KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Edita Šakytė

STABILIEJI SKIRSTINIAI FINANSŲ RINKŲ MODELIAVIME

Magistro darbas

Vadovas
prof. A. Aksomaitis

KAUNAS, 2007

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. dr. J.Rimas

2007 06 06

STABILIEJI SKIRSTINIAI FINANSŲ RINKŲ MODELIAVIME

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
prof. dr. A. Aksomaitis
2007 06 03

Recenzentas
doc.dr. R.Krikštolaitis
2007 06 01

Atliko
FMMM-5 gr. stud.
E. Šakytė
2007 05 25

KAUNAS, 2007

KVALIFIKCINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, habil.dr., banko „NORD/LB“ vyriausiasis analitikas

Šakytė E. Stable distributions in finance markets modeling: Master's work in applied mathematics/ supervisor prof. dr. A. Aksomaitis; Department of Applied Mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2007. – 35 p.

SUMMARY

Stable distributions are a rich class of probability distributions that allow skewness and heavy tails. The lack of closed formulas for densities and distribution functions for all distributions (except Gaussian, Cauchy and Levy distributions) is the major drawback.

There is an overview of the stable distributions and their applications in finance markets at the beginning of this paper. There are described basic properties of stable distributions, estimation algorithms and optimal asset allocation and stable computation of Value at Risk in the first part of the work. We analyze an investment allocation problems in this work. We consider as the risk measure the estimate of scale parameter (in the stable case) or the expected value of absolute deviation divided by $\sqrt{2}$ (in Gaussian case). We examine the optimal allocation between seventeen risky assets with normal or stable distributed returns and then we compare the allocation obtained under the Gaussian and stable distributional assumptions. We show that there are differences in the allocation when the data follow the stable non-Gaussian and the normal distribution.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Stabilieji skirstiniai yra plati tikimybinių skirstinių klasė. Atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal stabiliuosius skirstinius, pasižymi savybe – jų suma taip pat yra stabili. Stabilieji skirstiniai paprastai yra asimetriški ir pasižymi sunkiomis uodegomis, todėl jie gerai aprašo duomenis, ypač finansinius. Tačiau praktikoje jie nėra plačiai taikomi. Pagrindinė to priežastis ir didžiausias šių skirstinių trūkumas yra tai, kad tik keliais išimtiniais atvejais yra žinomos tikslios tankio ir skirstinio funkcijų išraiškos (tai normalusis, Koši ir Levi skirstiniai). Be to, visi (išskyrus normalųjį) skirstiniai neturi baigtinės dispersijos, o kai kurie – ir vidurkio. Pagrindinis rizikos matas modeliuojant optimalius portfelius ir yra būtent dispersija (standartinis nuokrypis). Tai kita stabiliųjų skirstinių nepopuliarumo priežastis: teorinio „klasikinio“ rizikos mato nebuvimas. Bet stabilieji skirstiniai yra aprašomi keturiais parametrais, vienas iš kurių nusako skirstinio sklaidą ir yra gali būti (ir yra) naudojamas rizikai matuoti stabiliuoju atveju. Pastaruoju metu šie skirstiniai pradėti taikyti finansų rinkose, nes jau ir seniau buvo pastebėta, kad aktyvų grąžos nėra pasiskirsčiusios pagal Gauso dėsnį. Tačiau stabilūs skirstiniai yra geri ne vien todėl, kad geba paaiškinti empirines duomenų charakteristikas. Jie patrauklūs dar ir dėl stabilumo savybės: dviejų stabilių atsitiktinių dydžių sumos skirstinys yra stabilus, jei tik dėmenys yra stabilieji. Kita svarbi taikymuose savybė yra bendroji centrinė ribinė teorema, kuri teigia, kad vienintelė netriviali nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių normuotų atsitiktinių dydžių sumos skirstinio riba yra stabilioji.

Šio darbo tikslas – sudaryti ir tarpusavyje palyginti optimalius investicinius portfelius iš lietuviškų akcijų, remiantis dviem skirtingomis prielaidomis apie akcijų vienos dienos pelno normų skirstinius. Vienu atveju tarsime, kad pelno normų skirstinys yra daugiamatis normalusis, kitu – kad simetrinis stabilusis (subnormalusis). Taip pat siekiama palyginti pagal abi prielaidas gautus efektyviuosius portfelius su jų empiriniais atitikmenimis.

Šiame darbe yra sprendžiamas optimalaus investicijų paskirstymo į d rizikingų aktyvų uždavinys, laikantis prielaidos, kad aktyvų grąžų skirstiniai yra stabilieji, ir kad investuotojas vengia rizikos. Nors stabilieji skirstiniai leidžia įvertinti ne tik skirstinio uodegų „sunkumą“ ar sklaidą apie padėties charakteristiką, bet ir asimetriją, apsiribosime simetriniais stabiliaisiais skirstiniais, t.y. nevertinsime asimetrijos. Dar daugiau, nagrinėsime subnormaliuosius skirstinius, nes tokiu atveju optimalaus investicijų paskirstymo į rizikingus aktyvus uždavinys susiveda į kvadratinio programavimo uždavinį kaip ir klasikinio Markovičiaus uždavinio atveju. Be to, daugiamačių simetrinių stabiliųjų skirstinių parametrų įverčiams skaičiuoti nebūtinas spektrinis matas.

Šio darbo pradžioje yra aprašomi α-stabilieji skirstiniai, jų savybės. Antroje dalyje pateikiami metodai stabiliųjų skirstinių parametrų įverčiams rasti. Kadangi nėra žinoma tiksli stabiliųjų skirstinių funkcijos išraiška, parametrų įverčiai skaičiuojami kvantilių metodais. Trečiojoje darbo dalyje pateikiamas optimalaus kapitalo paskirstymo į akcijas uždavinys. Ketvirtame skyriuje šis uždavinys pritaikomas investicinio portfelio iš lietuviškų akcijų sudaryti. Portfelio rizika įvertinama sklaidos parametro prasme. Palyginamos dvi prielaidos: „normalioji“ – kai laikoma, jog akcijų grąžų skirstiniai yra normalieji; ir „stabilioji“ – kai laikoma, jog akcijų grąžų skirstiniai yra stabilieji. Investicinius portfelių, gautų pagal skirtingas tikimybines prielaidas, rizika iš pradžių įvertinama sklaidos parametro prasme, o po to apskaičiuojamas vertės pokyčio rizikos matas (*VaR*). Pagal skirtingas tikimybines prielaidas gauti portfeliai lyginami (*VaR* prasme) ne tarpusavyje, o su atitinkamais empiriniais skirstiniais. Įvertinant kelių teorinių investicinių portfelių ir atitinkamų empirinių skirstinių *VaR* nuokrypius, padaromos išvados apie tai, koks tikimybinis skirstinys tinkamesnis optimalių investicinių portfelių sudarymui.

1. STABILIEJI SKIRSTINIAI

1.1. SĄVOKOS IR APIBRĖŽIMAI

Atsitiktiniai dydžiai, kurie yra uždari sudėties atžvilgiu vadinami stabiliaisiais atsitiktiniais dydžiais. Tuos atsitiktinius dydžius aprašantys skirstiniai vadinami stabiliaisiais. Yra skiriamos dvi stabiliųjų skirstinių klasės: griežtai stabilieji ir stabilieji plačiąja prasme skirstiniai.

Apibrėžimas (Nolan, 2002: 4)**.** Atsitiktinis dydis X vadinamas stabiliuoju plačiąja prasme, jeigu bet kokiems nepriklausomiems atsitiktiniams dydžio X stebėjimams X_1 ir X_2 ir visoms konstantoms a>0 ir b>0 egzistuoja konstantos : c>0 ir $d \in \mathbf{R}$ tokios, kad:

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d \text{ ,} \tag{1.1}$$

Atsitiktinis dydis vadinamas griežtai stabiliuoju arba stabiliuoju siaurąja prasme, jeigu (1.1) lygybė teisinga, kai d=0. Atsitiktinis dydis yra simetriškai stabilusis, jeigu jis yra stabilusis ir simetriškai pasiskirstęs apie 0, t.y. $X \stackrel{d}{=} -X$. Čia simbolis $\stackrel{d}{=}$ reiškia, kad abiejose lygybės pusėse esantys dydžiai pasiskirstę pagal tą patį skirstinį.

Apibrėžimas (Nolan, 2002: 4)**.** Neišsigimęs atsitiktinis dydis X yra stabilus, kai visiems n>1 egzistuoja konstantos c_n>0 ir $d_n \in \mathbf{R}$ tokios, kad

$$X_1 + ... + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n \text{ ,} \tag{1.2}$$

Čia $X_1,...,X_n$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. X yra griežtai stabilusis atsitiktinis dydis, jeigu d_n=0 visiems n>1. Žinoma, kad konstantas c_n galima pasirinkti vieninteliu būdu: $c_n = n^{1/\alpha}$, $\alpha \in (0;2]$.

Atsitiktiniai dydžiai, kurie yra stabilūs sudėties atžvilgiu, dar vadinami α-stabiliaisiais.

Abu stabilumo apibrėžimai remiasi atsitiktinio dydžio X skirstinio savybėmis, tačiau patogiausia nusakyti stabiliuosius skirstinius, remiantis charakteristinėmis funkcijomis.

Teiginys(Nolan, 2002: 7)**.** Atsitiktinis dydis X yra stabilusis tada ir tik tada, kai $X \stackrel{d}{=} aZ + b$, o dydžio Z charakteristinė funkcija yra tokia:

$$\phi(u) = E\,exp(iuZ) = \begin{cases} exp\left(-|u|^{\alpha}\left[1 - i\beta(\,sign\,u\,)tg\dfrac{\pi\alpha}{2}\right]\right), \alpha \neq 1 \\ exp\left(-|u|\left[1 + i\beta\dfrac{2}{\pi}(\,sign\,u\,)ln\,|\,u\,|\right]\right), \alpha = 1 \end{cases} \text{ ,} \tag{1.3}$$

Šie skirstiniai yra simetriški nulio atžvilgiu, kai b=0 ir β=0. Tokiu atveju atsitiktinio dydžio aZ charakteristinė funkcija yra paprastesnės formos: $\phi(u) = e^{-a^{\alpha}|u|^{\alpha}}$.

Kaip matysime vėliu, stabilųjį skirstinį nusako keturi parametrai: α, β, γ, δ. Žymima $S_\alpha(\gamma,\beta,\delta)$ arba $S(\alpha,\beta,\gamma,\delta;k)$. Pastarasis žymėjimas naudojamas ne tik skirstinio parametrams, bet ir parametrizacijai nurodyti. Taip jau susiklostė, kad aprašant stabiliuosius skirstinius naudojama ne viena parametrizacija. Populiariausios yra dvi parametrizacijos, pateiktos sekančiuose dviejuose apibrėžimuose.

Apibrėžimas (Nolan, 2002: 8)**.** Sakoma, kad atsitiktinis dydis $X\sim S(\alpha,\beta,\gamma,\delta;0)$, jeigu

$$X \stackrel{d}{=} \begin{cases} \gamma\left(Z - \beta\cdot tg\dfrac{\pi\alpha}{2}\right) + \delta, \alpha \neq 1 \\ \gamma Z + \delta, \alpha = 1 \end{cases}, \tag{1.4}$$

Čia $Z=Z(\alpha,\beta)$ – atsitiktinis dydis, kurio charakteristinė funkcija yra (1.3). Tada dydžio X charakteristinė funkcija yra:

$$\phi(u) = \begin{cases} exp\left(-\gamma^\alpha|u|^\alpha\left[1 + i\beta(sign\, u)\cdot tg\dfrac{\pi\alpha}{2}\left(|\gamma u|^{1-\alpha} - 1\right)\right] + i\delta u\right), \alpha \neq 1 \\ exp\left(-\gamma|u|\left[1 + i\beta\dfrac{2}{\pi}(sign\, u)ln(\gamma|u|)\right] + i\delta u\right), \alpha = 1 \end{cases}, \tag{1.5}$$

Apibrėžimas (Nolan, 2002: 8)**.** Sakoma, kad atsitiktinis dydis $X\sim S(\alpha,\beta,\gamma,\delta;1)$, jeigu

$$X \stackrel{d}{=} \begin{cases} \gamma Z + \delta, \alpha \neq 1 \\ \gamma Z + \left(\delta + \beta\dfrac{2}{\pi}\gamma\, ln\gamma\right), \alpha = 1 \end{cases}, \tag{1.6}$$

Čia $Z=Z(\alpha,\beta)$ – atsitiktinis dydis, kurio charakteristinė funkcija yra (1.3). Tada X charakteristinė funkcija

$$\phi(u) = \begin{cases} exp\left(-\gamma^\alpha|u|^\alpha\left[1 - i\beta(sign\, u)\cdot tg\dfrac{\pi\alpha}{2}\right] + i\delta u\right), \alpha \neq 1 \\ exp\left(-\gamma|u|\left[1 + i\beta\dfrac{2}{\pi}(sign\, u)ln\,|\,u\,|\right] + i\delta u\right), \alpha = 1 \end{cases}, \tag{1.7}$$

Pastaruosiuose apibrėžimuose pateiktos parametrizacijos yra glaudžiai susijusios: nuo vienos pereinama prie kitos paprasčiausiai keičiant padėties parametro reikšmę. Kiti parametrai – α, β ,γ– išlieka nepakitę. O ryšys, siejantis δ reikšmes yra nusakomas lygybėmis:

$$\delta_0 = \begin{cases} \delta_1 + \beta\gamma_1 tg\dfrac{\pi\alpha}{2}, \alpha \neq 1 \\ \delta_1 + \beta\dfrac{2}{\pi}\gamma_1\, ln\gamma_1, \alpha = 1 \end{cases} \qquad \delta_1 = \begin{cases} \delta_0 - \beta\gamma_0 tg\dfrac{\pi\alpha}{2}, \alpha \neq 1 \\ \delta_0 - \beta\dfrac{2}{\pi}\gamma_0\, ln\gamma_0, \alpha = 1 \end{cases} \tag{1.8}$$

Taigi stabilioji charakteristinė funkcija (arba skirstinys) yra visiškai apibrėžiama keturiais parametrais: α, δ, β ir γ:

- α yra vadinama charakteristinė eksponente. Ji yra vienareikšmiškai apibrėžiama. Skirstinys ir atitinkamas atsitiktinis dydis yra vadinami α-stabiliaisiais. Charakteristinė eksponentė matuoja skirstinio uodegų „sunkumą“. Jei stebimas stabilusis atsitiktinis dydis, tai kuo didesnė α reikšmė, tuo mažiau tikėtina stabėti atsitiktinio dydžio reikšmes, kurios yra toli nuo centrinės skirstinio padėties. Esant mažai α reikšmei, yra žymi skirstinio uodegų tikimybės yra gana didelės. $\alpha = 2$ atitinka Gauso skirstinį (esant bet kokiam β), o $\alpha = 1$, $\beta = 0$ atitinka Koši skirstinį.

- γ yra sklaidos (skalės) parametras. Gauso skirstinio atveju (kai α=2) jis yra lygus pusei dispersijos.
- β yra simetrijos parametras. β=0 reiškia, kad skirstinys yra simetriškas *a* atžvilgiu. Tokiu atveju skirstinys vadinamas simetriniu α-stabiliuoju arba tiesiog SαS.
- δ yra padėties parametras. Simetriniams stabiliesiems skirstiniams jis reiškia vidurkį (kai $1 < \alpha \le 2$) arba medianą (kai $0 < \alpha < 1$).

Stabilusis skirstinys su parametru α yra vadinamas α-stabiliuoju ir sakoma, kad jis yra standartinis, kai $\delta = 0$, $\gamma = 1$. Jei atsitiktinis dydis *X* yra α-stabilus su parametrais α, β, γ ir δ ir jo parametrai nusakomi pagal k=1 parametrizaciją, tai $(X - \delta)/\gamma$ yra standartinis kintamasis su charakteristine eksponente α ir simetrijos parametru β.

1.2. VIENMAČIŲ STABILIŲJŲ SKIRSTINIŲ SAVYBĖS

Iš charakteristinės funkcijos atvirkštinės Furjė transformacijos gaunama standartinė stabilioji tikimybių tankio funkcija:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-t^{\alpha}\right)\cos\left[xt + \beta t^{\alpha}\omega(t,\alpha)\right]dt \quad , \qquad \textbf{(1.9)}$$

čia

$$\omega(t,\alpha) = \begin{cases} tg\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right), \alpha \neq 1 \\ \dfrac{2}{\pi}\log|t|, \alpha = 1 \end{cases}, \qquad \textbf{(1.10)}$$

Tačiau tik keliais išimtiniais atvejais šią funkciją galima išreikšti elementariosiomis funkcijomis. Skirstiniai, turintys tikslias tikimybių tankio funkcijos formas yra: normalusis ($\alpha = 2$), Koši ($\alpha = 1$, $\beta = 0$), Pirsono ($\alpha = 1/2$, $\beta = -1$) ir Levi ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1$). Nors ir nėra tikslių stabiliųjų skirstinių tankio formulių, yra daug žinoma apie jų teorines savybes. Pagrindinis faktas yra toks:

Teorema (Nolan, 2002: 11)**.** Visi neišsigimę stabilieji skirstiniai yra tolydūs skirstiniai su be galo daug kartų diferencijuojamu tankiu.

Stabiliųjų skirstinių tankio funkcijos yra nelygios nuliui arba visoje realiųjų skaičių tiesėje, arba pustiesėje. Pastaroji situacija galima tik, kai $\alpha<1$ ir $|\beta|=1$.

Lema (Nolan, 2002: 11)**.** Sritis, kurioje stabiliojo skirstinio tankio funkcija yra nelygi nuliui:

$$support\ f(x\mid\alpha,\beta,\gamma,\delta;0)=\begin{cases}\left[\delta-\gamma\cdot tg\dfrac{\pi\alpha}{2},\infty\right),\alpha<1,\beta=1\\ \left(-\infty,\delta+\gamma\cdot tg\dfrac{\pi\alpha}{2}\right],\alpha<1,\beta=-1\\ (-\infty,+\infty),\alpha\geq 1,|\beta|\neq 1\end{cases} \tag{1.11}$$

$$support\ f(x\mid\alpha,\beta,\gamma,\delta;1)=\begin{cases}[\delta,\infty),\alpha<1,\beta=1\\ (-\infty,\delta],\alpha<1,\beta=-1\\ (-\infty,+\infty),\alpha\geq 1,|\beta|\neq 1\end{cases} \tag{1.12}$$

Kitas svarbus faktas apie stabiliuosius skirstinius yra atspindžio savybė: standartinių stabiliųjų skirstinių tankių funkcijos tenkina lygybę $f(x;\alpha,\beta)=-f(-x;\alpha,-\beta)$.

Pagrindinė normaliojo ir stabiliojo (nenormaliojo) skirstinių skirtingo elgesio priežastis yra jų uodegos. Sakoma, kad skirstinys turi sunkias uodegas, jeigu jos gęsta lėčiau nei eksponentinė funkcija. Kai $\alpha<1$ ir $\beta=\pm1$, stabilusis skirstinys turi vieną uodegą, visais kitais atvejais – dvi. Visi stabilieji skirstiniai, išskyrus normalųjį, turi algebrines, t.y. sunkias uodegas. Tą patvirtina teorema:

Teorema. Uodegų aproksimacija (8, 12)**.** Tegu $X\sim S(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, $0<\alpha<2$, $-1<\beta\leq1$. Tuomet, kai $x\to\infty$, $P(X>x)\sim\gamma^{\alpha}C_{\alpha}(1+\beta)x^{-\alpha}$, $p(x\mid\alpha,\beta;0)\sim\alpha\gamma^{\alpha}C_{\alpha}(1+\beta)x^{-(\alpha+1)}$.

Čia $C_{\alpha}=\left(2\int\limits_0^{\infty}x^{-\alpha}\sin x dx\right)^{-1}=\frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha)\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$, o $h(x)\sim g(x)$ reiškia, kad $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=1$.

Sunkių uodegų padarinys yra tas, kad ne visi stabiliojo skirstinio momentai egzistuoja.

Teorema (Nikias, 1995: 22). Tegu X yra stabilusis atsitiktinis dydis. Jei $0<\alpha<2$, tai

$E|X|^p=\infty$, jei $p\geq\alpha$;

$E|X|^p<\infty$, jei $0<p<\alpha$.

Įrodymas. Tarkime, kad Y yra neneigiamas atsitiktinis dydis. Tada

$$EY=\int\limits_0^{\infty}P(Y>t)dt.$$

Vietoje Y įrašome $|X|^p$. Tuomet

$$E\left(|X|^p\right)=\int\limits_0^{\infty}P(|X|^p>t)dt=\int\limits_0^{\infty}pu^{p-1}P(|X|>u)du.$$

Kadangi $u^{p-1}P(|X|>u)=O(u^{p-1})$, kai $u\to 0$ ir $u^{p-1}P(|X|>u)=O(u^{p-\alpha-1})$, kai $u\to\infty$, tai galima daryti išvadą, kad $E\left(|X|^{p}\right)<\infty$ tada ir tik tada, kai $0\le p<\alpha$. Įrodyta.

Vadinasi, kai 0<α≤1, stabilieji skirstiniai neturi baigtinio pirmos ar aukštesnės eilės momentų, o kai 1<α<2, jie turi pirmos eilės ir bet kokius *p*-tosios (*p*<α) eilės momentus. Visi kiti momentai neegzistuoja. Kai α=2, egzistuoja visi momentai. Baigtiniai α-stabiliųjų atsitiktinių dydžių momentai $E|X|^{p}$ (t.y. momentai, kurių eilė *p*<α) vadinami trupmeniniais žemesnių eilių momentais (11). Simetrinių stabilių skirstinių atveju yra žinomos tikslios šių statistikų skaičiavimo išraiškos:

Teiginys (Nikias, 1995: 32)**.** Tarkime, kad SαS atsitiktinio dydžio padėties parametras lygus 0, o skalės parametras yra γ. Tada

$$\mathbf{E}\left(|X|^{p}\right)=C(p,\alpha)\gamma^{\frac{p}{\alpha}},\ 0<p<\alpha; \qquad \textbf{(1.13)}$$

čia

$$C(p,\alpha)=\frac{2^{p+1}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{p}{\alpha}\right)}{\alpha\sqrt{\pi}\,\Gamma(-p/2)} \qquad \textbf{(1.14)}$$

priklauso tik nuo *p* ir α, bet ne nuo *X*.

Įrodymas. Tarkime, kad *X* – SαS atsitiktinis dydžio padėties parametras lygus 0, o skalės parametras yra γ. Pradėkime nuo tokio integralo:

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos at}{t^{p+1}}dt=|a|^{p}\frac{\Gamma(1-p)\cos\frac{\pi}{2}p}{p},\ a\in R,\ 0\le p<2.$$

Konstantą *a* pakeičiame į *X* ir apskaičiuojame abiejų pusių vidurkį. Gauname:

$$\mathbf{E}|X|^{p}=\frac{p}{\Gamma(1-p)\cos\frac{\pi}{2}p}\int_0^{\infty}\mathbf{E}\left(\frac{1-\cos Xt}{t^{p+1}}\right)dt\,.$$

Kadangi *X* yra simetrinis ir jo charakteristinė funkcija yra $\varphi(t)=\exp\left(-\gamma|t|^{\alpha}\right)$, t.y. $\mathbf{E}(\cos Xt)=\mathbf{E}\left(e^{jtX}\right)=\exp\left(-\gamma|t|^{\alpha}\right)$.

Taigi

$$\mathbf{E}|X|^{p}=\frac{p}{\Gamma(1-p)\cos\frac{\pi}{2}p}\int_0^{\infty}\frac{1-\exp\left(-\gamma|t|^{\alpha}\right)}{t^{p+1}}dt\,.$$

Pastebėsime, kad dešinėje pusėje esantis integralas yra baigtinis tik, kai 0≤*p*<α. Dabar fiksuokime 0≤*p*<α. Pasinaudojus integravimu dalimis ir gama funkcijos apibrėžimu, nesunku parodyti, kad

$$\int_0^\infty \frac{1-\exp\left(-\gamma|t|^\alpha\right)}{t^{p+1}}dt = \frac{1}{p}\gamma^{\frac{p}{\alpha}}\Gamma\left(1-\frac{p}{\alpha}\right).$$

Vadinasi,

$$\mathbf{E}|X|^p = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}p}\frac{\Gamma(1-p/\alpha)}{\Gamma(1-p)}\gamma^{\frac{p}{\alpha}}.$$

Pasinaudojame šiomis gama funkcijos savybėmis (2):

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

Gauname, kad

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}p}\frac{\Gamma(1-p/\alpha)}{\Gamma(1-p)} = \frac{2^{p+1}}{\alpha\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\frac{\Gamma(-p/\alpha)}{\Gamma(-p/2)}.$$

Teiginys įrodytas.

Tačiau žinomi ne tik simetrinių stabiliųjų skirstinių *p*-eilės momentai, $0 \le p < \alpha$, bet ir kai kurie neigiamų eilių momentai.

Teiginys (Nikias, 1995: 34)**.** Tarkime, kad atsitiktinis dydis *X*~SαS, o jo skalės parametras yra γ. Tada

$$\mathbf{E}\left(|X|^p\right) = C(p,\alpha)\gamma^{\frac{p}{\alpha}}, \ -1<p<\alpha \qquad \textbf{(1.15)}$$

čia dydis $C(p,\alpha)$ apibrėžiamas (1.10) formule.

Įrodymas. Atsitiktinio dydžio *X* skirstinio tankio funkcija yra (1.6). Apibrėžiame *Y*: $Y = |X|$. Atsitiktinio dydžio *Y* tankio funkcija:

$$f_Y(y) = 2f_X(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\omega y)\exp\left(-\gamma\omega^\alpha\right)d\omega;\ 0 \le y < \infty.$$

Iš momentų apibrėžimo:

$$\mathbf{E}\left(|X|^p\right) = \mathbf{E}\left(Y^p\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty y^p\cos(\omega y)dy\right]\exp\left(-\gamma\omega^\alpha\right)d\omega.$$

Žinomos tokios lygybės:

$$\int_0^\infty x^p\cos(ax)dx = -\frac{1}{a^{p+1}}\Gamma(1+p)\sin\left(\frac{\pi p}{2}\right),\ a>0,\ -1<p<0,$$

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1}\exp\left(-\mu x^{\alpha}\right)dx = \frac{1}{|a|}\mu^{-\nu/\alpha}\Gamma\left(\nu/\alpha\right),\ \mathrm{Re}\,\mu > 0,\ \mathrm{Re}\,\nu > 0\,.$$

Tada

$$\int_0^{\infty} y^{p}\cos\left(\omega y\right)dy = -\frac{\Gamma\left(p+1\right)}{\omega^{p+1}}\sin\left(\frac{\pi p}{2}\right),\ \omega > 0,\ -1<p<0,$$

$$\int_0^{\infty} \omega^{-p-1}\exp\left(-\gamma\omega^{\alpha}\right)d\omega = \frac{1}{\alpha}\gamma^{p/\alpha}\Gamma\left(-p/\alpha\right),\ \gamma > 0,\ p<0.$$

Todėl

$$\mathbf{E}\left(|X|^{p}\right) = -\frac{2}{\alpha\pi}\gamma^{p/\alpha}\Gamma\left(p+1\right)\Gamma\left(-\frac{p}{\alpha}\right)\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) = \frac{2^{p+1}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{p}{\alpha}\right)}{\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\left(-p/2\right)}\gamma^{p/\alpha},\ -1<p<0.$$

Kai p=0, (1.11) lygybė yra akivaizdi.

Todėl

$$\mathbf{E}\left(|X|^{p}\right) = \frac{2^{p+1}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{p}{\alpha}\right)}{\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\left(-p/2\right)}\gamma^{p/\alpha},\ -1<p<\alpha.$$ □

Pagrindinė stabiliųjų atsitiktinių dydžių savybė yra ta, kad stabiliųjų atsitiktinių dydžių (tiek priklausomų, tiek nepriklausomų) sumos taip pat yra stabilios. Kaip visada, sumos rezultatas priklauso nuo naudojamos. Sudedant stabiliuosius atsitiktinius dydžius yra labai svarbu, kad visiems dėmenims parametras α būtų lygus. Priešingu atveju, suma nebus stabilioji.

Teiginys (Nolan, 2002: 18)**.** Parametrizacija $S(\alpha,\beta,\gamma,\delta;0)$ pasižymi tokiomis savybėmis:

a) Jei $X \sim S(\alpha,\beta,\gamma,\delta;0)$, tai su visais $a \neq 0$, $b \in \mathbf{R}$,

$$aX + b \sim S(\alpha, (\mathit{sign}\, a)\beta, |a|\gamma, a\delta + b; 0)\,. \qquad \textbf{(1.16)}$$

b) Charakteristinė, skirstinio ir tankio funkcijos yra tolydžios visų keturių parametrų (α,β,γ,δ) atžvilgiu.

c) Jei atsitiktiniai dydžiai $X_1 \sim S(\alpha,\beta_1,\gamma_1,\delta_1;0)$ ir $X_2 \sim S(\alpha,\beta_2,\gamma_2,\delta_2;0)$ yra nepriklausomi, tai $X_1+X_2 \sim S(\alpha,\beta,\gamma,\delta;0)$. Čia

$$\beta = \frac{\beta_1\gamma_1^{\alpha} + \beta_2\gamma_2^{\alpha}}{\gamma_1^{\alpha} + \gamma_2^{\alpha}},\ \gamma^{\alpha} = \gamma_1^{\alpha} + \gamma_2^{\alpha},$$

$$\delta = \begin{cases} \delta_1 + \delta_2 + \left(tg\,\frac{\pi\alpha}{2}\right)\left[\beta\gamma - \beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2\right], \alpha \neq 1 \\ \delta_1 + \delta_2 + \frac{2}{\pi}\left[\beta\gamma\, ln\,\gamma - \beta_1\gamma_1\, ln\,\gamma_1 - \beta_2\gamma_2\, ln\,\gamma_2\right], \alpha = 1 \end{cases}. \qquad \textbf{(1.17)}$$

Teiginys (Nolan, 2002: 18)**.** Parametrizacija $S(\alpha,\beta,\gamma,\delta;1)$ pasižymi tokiomis savybėmis:

a) Jei $X \sim S(\alpha,\beta,\gamma,\delta;0)$, tai su visais $a \neq 0$, $b \in \mathbf{R}$,

$$aX + b \sim \begin{cases} S(\alpha, (\operatorname{sign} a)\beta, |a|\gamma, a\delta + b; 1), \alpha \neq 1 \\ S(1, (\operatorname{sign} a)\beta, |a|\gamma, a\delta + b - \beta\gamma \dfrac{2}{\pi} a \cdot \ln|a|; 1), \alpha = 1 \end{cases} \quad \textbf{(1.18)}$$

b) Charakteristinė, skirstinio ir tankio funkcijos nėra tolydžios parametro α=1 aplinkoje. Visur kitur jos yra tolydžios.

c) Jei atsitiktiniai dydžiai X_1~S(α,β1,γ1,δ1;1) ir X_2~S(α,β2,γ2,δ2;1) yra nepriklausomi, tai X_1+X_2~S(α,β,γ,δ;1). Čia

$$\beta = \frac{\beta_1\gamma_1^\alpha + \beta_2\gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}, \ \gamma^\alpha = \gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha \ \ \delta = \delta_1 + \delta_2 . \quad \textbf{(1.19)}$$

Tačiau pati svarbiausia stabiliųjų atsitiktinių dydžių savybė yra ta, kad jiems galioja bendroji centrinė ribinė teorema, t.y. nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių ribinis skirstinys yra α-stabilusis.

Teorema (bendroji centrinė ribinė teorema). *X* yra ribinis normalizuotos sumos $S_n = (X_1 + \ldots + X_n)/a_n - b_n$ skirstinys tada ir tik tada, kai *X* yra stabilus.

Čia X_1, X_2,..., X_n yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę ir $n \to \infty$.

Kai X_1, X_2,..., X_n yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę ir turi baigtines dispersijas, tai ribinis skirstinys yra normalusis. Tai jau paprastos centrinės ribinės teoremos rezultatas.

1.3. DAUGIAMAČIAI STABILIEJI SKIRSTINIAI

Daugiamačiai stabilieji skirstiniai, lygiai taip pat kaip ir vienmačiai, apibrėžiami pasinaudojant stabilumo savybe.

Apibrėžimas (Nikias, 1995: 20)**.** *d*-matė skirstinio funkcija $F(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^d$ vadinama stabiliąja tada ir tik tada, kai visiems nepriklausomiems ir vienodai pasiskirsčiusiems atsitiktiniams vektoriams $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ su skirstinio funkcija $F(\mathbf{x})$ ir bet kokioms konstantoms a_1, a_2 egzistuoja $a \in R$, $\mathbf{b} \in R^d$ ir atsitiktinis vektorius $\mathbf{X}$ su ta pačia skirstinio funkcija $F(\mathbf{x})$ ir

$$a_1\mathbf{X}_1 + a_2\mathbf{X}_2 \overset{d}{=} a\mathbf{X} + \mathbf{b} . \quad \textbf{(1.20)}$$

Pagrindinis skirtumas tarp vienmačių ir daugiamačių stabiliųjų skirstinių yra tas, kad vienmačių stabiliųjų skirstiniai yra parametriniai, kai tuo tarpu daugiamačiai yra neparametriniai. Tą galima matyti iš jų charakteristinės funkcijos.

Teorema (Nikias, 1995: 22)**.** d-matė skirstinio funkcija $F(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^d$ yra stabilioji tada ir tik tada, kai jos charakteristinė funkcija yra tokios formos:

$$\varphi(\mathbf{t}) = \begin{cases} \exp\left\{i\mathbf{t}^T\delta - \mathbf{t}^T\mathbf{A}\mathbf{t}\right\}, & ,\alpha = 2 \\ \exp\left\{i\mathbf{t}^T\delta - \int_S \left|\mathbf{t}^T\mathbf{s}\right|^\alpha \Gamma(d\mathbf{s}) + i\beta_\alpha(\mathbf{t})\right\}, & 0 < \alpha < 2. \end{cases} \quad \textbf{(1.21)}$$

čia

$$\beta_\alpha(\mathbf{t}) = \begin{cases} \tan\frac{\alpha\pi}{2}\int_S \left|\mathbf{t}^T\mathbf{s}\right|^\alpha sign\left(\mathbf{t}^T\mathbf{s}\right)\Gamma(d\mathbf{s}), & \alpha \neq 1, \quad 0 < \alpha < 2 \\ \int_S \mathbf{t}^T\mathbf{s}\log\left|\mathbf{t}^T\mathbf{s}\right|\Gamma(d\mathbf{s}), & \alpha = 1 \end{cases} \quad \textbf{(1.22)}$$

čia $\delta, \mathbf{t} \in R^k$. S yra d-matė vienmatė sfera, $\Gamma(\cdot)$ yra baigtinis Borelio aibės S matas, o A yra neteigiamai apibrėžta matrica.

α yra stabiliojo skirstinio charakteristinė eksponentė. Ji yra vienareikšmiškai apibrėžiama. Jei $\alpha = 2$, tada stabilusis skirstiny s tampa daugiamačiu normaliuoju skirstiniu, kurio vidurkis δ ir kovariacijų matrica. 2*A*. δ yra padėties parametras. $\Gamma(\cdot)$ vadinamas spektriniu matu. Kai $1 < \alpha \leq 2$, jis apibrėžiamas vienareikšmiškai. $\beta_\alpha(t)$ vadinama asimetriškumo funkcija. Jei $\beta_\alpha(t) \equiv 0$, tada stabilusis skirstinys yra simetrinis ir vadinamas simetriniu α-stabiliuoju (SαS).

Nors teoriškai daugiamačiai skirstiniai yra absoliučiai tolydūs ir turi tolydžiai diferencijuojamus tankius, nėra tikslių tankio funkcijos išraiškų (Nikias, 1995: 24). Kaip ir daugiamačio normaliojo, taip ir daugiamačių stabiliųjų skirtinių (arba SαS) marginalieji dėsniai yra stabilieji (arba SαS) su ta pačia charakteristine eksponente.

Teorema. (Doganoglu, Mittnik, 2004: 6). Tarkime, kad $w = (w_1,...,w_d)^T \in R^d$ yra svorių vektorius. Tada bet kokia stabiliojo vektoriaus $Y = (Y_1,...,Y_d)^T$ su spektriniu tankiu $\Gamma(ds)$ ir padėties parametru μ komponenčių tiesinė kombinacija $w^T Y$ yra pasiskirsčiusi pagal vienmatį stabilųjį skirstinį $w^T Y \sim S_\alpha\left(\gamma\left(w^T Y\right), \beta\left(w^T Y\right), \mu\left(w^T Y\right)\right)$,
čia

$$\gamma\left(w^T Y\right) = \left(\int_{S_d} \left|w^T s\right|^\alpha \Gamma(ds)\right)^{1/\alpha}; \quad \textbf{(1.23)}$$

$$\beta\left(w^T Y\right) = \frac{\int_{S_d} \left|w^T s\right|^\alpha sign\left(w^T s\right)\Gamma(ds)}{\int_{S_d} \left|w^T s\right|^\alpha \Gamma(ds)}; \quad \textbf{(1.24)}$$

$$\mu\left(w^T Y\right) = w^T \mu. \quad \textbf{(1.25)}$$

Daugiamačių stabiliųjų skirstinių momentų savybė iš esmės yra tokia pati, kaip ir vienmačių stabiliųjų skirstinių. Jei $X_1,...,X_n$ yra nepriklausomi ir α-stabilieji, tai

$$\mathrm{E}\left(\left|X_1\right|^{p_1} \cdots \left|X_n\right|^{p_n}\right) < \infty$$

tada ir tik tada, kai $p_i < \alpha$, $i = \overline{1,n}$ (Nikias, 1995: 25). Jei (X_1,...,X_n)~ SαS ir atsitiktinio vektoriaus komponentės yra nepriklausomos, tai

$$\mathrm{E}\left(\left|X_1\right|^{p_1} \cdots \left|X_n\right|^{p_n}\right) < \infty . \qquad \textbf{(1.26)}$$

tada ir tik tada, kai $0 < p_1 + ... + p_n < \alpha$ (11).

Nors Gauso ir stabilieji skirstiniai daugeliu atveju yra panašūs, tačiau kartu ir pakankamai skirtingi. Pavyzdžiui, žinoma, kad jei X yra normalusis atsitiktinis vektorius, tai jį galima užrašyti:

$\mathbf{X} = A\mathbf{Y}$;

čia A yra matrica, o Y yra normalusis atsitiktinis vektorius su nepriklausomais komponentais. Tačiau stabiliuoju atveju netgi dviejų stabiliųjų kintamųjų su charakteristine eksponente $0 < \alpha < 2$ negalima išreikšti baigtinio skaičiaus stabiliųjų komponentų su ta pačia charakteristine eksponente tiesiniu dariniu (11). Vadinasi, negalima rezultatų apie normaliuosius atsitiktinius dydžius apibendrinti nenormaliesiems stabiliesiems atsitiktiniams dydžiams.

Charakteristinė funkcija

$$\varphi(\mathbf{t}) = \exp\left(-\left(\left(\mathbf{t}^T Q \mathbf{t}\right)^{\alpha/2}\right) + i\mathbf{t}^T \delta\right) \qquad \textbf{(1.27)}$$

apibrėžia svarbią daugiamačių atsitiktinių SαS dydžių klasę – subnormaliusius vektorius (7, 11). Ši klasė dažnai žymima α-SG(Q).

Čia laikoma, kad stabilumo indeksas 1<α<2, $\mu = E(r)$ yra vidurkių vektorius, o $Q = \lfloor R_{i,j}/2 \rfloor_{ij}$ yra teigiamai apibrėžta $d \times d$ formato matrica. Matricos elementas R_{ij} yra apibrėžiamas taip (7):

$$\frac{R_{i,j}}{2} = \left[\tilde{r}_i, \tilde{r}_j\right]_\alpha \left\|\tilde{r}_j\right\|_\alpha^{2-\alpha} \qquad \textbf{(1.28)}$$

čia $\tilde{r}_j = r_j - \mu_j$ žymi centruotą r vektorių, o $\lfloor \tilde{r}_i, \tilde{r}_j \rfloor_\alpha$ yra α-kovariacija tarp dvimačio simetrinio α-stabiliojo vektoriaus elementų $\tilde{r}_i$ ir $\tilde{r}_j$, kuri apibrėžiama taip:

$$\left[\tilde{r}_i, \tilde{r}_j\right]_\alpha = \int_{S_2} s_i \left|s_j\right|^{\alpha-1} \operatorname{sign}(s_j)\Gamma(ds).$$

Be to,

$$\left\|\tilde{r}_j\right\|_\alpha = \left(\int_{S_2} \left|s_j\right|^\alpha \Gamma(ds)\right)^{1/\alpha} = \left(\left[\tilde{r}_j, \tilde{r}_j\right]_\alpha\right)^{1/\alpha}.$$

Žinoma (11), kad jei $\mathbf{X} \in \alpha - \mathrm{SG}(\mathrm{R}/2)$, tai

$$\mathbf{X} = \eta^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}; \qquad \textbf{(1.29)}$$

čia η – teigiamas α/2-stabilus atsitiktinis dydis, **Y** – normalusis daugiamatis atsitiktinis dydis su nuliniu vidurkiu ir kovariacijų matrica R. Be to, η ir **Y** yra nepriklausomi.

2. STABILIŲJŲ SKIRSTINIŲ PARAMETRŲ ĮVERČIAI

Šiame skyriuje aptarsime vienmačių simetrinių stabiliųjų atsitiktinių dydžių parametrų įverčius, o iš daugiamačių skirstinių apsiribosime tik subnormaliųjų skirstinių parametrų įverčiais.

2.1. VIENMAČIŲ STABILIŲJŲ SKIRSTINIŲ PARAMETRŲ ĮVERČIAI

Simetrinis stabilusis skirstinys yra nusakomas trimis parametrais: charakteristine eksponente α: $0<\alpha\leq 2$, skalės parametru $\gamma>0$ ir alokacijos parametru $-\infty<\delta<\infty$. Praktinė problema yra įvertinti šiuos tris parametrus iš simetrinio stabiliojo atsitiktinio dydžio realizacijų.

Kai $\alpha>1$, empirinis vidurkis yra tinkamas parametro δ įvertis. Pagrindinė stabilių skirstinių parametrų įverčių problema yra ta, kad nėra žinoma tikslių tankio funkcijų išraiškų, išskyrus tuos kelis atvejus. Dauguma tradicinių matematinės statistikos metodų šiuo atveju negali būti panaudoti, kadangi jie priklauso nuo tikslios tankio formos. Todėl čia pateikiamas empirinių kvantilių metodas, kuriam nereikia tikslios tankio funkcijos išraiškos.

Tarkime, kad F yra skirstinio funkcija. Tuomet jos f kvantiliu vadinamas dydis x_f, su kuriuo (Aksomaitis, 2002: 127):

$$F(x_f)=f. \tag{2.1}$$

Pozicinės statistikos yra atsitiktiniai dydžiai, tenkinantys sąlygą $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(N)}$.

Tarkime, kad X_1, ..., X_N yra atsitiktinė imtis, kurios pasiskirstymo funkcija $F(x)$ nežinoma, ir pozicinės statistikos yra $X_{(1)},\ldots,X_{(N)}$. Turint $0<f<1$, f kvantilio suderintas įvertis $\hat{x}_f$ yra $X_{(N+1)f}$. Norint išvengti $\hat{x}_f$ asimetrijos, buvo įvesta korekcija (11).

Tarkim, kad $0\leq i\leq N$ ir $\frac{2i-1}{2N} \leq f \leq \frac{2i+1}{2N}$. Tada

$$\hat{x}_f = X_{(i)} + \left(X_{(i+1)} - X_{(i)}\right)\frac{f-q(i)}{q(i+1)-q(i)};$$

čia

$$q(i) = \frac{2i-1}{2N}.$$

Jei $i=0$ arba $i=N$, tai ir $\hat{x}_f = X_{(1)}$ ir $\hat{x}_f = X_{(N)}$ atitinkamai.

Dažniausiai naudojamas kitas SαS skirstinio su $1\leq\alpha\leq 2$ įverčių skaičiavimo metodas (11), kuris taip pat yra paremtas pozicinėmis statistikomis. Buvo pasiūlytas toks γ įvertis:

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{1.654}\left[\hat{x}_{0.72} - \hat{x}_{0.28}\right]. \tag{2.2}$$

čia $\hat{x}_f$ (f=0,72; f=0.28) – SαS skirstinio f kvantilio įvertis. (2.3) γ įverčio asimptotinis nuokrypis yra mažesnis kaip 0,4% ir $\hat{\gamma}$ yra asimptotiškai normalus su dispersija

$$\sigma^2(\hat{c}) = \frac{0.09}{N[f_\alpha(0.72)]^2}. \tag{2.3}$$

čia $f_\alpha(0,72)$ yra X skirstinio tankio funkcijos reikšmė ties standartinio SαS skirstinio 0,72 kvantiliu.

Iš kitos pusės, charakteristinė eksponentė α gali būti įvertinta iš skirstinio uodegos elgesio. Dideliems f (pvz., f=0.95) apskaičiuojame

$$\hat{z}_f = \frac{\hat{x}_f - \hat{x}_{1-f}}{2\hat{\gamma}} = 0.827\frac{\hat{x}_f - \hat{x}_{1-f}}{\hat{x}_{0.72} - \hat{x}_{0.28}}. \tag{2.4}$$

Laikant, kad X yra pasiskirstęs pagal SαS skirstinį su charakteristine eksponente α ir skalės parametru γ, tai $\hat{z}_f$ yra standartinio SαS skirstinio f kvantilio įvertis. Taigi $\hat{\alpha}$ galima apskaičiuoti iš standartinio SαS skirstinio lentelių, kurios yra pateiktos literatūroje (11).

Kai $1 < \alpha \le 2$, SαS skirstinys turi baigtinį vidurkį. Taigi imties vidurkis yra atitinkamas padėties parametro δ įvertis.

Šis įverčių skaičiavimo metodas yra paprastas, bet jis nėra asimptotiškai efektyvus. Vėliau šis metodas buvo apibendrintas: eliminuoti α ir γ įverčių asimptotiniai nuokrypiai.

Simetriniam stabiliam skirstiniui kvantilio įvertis

$$\hat{\upsilon}_\alpha = \frac{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}} \tag{2.5}$$

nepriklauso nei nuo γ, nei nuo δ. Taigi suderintas $\hat{\alpha}$ įvertis gali būti surandamas iš lentelių (11), parenkant atitinkamą $\hat{\upsilon}_\alpha$ reikšmę.

Esant fiksuotam dydžiui α, dydis

$$\upsilon_c = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\gamma} \tag{2.6}$$

kuris yra α funkcija, nepriklauso nuo δ. Kadangi $\hat{\alpha}$, $\hat{x}_{0.75}$, $\hat{x}_{0.25}$ yra suderinti įverčiai, parametro γ suderintas įvertis yra:

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\upsilon(\hat{\alpha})}. \tag{2.7}$$

2.2. SUBNORMALIŲJŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ PARAMETRŲ ĮVERČIAI

Kaip matyti iš subnormaliojo daugiamačio atsitiktinio dydžio charakteristinės funkcijos išraiškos (1.27), jam aprašyti reikia dviejų parametrų: δir Q. Paprastai μ įverčiu imamas empirinių vidurkių vektorius. Šiame skyriuje pateikta, kaip rasti įvertį $\hat{Q}$.

Tarkime, kad turime nepriklausomus subnormaliojo daugiamačio atsitiktinio dydžio stebėjimus: $(r_{11},...,r_{1d})$, ..., $(r_{N1},...,r_{Nd})$.

Įverčiui $\hat{Q}$ gauti remiamasi lema (7), pagal kurią kiekvienam p, $1<p<\alpha$,

$$\frac{[\tilde{r}_i, \tilde{r}_j]_\alpha}{\|\tilde{r}_j\|_\alpha^\alpha} = \frac{E\left(\tilde{r}_i \tilde{r}_j^{\langle p-1\rangle}\right)}{E\left(|\tilde{r}_j|^p\right)}; \tag{2.8}$$

čia $x^{\langle a\rangle} = \mathrm{sign}(x)|x|^a$, o sklaidos parametras γ_j yra $\|\tilde{r}_j\|_\alpha = \gamma_j$. Žinoma, kad simetrinio stabiliojo skirstinio atveju (7)

$$\gamma_j^p = \|\tilde{r}_j\|_p^\alpha = \frac{E\left(|r_j - \mu_j|^p\right)\int_0^{+\infty} u^{-p-1} \sin^2 u du}{2^{p-1}\Gamma\left(1-\frac{p}{\alpha}\right)}. \tag{2.9}$$

Taigi

$$\frac{R_{i,j}}{2} = \sigma_j^2 \frac{E\left(\tilde{r}_i \tilde{r}_j^{\langle p-1\rangle}\right)}{E\left(|\tilde{r}_j|^p\right)}.$$

Matricos Q elemento įvertis $\hat{q}_{ij} = \hat{R}_{ij}/2$ yra:

$$\frac{\hat{R}_{ij}}{2} = \hat{\gamma}_j^2 \frac{\sum_{k=1}^N \tilde{r}_i^{(k)} \left(\tilde{r}_j^{(k)}\right)^{\langle p-1\rangle}}{\sum_{k=1}^N \left|\tilde{r}_j^{(k)}\right|^p}, \tag{2.10}$$

o γ_j^2 įvertis:

$$\hat{\gamma}_j^2 = \frac{\hat{R}_{j,j}}{2} = \left(\frac{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \left|\tilde{r}_j^{(k)}\right|^p p \int_0^{+\infty} u^{-p-1} \sin^2 u du}{2^{p-1}\Gamma\left(1-\frac{p}{\alpha}\right)}\right)^{2/p}.$$

3. OPTIMALIŲJŲ PORTFELIŲ SUDARYMAS STABILIOSE RINKOSE

Yra gerai žinoma (9, 13), kad akcijų (aktyvų) grąžos nėra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį, tačiau padaryta daug teorinių ir empirinių tyrinėjimų, laikantis prielaidos, kad akcijų pajamos yra pasiskirsčiusios būtent pagal Gauso dėsnį. Pastebėta, kad finansinių aktyvų pajamų (pelno) skirstiniai pasižymi asimetrija, jų tankio viršūnės yra smailios, o uodegos sunkios. Tai leidžia atmesti prielaidą, kad finansinių aktyvų pajamų skirstiniai yra normalieji. Duomenis, pasižyminčius asimetrija ir sunkiomis uodegomis, gerai aprašo stabilieji skirstiniai.

Tiek iš praktinės, tiek iš teorinės pusės, stabilieji skirstiniai yra patrauklūs ne vien tik todėl, kad jie gerai paaiškina empirines duomenų charakteristikas, bet ir todėl, kad kai kurios jų savybės labai panašios į normaliųjų skirstinių savybes. Viena iš svarbiausių savybių yra ta, kad stabilieji skirstiniai turi traukos sritį. Nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumoms bendroji centrinė ribinė teorema apibrėžia kiekvieno stabilaus skirstinio traukos sritį. Taigi bet koks skirstinys, esantis tam tikro skirstinio traukos srityje, pasižymi ypatybėmis, artimomis tam skirstiniui. Kita patraukli stabiliųjų skirstinių savybė yra jų stabilumas, t.y. stabilių nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių suma taip pat yra pasiskirsčiusi pagal stabilųjį dėsnį.

Modeliuojant finansų rinkas laikoma, kad parametras α: $1<\alpha<2$ dėl kelių priežasčių:

1) kai $\alpha>1$, egzistuoja pirmasis skirstinio momentas, taigi galima kalbėti apie laukiamą grąžą (5, 8, 9, 12);
2) empiriniai tyrimai patvirtina, kad $1<\alpha<2$ (5, 9, 13);
3) dažnai finansinių duomenų nukrypimas nuo normaliojo skirstinio nėra labai didelis (5).

Investicinis portfelis yra tiesinis darinys iš *d* finansinių aktyvų. O efektyviu vadinamas tas investicinis portfelis, kurio tikėtinos pelno normos negalima padidinti kartu nepadidinus ir rizikos.

Markovičiaus investicinio portfelio teorijoje rizika apibrėžiama kaip investicinis kvadratinis nuokrypis nuo laukiamo portfelio pelno, t.y. investiciniai portfeliai nagrinėjami vidurkio-dispersijos prasme. Šitoks klasikinis rizikos apibrėžimas netinka tuo atveju, kai laikoma, jog akcijų, sudarančių portfelį, grąžos yra pasiskirsčiusios pagal stabilųjį skirstinį, nes tada neegzistuoja dispersija. Todėl modeliuojant investicinius portfelius stabiliose rinkose rizikos matu laikomas ne vidutinis standartinis nuokrypis nuo tikėtino pelno, o turimo investicinio portfelio sklaidos parametras.

Sudarydami investicinį portfelį iš *d* akcijų remsimės tokiomis prielaidomis:

1. laikysime, kad investuotojai vengia rizikos, t.y. siekia gauti norimą pelno normą su kuo galima mažesne rizika,
2. akcijų pelno normų skirstiniai yra simetriniai stabilieji subnormalieji su stabilumo indeksu $1<\alpha<2$. Tada egzistuoja teorinis stabiliųjų skirstinių vidurkis ir yra prasmė kalbėti apie laukiamą portfelio pelno normą.

Žinome, kad daugiamačio stabiliojo atsitiktinio dydžio vienmatė projekcija yra vienmatis stabilusis atsitiktinis dydis. Taigi bet kokio investicinio portfelio, sudaryto iš d akcijų, turinčių stabiliai pasiskirsčiusias grąžas, pelno norma taip pat yra pasiskirsčiusi pagal stabilųjį skirstinį, o portfelio laukiama grąžas μ_p ir rizika γ_p (kuri šiuo atveju suprantama sklaidos parametro prasme) apskaičiuojama pagal (1.25) ir (1.23) formules atitinkamai.

Tokiu atveju efektyviųjų portfelių aibė gaunama su daugeliu skirtingų laukiamų portfelio grąžų μ_p išsprendus tokį optimizavimo uždavinį:

$$\min_{x \in R^d} \gamma_p(x) = \left(\int_{S_d} |(x,s)|^{\alpha} \Gamma(ds) \right)^{\frac{1}{\alpha}};$$

esant apribojimams: **(3.1)**

$$(x, \mu^0) = \mu_p .$$
$$(x, e) = 1,$$
$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,d};$$

Jei α=2, optimizavimo uždavinys tampa tokiu:

$$\min_{x \in R^d} \frac{1}{2} x^T R x;$$

esant apribojimams:

$$(x, \mu^0) = \mu_p .$$
$$(x, e) = 1,$$
$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,d};$$

Tai gerai žinomas Markovičiaus portfelio analizės uždavinys.

Kai α=2, turime kvadratinio programavimo uždavinį.

Kai 1<α<2, uždavinio sprendimas yra daug komplikuotesnis, nes bendru atveju tai nėra kvadratinio programavimo uždavinys. Tačiau, jei laikytume, kad portfelį sudarančių akcijų grąžų skirstinys yra ne šiaip simetrinis stabilusis, o subnormalusis, tai vėl gautume kvadratinio programavimo uždavinį, kurio tikslo funkcija $\sqrt{(x^T Q x)}$, nes $x^T r \sim S_\alpha\left(\sqrt{(x^T Q x)}, 0, \mu_P\right)$. Čia r – akcijų gražų vektorius, $x = (x_1, ..., x_d)^T$.

Taigi laikysime, kad akcijų grąžų vektoriaus skirstinys yra subnormalusis.

Kitas būdas palyginti „normaliąją“ ir „stabiliąją“ investavimo strategijas yra nagrinėti didžiausią galimą investicijų praradimą, esant fiksuotai nepalankių įvykių tikimybei p. Investicijų praradimo matu dažniausiai imamas vadinamasis vertės pokyčio rizikos matas *VaR* (3). Portfelio P *VaR* laiko momentu t su nepalankių įvykių tikimybe p apibrėžiama taip:

$$P(r_t^P < -VaR_t) = p; \qquad \textbf{(3.2)}$$

čia r_t^P – portfelio grąža laiko momentu *t*.

Jeigu dydis r_t^P yra pasiskirtęs pagal simerinį α-stabilųjį dėsnį su vidurkiu μ_P ir skalės parametru γ_P, tuomet (Belkacem, 1997: 13)

$$VaR_t = \mu_P + \gamma_P \cdot Q_{1-p}; \tag{3.3}$$

čia Q_{1-p} – standartinio simetrinio skirstinio $S_\alpha(1,0)$ (1-*p*)-ojo lygio kvantilis.

O jeigu dydis r_t^P yra pasiskirtęs pagal stabilųjį dėsnį su vidurkiu μ_P ir standartiniu nuokrypiu σ_P, tuomet (Sakalauskas, 2005: 174)

$$VaR_t = \mu_P + \sigma_P \cdot Q_{1-p}; \tag{3.4}$$

čia Q_{1-p} – standartinio normaliojo skirstinio (1-*p*)-ojo lygio kvantilis.

4. EFEKTYVIOJO INVESTICINIO PORTFELIO IŠ LIETUVIŠKŲ AKCIJŲ SUDARYMAS

4.1. DUOMENYS. PARAMETRŲ ĮVERČIAI

Sudarysime investicinį portfelį iš 17 lietuviškų akcijų. Duomenis sudaro po 751 visų akcijų grąžų stebėjimą. Stebėjimo intervalas: nuo 2004 m. balandžio 3 d. iki 2007 m. balandžio 3 d. Duomenys renkami kiekvieną dieną.

1 lentelė. Akcijų sąrašas. ir jų grąžų vidurkis bei aukštesnių eilių momentai.

Pavadinimas	Sutrum-pinimas	Vidurkis	Standartinis nuokrypis	Asimetrijos koeficientas	Ekscesas	p-reikšmė
Alita	ALT	0,0017	0,0222	0,814	5,926	<0,0001
Apranga	APG	0,0008	0,0536	-2,335	6,7	<0,0001
Dvarčionių keramika	DKR	0,0007	0,0295	0,288	32,022	<0,0001
Grigiškės	GRG	-0,0001	0,0161	0,254	5,237	<0,0001
Invalda	IVL	0,0014	0,0180	0,448	4,813	<0,0001
Klaipėdos nafta	KNF	-0,0002	0,0163	0,525	4,719	<0,0001
Lietuvos dujos	LDJ	0,0000	0,0179	-0,086	3,853	<0,0001
Lietuvos elektrinė	LEL	0,0011	0,0236	0,787	6,777	<0,0001
Lietuvos energija	LEN	0,0010	0,0222	0,789	5,19	<0,.0001
Linas	LNS	-0,0014	0,0332	-0,452	4,972	<0,0001
Mažeikių nafta	MNF	0,0015	0,0217	0,484	5,305	<0,0001
Rokiškio sūris	RSU	-0,0002	0,0124	0,116	9,753	<0,0001
RST	RST	0,0011	0,0202	0,626	24,467	<0,0001

Pavadinimas	Sutrum-pinimas	Vidurkis	Standartinis nuokrypis	Asimetrijos koeficientas	Ekscesas	p-reikšmė
Šiaulių bankas	SAB	0,0009	0,0175	-0,547	10,273	<0,0001
Snaigė	SNG	-0,0044	0,0991	-2,667	17,535	<0,0001
Snoras	SRS	-0,0006	0,0837	-2,315	12,709	<0,0001
TEO LT	TEO	0,0004	0,0109	-0,29	4,289	<0,0001

Portfelį sudarančių akcijų pavadinimai ir įvairios statistikos pateiktos 1 lentelėje. Daugelio akcijų asimetrijos koeficientas svyruoja apie nulį, tik „Aprangos“, „Snaigės“ ir „Snoro“ akcijų asimetrijos koeficiento modulis viršija 2. Absoliučiai visų akcijų eksceso koeficiento reikšmė yra didesnė už 4. Tai leidžia atmesti prielaidą, kad akcijų grąžų skirstiniai yra normalieji. Tą statistiškai reikšmingai (su 1 % reikšmingumo lygmeniu) patvirtina ir Kolmogorovo-Smirnovo kriterijus – visais atvejais stebėtas reikšmingumo lygmuo (p-reikšmė) yra mažesnis už 0,01.

Iš šių akcijų sukonstruosime normaliąją ir stabiliąją efektyviųjų portfelių kreives. Tam reikalingi parametrų įverčiai (žr. 2 lent.). Stabiliojo skirstinio parametrų įverčiai ($\hat{\alpha}$ ir $\hat{\gamma}$) gaunami anksčiau aprašytu kvantilių metodu. Normaliojo skirstinio įverčiai gauti tradiciniais metodais. Tik šiuo atveju standartinis nuokrypis dar yra padalintas iš $\sqrt{2}$, kad galėtume palyginti skirtingų skirstinių (normaliojo ir stabiliojo-nenormaliojo) sklaidos parametrus.

2 lentelė. Stabilieji akcijų grąžų parametrų įverčiai.

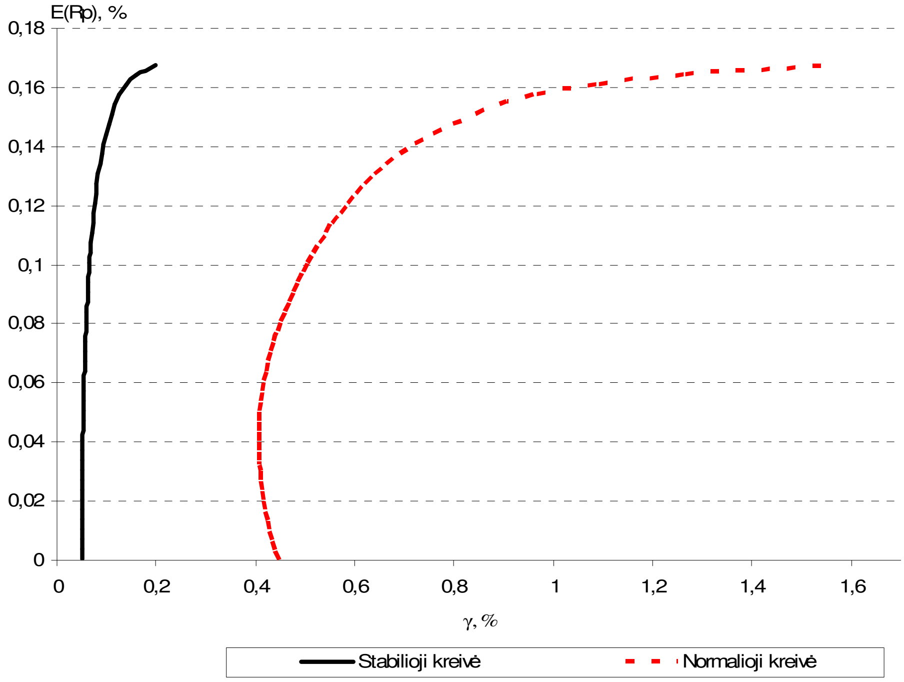
Akcija, *i*	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}_i$	$\sigma_i/\sqrt{2}$
ALT	1,202	0,0030	0,0157
APG	1,304	0,0016	0,0379
DKR	1,204	0,0042	0,0208
GRG	1,147	0,0027	0,0114
IVL	1,478	0,0009	0,0127
KNF	1,745	0,0003	0,0116
LDJ	1,237	0,0020	0,0126
LEL	1,133	0,0040	0,0167
LEN	1,230	0,0029	0,0157
LNS	1,185	0,0050	0,0235
MNF	1,197	0,0029	0,0153
RSU	1,118	0,0019	0,0088
RST	1,208	0,0023	0,0143
SAB	1,263	0,0019	0,0124

Akcija, i	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}_i$	$\sigma_i / \sqrt{2}$
SNG	1,150	0,0018	0,0701
SRS	1,218	0,0031	0,0592
TEO	1,429	0,0005	0,0077

Matome, kad akcijų grąžų stabilumo indeksas kinta nuo 1,118 („Rokiškio sūris“) iki 1,745 („Klaipėdos nafta“) ir tik vienos akcijos stabilumo indeksas viršija 1,5. Gautos parametrų reikšmės reikšmingai skiriasi nuo 2. Tai taip pat leidžia atmesti prielaidą, kad grąžos yra pasiskirsčiusi pagal normalųjį dėsnį. Žinome, kad stabiliųjų atsitiktinių dydžių suma yra stabili tada ir tik tada, kai tų dydžių parametrai α yra lygūs. Be to, žinant atsitiktinio vektoriaus komponenčių stabilumo indekso reikšmes, daugiamačio dydžio stabilumo indekso reikšmę yra rekomenduojama rinktis taip, kad ji neviršytų tikrosios α reikšmės (10), nes tada spektrinio mato įverčio nuokrypiai nuo tikrojo spektrinio mato yra gerokai mažesni nei tuo atveju, kai tikroji α reikšmė yra viršijama. Todėl laikysime, kad daugiamačio akcijų grąžų vektoriaus stabilumo indeksas yra lygus α=1,118 – mažiausia iš visų 17 gautų parametro α reikšmių.

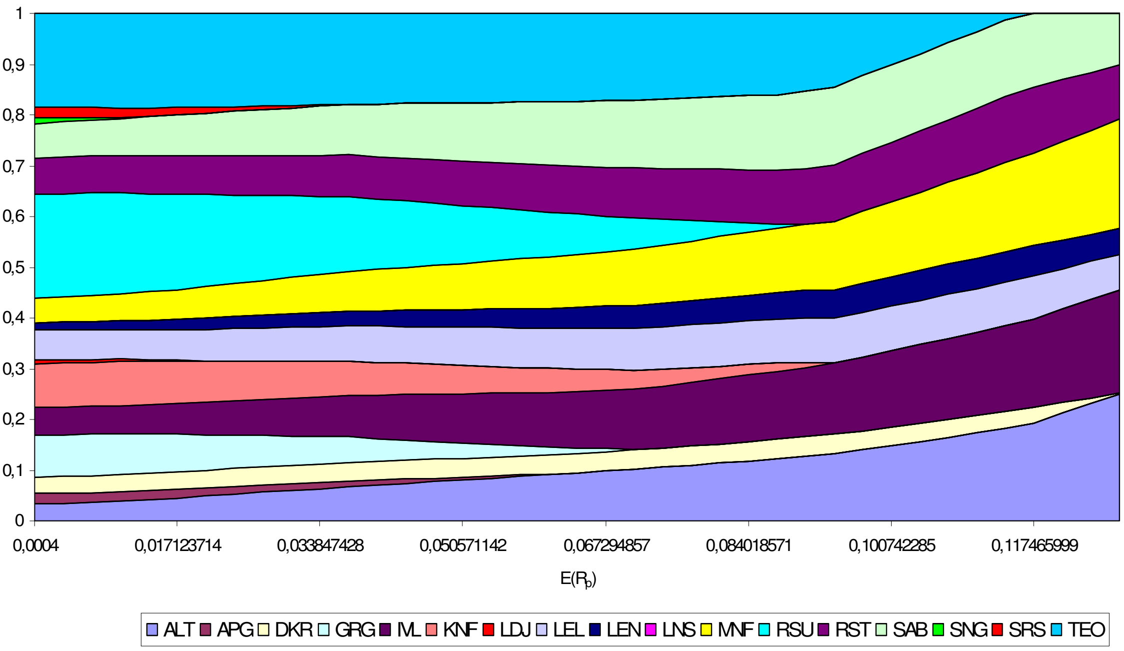
4.2. STABILIOSIOS IR NORMALIOSIOS EFEKTYVIŲJŲ PORTFELIŲ KREIVIŲ PALYGINIMAS

Nors abiejų nagrinėjamų aktyvų grąžų skirstiniai nėra normalieji, palyginsime normaliąją ir stabiliąją investavimo strategijas. Nagrinėsime mažiausios rizikos portfelio sudarymą, t.y. portfelius, gautus išsprendus 3.1 optimizavimo uždavinį. Keičiant tikėtinos grąžos reikšmę ir pakartojus minimizaciją, gauname efektyviųjų portfelių kreivę. Normalusis modelis yra atskiras α-stabiliojo modelio atvejis, kai α=2. Šiuo atveju sklaidos parametras yra lygus standartiniam nuokrypiui, padalintam iš $\sqrt{2}$. Tokiu atveju, normaliųjų efektyviųjų portfelių kreivę, gautą išsprendus Markovičiaus uždavinį, galima pavaizduoti erdvėje *vidurkis-sklaidos parametras* šalia efektyviųjų portfelių kreivės, gautos minimizuojant subnormaliųjų efektyviųjų portfelių kreivės. Pavaizduojame α-stabiliąją (α=1,118) ir normaliąją efektyviųjų portfelių kreives erdvėje *vidurkis-sklaidos parametras* (žr. 1 pav.).

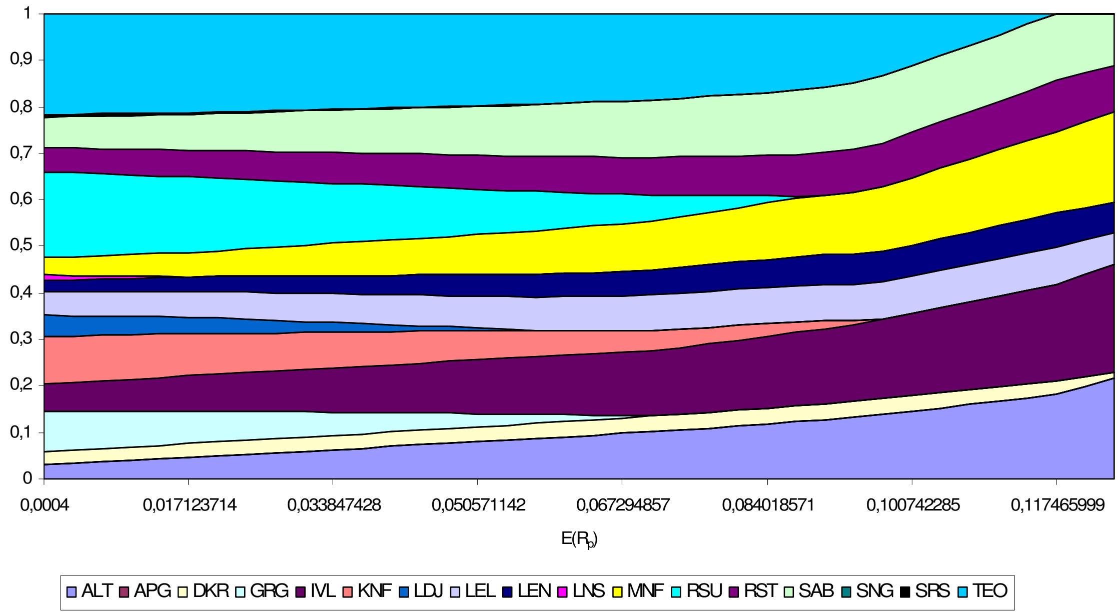


1 pav. Normalioji ir α-stabilioji (α=1,118) efektyviųjų portfelių kreivės

Iš 1 paveikslo matyti, kad su bet kokia fiksuota portfelio grąža stabilusis optimalus portfelis yra mažiau rizikingas už normalųjį. Iš kitos pusės, esant fiksuotai rizikai, stabilusis portfelis yra pelningesnis už normalųjį. Iš šios diagramos galime daryti išvadą, kad stabiliųjų efektyviųjų portfelių, sudarytų iš 17 lietuviškų akcijų, aibė dominuoja prieš normaliųjų investicinių portfelių aibę. Taigi portfelis, kuris yra optimalus klasikiniu atveju (kai naudojamas normalusis modelis), bendruoju atveju nėra optimalus „stabiliuoju" atveju.



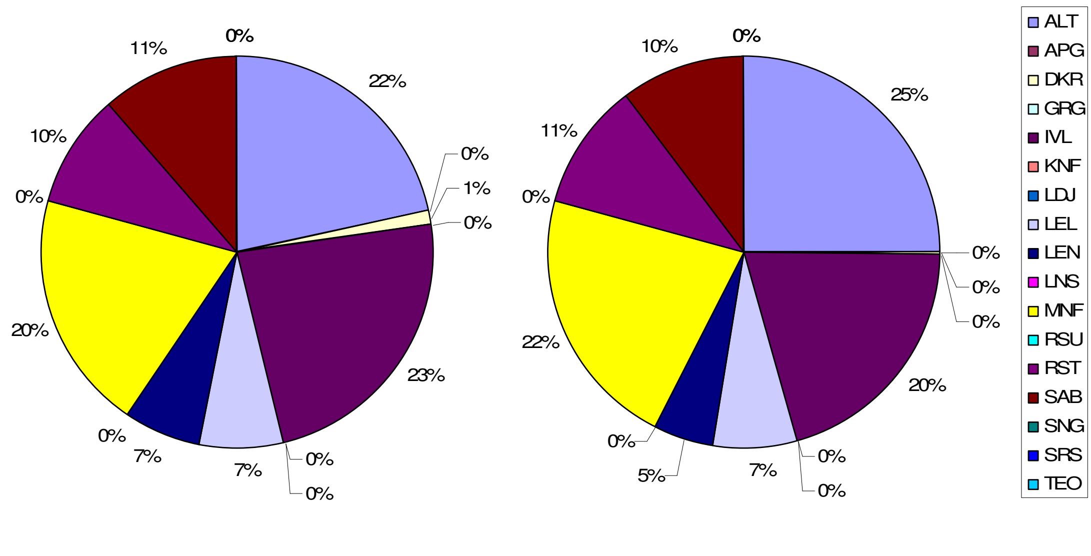
2 pav. Stabiliųjų efektyviųjų portfelių struktūra.



3 pav. Normaliųjų efektyviųjų portfelių struktūra.

2 ir 3 paveiksluose pavaizduota, kaip skiriasi stabiliojo ir normaliojo portfelių struktūra. Nors ir nežymiai, matyti, kad stabiliuoju atveju geriau pasireiškia diversifikavimo nauda: esant nedidelėms laukiamo portfelio pelno grąžoms (kai $E(R_p)$~0.04%), stabilusis investicinis portfelis padalijamas į 16 skirtingų akcijų, o normalusis – į 14.

Palyginsime stabiliąją ir normaliąją investavimo strategijas.



a) Stabilusis portfelis b) Normalusis portfelis

4 pav. Normaliojo ir stabiliojo efektyviojo portfelio struktūros palyginimas

Fiksuokime laukiamą portfelio dienos pelno normą $\mu_p = 0.1275\%$. Gauta portfelio struktūra pavaizduota 4 paveiksle. Matome, kad stabilusis portfelis „siūlo“ didžiąją pinigų dalį investuoti į

„Invaldos“ akcijas – 23 % portfolio vertės. O tuo tarpu pagal normaliąją prielaidą gauname, kad daugiausia – 25 % – reikėtų investuoti į „Alitos“ akcijas. Sugretinę investuojamą dalį ir tos akcijos riziką (2 lent.), matome, kad investavimo strategija, paremta prielaida apie normaliai pasiskirsčiusias aktyvo grąžas, linkusi didžiausią pinigų dalį skirti rizikingesnėms investicijoms nei stabilioji strategija.

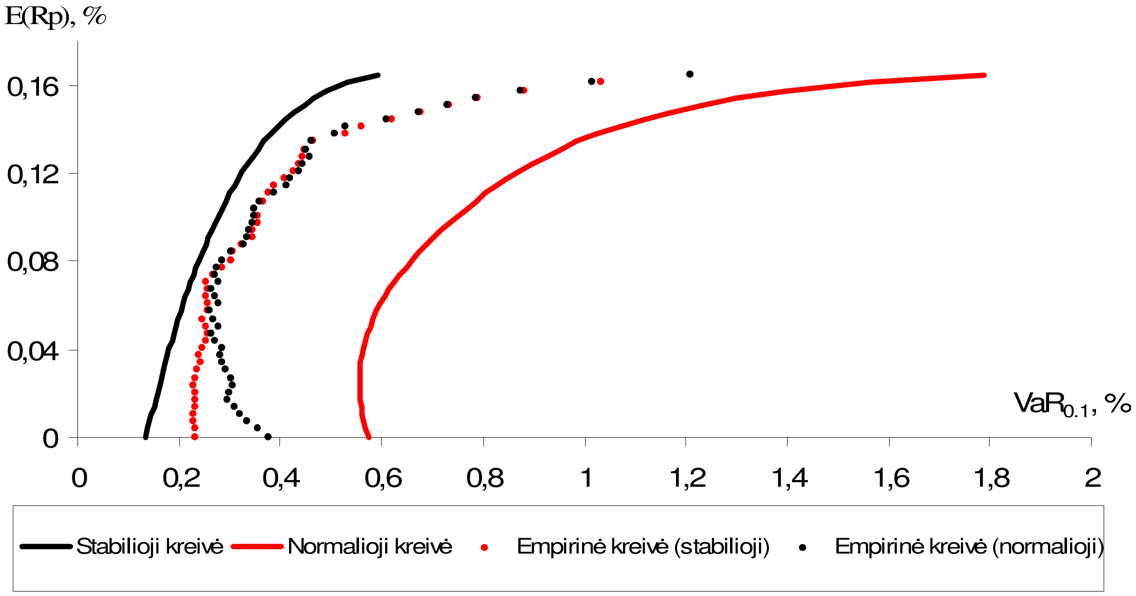
4.3. EMPIRINIŲ IR TEORINIŲ VaR KREIVIŲ PALYGINIMAS

Lyginant stabiliąją ir normaliąją efektyviųjų portfelių kreives pirmiausia yra daroma prielaida apie akcijų grąžų skirstinį (stabilusis ar normalusis). Ir pagal tai yra suskaičiuojama portfelio rizika. Nors duomenys rodo, jog prielaida, kad grąžos yra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį yra atmestina, galbūt tai dar nereiškia, kad stabilioji rizika geriau įvertina tikrąją investicinio portfelio riziką. Kad patikrintume šią hipotezę, palyginsime teorines VaR kreives, gautas pagal (3.3) ir (3.4) formules su atitinkamomis empirinėmis kreivėmis. Tiek empirines, tiek teorines VaR reikšmes skaičiuosime efektyviesiems portfeliams, t.y. portfeliams iš efektyviųjų portfelių krašto.

Tarkime, kad x_p yra efektyvusis investicinis portfelis (svorių vektorius). Šį portfelį x_p iš dešinės padauginę iš grąžų matricos $\boldsymbol{r}$, gautume vektorių $\boldsymbol{r}x_p$, kurio $[(1\text{-}p)N]$-oji pozicinė statistika ir yra empirinė VaR reikšmė.

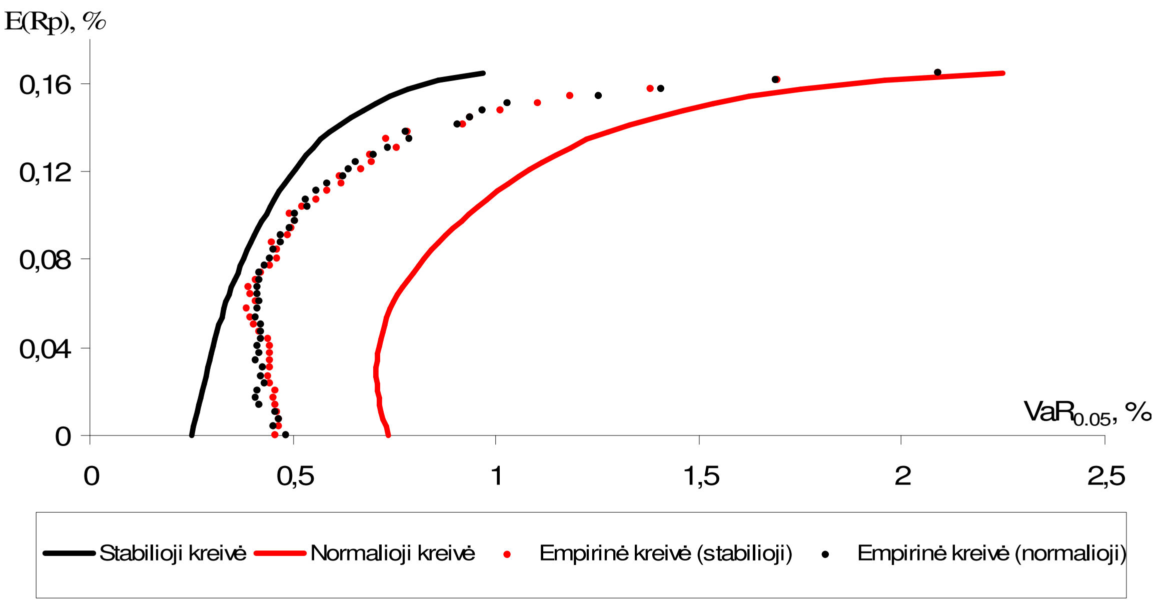
5-7 paveiksluose pavaizduotos efektyviųjų portfelių kreivės, gautos riziką matuojant vertės pokyčio rizikos matu ir esant skirtingoms nepalankių įvykių tikimybėms p=10 %, p=5% ir p=1%, Matome, kad empirinės kreivės, gautos tiek stabiliuoju, tiek normaliuoju atveju, labai nedaug skiriasi, ypač esant didesnei tikėtinai portfelio pelno normai. Taip yra todėl, kad kaip jau matyti 2 ir 3 paveiksluose, stabiliojo ir normaliojo portfelio struktūra palyginti nedaug skiriasi.

5-6 diagramose matyti, kad esant ne mažesnei nei p=5% nepalankių įvykių tikimybei ir fiksuotai tikėtinai pelno normai, normaliuoju modeliu gautų investicinių portfelių nuostolių rizika yra gerokai didesnė nei stabiliojo modelio. Iš kitos pusės, kai nepalankių įvykių tikimybė yra maža (p=1%), kiekvienai tikėtinai grąžos normai stabiliuoju modeliu gaunama portfelio vertės pokyčio rizika, gerokai viršijanti normaliojo modelio atitinkamą riziką. Taip yra todėl, kad simetrinio stabiliojo skirstinio p-lygio kvantilių reikšmės gerokai viršija normaliojo skirstinio p-lygio kvantilių reikšmes (čia kalbama apie standartinių skirstinių kvantilius).

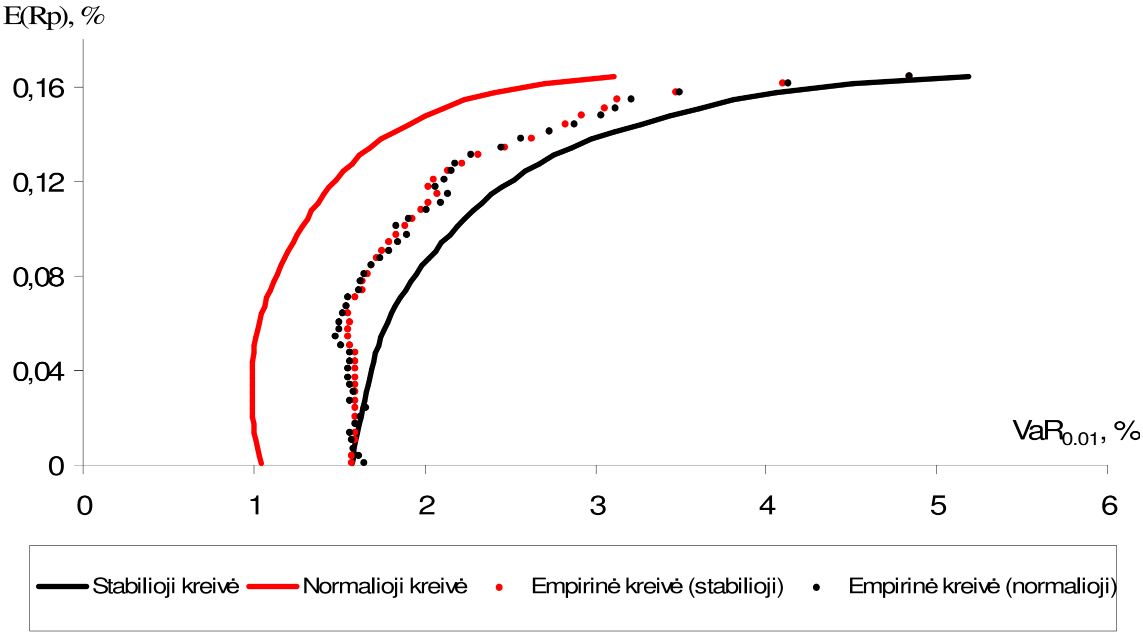


5 pav. Stabiliosios ir normaliosios efektyviųjų portfelių kreivių palyginimas su empirinėmis, p=10 %

Matome, kad esant pakankamai didelei nepalankių įvykių tikimybei (*p*=10% ar *p*=5%), stabilioji kreivė pakankamai neįvertina portfelio rizikos, o normalioji efektyviųjų portfelių kreivė riziką įvertina pakankamai atsargiai. Tuo tarpu esant mažai nepalankių įvykių tikimybei, t.y. *p*=1%, atvirkščiai: normalioji prielaida nepakankamai įvertina riziką, o stabilioji ją pervertina. Tačiau vizualiai vis vien stabilioji kreivė atrodo arčiau empirinės negu normalioji.



6 pav. Stabiliosios ir normaliosios efektyviųjų portfelių kreivių palyginimas su empirinėmis, p=5%



7 pav. Stabiliosios ir normaliosios efektyviųjų portfelių kreivių palyginimas su empirinėmis, p=1 %

Modelio tinkamumą apibendrinsime stabiliajai ir normaliajai efektyviųjų portfelių kreivėms įvertinę vidutinį kvadratinį nuokrypį (MSD) ir vidutinį absoliutinį nuokrypį (MAD):

$$MSD_p = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(VaR_{p,k}^{emp} - VaR_{p,k}^{\mathrm{mod}}\right)^2, \quad \mathbf{(4.1)}$$

$$MAD_p = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left|VaR_{p,k}^{emp} - VaR_{p,k}^{\mathrm{mod}}\right| \quad \mathbf{(4.2)}$$

MSD ir MAD skaičiavimai, esant skirtingoms nepalankių įvykių tikimybėms, pateikti 3 lentelėje. Matome, kad visais atvejais tiksliau riziką vertinama padarius prielaidą apie normalų grąžų skirstinį.

3 lentelėje. Stabiliųjų ir normaliųjų efektyviųjų portfelių VaR palyginimas su empiriniu.

Nepalankių įvykių tikimybė *p*	MSD		MAD	
	Normalusis modelis	Stabilusis modelis	Normalusis modelis	Stabilusis modelis
0,1	0,1503	0,0271	0,3743	0,1168
0,05	0,137	0,0749	0,3619	0,1913
0,01	0,517	0,0942	0,6777	0,2546

Palyginę normaliuosius ir stabiliuosius investicinius portfelius su jų empiriniais atitikmenimis, matome, kad stabilusis *VaR* tiksliau įvertina riziką nuokrypio prasme. Kita vertus, rizikos ne taip vengiantiems investuotojams ir fiksavusiems didesnę nepalankių įvykių tikimybę *p*, pvz. *p*=5%, galima sudarinėti optimalų investicinį portfelį, remiantis normalumo prielaida. Tada bus labiau tikėtina, kad konservatyvus portfelis padengs daugiau empirinių rinkos svyravimų. O rizikos itin vengiantys investuotojai, kurie fiksuoja mažą nepalankių įvykių tikimybės reikšmę, pvz. *p*=1%, turėtų vertinti riziką remdamiesi stabiliuoju modeliu. Tokiu atveju jie gali tikėtis, kad ne tik portfelio vertės pokyčio rizikos nuokrypiai nuo teorinės vertės bus mažesni už normaliojo portfelio nuokrypius, bet kad ir apskritai neviršys tos teorinės vertės.

IŠVADOS

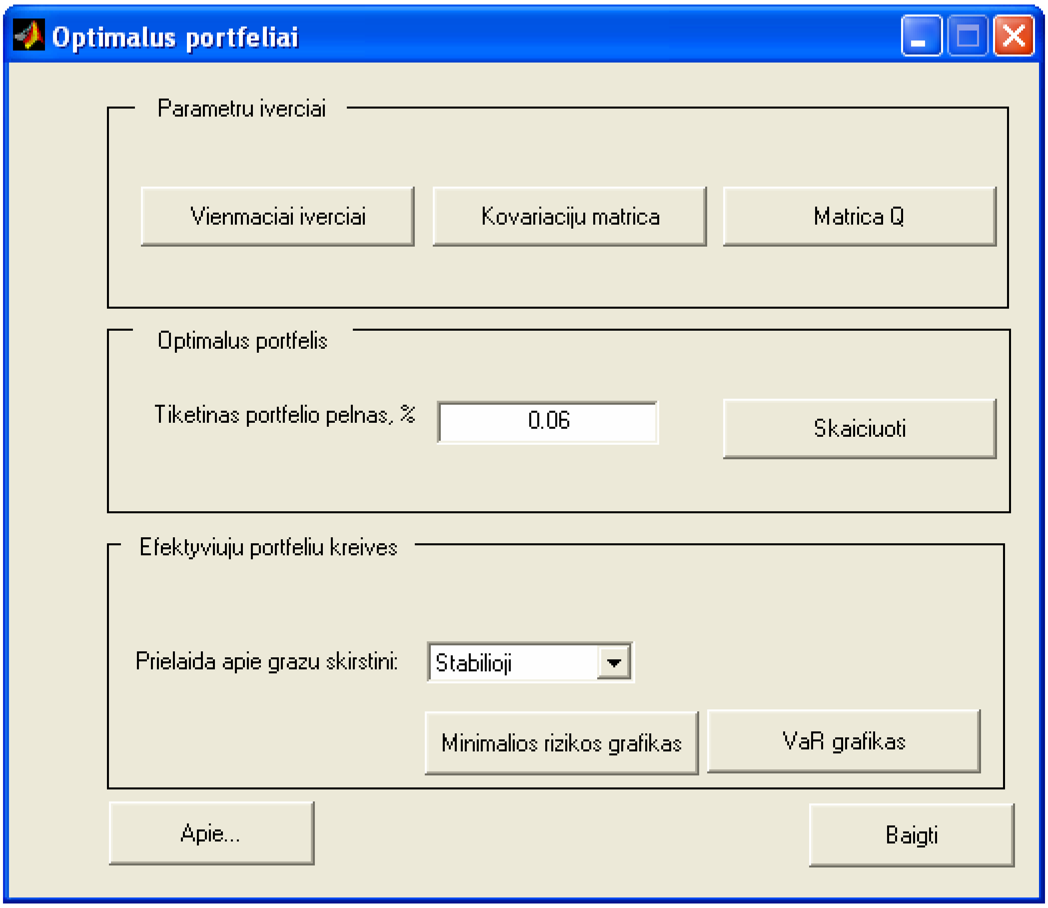
- Prielaida apie 17 lietuviškų akcijų grąžos normos normalumą yra griežtai atmestina (taikant Kolmogorovo-Smirnovo suderinamumo kriterijų, gauta p-reikšmė <0,0001 visais atvejais). Empiriniai skaičiavimai parodė, kad akcijų grąžų normos pasižymi smailiaviršūniškumu ir sunkiomis uodegomis – tik vieną kartą buvo pasiekta didesnei 1,5 parametro α įverčio reikšmė.
- Stabiliuoju modeliu gauti optimalūs investiciniai portfeliai dominuoja prieš normaliuosius portfelius. Taigi ne kiekvienas normalusis optimalus portfelis yra optimalus ir stabiliuoju atveju.
- Sudarant investicinį portfelį, stabiliuoju atveju labiau pastebima diversifikavimo nauda – į portfelį įtraukiama daugiau akcijų.
- Stabilioji vertės pokyčio rizika (*VaR*) vidutinio kvadratinio nuokrypio prasme nuo savo empirinio atitikmens skiriasi mažiau bei normaliosios *VaR*, esant tiek 1%, tiek 5%, tiek 10% nepalankių įvykių tikimybėms, nors esant didesnėms ($p \geq 5\%$) nepalankių įvykių tikimybėms ji nepakankamai įvertina galimą *VaR*.

LITERATŪRA

1. AKSOMAITIS, A. *Tikimybių teorija ir statistika*. Kaunas, 2002.
2. PEKARSKAS, V. *Diferencialinis ir integralinis skaičiavimas*. Kaunas, 2000.
3. SAKALAUSKAS, V. Trumpalaikių investicijų rizikos vertinimas naudojant reliatyvios vertės pokytį. *Informacijos mokslai*, Nr. 35, p. 170-178.
4. VALAKEVIČIUS, E. *Investicijų mokslas*. Kaunas, 2001.
5. BELKACEM L. How to Select Optimal Portfolio in Alpha-Stable Markets. *Institut nacional de recherche en informatique et en automatique*. 1997.
6. DOGANOGLU, T., MITTNIK, S. Portfolio Selection, Risk Assessment and Heavy Tails. *Journal of Financial Econometrics*. 2004
7. DOGANOGLU, T.; MITTNIK, S.; RACHEV, S. Portfolio Selection in the Presence of Heavy-tailed Asset Returns. *Contributions to modern Econometrics from data analysis to economic policy*. Boston, 2003
8. FOFACK, H.; NOLAN, J. P. Tail Behaviour, Modes and Other Characteristics of Stable Distributions. *Extremes*, 1999, vol. 2, no. 1, pp 39-58.
9. KHINDAROVA, I.; RACHEV S.; SCHWARTZ, E. Stable modeling of Value at Risk. *Mathematical and Computer Modelling*, 2001, no. 34, pp. 1223-1259.
10. KIDMOSE, P. Independent component analysis using the spectral measure for alpha-stable distributions. *Proceedings of IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, 2001, pp. 1-5.
11. NIKIAS C. L.; SHAO M. *Signal Processing with alpha-stable distributions and Applications*. New York, 1995.
12. NOLAN J. P. *Stable distributions: Models for Heavy Tailed Data*. Washington, 2002.
13. STOYANOV, S.; BIGLOVA, A.; RACHEV, S.; FABOZZI, F.J. An Empirical Examination of Daily Stock Return Distributions for U.S. Stocks. *Data Analysis and Decision Support*. Berlin, 2005.

1 PRIEDAS. PROGRAMOS NAUDOJIMO INSTRUKCIJA

Optimaliųjų portfelių sudarymui sukurta programa „Optimalūs portfeliai“ (žr. 1 pav.). Be to, programa dar skaičiuoja stabiliųjų ir normaliųjų skirstinių parametrų įverčius. Skaičiuojami vienmačio stabiliojo skirstinio parametrų įverčiai yra: $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$, daugiamačio – matricos Q įvertis, o normaliojo skirstinio – kovariacijų matrica.



1 pav. Programos „Optimalūs portfeliai“ langas

Programa paleidžiama taip: atsidaromas MATLAB paketas, nurodomas darbinis katalogas pavadinimu „Sasaja“, tada MATLAB komandų lauke įvedama komanda `>>sasaja`. Gauname sąsają su vartotoju, pavaizduotą 1 paveiksle. Duomenys, reikalingi programai, turi būti pateikti faile *akciju_grazos.txt*. Šiame faile kiekviena eilutė atitinka į portfelį įeinančių akcijų vienos dienos grąžos normą. Paspaudus mygtukus *Vienmaciai iverciai*, *Kovariaciju matrica*, *Matrica Q*, gauname stabiliojo skirstinio įverčius $\hat{\alpha}$ ir $\hat{\gamma}$, kovariacijų matricą ir matricos Q įverčius atitinkamai. Rezultatai išvedami į MATLAB komandų langą.

Paspaudus mygtuką *Skaiciuoti* ir prieš tai pasirinkę laukiamą sudaromo portfelio vienos dienos pelno normą, į MATLAB komandų langą išvedami į portfelį įeinančių akcijų svoriai, gauti pagal prielaida, kad akcijų grąžų skirstiniai yra normalieji ir stabilieji. Galima braižyti ir efektyviųjų portfelių kreives (mygtukai *Minimalios rizikos grafikas* ir *VaR grafikas*).

Paspaudus mygtuką *Apie...*, pasirodo langas *apie*, kuriame programa pateikia informaciją apie programą ir jos autorių (žr. 3 pav.), o mygtukas *Baigti* užveria programos langą.

2 PRIEDAS.
PROGRAMOS TEKSTAS

Funkcija *sasaja.m*

```
function varargout = sasaja(varargin)
% SASAJA Application M-file for sasaja.fig
%    FIG = SASAJA launch sasaja GUI.
%    SASAJA('callback_name', ...) invoke the named callback.

% Last Modified by GUIDE v2.0 28-May-2007 23:10:40

if nargin == 0  % LAUNCH GUI

      fig = openfig(mfilename,'reuse');

      % Use system color scheme for figure:
      set(fig,'Color',get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'));

      % Generate a structure of handles to pass to callbacks, and store it.
      handles = guihandles(fig);
      guidata(fig, handles);

    % kintamuju pradiniu reiksmiu priskyrimas
    pelnas = 0.06/100;
    handles.pelnas = pelnas;
    prielaida = 1;
    handles.prielaida = prielaida;
    guidata(fig,handles);

      if nargout > 0
            varargout{1} = fig;
      end

elseif ischar(varargin{1}) % INVOKE NAMED SUBFUNCTION OR CALLBACK

      try
            [varargout{1:nargout}] = feval(varargin{:}); % FEVAL switchyard
      catch
            disp(lasterr);
      end

end


%| ABOUT CALLBACKS:
%| GUIDE automatically appends subfunction prototypes to this file, and
%| sets objects' callback properties to call them through the FEVAL
%| switchyard above. This comment describes that mechanism.
%|
%| Each callback subfunction declaration has the following form:
%| <SUBFUNCTION_NAME>(H, EVENTDATA, HANDLES, VARARGIN)
%|
%| The subfunction name is composed using the object's Tag and the
%| callback type separated by '_', e.g. 'slider2_Callback',
%| 'figure1_CloseRequestFcn', 'axis1_ButtondownFcn'.
%|
%| H is the callback object's handle (obtained using GCBO).
%|
%| EVENTDATA is empty, but reserved for future use.
%|
%| HANDLES is a structure containing handles of components in GUI using
%| tags as fieldnames, e.g. handles.figure1, handles.slider2. This
```

```
%| structure is created at GUI startup using GUIHANDLES and stored in
%| the figure's application data using GUIDATA. A copy of the structure
%| is passed to each callback.  You can store additional information in
%| this structure at GUI startup, and you can change the structure
%| during callbacks.  Call guidata(h, handles) after changing your
%| copy to replace the stored original so that subsequent callbacks see
%| the updates. Type "help guihandles" and "help guidata" for more
%| information.
%|
%| VARARGIN contains any extra arguments you have passed to the
%| callback. Specify the extra arguments by editing the callback
%| property in the inspector. By default, GUIDE sets the property to:
%| <MFILENAME>('<SUBFUNCTION_NAME>', gcbo, [], guidata(gcbo))
%| Add any extra arguments after the last argument, before the final
%| closing parenthesis.

function varargout = baigti_Callback(h,eventdata,handles,varargin)
delete(handles.sasaja)
%-----------------------------------------------------------------
function varargout = apie_Callback(h,eventdata,handles,varargin)
apie
%-----------------------------------------------------------------
function varargout = vienmaciai_Callback(h,eventdata,handles,varargin)
R = skaitymas(0);
% Akciju pavadinimai:
Pavadinimai =
['ALT';'ANV';'ATK';'APG';'DKR';'GRG';'IVL';'KBL';'KJK';'KNF';'KTK';'LDJ';'LEL';'
LEN';'LFO';'LJL';'LLK';'LNS';'MNF';'NDL';'PTR';'PZV';'RSU';'RST';'SAB';'SAN';'SN
G';'SRS';'STU';'TEO';'UKB';'UTR';'VBL';'VDG';'VNG';'ZMP'];
%
%
[M,d] = size(R);
alfaa = [];
ismesti = []; % ismetamu akciju numeriai (ismetamos tos, kuriu alfa<1.1)
for i = 1:d
    XX = R(:,i);
    [par1 par2] = McCulloch(XX);
    if (par1<1.1)
        ismesti = [ismesti i];
    else
        alfaa = [alfaa; [par1 par2]];
    end
end
R(:,ismesti)=[];
Pavadinimai(ismesti,:)=[];
Pavadinimai
alfaa
X = R;
[M,d] = size(X);
%------------------------------------------------------------------
function varargout = kovariacijos_Callback(h,eventdata,handles,varargin)
R = skaitymas(0);
% Akciju pavadinimai:
Pavadinimai =
['ALT';'ANV';'ATK';'APG';'DKR';'GRG';'IVL';'KBL';'KJK';'KNF';'KTK';'LDJ';'LEL';'
LEN';'LFO';'LJL';'LLK';'LNS';'MNF';'NDL';'PTR';'PZV';'RSU';'RST';'SAB';'SAN';'SN
G';'SRS';'STU';'TEO';'UKB';'UTR';'VBL';'VDG';'VNG';'ZMP'];
%
%
[M,d] = size(R);
alfaa = [];
ismesti = []; % ismetamu akciju numeriai (ismetamos tos, kuriu alfa<1.1)
for i = 1:d
    XX = R(:,i);
```

```
    [par1 par2] = McCulloch(XX);
    if (par1<1.1)
        ismesti = [ismesti i];
    else
        alfaa = [alfaa; [par1 par2]];
    end
end
R(:,ismesti)=[];
Pavadinimai(ismesti,:)=[];
X = R;
[M,d] = size(X);
%---------------------------
%
disp('Kovariaciju matrica R/2:');
R = cov(X)/2
%---------------------------------------------------------------------------
function varargout = matricaQ_Callback(h,eventdata,handles,varargin)
R = skaitymas(0);
% Akciju pavadinimai:
Pavadinimai =
['ALT';'ANV';'ATK';'APG';'DKR';'GRG';'IVL';'KBL';'KJK';'KNF';'KTK';'LDJ';'LEL';'
LEN';'LFO';'LJL';'LLK';'LNS';'MNF';'NDL';'PTR';'PZV';'RSU';'RST';'SAB';'SAN';'SN
G';'SRS';'STU';'TEO';'UKB';'UTR';'VBL';'VDG';'VNG';'ZMP'];
[M,d] = size(R);
alfaa = [];
ismesti = []; % ismetamu akciju numeriai (ismetamos tos, kuriu alfa<1.1)
for i = 1:d
    XX = R(:,i);
    [par1 par2] = McCulloch(XX);
    if (par1<1.1)
        ismesti = [ismesti i];
    else
        alfaa = [alfaa; [par1 par2]];
    end
end
R(:,ismesti)=[];
Pavadinimai(ismesti,:)=[];
X = R;
[M,d] = size(X);
alfa = min(alfaa(:,1));
disp('Matrica Q:');
Q = matrixQ(X,alfa)
%--------------------------------------------------------------------------
function varargout = pelnas_txt_Callback(h,eventdata,handles,varargin)
pelnas_str = get(h,'string');
pelnas = str2double(pelnas_str);
handles.pelnas = pelnas/100;
guidata(h,handles);
%--------------------------------------------------------------------------
function varargout = skaiciuoti_Callback(h,eventdata,handles,varargin)
R = skaitymas(0);
% Akciju pavadinimai:
Pavadinimai =
['ALT';'ANV';'ATK';'APG';'DKR';'GRG';'IVL';'KBL';'KJK';'KNF';'KTK';'LDJ';'LEL';'
LEN';'LFO';'LJL';'LLK';'LNS';'MNF';'NDL';'PTR';'PZV';'RSU';'RST';'SAB';'SAN';'SN
G';'SRS';'STU';'TEO';'UKB';'UTR';'VBL';'VDG';'VNG';'ZMP'];
[M,d] = size(R);
alfaa = [];
ismesti = []; % ismetamu akciju numeriai (ismetamos tos, kuriu alfa<1.1)
for i = 1:d
    XX = R(:,i);
    [par1 par2] = McCulloch(XX);
    if (par1<1.1)
        ismesti = [ismesti i];
```

```
    else
        alfaa = [alfaa; [par1 par2]];
    end
end
R(:,ismesti)=[];
Pavadinimai(ismesti,:)=[];
X = R;
[M,d] = size(X);
alfa = min(alfaa(:,1));
m = mean(X)';
Q = sqrt(5)*matrixQ(X,alfa);
R = cov(X)/2;
mp = handles.pelnas;
%
disp('Normalusis portfelis:');
w1 = portfelisGMIN(R,m,mp) % normalusis portfelis
disp('Stabilusis portfelis:');
w2 = portfelisSMIN(Q,m,mp) % stabilusis portfelis
%------------------------------------------------------------------------
function varargout = prielaida_Callback(h,eventdata,handles,varargin)
prielaida = get(h,'Value');
handles.prielaida = prielaida;
guidata(h,handles);
%------------------------------------------------------------------------
function varargout = min_rizika_grafikas_Callback(h,eventdata,handles,varargin)
R = skaitymas(0);
% Akciju pavadinimai:
Pavadinimai =
['ALT';'ANV';'ATK';'APG';'DKR';'GRG';'IVL';'KBL';'KJK';'KNF';'KTK';'LDJ';'LEL';'
LEN';'LFO';'LJL';'LLK';'LNS';'MNF';'NDL';'PTR';'PZV';'RSU';'RST';'SAB';'SAN';'SN
G';'SRS';'STU';'TEO';'UKB';'UTR';'VBL';'VDG';'VNG';'ZMP'];
%
%
[M,d] = size(R);
alfaa = [];
ismesti = []; % ismetamu akciju numeriai (ismetamos tos, kuriu alfa<1.1)
for i = 1:d
    XX = R(:,i);
    [par1 par2] = McCulloch(XX);
    if (par1<1.1)
        ismesti = [ismesti i];
    else
        alfaa = [alfaa; [par1 par2]];
    end
end
R(:,ismesti)=[];
Pavadinimai(ismesti,:)=[];
X = R;
[M,d] = size(X);
%---------------------------
%
% Stabilieji parametrai
alfa = min(alfaa(:,1));
m = mean(X)';
Q = sqrt(5)*matrixQ(X,alfa);
w1 = [];
sigma1 = [];
vidurkis = [];
% normalieji parametrai
R = cov(X)/2;
w2 = [];
sigma2 = [];
%
mgal = max(m);
```

```
mpr = 0.0004;
mp = mpr;
mz = (mgal-mp)/50;
VaR_S = [];
VaR_G = [];
VaR_E1 = [];
VaR_E2 = [];
while mp<=mgal
    ww1 = portfelisSMIN(Q,m,mp); % stabilusis portfelis
    ww2 = portfelisGMIN(R,m,mp); % normalusis portfelis
    w1 = [w1;ww1'];
    w2 = [w2;ww2'];
    sig1 = sqrt(ww1'*Q*ww1);
    sig2 = (sqrt(ww2'*R*ww2));
    sigma1 = [sigma1;sig1];
    sigma2 = [sigma2;sig2];
    vidurkis = [vidurkis; mp];
    mp = mp + mz;
end
prielaida = handles.prielaida;
switch prielaida
case 1
    figure(1);
    plot(sigma2,vidurkis,'-k');
    xlabel('\sigma');
    ylabel('E(R_P)');
    title('Normalioji kreive');
case 2
    figure(2);
    plot(sigma1,vidurkis,'-r');
    xlabel('\gamma');
    ylabel('E(R_P)');
    title('Stabilioji kreive');
end
%-----------------------------------------------------------------------
function varargout = VaR_grafikas_Callback(h,eventdata,handles,varargin)
R = skaitymas(0);
% Akciju pavadinimai:
Pavadinimai =
['ALT';'ANV';'ATK';'APG';'DKR';'GRG';'IVL';'KBL';'KJK';'KNF';'KTK';'LDJ';'LEL';'
LEN';'LFO';'LJL';'LLK';'LNS';'MNF';'NDL';'PTR';'PZV';'RSU';'RST';'SAB';'SAN';'SN
G';'SRS';'STU';'TEO';'UKB';'UTR';'VBL';'VDG';'VNG';'ZMP'];
[M,d] = size(R);
alfaa = [];
ismesti = []; % ismetamu akciju numeriai (ismetamos tos, kuriu alfa<1.1)
for i = 1:d
    XX = R(:,i);
    [par1 par2] = McCulloch(XX);
    if (par1<1.1)
        ismesti = [ismesti i];
    else
        alfaa = [alfaa; [par1 par2]];
    end
end
R(:,ismesti)=[];
Pavadinimai(ismesti,:)=[];
X = R;
[M,d] = size(X);
%
c = 0.01;
% Stabilieji parametrai
% alfa = mean(alfaa(:,1));
alfa = min(alfaa(:,1));
m = mean(X)';
```

```
Q = sqrt(5)*matrixQ(X,alfa);
w1 = [];
sigma1 = [];
vidurkis = [];
% normalieji parametrai
R = cov(X)/2;
w2 = [];
sigma2 = [];
%
mgal = max(m);
mpr = 0.0004;
mp = mpr;
mz = (mgal-mp)/50;
VaR_S = [];
VaR_G = [];
VaR_E1 = [];
VaR_E2 = [];
while mp<=mgal
    ww1 = portfelisSMIN(Q,m,mp); % stabilusis portfelis
    ww2 = portfelisGMIN(R,m,mp); % normalusis portfelis
    w1 = [w1;ww1'];
    w2 = [w2;ww2'];
    sig1 = sqrt(ww1'*Q*ww1);
    sig2 = (sqrt(ww2'*R*ww2));
    sigma1 = [sigma1;sig1];
    sigma2 = [sigma2;sig2];
    vidurkis = [vidurkis; mp];
    VaR1 = VaRS(alfa,mp,sig1,c);
    VaR2 = VaRN(mp,sig2,c);
    VaR3 = VaRE(X*ww1,c);
    VaR4 = VaRE(X*ww2,c);
    VaR_S = [VaR_S;VaR1];
    VaR_G = [VaR_G;VaR2];
    VaR_E1 = [VaR_E1;VaR3];
    VaR_E2 = [VaR_E2;VaR4];
    mp = mp + mz;
end
prielaida = handles.prielaida;
switch prielaida
case 1
    figure(3);
    plot(VaR_G,vidurkis,'-k',VaR_E2,vidurkis,':k');
    xlabel('VaR_0_._0_1');
    ylabel('E(R_P)');
    legend('VaR_N','Empirine VaR',4);
    title('Normalioji kreive');
case 2
    figure(4);
    plot(VaR_S,vidurkis,'-r',VaR_E1,vidurkis,':r');
    xlabel('VaR_0_._0_1');
    ylabel('E(R_P)');
    legend('VaR_S','Empirine VaR',4);
    title('Stabilioji kreive');
end
```

Funkcija *a_va.m*

```
function a = a_va(va_iv)
% McCulloch iverciu skaiciavimo metodas
% pagal v_alfa reiksme, randama alfa reiksme
va = [2.439; 2.5; 2.6; 2.7; 2.8; 3; 3.2; 3.5; 4; 5; 6; 8; 10; 15; 25];
alfa = [2; 1.916; 1.808; 1.729; 1.664; 1.563; 1.484; 1.391; 1.279; 1.128; 1.029;
0.896; 0.818; 0.698; 0.593];
n = length(va);
```

```
a = 2;
if (va_iv < va(1))
    a = 2;
elseif (va_iv > va(n))
    a = 0.5;
else
    for i = 1:(n-1)
        if ((va_iv >= va(i))&(va_iv < va(i+1)))
            a = alfa(i) + (va_iv - va(i))*(alfa(i+1)-alfa(i))/(va(i+1)-va(i));
        end
    end
end
a;
```

Funkcija *a_vc.m*

```
function vc_iv = a_vc(a)
% McCulloch iverciu skaiciavimo metodas
% pagal alfa ivercio reiksme, randama v_c reiksme
alfa = [2; 1.9; 1.8; 1.7; 1.6; 1.5; 1.4; 1.3; 1.2; 1; 0.9; 0.8; 0.7; 0.6; 0.5];
vc = [1.908; 1.914; 1.921; 1.927; 1.933; 1.939; 1.946; 1.955; 1.965; 1.980; 2;
2.040; 2.098; 2.189; 2.337; 2.588];
n = length(alfa);
vc_iv = 1;
if (a < alfa(n))
    vc_iv = 2.588;
else
    for i = 1:(n-1)
        if ((a <= alfa(i))&(a > alfa(i+1)))
            vc_iv = vc(i) + (a-alfa(i))*(vc(i+1)-vc(i))/(alfa(i+1)-alfa(i));
        end
    end
end
```

Funkcija *apie.m*

```
function varargout = apie(varargin)
% APIE Application M-file for apie.fig
%    FIG = APIE launch apie GUI.
%    APIE('callback_name', ...) invoke the named callback.

% Last Modified by GUIDE v2.0 08-Jun-2005 01:40:42

if nargin == 0  % LAUNCH GUI

      fig = openfig(mfilename,'reuse');

    % Keiciama programos lango pozicija ekrane
    fig_dydis = get(fig,'Position');
    set(0,'Units','centimeters');
    ekrano_dydis = get(0,'ScreenSize');
    kaire = (ekrano_dydis(3) - fig_dydis(3))/2;
    apacia = (ekrano_dydis(4) - fig_dydis(4))/2;
    nauja_pozicija = [kaire,apacia,fig_dydis(3),fig_dydis(4)];
    set(fig,'Position',nauja_pozicija);

      % Generate a structure of handles to pass to callbacks, and store it.
      handles = guihandles(fig);
      guidata(fig, handles);

      if nargout > 0
```

```
            varargout{1} = fig;
      end

elseif ischar(varargin{1}) % INVOKE NAMED SUBFUNCTION OR CALLBACK

      try
            [varargout{1:nargout}] = feval(varargin{:}); % FEVAL switchyard
      catch
            disp(lasterr);
      end

end

% --------------------------------------------------------------------
function varargout = ok_button_Callback(h, eventdata, handles, varargin)
% Stub for Callback of the uicontrol handles.ok_button.
delete(handles.apie)
```

Funkcija *f_kvantilis.m*

```
function xf = f_kvantilis(XX,f);
% vektoriui XX apskaiciuojamas stabilaus skirstinio empirinis f-kvantilis
% Nikias, p. 59
x = sort(XX);
N = length(x);
for ii = 0:N
    if ((f >= ((2*ii-1)/(2*N)))&(f < ((2*ii+1)/(2*N))))
        i = ii;
    end
end
qi = (2*i-1)/(2*N);
qi1 = (2*i+1)/(2*N);
if (i == 0)
    xf = x(1);
elseif (i == N)
    xf = x(N);
else
    xf = x(i) + (x(i+1) - x(i))*(f-qi)/(qi1-qi);
end
```

Funkcija *kvantilisS.m*

```
function q = kvantilisS(alfa,c)
% Simetrinio stabiliojo skirstinio c-kvantilis. Cia galimos alfa reiksmes: 1.1
<= alfa <= 1.9
% Galimos c reiksmes: 0.1, 0.075, 0.05, 0.025, 0.01
if (c == 0.01)
    qq = [1.9 -3.6690672; 1.8 -4.2767922; 1.7 -5.1519379; 1.6 -6.2841009; 1.5 -
7.7364462; 1.4 -9.6588193; 1.3 -12.31255; 1.2 -16.160066; 1.1 -22.071387];
end
if (c == 0.025)
    qq = [1.9 -2.9337717; 1.8 -3.1583956; 1.7 -3.4731133; 1.6 -3.9055995; 1.5 -
4.4813665; 1.4 -5.2390673; 1.3 -12.31255; 1.2 -7.6445428; 1.1 -9.6509114];
end
if (c == 0.05)
    qq = [1.9 -2.4042722; 1.8 -2.5048815; 1.7 -2.637307; 1.6 -2.8142928; 1.5 -
3.051941; 1.4 -3.3698605; 1.3 -3.7946674; 1.2 -4.3686754; 1.1 -5.1646461];
end
if (c == 0.075)
    qq = [1.9 -2.0827521; 1.8 -2.1411783; 1.7 -2.2154919; 1.6 -2.3120095; 1.5 -
2.4395142; 1.4 -2.6097203; 1.3 -2.8380829; 1.2 -3.146429; 1.1 -3.5691576];
```

```
end
if (c == 0.1)
    qq = [1.9 -1.8430448; 1.8 -1.8802969; 1.7 -1.9265429; 1.6 -1.985262; 1.5 -
2.0614626; 1.4 -2.1621963; 1.3 -2.2971383; 1.2 -2.4796275; 1.1 -2.7292629];
end
alfa1 = (floor(alfa*10))/10;
alfa2 = alfa1+0.1;
k1 = find(qq(:,1)==alfa1);
k2 = k1-1;
q1 = qq(k1,2);
q2 = qq(k2,2);
q = q1+(alfa-alfa1)*(q2-q1)/(alfa2-alfa1);
```

Funkcija *matrixQ.m*

```
function Q = matrixQ(X,alfa)
% grazinama matrica Q - sub-Gauso vektoriaus matrica
[N,d] = size(X);
p = 1+(alfa-1)/4;
Rint = quad(@Rintegralas,0,10002,[],[],p);
for i = 1:d
    ri = X(:,i)-mean(X(:,i))*ones(N,1);
    for j = 1:d
        rj = X(:,j)-mean(X(:,j))*ones(N,1);
        vid1 = mean(ri.*(abs(rj).^(p-1)).*sign(rj));
        vid2 = mean(abs(rj).^p);
        sigma2 = (vid2*p*Rint/((2^(p-1))*gamma(1-p/alfa)))^(2/p);
        if (i ==j)
            QQ(i,j) = sigma2;
        else
            QQ(i,j) = sigma2*vid1/vid2;
        end
        QQ(i,j) = sigma2*vid1/vid2;
    end
end
Q = QQ;
```

Funkcija *McCulloch.m*

```
function [alfa,gama] = McCulloch(XX)
% duomenims - vektoriui XX - apskaiciuojami parametrai alfa ir gama pagal
McCulloch metoda
%
% kvantiliu skaiciavimas:
x05 = f_kvantilis(XX, 0.05);
x25 = f_kvantilis(XX, 0.25);
x75 = f_kvantilis(XX, 0.75);
x95 = f_kvantilis(XX, 0.95);
%
% v_alfa apskaiciavimas
va_iv = (x95 - x05)/(x75 - x25);
alfa = a_va(va_iv); % alfa ivertis
vc_iv = a_vc(alfa);
c = (x75 - x25)/vc_iv;
gama = c^alfa; % gama ivertis
```

Funkcija *portfelisGMIN.m*

```
function w = portfelisGMIN(R,m,mp)
% Optimalus normalus portfelis
```

```
% R-kovariaciju matrica, m-vidurkiu vektorius-stulpelis, mp - laukiama portfelio
graza.
[d,l] = size(R);
Aeq = [m';ones(1,d)];
beq = [mp;1];
lb = zeros(d,1);
ub = ones(d,1);
options = optimset('LargeScale','off');
w = quadprog(R,[],[],[],Aeq,beq,lb,ub,[],options);
clc
```

Funkcija *portfelisSMIN.m*

```
function w = portfelisSMIN(Q,m,mp)
% Optimalus stabilus portfelis
% Q-alfa-kovariaciju matrica, m-vidurkiu vektorius-stulpelis, mp - laukiama
portfelio graza.
Q = (Q+Q')/2;
[d,l] = size(Q);
Aeq = [m';ones(1,d)];
beq = [mp;1];
lb = zeros(d,1);
ub = ones(d,1);
options = optimset('LargeScale','off');
w = quadprog(Q,[],[],[],Aeq,beq,lb,ub,[],options);
clc
```

Funkcija *Rintegralas.m*

```
function f = Rintegralas(u,p)
% p - parametras: 1<p<alfa<2
f = (u.^(-p-1)).*(sin(u)).^2;
```

Funkcija *skaitymas.m*

```
% skaitymas is txt failo ir akciju kainu grazu laike kitimo grafiku braizymas
(jei braizyti > 0)
function r = skaitymas(braizyti)
fid = fopen('akciju_grazos.txt','r');
R = fscanf(fid, '%f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f
%f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f %f',[36 Inf]);
fclose(fid);
R=R';
Pavadinimai =
['ALT';'ANV';'ATK';'APG';'DKR';'GRG';'IVL';'KBL';'KJK';'KNF';'KTK';'LDJ';'LEL';'
LEN';'LFO';'LJL';'LLK';'LNS';'MNF';'NDL';'PTR';'PZV';'RSU';'RST';'SAB';'SAN';'SN
G';'SRS';'STU';'TEO';'UKB';'UTR';'VBL';'VDG';'VNG';'ZMP'];
[M,N]=size(R);
T=1:1:M;
T = T';
if (braizyti > 0)
    for i=1:36
        figure(i);
        plot(T,R(:,i));
        xlabel('t');
        ylabel('R_t');
        title(Pavadinimai(i,:));
        axis fill;
    end
end
```

```
r = R;
```

Funkcija *VaRE.m*

```
function VaR = VaRE(R,c)
% Empirinis VaR. R - grazu vektorius, c - nepalankiu ivykiu tikimybe
N = length(R);
R1 = R(1);
el = floor(N*c)+1;
% if (c>0.05)
%     RR = sort(R);
% else
%     RR = sort(R)/pi;
% end
RR = sort(R);
VaR = -RR(el);
```

Funkcija *VaRN.m*

```
function VaR = VaRN(m,sigma,c)
% Normaliojo VaR skaiciavimas. Parametrai: m - vidurkis, sigma - st. nuokrypis,
c - nepalankiu ivykiu tikimybe
q = sqrt(2)*erfinv(1-2*c);
VaR = m+sigma*q;
```

Funkcija *VaRS.m*

```
function VaR = VaRS(alfa,m,gama,c)
% Stabiliojo VaR skaiciavimas. Parametrai: alfa, m - vidurkis, gama - sklaidos
parametras, c - nepalankiu ivykiu tikimybe
q = kvantilisS(alfa,c);
VaR = m-gama*q;
% q = aproxkvantilis(alfa,c);
% VaR = m+gama*q;
```