KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
INFORMATIKOS FAKULTETAS
PROGRAMŲ INŽINERIJOS KATEDRA

Jonas Dimša

Optimalaus investavimo modelio programinis realizavimas, tyrimas ir taikymas

Magistro darbas

Darbo vadovas
prof. habil. dr. J. Mockus

Kaunas, 2009

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
INFORMATIKOS FAKULTETAS
PROGRAMŲ INŽINERIJOS KATEDRA

Jonas Dimša

Optimalaus investavimo modelio programinis realizavimas, tyrimas ir taikymas

Magistro darbas

Recenzentas
doc. Alfonsas Misevičius
2009-05

Vadovas
prof. habil. dr. J. Mockus
2009-05

Atliko
IFM- 3/2 gr. stud.
Jonas Dimša
2009-05-20

Kaunas, 2009

Turinys

Summary

There was introduced the portfolio optimization model in Master thesis. This model is based on investor’s utility function, which determines the investor's attitude to the profit-to-risk relation. The paper introduces the principles of the model and provides the technical documentation of the “Optimal Portfolio” software as well as an analysis of how different model parameters affect the final results of the portfolio.

There were briefly discussed alternative models of portfolio optimization. Many of them where developed from Markowitz model, this is why this model is discussed in more depth. Finally, there was made an analysis of how these two models operate in real market.

1. Įvadas

1.1. Dokumento paskirtis

Pasaulyje yra sukurta daugybė investicinio portfelio sudarymo strategijų. Kiekvienas investicinis modelis remiasi tam tikromis prielaidomis ir kintamųjų aibe, kurie įtakoja portfelio rezultatus, tačiau realybėje tų kintamųjų, yra per daug, kad būtų galima vienareikšmiškai apibrėžti jų įtaką portfeliui. Dėl šios priežasties, investuotojas portfelio optimizavimo sistemas turėtų naudoti tik kaip pagalbinę priemonę, sudarinėjant investicinį portfelį, o ne aklai jomis pasikliauti.

Daugumoje investicinio portfelio formavimo modelių pagrindine investicijos rizika įvardijama kaip investicijos pajamingumo dispersija. Kuo istorinis investicijos pajamingumas nepastovesnis laike, tuo jis laikomas rizikingesniu.

Šio darbo tikslas yra pateikti alternatyvų modelį, kuriame rizika įvertinama per investuotojo naudingumo funkciją. Ši funkcija parodo, individualų investuotojo požiūrį į pelno ir rizikos santykį. Modelyje daroma prielaida, kad pelno padidėjimas dvigubai, nebūtinai yra du kartus geriau nei nepadidėjęs pelnas, o viso investicinio portfelio netekimas nebūtinai yra du kartus blogiau nei netekimas pusės portfelio. Naudingumo funkcija būtent ir įvertina šio kapitalo pasikeitimo naudingumą investuotojui.

Dokumente taip pat supažindinama su programine įranga, realizuojančia šį investavimo modelį bei pateikiama šio modelio analizė ir palyginimas su dispersija paremtu investicinio portfelio modeliu.

1.2. Santrauka

Magistriniame darbe nagrinėjamas investicinio portfelio optimizavimas panaudojant investuotojo naudingumo funkciją. Ši funkcija parodo investuotojo požiūrį į investicijų grąžos ir rizikos santykį. Darbe supažindinta su modelio veikimo principu bei pateikiama programinės įrangos, realizuojančios šį modelį, techninė dokumentacija. Taip pat atlikta analizė, kaip skirtingi modelio parametrai įtakoja galutinius investicinio portfelio rezultatus.

Trumpai aptarti alternatyvūs portfelio optimizavimo modeliai iš kurių plačiau pristatomas Markowitz modelis. Šio modelio pagrindu buvo kuriama daugelis kitų modelių, kuriuose investicijų į vertybinius popierius rizika apibrėžiama kaip investicijų grąžos dispersija. Galiausiai, buvo atliktas tyrimas, kaip šie du modeliai veiktų realioje rinkoje ir palyginti gauti rezultatai.

2. Analitinė dalis

2.1. Investicinių portfelių sudarymo modeliai

Investavimo mokslas pradėjo naują etapą H. Markowitz pasiūlius efektyvaus portfelio sąvoką, kurią charakterizuoja ne tik pelningumo, bet ir rizikos valdymo aspketai. Jo nuomone, efektyvus portfelis pasižymi mažiausia rizika, esant tam tikram pelningumui, arba didžiausiu pelningumu, esant tam tikram rizikos lygiui (Cibulskienė, 2007: 52). Markowitz pirmasis pasiūlė rizikos ir pelningumo sąvokų teorinį tikimybinį formalizavimą. Markowitz teorijos esmė yra ta, kad sudarant optimalų portfelį būtina atsižvelgti į jį sudarančių akcijų grąžų kintamumą ir tarpusavio sąveiką, o šiems faktoriams kiekybiškai vertinti galima atitinkamai naudoti dispersijas ir kovariacijas. H. Markowitz pirmasis pasiūlė matematinį optimalaus vertybinių popierių portfelio formavimo modelį. Optimalaus portfelio parinkimo problemą Markowitz suformulavo kaip matematinį optimizavimo uždavinį portfelių dispersijai minimizuoti.

H. Markowitz sukurta „Portfelio teorija“ paskatino kitus mokslininkus prisidėti prie modernios finansų rinkos teorijos kūrimo. Jo pasekėjai J. Tobin, W. Sharpe, S. Ross, G. Fama ir K. French ir kiti plačiai nagrinėjo portfelio formavimo kriterijus, optimalaus portfelio sudarymo problemas, vertybinių popierių atrankos į portfelį ir jų įkainojimo ypatumus bei portfelio vertę lemiančius veiksnius, ieškant būdų jiems kiekybiškai išreikšti. Taigi, vertybinių popierių įkainojimo modelių raida visada buvo ir yra įdomi investicijų mokslo sfera, kuria domisi daugelis pasaulio mokslininkų, vis dar bandydami patvirtinti ar paneigti kai kurias teorijas, kurių pagrindu kyla mokslinė diskusija. Įvairių tyrimų, studijų metu siekiama nustatyti, kaip tiriamos teorijos paaiškina ne tik įprastus finansų rinkoms reiškinius, bet ir finansų rinkų anomalijas.

Pats paprasčiausias aktyvų modelis yra atsitiktinio klajojimo (angl. random walk) modelis, kuris pagrįstas efektyvios rinkos hipoteze ir teigia, kad ,,šiandien bus taip kaip vakar“.

Kitas standartinis plačiai naudojamas modelis reikalaujamam finansinio instrumento pelningumui ir rizikai matuoti yra ilgalaikio turto įkainojimo modelis (angl. Capital Asset Pricing Model, CAPM). Originalųjį portfelio teorijos tęsinį pasiūlė J. Tobin, kuris į portfelio analizę įtraukė nerizikingą turtą, tokį kaip valstybės iždo vertybinius popierius. Šis modelis susieja reikalaujamą finansinio instrumento pelningumą su jo rizika.

W. F. Sharp pasiūlė statistinį rinkos modelį, kuris atspindi bendrąją reakciją į rinkos pokyčius. Pagal šį modelį pajamos už vertybinius popierius priklauso tik nuo rinkos portfelio grąžos. Visų vertybinių popierių kainos daugiau ar mažiau kinta kartu su rinkos portfelio grąža.

Kaip alternatyva CAPM modeliui buvo pasiūlyta arbitražo įkainojimo teorija (angl. arbitrage pricing theory, APT), jos pradininkas – S.A.Ross. Pagal APT, investuotojai naudojasi arbitražu: jei du vienodos rizikos portfeliai turi skirtingą pelningumą, investuotojai pirks portfelius, turinčius didesnį pelningumą, ir kito portfelio pelningumas automatiškai padidės, prisitaikydamas. Vertybinio popieriaus pelningumas gali būti išskaidytas į dvi dalis – numatytą ir nenumatytą. Pastarasis dar gali būti suskaidytas į kylantį iš firmos ir kylantį iš rinkos pelningumą (Nedzveckas, J.; Rasimavičius, G , 2000: 23-28)

Šie nenumatyti pelningumai labai panašūs į CAPM modelio skiriamą firmos ir rinkos riziką. Tačiau matuojant rinkos riziką požiūriai išsiskiria. CAPM teigia, kad rinkos portfelyje rinkos rizika jau yra įvertinta. O APT modelis mano, kad iš įvairių ekonomikos veiksnių kyla įvairios rinkos rizikos. Nenumatytas rinkos pelningumas gali būti išskaidytas į ekonominius veiksnius (infliacija, trumpalaikių palūkanų norma, ilgalaikių palūkanų norma, nedarbo lygis) (Radziukynienė).

Visi modeliai remiasi tam tikromis pradinėmis prielaidomis ir kintamųjų aibe, įtakojančia portfelio rezultatus, tačiau realybėje tų kintamųjų, yra per daug, kad būtų galima vienareikšmiškai apibrėžti jų įtaką portfeliui. Dėl šios priežasties, sukurtų portfelių modelių modifikacijos ir naujų modelių paieška yra neišvengiama ir ateityje.

Daugelis modelių remiasi Markowitz modelio pagrindu, kur pagrindinė portfelio rizika apibrėžiama kaip investicijų grąžos kintamumas, kur kiekybiškai išreiškiamas portfelio dispersija. Dėl šios priežasties Markowitz modelis vėliau bus aptartas detaliau.

2.2. **Naudingumo funkcija**

Anksčiau matematikai, nagrinėdami individo elgesį, manė, kad individas siekia maksimizuoti tikėtiną investicijos grąžą. Vėliau buvo nustatyta, kad tokia teorija gali būti labai neteisinga. Remiantis ja, investuotojas visada turėtų investuoti visą kapitalą į tą objektą, kurio tikėtina grąža yra didžiausia. Jei keli vertybiniai popieriai turėtų tokią pačią tikėtiną investicijų grąža, investuotojui nebūtų skirtumo, į kurį portfelį, sudarytą iš šių vertybinių popierių, investuoti. Tačiau realybėje situacija yra kitokia. Skirtingi investuotojai, investuodami savo lėšas, siekia skirtingų tikslų ir sutinka prisiimti skirtingą riziką tam tikslui pasiekti. Pavyzdžiui, vieni siekia tik apsaugoti pinigus nuo infliacijos, dėl to investuoja į banko indėlius su maža rizika, kiti, savo ruožtu, siekdami didesnės grąžos, investuoja į akcijas, tačiau taip pat ir prisiima didesnę riziką patirti nuostolius. Dėl šios priežasties tikėtinos portfelio grąžos maksimizavimo modelis nėra priimtinas kiekvienam investuotojui. Apibendrinant galima išskirti dvi pagrindines to priežastis:

- Praradimo dydis yra toks didelis, kad nėra toleruojamas net ir esant mažai praradimo tikimybei (pvz. draudimas)
- Laimėjimo dydis yra toks didelis, kad yra siektinas net ir esant mažai laimėjimo tikimybei (pvz. loterija)

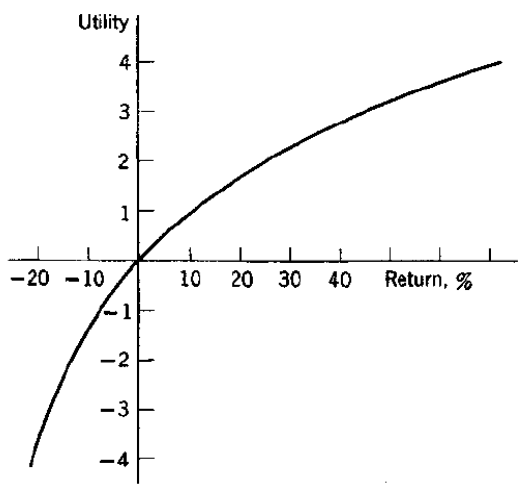
Įvertinti investuotojo požiūrį į galimus laimėjimus ar pralaimėjimus galima per naudingumo funkciją. Ši funkcija nustato investuotojo prioritetus arba kitaip tariant, parodo, ką sprendimo priėmėjas pasirenka prie tam tikrų sąlygų (Jose Luis Bermundez, 2009: 46).

Maksimizuojant tikėtiną portfelio naudingumą galima išspręsti anksčiau minėtas problemas, susijusias su skirtingais investuotojo tikslais ir skirtinga tolerancija rizikai. Manoma, kad 20% investicijų grąža nėra būtinai du kartus geresnė nei 10% grąža arba 20% nuostolis nėra būtinai du kartus blogiau, nei 10% nuostolis. Galbūt yra tokia kreivė, kaip 1 paveikslėlyje, kuri susieja naudingumą su įvairiais grąžos lygiais. Remiantis šia kreive, nulio naudingumas yra nulis, 10% pelno naudingumas yra 1, o 10% nuostolio – -1.3. Manoma, kad vietoje to, kad maksimizuoti didžiausią tikėtiną grąžą, racionalus žmogus siekia maksimizuoti tikėtiną grąžos naudingumą. Jei investuojant tiek 10% pelno tiek 10% nuostolio tikimybės yra lygios 50%, tai tokios investicijos tikėtinas naudingumas būtų lygus

$$U = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1.3) = -0.15 .$$

Tai yra mažiau nei garantuota nulinė grąža. Individui, kuris maksimizuoja 1 paveikslėlyje pavaizduoto naudingumo tikėtiną reikšmę, yra geriau neinvestuoti pinigų ir taip turėti garantuotą nulinę grąžą, nei investuoti, su 50% – 50% tikimybe išlošti arba netekti 10% investuoto kapitalo.

1 paveikslėlyje pavaizduota vertikali ašis atspindi kokį rizikos laipsnį investuotojas prisiimtų, tikėdamasis gauti atitinkamą grąžą, pavaizduotą horizontalioje ašyje.



1 pav. Naudingumo kreivė

2.2.1. **Naudingumo funkcijos nustatymas**

Naudingumas yra matas, kuris parodo kapitalo vertę sprendimo priėmėjui. Jis taip pat atspindi investuotojo požiūrį į riziką. Naudingumo funkcijos $u(y)$ gali būti skirtingos skirtingiems asmenims ir organizacijoms. Individuali naudingumo funkcija yra nustatoma remiantis loterija:

$$L(A, B, p) = \{pA + (1-p)B\}$$

Čia p yra tikimybė laimėti geriausia atvejį A. $(1-p)$ yra tikimybė, kad įvyks blogiausias atvejis B. Pažymėkime raide C loterijos bilieto kainą. Galimi du sprendimo būdai:

- Pasilikti loterijos bilietui skirtus pinigus
- Pirkti loterijos bilietą ir rizikuoti prarasti pinigus tikintis išlošti vertingesnį turtą A su tikimybe p

Pažymėkime $p(C)$ abejonės tikimybę, kai sunku apsispręsti, kurį sprendimą priimti. Ši tikimybė apibrėžiama tokiomis sąlygomis:

$$L(A, B, C, p(C)) = [C \approx \{p(C)A + (1-p(C))B\}]$$

Šioje išraiškoje simbolis $\approx$ žymi „abejonę“. Jei įvykių naudingumai $u(A) = 1$, o $u(B) = 0$, tai bilieto (C) naudingumas yra lygus abejonės tikimybei $u(C) = p(C)$ (Fishburn teorema).

Investicinio portfelio atveju, laikykime, kad įvykis C yra laikyti visą investavimui skirtą kapitalą, $y = 1$, saugioje vietoje, pavyzdžiui grynaisiais pinigais, kur nėra nei rizikos nei pelno. Įvykiu A laikykime kapitalo padvigubinimą $y = 2$, o įvykiu B – viso kapitalo praradimą $y = 0$. $p(1)$ yra abejonės tikimybė, kai sunku priimti sprendimą ar verta investuoti tokiomis sąlygomis. Kapitalo naudingumo taškai apibrėžiami panaudojant funkciją

$$u(y) = u(y_i) + p(y_i)(u(y_{i+1}) - u(y_i)), \;\; y_i \le y \le y_{i+1}, \;\; i = 0,1,...,n$$ kur n – naudingumo taškų kiekis.

Tada, $u(1) = u(0) + p(1)(u(2) - u(0))$. Jei $u(0) = 0$, o $u(2) = 1$, tai investicinio kapitalo naudingumas yra $u(1) = p(1)$. Taigi turime trijų kapitalo naudingumus trijuose taškuose: $y = 0, y = 1$ ir $y = 2$. Kitus naudingumo funkcijos $u(y)$ taškus apibrėžiame analogiškai. Pavyzdžiui kapitalų $y = 0.5$ ir $y = 1.5$ naudingumus apibrėžia abejonių tikimybės $p(0.5)$ ir $p(1.5)$. Šios tikimybės gaunamos panaudojant anksčiau minėtą teoremą:

$$L(1.0, 0.0, 0.5, p(0.5)) = [(y = 0.5) \approx \{p(0.5)(y = 1) + (1 - p(0.5))(y = 0)\}]$$

ir

$$L(2.0, 1.0, 1.5, p(1.5)) = [(y = 1.0) \approx \{p(1.5)(y = 2.0) + (1 - p(1.5))(y = 1)\}]$$

Įvertinus aukščiau aprašytas išraiškas turime penkis naudingumo taškus: $u(0) = 0, u(0.5) = p(0.5), u(1) = p(1), u(1.5) = u(1) + p(1.5)(u(2) - u(1)), u(2) = 1$.

Praktikoje abejonių tikimybės, o kartu ir kapitalo naudingumas nustatomos įvairiais testais. Pavyzdžiui, sprendimo priėmėjui yra uždavinėjami klausimai ar jis sutinka investuoti savo kapitalą y_1 su tikimybe p padidinti kapitalą iki y_2 ir tikimybe $(1-p)$, kad investuotas kapitalas sumažės iki kapitalo y_0. Kai laimėjimo tikimybė p yra arti nulio, investuotojas labiau vertina savo kapitalo y_1 saugumą ir neinvestuoja. Kai ta tikimybė artima vienetui, investuotojas yra linkęs rizikuoti savo kapitalu, kad gautų kapitalą y_2. Taigi kai tikimybė p yra didinama nuo 0 iki 1, kažkuriame taške investuotojas pakeičia savo sprendimą iš „neinvestuoti“ į „investuoti“. Tas taškas p, kuriame investuotojas neapsisprendžia ar verta investuoti ir yra „abejonės“ tikimybė, kuri parodo kapitalo y_1 naudingumą.

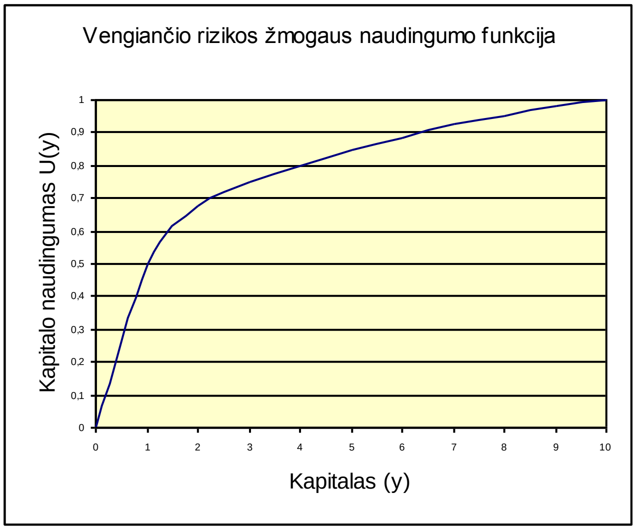
Kartais atlikinėti psichologinius testus (investuoti ar neinvestuoti duotomis sąlygomis), kad būtų nustatyta naudingumo funkcija, nėra patogu. Tokiu atveju galima naudoti vieną iš keturių tipinių naudingumo funkcijų, kurios apibūdina vengiančio rizikuoti, mėgstančio rizikuoti, rizikai neutralaus ir vidutinio žmogaus naudingumo funkcijas (Mockus, 2000: 247-248).

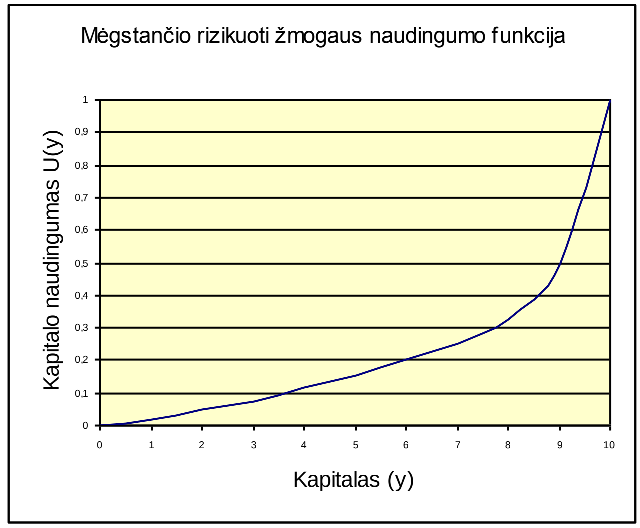
2.2.2. **Skirtingi naudingumo funkcijų tipai**

Investuotojų būna labai įvairių. Jie siekia skirtingų tikslų ir skirtingai vertina riziką. Vertinant investuotojo toleranciją rizikai galima išskirti keturis pagrindinius investuotojo tipus: vengiančio rizikuoti, nebijančio rizikuoti, rizikai neutralaus ir dažniausiai pasitaikančio (vidutinio) investuotojo tipai.

Vengiantis rizikos žmogus visada investuoja sumą tik tokiomis sąlygomis, kai tikėtina grąža, apskaičiuojama pagal tikimybę, yra didesnė nei investuojama suma. Tokio tipo naudingumo funkcija pavaizduota 2 paveikslėlyje. Grafiko horizontali ašis vaizduoja kapitalą, o vertikali ašis – kapitalo naudingumą. Kadangi maksimalus kapitalo naudingumas prilygintas 1, o minimalus – 0, tai pagal Fishburno teoremą, kapitalo naudingumas yra lygus „abejonės“ tikimybei. Ši tikimybė (vaizduojama vertikalioje ašyje) parodo, kokiai tikimybei esant, investuotojas investuoja kapitalą y, kad išloštų maksimalų laimėjimą su galimybe patirti maksimalų pralaimėjimą. Grafike maksimalus laimėjimas yra dešiniausias horizontalioje ašyje, o maksimalus pralaimėjimas – kairiausioje. Kai investuotojas vengia rizikos, jo naudingumo funkcija yra išgaubta. Labiau išgaubta funkcija reiškia, kad investuotojas yra mažiau linkęs rizikuoti.

Nebijantis rizikuoti žmogus, priešingai nei bijantis, investuoja net tada, kai tikėtina grąža, yra mažesnė, nei investuojama. Dažniausiai taip elgiamasi dėl to, kad yra galimybė išlošti didelę sumą, nors išlošimo tikimybė yra labai maža. Šio tipo naudingumo funkcija pavaizduota 3 paveikslėlyje.



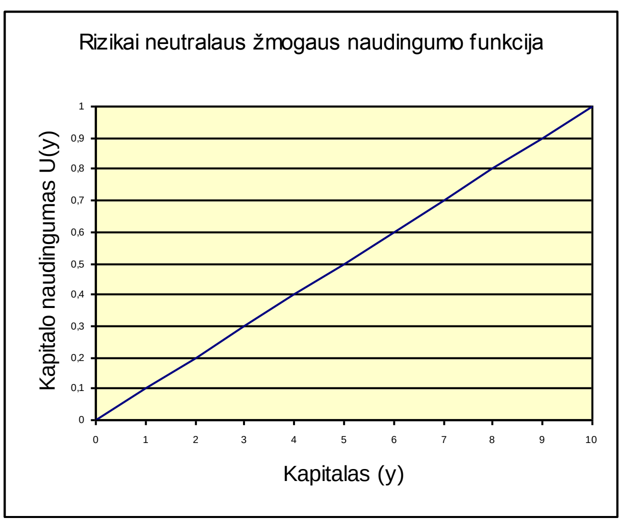


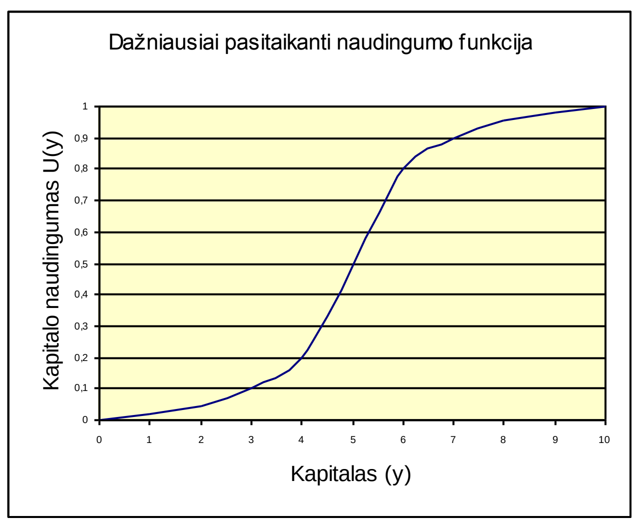
2 pav. „Vengiantis rizikos“ tipas

3 pav. „Mėgstantis riziką“ tipas

Rizikai neutralus žmogus visada investuoja atsižvelgdamas į tikėtiną investicijų grąžą. Jei, remiantis tikimybėmis, tikėtino kapitalo grąža yra panaši investuotam kapitalui, investuotojas ryžtasi investuoti. Tokio tipo naudingumo funkcija pavaizduota 4 paveikslėlyje.

Dažniausiai pasitaikantis investavimo tipas turi visų anksčiau minėtų tipų savybių. Vidutinis žmogus elgiasi rizikingai, kai investuojama labai maža jo kapitalo dalis, pavyzdžiui, perka loterijos bilietą, nors tikimybė išlošti yra labai maža. Pasiekus tam tikrą investuojamo kapitalo lygį, pradedama skaičiuoti, kad išlošimo tikimybė nebūtų mažesnė nei pralošimo. Tas pats žmogus, kai investuojama labai didelė jo kapitalo dalis, elgiasi labai atsargiai. Šio tipo naudingumo funkcija pavaizduota 5 paveikslėlyje.





4 pav. „Rizikai neutralus“ tipas

5 pav. „Vidutinės rizikos“ tipas

2.3. **Portfelio modelis, paremtas naudingumo funkcija**

Investicinio portfelio uždavinys priklauso nuo investavimo įrankių, kurie bus naudojami portfelyje. Taip pat, sudarinėjant bet kokį investicinį portfelį, svarbu tinkamai apsibrėžti naudingumo funkciją, kuri nustato ryšį tarp portfelio grąžos ir rizikos.

Portfelio uždavinys yra maksimizuoti vidutinį portfelio grąžos naudingumą. Tai yra gaunama optimaliai paskirstant kapitalą tarp skirtingų investicinių objektų (Mockus, 1997).

Į objektą i investuotą kapitalo dalį pažymėjus x_i, objekto grąžą (palūkanas) – α_i, o $c_i = 1 + \alpha_i$, tai kapitalas, gautas investavus turimų pinigų dalį x_i į objektą i, apibrėžiamas funkcija $y_i = c_i x_i$. Pažymėkime investicijos patikimumą $p_i = 1 - q_i$, kur q_i – nemokumo (bankroto) tikimybė, $u(y)$ – kapitalo y naudingumas, $U(x)$ – tikėtina (vidutinę) naudingumo funkcija, kuri priklauso nuo kapitalo pasiskirstymo $x = (x_i, ..., x_n)$, kur $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ir $x_i \geq 0$. Tada jei tikėtina naudingumo funkcija yra tolydi, ją galima išreikšti šia formule:

$$U(x) = \int_0^{\infty} u(y) p(y) dy$$

$p(y)$ – kapitalo y tikimybinis tankis (probability density). Jei kapitalas y diskretus, $y = y^k, k = 1,..,M$, tai tikėtina naudingumo funkcija išreikiama taip:

$$U(x) = \sum_{k=1}^{M} u(y^k) p(y^k)$$

M – kapitalo y^k diskrečiųjų reikšmių kiekis. $p_x(y^k)$ yra tikimybė, kad bus gautas kapitalas y^k, jei kapitalo pasiskirstymas yra x. Formuojant optimalų portfelį, ieškomas toks investuojamo kapitalo pasiskirstymas x, kurio grąža suteikia didžiausią tikėtiną naudą:

$$\max_x U(x), \text{ kur } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0$$

2.3.1. **Investavimo resursai**

Nagrinėjamame modelyje galimi keturi instrumentai:

- Banko indėlis
- Akcijos
- Draudimas
- Grynieji pinigai

2.3.2. **Tikėtinas portfelio naudingumas**

Formuojant investicinį portfelį, ieškoma tokio kapitalo paskirstymo į įvairius investicinius objektus, kuris duoda maksimalų tikėtiną kapitalo grąžos naudingumą. Skirtingiems investavimo instrumentams, tikėtinas naudingumas įvertinama skirtingai.

2.3.2.1. Investavimas į banko indėlius

Diskretaus kapitalas $y^j,\ j = 0,1,2,..(2^n - 1)$, kur n – bankų kiekis, apibrėžia visas įmanomas portfelio grąžas (pvz.: y^0 žymi galimą portfelio kapitalą, jei bankrutuotų visi bankai, y^1 – jei nebankrutuotų tik pirmasis bankas, y^2 – jei nebankrutuotų tik antras bankas ir t.t., kol galiausiai $y^{2^n - 1}$ žymi galimą portfelio grąžą, kai nebankrutuoja nei vienas bankas). Kartu su kiekviena tokio portfelio galimos grąžos tikimybėmis $p(y^j)$ jos sudaro portfelio skirstinį. Šios tikimybės apibrėžiamos konkrečiomis išraiškomis:

$$p(y^0) = \prod_i q_i,$$

$$p(y^1) = p_1 \prod_{i \neq 1} q_i,$$

$$p(y^2) = p_2 \prod_{i \neq 2} q_i,$$

....

$$p(y^n) = p_n \prod_{i \neq n} q_i,$$

$$p(y^{n+1}) = p_1 p_2 \prod_{i \neq n, i \neq 2} q_i,$$

$$p(y^{n+2}) = p_1 p_3 \prod_{i \neq n, i \neq 3} q_i,$$

....

$$p(y^{2^n - 1}) = \prod_i p_i,$$

Čia $y^0 = 0,\ y^1 = \alpha_1 x_1,\ y_2 = \alpha_2 x_2,\ ...,\ y^n = \alpha_n x_n,$

$$y^{n+1} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,\ y^{n+2} = \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3,\ ...,\ y^{2^n - 1} = \sum_i \alpha_i x_i\ .$$

Šias reikšmes reikia įstatyti į formulę $U(x) = \sum_{k=1}^{M} u(y^k) p(y^k)$, kur M – skirtingų kapitalo y reikšmių skaičius (Mockus, 2000: 247-248)..

2.3.2.2. Investavimas į akcijas

Investuojant į bankų indėlius, palūkanos α_i būna nustatytos sutartyje. Tiksliai nėra žinoma tik bankų patikimumai $p_i, i = 1,...,n$. Investuojant į akcijas , be patikimumų $p_i,\ i = n + j,\ j = 1,...m$, (kur n – bankų kiekis, o m – akcijų kiekis), nėra žinoma ir akcijų ateities kainos. Koeficientu α_i žymimas santykis tarp spėjamos ir dabartinės įmonės akcijos kainos. Spėjimo periodas laikomas tokiu pačiu, kaip ir terminuoto banko indėlio periodas.

Modelyje daroma prielaida, kad investuotojas pirkdamas akciją yra numatęs nuostolio fiksavimo ribą α_i^l (angl. stop loss) ir tenkinančio pajamingumo ribą α_i^t (angl. target price), taip pat yra įvertinęs tikimybes, tas ribas pasiekti.

Nuostolio fiksavimo riba – tai santykinė akcijos kaina, lyginant su įsigijimo kaina, kurią pasiekus, investuotojas parduoda vertybinį popierių, nes kaina nukrito netoleruojamai daug.

Tenkinančio pajamingumo riba – tai santykinė akcijos kaina, lyginant su akcijos įsigijimo kaina, kurią pasiekus, investuotojas parduoda vertybinį popierių, nes pasiektas pakankamas investicijos pajamingumas.

Nusistatyti *nuostolio fiksavimo* ir *tenkinančio pajamingumo ribas* pataria daugelis sėkmingų investuotojų. Tai yra vienas svarbiausių investicijų rizikos valdymo aspektų, padedančių išvengti didelių nuostolių ir uždirbti pelno (Elmerraji).

Jei tikimybę pasiekti *nuostolio fiksavimo ribą* pažymėsime p_i^l , *tenkinantį pajamingumą* – p_i^t, o tikimybę, kad akcijos kaina bus kažkur tarp *nuostolio fiksavimo* ir *tenkinančio pajamingumo ribų* – p_i^a, tai galėsime apskaičiuoti ir tikėtiną (vidutinį) akcijos pajamingumą:

$$\alpha_i = \frac{p_i^a \cdot (\frac{\alpha_i^l + \alpha_i^t}{2}) + p_i^t \cdot \alpha_i^t}{1 - p_i^l},\ \text{kur}\ p_i^l + p_i^a + p_i^t = 1$$

Čia α_i – tikėtinas akcijos pajamingumas, $\alpha_i^l \le \alpha_i \le \alpha_i^t$

α_i^l – *nuostolio fiksavimo riba*

α_i^t – *tenkinančio pajamingumo riba*

Jei investavimo į banko indėlius modelyje pakeisime bankroto tikimybę – nuostolio fiksavimo ribos tikimybe $p_i = p_i^l$ ir, atitinkamai, patikimumo tikimybę – tikėtinos grąžos tikimybe $q_i = (1 - p_i^l)$, o indėlio palūkanų normą – tikėtina akcijų grąža, tai tą patį modelį galėsime taikyti ir investuojant į akcijas.

Šiuo atveju, kaip ir investuojant į banko indėlius, galima apibrėžti diskrečių portfelio gražų $y^j, j=0,1,...,(2^{n+m}-1)$ tikimybes $p(y^j)$. Darant prielaidą, kad bankų kiekis $n=0$, šios išraiškos yra analogiškos banko indėlių galimų grąžų išraiškoms, skirtumas tik tas, kad visos įmanomos portfelio grąžos y^j yra apskaičiuojamos kiek kitaip, tai yra y^0 žymi galimą portfelio kapitalą, kai investuotojas parduoda visas savo akcijas, nes pasiekė *nuostolio fiksavimo ribą,* y^1 – kai investuotojas neparduoda tik pirmosios akcijos (kitos pozicijos jau parduotos, nes pasiekta *nuostolio fiksavimo riba*) ir t.t., kol y^{2^m-1} žymi galimą portfelio kapitalą, kai nei viena akcija nėra parduota dėl *nuostolio fiksavimo ribos*. Kiekvienos portfelio sudaryto tik iš akcijų galimos grąžos tikimybė $p(y^j)$ apskaičiuojama taip :

$$p(y^0)=\prod_i q_i,$$

$$p(y^1)=p_1\prod_{i\neq 1} q_i,$$

$$p(y^2)=p_2\prod_{i\neq 2} q_i,$$

....

$$p(y^m)=p_m\prod_{i\neq m} q_i,$$

$$p(y^{m+1})=p_1 p_2\prod_{i\neq m, i\neq 2} q_i,$$

$$p(y^{m+2})=p_1 p_3\prod_{i\neq m, i\neq 3} q_i,$$

....

$$p(y^{2^m-1})=\prod_i p_i,$$

Čia $y^0=\sum_i \alpha_i^l x_i$, $y^1=\alpha_1 x_1+\sum_{i\neq 1}\alpha_i^l x_i$, $y^2=\alpha_2 x_2+\sum_{i\neq 2}\alpha_i^l x_i$, ..., $y^m=\alpha_m x_m+\sum_{i\neq m}\alpha_i^l x_i$,

$y^{m+1}=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\sum_{i\neq 1, i\neq 2}\alpha_i^l x_i$, $y^{m+2}=\alpha_1 x_1+\alpha_3 x_3+\sum_{i\neq 1, i\neq 3}\alpha_i^l x_i$, ..., $y^{2^m-1}=\sum_i \alpha_i x_i$

2.3.2.3. Investavimas į draudimus

Optimalus investavimas į draudimą yra atskiras optimalaus investavimo atvejis. Tikėtinas naudingumas, gale draudimo periodo yra

$$U(x) = \sum_{k=1}^{M} u(y^k) p(y^k)$$

kur $p(y^k)$ yra tikimybė po investavimo periodo turėti turtą y^k. $u(y^k)$ yra kapitalo y^k naudingumo funkcija.

$$y^k = \sum_1^m c_i(x_i)$$

$$c_i(x_i) = \begin{cases} z_i - \alpha_i x_i, \text{ jei } \delta_i = 1 \\ (1-\alpha_i)x_i, \text{ jei } \delta_i = 0 \end{cases}$$

Čia z_i yra draudžiamo objekto i vertė, x_i – išmokama suma, $\alpha_i x_i$ – draudimo įmoka už objektą i. Draudimo politika reikalauja, kad $x_i \le z_i$, tai yra, kad draudžiamo objekto vertė negali būti mažesnė nei draudimo išmoka. $\delta_i = 1$, jei objektas išgyvena, $\delta_i = 0$, jei ne.

$p_i = P\{\delta_i = 1\}$ yra objekto i išgyvenimo tikimybė, pavyzdžiui,

$$p(y^1) = p_1 \prod_{i \ne 1} (1 - p_i), \;\; y^1 = c_1(x_1) + \sum_{i=2}^m c_i(x_i),$$

kur $c_1(x_1) = z_1 - \alpha_1 x_1$, o $c_i(x_i) = (1 - \alpha_1 x_1)$, $i = 2, ..., m$ (Mockus, 2000: 246).

2.3.2.4. Investavimas į grynuosius pinigus

Kad modelis veiktų teisingai, jame realizuota galimybė, kad investicinis kapitalas arba jo dalis būtų niekur neinvestuojami, tai yra laikomi grynaisiais pinigais. Tokiu atveju skaičiavimai, atliekami investuojant į grynuosius pinigus, yra atliekami tokie patys kaip ir investuojant į banko indėlį, tik bankroto tikimybė ir investicijų grąža yra prilyginami nuliui.

2.3.3. Apibendrintas portfelio modelis

Kaip minėta anksčiau, į investicinį portfelį, formuojamą atsižvelgiant į vartotojo naudingumo funkciją, gali įeiti keturių rūšių investiciniai instrumentai: banko indėliai, akcijos, draudimas ir grynieji pinigai. Grynieji pinigai priskiriami prie investicinių instrumentų, nes kartais gali susidaryti tokia situacija, kai naudingiau yra investuoti tik dalį investicinio kapitalo arba neinvestuoti iš viso. Kad būtų galima pradėti formuoti portfelį, reikalingi pradiniai investicinių instrumentų parametrai. Šie parametrai pateikiami 1 lentelėje:

1 lentelė

Instrumentas	Reikalingi duomenys	Aprašymas
Banko indėlis	Palūkanų norma	Palūkanos, kurios bus išmokėtos per investicinį periodą
	Bankroto tikimybė	Banko bankroto tikimybė
Akcija	Nuostolio fiksavimo riba	Santykinė akcijos kaina, lyginant su įsigijimo kaina, kurią pasiekus, investuotojas parduoda vertybinį popierių, nes kaina nukrito netoleruojamai daug.
	Tenkinančio pajamingumo riba	Santykinė akcijos kaina, lyginant su akcijos įsigijimo kaina, kurią pasiekus, investuotojas parduoda vertybinį popierių, nes pasiektas pakankamas investicijos pajamingumas
	Nuostolio fiksavimo ribos tikimybė	Tikimybė, kad investuotojas pasieks nuostolio fiksavimo ribą ir parduos akciją
	Tenkinančio pajamingumo ribos tikimybė	Tikimybė, kad investuotojas pasieks tenkinantį pajamingumo ribą ir parduos akciją
Draudimas	Objekto vertė	Draudžiamo objekto vertė
	Draudimo įkainis	Dydis, parodantis, kokią dalį nuo draudimo sumos reikia sumokėti draudimo bendrovei
	Nelaimės įvykio tikimybė	Nelaimingo įvykio, dėl kurio buvo draudžiamasi, tikimybė

Be investicinių instrumentų parametrų, portfelio analizei taip pat reikia investuotojo naudingumo funkcijos. Ši funkcija nustatoma testų pagalba. Investuotojui paeiliui yra užduodami automatizuoti loterijos principo klausimai įvairioms investavimo sumoms ir taip nustatoma įvairaus kapitalo dydžio nauda investuotojui.

Kai turimi potencialių investicijų parametrai ir yra nustatyta vartotojo naudingumo funkcija, sekantis žingsnis portfelio analizėje yra konkretaus portfelio (parinktoms instrumentų proporcijoms) visų galimų tikėtinų portfelio grąžų tikimybinio skirstinio sudarymas. Reikia įvertinti visas įmanomas portfelio grąžas ir tų grąžų tikimybes. Pavyzdžiui, jei analizuotume portfelį, sudarytą iš dviejų banko indėlių, tai reikėtų įvertinti keturias įmanomas portfelio grąžas, kai:

1. „bankrutuoja pirmas bankas“,
2. „bankrutuoja antras bankas“,
3. „bankrutuoja abu bakai“,
4. „nebankrutuoja nei vienas bankas“.

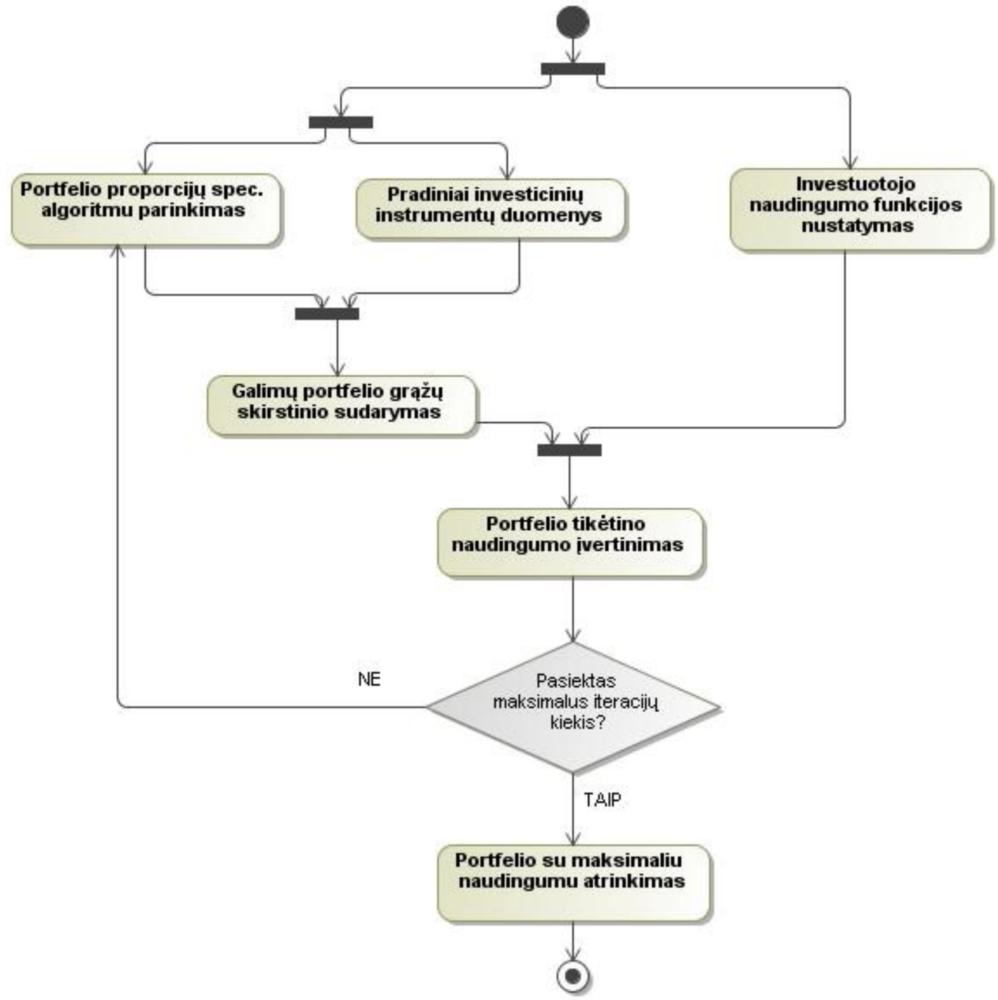
Kiekvienai iš šių galimų portfelio grąžų reikėtų nustatyti tos grąžos tikimybę. Kaip skaičiuojamos tikimybės skirtingiems instrumentams buvo minėta ankstesniame skyriuje. Kai tikimybinis skirstinys sudarytas, įvertinamas kiekvienos galimos portfelio grąžos naudingumas. Grąžos naudingumas įvertinamas panaudojant investuotojo nustatytą naudingumo funkciją, t. y į naudingumo funkciją paduodama galima portfelio grąža ir gaunama tos grąžos naudingumas (investuotojo požiūriu). Galiausiai, tikėtinas bendras portfelio naudingumas yra visų portfelio galimų grąžų naudingumų ir atitinkamų tikimybių sandaugų suma:

$$U(x) = \sum_{k=1}^{M} u(y^k)\, p(y^k)$$

Kadangi portfelio galimos grąžos priklauso nuo kapitalo proporcijų, investuotų į konkretų investicinį instrumentą, įvertinama gausybė portfelių tikėtinų naudingumų. Pavyzdžiui, sudaromas skirstinys portfeliui, kai visas kapitalas investuotas į pirmą instrumentą, apskaičiuojamas tokio portfelio tikėtinas naudingumas, tada sudaromas kitas portfelio skirstinys, kai investuojama, pavyzdžiui, į visus instrumentus po lygiai ir vėl apskaičiuojamas tokio portfelio tikėtinas naudingumas, tada vėl sudaromas portfelis kitomis proporcijomis ir t.t. Galiausiai iš daugybės tokių įvertintų portfelių atrenkamas tas, kurio naudingumas didžiausias.

Įvairių investicinio kapitalo paskirstymų (proporcijų) tarp konkrečių portfelio instrumentų gali būti be galo daug. Šiame portfelio modelyje proporcijos, investuojamos į konkrečius investicinius instrumentus, gali būti parinkinėjamos pagal Bayeso arba Montecarlo metodus. Kuo ilgiau jie vykdomi, tuo daugiau portfelių bus išanalizuota. Optimalus portfelis šiame modelyje laikomas tas, kuris tarp išnagrinėtų portfelių turėjo didžiausią naudingumą, dėl šios priežasties, iteracijų skaičius, skirtas vykdant šį optimizavimo algoritmą, turi didelę įtaką rezultatų tikslumui.

Apibendrintas portfelio, paremto naudingumo funkcija, sudarymo modelis pavaizduotas 6 paveikslėlyje:



6 pav. Portfelio sudarymo modelis

2.4. Markowitz modelis

Kaip jau buvo minėta, Markowitz modelis arba teorija yra viena iš pagrindinių investicinio portfelio sudarymo teorijų. Teorijos esmė: investuotojas investuoja savo lėšas į vertybinius popierius tam tikram laikotarpiui, norėdamas gauti kuo didesnes pajamas, bet tuo pačiu stengdamasis, kad rizika būtų kuo mažesnė (Markowitz, 1959).

Investuotojas renkasi optimalų variantą iš galimų vertybinių popierių rinkinių. Investuotojas nori, kad investicinio portfelio pajamingumas būtų maksimalus, o rizikos dydis minimalus. Tačiau tai vienas kitam prieštaraujantys tikslai, kurie prieš investuojant turi būti subalansuoti. Markowitz sprendimų priėmimo teorija padeda įvertinti abu šiuos tikslus.

Pirmiausia reikia išsiaiškinti, kaip apskaičiuojamas vertybinių popierių pajamingumas. Atskirų vertybinių popierių pajamingumas. Tai galima apskaičiuoti pagal lygybę:

$$r_i = \frac{p_1 - p_0}{p_0}$$

p_0 – vertybinių popierių, galinčių įeiti į investicinį portfelį, rinkos kaina, pradinių investicinio periodo momentu;

p_1 – tikėtina vertybinių popierių, galinčių įeiti į investicinį portfelį, rinkos kaina investicinio periodo pabaigoje (įvertinant ir tikėtinus dividendus);

r_i – vertybinių popierių pajamingumas.

Šią lygybę galima išreikšti ir taip:

$$p_0(1 + r_1) = p_1$$

Kiekvienas investicinis portfelis susideda iš įvairių vertybinių popierių. Logiška, kad laukiamas portfelio pajamingumas priklauso nuo kiekvieno atskiro vertybinio popieriaus pajamingumo ir rizikos.

Tikėtiną portfelio pajamingumą galima apskaičiuoti remiantis formule:

$$r_p = \sum_{i=1}^{N} x_i r_i$$

čia r_p – laukiamas portfelio pajamingumas;

x_i – į vertybinį popierių i investuota kapitalo dalis, $\sum_{i}^{N} x_i = 1$;

r_i – tikėtinas vertybinio popieriaus i pajamingumas;

N – analizuojamų vertybinių popierių skaičius.

Kaip matyti iš formulės, investicinio portfelio pajamingumas priklauso nuo jame esančių vertybinių popierių pajamingumo ir nuo investicinio kapitalo paskirstymo proporcijų tarp tų vertybinių popierių. Siekiant maksimalaus portfelio pajamingumo, į portfelį pagal šią formulę užtektų investuoti į vienintelę, pačią pajamingiausią akciją. Tačiau didesnis portfelio pajamingumas dažniausiai reiškia ir didesnę riziką. Riziką galima sumažinti diversifikuojant investicijas, todėl investavimas į vienintelį instrumentą dažniausiai būna neoptimalus pasirinkimas.

Rizika Markowitz modelyje matuojama standartiniu nuokrypiu. Kuo investicinio portfelio pajamingumas nepastovesnis, tuo portfelis laikomas rizikingesniu.

Standartinis nuokrypis – tai galimas faktinio pajamingumo nukrypimas nuo laukiamo pajamingumo. Norint nustatyti portfelio standartinį nuokrypį pirmiausia reikia paeiliui nustatyti šiuos dydžius:

- kiekvieno vertybinio popieriaus tikėtiną grąžą,
- kiekvieno vertybinio popieriaus tikėtinos grąžos dispersiją,
- kiekvienos vertybinių popierių poros tikėtinų grąžų kovariaciją

Kovariacija – tai matas, naudojamas statistikoje, kuris parodo dviejų atsitiktinių kintamųjų tendenciją kartu didėti arba mažėti. Vertybinių popierių atveju, šis dydis parodo kaip dviejų investicijų pelningumas priklauso vienas nuo kito. Teigiama kovariacijos reikšmė parodo, kad abu vertybinių popierių pajamingumai yra linkę kartu didėti arba mažėti, o neigiama reikšmė rodo, kad yra tendencija vienam pajamingumui kylant, kitam mažėti. Nedidelė arba artima nuliui kovariacija rodo, kad ryšys tarp vertybinių popierių yra silpnas arba jo iš vis nėra (Ramanauskas, 2007)

Kai visų vertybinių popierių porų tikėtinų grąžų kovariacijos yra nustatytos, standartinis portfelio nuokrypis (portfelio rizikos matas) apskaičiuojamas pagal lygybę:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}}$$

čia x_i – į vertybinį popierių i investuota kapitalo dalis;

x_j – į vertybinį popierių j investuota kapitalo dalis;

σ_{ij} – vertybinių popierių i ir j kovariacija.

Kovariacija tarp investicinio portfelio vertybinių popierių yra esminė formuojant optimalius portfelius. Ji leidžia tinkamai diversifikuoti investicijas ir taip sumažinti riziką (standartinį tikėtinos portfelio grąžos nuokrypį), nei investuojant į pavienius vertybinius popierius.

Iš aukščiau aprašytos formulės galima išvesti kitą portfelio standartinio nuokrypio formulę, kai į visus vertybinius popierius yra investuojama tokia pati suma:

$$\sigma_p = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2}{N^2} + \frac{N-1}{N}\cdot(\text{vidutinė kovariacija})$$

Čia σ_i – vertybinio popieriaus i standartinis nuokrypis

N – vertybinių popierių kiekis investiciniame portfelyje

vidutinė kovariacija – tai visų portfelyje esančių skirtingų vertybinių popierių kovariacijų vidurkis.

Dispersija σ_i^2 negali būti didesnė, nei tam tikras dydis $\sigma_{\max}{}^2$, todėl galioja nelygybė

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^{\;2}}{N^2} \le \frac{N \cdot \sigma_{\max}^{\;\;2}}{N^2}$$

Remiantis šia nelygybe, galima teigti, kad kai investicijų skaičius (N) portfelyje didėja, portfelio tikėtinos grąžos standartinis nuokrypis σ_p (kai kapitalas paskirstytas vienodai), o tuo pačiu ir portfelio rizika artėja prie vidutinės kovariacijos reikšmės. Dėl šios priežasties, siekiant minimizuoti portfelio riziką Markowitz modelyje, stengiamasi diversifikuoti investicijas tarp įvairių vertybinių popierių ir siekiama, kad investicijų tikėtinos grąžos kovariacijų vidurkis būtų kuo mažesnis.

Makowitz investicinius portfelius skirsto į efektyvius ir neefektyvius. Portfelis yra neefektyvus, jei galima gauti didesnę tikėtiną portfelio grąžą, nepadidinant portfelio standartinio nuokrypio (rizikos), arba jei galima sumažinti portfelio standartinį nuokrypį, nesumažinant portfelio tikėtinos grąžos. Visi kiti įmanomi portfeliai yra vadinami efektyviais. Efektyvių portfelių gali būti labai daug. Efektyviuose portfeliuose galioja taisyklė, kad norint padidinti tikėtiną grąžą – būtina padidinti portfelio riziką, o norint sumažinti riziką – būtina sumažinti portfelio tikėtiną grąžą.

Efektyvių portfelių atrinkimas yra sudėtingas procesas. Galima sudaryti labai daug skirtingų portfelių netgi iš mažo vertybinių popierių kiekio, skirtingai paskirstant kapitalą tarp jų. Aiškiausiai efektyvių portfelių atrinkimą būtų galima pavaizduoti analizuojant portfelį sudarytą iš trijų vertybinių popierių.

Trijų vertybinių popierių analizėje mes laikysime, kad

x_1 – tai portfelio dalis investuota į pirmą vertybinį popierių;

x_2 – tai portfelio dalis investuota į antrą vertybinį popierių;

x_3 – tai portfelio dalis investuota į trečią vertybinį popierių.

Šių proporcijų suma privalo būti lygi vienetui:

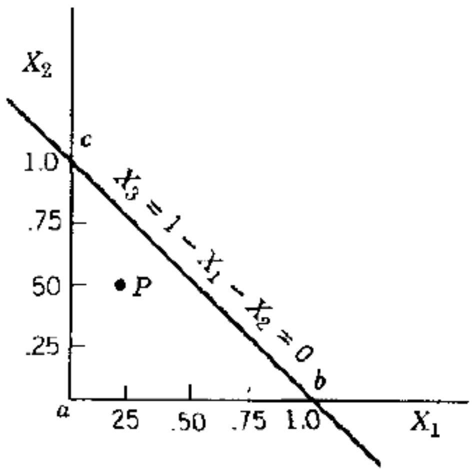
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Portfelis yra įmanomas tik tuo atveju, kai $x_1 \ge 0,\;\; x_2 \ge 0,\;\; x_3 \ge 0$

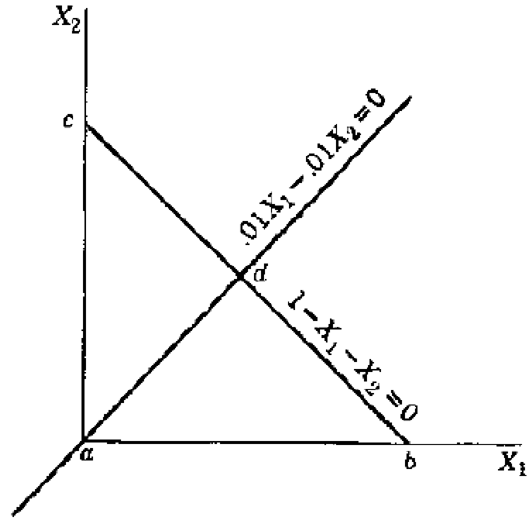
Investicinio portfelio dalis, investuota į trečiąjį vertybinį popierių, gali būti išreikta per kitus du vertybinius popierius:

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2$$

Tada portfelių aibę, sudarytą iš trijų vertybinių popierių galima atvaizduoti geometriškai. 7 paveikslėlyje galimus portfelius atvaizduoja trikampis abc.



7 pav. Portfelių aibė



8 pav. Nestandartinė portfelių aibė

7 paveikslėlyje taškas P, esantis trikampyje abc, vaizduoja investicinį portfelį, kurį sudaro 25% investuoti į pirmąjį vertybinį popierių, 50% į antrąjį ir 25% į trečiąjį ($x_3 = 1 - 0.25 - 0.5$).

Tarkime, kad trijų vertybinių popierių tikėtini pajamingumai yra lygūs 0.04, 0.02 ir 0.03. Jei investuotojas nori, kad portfelio investicijų grąža būtų 0.03, tai portfelis turi tenkinti šį apribojimą:

$$0.04x_1 + 0.02x_2 0.03x_3 \geq 0.3$$

Pakeisdami šioje nelygybėje $x_3 = 1 - x_1 - x_2$, galime išreikšti apribojimą kaip

$$01x_1 - 0.01x_2 \geq 0$$

Kad portfelis tenkintų investuotojo reikalavimą, tai yra portfelio pajamingumas būtų nemažesnis nei 0.03, investuotojas turi pasirinkti vieną iš investicinių portfelių, esančių žemiau tiesės *ad*, pažymėtos 8 paveikslėlyje. Tokie portfeliai būtų apriboti trikampiu *adb*.

Bendru atveju, trijų vertybinių popierių analizėje, tikėtinas portfelio pajamingumas išreiškiamas formule

$$r_p = x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3$$

čia r_p – tikėtinas portfelio pajamingumas,

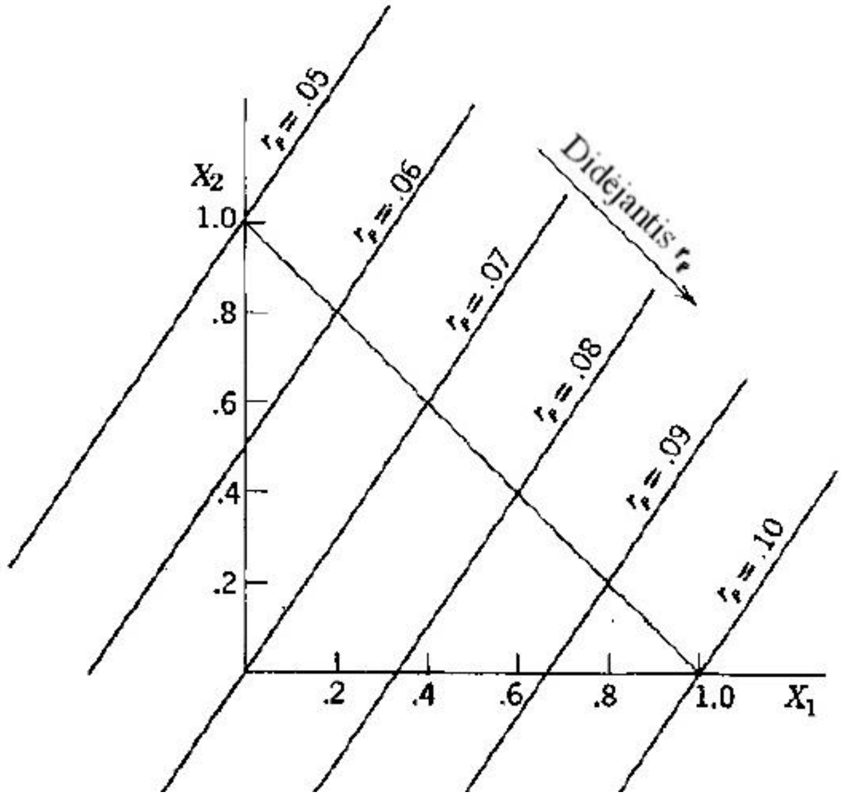
r_i – tikėtina vertybinio popieriaus i grąža,

x_i – portfelio dalis investuota į vertybinį popierių i.

Jei pakeisime x_3 į $(1 - x_2 - x_3)$ gausime išraišką

$$r_p = x_1(r_1 - r_2) + x_2(r_2 - r_3) + r_3$$

Remiantis šia lygtimi, prie konkrečių vertybių popierių tikėtinų pajamingumų r_i, panašiai, kaip ir 8 paveikslėlyje, galima išbrėžti tieses, kurios riboja įvairius portfelio pajamingumus. Tai yra išbrėžti tieses, parodančios portfelių aibes, kuriose esančių investicinių portfelių tikėtini pajamingumai yra nemažesni nei užduotos konkrečios reikšmės.



9 pav. Lygiagrečios pajamingumo linijos

Kaip matome iš grafiko 9 paveikslėlyje, tiesės, ribojančios portfelių pajamingumą, yra lygiagrečios. Siekiant didesnio portfelio pajamingumo, galimų portfelių aibė mažėja.

Trijų vertybinių popierių portfelio standartinis nuokrypis, kuris atspindi portfelio riziką, yra paskaičiuojamas pagal anksčiau minėta formulę

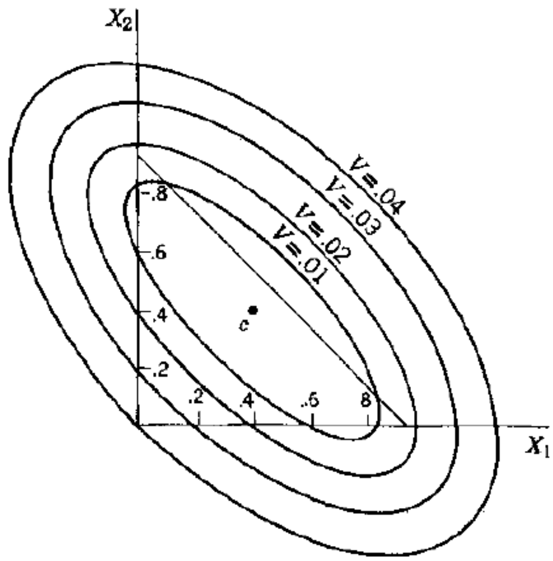
$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}}$$

šiuo atveju $i = 3$ ir $j = 3$.

Portfelio dispersija (variance) V yra labai artimas dydis standartiniam nuokrypiui ir apskaičiuojamas

$$V = \sigma_p^{\ 2}$$

Kai portfelyje esančių vertybinių popierių kovariacijos yra apskaičiuotos, portfelio dispersija V priklauso nuo investuoto kapitalo į konkrečius portfelio vertybinius popierius. Formulėje jie pažymėti $x_i x_j$. Fiksuotai dispersijos reikšmei ši priklausomybė yra atvaizduojama elipse. Jei užduodami skirtingi reikalaujamos dispersijos lygiai, šios elipsės viena kitos nekerta ir turi bendrą centrą. Tai atvaizduota 10 paveikslėlyje.



10 pav. Dispersijų elipsės

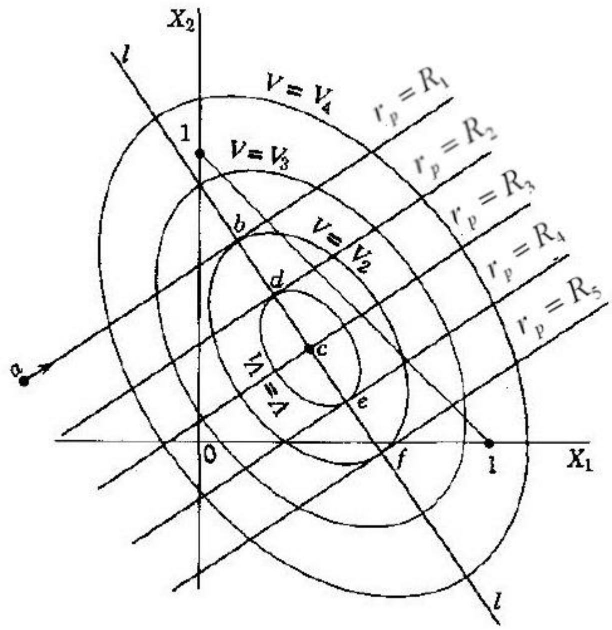
10 paveikslėlyje pavaizduoti keturi portfelio dispersijos lygiai (0.1. 0.2, 0.3 ir 0.4). Visi taškai, esantys ant elipsės $V = 0.1$ir esantys trikampyje (tenkinantys apribojimą $x_1 + x_2 + x_3 = 1$) yra portfeliai, kurių dispersija lygi 0.1. Tas pats galioja ir kitoms elipsėms, vaizduojančioms kitas portfelio dispersijų reikšmes.

Apjungus portfelių pajamingumo linijas ir portfelio dispersijų elipses viename grafike, gaunamas 11 paveikslėlyje pavaizduotas grafikas. Ant linijos, pavadintos $r_p = R_1$, esantys taškai, atitinka portfelius, kurių tikėtinas pajamingumas lygus R_1. Kitos linijos pažymėtos $r_p = R_2$, $r_p = R_3$ atitinkamai vaizduoja portfelius su kitomis tikėtinomis grąžomis. Taškai esantys ant elipsės pavadintos $V = V_1$, vaizduoja portfelius, kurių dispersija lygi V_1. Kitos elipsės atitinkamai vaizduoja portfelius su kitomis dispersijos reikšmėmis.

Kai judama tiese pažymėta $r_p = R_1$ nuo taško a rodyklės kryptimi, yra kertamos elipses, rodančias skirtingus portfelio dispersijos lygius: $V = V_4$, $V = V_3$, $V = V_2$, $V = V_3$, $V = V_4$. Išilgai šios tiesės, tikėtina portfelių grąža yra visur vienoda. Iš visų taškų, kurie yra ant tiesės $r_p = R_1$, mažiausia portfelio dispersija $V = V_2$ yra taške b. Tame taške tiesė tik liečia, bet nekerta dispersijos elipsės. Visos kitos elipsės yra kertamos arba iš vis neliečiamos.

Visose kitose portfelio pajamingumo linijose, taškas (portfelis) su mažiausia dispersija yra taip pat tuose taškuose, kur elipsė yra liečiama, bet nekertama. Taigi taškas d turi mažesnę dispersiją, nei bet kuris kitas taškas ant linijos $r_p = R_2$, taškas c turi mažesnę dispersiją, nei bet kuris kitas taškas ant linijos $r_p = R_3$ ir t.t. Sujungus visus šiuos lietimosi taškus, gaunama tiesė ll. Taškai, esantys ant šios linijos, minimizuoja dispersiją portfelių, su tuo pačiu tikėtinu pajamingumu. Ši linija vadinama kritine linija. Taigi jei taškas yra ant kritinės linijos, vadinasi jis minimizuoja dispersiją portfelio, su kažkokia konkrečia tikėtina grąžą.

Kritinė linija yra tiesė, o ne kreivė. Ji gali kartais eiti ne tik per egzistuojančius portfelius, bet ir per neegzistuojančius. Pavyzdžiui taškas f ant kritinės linijos ll nėra realus, nes išeina iš realių portfelių ribų, tai yra netenkinama sąlyga $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.



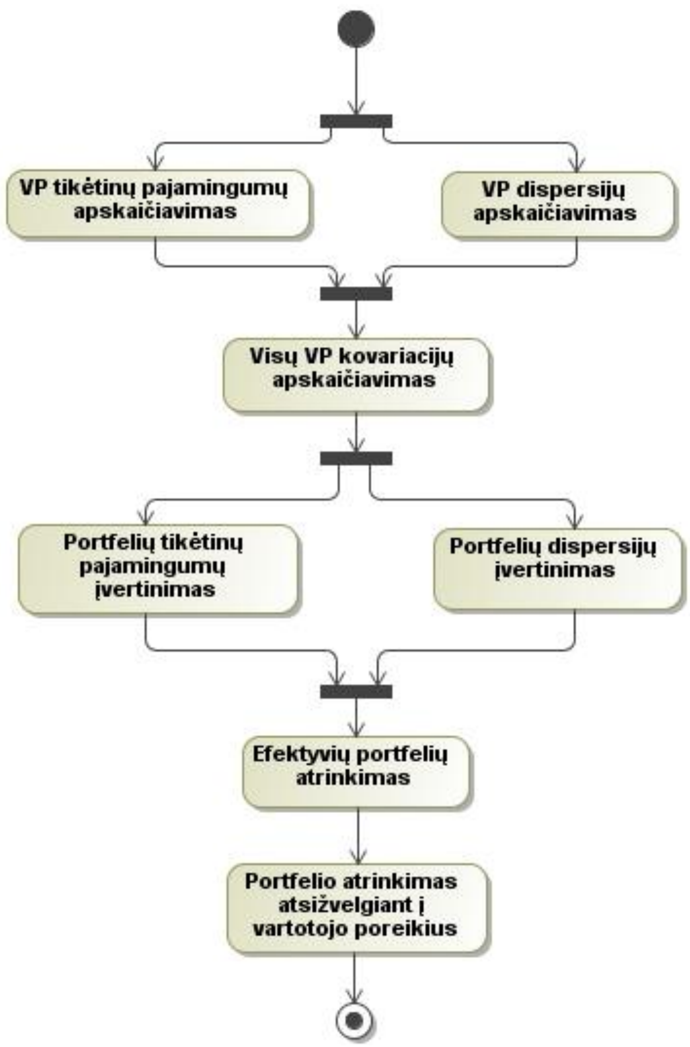
11 pav. Efektyvių portfelių analizė

11 paveikslėlyje pati mažiausia įmanoma portfelio dispersija yra taške c. Joks kitas portfelis neturi mažesnės dispersijos. Einant kritine linija nuo c iki šios tiesės susikirtimo su x_1 ašimi sutinkami efektyvūs portfeliai. Šiuose taškuose yra tenkinama efektyvių portfelių taisyklė, teigianti, kad jeigu egzistuoja pajamingesnis portfelis, tas portfelis privalo turėti didesnę dispersija ir atvirkščiai, jei egzistuoja portfelis su mažesne rizika (dispersija), tai toks portfelis būtinai pasižymės ir mažesniu pajamingumu. Kiti efektyvūs portfeliai išsidėstę ant x_1 ašies atkarpoje tarp taško, kur tiesė ll kerta šią ašį, ir taško, kur $x_1 = 1$. Taip yra todėl, kad kai kritinė linija išeina iš galimų portfelių aibės, didėjant portfelio pajamingumui, mažiausios dispersijos kiekvienam pajamingumui išsidėsto ant x_1 ašies.

Realiame investiciniame portfelyje vertybinių popierių kiekis dažniausiai būna daug didesnis nei trys akcijos. Dėl šios priežasties efektyvių portfelių aibės atrinkimas yra gerokai sudėtingesnis procesas. Nepaisant to, trijų vertybinių popierių analizėje, buvo atskleista pagrindinė efektyvių portfelių atrinkimo idėja.

Kiekvienas portfelis iš efektyvių portfelių aibės gali būti optimalus. Kuris būtent yra optimalus, konkrečiu atveju, priklauso nuo investuotojo tolerancijos rizikai ir siekiamo pelno. Investuotojui, vengiančiam rizikos ir nesiekiančiam didelio pelno, optimalus portfelis bus efektyvusis portfeli su mažiausia dispersija, o mėgstančiam rizikuoti – su didesniu pelnu, bet kartu didesne ir dispersija (rizika). Kiek vienu iš šių atvejų, investuotojui pasirinkus konkretų rizikos ar pajamingumo lygį, yra žinoma, kad esant šiam lygiui portfelio grąža (rizikos lygiui) arba rizika (pajamingumo lygiui) yra optimali pagal Markowitz modelį.

Apibendrinta Markowitz modelio diagrama pavaizduota 12 paveikslėlyje



12pav. Markowitz modelio diagrama

3. Optimalaus portfelio sistemos projektinė dalis

3.1. Panaudos atvejai ir aktorių sąrašai

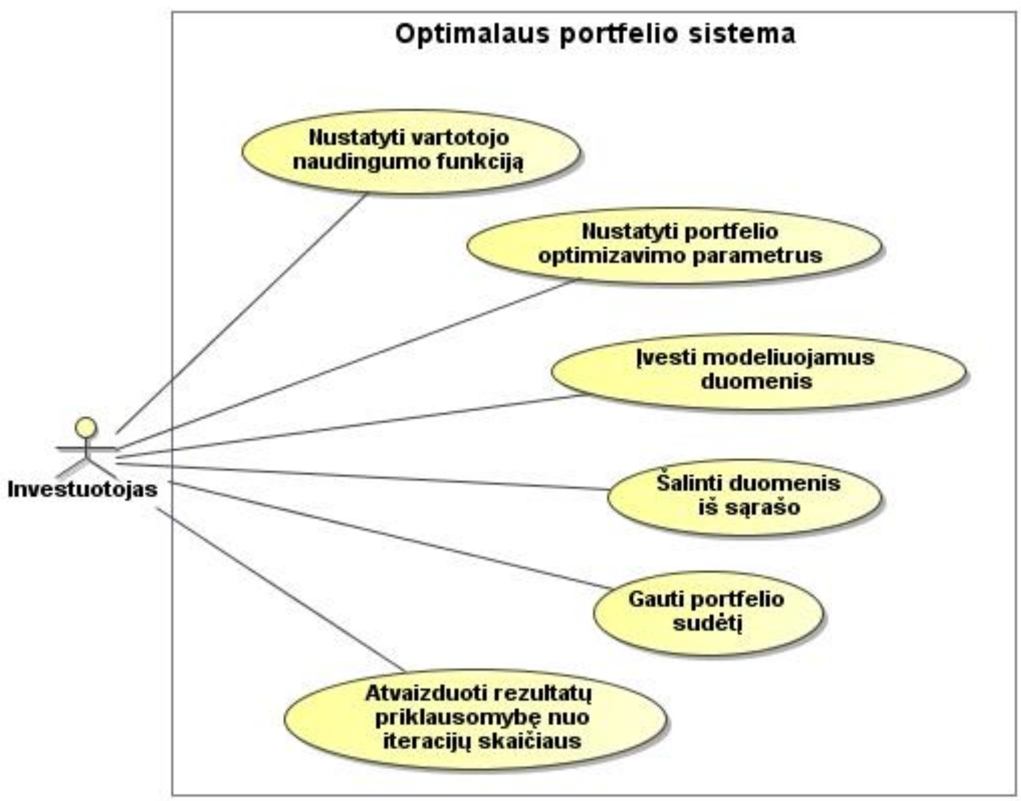
<u>Aktorių sąrašas</u>

Investuotojas

<u>Panaudos atvejai</u>

- Nustatyti vartotojo naudingumo funkciją
- Nustatyti portfelio optimizavimo parametrus
- Įvesti modeliuojamus duomenis (vertybinių popierių(VP) informacija)
- Šalinti duomenis iš sąrašo (VP informacija)
- Gauti portfelio sudėtį
- Atvaizduoti rezultatų priklausomybę nuo iteracijų skaičiaus

<u>Panaudos atvejų diagrama</u>



13pav. Panaudos atvejų diagrama

Sistemos aktorių funkcijos.

Investuotojas pilnai valdo visas sistemos funkcijas. Panaudos atvejų aprašas pateiktas toliau.

3.2. Panaudos atvejų specifikacija

Nustatyti vartotojo naudingumo funkciją.

Tikslas:

Nustatyti naudingumo funkciją, kuri naudojama optimizuojant investicinį portfelį. Ši funkcija parodo, kaip vartotojas vertina skirtingą pinigų sumą.

Aktoriai:

Investuotojas.

Ryšiai su kitais PA:

Gauti portfelio sudėtį

Prieš-sąlygos:

- Vartotojas atsidaręs naudingumo funkcijos nustatymo langą.

Sužadinimo sąlyga:

- Vartotojas mygtuko paspaudimu iškviečia naudingumo funkcijos nustatymo komandą.

Po-sąlyga:

- Išsaugoma vartotojo naudingumo funkcija

Pagrindinis scenarijus:

1. Sistema pateikia klausimus.
2. Vartotojas atsako į pateiktus klausimus (taip / ne)
3. Sistema iš atsakymų nustato naudingumo funkciją

Alternatyvus scenarijus:

1. Vartotojas nutraukia apklausą, mygtuko paspaudimu

Nustatyti portfelio optimizavimo parametrus.

Tikslas:

Nustatyti parametrus, kurie turi įtakos portfelio optimizavimui.

Aktoriai:

Investuotojas.

Ryšiai su kitais PA:

Nėra.

Prieš-sąlygos:

- Vartotojas atsidaręs parametrų nustatymo langą.

Sužadinimo sąlygos:

- Vartotojas suveda reikalingą informaciją.

Po-sąlyga:

- Įvesti duomenys išsaugomi atmintyje.

Pagrindinis scenarijus:

1. Vartotojas pasirenka parametrų nustatymo langą.
2. Vartotojas nustato parametrų reikšmes: naudingumo funkcijos tipą, periodą, investuojamą sumą, iteracijų skaičių ir jei reikia pradinių taškų skaičių.
3. Vartotojas pereina į kitą langą.
4. Sistemoje išsaugomi pakeitimai.

Alternatyvus scenarijus:

1. Vartotojas įvedė neteisingus duomenis
2. Sistema neleidžia pereiti į kitą langą.

Įvesti modeliuojamus duomenis.

Tikslas:

Įvesti duomenis iš kurių bus sudaromas investicinis portfelis. Įvesti galima trijų investavimo instrumentų duomenys: banko indėlių, akcijų ir draudimo.

Aktoriai:

Investuotojas.

Ryšiai su kitais PA:

Nėra.

Prieš-sąlygos:

- Vartotojas atsidaręs banko indėlių, akcijų arba draudimo įvedimo langą.

Sužadinimo sąlyga:

- Vartotojas pagrindinio meniu pagalba iškviečia duomenų įvedimo komandą.

Po-sąlyga:

- Atmintyje išsaugomi įvesti duomenys.

Pagrindinis scenarijus:

1. Vartotojas suveda reikalingą informaciją.
2. Vartotojas iškviečia išsaugojimo komandą
3. Jei klaidų nėra, duomenys pridedami prie modeliuojamų duomenų sąrašo ir atvaizduojami sąraše.

Alternatyvus scenarijus:

1. Vartotojas suvedė neteisingą informaciją
2. Vartotojui neleidžiama įvesti tokių duomenų ir rodomas klaidos pranešimas

Šalinti duomenis.

Tikslas:

Iš modeliuojamų duomenų sąrašo pašalinami nurodyti duomenys.

Aktoriai:

Investuotojas.

Ryšiai su kitais PA:

Nėra.

Prieš-sąlygos:

- Vartotojas atsidaręs langą su bankų indėlių, akcijų ar draudimų sąrašu.
- Į sąrašą turi būti įtrauktas nors vienas VP

Sužadinimo sąlygos:

- Vartotojas paspaudžia sąrašo šalinimo mygtuką.

Po-sąlyga:

- Iš sąrašo pašalinami duomenys.

Pagrindinis scenarijus:

1. Vartotojas pasirenka VP sąrašo peržiūros langą.
2. Vartotojas paspaudžia įrašo šalinimo mygtuką.
3. Sistema pašalina duomenis

Alternatyvus scenarijus:

- Nėra

Gauti portfelio sudėtį.

Tikslas:

Gauti rekomenduojamas VP proporcijas investiciniame portfelyje.

Aktoriai:

Investuotojas.

Ryšiai su kitais PA:

„Nustatyti portfelio optimizavimo parametrus“, „Nustatyti vartotojo naudingumo funkciją“, „Įvesti modeliuojamus duomenis.“

Prieš-sąlygos:

- Atidarytas investicinio portfelio sudarymo langas
- Įvestas nors vienas VP.

Sužadinimo sąlygos:

- Vartotojas, mygtuko paspaudimu, pasirenka komandą, investicinio portfelio formavimui.

Po-sąlyga:

- Ekrane išvedamas rekomenduojamos VP proporcijos investiciniame portfelyje

Pagrindinis scenarijus:

1. Mygtuko paspaudimu, paprašoma sistemos sudaryti optimalų investicinį portfelį atsižvelgiant į anksčiau suvestus parametrus ir vartotojo naudingumo funkciją.
2. Sistema iš pateiktų parametrų suformuoja investicinį portfelį

Alternatyvus scenarijus:

1. Vartotojas nutraukia skaičiavimus.

Atvaizduoti rezultatų priklausomybę nuo iteracijų skaičiaus.

Tikslas:

Atvaizduoti grafiškai, kaip priklauso rezultatai nuo iteracijų skaičiaus.

Aktoriai:

Investuotojas.

Ryšiai su kitais PA:

Gauti portfelio sudėtį.

Prieš-sąlygos:

- Sistema sudarinėja arba jau yra sudarius investicinį portfelį.

Sužadinimo sąlygos:

- Vartotojas, mygtuko paspaudimu, pasirenka diagramos rodymo komandą.

Po-sąlyga:

- Ekrane grafiškai atvaizduojama portfelio optimizuojamo naudingumo priklausomybė nuo atliktų iteracijų skaičiaus..

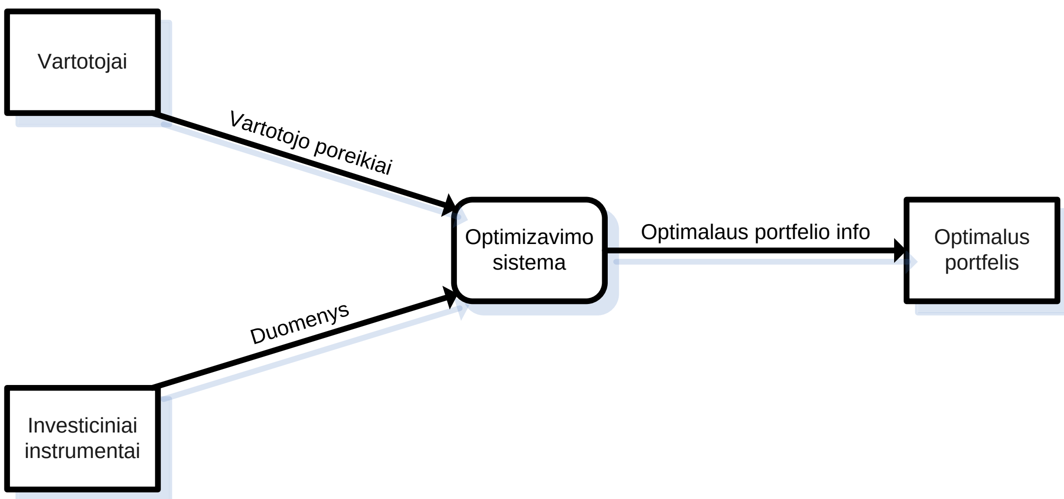
Pagrindinis scenarijus:

1. Vartotojas atlieka visus žingsnius, reikalingus suformuoti optimalų portfelį
2. Vartotojas pasirenka grafinio atvaizdavimo komandą
3. Sistema diagrama atvaizduoja portfelio naudingumo priklausomybę nuo iteracijų skaičiaus

3.3. Veiklos sudėtis

Veiklos kontekstas

Paveikslėlyje nr. 14 pateiktas veiklos kontekstas



14pav. Veiklos kontekstas

Veiklos konteksto paaiškinimas pateiktas 2 lentelėje.

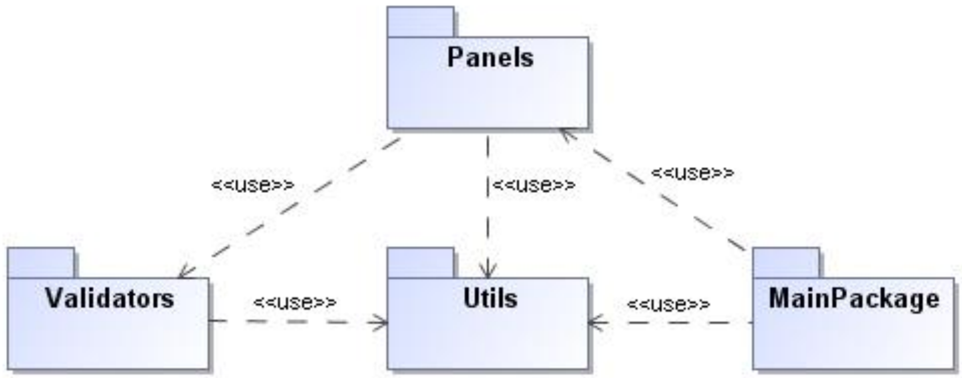
2 lentelė. Veiklos konteksto paaiškinimas.

Eil. nr.	Įvykio pavadinimas	Įeinantys/Išeinantys informacijos srautai
1.	Bankai, akcinės bendrovės ar draudimo įmonės pateikia duomenis apie save	Pateiktų VP rodikliai(in).
2.	Vartotojo poreikių informacija	Optimizavimo parametrai, naudingumo funkcija (in).
3.	Optimalaus portfelio suformavimas	Suformuoto optimalaus portfelio informacija(out).

3.4. **Sistemos architektūra**

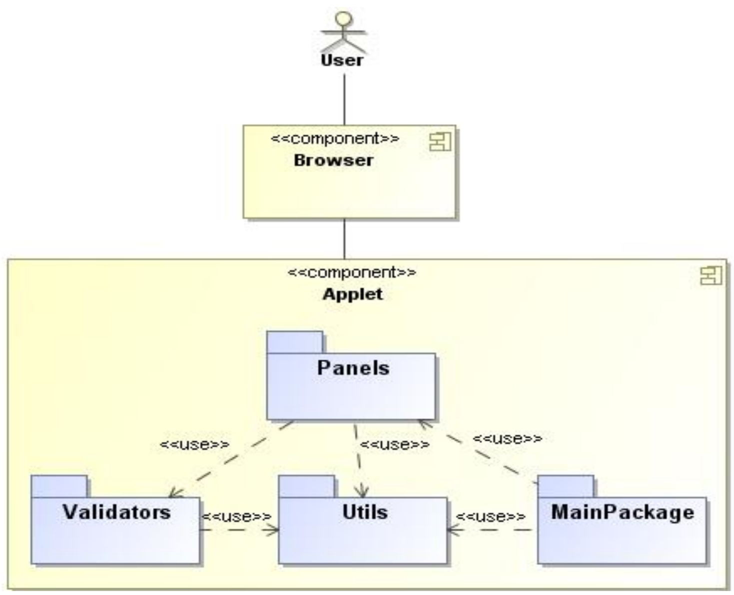
Šiame skyriuje pateikiama programinės įrangos architektūros specifikacija, kurioje pateikiama sistemos vaizdas įvairiais architektūriniais aspektais. Dokumentas atspindi priimtus architektūrinius sprendimus, kuriais vadovaujantis kuriama programinė įranga

15 paveikslėlyje pateikiamas sistemos skaidymas į paketus. Išskiriami 4 pagrindiniai paketai:



15pav. Pagrindiniai sistemos paketai

16 paveikslėlyje pateikiama, kaip paketai bendradarbiauja ne tik tarpusavyje, bet ir su kitais sistemos komponentais.



16pav. Sistemos paketų bendradarbiavimas

Panels paketas

3 lentelė

Pavadinimas	Panels paketas.
Klasifikacija	Paketas.
Apibrėžimas	Šiame pakete sutelktos optimalaus portfelio sistemos paneles, kurios yra matomos vartotojui. Sistemos vartotojo sąsaja yra suskirstyta į 6 paneles.
Atsakomybės	Naudojant šį paketą yra surenkami visi reikalingi duomenys, paversti į reikalingą formatą. Taip pat juose yra visa atvaizdavimo logika.
Apribojimai	Nėra
Struktūra	Pakete yra AbstractPanel, OptionsPanel, UtilityPanel, BanksPanel, SharesPanel, InsurancesPanel, CountPanel klasės
Sąveikavimas	Sąveikauja su Validators ir Utils paketais.
Skaičiavimai	Atvaizdavimo logika
Sąsaja/eksportas	Aprašyta konkrečių klasių sąsajos žemiau.

Validators paketas

4 lentelė

Pavadinimas	Validators paketas.
Klasifikacija	Paketas.
Apibrėžimas	Šio paketo tikslas yra patikrinti įvedamų laukų(kurios yra panelėse) korektiškumą.
Atsakomybės	Šis paketas atsakingas už įvedamų duomenų teisingumą.
Apribojimai	Šio paketo klasės nekviečia kitų paketų klasių, kad būtų lengviau jas pernaudoti.
Struktūra	Pakete yra TextFieldValidator, OptionsPanelValidator, BanksPanelValidator, SharesPanelValidator, InsurancesPanelValidator klasės
Sąveikavimas	Sąveikauja su Utils paketu
Skaičiavimai	Įvairios tikrinimo taisyklės
Sąsaja/eksportas	Į klasių metodus paduodami laukai, kurių teisingumą reikia patikrinti.

Utils paketas

5 lentelė

Pavadinimas	Utils paketas.
Klasifikacija	Paketas.
Apibrėžimas	Šio paketo tikslas yra atlikti dažnai naudojamas funkcijas įvairiuose paketuose. Šiame pakete yra pagalbinės klasės ir komponentai naudojami įvairiems tikslams.
Atsakomybės	Šis paketas turi klases, kurios gali būti naudojamos įvairiuose kituose paketuose. Pavyzdžiui specialus įvedimo lauko komponentas, kurį naudoja dauguma formų.
Apribojimai	Nėra
Struktūra	Pakete yra Utils, CustomTextField, TextFieldLimit klasės
Sąveikavimas	Nesąveikauja
Skaičiavimai	–
Sąsaja/eksportas	Kiti paketai kviečia atitinkamus metodus ar naudoja komponentus, įvairiems tikslams

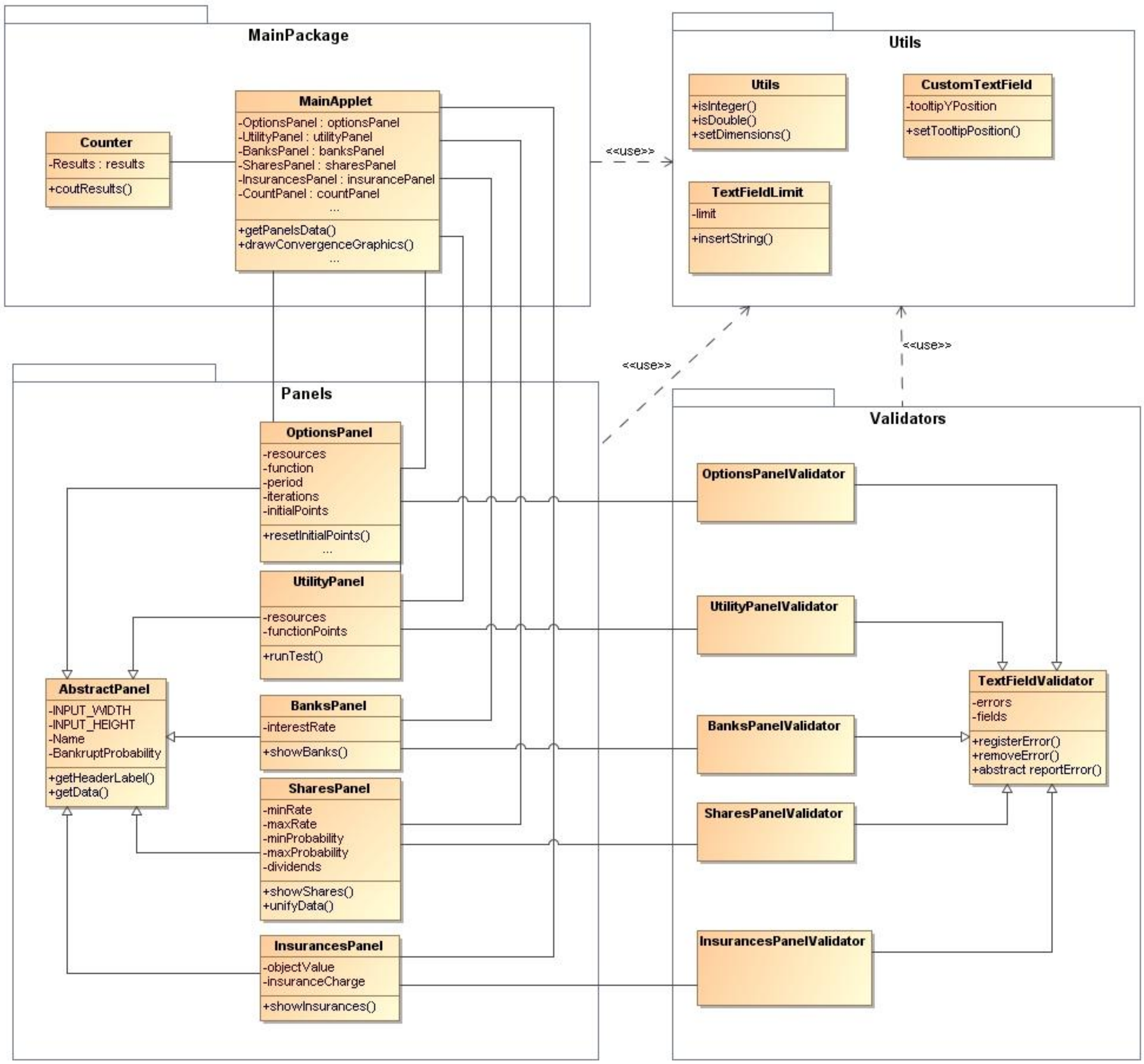
MainPackage paketas

6 lentelė

Pavadinimas	MainPackage paketas.
Klasifikacija	Paketas.
Apibrėžimas	Šio paketo tikslas yra koordinuoti sistemos darbą ir atlikti pagrindinius skaičiavimus.
Atsakomybės	Šis paketas atsakingas už atliekamų veiksmų seką ir atliekamus skaičiavus.
Apribojimai	Nėra
Struktūra	Pakete yra Counter, MainApplet klasės
Sąveikavimas	Sąveikauja su Panels ir Utils paketais.
Skaičiavimai	Pagrindiniai portfelio sudarymo algoritmai.
Sąsaja/eksportas	Priklausomai nuo vartotojo veiksmų deleguoja darbus atitinkamiems programos moduliams

Klasių diagrama

Šioje diagramoje pavaizduoti ryšiai tarp paketų ir jų klasių.



17pav. Paketų ir jos klasių bendradarbiavimas

Klasių bendradarbiavimas su Utils paketu nevaizduojamas grafiškai, kadangi gaunama labai daug ryšių ir diagrama tampa sunkiai skaitoma.

Klasių aprašymas

7 lentelė

Pavadinimas	MainApplet
Apibrėžimas	MainPackage paketo klasė
Atsakomybės	Ši klasė koordinuoja sistemos darbą.
Struktūra	Struktūra matoma paketų ir klasių bendradarbiavimo diagramoje.
Sąveikavimas	Klasėje yra visų panelių objektai per kuriuos ši klasė paima jau validžius reikalingus duomenis. Taip pat deleguoja portfelio skaičiavimą Counter klasei.
Skaičiavimai	Suvedami duomenys iš įvairių panelių į vieningą formatą
Sąsaja/eksportas	MainApplet klasė kviečia Panels paketo klasių metodus ir paduoda gautus parametrus, į Counter klasę.

8 lentelė

Pavadinimas	Counter
Apibrėžimas	MainPackage paketo klasė
Atsakomybės	Klasė atsakinga už optimalaus portfelio nustatymą
Struktūra	Struktūra matoma paketų ir klasių bendradarbiavimo diagramoje.
Sąveikavimas	Šiai klasei pateikia parametrus ir paima rezultatus MainApplet klasė
Skaičiavimai	Apskaičiuoja optimalų portfelį
Sąsaja/eksportas	Į metodus paduodami parametrai kurie naudojami sudarant optimalų portfelį.

9 lentelė.

Pavadinimas	Utils
Apibrėžimas	Utils paketo klasė
Atsakomybės	Klasė atsakinga už įvairius statinius metodus, kuriuo kitos klasės naudoja kaip pagalbines funkcijas
Struktūra	Struktūra matoma paketų ir klasių bendradarbiavimo diagramoje.
Sąveikavimas	Šios klasės metodus visada kviečia kitos klasės, o ne atvirkščiai
Skaičiavimai	Įvairios pagalbinės funkcijos
Sąsaja/eksportas	Į metodus paduodami parametrai, gaunamas atitinkamos funkcijos atsakymas.

10 lentelė

Pavadinimas	CustomTextField
Apibrėžimas	Utils
Atsakomybės	Klasė yra specialus komponentas, skirtas parodyti klaidas.

Struktūra	Struktūra matoma paketų ir klasių bendradarbiavimo diagramoje.
Sąveikavimas	Šią klasę naudoja dauguma Panels paketo klasių, kur yra įvedimo laukai.
Skaičiavimai	Nėra
Sąsaja/eksportas	Kiekviena naudojanti klasė sukuria po atskirą šios klasės objektą, nurodydama tooltip‘o aukštį.

11 lentelė.

Pavadinimas	TextFieldLimit
Apibrėžimas	Utils paketo klasė
Atsakomybės	Klasė atsakinga už įvedimo lauko simbolių skaičių
Struktūra	Struktūra matoma paketų ir klasių bendradarbiavimo diagramoje.
Sąveikavimas	Šią klasę naudoja dauguma Panels paketo klasių, kur yra įvedimo laukai.
Skaičiavimai	Nėra
Sąsaja/eksportas	Kiekvienam skirtingam lauko ilgiui reikia sukurti atskirą objektą.

12 lentelė

Pavadinimas	AbstractPanel
Apibrėžimas	Panels paketo klasė
Atsakomybės	Klasė talpinanti bendrus panelių duomenis
Struktūra	Visos paneles paveldi šią klasę
Sąveikavimas	Tiesioginio sąveikavimo nėra
Skaičiavimai	Nėra
Sąsaja/eksportas	–

13 lentelė

Pavadinimas	Panels paketo klasės
Apibrėžimas	Panels paketo klasės
Atsakomybės	Visos klasės paveldinčios AbstractPanel yra atsakingos už atitinkamų duomenų surinkimą ir perdavimą MainApplet klasei.
Struktūra	Struktūra matoma paketų ir klasių bendradarbiavimo diagramoje.
Sąveikavimas	Šios klasės surenka duomenis iš vartotojo sąsajos, perduoda Validators paketo klasėms jų korektiškumui patikrinti.
Skaičiavimai	Nėra.
Sąsaja/eksportas	MainApplet kviečia atitinkamų duomenų paėmimo metodus.

14 lentelė

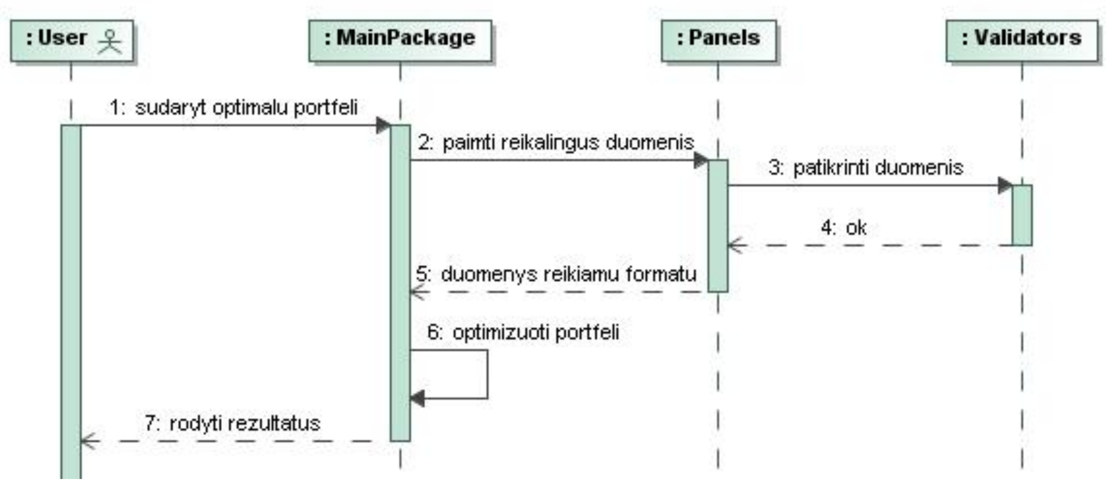
Pavadinimas	TextFieldValidator
Apibrėžimas	Validators paketo klasė
Atsakomybės	Klasė talpinanti bendrus validatorių duomenis ir metodus
Struktūra	Visi validatoriai paveldi šią klasę
Sąveikavimas	Šios klasės metodas, perkrautas konkrečiuose validatoriuose kviečiamas kai norima patikrinti ar panelė neturi klaidų.
Skaičiavimai	Skaičiavimai reikalingi atlikti tam tikrą laukų korektiškumo patikrą.
Sąsaja/eksportas	–

15 lentelė

Pavadinimas	Validators paketo klasės
Apibrėžimas	Validators paketo klasės
Atsakomybės	Visos klasės paveldinčios TextFieldValidator yra atsakingos už atitinkamų duomenų korektiškumą
Struktūra	Struktūra matoma paketų ir klasių bendradarbiavimo diagramoje.
Sąveikavimas	Šiai klasei inicijavimo metu paduodami duomenys, reikalingi atlikti validacijai.
Skaičiavimai	Skaičiavimai reikalingi atlikti tam tikrą laukų korektiškumo patikrą.
Sąsaja/eksportas	–

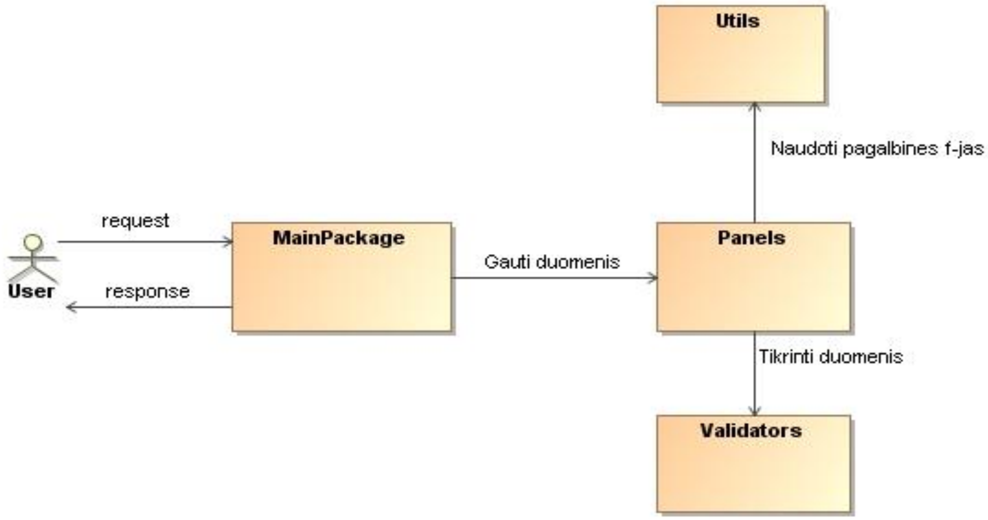
Sekų diagrama

18 pav. pateikiama pagrindinės sistemos funkcijos – sudaryti optimalų investicinį portfelį, sekų diagrama:



18pav. Sekų diagrama

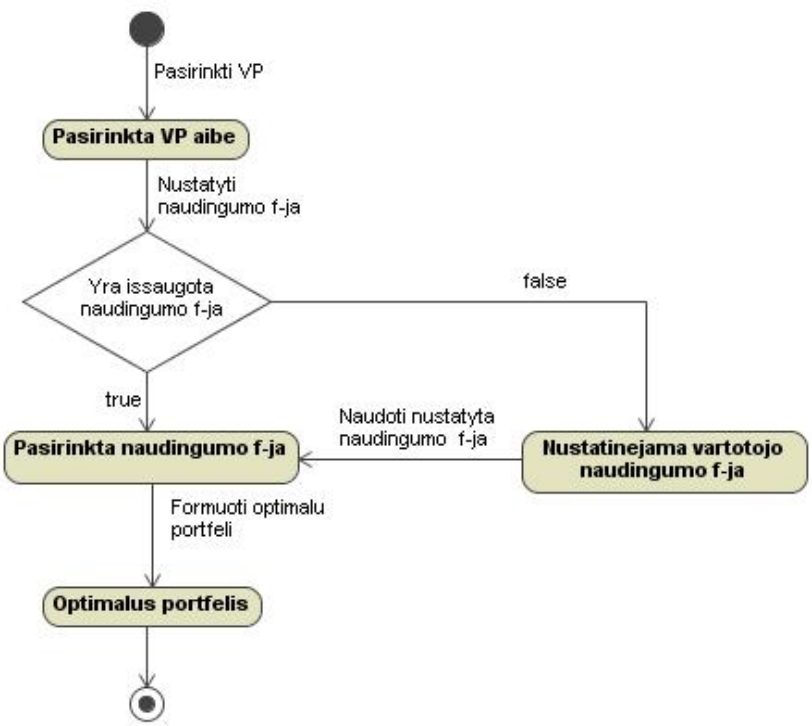
Bendradarbiavimo diagrama



19pav. Vartotojo bendradarbiavimo su sistema diagrama

Būsenos diagrama

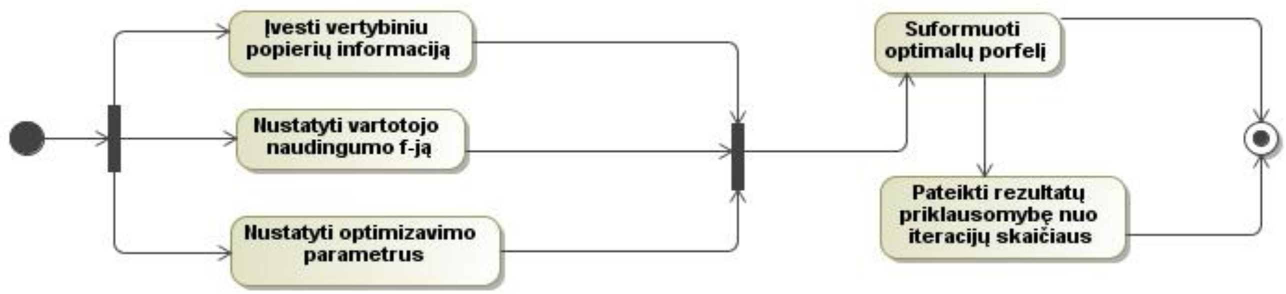
Žemiau, 20 paveikslėlyje, pateikiama optimalaus portfelio formavimo būsenų diagrama.



20pav. Būsenų diagrama

Veiklos diagramos

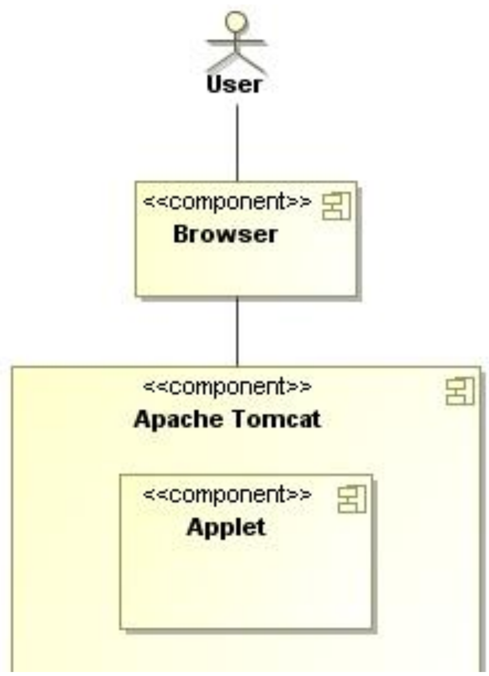
21 pav. pateikiama optimalaus portfelio sudarymo veiklos diagrama. Galima ne tik nustatyti optimalų portfelį, bet ir peržiūrėti portfelio naudingumo priklausomybę nuo iteracijų skaičiaus..



21pav. VT modeliavimo ir išsaugojimo veiklos diagrama

Išdėstymo vaizdas

Sistemos išdėstymo vaizdas pateikiamas žemiau. Iš jo matyti, kad sistemos išdėstymas yra paprastas



22pav. Išdėstymo vaizdas

Vartotojas kreipiasi į serverį per interneto naršyklę, iš kur naršyklė atsisiunčia apletą.

4. Tyrimo ir eksperimentinė dalis

4.1. Naudingumo funkcijų tyrimas

Kaip minėta anksčiau, naudingumo funkcijų būna labai įvairių. Kiekvienam investuotojui jos gali būti skirtingos, tačiau išskiriami keturi pagrindiniai jos tipai:

- „Vengiantis rizikos“ tipas
- „Mėgstantis riziką“ tipas
- „Rizikai neutralus“ tipas
- „Vidutinės rizikos“ tipas

Priklausomai nuo investuotojo naudojamos naudingumo funkcijos, į portfelį atrenkami skirtingi dominuojantys instrumentai. Funkcijų tyrimui bus naudojamos funkcijos iš teorijos skyrelio (2, 3, 4 ir 5 paveikslėliai). Kiekviena iš šių funkcijų bus panagrinėta detaliau

Daroma prielaida, kad investicinį portfelis formuojamas iš vieno banko indėlio, dviejų akcijų ir vieno draudimo. Antroji akcija yra daug rizikingesnė nei pirmoji. Taip pat portfelyje galima laikyti grynuosius pinigus. Šių instrumentų pradiniai duomenys ir apskaičiuota tikėtina grąža pateikti 16 lentelėje:

16 lentelė

<table>
<tr><th>Instrumentas</th><th>Parametras</th><th>Reikšmė</th><th>Tikėtina grąža</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Banko indėlis</td><td>Palūkanų norma</td><td>8%</td><td rowspan="2">1.0584</td></tr>
<tr><td>Bankroto tikimybė</td><td>0.02</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Akcija_1</td><td>Nuostolio fiksavimo riba</td><td>-5%</td><td rowspan="4">1.1125</td></tr>
<tr><td>Nuostolio fiksavimo ribos tikimybė</td><td>0.2</td></tr>
<tr><td>Tenkinančio pajamingumo riba</td><td>20%</td></tr>
<tr><td>Tenkinančio pajamingumo ribos tikimybė</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Akcija_2</td><td>Nuostolio fiksavimo riba</td><td>-50%</td><td rowspan="4">1.05</td></tr>
<tr><td>Nuostolio fiksavimo ribos tikimybė</td><td>0.65</td></tr>
<tr><td>Tenkinančio pajamingumo riba</td><td>150%</td></tr>
<tr><td>Tenkinančio pajamingumo ribos tikimybė</td><td>0.2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Draudimas</td><td>Objekto vertė</td><td>6000</td><td rowspan="3">Grąža neigiama ir priklauso nuo investuojamos sumos</td></tr>
<tr><td>Draudimo įkainis (santykinė dalis nuo draudimo išmokos)</td><td>5%</td></tr>
<tr><td>Nelaimės įvykio (vagystės) tikimybė</td><td>0.04</td></tr>
<tr><td>Grynieji pinigai</td><td>–</td><td>–</td><td>1</td></tr>
</table>

„Rizikai neutralus“ naudingumo funkcijos tipas

Kai naudingumo funkcijos tipas yra „rizikai neutralus“, tai ši funkcija yra tiesė. Tai reiškia, kiek kartų padidėja kapitalas, lygiai tiek pat kartų padidėja to kapitalo nauda investuotojui. Tokiu atveju, investuotojas yra linkęs investuoti į tą instrumentą, kurio tikėtina grąža yra didžiausia. Atlikus eksperimentinį tyrimą su aukščiau minėtais investiciniais instrumentais, gauti rezultatai atvaizduoti 17 lentelėje. Eksperimente buvo investuojama 100 piniginių vienetų (naudingumo funkcija 4 pav.):

17 lentelė

Nr./Instrumentas	Grynieji pinigai	Banko indėlis	Akcija_1	Akcija_2	Draudimas
1	3,89	5,04	89,57	0,77	0,73
2	0,84	2,92	90,48	5,68	0,08
3	6,26	2,23	90,21	1,13	0,16
Vidurkis	**3,66**	**3,40**	**90,09**	**2,53**	**0.32**

Iš rezultatų matyti, kad optimizuojant portfelį, didžiąją dalį kapitalo, kaip ir tikėtasi siūloma investuoti į pirmąją akciją, kadangi jos tikėtina grąža yra didžiausia. Teoriškai į ją turėtų būti investuojamas absoliučiai visas kapitalas, tačiau praktiškai toks rezultatas pasiekiamas retai, ypač kai investuojama į daugiau instrumentų. Taip yra todėl, kad rezultatų tikslumas labai priklauso nuo skirtingų portfelių palyginimų (iteracijų) kiekio. Kiekvienoje iteracijoje į visus instrumentus yra investuojama tam tikra kapitalo dalis ir įvertinamas tokio portfelio naudingumas, kuris lyginamas su aukščiausią naudingumą turėjusiu portfeliu. Kokiomis dalimis investuoti į kiekvieną instrumentą, priklausomai nuo pasirinkimo, apsprendžia Bayeso arba Montecarlo algoritmai. Kuo daugiau iteracijų atliekama, tuo didesnė tikimybė priartėti prie portfelio optimalumo, tačiau dažniausiai niekada nebūna 100% garantijos, kad optimalumas yra pasiektas, nes įvairiausių portfelio proporcijų yra begalė.

„Vengiantis rizikos“ naudingumo funkcijos tipas

Vengiantys rizikos žmonės ryžtasi investuoti tik kai yra didelė tikimybė išlošti. Tokie žmonės labiau rūpinasi savo kapitalo išsaugojimu, nei galimybe uždirbti iš jo. Šiam tipui nebūdinga rizikuoti net su mažu kapitalu.

Su šia naudingumo funkcija (2 pav.) buvo atliktas eksperimentinis tyrimas, kuriame buvo investuojama į investicinius instrumentus, aprašytus 16 lentelėje. Gauti rezultatai pateikiami 18 lentelėje. Eksperimente buvo investuojama 100 piniginių vienetų. Ši suma, lyginant su draudžiamo objekto verte, yra labai nedidelė, dėl to naudojant „vengiančio rizikos“ naudingumo funkciją, geriausiai pasimato rizikos vengimo savybės. Investuojamos sumos dydis įtakoja rezultatus, nes optimizavimas remiasi naudingumo funkcija, o ši funkcija kaip tik ir parodo, kaip investuotojas vertina (elgiasi) su skirtinga pinigų suma. Investuojant skirtingą sumą, optimizuojant imamos kitos naudingumo funkcijos „atkarpos“.

18 lentelė

Nr. / Instrumentas	Grynieji pinigai	Banko indėlis	Akcija_1	Akcija_2	Draudimas
1	3,19	0,82	0,03	0,22	95,75
2	1,09	3,81	0,54	0,13	94,44
3	0,69	1,13	0,15	4,39	93,63
Vidurkis	**1,66**	**1,92**	**0,24**	**1,58**	**94,6**

Iš eksperimentinio tyrimo matyti, kad investuotojui yra geriau investuoti didžiąją dalį į draudimą, nepaisant to, kad draudimo tikėtina grąža yra mažiausia, netgi neigiama lyginant su kitais instrumentais. Tai reiškia, kad investuotojui yra geriau išvengti galimybės prarasti santykinai didelį, lyginant su investuojama suma, turtą nei investuoti tą turtą į kitas investicijas.

„Mėgstantis riziką“ naudingumo funkcijos tipas

Mėgstantys rizikuoti žmonės investuoja į tas sritis, kurios gali duoti didžiausią grąžą, netgi jei tos grąžos tikimybė yra labai maža.

Šios funkcijos (3 pav.) eksperimentinio tyrimo rezultatai surašyti 19 lentelėje. Eksperimento metu buvo daroma prielaida, kad investuojama 1000 piniginių vienetų. Tai leidžia geriau atskleisti riziką mėgstančio žmogaus elgseną. Patogumo dėlei, gauti rezultatai padalinti iš dešimties, kad būtų lengviau palyginti su kitų naudingumo funkcijų rezultatais.

19 lentelė

Nr. / Instrumentas	Grynieji pinigai	Banko indėlis	Akcija_1	Akcija_2	Draudimas
1	9,10	0,31	4,13	85,02	1,44
2	5,15	0,01	10,93	82,40	1,51
3	5,64	1,15	4,32	87,02	1,87
Vidurkis	**6,63**	**0,49**	**6,46**	**84,81**	**1,61**

Mėgstantis rizikuoti žmogus, norėdamas investuoti 1000 piniginių vienetų į instrumentus, aprašytus 16 lentelėje, daugiausiai kapitalo skirtų antrajai akcijai, kadangi čia yra galimybė išlošti didžiausią sumą. Nors šio instrumento išlošimo tikimybė mažesnė, nei, pavyzdžiui, pirmosios akcijos, tačiau investuotojui galimybė išlošti didelę sumą yra svarbiau nei galimas kapitalo praradimas.

„Vidutinės rizikos“ naudingumo funkcijos tipas

Prieš tai buvo aptarti trys pagrindiniai investuotojų tipai, tai yra rizikai neutralūs, vengiantys rizikos ir mėgstantys riziką. Realybėje tokių išgrynintų tipų nebūna. Daugelis žmonių nebijo rizikuoti su maža pinigų suma, tačiau pasiekus tam tikrą sumą pradeda elgtis labai atsargiai. „Vidutinės rizikos“ tipo naudingumo funkcijos (5 pav.) eksperimentinis tyrimas aprašytas 20 lentelėje. Eksperimente daroma prielaida, kad investuojama 500 piniginių vienetų. Visi eksperimento rezultatai padalinti iš 5, kad būtų galima lyginti su kitų eksperimentų rezultatais.

20 lentelė

Nr. / Instrumentas	Grynieji pinigai	Banko indėlis	Akcija_1	Akcija_2	Draudimas
1	0,61	0,50	49,13	0,96	48,80
2	0,57	1,26	47,42	1,91	48,84
3	1,30	1,74	46,95	0,82	49,19
Vidurkis	**0,83**	**1,17**	**47,83**	**1,23**	**48,94**

Gauti rezultatai panašūs į tokius kokių ir buvo galima tikėtis. Portfelis sudarytas iš mišrių instrumentų. Didžiausias kapitalo dalis siūloma investuoti į pirmąją akciją ir į draudimą. Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad turėjo būti investuota daugiau į antrąją akciją, kadangi naudojama naudingumo funkcija yra tarsi suma visų kitų minėtų funkcijų. Prieš tai vykdytas eksperimentas parodė, kad būtent į šią akciją siūloma daugiausiai investuoti riziką mėgstantiems investuotojams. Tačiau tame eksperimente buvo investuojama 1000 piniginių vienetų, o šiame 500. Portfelio naudingumas labai priklauso nuo investuojamos sumos, ypač kai viena iš investicijų yra brangaus objekto, lyginant su investiciniu kapitalu, draudimas. Tokiu atveju, investicinis kapitalas negali stipriai įtakoti viso turimo kapitalo (kartu su draudžiamu objektu), o visos galimos portfelio grąžos yra nelabai toli viena nuo kitos. Dėl šios priežasties gali būti panaudota tik siaura sritis naudingumo funkcijos ir neatsiskleisti savybės, kurios atsiskleistų, kai galimų portfelio grąžų reikšmės būtų labai išsibarsčiusios.

4.2. Rezultatų tikslumo priklausomybės nuo iteracijų skaičiaus tyrimas

Kaip minėta anksčiau, portfelio rezultatų tikslumą įtakoja vykdomų iteracijų skaičius. Portfelio proporcijų generavimui naudojami Montecarlo arba Bayes algoritmai. Montecarlo algoritmas generuoja atsitiktines proporcijų reikšmes, o Bayes atsižvelgdamas į prieš tai buvosio portfelio naudingumą, generuoja sekančias proporcijas. Kad būtų galima įvertinti, portfelio rezultatų tikslumą, bus naudojama rizikai neutrali naudingumo funkcija. Tokiu atveju portfelis turi būti sudarytas iš vienintelio instrumento, kurio tikėtina grąža yra didžiausia. Tikėtiną grąžą kiekvienam instrumentui galima nesunkiai pasiskaičiuoti. Atrinkus instrumentą su didžiausia tikėtina grąža, yra lyginama ar to instrumento ir portfelio tikėtinas pajamingumas panašūs (teoriškai turėtų būti lygūs). Portfelio veikimo algoritmas nuo naudingumo funkcijos tipo visiškai nepriklauso, pasirinkta rizikai neutrali naudingumo funkcija tik tam, kad būtų galima apskaičiuoti, koks turėtų būti teisingas portfelis.

Tyrimo tikslas yra išsiaiškinti, kaip iteracijų ir investicinių instrumentų kiekis įtakoja investicinio portfelio rezultatų tikslumą. Naudojami investiciniai instrumentai yra aprašyti 21 lentelėje.

21 lentelė

Pavadinimas / Parametras	Nuostolio fiksavimo riba	Nuostolio tikimybė	Tenkinančio pajamingumo riba	Tenkinančio pajamingumo tikimybė	Tikėtina grąža
Akcija_1	-30%	0,5	20%	0,3	0,9
Akcija_2	-20%	0,4	40%	0,4	1,1
Akcija_3	-10%	0,2	40%	0,4	1,2
Akcija_4	-5%	0,1	45%	0,5	1,3
Grynieji pinigai	–	–	–	–	1

Rezultatų tikslumas yra įvertinamas atsižvelgiant į galimą minimalią ir maksimalią portfelio grąžą. Minimali įmanoma tikėtina portfelio grąža atitinka 0% tikslumą, o maksimali – 100%. Maksimali grąža įvertinama 100%, kadangi tyrimo tikslas ir yra nustatyti maksimalią tikėtiną grąžą. Gavus tikėtiną portfelio grąžą kažkur tarp minimalios ir maksimalios grąžos, rezultatų tikslumas įvertinamas tiesiškai.

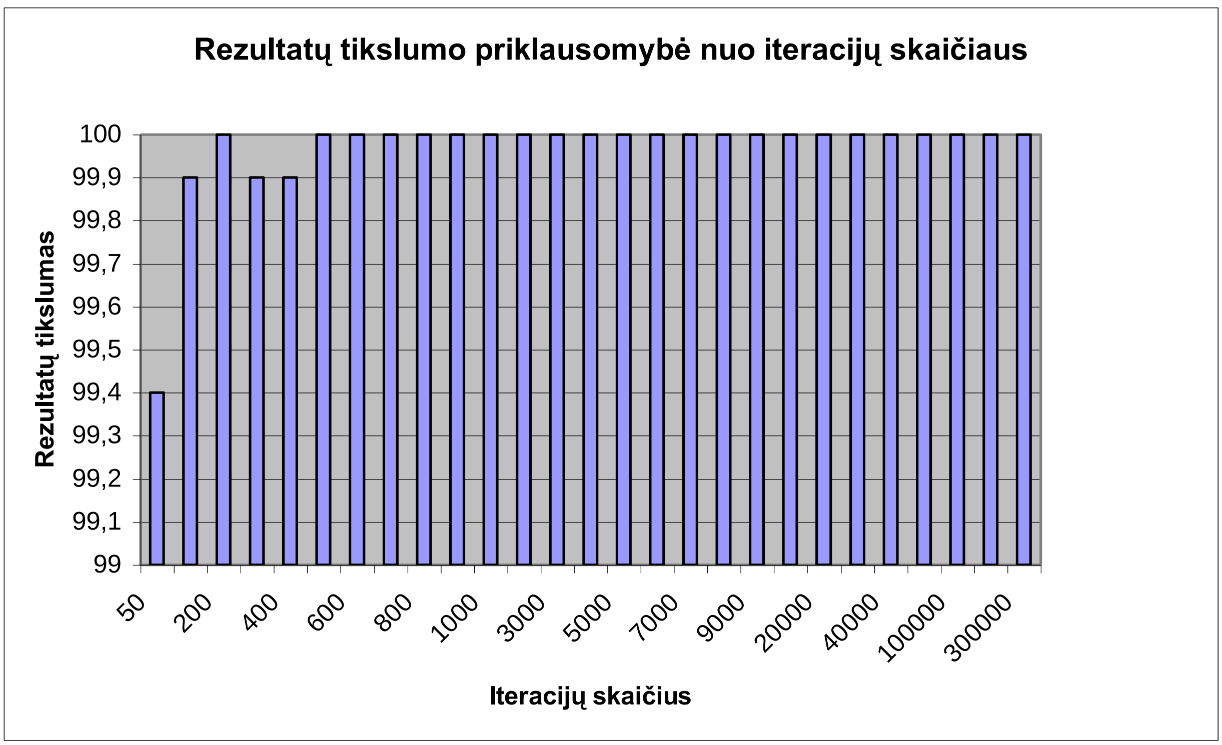
<u>Tyrimui naudojama viena akcija ir grynieji pinigai.</u>

22 lentelė

Iteracijų kiekis	Aptikta iteracijoje	Grynieji	Akcija_1	Tikėtina grąža	Rezultatų tikslumas (%)
50	44	99,44	0,56	99,94	99,4
100	26	99,86	0,14	99,99	99,9
200	106	99,98	0,02	100	100
300	196	99,89	0,11	99,99	99,9
400	132	99,94	0,06	99,99	99,9
500	202	99,97	0,03	100	100
600	343	99,99	0,01	100	100
700	587	99,99	0,01	100	100
800	189	100	0	100	100
900	542	99,98	0,02	100	100
1000	134	99,98	0,02	100	100
2000	778	99,99	0,01	100	100

3000	2863	99,99	0,01	100	100
4000	1849	100	0	100	100
5000	643	100	0	100	100
6000	3827	99,99	0,01	100	100
7000	6273	100	0	100	100
8000	7150	100	0	100	100
9000	1526	100	0	100	100
10000	762	100	0	100	100
20000	2692	100	0	100	100
30000	6572	100	0	100	100
40000	8142	100	0	100	100
50000	1967	100	0	100	100
100000	855	100	0	100	100
200000	7843	100	0	100	100
300000	4007	100	0	100	100

Iš gautų rezultatų matyti, kad kai yra tik dvi investavimo galimybės (grynieji pinigai ir Akcija_1), maksimalus iteracijų skaičius, kada buvo pasiektas 100% tikslumas yra 8142. Galima daryti išvadą, kad ar atlikus 8142 iteracijas ar daugiau, apskaičiuota portfelio grąža investuojant į dvejus instrumentus nebesikeis. Iš šių duomenų sudaryta diagrama pateikta 23 paveikslėlyje.



23pav. Dviejų instrumentų rezultatų tikslumas

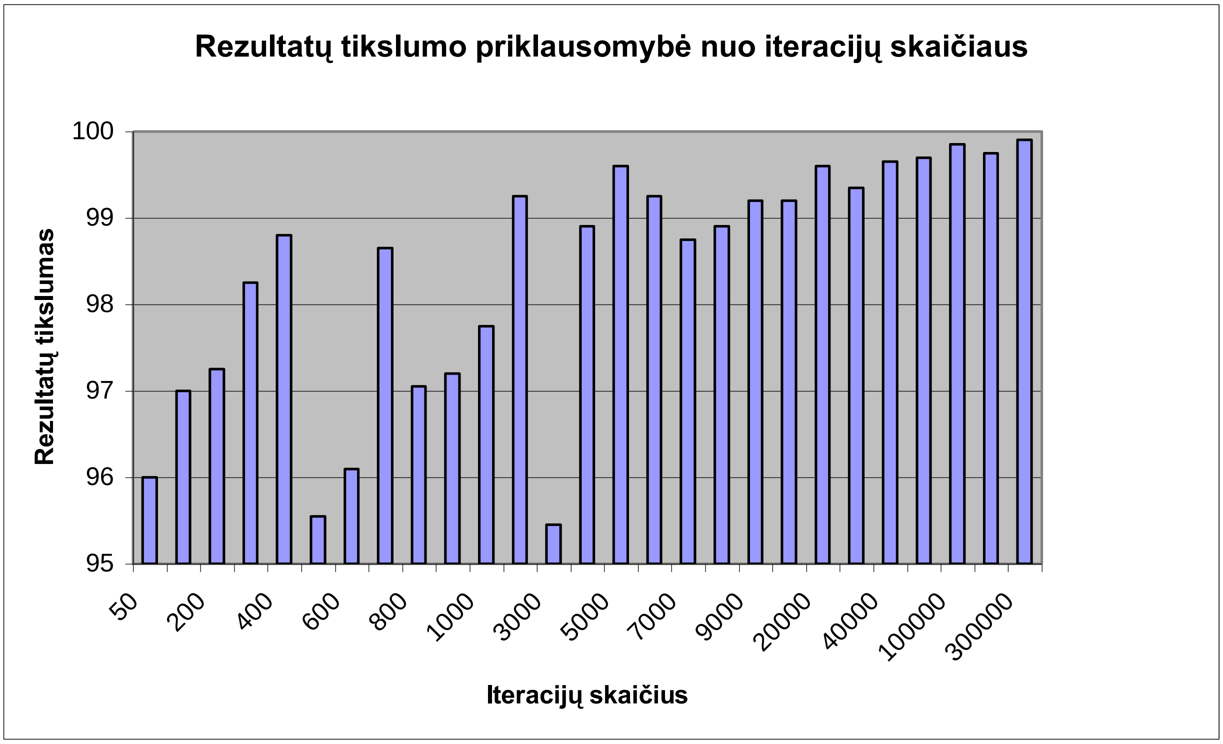
Iš 23 paveikslėlyje pateiktos diagramos matyti, kad 100% rezultatų tikslumas jau buvo pasiekiamas nuo 500 iteracijos.

Tyrimui naudojamos dvi akcijos ir grynieji pinigai

23 lentelė

Iteracijų kiekis	Aptikta iteracijoje	Grynieji pinigai	Akcija_1	Akcija_2	Tikėtina grąža	Rezultatų tikslumas (%)
50	27	7,97	0,03	92	109,2	96
100	81	1	2,49	96,51	109,4	97
200	55	2,23	1,63	96,14	109,45	97,25
300	211	2,26	0,61	97,13	109,65	98,25
400	82	2,15	0,11	97,74	109,76	98,8
500	403	2,38	3,28	94,34	109,11	95,55
600	145	4,67	1,56	93,77	109,22	96,1
700	367	2,42	0,13	97,45	109,73	98,65
800	15	3,2	1,37	95,43	109,41	97,05
900	33	5,5	0,07	94,43	109,44	97,2
1000	764	1,02	1,76	97,22	109,55	97,75
2000	1353	0,83	0,34	98,83	109,85	99,25
3000	194	3,28	2,89	93,83	109,09	95,45
4000	755	1,64	0,3	98,06	109,78	98,9
5000	2269	0,42	0,19	99,39	109,92	99,6
6000	299	1,35	0,1	98,55	109,85	99,25
7000	1758	2,23	0,13	97,64	109,75	98,75
8000	3369	0,89	0,65	98,46	109,78	98,9
9000	2008	1,41	0,07	98,52	109,84	99,2
10000	377	0,65	0,49	98,86	109,84	99,2
20000	2259	0,08	0,36	99,56	109,92	99,6
30000	19126	0,67	0,3	99,03	109,87	99,35
40000	29304	0,17	0,28	99,55	109,93	99,65
50000	29084	0,09	0,26	99,65	109,94	99,7
100000	18745	0,16	0,05	99,79	109,97	99,85
200000	58835	0,04	0,21	99,75	109,95	99,75
300000	83790	0,12	0,02	99,86	109,98	99,9

Iš gautų duomenų sudaryta diagrama pateikiama 24 paveikslėlyje.



24pav. Trijų instrumentų rezultatų tikslumas

Iš 24 paveikslėlyje pateiktos diagramos matyti, kad kai skaičiavimai vykdomi nuo 5000 iteracijų, rezultatų tikslumas tampa pastovesnis ir mažiau svyruoja. Nuo 9000 iteracijų, rezultatų tikslumas visada didesnis nei 99,2%.

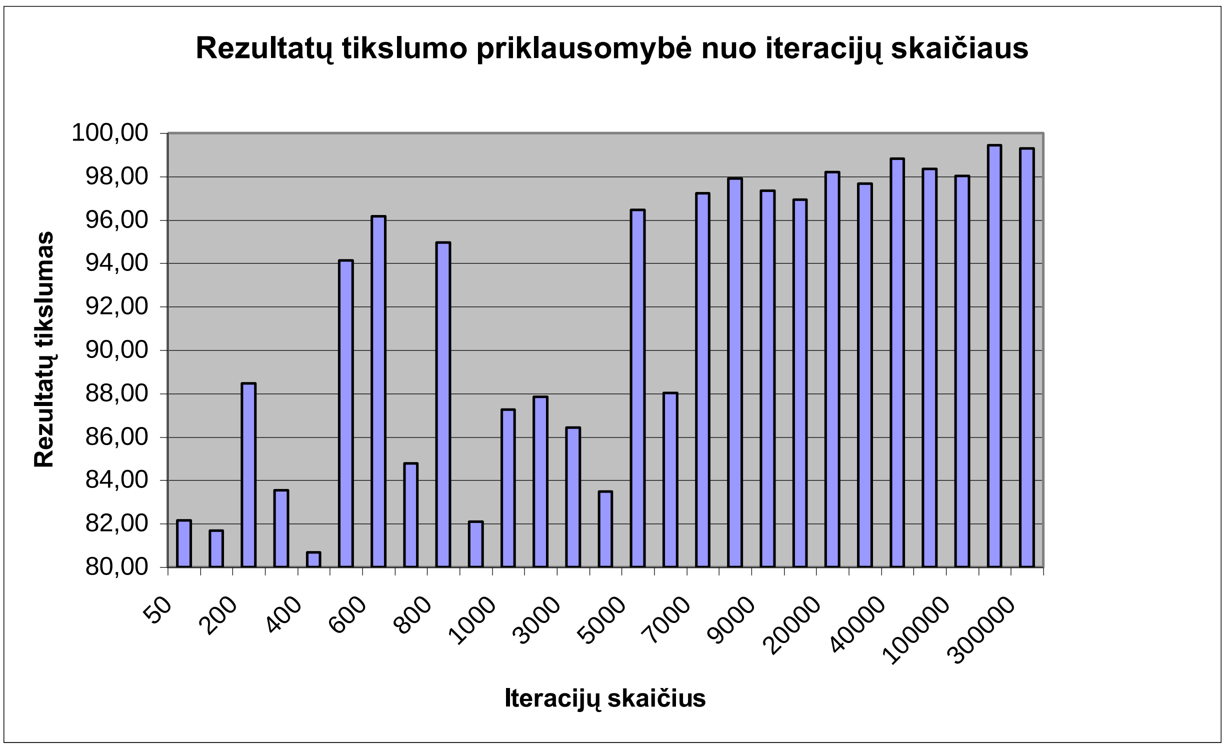
<u>Tyrimui naudojamos trys akcijos ir grynieji pinigai</u>

24 lentelė

Iteracijų kiekis	Aptikta iteracijoje	Grynieji pinigai	Akcija_1	Akcija_2	Akcija_3	Tikėtina grąža	Rezultatų tikslumas (%)
50	24	0,53	1,6	47,6	50,27	114,65	82,17
100	93	12,15	1,48	26,25	60,12	114,5	81,67
200	23	1,73	0,71	28,98	68,58	116,54	88,47
300	25	4,75	1,28	36,1	57,87	115,06	83,53
400	223	0,94	0,4	54,91	43,75	114,2	80,67
500	367	8,21	0,22	0,49	91,08	118,24	94,13
600	564	2,08	0,91	4,64	92,37	118,85	96,17
700	478	5,09	0,86	32,95	61,1	115,43	84,77
800	15	0,87	1,67	8,35	89,11	118,49	94,97
900	133	2,5	0,36	47,63	49,51	114,63	82,10
1000	16	9,82	5,51	2,05	82,62	116,18	87,27
2000	1295	10,27	0,22	15,28	74,23	116,35	87,83
3000	24	10,51	3,73	8,51	77,25	115,93	86,43
4000	36	1,72	0,88	43,47	53,93	115,04	83,47
5000	1437	1,04	0,8	6,14	92,02	118,94	96,47
6000	3514	2,54	7,04	9,72	80,7	116,41	88,03

7000	259	2,41	0,65	1,53	95,41	119,17	97,23
8000	1118	0,22	1,87	0,26	97,65	119,37	97,90
9000	5543	0,39	1,76	1,97	95,88	119,2	97,33
10000	2503	0,95	0,73	5,09	93,23	119,08	96,93
20000	3622	1,37	0,77	0,31	97,55	119,46	98,20
30000	15041	0,14	0,24	6,05	93,57	119,3	97,67
40000	30627	0,66	0,51	0,66	98,17	119,65	98,83
50000	16687	0,47	0,93	1,26	97,34	119,5	98,33
100000	25668	0,18	1,43	1,28	97,11	119,41	98,03
200000	127912	0,01	0,15	1,22	98,62	119,83	99,43
300000	103985	0,29	0,19	0,98	98,54	119,79	99,30

Iš gautų duomenų sudaryta diagrama pateikiama 25 paveikslėlyje.



25pav. Keturių instrumentų rezultatų tikslumas

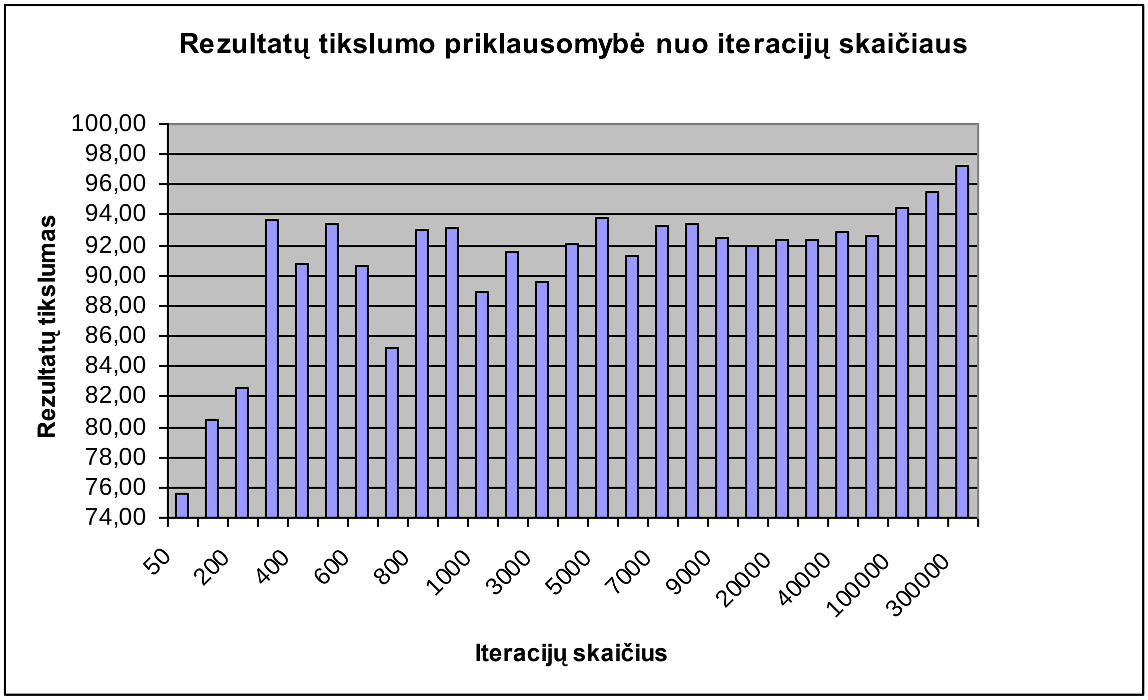
Iš 25 paveikslėlyje pateiktos diagramos matyti, kad rezultatai tampa pastovesni nuo 7000 iteracijų. Nuo 40 000 iteracijų rezultatų tikslumas visada būna daugiau nei 98%.

<u>Tyrimui naudojamos visos keturios akcijos ir grynieji pinigai</u>

25 lentelė

Iteracijų kiekis	Aptikta iteracijoje	Grynieji pinigai	Akcija_1	Akcija_2	Akcija_3	Akcija_4	Tikėtina grąža	Rezultatų tikslumas (%)
50	16	3,14	12,19	0,43	38,9	45,34	120,21	75,53
100	28	8,58	1,97	0,07	44,12	45,26	122,21	80,53
200	24	4,7	1,1	4,46	42,2	47,54	123,04	82,60
300	179	4,5	0,89	4,13	0,14	90,34	127,45	93,63
400	85	1,84	0,34	0,9	27,98	68,94	126,33	90,83
500	251	2,01	0,31	7,44	4,23	86,01	127,36	93,40
600	531	0,43	1,1	5,98	20,1	72,39	126,23	90,58
700	20	0,32	1,72	1,18	48,92	47,86	124,09	85,23
800	247	3,68	1,43	4,21	2,86	87,82	127,2	93,00
900	713	0,67	4,66	3,2	0,35	91,12	127,26	93,15
1000	301	2,83	2,42	1,87	22,68	70,2	125,54	88,85
2000	1160	4,82	1,7	2,27	8,11	83,1	126,61	91,53
3000	203	4,21	1,11	7,31	10,04	77,33	125,83	89,58
4000	101	0,19	2,19	7,91	6,43	83,28	126,84	92,10
5000	530	1,28	2,64	0,92	8,64	86,52	127,51	93,78
6000	594	1,15	1,7	4,25	16,27	76,63	126,5	91,25
7000	4562	0,01	0,94	1,44	20,22	77,39	127,31	93,28
8000	2279	1,17	0,25	6,18	9,39	83,01	127,37	93,43
9000	3633	0,34	1,4	10,19	3,34	84,73	126,97	92,43
10000	5633	5,25	0,06	1,89	12,23	80,57	126,8	92,00
20000	14111	1,06	2,44	7,63	2,31	86,56	126,95	92,38
30000	7179	1,37	1,55	0,32	19,79	76,97	126,93	92,33
40000	25707	1,04	0,6	0,25	22,71	75,4	127,13	92,83
50000	6787	0,4	1,37	1,35	20,33	76,55	127,03	92,58
100000	63415	4,34	0,5	2,41	2,49	90,26	127,77	94,43
200000	93655	0,66	0,41	5,35	3,84	89,74	128,18	95,45
300000	144367	0,53	0,57	1,32	4,84	92,74	128,87	97,18

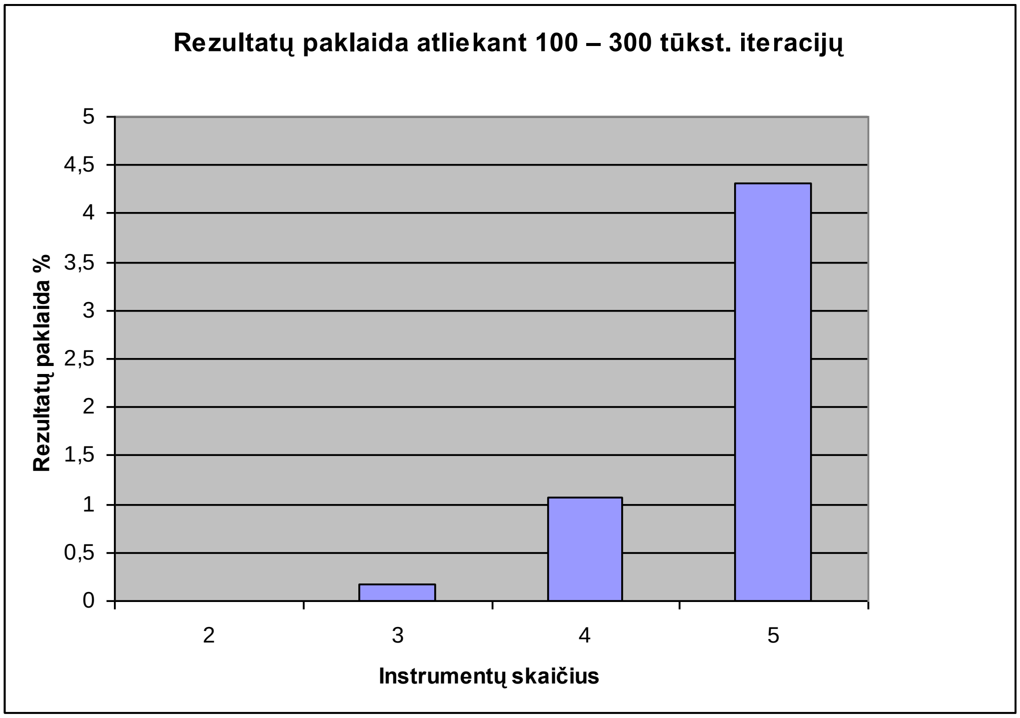
Iš gautų duomenų sudaryta diagrama pateikiama 26 paveikslėlyje.



26pav. Penkių instrumentų rezultatų tikslumas

Iš 26 paveikslėlyje pateiktos diagramos matyti, kad kai instrumentų skaičius yra 5, įvykužius net 300 000 iteracijų yra pasiekiamas tik 97,18% tikslumas, kai tuo tarpu tiriant 4 instrumentus buvo pasiektas 99,3% tikslumas.

Jei paimtume rezultatų paklaidų vidurkį (100% - rezultatų patikimumas), kai optimizavimo metu buvo atliekama 100, 200 ir 300 tūkstančių iteracijų, pamatytume, kad rezultatų paklaida labai sparčiai didėja, kai auga investicinių instrumentų kiekis. Kai investicinių instrumentų kiekis portfelyje didėja, norint gauti tikslius rezultatus, būtina atlikti labai didelį iteracijų kiekį, portfelio optimizavimo metu. Rezultatų paklaidos priklausomybė nuo instrumentų kiekio pavaizduota 27 paveikslėlyje.



27pav. Rezultatų tikslumo priklausomybė nuo instrumentų kiekio

4.3.Markowitz ir naudingumo funkcija paremto modelio palyginimas

Pagrindinis Markowitz investicinio portfelio modelio ir modelio, paremto naudingumo funkcija skirtumas yra skirtingai apibrėžiama rizika. Kaip minėta anksčiau, Markowtiz modelyje rizika apibrėžiama kaip dispersija, tai yra – kuo portfelio pajamingumas labiau kinta, tuo portfelis laikomas rizikingesniu. Naudingumo funkcija paremtame modelyje, rizika apibrėžiama per vartotojo naudingumo funkciją. Ši funkcija parodo, kaip investuotojas elgiasi su skirtingu kapitalo dydžiu, kokiomis sąlygomis (kokiam laimėjimui ir kokiam pralaimėjimui) jis tą kapitalą investuotų, o kokiomis ne. Remiantis šia funkcija ir yra optimizuojamas portfelis. Abu optimizavimo modeliai savo prigimtimi yra labai skirtingi. Makowitz modelyje rizikos vertinimas apibrėžtas labai griežtai ir praktiškai negali būti keičiamas, tuo tarpu optimizuojant portfelį remiantis naudingumo funkcija, rizika kiekvieno investuotojo gali būti įvertinta individualiai.

Markowitz modelyje sudarinėjant portfelį rizika įvertinama ne vartotojo akimis, o remiantis dispersija, t. y. optimizavimas mažai priklauso nuo individualios investuotojo tolerancijos rizikai. Investuotojas tik visų optimizacijų gale pasirenka vieną iš efektyvių portfelių, kurio pajamingumo ir rizikos santykis jam atrodo priimtinas. Taip pat, kad sėkmingai taikyti Markowitz modelį rekomenduojamas kuo didesnis akcijų kiekis, nes didėjant nekoreliuojančių akcijų kiekiui, rizika mažėja. Tai nėra priimtina visais atvejais. Investuotojas dažnai pats būna įvertinęs akcijų perspektyvą, galimus instrumento nuostolius ir galimą pelną. Taip pat investuotojas dažnai renkasi ribotą kiekį instrumentų, kadangi išanalizuoti gausybę atvejų yra labai sudėtinga. Tokiu atveju, geriau vertinti riziką per naudingumo funkciją. Ji leidžia objektyviau nustatyti vartotojui priimtiną riziką, o ne optimizuoti visus galimus portfelius naudojant visiem investuotojam tą pačią portfelio dispersiją.

Kad optimizavimas remiantis dispersija ir koreliacija nėra visada tinkamas būdas sudaryti portfelį, byloja ir tai, kad nepriklausomai nuo investuotojo, instrumentų rizika (dispersija ir kovariacijos) yra pastovi ir negali būti kitaip vertinama, kadangi tiems patiems instrumentams, istoriniai duomenys, o tuo pačiu ir iš jų gaunama dispersija yra pastovus dydis. Tačiau realybėje skirtingi investuotojai, dėl vienų ar kitų priežasčių, to paties vertybinio popieriaus riziką dažnai vertina skirtingai. Iš dalies, dėl to ir vyksta prekyba biržoje – dėl skirtingų požiūrių.

Naudingumo funkcija paremtame modelyje, vertybinių popierių rizikos vertinimas daugiau perduodamas pačiam investuotojui. Daroma prielaida, kad investuotojas, norėdamas įsigyti vertybinį popierių visada nusistato du išėjimo iš pozicijos taškus. Vienas taškas būtų akcijos kaina, kurią pasiekus, investuotojas nebetoleruoja kurso kritimo ir parduoda, o antras – tai akcijos kaina, kurią pasiekus, investuotojas pasitenkina esamu pajamingumu ir taip pat išeina iš pozicijos. Taip pat investuotojas įvertina šių taškų pasiekimo tikimybes. Remiantis šiais duomenimis, yra įvertinama instrumento rizika ir tikėtinas pajamingumas konkretaus investuotojo akimis.

Svarbu atskirti du dalykus – instrumento riziką ir portfelio riziką. Instrumento rizika yra konkrečios investavimo priemonės rizika. Nagrinėjamame modelyje yra trys instrumentai: banko indėliai, akcijos ir draudimas. Taip pat dar galima pridėti ir grynuosius pinigus, nes kartais yra geriau neinvestuoti, nei investuoti nuostolingai. Kiekviename iš jų atsižvelgiama į tam instrumentui charakteringiausią riziką.

- Investuojant į banko indėlius rizikuojama netekti kapitalo dėl banko bankroto galimybės.
- Investuojant į akcijas rizikuojama netekti kapitalo dalies dėl akcijų kurso svyravimų.
- Investuojant į draudimą rizikuojama, kad neįvyks įvykis, dėl kurio draudžiamasi.
- Grynieji pinigai yra laikomi nei rizikingais nei galinčiais atnešti pelno.

Portfelio rizika yra apibrėžiama per vartotojo naudingumo funkciją. Atsižvelgiant į visų portfelio instrumentų pajamingumus ir rizikas, yra nustatomas investicinio portfelio skirstinys, tai yra visos įmanomos portfelio kapitalo grąžos ir tų grąžų tikimybės. Kiekvienai galimai grąžai, remiantis vartotojo naudingumo funkcija, yra nustatoma tos grąžos nauda investuotojui. Tada panaudojant gautus visų įmanomų grąžų naudingumus ir portfelio grąžų skirstinio tikimybes yra nustatoma to portfelio tikėtinas naudingumas. Gautas naudingumas ir parodo rizikos ir pajamingumo santykį konkrečiam investuotojui. Kuo šis naudingumas didesnis, tuo investuotojui portfelis priimtinesnis.

Tyrime daroma prielaida, kad 2008 metų pradžioje, investuojama į keturias akcijas: UKB, LFO, TEO ir PTR. Kapitalo paskirstymą tarp šių akcijų bandoma nustatyti Markowitz ir nauingumo funkcija paremtu modeliu. Markowitz portfelio optimizavimas remiasi investicinių instrumentų kovariacija, o naudingumo funkcija paremtame modelyje daroma prielaida, kad akcijos visiškai nekoreliuoja. Portfelių palyginimo metu naudojami trijų metų istoriniai duomenys iki 2008 metų. Kiekviename modelyje naudojama tik tokia informacija, kuri yra aktuali kiekvienam modeliui.

Iš pirmojo priedo 2005 – 2007 duomenų apskaičiuotos kiekvieno instrumento tikėtinos grąžos yra pateikiamos 26 lentelėje.

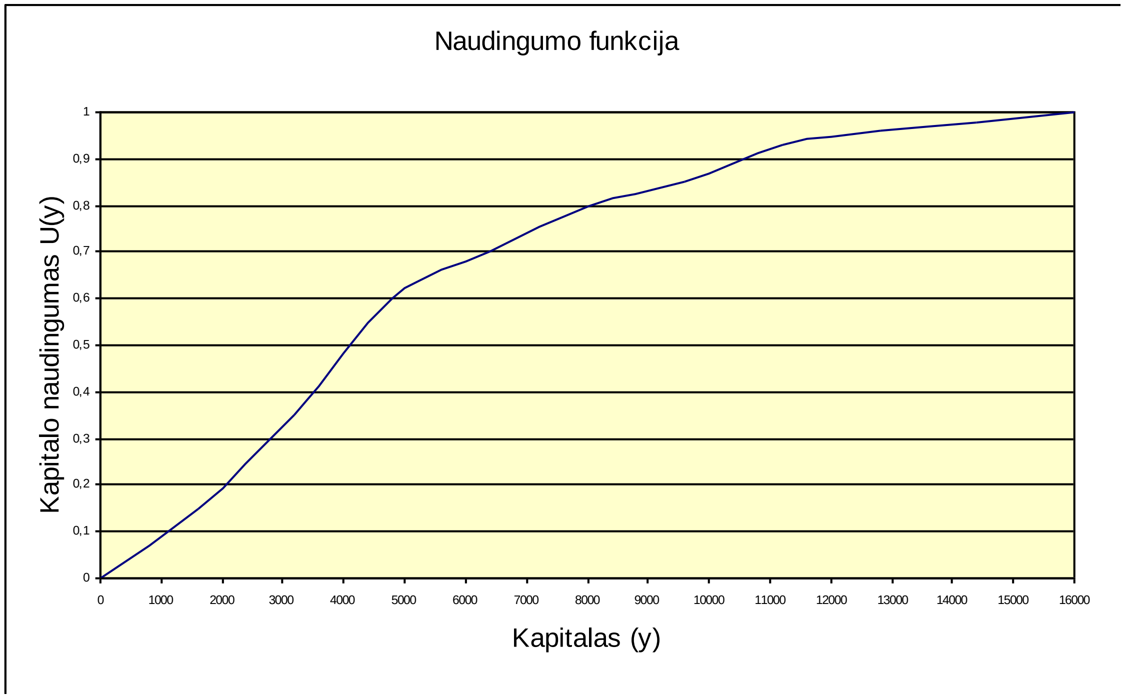
26 lentelė

Grynieji	**TEO**	**UKB**	**LFO**	**PTR**
0,00%	11,71%	97,57%	186,49%	246,9%

Naudingumo funkcija paremtame modelyje instrumento riziką investuotojas įvertina nustatydamas nuostolio fiksavimo ir tenkinančio pajamingumo ribas. Taip pat šio modelio optimizacija remiasi naudingumo funkcija, kuri įvertina investuotojo elgesį su skirtinga pinigų suma. Apibendrinant galima teigti, kad mano modelyje, rizikos vertinimui investuotojas daro labai didelę įtaką lyginant su Markowitz modeliu, o pati rizika apibrėžiama visiškai skirtingais būdais.

Labai svarbu tiksliai nustatyti naudingumo funkciją tarp minimalaus ir maksimalaus įmanomo portfelio pajamingumo, nes tik ši naudingumo funkcijos dalis įtakoja portfelio optimizaciją.

Portfelio optimizacijai naudojama naudingumo funkcija pateikiama 28 paveikslėlyje.



28pav. Optimizavimui naudojama naudingumo funkcija

Lentelėje nr. 27 pateikiama aukščiau minėtų instrumentų investuotojo vertinimas.

27 lentelė

Parametras	TEO	UKB	LFO	PTR
Tenkinančio pajamingumo riba	11,71%	25%	45%	60%
Tenkinančio pajamingumo tikimybė	0,8	0,6	0,4	0,4
Nuostolio fiksavimo riba	-15%	-15%	-15%	-15%
Nuostolio fiksavimo tikimybė	0,05	0,1	0,15	0,2

Po optimizacijos gautas portfelio paskirstymas pateikiamas 28 lentelėje. Šio portfelio tikėtinas pajamingumas yra *26,6%*

28 lentelė

Grynieji	TEO	UKB	LFO	PTR
0,32%	0,95%	2,47%	36,35%	59,92%

Realus tokio portfelio rezultatas per 2008 metus, darant prielaidą, kad investicijos yra parduodamos pasiekus nuostolio fiksavimo arba tenkinančio pajamingumo ribą yra *14,82%* nuostolio.

Istoriniai duomenys (2008 metų) rodo, kad visi instrumentai būtų parduoti, nes jų vertė nukrito iki nuostolio fiksavimo ribos. Jei būtų užsibrėžtas mažesnis tenkinantis pelnas, 2008 metais netgi būtų buvę galima uždirbti nemažą pelną, nepaisant to, kad iki metų pabaigos daugelio akcijų kursas žymiai nukrito..

Jei remiantis tais pačiais duomenimis būtų investuojama 2007 metais, metų pelnas būtų *17,76%*. Tokiu atveju TEO ir PTR akcijos būtų išlaikytos iki metų pabaigos ir parduotos paskutinės dienos kaina, kadangi šių akcijų kainos kitimo ribos neviršijo nusistatytų ribų. Tuo tarpu, UKB ir LFO būtų parduotos sulaukus tenkinančio pajamingumo.

Formuojant portfelį Markowitz modeliu, reikalinga akcijų kovariacijų matrica. Ši matrica pavaizduota 29 lentelėje. Šie duomenys apskaičiuoti iš istorinių 2005 – 2007 metų duomenų, kurie pateikiami pirmame priede.

29 lentelė

	Grynieji	**TEO**	**UKB**	**LFO**	**PTR**
Grynieji	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
TEO	0,00%	2,34%	12,11%	16,19%	49,14%
UKB	0,00%	12,11%	66,41%	54,73%	233,33%
LFO	0,00%	16,19%	54,73%	345,17%	511,46%
PTR	0,00%	49,14%	233,33%	511,46%	1159,25%

Kadangi naudingumo funkcija paremtu modeliu gauto portfelio tikėtinas pajamingumas yra 26,6%, tokio pajamingumo siekiama ir iš Markowitz modeliu sudaryto portfelio. Tokiam pajamingumo lygiui (26,6%) pagal Markowitz modelį apskaičiuotas, mažiausiai rizikingas portfelis yra pateikiamas 30 lentelėje. Skaičiavimai buvo atlikti Excel skaičiuoklėje realizuota programa – „Risk slover“. Šio programos langas su apskaičiuotais rezultatais pateikiami antrajame priede.

30 lentelė

Grynieji	**TEO**	**UKB**	**LFO**	**PTR**
77,48%	0,00%	17,32%	5,20%	0,00%

Realus tokio portfelio rezultatas per 2008 metus būtų buvęs *18%* nuostolio. 2008 metais praktiškai visos akcijos krito labai ženkliai, todėl -18% pajamingumas būtų daug geresnis nei bendras rinkos vidurkis.

Jei remiantis tais pačiais duomenimis būtų investuojama 2007 metais, portfelio metų pelnas būtų 10,2%.

Apibendrinti abiem modeliais suformuotų portfelių rezultatai pateikiami 31 lentelėje

31 lentelė

Metai	**Naudingumo funkcija paremtas modelis**	**Markowitz modelis**
2007	17,76%	10,2%
2008	-14,82%	-18%

Iš gautų rezultatų matyti, kad tiek pelningais 2007 metais tiek nuostolingais 2008 metais, portfelis paremtas naudingumo funkcija buvo tikslesnis, t. y. realūs rezultatai buvo arčiau prognozuojamo portfelio pajamingumo – 26,6%. Tam didelę įtaką turėjo tai, kad akcijoms nustatomos nuostolio ir pelno fiksavimo ribos, kas neleidžia portfelio pajamingumai svyruoti už šių ribų.

Apskritai, lyginti šiuos modelius nelabai yra prasmės, kadangi naudingumo funkcija paremto modelio sudarytas portfelis gali būti visiškai kitoks, jei bus naudojama kito investuotojo nustatyta naudingumo funkcija. Be to, kaip minėta anksčiau, modeliuose skirtingai vertinama rizika.

Markowitz modelyje visas rizikos valdymas apsprendžiamas algoritmu, įvertinant tiek instrumento tiek portfelio dispersijas. Investuotojas neįtakoja instrumento rizikos. Pavyzdžiui, jei investuotojas manytų, kad UKB akcijos kitais metais turi daug didesnę, nei įprastai, tikimybę būti nuostolingomis, jis negalėtų to įvertinti modelyje. Taip yra todėl, kad instrumentų kovariacija yra skaičiuojama statistiškai iš istorinių duomenų. Ji parodo skirtingų instrumentų tendenciją kartu būti pelningais arba nuostolingais. Taip pat Markowitz portfelio optimizacijoje neatsižvelgiama į investuojamą sumą, nors dažniausiai, priklausomai nuo šios sumos, investuotojai toleruoja skirtingą riziką.

Naudingumo funkcija paremtame modelyje, daroma prielaida, kad investuotojas yra aktyvus, tai yra jis stebi akcijų rinką ir parduoda akcijas pasiekus tam tikrą ribą, tuo tarpu Markowitz modelyje investuotojas gali būti pasyvus – investavęs pinigus jis gali ramiai laukti investicinio periodo pabaigos. Svarbu pastebėti ir tai kad naudingumo funkcija paremtame modelyje neatsižvelgiama į instrumentų koreliaciją, o Markowitz modelyje, vertybinių popierių koreliacija yra pagrindas optimizuojant investicinį portfelį.

Dėl minėtų priežasčių įvardinti, kuris modelis yra geresnis neįmanoma. Tai priklauso nuo situacijos ir investuotojo būdo.

5. Išvados

- Kiekvienas investuotojas turi balansuoti tarp rizikos ir pelningumo, kad gautų maksimalią naudą. Tai padeda pasiekti investicinio portfelio optimizavimo modeliai, kurių pagalba paskirstomas kapitalas tarp investicijų.
- Darbe buvo pristatyti populiariausi investicinio portfelio formavimo modeliai. Daugelis modelių remiasi Harry Markowitz modeliu, dėl to šis modelis buvo pristatytas plačiau. Markowitz modelyje investavimo rizika apibrėžiama kaip investicijų grąžos dispersija.
- Pristatytas alternatyvus investavimo modelis, kuris remiasi naudingumo funkcija. Šiame modelyje rizika vertinama per individualaus investuotojo požiūrį į galimą kapitalo prieaugį arba netekimą.
- Pristatyta programinės įrangos, realizuojančios alternatyvų modelį, techninė dokumentacija.
- Atlikta optimalaus portfelio sistemos analizė. Nustatyta, kad investicinio kapitalo paskirstymas tarp portfelio instrumentų labai priklauso nuo naudingumo funkcijos ir investuojamo kapitalo dydžio. Taip pat nustatyta, kad didėjant investicinių instrumentų kiekiui portfelyje, rezultatų tikslumas labai sumažėja. Norint gauti patikimesnius rezultatus, optimizuojant reikia naudoti didesnį iteracijų kiekį.
- Darbe buvo palyginti naudingumo funkcija paremto modelio ir Markowitz modelio veikimas su realiais duomenimis. Gauti rezultatai parodė, kad duotomis sąlygomis, Markowitz modelio tikslumas buvo mažesnis, tačiau šių modelių lyginimas vien tik pagal investicijų grąžą nėra labai naudingas. Šių modelių optimizavimo principai yra visiškai skirtingi, taip pat vienas modelis skirtas pasyviam investuotojui, kitas – aktyviam. Dėl šių priežasčių įvardinti kuris modelis geresnis praktiškai neįmanoma. Tai priklauso nuo situacijos ir investuotojo būdo.

6. Literatūra

1. Mockus, J. *A set of examples of global and discrete optimization* [interaktyvus]. 2nd ed. Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 2000 [žiurėta 2009-03-15]. Prieiga per internetą: <http://www.soften.ktu.lt/~mockus/docj/stud2.pdf>
2. Cibulskienė, D. *Ekonomika ir vadyba: aktualijos ir perspektyvos*. Vilnius, 2007.
3. NEDZVECKAS, J.; RASIMAVIČIUS, G. Vertybinių popierių portfelio valdymas ir monitoringas. Inžinerinių sprendimų ekonomika, nr. 1(16). Kaunas, 2000.
4. Radziukynienė, I. *LITIN-10 Daugiaveiksminis modelis* [interaktyvus]. [žiūrėta 2008-01-20]. Prieiga per internetą: http://internet.ktu.lt/lt/mokslas/konf05/konf_02/IT2005/Sekc12.pdf
5. Markowitz, H. M. *Portfolio selection. Efficient diversification of investments*. Yale University, 1959.
6. Jose Luis Bermundez. *Decision theory and rationality*. Oxford University Press. New Yourk, 2009
7. Rinkos statistika [interaktyvus]. [žiūrėta 2009-05-10]. Prieiga per internetą: http://www.nasdaqomxbaltic.com/market/?pg=stats
8. Mockus, J., Eddy,W., Mockus, A., Mockus, L., and Reklaitis, *G. Bayesian Heuristic Approach to Discrete and Global Optimization*. Kluwer Academic Publishers, 1997
9. Elmerraji, J. *Use Stop Loss Orders to Protect Your Gains* [interaktyvus]. [žiūrėta 2009-05-10]. Prieiga per internetą: http://pennysleuth.com/use-stop-loss-orders-to-protect-your-gains
10. Ramanauskas, T. *Markowitz modelio diversifikavimo teorijos principai* [interaktyvus]. [žiūrėta 2009-05-10]. Prieiga per internetą http://finansai123.googlepages.com/5_Markowitz_portfelio_diversifikavim.pdf

7. Terminų ir santrumpų žodynas

VP – vertybiniai popieriai

APT – arbitražo įkainojimo teorija (angl. arbitrage pricing theory)

CAPM – ilgalaikio turto įkainojimo modelis (angl. Capital Asset Pricing Model)

8. Priedai

1. Priedas. Akcijų istoriniai duomenys 2005 – 2008 metais.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Pradžia	Pabaiga	Dividendai	Pajamingumas			Vidurkis 2005-2007
2	2005	2,15	2,71	0,13	0,320930233		TEO	0,117106519
3	2006	2,71	2,76	0,16	0,077490775			
4	2007	2,76	2,37	0,26	-0,047101449			
5	2008	2,37	1,16	0,25	-0,405063291			
6								
7								
8	2005	7,28	21,3	0,12	1,942307692		UKB	0,975718932
9	2006			0,01	1,036			
10	2007	3,91	3,7	0,01	-0,051150895			
11	2008	3,7	0,66	0,02	-0,816216216			
12								
13								
14	2005	9,15	45,71	0	3,995628415		LFO	1,864879476
15	2006	45,71	21,4	0	-0,531831109			
16	2007	21,4	67	0	2,130841121			
17	2008	67	17,44	0	-0,739701493			
18								
19								
20	2005	1,69	14	0	7,284023669		PTR	2,468988653
21	2006	14	15,1	0	0,078571429			
22	2007	15,1	15,6	0,17	0,044370861			
23	2008	15,6	1,5	0,23	-0,889102564			

Duomenys apskaičiuoti remiantis rinkos statistika, pateikta http://www.nasdaqomxbaltic.com

2. Priedas. „Risk solver" programa apskaičiuotas Markowitz portfelis.

	A	B	C	D	E	F	H	I
5		Stock 1	Stock 2	Stock 3	Stock 4	Stock 5	Total	
6	Portfolio %	77,48%	0,00%	17,32%	5,20%	0,00%	100,00%	
7	Expected Return	0,00%	11,71%	97,57%	186,49%	246,90%		
8								
9	Variance/Covariance Matrix							
10		Stock 1	Stock 2	Stock 3	Stock 4	Stock 5		
11	Stock 1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%		
12	Stock 2	0,00%	2,34%	12,11%	16,19%	49,14%		
13	Stock 3	0,00%	12,11%	66,41%	54,73%	233,33%		
14	Stock 4	0,00%	16,19%	54,73%	345,17%	511,46%		
15	Stock 5	0,00%	49,14%	233,33%	511,46%	1159,25%		
16								
17	Variance Terms	0,00%	0,00%	2,49%	1,43%	0,00%	Variance	3,91%
18							Std. Dev.	19,78%
19	Return Terms	0,00%	0,00%	16,90%	9,70%	0,00%	Return	26,60%
21	Historical data (Returns) on stocks							
22		Stock 1	Stock 2	Stock 3	Stock 4	Stock 5		
23	Period 1	0,00%	32,09%	194,23%	399,56%	728,40%		
24	Period 2	0,00%	7,75%	103,60%	-53,18%	7,86%		
25	Period 3	0,00%	-4,71%	-5,12%	213,08%	4,44%		
26	Period 4	0,00%	4,00%	7,00%	4,00%	9,00%		
27	Period 5	0,00%	5,00%	6,00%	8,00%	5,00%		
28	Period 6	0,00%	6,00%	5,00%	10,00%	4,00%		
29	Period 7	0,00%	60,00%	4,00%	-3,00%	4,00%		
30	Period 8	0,00%	8,00%	3,00%	15,00%	6,00%		
31	Period 9	0,00%	12,00%	2,00%	20,00%	8,00%		
32	Period 10	0,00%	10,00%	1,00%	16,00%	10,00%		
33