}1-\exp(-e^{x}), & -\infty<x<\infty\\ 1-\exp(-(-x)^{-\gamma}) & x<0\\ 1-\exp(-x^{\gamma}), & x<0\end{cases}$$

Ribinės skirstinio funkcijos, perkėlimo teoremoje minimumams yra:

$$\Psi(x) = 1 - \frac{1}{1+u(x)} = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1+e^{x}}, & -\infty < x < \infty \\ 1 - \dfrac{1}{1+x^{\alpha}}, & x > 0 \\ 1 - \dfrac{1}{1+(-x)^{-\alpha}}, & x < 0 \end{cases}$$

1.4 GEOMETRINIS MAKS (MIN) STABILUMAS

1.4.1 Apibrėžimas (Satheesh S. ir Unnikrishnan Nair N., 2004**).** Skirstinio funkcija $F(x)$ vadiname geometriškai maksstabiliaja, jeigu

$$P\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} < x\right) = F(x);$$

čia dydis N_n nepriklauso nuo visų X_j ir jo skirstinys yra geometrinis:

$$P(N_n = k) = p_n(1-p_n)^{k-1}, \quad k \geq 1$$

Kadangi N_n generuojančioji funkcija

$$g_{N_n}(z) = \frac{p_n z}{1-(1-p_n)z}$$

ir

$$P\left(\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} < x\right) = g_{N_n}(F(xb_n + a_n))$$

tai geometrinio maksstabilumo kriterijus yra:

$$\frac{p_n F(xb_n + a_n)}{1-(1-p_n)F(xb_n + a_n)} = F(x). \qquad (1.4.1)$$

Geometrinio minstabilumo kriterijus yra:

$$\frac{p_n(1-F(xd_n + c_n))}{1-(1-p_n)(1-F(xd_n + c_n))} = 1 - F(x). \qquad (1.4.2)$$

1.4.1 Teorema (Satheesh S. and Unnikrishnan Nair N., 2004**)** : Skirstinio funkcija F(x), $x \in R$ yra geometriškai maksstabili tada ir tik tada, kai ji yra geometriškai min-stabili (geometrinio skirstinio parametras abiem atvejais turi sutapti)

Įrodymas: Ši teorema įrodoma pasinaudojus geometrinio skirstinio momentus generuojančia funkcija. Gaunamas rezultatas:

$$\frac{p \cdot F(xb_n + a_n)}{[1-(1-p)\cdot F(xb_n + a_n)]} = F(xb_n + a_n) \Leftrightarrow 1 - \mathrm{F}(xb_n + a_n) = \frac{p \cdot (1-F(b_n + a_n))}{[1-(1-p)\cdot (1-F(b_n + a_n))]} \qquad (1.4.3)$$

Vienmačių dydžių maks (min) stabilumas, geometrinis maks (min) stabilumas visiškai yra išnagrinėtas įvairiuose leidiniuose (Satheesh S. ir Unnikrishnan Nair N., 2004; Molchanov I., 2008; Kozubowski T. J. ir Rachev S. T., 1999).

1.5 LOGISTINIS IR PARETO SKIRSTINIAI

Mūsų tyrimo objektas bus logistinis ir Pareto skirstiniai. Pateiksime vienmatį atvejį, o su dvimatėmis išraiškomis susidursime tiriamojoje dalyje.

Logistinį skirstinį apibudina du parametrai: μ ir σ (Nadarajah S., ir Kotz S.,, 2004; Stockute R., Veaux A. ir Johnson P., 2006)

Logistinio skirstinio tankis:

$$f(x) = \frac{e^{-(x-\mu)/\sigma}}{\sigma\left(1+e^{-(x-\mu)/\sigma}\right)^2},$$

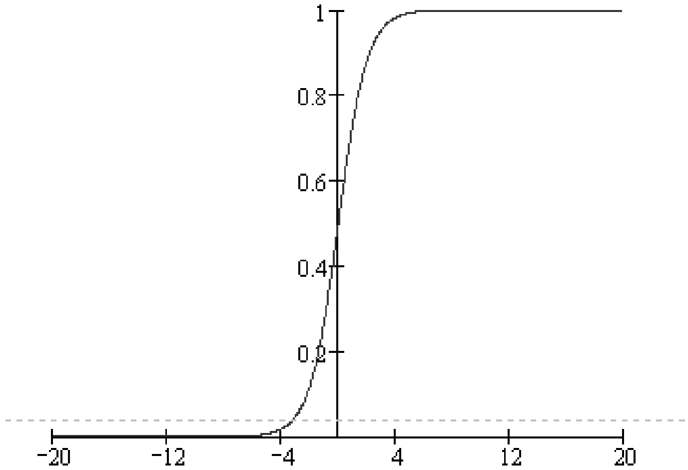
Skirstinio funkcija

$$F(x) = \frac{1}{\left(1+e^{-(x-\mu)/\sigma}\right)},$$

Mes naudosime skirstinio parametrus $\mu = 0$ ir $\sigma = 1$. Tuomet logistinio atsitiktinio dydžio skirstinio funkcija

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \quad x \in R,$$

Grafiškai ši skirstinio funkcija atrodo taip:

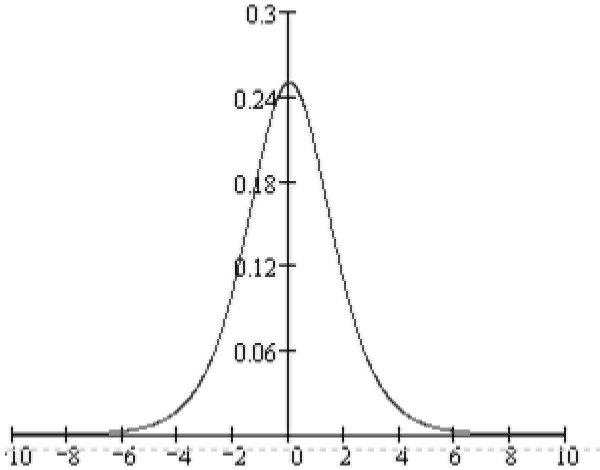


1.5.1. pav. Logistinės skirstinio funkcijos grafikas

Grafikas panašus į normaliojo skirstinio funkcijos grafiką. Tačiau jo „uodegos“ yra sunkesnės (lėčiau $F(x) \to 1$, kai $x \to \infty$, $F(x) \to 0$, kai $x \to -\infty$) (Stoutenborough J.W. ir Johnson P., 2006). Pastebėsime, kad $F(-x) = 1 - F(x)$

Skirstinio tankio funkcija

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}, \quad x \in R, \quad f(-x) = f(x)$$

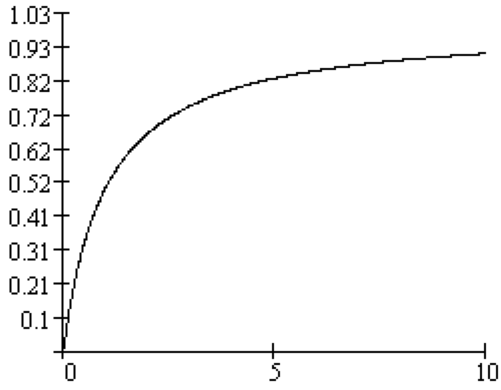


1.5.2. pav. Logistinio skirstinio tankio grafikas

Pareto skirstinio funkcija

$$F(x) = \frac{1}{1+x^{-\alpha}}, \qquad x > 0, \alpha > 0$$

Šios funkcijos grafikas lėtai artėjantis į 1, kai $x \to \infty$ (sunkios uodegos)



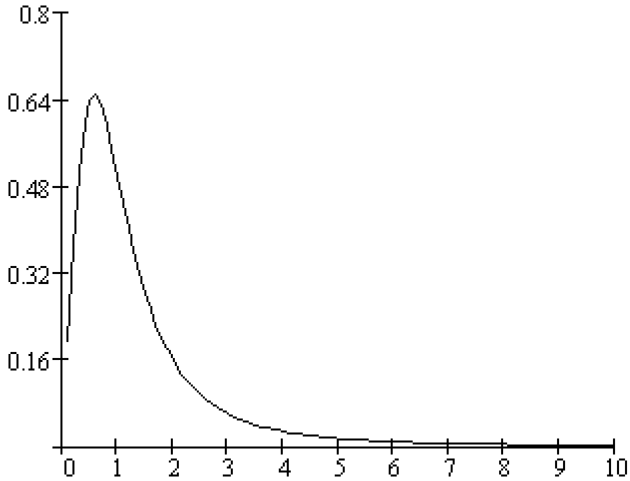
1.1.5.3 pav. Pareto skirstinio funkcijos grafikas, kai $\alpha = 2$

Ekonomikoje yra naudojami, tie skirstiniai, kurių uodegos yra sunkios. Dėl šios priežasties Vilfredas Paretas (1897) pasiūlė skirstinius, kurie vadinami Pareto vardu.

Pareto skirstinio tankio funkcija

$$f(x) = \frac{x^{-\alpha-1}\alpha}{\left(x^{-\alpha}+1\right)^2},\ x > 0$$

Pareto skirstinio tankio funkcijos grafikas



1.5.4. pav. Pareto skirstinio tankio funkcijos grafikas, kai $\alpha = 2$

1.6 DVIMAČIO VEKTORIAUS SKIRSTINIO FUNKCIJA

Norint apibūdinti atsitiktinį vektorių, naudojame tikimybių skirstinio, arba tankio, funkcija.

Tarkime, kad $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę vektoriai su skirstinio funkcija $F(x,y) = P(X_i \le x; Y_i \le y) \quad \forall i = \overline{1,n}.$

Dvimačio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijos savybės.

1. Pasiskirstymo funkcijos $F(x,y)$ reikšmės:

$0 \le F(x,y) \le 1$

2. $\lim\limits_{y\to\infty} F(x;y) = F_1(x), \quad \lim\limits_{x\to\infty} F(x;y) = F_2(y),$

arba

$$P(X_i \le x;+\infty) = F_1(x) = P(X \le x), \quad P(+\infty;Y_j \le y) = F_2(y) = P(Y \le y),$$

3. $\lim\limits_{\substack{y\to\infty \\ x\to\infty}} F(x;y) = 1$ arba $F(+\infty;+\infty) = 1$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x;y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x;y) = \lim\limits_{\substack{y\to-\infty \\ x\to-\infty}} F(x;y) = 0$

5. Pasiskirstymo funkcija $F(x,y)$ yra nemažėjanti:

Vektorių maks (min) geometrinis stabilumas

$F(x_2;y) \ge F(x_1;y) \quad kai\ x_2 > x_1$
$F(x;y_2) \ge F(x;y_1) \quad kai\ y_2 > y_1$

6. Skirstinio funkcija $F(x,y)$ yra tolydi iš dešinės:

$$F(x+0,y+0) = F(x,y)$$

Tikimybių tankio funkcijai būdingos šios savybės (Aksomaitis, A., 2000)

1. Tankis yra neneigiamoji $p(x,y) \ge 0$ normuota funkcija:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dxdy = 1$$

2. Jeigu tankis $p(x,y)$ yra tolydus taške (x,y) tai

$$p(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

1.7 PRIKLAUSOMIEJI IR NEPRIKLAUSOMIEJI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

Vienas iš pagrindinių tikimybių teorijos uždavinių yra nustatyti, kada atsitiktiniai dydžiai yra priklausomi ir kada nepriklausomi.

Atsitiktiniai dydžiai X ir Y vadinami nepriklausomais, jei vieno atsitiktinio dydžio skirstinio funkcija nepriklauso nuo to, kokias reikšmes įgyja kitas atsitiktinis dydis. Remdamiesi įvykių A ir B nepriklausomumo apibrėžimu

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

tiksliau apibrėšime dviejų atsitiktinių dydžių X ir Y nepriklausomumą

Sakykime, $F(x,y), F_1(x)$ ir $F_2(y)$ yra atsitiktinio vektoriaus (X,Y) ir jo koordinačių X bei Y skirstinio funkcijos.

1.7.1 Apibrėžimas. Atsitiktinius dydžius X ir Y vadiname nepriklausomais jei su visais $(x,y) \in R^2$

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y) \qquad (1.7.1)$$

t.y. jei

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \qquad (1.7.2)$$

Jeigu nors vienai skaičių porai $(\tilde{x},\tilde{y}) \in R^2$

$F(\tilde{x},\tilde{y}) \neq F_1(\tilde{x}) \cdot F_2(\tilde{y}),$

tai atsitiktiniai dydžiai X ir Y vadinami priklausomais (Aksomaitis A., 2000).

1.8 SKAITINĖS ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ IR VEKTORIŲ CHARAKTERISTIKOS

Praktikoje pasitaiko, kad tikimybių skirstinio funkcijos ne visuomet yra žinomas, o kai kuriais atvejais jų žinojimas nėra būtinas. Pasirodo, kad tais atvejais atsitiktinį dydį galima charakterizuoti dalinai. Tokios dalinės charakteristikos vadinamos skaitinėmis atsitiktinių dydžių charakteristikomis:

1. Vidurkis $MX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_1(x), \qquad MY = \int_{-\infty}^{\infty} y dF_2(y).$

2. Dispersija $DX = M(X - MX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 dF_1(x).$

$$DY = M(Y - MY)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - MY)^2 dF_2(y).$$

3. Kovariacija $\text{cov}(X,Y) = M(X - MX) \cdot M(Y - MY) = MXY - MXMY$.

Jeigu $\text{cov}(X,Y) = 0$, dydžiai X ir Y vadinami nekoreliuotais

4. Kovariacijos matrica

$$B = \begin{pmatrix} DX & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(X,Y) & DY \end{pmatrix}$$

1.9 ATSITIKTINIŲ VEKTORIŲ EKSTREMUMAI

Tarkime turime dvimačius nepriklausomus vektorius $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ su skirstinio funkcija $F(x,y)$. Tada jų maksimumas

$$Z_n = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)});$$

čia $Z_n^{(1)}$ ir $Z_n^{(2)}$ yra koordinačių maksimumai:

$$Z_n^{(1)} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n), \qquad Z_n^{(2)} = \max(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n),$$

Skirstinio funkcija:

Vektorių maks (min) geometrinis stabilumas

$$
\begin{aligned}
&P(Z_n \le (x,y)) = P(Z_n^{(1)} \le x, Z_n^{(2)} \le y) = \\
&= P(X_1 \le x, \ldots, X_n \le x, Y_1 \le y, \ldots, Y_n \le y) = \\
&= P\big((X_1, Y_1) \le (x,y), \ldots, (X_n, Y_n) \le (x,y)\big) = \\
&= F^n(x,y).
\end{aligned}
$$

Vektorių minimumas

$$W_n = (W_n^{(1)}, W_n^{(2)});$$

čia

$$W_n^{(1)} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n), \quad W_n^{(2)} = \min(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

tuomet skirstinio funkcija

$$P(W_n \le (x,y)) = P(W_n^{(1)} \le x, W_n^{(2)} \le y) =$$

$$= 1 - P(X_1 \ge x, \ldots, X_n \ge x \cup Y_1 \ge y, \ldots, Y_n \ge y) =$$

$$= 1 - P(X_1 \ge x, \ldots, X_n \ge x) - P(Y_1 \ge y, \ldots, Y_n \ge y) + P(X_1 \ge x, \ldots, X_n \ge x, Y_1 \ge y, \ldots, Y_n \ge y) =$$

$$= 1 - (1 - F_1(x))^n - (1 - F_2(y))^n + (1 - F_1(x) - F_2(y) + F(x,y))^n$$

Matome, jog vektorių minimumo skirstinio funkcijos išraiška ženkliai skiriasi nuo atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio funkcijas.

1.10 RIBINĖS TEOREMOS. STABILUMAS

Tarkime, turime nepriklausoma vektorių seką

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n), \ldots$$

Vektorių komponentės X ir Y gali būti nepriklausomos, bet gali būti ir priklausomos.

Čia vėl galime nagrinėti ribines teoremas, t.y. spręsti problemą: rasti tokias normalizavimo konstantas $\{a_{n1}, b_{n1} > 0, n1 \ge 1\}$ ir $\{a_{n2}, b_{n2} > 0, n2 \ge 1\}$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_n^{(1)} - a_{n1}}{b_{n1}} \le x, \frac{Z_n^{(2)} - a_{n2}}{b_{n2}} \le y\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} H(x,y); \tag{1.10.1}$$

čia ribinė skirstinio funkcija $H(x,y)$ yra neišsigimusi funkcija.

Galimas ir perkėlimo teoremos variantas: jeigu

$$P\left(\frac{Z_n^{(1)} - a_{n1}}{b_{n1}} \le x, \frac{Z_n^{(2)} - a_{n2}}{b_{n2}} \le y\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} H(x,y) \tag{1.10.2}$$

ir

$$P\left(\frac{N_n}{n} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} A(x)$$

tai

$$P\left(\frac{Z_{N_n}^{(1)} - a_{n1}}{b_{n1}} \le x, \frac{Z_{N_n}^{(2)} - a_{n2}}{b_{n2}} \le y\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Psi(x,y);$$

čia ribinė skirstinio funkcija

$$\Psi(x,y) = \int_0^\infty H^z(x,y)dA(z) \qquad (1.10.3)$$

Analogiška perkėlimo teorema yra ir minimumų schemoje. Ribinė skirstinio funkcija, kai X_i ir Y_i, $i \ge 1$ yra nepriklausomi

$$\Psi(x,y) = 1 - \int_0^\infty (1 - L_1(x))^z\, dA(z) - \int_0^\infty (1 - L_2(y))^z\, dA(z) + \int_0^\infty (1 - L_1(x))^z (1 - L_2(y))^z\, dA(z)$$

Visa tai yra atlikta (Jokimaitis A., 1998)

1.10.1. Pavyzdys: Imkime du vienmačius logistinius skirstinius:

$$F_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad F_2(y) = \frac{1}{1+e^{-y}}, \quad x \in R,\ y \in R$$

Jeigu X ir Y nepriklausomi

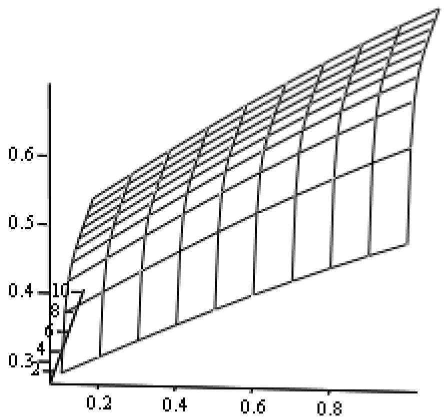
$$F(x,y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y} + e^{-x}e^{-y}}$$

Imdami $b_{n1} = b_{n2} = 1 \quad a_{n1} = a_{n2} = \ln(n)$ gauname:

$$F^n(xb_{n1} + a_{n1}, yb_{n2} + a_{n2}) =$$

$$= \left(\frac{1}{1 + \exp(xb_{n1} - a_{n1}) + \exp(-yb_{n2} - a_{n2}) + \exp(-xb_{n1} - a_{n1})\exp(-yb_{n2} - a_{n2})}\right)^n \to$$

$$\to H(x,y) = \exp(-e^{-x} - e^{-y})$$



1.10.1. pav. Ribinės dvimačio logistinio skirstinio funkcijos grafikas

1.10.2. Pavyzdys: Tarkime yra du vienmačiai Pareto skirstiniai:

$$F_1(x) = \frac{1}{1+x^{-\alpha}} \quad F_2(y) = \frac{1}{1+y^{-\beta}}, \quad x>0,\ y>0,\ \alpha>0,\ \beta>0$$

Dvimatis Pareto skirstinys, kai X ir Y nepriklausomi, yra:

$$F(x,y) = \frac{1}{1+x^{-\alpha}+y^{-\beta}+x^{-\alpha}y^{-\beta}}.$$

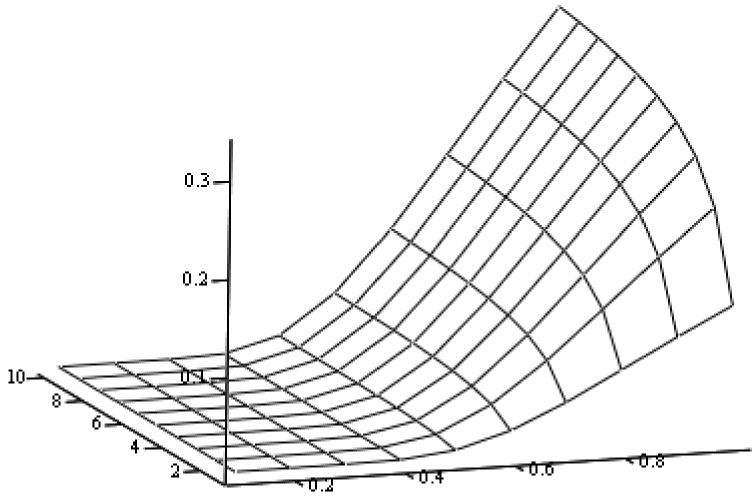
Tuomet gauname ribinę dvimačio skirstinio funkciją, kai parenkamos normalizavimo konstantos

$$a_{n1} = a_{n2} = 0 \quad b_{n1} = n^{\frac{1}{\alpha}} \ b_{n2} = n^{\frac{1}{\beta}}$$

$$F^n(xb_{n1}+a_{n1}, yb_{n2}+a_{n2}) =$$

$$\left(\frac{1}{1+\left(xb_{n1}+a_{n1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{n2}+a_{n2}\right)^{-\beta}+\left(yb_{n2}+a_{n2}\right)^{-\beta}\left(xb_{n1}+a_{n1}\right)^{-\alpha}}\right)^n \to$$

$$\to H(x,y) = \exp(-x^{-\alpha} - y^{-\beta})$$



1.1.10.2. pav. Ribinės dvimačio Pareto skirstinio funkcijos grafikas, kai $\alpha = 2; \beta = 1$

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1. GEOMETRINIO STABILUMO KRITERIJUS

Apibrėžimas. Dvimatę skirstinio funkciją $F(x,y)$ vadiname geometriškai maksstabilia, jeigu egzistuoja tokios normalizavimo konstantos $\{a_{p1}, b_{p1}\}$ ir $\{a_{p2}, b_{p2}\}$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_N^{(1)} - a_{p1}}{b_{p1}} \le x, \frac{Z_N^{(2)} - a_{p2}}{b_{p2}} \le y\right) = F(x,y),$$

čia N ,yra geometrinis atsitiktinis dydis su parametru p :

$$P(N = k) = p(1-p)^{k-1},\ k \ge 1,\ 0 < p < 1.$$

Pasinaudoję pilnosios tikimybės formulę gauname:

$$P\left(\frac{Z_N^{(1)} - a_{p1}}{b_{p1}} \le x, \frac{Z_N^{(2)} - a_{p2}}{b_{p2}} \le y\right) = \sum_k P(Z_k^{(1)} \le xb_{p1} + a_{p1}, Z_k^{(2)} \le yb_{p2} + a_{p2})P(N = k) =$$

$$= \sum_k P(X_1 \le xb_{p11} + a_{p11} \ldots, , X_k \le xb_{p1k} + a_{p1k},\ Y_1 \le yb_{p21} + a_{p21}, \ldots, Y_k \le yb_{p2k} + a_{p2k})P(N = k) =$$

$$= \sum_k F^k(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2})P(N = k) = g_N\left(F(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2})\right);$$

čia $g_N(z)$ yra geometrinio atsitiktinio dydžio generuojančioji funkcija:

$$g_N(z) = Mz^N = \sum_{k=1}^{\infty} z^k P(N = k) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$$

Tokiu būdu, geometrinio maksstabilumo kriterijus dvimačiu atveju yra

$$\frac{pF(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2})}{1-(1-p)F(xb_{p1} + a_{p1}, yb_{p2} + a_{p2})} = F(x,y), \tag{2.1.1}$$

Kadangi

$$P(W_n^{(1)} \le x, W_n^{(2)} \le y) = P(\min(X_1,\ldots,X_n) \le x, \min(Y_1,\ldots,Y_n) \le y) =$$

$$= 1 - P(\min(X_1,\ldots,X_n) \ge x \cup \min(Y_1,\ldots,Y_n) \ge y) =$$

$$= 1 - P(\min(X_1,\ldots,X_n) \ge x) - P(\min(Y_1,\ldots,Y_n) \ge y) +$$

$$+P(\min(X_1,...,X_n)\ge x, \min(Y_1,...,Y_n)\ge y)=$$
$$=1-(1-F_1(x))^n-(1-F_2(y))^n+(1-F_1(x)-F_2(y)+F(x,y))^n \tag{2.1.2}$$

Tai $F(x,y)$ minstabilumo sąlyga yra

$$(1-F_1(xd_{n1}+c_{n1}))^n+(1-F_2(yd_{n2}+c_{n2}))^n-(1-F_1(xd_{n1}+c_{n1})-F_2(yd_{n2}+c_{n2})+$$
$$+F_1(xd_{n1}+c_{n1},yd_{n2}+c_{n2}))^n=1-F(x,y) \tag{2.1.3}$$

Geometrinį minstabilumą apibrėšime taip:

$$P\left(\frac{W_N^{(1)}-c_{p1}}{d_{p1}}\le x,\frac{W_N^{(2)}-c_{p2}}{d_{p2}}\le y\right)=F(x,y)$$

Iš čia pasinaudodami generuojančiąja funkcija g_N, gauname, kad

$$P\left(\frac{W_N^{(1)}-c_{p1}}{d_{p1}}\le x,\frac{W_N^{(2)}-c_{p2}}{d_{p2}}\le y\right)=P(W_N^{(1)}\le xd_{p1}+c_{p1},W_N^{(2)}\le yd_{p2}+c_{p2})=$$
$$=1-g_N\left(1-F_1\left(xd_{p1}+c_{p1}\right)\right)-g_N\left(1-F_2\left(yd_{p2}+c_{p2}\right)\right)+g_N\left(P\left(X\ge xd_{p1}+c_{p1};Y\ge yd_{p2}+c_{p2}\right)\right),$$

Geometrinio minstabilumo kriterijus yra

$$\frac{p\cdot(1-F_1(xd_{p1}+c_{p1}))}{1-(1-p)(1-F_1(xd_{p1}+c_{p1}))}+\frac{p\cdot(1-F_2(yd_{p2}+c_{p2}))}{1-(1-p)(1-F_2(yd_{p2}+c_{p2}))}-$$
$$-\frac{p\cdot(1-F_1(xd_{p1}+c_{p1})-F_2(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))}{1-(1-p)(1-F_1(xd_{p1}+c_{p1})-F_2(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))}=1-F(x,y); \tag{2.1.4}$$

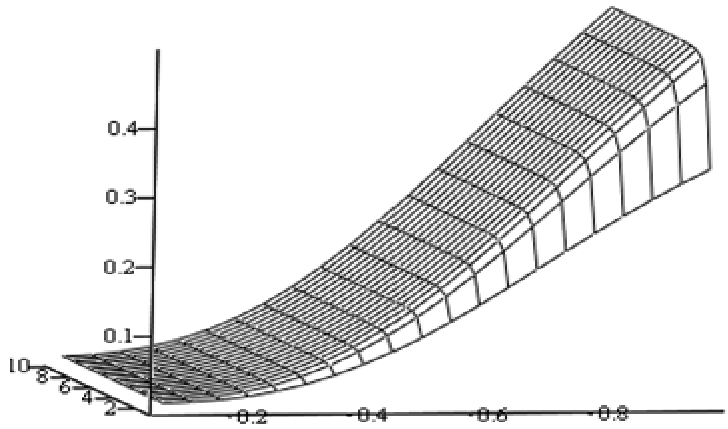
čia $c_{p1},c_{p2}>0$; $d_{p1},d_{p2}\in R$ normalizavimo konstantos. Kai koordinatės X ir Y nepriklausomos, geometrinio minstabilumo sąlyga tampa paprastesnė.

2.2. VEKTORIŲ MAKS (MIN) GEOMETRINIS STABILUMAS (PRIKLAUSOMŲ KOMPONENČIŲ ATVEJU)

Praktikoje dažnai pasitaiko, kad bandymo rezultatas būna ne vienas, o du ir daugiau atsitiktinių dydžių, sudarančių imtį. Atsitiktinių dydžių $X_1, X_2 \dots X_n$ sistema vadiname n-mačiu atsitiktiniu vektoriumi.

2.2.1 užduotis: Ar dvimatis Pareto skirstinys, kurio vektoriaus komponentės yra priklausomos yra geometriškai min (maks) stabilus?

$$F(x,y)=1-\frac{1}{x^{\alpha}+1}-\frac{1}{y^{\beta}+1}+\frac{1}{x^{\alpha}+y^{\beta}+1} \quad x,y>0,\ \alpha,\beta>0$$
$$F_1(x)=1-\frac{1}{x^{\alpha}+1},\quad F_2(y)=1-\frac{1}{y^{\beta}+1}, \tag{2.2.1}$$



2.2.1. pav. Dvimačio Pareto skirstinio funkcijos grafikas, kai $\alpha=3;\ \beta=3$

***Sprendimas*: ** Spręsime naudodamiesi geometrinio minstabilumo kriterijumi, dvimačiui atvejui (2.1.4).

Pradžioje patikriname, ar $F_1(x)$ yra geometriškai minstabili, jei ji bus geometriškai minstabili tai galėsime teigti, kad $F_2(y)$ yra taip pat geometriškai minstabili.

$$\frac{p\cdot(1-F_1(xd_{p1}+c_{p1}))}{1-(1-p)(1-F_1(xd_{p1}+c_{p1}))}=\frac{p\left(1-1+\frac{1}{(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}+1}\right)}{1-(1-p)\left(1-1+\frac{1}{(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}+1}\right)}=\frac{p}{p+(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}}=$$

$$=\begin{bmatrix} d_{p1}=p^{\frac{1}{\alpha}} \\ c_{p1}=0 \end{bmatrix}=\frac{1}{x^{\alpha}+1}=1-F_1(x)$$

Gavome, kad vienmatė skirstinio funkcija $F_1(x)$ yra geometriškai minstabili, tai $F_2(y)$ taip pat geometriškai minstabili. Tiriant dvimačio Pareto skirstinio, kurio vektoriaus komponentės priklausomos geometrinį minstabilumą, susiduriame su sudėtinga išraiška. Tačiau žinodami, kad vektoriaus komponentės $F_1(x)$ ir $F_2(y)$ yra geometriškai minstabilios, mums pakanka nagrinėti tik šią $\frac{1}{x^{\alpha}+y^{\beta}+1}$ skirstinio funkcijos dalį. Taigi:

$$\frac{p\left(\frac{1}{\left(xd_{p1}+c_{p1}\right)^{\alpha}+\left(yd_{p2}+c_{p2}\right)^{\beta}+1}\right)}{1-\left(\frac{1-p}{\left(xd_{p1}+c_{p1}\right)^{\alpha}+\left(yd_{p2}+c_{p2}\right)^{\beta}+1}\right)}=\frac{\frac{p}{\left(xd_{p1}+c_{p1}\right)^{\alpha}+\left(yd_{p2}+c_{p2}\right)^{\beta}+1}}{\frac{\left(xd_{p1}+c_{p1}\right)^{\alpha}+\left(yd_{p2}+c_{p2}\right)^{\beta}+1-1+p}{\left(xd_{p1}+c_{p1}\right)^{\alpha}+\left(yd_{p2}+c_{p2}\right)^{\beta}+1}}=$$

$$=\frac{p}{\left(xd_{p1}+c_{p1}\right)^{\alpha}+\left(yd_{p2}+c_{p2}\right)^{\beta}+p}=\begin{bmatrix} d_{p1}=p^{\frac{1}{\alpha}} & c_{p1}=0 \\ d_{p2}=p^{\frac{1}{\beta}} & c_{p2}=0 \end{bmatrix}=\frac{p}{px^{\alpha}+py^{\beta}+p}=\frac{1}{x^{\alpha}+y^{\beta}+1}$$

Gavome, kad dvimatis Pareto skirstinys (2.2.1), kurio vektoriaus komponentės priklausomos yra minstabilus. Ar tas pats skirstinys, bus geometriškai maksstabilus? Tirsime naudodamiesi, geometrinio maksstabilumo kriterijumi dvimačiui atvejui:

$$\frac{p\cdot F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2}))}{1-(1-p)(F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2}))}=$$

$$=\frac{p\cdot\left(1-\frac{1}{\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{\alpha}+1}-\frac{1}{\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{\beta}+1}+\frac{1}{\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{\alpha}+\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{\beta}+1}\right)}{1-(1-p)\left(1-\frac{1}{\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{\alpha}+1}-\frac{1}{\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{\beta}+1}+\frac{1}{\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{\alpha}+\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{\beta}+1}\right)}=\begin{bmatrix} a_{p1}=0 \\ a_{p2}=0 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{p\cdot\left(1-\frac{1}{\left(xb_{p1}\right)^{\alpha}+1}-\frac{1}{\left(yb_{p2}\right)^{\beta}+1}+\frac{1}{\left(xb_{p1}\right)^{\alpha}+\left(yb_{p2}\right)^{\beta}+1}\right)}{p\left(\frac{p^{-1}}{\left(xb_{p1}\right)^{\alpha}+1}+\frac{p^{-1}}{\left(yb_{p2}\right)^{\beta}+1}-\frac{p^{-1}}{\left(xb_{p1}\right)^{\alpha}+\left(yb_{p2}\right)^{\beta}+1}+1-\frac{1}{\left(xb_{p1}\right)^{\alpha}+1}-\frac{1}{\left(yb_{p2}\right)^{\beta}+1}+\frac{1}{\left(xb_{p1}\right)^{\alpha}+\left(yb_{p2}\right)^{\beta}+1}\right)}=$$

$$\begin{bmatrix} b_{p1}=p^{-\frac{1}{\alpha}} \\ b_{p2}=p^{-\frac{1}{\beta}} \end{bmatrix}=\frac{\left(1-\frac{p}{x^{\alpha}+p}-\frac{p}{y^{\beta}+p}+\frac{p}{x^{\alpha}+y^{\beta}+p}\right)}{\left(\frac{1}{x^{\alpha}+p}+\frac{1}{y^{\beta}+p}-\frac{1}{x^{\alpha}+y^{\beta}+p}+1-\frac{p}{x^{\alpha}+p}-\frac{p}{y^{\beta}+p}+\frac{p}{x^{\alpha}+y^{\beta}+p}\right)}\neq F(x,y)$$

Tokiu būdu įrodėme šį teiginį:

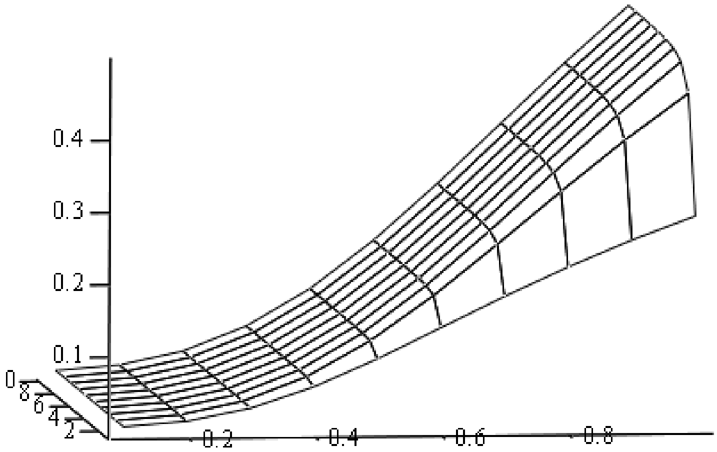
2.2.1 Teiginys. Iš geometrinio minstabilumo bendru atveju neišplaukia geometrinis maksstabilumas.

Vienmačiu atveju iš geometrinio minstabilumo išplaukia geometrinis maksstabilumas (Satheesh S. and Unnikrishnan Nair N., 2007).

Imdami $p=p_n=\frac{1}{n}$, gauname:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{p_n}{x^{\alpha}+p_n}-\frac{p_n}{y^{\beta}+p_n}+\frac{p_n}{x^{\alpha}+y^{\beta}+p_n}\right)}{\left(\frac{1}{x^{\alpha}+p_n}+\frac{1}{y^{\beta}+p_n}-\frac{1}{x^{\alpha}+y^{\beta}+p_n}+1-\frac{p_n}{x^{\alpha}+p_n}-\frac{p_n}{y^{\beta}+p_n}+\frac{p_n}{x^{\alpha}+y^{\beta}+p_n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{1+x^{-\alpha}+y^{-\beta}-\left(x^{\alpha}+y^{\beta}\right)^{-1}}=G(x,y)$$



2.2.2. pav. Ribinės skirstinio funkcijos grafikas, kai $\alpha=3;\beta=3$

Gauta ribinė skirstinio funkcija $G(x,y)$ yra maksstabili. Pagrįsime tai. Taigi, turime vienmates skirstinio funkcijas

$$G_1(x)=G_1(x,+\infty)=\frac{1}{1+x^{-\alpha}}$$

$$G_2(y)=G_2(+\infty,y)=\frac{1}{1+y^{-\beta}},\ x\geq 0, y>0$$

jos sutampa su $F_1(x)$ ir $F_2(y)$ skirstinio funkcijomis užduotyje (2.2.1).

Tikriname maksstabilumą pasinaudodami kriterijumi (2.1.1):

$$\frac{p\cdot\left(\frac{1}{1+\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{-\beta}-\left((xb_{p1}+a_{p1})^{\alpha}+(yb_{p2}+a_{p2})^{\beta}\right)^{-1}}\right)}{1-(1-p)\left(\frac{1}{1+\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{-\beta}-\left((xb_{p1}+a_{p1})^{\alpha}+(yb_{p2}+a_{p2})^{\beta}\right)^{-1}}\right)}=\begin{bmatrix}a_{p1}=0\\ a_{p2}=0\end{bmatrix}=$$

$$= \frac{p\cdot\left(\dfrac{1}{1+\left(xb_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{p2}\right)^{-\beta}-\left((xb_{p1})^{\alpha}+(yb_{p2})^{\beta}\right)^{-1}}\right)}{1-(1-p)\left(\dfrac{1}{1+\left(xb_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{p2}\right)^{-\beta}-\left((xb_{p1})^{\alpha}+(yb_{p2})^{\beta}\right)^{-1}}\right)} = \begin{bmatrix} b_{p1}=p^{-\frac{1}{\alpha}} \\ b_{p2}=p^{-\frac{1}{\beta}} \end{bmatrix} =$$

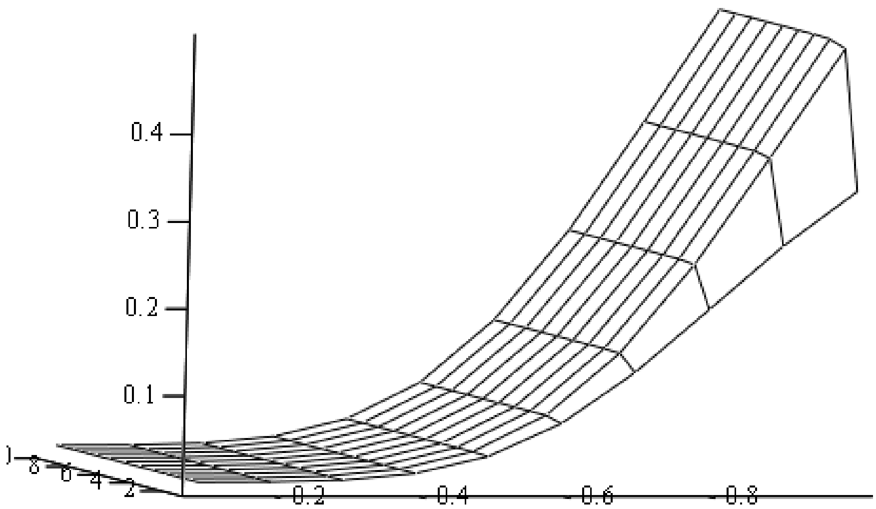
$$= \frac{p}{px^{-\alpha}+py^{-\beta}-p\left(x^{\alpha}+y^{\beta}\right)^{-1}+p} = G(x,y)$$

Tokiu būdu, ribinė skirstinio funkcija $G(x,y)$ (priklausomų komponenčių atveju) yra maksstabili.

2.2.2 užduotis: Tirsime Pareto skirstinį, kurio forma šiek tiek skiriasi nuo tirtos pirmoje užduotyje. Tikrinsime ar šis skirstinys yra geometriškai maks (min) stabilus?

$$F(x,y)=\frac{1}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+1},\quad x>0,\ y>0\quad \alpha>0,\ \beta>0.$$
$$F_1(x)=\frac{1}{x^{-\alpha}+1},\quad F_2(y)=\frac{1}{y^{-\beta}+1}, \tag{2.2.2}$$

Vienmatės skirstinio funkcijos F_1 ir F_2 sutampa su (2.2.1) užduoties skirstinio funkcijomis.



2.2.3. pav. Dvimačio Pareto skirstinio funkcijos grafikas, kai $\alpha=5;\beta=5$

***Sprendimas*:** Vienmačio skirstinio maksstabilumas ištirtas pirmojoje užduotyje, nes

$$F_1(x)=1-\frac{1}{x^{\alpha}+1}=\frac{x^{\alpha}}{x^{\alpha}+1}=\frac{1}{x^{-\alpha}+1},$$

Ar dvimatė skirstinio funkcija, kurios komponentės priklausomos, bus maksstabili. Tikriname:

$$P\left(\frac{Z_n^{(1)}-a_{p1}}{b_{p1}}\le x;\frac{Z_n^{(2)}-a_{p2}}{b_{p2}}\le y\right)=\frac{p\cdot F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2})}{1-(1-p)F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2})}=$$

$$= \frac{\dfrac{p}{\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{-\beta}+1}}{\dfrac{\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{-\beta}+1}{\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{-\beta}+1}} = \frac{\dfrac{p}{\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{-\beta}+1}}{\dfrac{\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{-\beta}+1-1+p}{\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{-\beta}+1}} =$$

$$= \frac{p}{\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{-\beta}+p} = \begin{bmatrix} b_{p1}=p^{-\frac{1}{\alpha}} & a_{p1}=0 \\ b_{p2}=p^{-\frac{1}{\beta}} & a_{p2}=0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{p}{xp+0+yp+0+p} = \frac{p}{xp+yp+p} = \frac{1}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+1}$$

Gavome, kad dvimatis Pareto skirstinys (2.2.2) yra geometriškai maksstabilus.

Tikriname geometrinį minstabilumą, naudodamiesi kriterijumi (2.1.4).

Spręsime, nagrinėjant dalimis:

$$\frac{p(1-F_1(xd_{p1}+c_{p1}))}{1-(1-p)(1-F_1(xd_{p1}+c_{p1}))} = \frac{p\left(1-\dfrac{1}{(xd_{p1}+c_{p1})^{-\alpha}+1}\right)}{1-(1-p)\left(1-\dfrac{1}{(xd_{p1}+c_{p1})^{-\alpha}+1}\right)} = \frac{p\left(\dfrac{(xd_{p1}+c_{p1})^{-\alpha}}{(xd_{p1}+c_{p1})^{-\alpha}+1}\right)}{1-(1-p)\left(\dfrac{(xd_{p1}+c_{p1})^{-\alpha}}{(xd_{p1}+c_{p1})^{-\alpha}+1}\right)} =$$

$$= \frac{p(xd_{p1}+c_{p1})^{-\alpha}}{1+p(xd_{p1}+c_{p1})^{-\alpha}} = \begin{bmatrix} d_{p1}=p^{\frac{1}{\alpha}} \\ c_{p1}=0 \end{bmatrix} = 1-\frac{1}{1+x^{-\alpha}}$$

$$\frac{p\cdot(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1},yd_{p2}+c_{p2}))}{1-(1-p)(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1},yd_{p2}+c_{p2}))} = \begin{bmatrix} c_{p1}=0 \\ c_{p2}=0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{p\cdot\left(1-\dfrac{1}{\left(xd_{p1}\right)^{-\alpha}+1}-\dfrac{1}{\left(yd_{p2}\right)^{-\beta}+1}+\dfrac{1}{\left(xd_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yd_{p2}\right)^{-\beta}+1}\right)}{p\left(\dfrac{p^{-1}}{\left(xd_{p1}\right)^{-\alpha}+1}+\dfrac{p^{-1}}{\left(yd_{p2}\right)^{-\beta}+1}-\dfrac{p^{-1}}{\left(xd_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yd_{p2}\right)^{-\beta}+1}+1-\dfrac{1}{\left(xd_{p1}\right)^{-\alpha}+1}-\dfrac{1}{\left(yd_{p2}\right)^{-\beta}+1}+\dfrac{1}{\left(xd_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yd_{p2}\right)^{-\beta}+1}\right)} =$$

$$\begin{bmatrix} d_{p1}=p^{\frac{1}{\alpha}} \\ d_{p2}=p^{\frac{1}{\beta}} \end{bmatrix} = \frac{\left(1-\dfrac{p}{x^{-\alpha}+p}-\dfrac{p}{y^{-\beta}+p}+\dfrac{p}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p}\right)}{\left(\dfrac{1}{x^{-\alpha}+p}+\dfrac{1}{y^{-\beta}+p}-\dfrac{1}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p}+1-\dfrac{p}{x^{-\alpha}+p}-\dfrac{p}{y^{-\beta}+p}+\dfrac{p}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p}\right)}$$

Įsistatome į bendrą išraiką ir gauname:

$$1-1+\frac{1}{1+x^{-\alpha}}-1+\frac{1}{1+y^{-\beta}}+\frac{\left(1-\frac{p}{x^{-\alpha}+p}-\frac{p}{y^{-\beta}+p}+\frac{p}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p}\right)}{\left(\frac{1}{x^{-\alpha}+p}+\frac{1}{y^{-\beta}+p}-\frac{1}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p}+1-\frac{p}{x^{-\alpha}+p}-\frac{p}{y^{-\beta}+p}+\frac{p}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p}\right)}=$$

$$=\frac{1}{1+x^{-\alpha}}+\frac{1}{1+y^{-\beta}}+\frac{\left(1-\frac{p}{x^{-\alpha}+p}-\frac{p}{y^{-\beta}+p}+\frac{p}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p}\right)}{\left(\frac{1}{x^{-\alpha}+p}+\frac{1}{y^{-\beta}+p}-\frac{1}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p}+1-\frac{p}{x^{-\alpha}+p}-\frac{p}{y^{-\beta}+p}+\frac{p}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p}\right)}-1$$

geometrinio minstabilumo nėra.

Gavome, kad Pareto skirstinys (2.2.2), kai vektoriaus komponentės priklausomos, nėra geometriškai minstabilus, bet gal jis bus asimptotiškai minstabilus, kai $p = p_n$?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{p_n}{x^{-\alpha}+p_n}-\frac{p_n}{y^{-\beta}+p_n}+\frac{p_n}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p_n}\right)}{\left(\frac{1}{x^{-\alpha}+p_n}+\frac{1}{y^{-\beta}+p_n}-\frac{1}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p_n}+1-\frac{p}{x^{-\alpha}+p_n}-\frac{p}{y^{-\beta}+p_n}+\frac{p}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p_n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{x^{-\alpha}}+\frac{1}{y^{-\beta}}-\frac{1}{x^{-\alpha}+y^{-\beta}}+1\right)}=\frac{1}{x^{\alpha}+y^{\beta}+\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)^{-1}+1}$$

Nėra asimptotiškai minstabilus.

Išvada. Tiriant Pareto skirstinį pastebėjome, kad kai dvimatis skirstinys yra geometriškai maksstabilus, tai jis nebus geometriškai minstabilus arba atvirkščiai, jeigu turime dvimatį skirstinį, kuris yra minstabilus, tada gauname, kad jis nebus geometriškai maksstabilus. Kokioms sąlygoms esant skirstinys bus geometriškai maksstabilus arba geometriškai minstabilus?

Iš perkėlimo teoremos maksimumams, kur N_n skirstinys yra geometrinis su parametru $p_n=\frac{1}{n}$, gauname, kad $P(N_n=k)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$, dvimatė ribinė skirstinio funkcija:

$$\Psi(x,y)=\int_0^{\infty}H^z(x,y)dA(z)=\int_0^{\infty}H^z(x,y)dA(1-e^{-z})=\int_0^{\infty}\left(\frac{H(x,y)}{e}\right)^z dz=$$

$$=\left.\frac{\left(\frac{H(x,y)}{e}\right)^z}{\ln\left(\frac{H(x,y)}{e}\right)}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{1-\ln(H(x,y))}$$

Tuomet įsistatę dvimatę ribinę funkciją $H(x,y)=H(x)\cdot H(y)=\exp(-x^{-\alpha}-y^{-\beta})$, gauname

$$\frac{1}{1-\ln(H(x,y))}=\frac{1}{1-\ln(\exp(-x^{-\alpha}-y^{-\beta}))}=\frac{1}{1+x^{-\alpha}+y^{-\beta}}$$

Minstabilumo atveju ribinė skirstinio funkcija:

$$\Psi(x,y)=1-\int_0^\infty\left(1-L_1(x)\right)^z dA(z)-\int_0^\infty\left(1-L_2(y)\right)^z dA(z)+\int_0^\infty\left(1-L_1(x)\right)^z\left(1-L_2(y)\right)^z dA(z)=$$

$$=1-\int_0^\infty\left(\frac{(1-L(x))}{e}\right)^z dz-\int_0^\infty\left(\frac{(1-L(y))}{e}\right)^z dz+\int_0^\infty\left(\frac{(1-L(x))(1-L(y))}{e}\right)^z dz=$$

$$=1-\frac{\left(\frac{(1-L(x))}{e}\right)^z}{\ln\left(\frac{(1-L(x))}{e}\right)}\Bigg|_0^\infty-\frac{\left(\frac{(1-L(x))}{e}\right)^z}{\ln\left(\frac{(1-L(x))}{e}\right)}\Bigg|_0^\infty+\frac{\left(\frac{(1-L(x))(1-L(y))}{e}\right)^z}{\ln\left(\frac{(1-L(x))(1-L(y)}{e}\right)}\Bigg|_0^\infty=$$

$$=1-\frac{1}{1-\ln(1-L(x))}-\frac{1}{1-\ln(1-L(y))}+\frac{1}{1-\ln((1-L(x)(1-L(y))}$$

Tuomet įsistatę dvimatę ribinio skirstinio funkciją $L(x,y)=L(x)\cdot L(y)$ į mūsų gauta išraišką

$$L(x,y)=L(x)\cdot L(y)=(1-\exp(-x^{\alpha}))(1-\exp(-y^{\beta})),$$

gauname:

$$\Psi(x,y)=1-\frac{1}{1-\ln(1-L(x))}-\frac{1}{1-\ln(1-L(y))}+\frac{1}{1-\ln((1-L(x)(1-L(y))}=$$

$$=1-\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+y^{\beta}}+\frac{1}{1+x^{\alpha}+y^{\beta}}$$

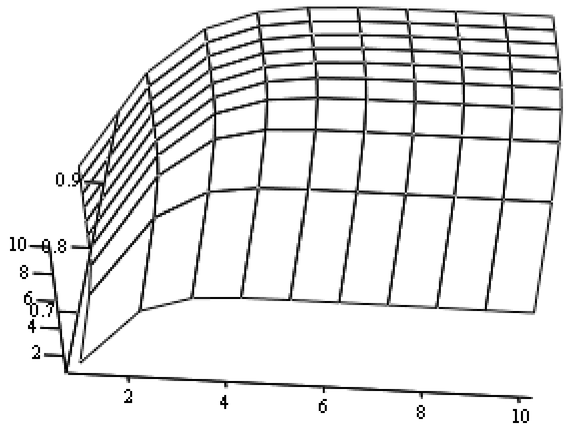
2.2.3. Teiginys. Jeigu dvimatė Pareto skirstinio funkcija gaunama iš ribinės maksstabilios Frechet funkcijos, ji bus geometriškai maksstabili, o jei iš minstabilios Frechet funkcijos, bus geometriškai minstabili.

2.2.3. Užduotis: Ištirti logistinio skirstinio, kurio vektoriaus komponentės priklausomos, maks (min) geometrinį stabilumą.

$$F(x,y)=1-\frac{1}{1+e^{x}}-\frac{1}{1+e^{y}}+\frac{1}{1+e^{x}+e^{y}}$$

$$F_1(x)=1-\frac{1}{1+e^{x}}=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{1}{1+e^{-x}}, \tag{2.2.3}$$

$$F_2(y)=1-\frac{1}{1+e^{y}}=\frac{e^{y}}{1+e^{y}}=\frac{1}{1+e^{-y}},\ x\in R, y\in R$$



2.2.4. pav. Dvimačio logistinio skirstinio funkcija

Sprendimas: Naudosimės dvimačio geometrinio minstabilumo kriterijumi ir patikrinsime ar dvimatis logistinis skirstinys minstabilus. Naudosimės geometrinio minstabilumo kriterijumi (2.1.4).

Pirmiausiai tikriname, ar skirstinio funkcija $F_1(x)$ geometriškai minstabili?

$$\frac{p\cdot(1-F_1(xd_{p1}+c_{p1}))}{1-(1-p)(1-F_1(xd_{p1}+c_{p1}))}=\frac{p\left(1-1+\dfrac{1}{1+\exp(xd_{p1}+c_{p1})}\right)}{1-(1-p)\left(1-1+\dfrac{1}{1+\exp(xd_{p1}+c_{p1})}\right)}=$$

$$=\frac{p\left(\dfrac{1}{1+\exp(xd_{p1}+c_{p1})}\right)}{1-(1-p)\left(\dfrac{1}{1+\exp(xd_{p1}+c_{p1})}\right)}=\frac{p}{1+\exp(xd_{p1}+c_{p1})-1+p}=$$

$$=\frac{p}{\exp(xd_{p1}+c_{p1})+p}=\begin{bmatrix} d_{p1}=1 \\ c_{p1}=\ln(p)\end{bmatrix}=\frac{p}{e^{(x1_n+\ln(p))}+p}=\frac{1}{1+e^x}$$

Turėdami geometriškai minstabilią $F_1(x)$ galime teigti, kad ir $F_2(x)$ yra geometriškai minstabili. Belieka patikrinti ar funkcija $\dfrac{1}{1+e^x+e^y}$ geometriškai minstabili:

$$\frac{p\left(\dfrac{1}{\exp(xd_{p1}+c_{p1})+\exp(yd_{p2}+c_{p2})+1}\right)}{1-(1-p)\left(\dfrac{1}{\exp(xd_{p1}+c_{p1})+\exp(yd_{p2}+c_{p2})+1}\right)}=\frac{p}{\exp(xd_{p1}+c_{p1})+\exp(yd_{p2}+c_{p2})+p}=$$

$$=\begin{bmatrix} d_{p1}=1,\ c_{p1}=\ln(p) \\ d_{p2}=1,\ c_{p2}=\ln(p)\end{bmatrix}=\frac{p}{\exp(x+\ln(p))+\exp(y+\ln(p))+p}=F(x,y)$$

Gavome, kad logistinis skirstinys (2.2.3), geometriškai minstabilus. Tirsime ar geometriškai maksstabilus?

$$\frac{p\cdot F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2}))}{1-(1-p)(F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2}))}=$$

$$=\frac{p\cdot\left(1-\frac{1}{\exp(xb_{p1}+a_{p1})+1}-\frac{1}{\exp(yb_{p2}+a_{p2})+1}+\frac{1}{\exp(xb_{p1}+a_{p1})+\exp(yb_{p2}+a_{p2})+1}\right)}{1-(1-p)\left(1-\frac{1}{\exp(xb_{p1}+a_{p1})+1}-\frac{1}{\exp(yb_{p2}+a_{p2})+1}+\frac{1}{\exp(xb_{p1}+a_{p1})+\exp(yb_{p2}+a_{p2})+1}\right)}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{p1}=-\ln(p), b_{p1}=1 \\ a_{p2}=-\ln(p), b_{p2}=1 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{p\cdot\left(1-\frac{1}{\exp(x-\ln(p))+1}-\frac{1}{\exp(y-\ln(p))+1}+\frac{1}{\exp(x-\ln(p))+\exp(y-\ln(p))+1}\right)}{1-(1-p)\left(1-\frac{1}{\exp(x-\ln(p))+1}-\frac{1}{\exp(y-\ln(p))+1}+\frac{1}{\exp(x-\ln(p))+\exp(y-\ln(p))+1}\right)}=$$

$$=\frac{\left(1-\frac{p}{e^x+p}-\frac{p}{e^y+p}+\frac{p}{e^x+e^y+p}\right)}{\left(\frac{1}{e^x+p}+\frac{1}{e^y+p}-\frac{1}{e^x+e^y+p}+1-\frac{p}{e^x+p}-\frac{p}{e^y+p}+\frac{p}{e^x+e^y+p}\right)}\neq F(x,y)$$

Įrodėme šitokį teiginį:

2.2.3. Teiginys. Dvimatė logistinio skirtinio funkcija

$$F(x,y)=1-\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{1+e^y}+\frac{1}{1+e^x+e^y}$$

Yra geometriškai minstabili, bet nėra geometriškai maksstabili.

Ar šis skirstinys bus asimptotiškai maksstabilus, kai $p_n=\frac{1}{n}$?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{p_n}{e^x+p_n}-\frac{p_n}{e^y+p_n}+\frac{p_n}{e^x+e^y+p_n}\right)}{\left(\frac{1}{e^x+p_n}+\frac{1}{e^y+p_n}-\frac{1}{e^x+e^y+p_n}+1-\frac{p_n}{e^x+p_n}-\frac{p_n}{e^y+p_n}+\frac{p_n}{e^x+e^y+p_n}\right)}=$$

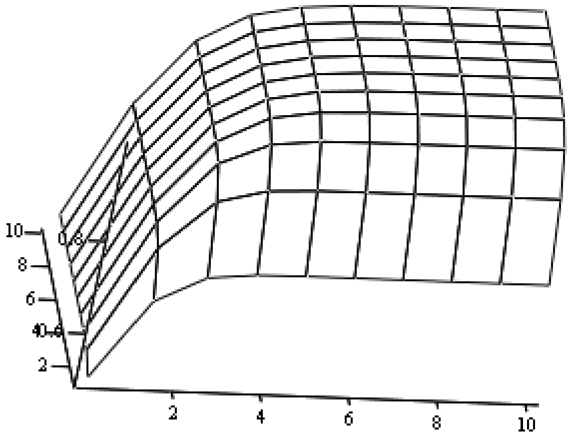
$$=\frac{1}{\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^y}-\frac{1}{e^x+e^y}+1}=\frac{1}{e^{-x}+e^{-y}-\left(e^x+e^y\right)^{-1}+1}=G(x,y)$$

Ribinės skirstinio funkcijos $G(x,y)$ vienmatės skirstinio funkcijos.

$$G_1(x) = G_1(x,+\infty) = \frac{1}{e^{-x}+1}$$

$$G_2(y) = G_2(+\infty, y) = \frac{1}{e^{-y}+1},\ x \in R,\ y \in R$$

Sutampa su (2.2.3) užduoties skirstinio funkcijomis $F_1(x)$ ir $F_2(y)$. Taigi jos yra geometriškai ir minstabilios ir maksstabilios.



2.2.5. pav. Skirstinio funkcijos $G(x, y)$ grafikas

Tikriname, ar $G(x, y)$ yra geometriškai maksstabili?

$$\frac{p \cdot F(xb_{p1} + a_{p1}; yb_{p2} + a_{p2}))}{1-(1-p)(F(xb_{p1} + a_{p1}; yb_{p2} + a_{p2}))} =$$

$$= \frac{p \cdot \left(\frac{1}{\exp(-xb_{p1} - a_{p1}) + \exp(-yb_{p2} - a_{p2}) + \left(\exp(-xb_{p1} - a_{p1}) + \exp(-yb_{p2} - a_{p2})\right)^{-1} + 1} \right)}{1 - \left(\frac{1-p}{\exp(-xb_{p1} - a_{p1}) + \exp(-yb_{p2} - a_{p2}) + \left(\exp(-xb_{p1} - a_{p1}) + \exp(-yb_{p2} - a_{p2})\right)^{-1} + 1} \right)} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{p1} = -\ln(p), b_{p1} = 1 \\ a_{p2} = -\ln(p), b_{p2} = 1 \end{bmatrix} =$$

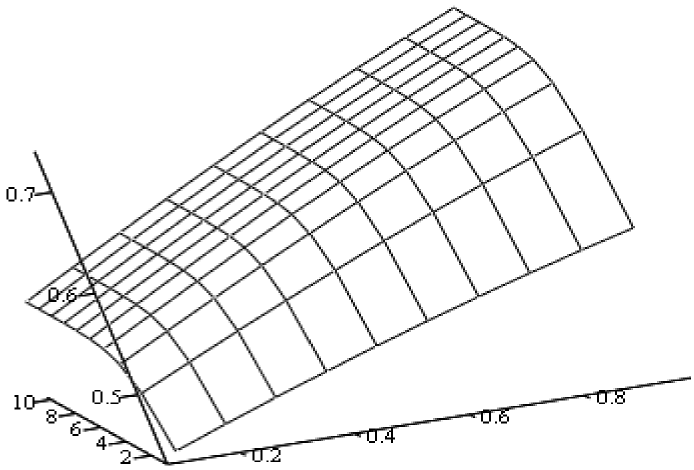
$$= \frac{p \cdot \left(\frac{1}{\exp(-x+\ln(p)) + \exp(-y+\ln(p)) + \left(\exp(x-\ln(p)) + \exp(y-\ln(p))\right)^{-1} + 1} \right)}{\left(\frac{\exp(-x+\ln(p)) + \exp(-y+\ln(p)) + \left(\exp(x-\ln(p)) + \exp(y-\ln(p))\right)^{-1} + p}{\exp(-x+\ln(p)) + \exp(-y+\ln(p)) + \left(\exp(x-\ln(p)) + \exp(y-\ln(p))\right)^{-1} + 1} \right)} =$$

$$= \frac{p}{pe^{-x} + pe^{-y} + p\left(e^{-x} + e^{-y}\right)^{-1} + p} = \frac{1}{e^{-x} + e^{-y} + \left(e^{-x} + e^{-y}\right)^{-1} + 1} = G(x, y)$$

Gavome, kad $G(x, y)$ yra geometriškai maksstabili. Dvimatė $F(x, y)$ nėra asimptotiškai maksstabili, nes $G(x, y) \neq F(x, y)$.

2.2.4. Užduotis: Ištirti logistinio skirstinio funkcijos (2.2.4) geometrinį maks (min) stabilumą?

$$F(x,y)=\frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}}, \quad (x,y)\in R^2$$



2.2.6. pav. Logistinio skirstinio funkcijos grafikas

Vienmačiai skirstiniai su skirstinio funkcijomis

$$F_1(x)=\frac{1}{1+e^{-x}} \text{ ir } F_2(y)=\frac{1}{1+e^{-y}}.$$

yra geometriškai maksstabilūs. Tikrai, nes tai yra patikrinta (2.2.3) užduotyje, nes

$$F_1(x)=1-\frac{1}{1+e^{x}}=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

Ar dvimatis logistinis skirstinys geometriškai maks stabilus?

$$P\left(\frac{Z_N^{(1)}-a_{p1}}{b_{p1}}\le x;\frac{Z_N^{(2)}-a_{p2}}{b_{p2}}\le y\right)=\frac{p\cdot F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2})}{1-(1-p)F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2})}=$$

$$=\frac{p\left(\frac{1}{\exp(-xb_{p1}-a_{p1})+\exp(-yb_{p2}-a_{p2})+1}\right)}{1-\left(\frac{1-p}{\exp(-xb_{p1}-a_{p1})+\exp(-yb_{p2}-a_{p2})+1}\right)}=\frac{p}{\exp(-xb_{p1}-a_{p1})+\exp(-yb_{p2}-a_{p2})+p}=$$

$$=\begin{bmatrix} b_{p1}=1, & a_{p1}=-\ln(p) \\ b_{p2}=1, & a_{p2}=-\ln(p)\end{bmatrix}=\frac{p}{\exp(-x+\ln(p))+\exp(-y+\ln(p))+p}=\frac{p}{pe^{-x}+pe^{-y}+p}=$$

$$=\frac{1}{e^{-x}+e^{-y}+1}=F(x,y)$$

Patikrinsime, ar šis dvimatis logistinis skirstinys, kurio vektoriaus komponentės priklausomos yra geometriškai minstabilus?

Tirdami ar dvimatė skirstinio funkcija geometriškai minstabili, nagrinėjame ją dalimis, t.y.:

$$\frac{p(1-F_1(xd_{p1}+c_{p1}))}{1-(1-p)(1-F_1(xd_{p1}+c_{p1}))}=\frac{p\left(1-\dfrac{1}{\exp(-xd_{p1}-c_{p1})+1}\right)}{1-(1-p)\left(1-\dfrac{1}{\exp(-xd_{p1}-c_{p1})+1}\right)}=$$

$$=\frac{p\left(\dfrac{\exp(-xd_{p1}-c_{p1})}{\exp(-xd_{p1}-c_{p1})+1}\right)}{1-(1-p)\left(\dfrac{\exp(-xd_{p1}-c_{p1})}{\exp(-xd_{p1}-c_{p1})+1}\right)}=\frac{p\exp(-xd_{p1}-c_{p1})}{1+p\exp(-xd_{p1}-c_{p1})}=\begin{bmatrix}d_{p1}=1\\ c_{p1}=\ln(p)\end{bmatrix}=1-\frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$\frac{p\cdot(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))}{1-(1-p)\cdot(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))}=\begin{bmatrix}d_{p1}=1, & c_{p2}=\ln(p)\\ d_{p2}=1, & c_{p2}=\ln(p)\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{p\cdot\left(1-\dfrac{p}{e^{-x}+p}-\dfrac{p}{e^{-y}+p}+\dfrac{p}{e^{-x}+e^{-y}+p}\right)}{p\left(\dfrac{1}{e^{-x}+p}+\dfrac{1}{e^{-y}+p}-\dfrac{1}{e^{-x}+e^{-y}+p}+1-\dfrac{p}{e^{-x}+p}-\dfrac{p}{e^{-y}+p}+\dfrac{p}{e^{-x}+e^{-y}+p}\right)}=$$

$$=\frac{\left(1-\dfrac{p}{e^{-x}+p}-\dfrac{p}{e^{-y}+p}+\dfrac{p}{e^{-x}+e^{-y}+p}\right)}{\left(\dfrac{1}{e^{-x}+p}+\dfrac{1}{e^{-y}+p}-\dfrac{1}{e^{-x}+e^{-y}+p}+1-\dfrac{p}{e^{-x}+p}-\dfrac{p}{e^{-y}+p}+\dfrac{p}{e^{-x}+e^{-y}+p}\right)}$$

negauname geometrinio minstabilumo, kadangi geometrinio minstabilumo kriterijus netenkinamas.

Imdami $p_n=\dfrac{1}{n}$, gauname:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{p_n}{e^{-x}+p_n}-\dfrac{p_n}{e^{-y}+p_n}+\dfrac{p_n}{e^{-x}+e^{-y}+p_n}\right)}{\left(\dfrac{1}{e^{-x}+p_n}+\dfrac{1}{e^{-y}+p_n}-\dfrac{1}{e^{-x}+e^{-y}+p_n}+1-\dfrac{p_n}{e^{-x}+p_n}-\dfrac{p_n}{e^{-y}+p_n}+\dfrac{p_n}{e^{-x}+e^{-y}+p_n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{e^{x}+e^{y}+\left(e^{-x}+e^{-y}\right)^{-1}+1}$$

Asimptotinio stabilumo nėra.

Įrodėme tokį teiginį:

2.2.4. Teiginys. Skirstinio funkcija

$$F(x,y)=\frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}},\qquad (x,y)\in R^2$$

yra geometriškai maksstabili, tačiau ji nėra minstabili. Vienmatės skirstinio funkcijos yra geometriškai min (maks) stabilios.

Kokios sąlygos lemia, kad skirstinys bus geometriškai maksstabilus, bet nebus geometriškai minstabilus arba atvirkščiai bus geometriškai minstabilus, bet nebus geometriškai maksstabilus.

Naudosimės (2.2.2) uždavinyje pateikta, gauta išraiška

$$\Psi(x,y)=\int_0^\infty H^Z(x,y)d(1-e^{-z})=\frac{1}{1-\ln(H(x,y))}$$

Įsistatę į dvimatę ribinę funkciją, maksstabilumo atveju $H(x,y)=H(x)\cdot H(y)=\exp(-e^{-x}-e^{-y})$ gauname

$$\frac{1}{1-\ln(H(x,y))}=\frac{1}{1-\ln(\exp(\exp(-e^{-x}-e^{-y})))}=\frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}}$$

Minstabilumo atveju, taip pat naudojamės (2.2.2) uždavinyje pateikta išraiška:

$$\Psi(x,y)=1-\int_0^\infty(1-L_1(x))^z\,dA(z)-\int_0^\infty(1-L_2(y))^z\,dA(z)+\int_0^\infty(1-L_1(x))^z(1-L_2(y))^z\,dA(z)=$$
$$=1-\frac{1}{1-\ln(1-L_1(x))}-\frac{1}{1-\ln(1-L_2(y))}+\frac{1}{1-\ln((1-L_1(x)(1-L_2(y))}$$

Į ją įsistatę dvimatę maksstabilią Gumbel funkciją $L(x,y)=L(x)\cdot L(y)$ į išraišką

$$L(x,y)=L_1(x)\cdot L_2(y)=(1-\exp(-e^x))(1-\exp(-e^y)),$$

gauname:

$$1-\frac{1}{1-\ln(1-L_1(x))}-\frac{1}{1-\ln(1-L_2(y))}+\frac{1}{1-\ln((1-L_1(x)(1-L_2(y))}=1-\frac{1}{1+e^x}-\frac{1}{1+e^y}+\frac{1}{1+e^x+e^y}$$

Dvimatis logistinis skirstinys, kaip ir Pareto skirstinys yra geometriškai maksstabilus, bet nėra geometriškai minstabilus, tuomet, kai jį galima išreikšti, per maksstabilias funkcijas. O geometriškai minstabilus, bet ne maksstabilus, tuomet, kai jis gali būt išreiškiamas per minstabilias funkcijas.

2.3. VEKTORIŲ GEOMETRINIS MAKS (MIN) STABILUMAS (KOMPONENTĖS NEPRIKLAUSOMOS)

Tyrėme dvimačius skirstinius, kurių vektoriaus komponentės priklausomos. Dabar imsime nepriklausomas vektorių komponentes ir tirsime geometrinį maks (min) stabilumą.

2.3.1. užduotis. Ar dvimatis Pareto skirstinys, kurio vektoriaus komponentės nepriklausomos bus geometriškai min (maks) stabilus?

$$F(x,y)=1-\frac{1}{x^{\alpha}+1}-\frac{1}{y^{\beta}+1}+\frac{1}{x^{\alpha}y^{\beta}+x^{\alpha}+y^{\beta}+1}$$
$$F_1(x)=1-\frac{1}{x^{\alpha}+1}=\frac{x^{\alpha}}{x^{\alpha}+1}=,\quad F_2(y)=1-\frac{1}{y^{\beta}+1},\quad x>0,\,y>0 \tag{2.3.1}$$

Kad būtų dvimatis skirstinys geometriškai minstabilus, jo vektoriaus komponentės turi būtų minstabilios, o tai mes jau esame ištyrę pirmajame uždavinyje, tad mums belieka patikrinti, ar ši $\frac{1}{x^{-\alpha}y^{-\beta}+x^{-\alpha}+y^{-\beta}+1}$ skirstinio dalis yra geometriškai minstabili:

$$\frac{p\left(\frac{1}{(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}(yd_{p2}+c_{p2})^{\beta}+(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}+(yd_{p2}+c_{p2})^{\beta}+1}\right)}{1-(1-p)\left(\frac{1}{(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}(yd_{p2}+c_{p2})^{\beta}+(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}+(yd_{p2}+c_{p2})^{\beta}+1}\right)}=$$

$$=\frac{p\left(\frac{1}{(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}(yd_{p2}+c_{p2})^{\beta}+(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}+(yd_{p2}+c_{p2})^{\beta}+1}\right)}{\left(\frac{(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}(yd_{p2}+c_{p2})^{\beta}+(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}+(yd_{p2}+c_{p2})^{\beta}+p}{(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}(yd_{p2}+c_{p2})^{\beta}+(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}+(yd_{p2}+c_{p2})^{\beta}+1}\right)}=$$

$$=\frac{p}{(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}(yd_{p2}+c_{p2})^{\beta}+(xd_{p1}+c_{p1})^{\alpha}+(yd_{p2}+c_{p2})^{\beta}+p}=\begin{bmatrix} d_{p1}=p^{\frac{1}{\alpha}}, & c_{p1}=0 \\ d_{p2}=p^{\frac{1}{\beta}}, & c_{p2}=0 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{p}{px^{\alpha}\cdot py^{\beta}+px^{\alpha}+py^{\beta}+p}=\frac{1}{px^{\alpha}\cdot y^{\beta}+x^{\alpha}+y^{\beta}+1}$$

Taigi nepakanka dvimačio skirstinio vektoriaus komponenčių geometrinio minstabilumo, kad dvimatis skirstinys, sudarytas iš šių komponenčių būtų geometriškai minstabilus. Gal šis skirstinys bus asimptotiškai minstabilus, kai $p=p_n=\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^{\alpha}+1}-\frac{1}{y^{\beta}+1}+\frac{1}{p_n x^{\alpha}\cdot y^{\beta}+x^{\alpha}+y^{\beta}+1}\right)=1-\frac{1}{x^{\alpha}+1}-\frac{1}{y^{\beta}+1}+\frac{1}{x^{\alpha}+y^{\beta}+1}$$

Šis skirstinys yra išnagrinėtas ir jis yra geometriškai minstabilus. Tad mūsų nagrinėjamas dvimatis logistinis skirstinys, kurio vektoriaus komponentės yra nepriklausomos nėra asimptotiškai minstabilus, bet ribinė skirstinio funkcija yra minstabili.

Tikrinsime geometrinį maksstabilumą.

Irma Ivanovienė, FMMM-7

$$\frac{p\cdot F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2})}{1-(1-p)F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2})}=$$

$$=\frac{p\cdot\left(1-\frac{1}{(xb_{p1}+a_{p1})^{\alpha}+1}-\frac{1}{(yb_{p2}+a_{p2})^{\beta}+1}+\frac{1}{(xb_{p1}+a_{p1})^{\alpha}\cdot(yb_{p2}+a_{p2})^{\beta}+(xb_{p1}+a_{p1})^{\alpha}+(yb_{p2}+a_{p2})^{\beta}+1}\right)}{1-(1-p)\left(1-\frac{1}{(xb_{p1}+a_{p1})^{\alpha}+1}-\frac{1}{(yb_{p2}+a_{p2})^{\beta}+1}+\frac{1}{(xb_{p1}+a_{p1})^{\alpha}\cdot(yb_{p2}+a_{p2})^{\beta}+(xb_{p1}+a_{p1})^{\alpha}+(yb_{p2}+a_{p2})^{\beta}+1}\right)}=$$

$$=\begin{bmatrix} b_{p1}=p^{-\frac{1}{\alpha}},\ a_{p1}=0 \\ b_{p2}=p^{-\frac{1}{\beta}},\ a_{p2}=0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\left(1-\frac{p}{x^{\alpha}+p}-\frac{p}{y^{\beta}+p}+\frac{p}{px^{\alpha}y^{\beta}+x^{\alpha}+y^{\beta}+p}\right)}{\left(\frac{1}{x^{\alpha}+p}+\frac{1}{y^{\beta}+p}-\frac{1}{px^{\alpha}y^{\beta}+x^{\alpha}+y^{\beta}+p}+1-\frac{p}{x^{\alpha}+p}-\frac{p}{y^{\beta}+p}+\frac{p}{px^{\alpha}y^{\beta}+x^{\alpha}+y^{\beta}+p}\right)}\neq F(x,y)$$

Taigi, dvimatis logistinis skirstinys, kurio vektoriaus komponentės nepriklausomos, nėra nei geometriškai minstabilus, nei maksstabilus. Tikriname asimptotinį maksstabilumą:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{p_n}{x^{\alpha}+p_n}-\frac{p_n}{y^{\beta}+p_n}+\frac{p_n}{p_nx^{\alpha}y^{\beta}+x^{\alpha}+y^{\beta}+p_n}\right)}{\left(\frac{1}{x^{\alpha}+p_n}+\frac{1}{y^{\beta}+p_n}-\frac{1}{p_nx^{\alpha}y^{\beta}+x^{\alpha}+y^{\beta}+p_n}+1-\frac{p_n}{x^{\alpha}+p_n}-\frac{p_n}{y^{\beta}+p_n}+\frac{p_n}{p_nx^{\alpha}y^{\beta}+x^{\alpha}+y^{\beta}+p_n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{1+x^{-\alpha}+y^{-\beta}-\left(x^{\alpha}+y^{\beta}\right)^{-1}}=G(x,y)$$

Gauta ribinė skirstinio funkcija, tokia pat kaip (2.2.1) uždavinyje, kai skirstinio komponentės priklausomos, ji yra maksstabili.

Įrodėme šitokį teiginį.

2.3.1. Teiginys. Dvimatė Pareto skirtinio funkcija

$$F(x,y)=1-\frac{1}{x^{\alpha}+1}-\frac{1}{y^{\beta}+1}+\frac{1}{x^{\alpha}y^{\beta}+x^{\alpha}+y^{\beta}+1}$$

nėra geometriškai maks (min) stabili.

2.3.2 užduotis: Tirsime dvimatį Pareto skirstinį, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos:

$$F(x,y)=\frac{1}{x^{-\alpha}+1}\cdot\frac{1}{y^{-\beta}+1}=\frac{1}{x^{-\alpha}y^{-\beta}+x^{-\alpha}+y^{-\beta}+1},$$
$$F_1(x)=\frac{1}{x^{-\alpha}+1},\qquad F_2(y)=\frac{1}{y^{-\beta}+1},\ x>0,y>0 \tag{2.3.2}$$

Taigi:

$$P\left(\frac{Z_N^{(1)}-a_{p1}}{b_{p1}}\le x;\frac{Z_N^{(2)}-a_{p2}}{b_{p2}}\le y\right)=\frac{p\cdot F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2})}{1-(1-p)F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2})}=$$

$$=\frac{\dfrac{p}{(xb_{p1}+a_{p1})^{-\alpha}(yb_{p2}+a_{p2})^{-\beta}+\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{-\beta}+1}}{1-\dfrac{(1-p)}{(xb_{p1}+a_{p1})^{-\alpha}(yb_{p2}+a_{p2})^{-\beta}+\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)^{-\alpha}+\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)^{-\beta}+1}}=\begin{bmatrix} b_{p1}=p^{-\frac{1}{\alpha}}, & a_{p1}=0 \\ b_{p2}=p^{-\frac{1}{\beta}}, & a_{p2}=0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{p}{x^{-\alpha}py^{-\beta}p+x^{-\alpha}p+y^{-\beta}p+p}=\frac{1}{x^{-\alpha}y^{-\beta}p+x^{-\alpha}+y^{-\beta}+1}$$

Vėlgi negauname, geometrinio maksstabilumo, galime pastebėti, kad neturėsime asimptotinio stabilumo.

Patikrinsim šiam skirstiniui geometrinį minstabilumą, tiriant dalimis. Užduotyje (2.2.2), kai tiriamas skirstinys (2.2.2), kurio vektoriaus komponentės priklausomos, komponenčių geometrinis minstabilumas ištirtas, jie yra geometriškai minstabilūs.

$$\frac{p\cdot(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))}{1-(1-p)(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))}=\begin{bmatrix} c_{p1}=0,\ d_{p1}=p^{\frac{1}{\alpha}} \\ c_{p2}=0,\ d_{p2}=p^{\frac{1}{\beta}}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\left(1-\dfrac{p}{x^{-\alpha}+p}-\dfrac{p}{y^{-\beta}+p}+\dfrac{p}{py^{-\beta}x^{-\alpha}+x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p}\right)}{\left(\dfrac{1}{x^{-\alpha}+p}+\dfrac{1}{y^{-\beta}+p}-\dfrac{1}{py^{-\beta}x^{-\alpha}+x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p}+1-\dfrac{p}{x^{-\alpha}+p}-\dfrac{p}{y^{-\beta}+p}+\dfrac{p}{py^{-\beta}x^{-\alpha}+x^{-\alpha}+y^{-\beta}+p}\right)}$$

2.3.2. Teiginys. Nepriklausomų komponenčių dvimatis Pareto skirstinys

$$F(x,y)=\frac{1}{x^{-\alpha}y^{-\beta}+x^{-\alpha}+y^{-\beta}+1},$$

nėra nei geometriškai minstabilus, nei geometriškai maksstabilus. Lengvai galime pastebėti, kad kai $p=\frac{1}{n}$ ir $n\to\infty$ ribinis skirstinys, kurio vektoriaus komponentės priklausomos yra maksstabilus.

Tai nelauktas rezultatas. Logistinio skirstinio tyrimą, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos pateiksime priede, kadangi gausime tą patį rezultatą, kaip ir Pareto skirstiniui. Be to priede pateiksime, kitokių skirstinių tyrimą.

2.3.3. Teiginys: Jei dvimatis skirstinys, kurio vektorius komponentės priklausomos yra geometriškai minstabilus, tuomet jis nebus geometriškai maksstabilus, arba atvirkščiai. (geometrinio skirstinio parametras abiem atvejais turi sutapti)

Įrodymas: Galime įrodyti prieštaros būdu, teigdami, kad jei dvimatis skirstinys, kurio vektoriaus komponentės priklausomos yra geometriškai minstabilus, tuomet jis bus ir geometriškai maksstabilus:

Turėdami geometrinio minstabilumo (1.11.8) ir geometrinio maksstabilumo (1.11.9) kriterijus:

$$F(x,y) = 1 - \frac{p\cdot(1-F(xd_{p1}+c_{p1}))}{1-(1-p)(1-F(xd_{p1}+c_{p1}))} - \frac{p\cdot(1-F(yd_{p2}+c_{p2}))}{1-(1-p)(1-F(yd_{p2}+c_{p2}))} +$$
$$+\frac{p\cdot(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))}{1-(1-p)(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))} \tag{2.3.3}$$

$$F(x,y) = \frac{pF(xb_{n1}+a_{n1},yb_{n2}+a_{n2})}{1-(1-p)F(xb_{n1}+a_{n1},yb_{n2}+a_{n2})} \tag{2.3.4}$$

Remiantis prielaida, kad dvimatis skirstinys yra geometriškai minstabilus tai ir yra geometriškai maksstabilus, galime sulyginti kriterijų dešiniąsias puses:

$$1 - \frac{p\cdot(1-F(xd_{p1}+c_{p1}))}{1-(1-p)(1-F(xd_{p1}+c_{p1}))} - \frac{p\cdot(1-F(yd_{p2}+c_{p2}))}{1-(1-p)(1-F(yd_{p2}+c_{p2}))} +$$
$$+\frac{p\cdot(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))}{1-(1-p)(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))} =$$
$$= \frac{pF(xb_{n1}+a_{n1},yb_{n2}+a_{n2})}{1-(1-p)F(xb_{n1}+a_{n1},yb_{n2}+a_{n2})}$$

Galime lengvai pastebėti, kad pusės yra nelygios. O tai prieštarauja mūsų prielaidai.

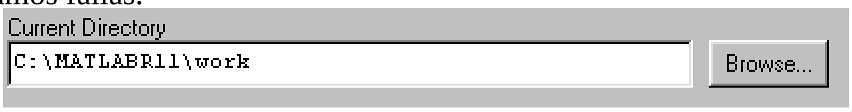
3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Darbe tikrinama ar vienmačiu atveju geometriškai maksstabilūs skirstiniai, bus taip pat geometriškai maksstabilūs dvimačiu atveju. Ar geometriškai minstabilus dvimatis skirstinys, bus taip pat geometriškai maksstabilus. Tiriami dvimačiai skirstiniai, kai vektoriaus komponentės priklausomos ir nepriklausomos. Pasirinkti tyrimui skirstiniai yra Pareto, Logistinis, taip pat mišrieji skirstiniai. Pasirinkta programinė įranga MathCad, jos pagalba nubraižyti tiriamųjų skirstinių funkcijų grafikai. O kai skirstiniai, nėra geometriškai maksstabilūs, bet yra asimptotiškai maksstabilūs, tada vieno skirstinio priartėjimą prie kito tiriama Matlab programine įranga.

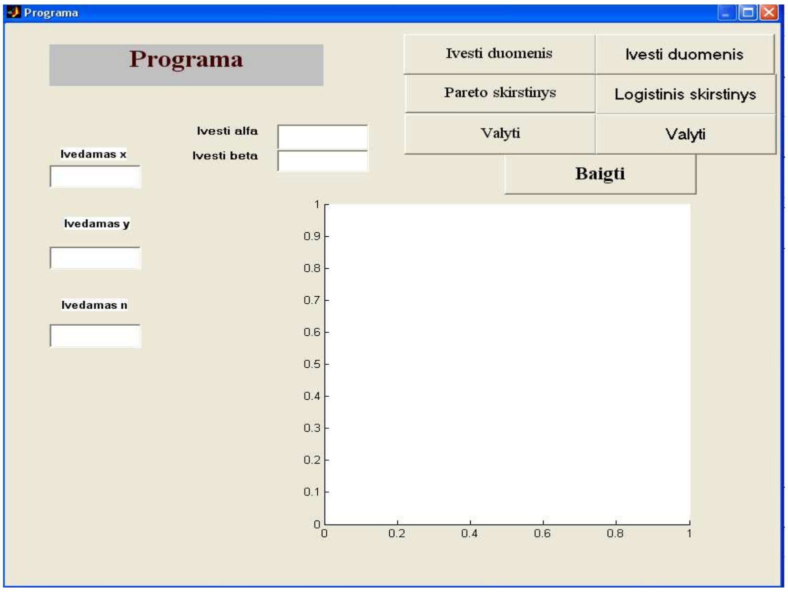
Matlab terpėje algoritmai realizuojami naudojant vidinę **Mathlab** programavimo kalbą, kurios objektai yra visi operatoriai bei funkcijos, naudojamos komandiniu rėžimu. **Matlab** terpėje parašyta programa vadinama **M** failu [10].

Programos vartotojui sukurtas M failas pavadinimu programa.m, o programos langas failu programa.fig. Vartotojas norėdamas pradėti darbą su programa turi:

1. Reikia nurodyti kelią iki programos failo, t.y. Current directory pasirinkti katalogą, kuriame yra programos failas.

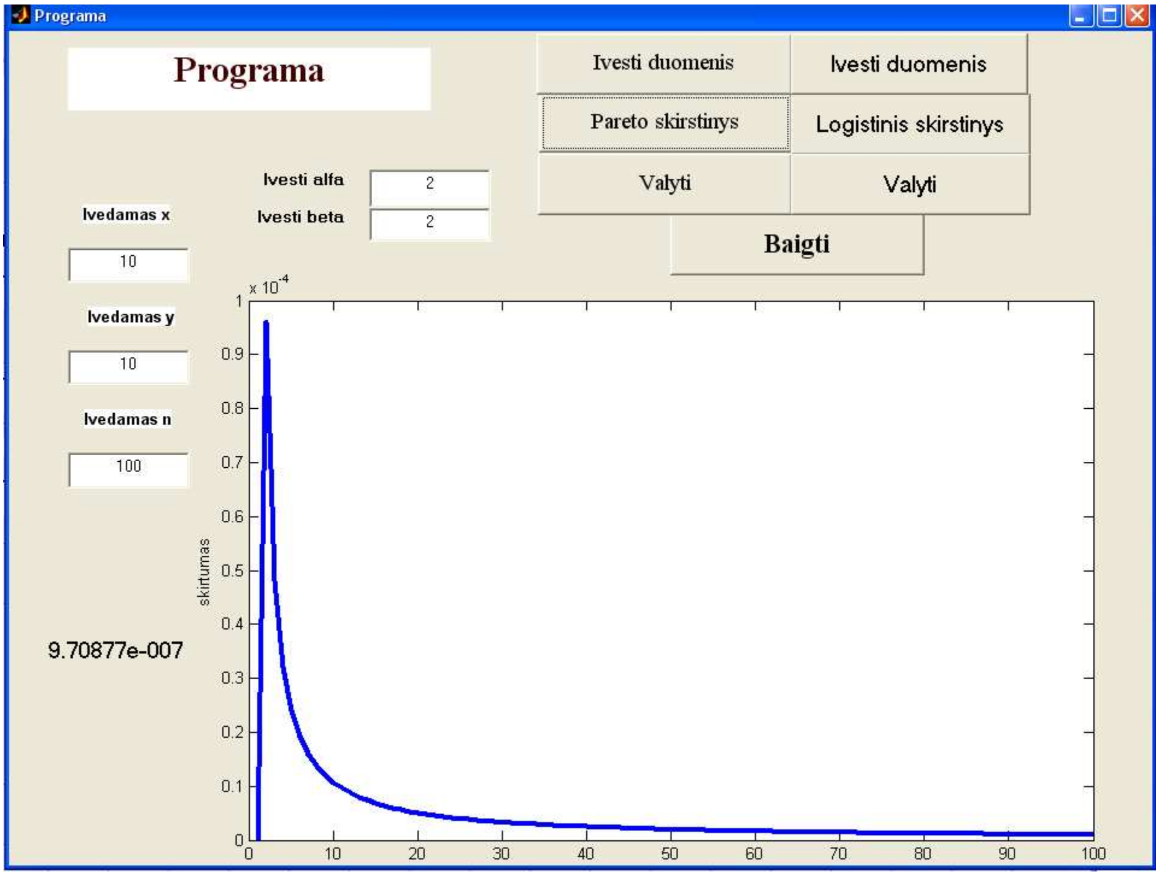


2. Matlab darbo lauko lange reikėtų parašyti žodelį „Programa“ ir spausti „Enter“. Tuomet, kai jis viską įvykdys, atsidarys toks programos langas:



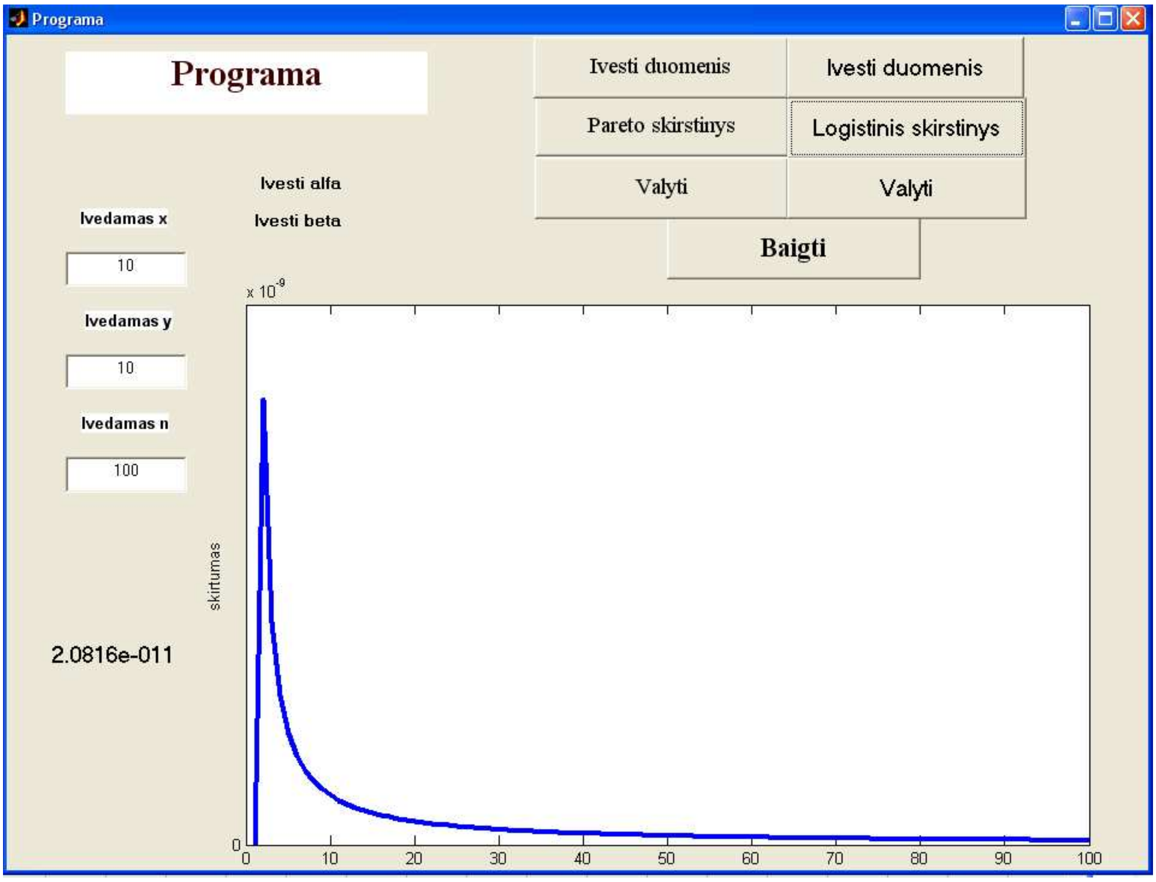
3.1.1 pav. Programos langas

Pirmiausia reikia įvesti pradines reikšmes. Taigi nuspaudę mygtuką „Įvesti duomenis“ ir įvedę duomenis $x = 10$, $y = 10$, $n = 100$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$ paspaudžiame mygtuką „Pareto skirstinys“. Tuomet galime pamatyti programos lange 3.1.2. pav. grafiką, kuris vaizduoja pokytį tarp dvimačio Pareto skirstinio, kurio vektoriaus komponentės nepriklausomos ir ribinio dvimačio Pareto skirstino, kurio komponentės priklausomos.



3.1.2 pav. Programos vykdymo langas

Norint pasižiūrėti logistinio skirstinio artėjimą, reikia nuspausti „Valyti“ mygtuką ir suvedus norimus duomenis, paspausti mygtukus „Įvesti duomenis“ ir „Logistinis skirstinys“, gaunamas rezultatas atlikus visus šiuos veiksmus matomas paveiksle 3.1.3.



3.1.3 pav. Programos vykdymo langas

Kiekvienam parametrui yra priskirta intervalas, jei vartotojas įveda reikšmę, kuri nepatenka į šį intervalą, jis informuojamas apie padarytą klaidą.

Parametras	**Intervalas**
X	$(0; 1100)$
Y	$(0; 1100)$
n	$(90; 1000)$
β	$(0; 8)$
α	$(0; 8)$

Taigi įvedus n mažesnį negu 10 pasirodo klaidos pranešimas 3.1.3.

3.1.4 pav. Klaidos langas

Programos tekstas pateiktas, jis buvo kuriamas naudojantis literatūra (Quach Q., Sutoyo D., Slazas R., 2007) *5 priede*.

DISKUSIJA

Šiame tyrime, buvo gautas netikėtas rezultatas. Tiriant Pareto, logistinį dvimačius skirstinius, kurių vektoriaus komponentės nepriklausomos, negavome geometrinio maks (min) stabilumo. Geometrinis maks (min) stabilumas buvo gautas, tiriant dvimačius skirstinius, kurių vektoriaus komponentės priklausomos.

Vienmačio skirstinio atveju, jei jis yra geometriškai maksstabilus, tai galime teigti, kad jis bus taip pat ir geometriškai minstabilus (Satheesh S. and Unnikrishnan Nair N., 2004). Tiriant dvimačius skirstinius, gavome prieštara vienmačio skirstinio atvejui, jeigu dvimatis skirstinys yra geometriškai maksstabilus tai jis bendru atveju nebus geometriškai minstabilus arba atvirkščiai. Darbe šis teiginys įrodomas pavyzdžiais.

Remiantis maks (min) stabiliais skirstiniais, taip pat perkėlimo teorema (Falk M., 2004), galima nustatyti kuris vienmatis skirstinys, bus geometriškai minstabilus arba geometriškai maksstabilus. Tą patį galime padaryti ir dvimačiu atveju.

Jei dvimačio vektoriaus koordinatės yra geometriškai maksstabilios arba minstabilios, tai nebūtinai vektorius, bus geometriškai maksstabilus arba minstabilus.

Normalizavimo konstantas dvimačio vektoriaus maksstabilumo tyrime parenkame tokias pačias, kaip ir vienaičio skirstinio tyrime.

Dvimatis vektorius, kurio koordinatės nepriklausomos yra asimptotiškai maks (min) stabilus, kai $p = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \to \infty$.

Tiriama buvo Pareto, logistinis ir mišrieji skirstiniai, visi jie parodė vieną ir tą patį rezultatą. Tyrimą galima praplėsti iki n-mačio vektoriaus tyrinėjimo, sukuriant geometrinį maks(min) stabilumo kriterijų n-mačiam vektoriui ir tiriant n-mačius ekstremumus.

Užsienio literatūroje gausu atsitiktinių sumų geometrinio maks (min) stabilumo nagrinėjimo (Kozubowski T. J. and Rachev S. T., 1999; Kozubowski T. J. and Rachev S. T., 1999). Tad atsitiktinių dvimačių vektorių nagrinėjamą paskatino panašių temų stoka maksimumams ir minimumams.

REKOMENDACIJOS

Šiame darbe atliktas tyrimas dvimačiams vektoriams, kurių koordinatės priklausomos arba nepriklausomos. Gal galima būtų praplėsti dvimačio vektoriaus geometrinio maks (min) stabilumo tyrimą iki n-mačio vektoriaus geometrinio maks (min) stabilumo tyrimo.

Gal galima rasti tokį dvimatį skirstinį, kuris bus geometriškai maksstabilus ir taip pat geometriškai minstabilus.

Nepriklausomų koordinačių atveju, esant asimptotiniam maks (min) stabilumui, galima bandyti įvertinti konvergavimo greitį. Mano darbe atlikta tik kompiuterinė šio greičio analizė.

PADĖKOS

Nuoširdžiai dėkoju savo darbo vadovui prof**. dr. J. A. Aksomaičiui,** už gerus patarimus, idėjas, pataisymus.

IŠVADOS

1. Jei dvimačiai Pareto, logistiniai skirstiniai, kurių komponentės priklausomos, yra geometriškai minstabilūs, tai jie nėra geometriškai maksstabilūs.

2. Jei dvimačiai Pareto, logistiniai skirstiniai, kurių komponentės priklausomos, yra geometriškai maksstabilūs, tai jie nėra geometriškai minstabilūs.

3. Dvimačiai Pareto, logistiniai skirstiniai, kurių vektoriaus komponentės nepriklausomos, nėra geometriškai maks (min) stabilūs. Taip pat nėra asimptotinio maks (min) stabilumo, kai $p = \frac{1}{n}, \quad n \to \infty$.

4. Dvimačiu atveju iš geometrinio minstabilumo neišplaukia geometrinis maksstabilumas ir atvirkščiai (Tai 1,2 ir 3 išvadų apibendrinimas).

LITERATŪRA

1. Aksomaitis A., Tikimybių teorija ir statistika. Kaunas: Technologija, 2000, 344 psl.

2. Falk M., Charakterisierung bivariater Extremwertverteilungen mittels Normen im R^2, 2004, p. 24.

3. Galambos, J., Asymptotic theory of extreme order statistics, 2nd edition. Krieger, Malabar, Florida, 1987.

4. Jokimaitis, A., Daugiamačių atsitiktinių dydžių, ekstremaliųjų reikšmių asimptotika, *Disertacija mokslų daktaro laipsniui*, Vilnius, 1998.

5. Kozubowski T. J. and Rachev S. T., Univariate Geometric stable Laws, *Journal of Computational Analysis and Applications*, Vol. 1, No. 2, 1999, p. 177.

6. Kozubowski T. J. and Rachev S. T., Multivariate Geometric stable Laws, *Journal of Computational Analysis and Applications*, Vol. 1, No. 4, 1999, p. 349.

7. Meeker, W.Q., and Escobar, L.A., Statistical Methods for Reliability Data, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.

8. Molchanov I., Convex geometry of max-stable distributions, *Springer Science+ Business Media*, 2008, p 235-259.

9. Nadarajah S., and Kotz S., A generalized logistic distribution, 2004, 3169-3174.

10. Programa Matlab, *Tiesiniai algoritmai.* Prieiga per internetą http://sig.balticgrid.org/SIGs/panko/praktine-informatika/matlab/5pateiktis.ppt

11. Reed W. J., The Pareto, Zipf and other power laws, p. 1-8. Prieiga per internetą http://linkage.rockefeller.edu/wli/zipf/reed01_el.pdf.

12. Quach Q., Sutoyo D., Slazas R., 2007. Prieiga per internetą http://blinkdagger.com/matlab/matlab-gui-graphical-user-interface-tutorial-for-beginners

13. Satheesh S. and Sandhya E., Geometric Gamma Max-Infinetely Divisible Models, Prieiga petr internetą http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0801/0801.2083.pdf.

14. Satheesh S. and Unnikrishnan Nair N., On the stability of geometric extremes, *Journal of the Indian Statistical Association*, Vol. 42, 2004. p. 99-109.

15. Stockute R., Veaux A. and Johnson P., Logistic distribution, 2006, p. 16.

16. Stoutenborough J.W. and Johnson P., Pareto Distribution, 2006, p. 1-6.

17. Tiago de Oliveira J., Statistical Extremes and Applications, *Reidel Publishing Company*, 1984, p. 117-130.

18. Zhang Z., Multivariate extremes, Max-Stable process estimation and dynamic Financial modeling, 2002, 176, p. 5-10.

1. PRIEDAS. SKIRSTINIŲ GEOMETRINIS MAKS (MIN) STABILUMAS

1. Logistinio skirstinio tyrimas, kai vektoriaus komponentės nepriklausomos.

$$F(x,y)=\frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}+e^{-y}e^{-x}}$$

$$F_1(x)=\frac{1}{1+e^{-x}} \text{ ir } F_2(y)=\frac{1}{1+e^{-y}}$$

Ar dvimatis logistinis skirstinys geometriškai maksstabilus?

$$P\left(\frac{Z_n^{(1)}-a_{p1}}{b_{p1}}\le x;\frac{Z_n^{(2)}-a_{p2}}{b_{p2}}\le y\right)=\frac{p\cdot F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2})}{1-(1-p)F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2})}=$$

$$=\frac{p\left(\frac{1}{\exp(-xb_{p1}-a_{p1}-yb_{p2}-a_{p2})+\exp(-xb_{p1}-a_{p1})+\exp(-yb_{p2}-a_{p2})+1}\right)}{1-\left(\frac{1-p}{\exp(-xb_{p1}-a_{p1}-yb_{p2}-a_{p2})+\exp(-xb_{p1}-a_{p1})+\exp(-yb_{p2}-a_{p2})+1}\right)}=$$

$$=\frac{p}{\exp(-xb_{p1}-a_{p1}-yb_{p2}-a_{p2})+\exp(-xb_{p1}-a_{p1})+\exp(-yb_{p2}-a_{p2})+p}=\begin{bmatrix}b_{p1}=1 & a_{p1}=-\ln(p)\\ b_{p2}=1 & a_{p2}=-\ln(p)\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{p}{pe^{-x}pe^{-y}+pe^{-x}+pe^{-y}+p}=\frac{1}{pe^{-x}e^{-y}+e^{-x}+e^{-y}+1}\ne F(x,y)$$

Nėra geometriškai maksstabilus. Patikrinsime, ar šis dvimatis logistinis skirstinys, kurio vektoriaus komponentės nepriklausomos yra geometriškai minstabilus?

Jau esame gavę, kad skirstinio vektoriaus komponentės minstabilios.

$$\frac{p\cdot(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))}{1-(1-p)\cdot(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))}=\begin{bmatrix}d_{p1}=1 & c_{p2}=\ln(p)\\ d_{p2}=1 & c_{p2}=\ln(p)\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{p\cdot\left(1-\frac{p}{e^{-x}+p}-\frac{p}{e^{-y}+p}+\frac{p}{e^{-x}e^{-y}p+e^{-x}+e^{-y}+p}\right)}{p\left(\frac{1}{e^{-x}+p}+\frac{1}{e^{-y}+p}-\frac{1}{e^{-x}e^{-y}p+e^{-x}+e^{-y}+p}+1-\frac{p}{e^{-x}+p}-\frac{p}{e^{-y}+p}+\frac{p}{e^{-x}e^{-y}p+e^{-x}+e^{-y}+p}\right)}=$$

Bet šis skirstinys nėra asimptotiškai maksstabilus, bet nėra asimptotiškai minstabilus:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{p_n}{e^{-x}+p_n}-\frac{p_n}{e^{-y}+p_n}+\frac{p_n}{e^{-x}e^{-y}p_n+e^{-x}+e^{-y}+p_n}\right)}{\left(\frac{1}{e^{-x}+p_n}+\frac{1}{e^{-y}+p_n}-\frac{1}{e^{-x}e^{-y}p_n+e^{-x}+e^{-y}+p_n}+1-\frac{p_n}{e^{-x}+p_n}-\frac{p_n}{e^{-y}+p_n}+\frac{p_n}{e^{-x}e^{-y}p_n+e^{-x}+e^{-y}+p_n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{e^{-x}}+\frac{1}{e^{-y}}-\frac{1}{e^{-x}+e^{-y}}+1\right)}$$

Ir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{pe^{-x}e^{-y}+e^{-x}+e^{-y}+1}=\frac{1}{e^{-x}+e^{-y}+1} \quad p=p_n=\frac{1}{n}$$

Gauta ribinė skirstinio funkcija yra geometriškai maksstabili.

2. Mišriojo skirstinio tyrimas, kai viena skirstinio komponentė logistinis skirstinys, o kita Pareto skirstinys.

$$F_1(x)=\frac{1}{1+e^{-x}} \; F_1(x)=\frac{1}{1+y^{-\beta}}$$

Dvimatis skirstinys:

$$F_1(x)=\frac{1}{1+e^{-x}+y^{-\beta}}$$

Ar maksstabilus?

$$P\left(\frac{Z_n^{(1)}-a_{p1}}{b_{p1}}\le x;\frac{Z_n^{(2)}-a_{p2}}{b_{p2}}\le y\right)=\frac{p\cdot F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2})}{1-(1-p)F(xb_{p1}+a_{p1};yb_{p2}+a_{p2})}=$$

$$=\frac{p\left(\frac{1}{\exp(-xb_{p1}-a_{p1})+(-yb_{p2}-a_{p2})^{-\beta}+1}\right)}{1-\left(\frac{1-p}{\exp(-xb_{p1}-a_{p1})+(-yb_{p2}-a_{p2})^{-\beta}+1}\right)}=$$

$$=\frac{p}{\exp(-xb_{p1}-a_{p1})+(-yb_{p2}-a_{p2})^{-\beta}+p}=\begin{bmatrix} b_{p1}=1 \;\; a_{p1}=-\ln(p) \\ b_{p2}=0 \quad a_{p2}=p^{-\frac{1}{\beta}} \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{p}{pe^{-x}+y^{-\beta}p+p}=\frac{1}{e^{-x}+y^{-\beta}+1}=F(x,y)$$

Ar minstabilus?

$$\frac{p\cdot(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))}{1-(1-p)\cdot(1-F(xd_{p1}+c_{p1})-F(yd_{p2}+c_{p2})+F(xd_{p1}+c_{p1};yd_{p2}+c_{p2}))}=\begin{bmatrix} d_{p1}=1 & c_{p2}=\ln(p) \\ d_{p2}=0 & c_{p2}=p^{\frac{1}{\beta}} \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{p\cdot\left(1-\frac{p}{e^{-x}+p}-\frac{p}{y^{-\beta}+p}+\frac{p}{e^{-x}+y^{-\beta}+p}\right)}{p\left(\frac{1}{e^{-x}+p}+\frac{1}{y^{-\beta}+p}-\frac{1}{e^{-x}+y^{-\beta}+p}+1-\frac{p}{e^{-x}+p}-\frac{p}{y^{-\beta}+p}+\frac{p}{e^{-x}+y^{-\beta}+p}\right)}=$$

$$=\frac{\left(1-\frac{p}{e^{-x}+p}-\frac{p}{y^{-\beta}+p}+\frac{p}{e^{-x}+y^{-\beta}+p}\right)}{\left(\frac{1}{e^{-x}+p}+\frac{1}{y^{-\beta}+p}-\frac{1}{e^{-x}+y^{-\beta}+p}+1-\frac{p}{e^{-x}+p}-\frac{p}{y^{-\beta}+p}+\frac{p}{e^{-x}+y^{-\beta}+p}\right)}$$

Gavome geometriškai maksstabilų skirstinį, kuris nėra geometriškai minstabilus.

2. PRIEDAS. ATSITIKTINIŲ VEKTORIŲ GEOMETRINIO MAKSSTABILUMO TYRIMAS

Irma Palevičiūtė

Kauno technologijos universitetas

Anotacija

Atsitiktinio dydžio geometrinio maks-stabilumo sąvoka gerai žinoma statistinėje analizėje. Jos taikymai yra populiarūs finansų rinkos analizėje, inžineriniuose bei socialiniuose tyrimuose. Šiame darbe stabilumo sąvoka išplečiama dvimačiams atsitiktiniams vektoriams. Pateiksime konkrečių pavyzdžių. Patikrinami konkretūs pavyzdžiai.

PAGRINDINIAI ŽODŽIAI: ekstremoliosios reikšmės, maks-stabilumas, atsitiktiniai vektoriai.

Abstract

The concept of geometric max-stability random variable is very well known in the statistics of analysis. It’s popular to use this in finance market, engineering and social researches. In this work the stability concept is dilatable into the bivariate random vectors. We will show some examples.

KEY WORDS: extreme value, max-stability, random vectors.

Įvadas

Tarkime, kad (X_1, X_2,...X_n) yra paprastoji atsitiktinė imtis iš generalinės aibės su skirstinio funkcija $F(x)=P(X_i<x)$.

Atsitiktinį dydį X_i vadiname maks-stabiliuoju ([1]), jeigu egzistuoja tokias normalizavimo konstantos a_n ir $b_n>0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} \le x\right) = F(x)$$

čia struktūra $Z_n = \max(X_1 ... X_n)$

....

Tarkime, kad imties didumas N yra atsitiktinis dydis, nepriklausantis nuo X_i, $i \ge 1$ ir jo skirstinys yra geometrinis

$$P(N = k) = p(1 - p)^{k-1}, k \ge 1, 0 < p < 1$$

Atsitiktinį dydį X_i vadiname geometriškai maks-stabiliuoju ([2]), jeigu egzistuoja tokios normalizavimo konstantos a_n ir $b_n>0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} \le x\right) = F(x) \tag{1}$$

čia struktūra $Z_n = \max(X_1 ... X_n)$

Atsitiktinių dydžių geometrinio maks-stabilumo analizei skiriami [3, 4] darbai.

Plėtinys atsitiktiniams vektoriams

Apibudinsime (1) stabilumo sąvoka dvimačių atsitiktinių vektorių atveju. Tarkime, yra dvimačių vektorių seka (X_1, X_1), (X_2, X_2),... .Vektoriai (X_i, X_i), $i \ge 1$ yra nepriklausomi su skirstinio funkcija F(x, y)= $P(X_i \le x, Y_i \le y)$.

Sudarome struktūras:

$Z_{1,N} = \max(X_1 ... X_N)$ $Z_{2,N} = \max(Y_1 ... Y_N)$

Vektorių maksimumas

$Z_N = (Z_{1,N}, Z_{2,N})$

Tarę, kad N yra geometrinis atsitiktinis dydis, tiesinio normalizavimo konstantų vektorius

$a_p = (a_{1,p}, a_{2,p})$ ir $b_p = (b_{1,p}, b_{2,p})$ parinkime tokius su kuriomis:

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} \le x\right) = F(x) \tag{2}$$

Jeigu nėra (2) sąryšis, vektorių (X_i, X_i), vadiname geometriškai maks-stabiliuoju.

Teorema: Būtina ir pakankama vektoriams (X_i, X_i), geometrinio maks-stabilumo sąlyga yra

$$\frac{p \cdot F(xb_{1,p} + a_{1,p}, yb_{2,p} + a_{2,p})}{1-(1-p)F(xb_{1,p} + a_{1,p}, yb_{2,p} + a_{2,p})} = F(x, y)$$

Įrodymas

$$\begin{aligned} P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} \le x\right) &= P(Z_{1,N} \le xb_{1,p} + a_{1,p}, Z_{2,N} \le yb_{2,p} + a_{2,p}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F^k\left(xb_{1,p} + a_{1,p}, yb_{2,p} + a_{2,p}\right) P(N = k) = \\ &= g_N\left(F\left(xb_{1,p} + a_{1,p}, yb_{2,p} + a_{2,p}\right)\right), \end{aligned} \tag{3}$$

čia skirstinio generuojančioji funkcija $g_N(z) = Mz^N$

Geometrinio skirstinio generuojančioji funkcija

$$g_N(z) = \sum_{k=1}^{\infty} zp(1-p)^{k-1} = \frac{pz}{1-(1-p)z}, \ |z| \le 1 \tag{4}$$

Iš (3) ir (4) išplaukia teoremos teiginys.

Pavyzdžiai

1. Pavyzdys

Tarkime, kad vektoriaus skirstinio funkcija yra logistinė:

$$F(x,y) = \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}}, \ x \in R, y \in R$$

Imdami a_p=(-lnp, -lnp), b_p(1, 1), gauname:

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} \le x\right) = \frac{p \cdot F(x - \ln p, y - \ln p)}{1-(1-p)F(x-\ln p, y - \ln p)} = \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}}$$

2. Pavyzdys

$$F(x,y) = \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}+e^{-x-y}},$$

geometrinio maks-stabilumo negausime.

Literatūra

1. *Galambos J.* (1997). The Asymptotic Theory of Extremes Order Statistics, Wiley, New York. 302p.

2. *Rochev S. and Mittnik S.* 2000. Stuble Paretian Models in Finance. Wiley, 855p.

3. *Lengvinaitė I. Aksomaitis A.* 2003. Pareto atsitiktinių dydžių maksimumų tyrimas. Matematika ir matematinis modeliavimas. KTU, 1, 66-69p.

4. Aksomaitis A. 2003. Perkėlimo teoremos ir geometriškai maks-stabilieji skirstiniai. Liet. Mat. Rink. (Sp. Nr), 43 394-398p.

GEOMETRIC MAX-STABILITY OF RANDOM VECTORS RESEARCH

I. Palevičiūtė

S u m m a r y

In the article is shown the random vectors essential and enough conditions of the geometric max-stability. Are explored some cases and got results.

Straipsnį recenzavo darbo vadovas prof. A. Aksomaitis

Irma Ivanovienė, FMMM-7

3. PRIEDAS. STRAIPSNIS. ATSITIKTINIŲ VEKTORIŲ GEOMETRINID MAKS STABILUMAS

Algimantas Aksomaitis[1], Irma Ivanovienė[1]

[1]Kauno technologijos universitetas

Studentų g. 50, LT-51368, Kaunas, Lietuva

el. paštas: algimantas.aksomaitis@ktu.lt, irma.paleviciutė@stud.ktu.lt

Santrauka. Atsitiktinių dydžių geometrinis maks (min) stabilumas pakankamai yra išnagrinėtas. Straipsnyje mes praplečiame šią geometrinio stabilumo sąvoka vektoriams. Ieškome ryšio tarp vektorių geometrinio maks stabilumo ir min stabilumo.

Raktiniai žodžiai: min stabilus, maks stabilus, vektorių ekstremumai, perkėlimo teorema

ĮVADAS

Tarkime, kad $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots(X_{N_n},Y_{N_n})$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai vektoriai su skirstinio funkcija $F(x,y)=P(X_1\le x;Y_1\le y)$. N_n, $n\ge 1$ – atsitiktiniai dydžiai įgyjantys natūraliąsias reikšmes ir nepriklausomi nuo (X_i,Y_i) $i\ge 1$.

Dvimačių vektorių maksimumo struktūra

$$Z_{N_n}=\max\left(Z_{N_n}^{(1)},Z_{N_n}^{(2)}\right);$$

čia $Z_{N_n}^{(1)}=\max\left(X_1,X_2,\ldots,X_{N_n}\right)$, $Z_{N_n}^{(2)}=\max\left(Y_1,Y_2,\ldots,Y_{N_n}\right)$

Analogiškai

$$W_{N_n}=\min\left(W_{N_n}^{(1)},W_{N_n}^{(2)}\right);$$

čia $W_{N_n}^{(1)}=\min\left(X_1,X_2,\ldots,X_{N_n}\right)$, $W_{N_n}^{(2)}=\min\left(Y_1,Y_2,\ldots,Y_{N_n}\right)$.

Ateityje atsitiktinį dydį N_n kartais žymėsime tiesiog N .

Tarkime, kad N skirstinys yra geometrinis:

$$P(N=k)=p(1-p)^{k-1},\ k\ge 1$$

Apibrėžimas. Skirstinio funkciją $F(x,y)$ (arba vektorių (X,Y)) vadiname geometriškai maks stabiliąja, jeigu egzistuoja tokios normalizavimo konstantos a_{p1},a_{p2} ir $b_{p1}>0,b_{p2}>0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{Z_N^{(1)}-a_{p1}}{b_{p1}}\le x,\frac{Z_N^{(2)}-a_{p2}}{b_{p2}}\le y\right)=F(x,y) \tag{1}$$

Geometrinis minstabilumas apibrėžiamas taip:

$$P\left(\frac{W_N^{(1)}-c_{p1}}{d_{p1}}\le x,\frac{W_N^{(2)}-c_{p2}}{d_{p2}}\le y\right)=F(x,y) \tag{2}$$

Vektorių geometrinio maks (min) stabilumo apibrėžimai yra [4] straipsnyje pateiktų vienmačių atsitiktinių dydžių (arba skirstinių) geometrinio stabilumo analogas. Minimame straipsnyje įrodoma, kad vienmačių skirstinių atveju iš geometrinio maksstabilumo išplaukia geometrinis minstabilumas ir atvirkščiai.

Mūsų tikslas patikrinti šio teiginio galiojimą atsitiktiniams vektoriams.

1. Teiginiai ir jų įrodymas

Kai N yra geometrinis su parametru p, jo generuojančioji funkcija

$$g_N(z)=\mathrm{E}z^N=\frac{pz}{1-(1-p)z} \tag{3}$$

Kadangi

$$P\left(Z_k^{(1)}\le xb_{p1}+a_{p1},Z_k^{(2)}\le yb_{p2}+a_{p2}\right)=F^k\left(xb_{p1}+a_{p1},yb_{p2}+a_{p2}\right),\ k\ge 1$$

tai, panaudoję pilnosios tikimybės formulę, gauname geometrinio maksstabilumo kriterijų:

$$\frac{pF\left(xb_{p1}+a_{p1},yb_{p2}+a_{p2}\right)}{1-(1-p)F\left(xb_{p1}+a_{p1},yb_{p2}+a_{p2}\right)}=F(x,y) \tag{4}$$

Geometrinio minstabilumo kriterijus yra sudėtingesnis. Kadangi

$$P\left(W_N^{(1)}\le xd_{p1}+c_{p1},W_N^{(2)}\le yd_{p2}+c_{p2}\right)=1-P\left(W_N^{(1)}\ge xd_{p1}+c_{p1}\right)-P\left(W_N^{(2)}\ge yd_{p2}+c_{p2}\right)+$$

$$+P\left(W_N^{(1)}\ge xd_{p1}+c_{p1},W_N^{(2)}\ge yd_{p2}+c_{p2}\right)=1-g_N\left(1-F_1(xd_{p1}+c_{p1})\right)-g_N\left(1-F_2(yd_{p2}+c_{p2})\right)+$$

$$+g_N\left(P(X_1\ge xd_{p1}+c_{p1},Y_1\ge yd_{p2}+c_{p2})\right)$$

tai geometrinio minstabilumo kriterijus yra:

$$1-\frac{p\left(1-F_1\left(xd_{p1}+c_{p1}\right)\right)}{1-(1-p)\left(1-F_1\left(xd_{p1}+c_{p1}\right)\right)}-\frac{p\left(1-F_2\left(yd_{p2}+c_{p2}\right)\right)}{1-(1-p)\left(1-F_2\left(yd_{p2}+c_{p2}\right)\right)}+$$
$$+\frac{p\left(P(X_1\geq xd_{p1}+c_{p1},Y_1\geq yd_{p2}+c_{p2})\right)}{1-(1-p)\left(P(X_1\geq xd_{p1}+c_{p1},Y_1\geq yd_{p2}+c_{p2})\right)}\neq F(x,y) \tag{5}$$

1 teiginys. Tarkime, kad vektorių koordinatės yra nepriklausomos ir geometriškai maks (min) stabilios. Tada vektoriai nėra geometriškai maks (min) stabilūs.

Teiginio įrodymas. Kadangi koordinačių geometrinio maks stabilumo kriterijus [4]:

$$\frac{pF_1\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)}{1-(1-p)F_1\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)}=F_1(x) \tag{6}$$

ir

$$\frac{pF_2\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)}{1-(1-p)F_2\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)}=F_2(y) \tag{7}$$

tenkinami. Iš (4), (5) ir (6) išplaukia, kad

$$\frac{pF_1\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)F_2\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)}{1-(1-p)F_1\left(xb_{p1}+a_{p1}\right)F_2\left(yb_{p2}+a_{p2}\right)}\neq$$
$$\neq\frac{p^2F_1\left(xd_{p1}+c_{p1}\right)F_2\left(yd_{p2}+c_{p2}\right)}{\left(1-(1-p)F_1\left(xd_{p1}+c_{p1}\right)\right)\left(1-(1-p)F_2\left(yd_{p2}+c_{p2}\right)\right)}=F_1(x)F_2(y)$$

Geometrinio maksstabilumo nėra.

Analogiškai įrodomas geometrinio minstabilumo nebuvimas, kai $F(x,y)=F_1(x)F_2(y)$.

1 pavyzdys. Tarkime, kad

$$F_1(x)=1-\frac{1}{1+x^{\alpha}},\ F_2(y)=1-\frac{1}{1+y^{\beta}},\quad x,y\geq 0,\quad \alpha,\beta>0 \tag{8}$$

Nepriklausomų koordinačių atveju

$$F(x,y)=1-\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+y^{\beta}}+\frac{1}{1+y^{\beta}+x^{\alpha}+x^{\alpha}y^{\beta}},$$

Imdami $a_{p1}=0, a_{p2}=0$ ir $b_{p1}=p^{-\frac{1}{\alpha}}, b_{p2}=p^{-\frac{1}{\beta}}$, gauname

$$\frac{p\left(1-\frac{1}{1+x^{\alpha}p^{-1}}\right)}{1-(1-p)\left(1-\frac{1}{1+x^{\alpha}p^{-1}}\right)}=F_1(x),\quad \frac{p\left(1-\frac{1}{1+y^{\beta}p^{-1}}\right)}{1-(1-p)\left(1-\frac{1}{1+y^{\beta}p^{-1}}\right)}=F_2(y). \tag{9}$$

Tačiau

$$\frac{p\left(1-\frac{1}{1+x^{\alpha}p^{-1}}\right)\left(1-\frac{1}{1+y^{\beta}p^{-1}}\right)}{1-(1-p)\left(1-\frac{1}{1+x^{\alpha}p^{-1}}\right)\left(1-\frac{1}{1+y^{\beta}p^{-1}}\right)}=\frac{x^{\alpha}y^{\beta}}{p+y^{\beta}+x^{\alpha}+y^{\beta}x^{\alpha}}\neq F(x,y) \tag{10}$$

kai $0<p<1$.

Analogiškai

$$1-\frac{p\left(1-F_1\left(xp^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)}{1-(1-p)\left(1-F_1\left(xp^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)}-\frac{p\left(1-F_2\left(yp^{\frac{1}{\beta}}\right)\right)}{1-(1-p)\left(1-F_2\left(yp^{\frac{1}{\beta}}\right)\right)}+\frac{p\left(P(X_1\geq xp^{\frac{1}{\alpha}},Y_1\geq yp^{\frac{1}{\beta}})\right)}{1-(1-p)\left(P(X_1\geq xp^{\frac{1}{\alpha}},Y_1\geq yp^{\frac{1}{\beta}})\right)}=$$

$$=1-\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+y^{\beta}}+\frac{1}{1+y^{\beta}+x^{\alpha}+px^{\alpha}y^{\beta}}\neq F_1(x)F_2(x)$$

Taigi, geometrinio maks (min) stabilumo nėra.

Imkime priklausomų koordinačių skirstinio funkcija

$$F(x,y)=\frac{1}{1+y^{-\beta}+x^{-\alpha}},\quad x>0,\ y>0 \tag{11}$$

Ją galima gauti iš skirstinio funkcijos

$$G(x,y)=\frac{x^{\alpha}y^{\beta}}{p+y^{\beta}+x^{\alpha}+y^{\beta}x^{\alpha}},\ x>0,\ y>0$$

esančios (9) sąryšyje, imdami $p=p_n=\frac{1}{n}$, kai $n\to\infty$ (tai būdinga perkėlimo teoremai).

Nesunku įsitikinti, kad marginaliosios skirstinio funkcijos

$$F_1(x)=\frac{1}{1+x^{-\alpha}}\quad \text{ir}\quad F_2(y)=\frac{1}{1+y^{-\beta}}$$

Yra geometriškai maks (min) stabilios. Jos sutampa su (8) skirstinio funkcijomis.

2 Teiginys. Iš $F(x,y)$ geometrinio maksstabilumo bendru atveju neišplaukia geometrinis minstabilumas.

Teiginio įrodymas. Imkime skirstinio funkcijų $F(x,y)$ apibrėžtų (10) sąryšiu. Kadangi

$$\frac{pF\left(xp^{-\frac{1}{\alpha}}, yp^{-\frac{1}{\beta}}\right)}{1-(1-p)F\left(xp^{-\frac{1}{\alpha}}, yp^{-\frac{1}{\beta}}\right)} = \frac{1}{1+x^{-\alpha}+y^{-\beta}}$$

tai $F(x,y)$ yra geometriškai maksstabili. Tačiau geometrinio minstabilumo kriterijus (5) nėra išpildytas.

Pateiksime perkėlimo teoremos atsitiktinių dydžiu atveju [3] analogą atsitiktiniams vektoriams.

Teorema. Tarkime, kad atsitiktinis dydis N_n yra geometrinis su parametru $p_n = \frac{1}{n}$. Jeigu

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - F\left(xb_{n1} + a_{n1}, yb_{n2} + a_{n2}\right)\right) = u(x,y),$$

tai

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_{N_n}^{(1)} - a_{n1}}{b_{np1}} \le x, \frac{Z_{N_n}^{(2)} - a_{n2}}{b_{n2}} \le y\right) = \Psi(x,y);$$

čia skirstinio funkcija

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{1+u(x,y)}$$

Įrodymas analogiškas kaip ir vienmačiam atvejui [3], panaudojant lygybę:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} \le x\right) = 1 + e^{-x}$$

3 Teiginys. Skirstinio funkcija $\Psi(x,y)$ yra geometriškai maksstabili, kai $n \cdot u\left(xb_{n1} + a_{n1}, yb_{n2} + a_{n2}\right) = u(x,y)$

Teiginio įrodymas. Įrodymas išplaukia iš sąryšių:

$$p_n \frac{\Psi\left(xb_{n1} + a_{n1}, yb_{n2} + a_{n2}\right)}{1-(1-p_n)\Psi\left(xb_{n1} + a_{n1}, yb_{n2} + a_{n2}\right)} = \frac{p_n}{p_n + u\left(xb_{n1} + a_{n1}, yb_{n2} + a_{n2}\right)} =$$
$$= \frac{1}{1 + n \cdot u\left(xb_{n1} + a_{n1}, yb_{n2} + a_{n2}\right)}$$

Pastebėsime, kad funkcijos

Irma Ivanovienė, FMMM-7

$u(x,y) = x^{-\alpha} + y^{-\beta}$, $u(x,y) = e^{-x} + e^{-y}$, $u(x,y) = (-x)^{\alpha} + (-y)^{\beta}$, $u(x,y) = e^{-x} + y^{-\beta}$ ir t. t.

tenkina 3 teiginio sąlygas.

Analogiškus uždavinius galime spręsti minimumų schemoje.

Literatūra

1. A. Jokimaitis, Daugiamačių atsitiktinių dydžių, ekstremaliųjų reikšmių asimptotika, *Disertacija mokslų daktaro laipsniui,* Vilnius, 1998.

2. J. Galambos, *The Asymptotic Theory of Extremes Order Statistics*, Wiley, New York, 1978.

3. B. V. Gnedenko, D. B. Gnedenko. O raspredeleniyakh Laplasa i logicheskom kak predel'nykh v teorii veroyatnostei, Serdika, 8, pp. 299–234, 1984.

4. S. Satheesh and Nair N. Unnikrishnan, On the stability of geometric extremes, *Journal of the Indian Statistical Association*, Vol. 42, 2004. p. 99-109.

Summary

Geometric max stability of random vectors

A. Aksomaitis and I. Ivanovienė

Geometric max (min) stability of random variables is investigated enough. In this article, geometric stability concept is extended for the vectors. We also search connections between the geometric max stability and min max stability of vectors.

Keywords: min stable, max stable, extremes of vectors, transfer theorem

4. PRIEDAS. PROGRAMOS TEKSTAS.

```
function varargout = programa(varargin)
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                   'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                   'gui_OpeningFcn', @programa_OpeningFcn, ...
                   'gui_OutputFcn',  @programa_OutputFcn, ...
                   'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                   'gui_Callback',   []);
if nargin & isstr(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end
if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% --- Executes just before programa is made visible.
function programa_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
%---------------------pradines reiksmes---------------------------------------------
function varargout = programa_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;
%--------------------ivedama x reiksme---------------------------------------------
function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
x_string = str2double(get(hObject,'string')); // nuskaitoma reikšmė
if (isnan(x_string) | (x_string < 0)| (x_string >=1100)) //tirinama sąlyga
    set(hObject,'String',1);
    errordlg('Klaidinga x reiksme','klaida'); // klaidos dialogas
else
    x = x_string; // jei neklaidinga tuomet įvedama reikšmė
    handles.x = x;
    guidata(hObject,handles);
end
```

```
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% Baltas edit langas
if ispc
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
else
    set(hObject,'BackgroundColor',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
end
%--------------------ivedama y reiksme------------------------------------------
function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% perkoduoja eilute
y_string = str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(y_string) | (y_string < 0) | (y_string >=1100))
    set(hObject,'String',1);
    errordlg('Klaidinga y reiksme','klaida');
else
    y = y_string;
    handles.y = y;
    guidata(hObject,handles);
end

function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
else
    set(hObject,'BackgroundColor',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
end
%--------------------ivedama n reiksme------------------------------------------
function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)
n_string = str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(n_string) |  (n_string < 90) | (n_string >= 1000))
    set(hObject,'String',100);
    errordlg('Tikrinti ar  n parinktas is intervalo [100;1000]', 'Klaida');
else
    n = n_string;
    handles.n = n;
    guidata(hObject,handles);
end
function edit6_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc
```

```
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
else
    set(hObject,'BackgroundColor',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
end

function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
else
    set(hObject,'BackgroundColor',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
end
%--------------------ivedama beta reiksme--------------------------------------------
function edit6_Callback(hObject, eventdata, handles)
b_string = str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(b_string) | (b_string <0)|(b_string >=8))
    set(hObject,'String',1);
    errordlg('Klaidinga beta reiksme','Klaida');
else
    b = b_string;
    handles.b = b;
    guidata(hObject,handles);
end
%--------------------ivedama alfa  reiksme--------------------------------------------
function edit5_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
else
    set(hObject,'BackgroundColor',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));
end

function edit5_Callback(hObject, eventdata, handles)
a_string = str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(a_string) | (a_string <0)|(a_string >=8))
    set(hObject,'String',1);
    errordlg('Klaidinga alfa reiksme','Klaida');
else
    a = a_string;
    handles.a = a;
    guidata(hObject,handles);
```

```
end
%--------------------Mygtukas skaiciuoti-----------------------------------------
function Skaiciuoti_Callback(hObject, eventdata, handles)
 a=handles.a;
 b=handles.b;
n=handles.n;
x=handles.x;
y=handles.y;
 n=zeros(handles.n);
n(1)=1;
  for i = 2:length(n); //šiame cikle paskaičiuojama pokytis, n ivedama
   f = 1/(1+(x^(-a))+(y^(-b))+((x^(-a))*(y^(-b))));
   H(i) = 1/(1+(x^(-a))+(y^(-b))+((x^(-a))*(y^(-b))*(1-(1/(n(i-1))))));
   delta_n(i) = (H(i)-f);
   n(i) = n(i-1) + 1;
   end
  plot(n(1:length(n)),delta_n(1:length(n)),'Linewidth',3); //grafiko braižymas
 hold on
plot(n(1:length(n)),delta_n(1:length(n)),'Linewidth',3);
  hold off
 set(gca, 'XTick', 0:50:1000)
xlabel('n');
  ylabel('skirtumas');
  c = real(delta_n(length(n)));
set(handles.text1,'String',c) // išveda pokyčio reikšmę
%--------------------Mygtukas pradeti--------------------------------------------
function Pradeti_Callback(hObject, eventdata, handles)
set(handles.edit1,'Visible','on');
set(handles.edit2,'Visible','on');
set(handles.edit3,'Visible','on');
set(handles.edit5,'Visible','on');
set(handles.edit6,'Visible','on');
set(handles.Skaiciuoti,'Visible','on');
set(handles.text1,'Visible','on');
set(handles.axes1,'Visible','on');
%--------------------Mygtukas valyti---------------------------------------------
function Valyti_Callback(hObject, eventdata, handles)
cla(handles.axes1,'reset')
set(handles.Pradeti,'Visible','on');
cla(handles.text1);
set(handles.edit1,'Visible','off');
```

```
set(handles.edit2,'Visible','off');
set(handles.edit3,'Visible','off');
set(handles.edit5,'Visible','off');
set(handles.edit6,'Visible','off');
%-------------------Mygtukas skaiciuoti------------------------------------------
function Logistinis_Callback(hObject, eventdata, handles)
m=handles.n;
x=handles.x;
y=handles.y;
m=zeros(handles.n);
m(1)=1;
  for i = 2:length(m);
  f = 1/(1+(exp(-x))+(exp(-y))+(exp(-x)*exp(-y)));
  H(i) = 1/(1+exp(-x)+exp(-y)+(exp(-x)*exp(-y)*(1-(1/(m(i-1))))));
  delta_m(i) = (H(i)-f);
  m(i) = m(i-1) + 1;
  end
%   axes(handles.axes1);
  plot(m(1:length(m)),delta_m(1:length(m)),'Linewidth',3);
  hold on
  plot(m(1:length(m)),delta_m(1:length(m)),'Linewidth',3);
  hold off
    set(gca, 'YTick', 0:0.1:1);
 set(gca, 'XTick', 0:50:1000)
 xlabel('n');
  ylabel('skirtumas');
  d = real(delta_m(length(m)));
set(handles.text1,'String',d)
%-------------------Mygtukas valyti------------------------------------------
function Valyti1_Callback(hObject, eventdata, handles)
cla(handles.axes1,'reset')
set(handles.Pradeti,'Visible','on');
cla(handles.text1);
set(handles.edit1,'Visible','off');
set(handles.edit2,'Visible','off');
set(handles.edit3,'Visible','off');
%-------------------Mygtukas ivesti------------------------------------------
function pushbutton8_Callback(hObject, eventdata, handles)
set(handles.edit5,'Visible','of');
set(handles.edit6,'Visible','of');
 set(handles.edit1,'Visible','on');
```

```
set(handles.edit2,'Visible','on');
set(handles.edit3,'Visible','on');
set(handles.Logistinis,'Visible','on');
set(handles.text1,'Visible','on');
set(handles.axes1,'Visible','on');
%-------------------Mygtukas baigti-------------------------------------------
function Baigti_Callback(hObject, eventdata, handles)
delete(handles.figure1);
```